



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS  
COLEGIO DE MATEMÁTICAS

## "UN MÉTODO NUMÉRICO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES"

### TESIS

Para obtener el título de  
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA  
**Constantino Molina Vázquez**

Director  
**DR. JORGE BUSTAMANTE GONZÁLEZ**

Puebla, Pue., 29 de septiembre de 2011.

# ÍNDICE

## INTRODUCCIÓN 1

1. NOTACIONES Y PROPIEDADES 6
  - 1.1 ECUACIÓN A ESTUDIAR 6
  - 1.2 PARTICIONES DE LA UNIDAD 6
  - 1.3 SUCESIÓN DE APROXIMANTES 8
2. SOLUBILIDAD DE LAS ECUACIONES 13
  - 2.1 EXISTENCIA Y UNICIDAD 13
  - 2.2 ESTIMACIÓN DE ERROR 16
3. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL 17
  - 3.1 EL ALGORITMO Y EL PROGRAMA 17
  - 3.2 LOS RESULTADOS 24
4. CONCLUSIONES 31

## BIBLIOGRAFÍA 32

# INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones integrales son aquellas cuyas incógnitas son funciones sometidas al operador de integración y a operaciones algebraicas. Ejemplos de tales ecuaciones son:

$$\int_a^b M(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (0.1)$$

$$f(x) + \int_a^b M(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (0.2)$$

$$f(x) + \int_a^x M(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (0.3)$$

en las que  $M$  es función de dos variables,  $g$  lo es de una variable (cada una puede o no ser continua) y  $f$  es la función incógnita. Las ecuaciones (0.1) y (0.2) son llamadas del tipo Fredholm, del primer y del segundo tipo respectivamente, y la ecuación (0.3) es llamada del tipo Volterra. Obsérvese que, desde el punto de vista formal, la ecuación (0.3) se puede ver como casos particulares de la ecuación (0.2) ( $M(x, y) = 0$  si  $y > x$ ). Sin embargo la ecuación puede ser sometida a tratamientos muy especiales.

Muchos problemas de la mecánica, de la física matemática y de la tecnología nos llevan a la consideración de ecuaciones del tipo (0.2). En el proceso de la búsqueda de soluciones de estas ecuaciones se ha desarrollado la teoría de los operadores compactos. No siempre es posible encontrar la solución en cuadraturas; es necesario el desarrollo de métodos aproximados de resolución. Los métodos aproximados que nos interesan son aquellos factibles de ser realizados bajo implementaciones computacionales sencillas y de tiempo de ejecución aceptablemente corto. En este trabajo se persiguen dos objetivos. El primero es el diseño de un esquema de resolución aproximada para esas mismas ecuaciones. El segundo es la creación de un algoritmo que haga efectivo ese esquema. Para mostrar cómo funciona nuestro algoritmo se ha realizado un programa en lenguaje Pascal y algunas corridas para ecuaciones concretas. Tenemos la certeza de que esta implementación es buena teniendo en cuenta el respaldo de la teoría.

Todos los esquemas de solución aproximada de ecuaciones integrales, de un modo u otro, se basan en construir una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  que, bajo una cierta noción de convergencia, se aproximen a la solución de la ecuación. Los métodos comienzan -esto es, aparecen las alternativas- al considerar los siguientes aspectos:

1. La elección de un espacio para buscar las soluciones.
2. El modo de elegir el aproximante  $f_n$ .
3. El modo de discretizar el problema.

El primer punto es forzado en toda la teoría contemporánea de las ecuaciones. Desde el punto de vista estructural la elección de los espacios funcionales involucrados está estrechamente relacionado con los coeficientes del problema, esto es, con la función  $M(x, y)$ , que en lo sucesivo llamaremos Kernel o núcleo (no confundir con el Kernel de una aplicación lineal) y la función  $g(x)$ , que en lo sucesivo llamaremos término independiente. La elección del espacio funcional se hace de modo que se asegure la existencia de al menos una solución para la ecuación estudiada.

Proponer un método de resolución aproximada es, en esencia, el dar una función  $f_n$  para ser utilizada en lugar de la solución real o exacta. Es aquí donde aparecen las principales diferencias. Por ejemplo, para algunas ecuaciones se puede encontrar una fórmula exacta para la solución, pero esta fórmula puede venir por expresiones que envuelven un número infinito de operaciones matemáticas (sumas, potenciaciones, cálculo de integrales, etc.). Es claro que tales soluciones exactas, desde el punto de vista práctico, no resuelven el problema, por lo menos para el desarrollo actual de los métodos de cálculo computacionales. Como una muestra de esto se pueden ver las ecuaciones de Fredholm del tipo

$$f(x) - \lambda \int_a^b M(x, s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [a, b] \quad (0.4)$$

donde para  $|\lambda| < \frac{1}{B}$  ( $B^2 = \int_a^b \int_a^b |M^2(x, s)| ds dx$ ) se sabe que la ecuación tiene solución única, y que ésta viene dada por la expresión

$$f(x) = g(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r (K^r g)(x), \quad x \in [a, b] \quad (0.5)$$



donde para  $r \in \mathbb{N}$  se tiene la integral múltiple

$$(K^r g)(x) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b}_{r \text{ veces}} M(x, y_1) M(y_1, y_2) \cdots M(y_{r-1}, y) g(y) dy_{r-1} dy_{r-2} \cdots dy_1 dy.$$

Basta con observar el ejemplo anteriormente citado para convencerse de que si se desea proponer soluciones aproximadas que tengan algún sentido práctico entonces la "filosofía" con respecto al tratamiento de las ecuaciones en el análisis se debe cambiar. Aun cuando se tenga la convergencia uniforme de la serie (0.5), y se cuente con un estimado del orden de convergencia, el procedimiento de cálculo puede ser muy ineficiente.

Finalmente, en los métodos de solución aproximada es necesario introducir un modo de eliminar a la integral que aparece en la formulación del problema. Esto puede lograrse por diversas vías como pueden ser:

1. Incluir algún sistema de cálculo aproximado de integrales .
2. El conocimiento a priori de ciertos valores aproximados de las integrales.
3. Realizar suposiciones sobre ciertas propiedades del Kernel que faciliten el cálculo aproximado de las integrales.

Las diversas elecciones pueden entremezclar ideas. En la literatura consultada se suelen clasificar los siguientes esquemas:

1. Métodos recursivos. Un método recursivo consiste en hallar una sucesión de funciones tal que cada elemento de ella se obtiene a partir del elemento inmediato anterior y el primer elemento es dado de alguna manera, arbitraria o determinada, y la finalidad de este proceso es lograr que esta sucesión de funciones converja en norma a la solución de la ecuación original. Entre los métodos recursivos es muy popular el que se deriva de utilizar el teorema de punto fijo de Banach para aplicaciones contractantes. Dos de las grandes limitaciones del empleo de técnicas de este tipo en la resolución de ecuaciones integrales son las siguientes: a) Para lograr que el operador asociado sea contractante se requiere de grandes limitaciones sobre el Kernel; b) las soluciones

aproximadas buscadas por este método requieren de la iteración del operador integral asociado, por lo cual la propagación de los errores crece con  $n$  al tenerse que calcular, en forma aproximada, integrales a partir de valores aproximados.

2. Aproximación por kérneles degenerados. En un método de este tipo, se sustituye a la función  $M(x, y)$  por una suma de la forma

$$a_1(x)b_1(y) + a_2(x)b_2(y) + \dots + a_r(x)b_r(y)$$

de modo que el problema se reduzca a resolver un sistema de ecuaciones lineal y finito. Tales sumas finitas se pueden obtener si se conoce que el núcleo está en un espacio de Hilbert producto. La dificultad de su aplicación radica en que se requiere del previo conocimiento de un desarrollo para el núcleo. Pero es efectivo cuando se conoce, a priori, la existencia de tal descomposición, pues en este caso la variable  $x$  no aparece bajo el signo de integración. Se tiene aquí el método de interpolación y el método de expansiones.

3. Métodos de cuadratura. Son usados con frecuencia para resolver ecuaciones del tipo (0.2). Lo primordial en ellos es sustituir al operador de integración  $\int_a^b M(x, y)(\cdot)dy$  por un operador de discretización  $\sum_{j=1}^m \alpha_j^n(\cdot)$  que reduzca el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones lineal y finito. La solución aproximada converge en norma a la solución de la ecuación original. Entre estos métodos está el de Nystrom.
4. Métodos proyectivos. Se describe aquí la solución aproximada de una ecuación integral de los tipos ya citados mediante su proyección en subespacios, que para fines prácticos de cálculo se asumen de dimensión finita. Los subespacios son tomados de modo que se tenga la convergencia en norma de las soluciones aproximadas a la solución de la ecuación original. Aquí se cuenta con el método de colocación, con el de Galerkin y con el que proponemos en este trabajo.

Para consulta de estos métodos, véase la referencia [2].

Explicamos ahora nuestro trabajo por capítulos. En el primero se presentan las notaciones y los entes matemáticos que utilizaremos durante todo el trabajo (entre ellos el operador y la función aproximantes), así como las

propiedades algebraicas, las de continuidad y las de convergencia que cumplen para nuestro fin. En el segundo capítulo se explican las condiciones de suficiencia para garantizar la existencia y la unicidad de las soluciones de la ecuación del tipo (0.2) que atacaremos, y lo mismo para la ecuación aproximante. En el tercer capítulo presentamos el algoritmo de nuestro método, su programa Pascal asociado y los resultados que arrojó para algunas ecuaciones de prueba. Finalmente, en el cuarto capítulo exponemos las conclusiones de nuestro trabajo y hacemos un esbozo de las ideas tentativas de realizarse en caso de que partamos del presente para ampliarlo a una tesis de Maestría.

# 1. NOTACIONES Y PROPIEDADES

## 1.1. ECUACIÓN A ESTUDIAR

En este trabajo analizaremos ecuaciones integrales del tipo

$$f(x) + \int_a^b M(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (1.1)$$

donde  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que cualquiera que sea  $f$  real e integrable en  $[0, 1]$  (en el sentido de Riemann) se tiene  $\forall x \in [0, 1]$ , la integral

$$(Kf)(x) = \int_0^1 M(x, y)f(y)dy \quad (1.2)$$

existe. Además, si  $f$  es continua, la integral anterior define una función continua (en particular las condiciones anteriores se logran si  $M$  es una función continua en  $[0, 1] \times [0, 1]$ ).

Para la ecuación (1.1) se diseñará un esquema aproximado de solución. El primer paso consiste en fijar, para cada  $n$  (natural) una partición de la unidad compuesta por funciones continuas y lineales a trozos.

## 1.2. PARTICIONES DE LA UNIDAD

Durante todo el trabajo consideraremos fijas las siguientes notaciones:

- Sea  $X$  el espacio de las funciones reales y continuas que actúan sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Aunque algunos de los resultados aquí obtenidos se pueden extender a espacios más generales, nos limitaremos a las funciones continuas. La restricción al intervalo  $[0, 1]$  es sólo por comodidad



en las notaciones; mediante una transformación lineal se pueden llevar los resultados a cualquier intervalo compacto  $[a, b]$ .

- Sea  $M : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función fija dada.
- Denotemos por  $K : X \rightarrow X$  al operador asociado a  $M$  definido por la igualdad (1.2) para  $f \in X$ .
- Para todo  $n$  (natural),  $n > 2$ , y  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , hagamos

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{k-1}{n} \text{ ó } \frac{k+1}{n} \leq x \\ 1 - k + nx & \text{si } x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}) \\ 1 + k - nx & \text{si } x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \end{cases} \quad (1.1)$$

Puede verse que  $\{f_{n,k}\}_{k=0}^n$  constituye una partición de la unidad. En efecto, se cumple el siguiente

**LEMA 1.2.1.** *Sea  $n > 2$ ; entonces*

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_{n,k}(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

**DEMOSTRACIÓN:** Fijemos  $n > 2$  y  $x \in [0, 1]$ , entonces existe un y sólo un  $k_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $x \in [\frac{k_0}{n}, \frac{k_0+1}{n})$  (nótese que si  $k_0 = n$ , entonces  $x = 1$ ).

En virtud de la definición de las funciones  $f_{n,k}$ ,  $s_n(x)$  es una suma en la que todos los términos valen cero salvo, quizá, dos de ellos. Luego

$$\begin{aligned} s_n(x) &= f_{n,k_0}(x) + f_{n,k_0+1}(x) \\ &= (1 + k_0 - nx) + (1 - (k_0 + 1) + nx) \\ &= 1 \end{aligned}$$

tal y como se aseveró. □

### 1.3. SUCESIÓN DE APROXIMANTES

Las particiones de la unidad facilitan la construcción de aproximantes de funciones dadas, cumpliendo una doble condición: por un lado se obtiene de manera simple la convergencia de los aproximantes, y por otro las normas de los operadores lineales asociados permanecen uniformemente acotadas. Veamos esto en detalle.

- Sea  $L_n : X \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , un operador definido por la igualdad

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(x), \quad x \in [0, 1], \quad f \in X \quad (1.4)$$

- Sea  $K_n : X \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , un operador definido por la igualdad

$$K_n := K \circ L_n \quad (1.5)$$

donde  $K$  viene dado por (1.2). Es decir, si  $f \in X$  entonces

$$\begin{aligned} (K_n f)(x) &= (K(L_n f))(x) \\ &= \int_0^1 M(x, y) \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(y) dy, \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

donde las funciones  $f_{n,k}$  vienen dadas por (1.3). Intercambiando el orden de la integral y la sumatoria, tenemos que

$$(K_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 M(x, y) f_{n,k}(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Ahora bien, con estas definiciones, sustituyendo al operador  $K$  por el operador aproximante  $K_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) y a la función  $f$  por la función aproximante  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) y utilizando la última igualdad tenemos que la ecuación (1.1) se transforma en la nueva ecuación

$$f(x) + \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 M(x, y) f_{n,k}(y) dy = g(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

Antes de estudiar las propiedades de estos operadores recordemos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 1.3.1.** *Sea  $f$  una función real y continua que actúa sobre el intervalo  $[a, b]$  y sea  $0 < \delta \leq b - a$ . Se considera como módulo de continuidad de  $f$  a la función*

$$w_f(\delta) := \max_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x - y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|.$$

Se conoce que el módulo de continuidad tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- (a)  $0 \leq w_f(\delta) \leq 2\|f\|$ , donde  $\|f\|$  es la norma del supremo.
- (b) Si  $0 < \alpha \leq \beta \leq b - a$ , entonces  $w_f(\alpha) \leq w_f(\beta)$  (es decir, el módulo de continuidad es una función monótona no decreciente en  $\delta$ ).

$$(c) \quad \forall x, y \in [a, b]: \quad |f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|). \quad (1.7)$$

$$(d) \quad w_f(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

□

**LEMA 1.3.2.** *Si  $f \in X$  entonces  $L_n f$  converge uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Por la definición de norma de una función tenemos que

$$\begin{aligned} \|f - L_n f\| &= \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - (L_n f)(x)| \\ &= \max_{x \in [0, 1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(x) \right|. \end{aligned}$$

Usando el lema (1.2.1),

$$\begin{aligned}\|f - L_n f\| &= \max_{x \in [0,1]} \left| f(x) \sum_{k=0}^n f_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(x) \right| \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=0}^n \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] f_{n,k}(x) \right|.\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular:

$$\|f - L_n f\| \leq \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^n \left| \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] f_{n,k}(x) \right|.$$

Como las funciones  $f_{n,k}$  son no negativas:

$$\|f - L_n f\| \leq \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| f_{n,k}(x).$$

Según las propiedades de las funciones  $f_{n,k}$ , hallar el valor máximo en  $[0, 1]$  de la función del lado derecho de la expresión anterior equivale a tomar los valores máximos de ella en cada subintervalo  $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]$  y luego hallar el máximo de entre estos  $n$  valores. Es decir:

$$\|f - L_n f\| \leq \max_{l=0,1,2,\dots,n-1} \max_{x \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]} \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| f_{n,k}(x).$$

Por un argumento análogo a otro usado en el lema (1.2.1), tenemos que en esta suma todos los términos valen cero, salvo quizá dos de ellos:

$$\|f - L_n f\| \leq \max_{l=0,1,2,\dots,n-1} \max_{x \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]} \left( |f(x) - f(\frac{l}{n})| f_{n,l}(x) + |f(x) - f(\frac{l+1}{n})| f_{n,l+1}(x) \right).$$

Como  $0 \leq f_{n,k}(x) \leq 1 \forall x$ , usando (1.7) tenemos que

$$\|f - L_n f\| \leq \max_{l=0,1,2,\dots,n-1} \max_{x \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]} \left( w_f(|x - \frac{l}{n}|) + w_f(|x - \frac{l+1}{n}|) \right).$$

Mas  $|x - \frac{l}{n}| \leq \frac{1}{n} \forall l$ , pues  $\frac{1}{n}$  es la norma de la partición de  $[0, 1]$  en los intervalos  $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]$ . Entonces, según la propiedad (b) del módulo de continuidad:



$$\begin{aligned}
\|f - L_n f\| &\leq \max_{l=0,1,2,\dots,n-1} \max_{x \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n})} \left( w_f\left(\frac{1}{n}\right) + w_f\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \max_{l=0,1,2,\dots,n-1} \max_{x \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n})} 2w_f\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Como  $2w_f(\frac{1}{n})$  no depende de  $l$  ni de  $x$ , entonces

$$\|f - L_n f\| \leq 2w_f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ahora, en correspondencia con (1.8),  $\|f - L_n f\| \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ , lo cual prueba que  $L_n f$  converge a  $f$  uniformemente.  $\square$

**LEMA 1.3.3.** *Para  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 2$ ),  $L_n : X \rightarrow X$  es continuo y además  $\|L_n\| = 1$  (donde  $\|L_n\|$  indica la norma del operador  $L_n$  como operador lineal y continuo).*

DEMOSTRACIÓN: Por definición

$$\begin{aligned}
\|L_n\| &= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \|L_n f\| \\
&= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} |(L_n f)(x)| \\
&= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(x) \right|.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\|L_n\| \leq \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) f_{n,k}(x) \right|.$$

Como  $\forall n, k$   $|f(\frac{k}{n})| \leq \|f\| \leq 1$  y las funciones  $f_{n,k}$  son no negativas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|L_n\| &\leq \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^n \|f\| f_{n,k}(x) \\
&= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^n f_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

Por el lema (1.2.1):

$$\begin{aligned}
\|L_n\| &\leq \max_{x \in [0,1]} 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Luego  $\|L_n\| \leq 1$ . Con esto se tiene la continuidad.

Probemos que la igualdad se cumple. Para esto, tomemos la función constante  $f_0(x) := 1 \forall x \in [0, 1]$ . Luego

$$\begin{aligned}
\|L_n f_0\| &= \max_{x \in [0,1]} |(L_n f_0)(x)| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Según el lema anterior y (1.5), se tiene el siguiente resultado.

**COROLARIO 1.3.4.** *Si  $K_n$  y  $K$  son dados por (1.5) y (1.2), entonces*

$$\|K_n\| \leq \|K\| \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

**DEMOSTRACIÓN:** Como  $K_n = K \circ L_n$ , aplicando las propiedades de norma de operadores tenemos que

$$\begin{aligned}
\|K_n\| &= \|K_n \circ L_n\| \\
&\leq \|K\| \|L_n\|.
\end{aligned}$$

Y como  $\|L_n\| = 1$ , obtenemos el resultado.

□

## 2. SOLUBILIDAD DE LAS ECUACIONES

### 2.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Gran parte de los métodos aproximados de resolución de ecuaciones parte del supuesto de que se conoce la existencia (y en algunos casos la unicidad) de soluciones. En este apartado, sin intentar presentar las condiciones más generales posibles, analizaremos la existencia de soluciones de las ecuaciones (1.1) y (1.6).

**LEMA 2.1.1.** *Sea  $K$  dado por (1.2) y supongamos que  $M$  es tal que  $K : X \rightarrow X$  y existe  $\alpha > 0$  tal que  $\int_0^1 |M(x, y)|^2 dy \leq \alpha$  para toda  $x \in [0, 1]$ . Entonces  $K$  es continuo y  $\|K\| \leq \sqrt{\alpha}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Es conocido que  $K$  es continuo (ver referencia [5]). Ahora bien, por definición,

$$\begin{aligned} \|K\| &= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \|Kf\| \\ &= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0, 1]} |(Kf)(x)| \\ &= \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^1 M(x, y) f(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Mas

$$\left| \int_0^1 M(x, y) f(y) dy \right| \leq \int_0^1 |M(x, y) f(y)| dy$$

$$\leq \left( \int_0^1 |M(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

por la desigualdad de Hölder. Luego

$$\|K\| \leq \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} \left[ \left( \int_0^1 |M(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \right].$$

Si  $\|f\| \leq 1$ , entonces  $|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0, 1]$ , y así  $\int_0^1 |f(y)|^2 dy \leq 1$ .

Usando la hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \|K\| &\leq \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \max_{x \in [0,1]} [(\alpha^{1/2})(1^{1/2})] \\ &= \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

□

El estimado dado en el lema anterior es exacto. En efecto, si  $M(x, y) = l$  ( $l$  constante positiva) y  $\alpha = l^2$ , entonces  $\|K\| \leq l$  según el lema. Y si  $f \equiv 1$

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \int_0^1 l f(y) dy \\ &= l \end{aligned}$$

y así

$$\max_{x \in [0,1]} |(Kf)(x)| = l$$

de donde  $\|K\| = \sqrt{\alpha}$ .

**LEMA 2.1.2.** *Bajo las hipótesis del lema anterior, si  $\alpha < 1$  entonces  $\forall g \in X$  la ecuación (1.1) tiene una y sólo una solución.*



DEMOSTRACIÓN: Se conoce que si  $J : X \rightarrow X$  entonces

$$(I - J)(I + J + J^2 + \dots + J^n) = I - J^{n+1}.$$

donde  $I$  es el operador identidad. Tomando  $J = -K$  se tiene que

$$(I + K)(I - K + K^2 - \dots + (-1)^n K^n) = I - (-1)^{n+1} K^{n+1}.$$

Según el lema (2.1.1), tenemos que  $\|K\| \leq \sqrt{\alpha} < 1$ . Luego  $I - (-1)^{n+1} K^{n+1}$  converge (en norma) a  $I$ , es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (I + K)(I - K + K^2 - \dots + (-1)^n K^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - (-1)^{n+1} K^{n+1}) \\ &= I \end{aligned}$$

Como la serie infinita  $I - K + K^2 - K^3 + \dots$  converge en el espacio de los operadores lineales y continuos de  $X$  en  $X$ , define un operador que es el inverso de  $I + K$  y por lo tanto la ecuación (1.1) tiene la solución

$$f = (I - K + K^2 - K^3 + \dots)g.$$

y es única. □

**LEMA 2.1.3.** *Bajo las hipótesis del lema (2.1.1), si  $\alpha < 1$  la ecuación (1.6) tiene una y sólo una solución para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $g \in X$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por la hipótesis y el lema (2.1.1) tenemos que  $\|K\| \leq \alpha < 1$ , y por el corolario (1.3.4) que  $\|K_n\| \leq \|K\|$ . Luego  $\|K_n\| \leq \alpha < 1$ . Procediendo como en el lema anterior encontramos que la ecuación (1.6) tiene la solución

$$f_n = (I - K_n + K_n^2 - K_n^3 + \dots)g.$$

y es única para cada  $n \in \mathbb{N}$ . □

En adelante, y para fines computacionales, tomemos a  $\sqrt{\alpha}$  como la menor de estas cotas de  $\|K\|$  dadas en el lema (2.1.1), es decir, hagamos

$$\alpha = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |M(x, y)|^2 dy. \quad (2.1)$$

## 2.2. ESTIMACIÓN DE ERROR

Retomemos la ecuación (1.1) en su forma funcional:

$$f + Kf = g$$

y hagamos lo mismo para la ecuación (1.6):

$$f_n + K_n f_n = g.$$

Unos cálculos sencillos nos llevan a que

$$(I + K_n)(f_n - f) = (K_n - K)f.$$

Si a esto añadimos el que se cumplan las condiciones dadas en los teoremas de la sección anterior entonces

$$f_n - f = (I + K_n)^{-1}(K_n - K)f.$$

Lo que implica, aplicando la norma a ambos miembros de esta última igualdad, la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &\leq \|(I + K_n)^{-1}\| \cdot \|(K_n - K)f\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|K_n\|} \cdot \|K\| \cdot \|L_n f - f\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha} \cdot 2w_f\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Lo que finalmente nos dice que

$$\|f_n - f\| \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} w_f\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.2)$$

Como  $w_f(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (propiedad (d) del módulo de continuidad) y  $\sqrt{\alpha}$  es constante, es claro que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto nos da una cota para el error de aproximación de  $f_n$  a  $f$ . La desventaja de esta cota es que debemos conocer la función  $f$  o al menos el módulo de continuidad de ésta. Veamos, en el siguiente capítulo, cómo se emplea esta cota de error para algunos ejemplos concretos.

### 3. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

En este capítulo veremos lo siguiente:

- a) La forma de discretizar la ecuación aproximante a fin de prepararla para su análisis numérico;
- b) El algoritmo usado para tal análisis;
- c) El programa Pascal asociado a este algoritmo y que nos lleva a conocer la solución discreta de la ecuación;
- d) Los resultados que arrojó este programa.

Para la parte del inciso b) se usaron dos algoritmos auxiliares:

- Cálculo de integrales de una variable por la regla de Simpson compuesta, y
- Resolución de sistemas lineales cuadrados por eliminación gaussiana con pivoteo escalado de columna.

Para consulta de estos algoritmos, véase la referencia [3].

En lo tocante a nuestro algoritmo, creemos que el uso de éste es preferible al uso de un algoritmo basado en el cálculo de series infinitas debido a que la propagación de errores es menor en el primero que en el segundo.

#### 3.1. EL ALGORITMO Y EL PROGRAMA

En la ecuación (1.6) podemos sustituir a la función incógnita  $f$  por la función aproximante  $f_n$  (la cual será también incógnita en dicha ecuación) para llegar

a la nueva ecuación

$$f_n(x) + \sum_{k=0}^n f_n\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 M(x, y) f_{n,k}(y) dy = g(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Sea  $x_0, x_1, \dots, x_n$  una partición creciente del intervalo  $[0, 1]$ . Evaluando la expresión (3.1) en estos puntos hallamos que

$$f_n(x_l) + \sum_{k=0}^n f_n\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 M(x_l, y) f_{n,k}(y) dy = g(x_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Haciendo  $x_l := \frac{l}{n} \forall l$  entonces (3.2) toma la forma

$$f_n\left(\frac{l}{n}\right) + \sum_{k=0}^n f_n\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 M\left(\frac{l}{n}, y\right) f_{n,k}(y) dy = g\left(\frac{l}{n}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

que es un sistema lineal cuadrado de orden  $n + 1$  y cuyas incógnitas son los valores  $f_n\left(\frac{k}{n}\right)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Ésta es la expresión sobre la cual realizaremos nuestro análisis numérico. El algoritmo usado para este fin es el siguiente:

ENTRADA  $n$  (número de intervalos de la partición de  $[0, 1]$ ).

SALIDA  $y_0 = f_n\left(\frac{0}{n}\right)$ ,  $y_1 = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $y_2 = f_n\left(\frac{2}{n}\right)$ ,  $\dots$ ,  $y_n = f_n\left(\frac{n}{n}\right)$  (valores de la función aproximante en los puntos de cuadratura).

Paso 1 ENTRADA  $n \in N$ ;

Paso 2 Hacer:

$$\text{i) } c_l := g\left(\frac{l}{n}\right)$$

$$\text{ii) } \alpha_{l,k} := \int_0^1 M\left(\frac{l}{n}, y\right) f_{n,k}(y) dy$$

$$\text{iii) } \beta_{l,k} := \delta_k^l + \alpha_{l,k}$$

para  $l, k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;

Paso 3 Resolver el sistema

$$\sum_{k=0}^n \beta_{l,k} y_k = c_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n;$$

Paso 4 SALIDA  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$   
PARAR.

El programa Pascal asociado a este algoritmo es el siguiente:

```
program ecint;
  const
    nmax=55;
  type
    matriz=array[0..nmax,0..nmax] of real;
    vectorreal=array[0..nmax] of real;
    vectorentero=array[0..nmax] of integer;
  var
    n,l,j,k,delta:integer;
    alfa,b,c:matriz;
    x,y,error:vectorreal;
    w,w1,erroresp,extra:real;
  function ker(x,y:real):real;
  begin
    ker:=x*y
  end;
  function efe(x:real):real;
  begin
    efe:=x
  end;
  function raizdealfa:real;
  begin
    raizdealfa:=1/sqrt(3)
  end;
  function modulo:real;
  begin
    modulo:=1/n
  end;
  function g(x:real):real;
  begin
    g:=4*x/3;
  end;
```



```

function efeneka(x:real):real;
begin
    if  $(x \leq (k-1)/n)$  or  $((k+1)/n < x)$ 
    then
        efeneka:=0;
    if  $((k-1)/n \leq x)$  and  $(x < (k/n))$ 
    then
        efeneka:= $1-k+n*x$ ;
    if  $((k/n) \leq x)$  and  $(x < (k+1)/n)$ 
    then
        efeneka:= $1+k-n*x$ 
    end;
function simpsonc:real;
var
    h,x1,x2,paso:real;
    m,i:integer;
begin
    m:=40;
    h:= $1/m/n$ ;
    x1:=0;
    x2:=0;
    for i:=1 to  $2*m-1$  do
        begin
            paso:= $(k-1)/n+i*h$ ;
            if  $i/2=\text{int}(i/2)$ 
            then
                x2:= $x2+\text{ker}(l/n,paso)*\text{efeneka}(paso)$ 
            else
                x1:= $x1+\text{ker}(l/n,paso)*\text{efeneka}(paso)$ 
            end;
        simpsonc:= $h*(2*x2+4*x1)/3$ ;
    end;
procedure sistema;
var
    k,i,j,p,ncopy,causa:integer;
    suma:real;
    m:matriz;

```

```

nrow:vectorentero;
s:vectorreal;
procedure salida;
begin
    if causa<>0
    then
        begin
            writeln('No existe solución única.');
```

halt

```
        end
    end;
procedure eliminacion;
begin
    for i:=0 to n do
        begin
            p:=0;
            for j:=0 to n do
                if abs(alfa[i,p])<abs(alfa[i,j])
                then
                    p:=j;
            s[i]:=abs(alfa[i,p]);
            if s[i]=0
            then
                begin
                    causa:=1;
                    salida
                end
            else
                nrow[i]:=i
            end;
        end;
    for i:=0 to n-1 do
        begin
            p:=i;
            for j:=i to n do
                if abs(alfa[nrow[p],i])/s[nrow[p]]<
                    abs(alfa[nrow[j],i])/s[nrow[j]]
                then
```

```

        p:=j;
    if alfa[nrow[p],i]=0
    then
        begin
            causa:=1;
            salida
        end
    else
        begin
            if nrow[i]<>nrow[p]
            then
                begin
                    ncopy:=nrow[i];
                    nrow[i]:=nrow[p];
                    nrow[p]:=ncopy
                end
            end;
        for j:=i+1 to n do
            begin
                m[nrow[j],i]:=
                    alfa[nrow[j],i]/alfa[nrow[i],i];
                for k:=0 to n+1 do
                    alfa[nrow[j],k]:=alfa[nrow[j],k]-
                        m[nrow[j],i]*alfa[nrow[i],k]
                end
            end;
        end;
    if alfa[nrow[n],n]=0
    then
        begin
            causa:=1;
            salida
        end
    end;
procedure sustitucion;
begin
    y[n]:=alfa[nrow[n],n+1]/alfa[nrow[n],n];
    for i:=n-1 downto 0 do

```

```

begin
    suma:=0;
    for j:=i+1 to n do
        suma:=suma+alfa[nrow[i],j]*y[j];
    y[i]:=(alfa[nrow[i],n+1]-suma)/alfa[nrow[i],i]
    end;
    causa:=0
end;
begin
    eliminacion;
    sustitucion;
    salida
end;
begin {cuerpo principal del programa}
    n:=0;l:=0;j:=0;k:=0;delta:=0;w:=0;w1:=0;
    for l:=0 to nmax do
        for k:=0 to nmax do
            begin
                alfa[l,k]:=0;b[l,k]:=0;c[l,k]:=0;
                x[k]:=0;y[k]:=0;error[k]:=0
            end;
            write('Partición del intervalo: 1/');
            readln(n);
            for j:=1 to 75 do write('-');
            writeln;
            for l:=0 to n do
                begin
                    x[l]:=l/n;
                    for k:=0 to n do
                        begin
                            if k=l
                                then
                                    delta:=1
                                else
                                    delta:=0;
                            alfa[l,k]:=delta+simpsonc;
                        end;
                    end;
                end;
            end;

```

```

        alfa[l,n+1]:=g(x[l])
    end;
for j:=1 to 75 do write('-');
writeln;
sistema;
writeln('Solución: ');
writeln('k':2,'x[k]':10,'y[k]':10,'Error[k]':18);
for l:=0 to n do
    begin
        error[l]:=abs(efe(x[l])-y[l]);
        if w<error[l]
            then
                w:=error[l];
        writeln(l:2,x[l]:10:6,y[l]:10:6,' ',error[l]:10:6)
    end;
writeln('Error máximo: ',w:17:6);
erroresp:=2*raizdealfa*modulo/(1-raizdealfa);
writeln('Error esperado: ',erroresp:15:6)
end.

```

## 3.2. LOS RESULTADOS

En esta sección mostramos los resultados obtenidos por el uso de nuestro algoritmo sobre la expresión (3.3) en tres casos concretos. Para esto hemos utilizado las condiciones de los lemas de la sección 2.1. y la cota de error dada por (2.2).

**EJEMPLO 3.2.1.** Para la ecuación integral

$$f(x) + \int_0^1 xyf(y)dy = \frac{4x}{3}, \quad x \in [0, 1]$$

cuya única solución es la función

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$



se tiene  $\alpha = 0.333333$ ,  $w_f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$  y las siguientes tablas de errores:

a) Partición del intervalo:  $1/5$ ; Error máximo esperado: 0.546410

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.200000 | 0.185185   | 0.200000 | 0.014815              |
| 2   | 0.400000 | 0.370370   | 0.400000 | 0.029630              |
| 3   | 0.600000 | 0.555556   | 0.600000 | 0.044444              |
| 4   | 0.800000 | 0.740741   | 0.800000 | 0.059259              |
| 5   | 1.000000 | 0.925926   | 1.000000 | 0.074074              |

b) Partición del intervalo:  $1/10$ ; Error máximo esperado: 0.273205

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.100000 | 0.096270   | 0.100000 | 0.003730              |
| 2   | 0.200000 | 0.192539   | 0.200000 | 0.007461              |
| 3   | 0.300000 | 0.288809   | 0.300000 | 0.011191              |
| 4   | 0.400000 | 0.385078   | 0.400000 | 0.014922              |
| 5   | 0.500000 | 0.481348   | 0.500000 | 0.018652              |
| 6   | 0.600000 | 0.577617   | 0.600000 | 0.022383              |
| 7   | 0.700000 | 0.673887   | 0.700000 | 0.026113              |
| 8   | 0.800000 | 0.770156   | 0.800000 | 0.029844              |
| 9   | 0.900000 | 0.866426   | 0.900000 | 0.033574              |
| 10  | 1.000000 | 0.962696   | 1.000000 | 0.037304              |

c) Partición del intervalo:  $1/20$ ; Error máximo esperado: 0.136603

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.050000 | 0.049065   | 0.050000 | 0.000935              |
| 2   | 0.100000 | 0.098129   | 0.100000 | 0.001871              |
| 3   | 0.150000 | 0.147194   | 0.150000 | 0.002806              |
| 4   | 0.200000 | 0.196259   | 0.200000 | 0.003741              |
| 5   | 0.250000 | 0.245324   | 0.250000 | 0.004676              |
| 6   | 0.300000 | 0.294388   | 0.300000 | 0.005612              |
| 7   | 0.350000 | 0.343453   | 0.350000 | 0.006547              |
| 8   | 0.400000 | 0.392518   | 0.400000 | 0.007482              |
| 9   | 0.450000 | 0.441582   | 0.450000 | 0.008418              |
| 10  | 0.500000 | 0.490647   | 0.500000 | 0.009353              |
| 11  | 0.550000 | 0.539712   | 0.550000 | 0.010288              |
| 12  | 0.600000 | 0.588776   | 0.600000 | 0.011224              |
| 13  | 0.650000 | 0.637841   | 0.650000 | 0.012159              |
| 14  | 0.700000 | 0.686906   | 0.700000 | 0.013094              |
| 15  | 0.750000 | 0.735971   | 0.750000 | 0.014029              |
| 16  | 0.800000 | 0.785035   | 0.800000 | 0.014965              |
| 17  | 0.850000 | 0.834100   | 0.850000 | 0.015900              |
| 18  | 0.900000 | 0.883165   | 0.900000 | 0.016835              |
| 19  | 0.950000 | 0.932229   | 0.950000 | 0.017771              |
| 20  | 1.000000 | 0.981294   | 1.000000 | 0.018706              |

d) Partición del intervalo:  $1/30$ ; Error máximo esperado: 0.091068

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.033333 | 0.032917   | 0.033333 | 0.000416              |
| 2   | 0.066667 | 0.065835   | 0.066667 | 0.000832              |
| 3   | 0.100000 | 0.098752   | 0.100000 | 0.001248              |
| 4   | 0.133333 | 0.131669   | 0.133333 | 0.001664              |
| 5   | 0.166667 | 0.164586   | 0.166667 | 0.002080              |
| 6   | 0.200000 | 0.197504   | 0.200000 | 0.002496              |
| 7   | 0.233333 | 0.230421   | 0.233333 | 0.002912              |
| 8   | 0.266667 | 0.263338   | 0.266667 | 0.003328              |
| 9   | 0.300000 | 0.296256   | 0.300000 | 0.003744              |
| 10  | 0.333333 | 0.329173   | 0.333333 | 0.004160              |
| 11  | 0.366667 | 0.362090   | 0.366667 | 0.004576              |
| 12  | 0.400000 | 0.395008   | 0.400000 | 0.004992              |
| 13  | 0.433333 | 0.427925   | 0.433333 | 0.005408              |
| 14  | 0.466667 | 0.460842   | 0.466667 | 0.005825              |
| 15  | 0.500000 | 0.493759   | 0.500000 | 0.006241              |
| 16  | 0.533333 | 0.526677   | 0.533333 | 0.006657              |
| 17  | 0.566667 | 0.559594   | 0.566667 | 0.007073              |
| 18  | 0.600000 | 0.592511   | 0.600000 | 0.007489              |
| 19  | 0.633333 | 0.625429   | 0.633333 | 0.007905              |
| 20  | 0.666667 | 0.658346   | 0.666667 | 0.008321              |
| 21  | 0.700000 | 0.691263   | 0.700000 | 0.008737              |
| 22  | 0.733333 | 0.724180   | 0.733333 | 0.009153              |
| 23  | 0.766667 | 0.757098   | 0.766667 | 0.009569              |
| 24  | 0.800000 | 0.790015   | 0.800000 | 0.009985              |
| 25  | 0.833333 | 0.822932   | 0.833333 | 0.010401              |
| 26  | 0.866667 | 0.855850   | 0.866667 | 0.010817              |
| 27  | 0.900000 | 0.888767   | 0.900000 | 0.011233              |
| 28  | 0.933333 | 0.921684   | 0.933333 | 0.011649              |
| 29  | 0.966667 | 0.954602   | 0.966667 | 0.012065              |
| 30  | 1.000000 | 0.987519   | 1.000000 | 0.012481              |

**EJEMPLO 3.2.2.** Para la ecuación integral

$$f(x) + \int_0^1 e^{-x-y-2} f(y) dy = e^x + e^{-x-2}, \quad x \in [0, 1]$$

cuya única solución es la función

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$$

se tiene  $\alpha = 0.007918$ ,  $w_f(\frac{1}{n}) = e - e^{1-\frac{1}{n}}$  y las siguientes tablas de errores:

a) Partición del intervalo:  $1/5$ ; Error máximo esperado: 0.047838

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.974315   | 1.000000 | 0.025685              |
| 1   | 0.200000 | 1.200373   | 1.221403 | 0.021029              |
| 2   | 0.400000 | 1.474607   | 1.491825 | 0.017217              |
| 3   | 0.600000 | 1.808022   | 1.822119 | 0.014096              |
| 4   | 0.800000 | 2.214000   | 2.225541 | 0.011541              |
| 5   | 1.000000 | 2.708833   | 2.718282 | 0.009449              |

b) Partición del intervalo:  $1/10$ ; Error máximo esperado: 0.025114

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.987193   | 1.000000 | 0.012807              |
| 1   | 0.100000 | 1.093583   | 1.105171 | 0.011588              |
| 2   | 0.200000 | 1.210918   | 1.221403 | 0.010485              |
| 3   | 0.300000 | 1.340371   | 1.349859 | 0.009487              |
| 4   | 0.400000 | 1.483240   | 1.491825 | 0.008585              |
| 5   | 0.500000 | 1.640954   | 1.648721 | 0.007768              |
| 6   | 0.600000 | 1.815090   | 1.822119 | 0.007028              |
| 7   | 0.700000 | 2.007393   | 2.013753 | 0.006360              |
| 8   | 0.800000 | 2.219787   | 2.225541 | 0.005754              |
| 9   | 0.900000 | 2.454396   | 2.459603 | 0.005207              |
| 10  | 1.000000 | 2.713571   | 2.718282 | 0.004711              |

c) Partición del intervalo:  $1/20$ ; Error máximo esperado: 0.012871

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.993603   | 1.000000 | 0.006397              |
| 1   | 0.050000 | 1.045186   | 1.051271 | 0.006085              |
| 2   | 0.100000 | 1.099383   | 1.105171 | 0.005788              |
| 3   | 0.150000 | 1.156328   | 1.161834 | 0.005506              |
| 4   | 0.200000 | 1.216165   | 1.221403 | 0.005238              |
| 5   | 0.250000 | 1.279043   | 1.284025 | 0.004982              |
| 6   | 0.300000 | 1.345120   | 1.349859 | 0.004739              |
| 7   | 0.350000 | 1.414560   | 1.419068 | 0.004508              |
| 8   | 0.400000 | 1.487537   | 1.491825 | 0.004288              |
| 9   | 0.450000 | 1.564233   | 1.568312 | 0.004079              |
| 10  | 0.500000 | 1.644841   | 1.648721 | 0.003880              |
| 11  | 0.550000 | 1.729562   | 1.733253 | 0.003691              |
| 12  | 0.600000 | 1.818608   | 1.822119 | 0.003511              |
| 13  | 0.650000 | 1.912201   | 1.915541 | 0.003340              |
| 14  | 0.700000 | 2.010576   | 2.013753 | 0.003177              |
| 15  | 0.750000 | 2.113978   | 2.117000 | 0.003022              |
| 16  | 0.800000 | 2.222667   | 2.225541 | 0.002874              |
| 17  | 0.850000 | 2.336913   | 2.339647 | 0.002734              |
| 18  | 0.900000 | 2.457002   | 2.459603 | 0.002601              |
| 19  | 0.950000 | 2.583236   | 2.585710 | 0.002474              |
| 20  | 1.000000 | 2.715928   | 2.718282 | 0.002353              |



d) Partición del intervalo:  $1/30$ ; Error máximo esperado: 0.008652

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.995736   | 1.000000 | 0.004264              |
| 1   | 0.033333 | 1.029771   | 1.033895 | 0.004124              |
| 2   | 0.066667 | 1.064950   | 1.068939 | 0.003989              |
| 3   | 0.100000 | 1.101313   | 1.105171 | 0.003858              |
| 4   | 0.133333 | 1.138899   | 1.142631 | 0.003731              |
| 5   | 0.166667 | 1.177751   | 1.181360 | 0.003609              |
| 6   | 0.200000 | 1.217912   | 1.221403 | 0.003491              |
| 7   | 0.233333 | 1.259426   | 1.262802 | 0.003376              |
| 8   | 0.266667 | 1.302340   | 1.305605 | 0.003266              |
| 9   | 0.300000 | 1.346700   | 1.349859 | 0.003159              |
| 10  | 0.333333 | 1.392557   | 1.395612 | 0.003055              |
| 11  | 0.366667 | 1.439962   | 1.442917 | 0.002955              |
| 12  | 0.400000 | 1.488967   | 1.491825 | 0.002858              |
| 13  | 0.433333 | 1.539626   | 1.542390 | 0.002764              |
| 14  | 0.466667 | 1.591996   | 1.594670 | 0.002674              |
| 15  | 0.500000 | 1.646135   | 1.648721 | 0.002586              |
| 16  | 0.533333 | 1.702104   | 1.704605 | 0.002501              |
| 17  | 0.566667 | 1.759963   | 1.762383 | 0.002419              |
| 18  | 0.600000 | 1.819779   | 1.822119 | 0.002340              |
| 19  | 0.633333 | 1.881617   | 1.883880 | 0.002263              |
| 20  | 0.666667 | 1.945545   | 1.947734 | 0.002189              |
| 21  | 0.700000 | 2.011635   | 2.013753 | 0.002117              |
| 22  | 0.733333 | 2.079961   | 2.082009 | 0.002048              |
| 23  | 0.766667 | 2.150598   | 2.152579 | 0.001981              |
| 24  | 0.800000 | 2.223625   | 2.225541 | 0.001916              |
| 25  | 0.833333 | 2.299123   | 2.300976 | 0.001853              |
| 26  | 0.866667 | 2.377176   | 2.378968 | 0.001792              |
| 27  | 0.900000 | 2.457870   | 2.459603 | 0.001733              |
| 28  | 0.933333 | 2.541295   | 2.542972 | 0.001677              |
| 29  | 0.966667 | 2.627544   | 2.629166 | 0.001622              |
| 30  | 1.000000 | 2.716713   | 2.718282 | 0.001569              |

**EJEMPLO 3.2.3.** Para la ecuación integral

$$f(x) + \int_0^1 x e^{-xy} f(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{1}{x} - e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x} & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$

cuya única solución es la función

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

se tiene  $\alpha = 0.432332$ ,  $w_f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$  y las siguientes tablas de errores:

a) Partición del intervalo:  $1/5$ ; Error máximo esperado: 0.767951

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.200000 | 0.187459   | 0.200000 | 0.012541              |
| 2   | 0.400000 | 0.380269   | 0.400000 | 0.019731              |
| 3   | 0.600000 | 0.576820   | 0.600000 | 0.023180              |
| 4   | 0.800000 | 0.775921   | 0.800000 | 0.024079              |
| 5   | 1.000000 | 0.976705   | 1.000000 | 0.023295              |

b) Partición del intervalo:  $1/10$ ; Error máximo esperado: 0.383975

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.100000 | 0.096440   | 0.100000 | 0.003560              |
| 2   | 0.200000 | 0.193652   | 0.200000 | 0.006348              |
| 3   | 0.300000 | 0.291519   | 0.300000 | 0.008481              |
| 4   | 0.400000 | 0.389936   | 0.400000 | 0.010064              |
| 5   | 0.500000 | 0.488816   | 0.500000 | 0.011184              |
| 6   | 0.600000 | 0.588082   | 0.600000 | 0.011918              |
| 7   | 0.700000 | 0.687667   | 0.700000 | 0.012333              |
| 8   | 0.800000 | 0.787515   | 0.800000 | 0.012485              |
| 9   | 0.900000 | 0.887578   | 0.900000 | 0.012422              |
| 10  | 1.000000 | 0.987813   | 1.000000 | 0.012187              |

c) Partición del intervalo:  $1/20$ ; Error máximo esperado: 0.191988

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.050000 | 0.049054   | 0.050000 | 0.000946              |
| 2   | 0.100000 | 0.098211   | 0.100000 | 0.001789              |
| 3   | 0.150000 | 0.147464   | 0.150000 | 0.002536              |
| 4   | 0.200000 | 0.196804   | 0.200000 | 0.003196              |
| 5   | 0.250000 | 0.246225   | 0.250000 | 0.003775              |
| 6   | 0.300000 | 0.295721   | 0.300000 | 0.004279              |
| 7   | 0.350000 | 0.345285   | 0.350000 | 0.004715              |
| 8   | 0.400000 | 0.394912   | 0.400000 | 0.005088              |
| 9   | 0.450000 | 0.444597   | 0.450000 | 0.005403              |
| 10  | 0.500000 | 0.494334   | 0.500000 | 0.005666              |
| 11  | 0.550000 | 0.544120   | 0.550000 | 0.005880              |
| 12  | 0.600000 | 0.593949   | 0.600000 | 0.006051              |
| 13  | 0.650000 | 0.643819   | 0.650000 | 0.006181              |
| 14  | 0.700000 | 0.693725   | 0.700000 | 0.006275              |
| 15  | 0.750000 | 0.743664   | 0.750000 | 0.006336              |
| 16  | 0.800000 | 0.793633   | 0.800000 | 0.006367              |
| 17  | 0.850000 | 0.843629   | 0.850000 | 0.006371              |
| 18  | 0.900000 | 0.893650   | 0.900000 | 0.006350              |
| 19  | 0.950000 | 0.943692   | 0.950000 | 0.006308              |
| 20  | 1.000000 | 0.993755   | 1.000000 | 0.006245              |



d) Partición del intervalo:  $1/30$ ; Error máximo esperado: 0.127992

| $k$ | $x_k$    | $f_n(x_k)$ | $f(x_k)$ | $ f_n(x_k) - f(x_k) $ |
|-----|----------|------------|----------|-----------------------|
| 0   | 0.000000 | 0.000000   | 0.000000 | 0.000000              |
| 1   | 0.033333 | 0.032904   | 0.033333 | 0.000429              |
| 2   | 0.066667 | 0.065840   | 0.066667 | 0.000827              |
| 3   | 0.100000 | 0.098805   | 0.100000 | 0.001195              |
| 4   | 0.133333 | 0.131799   | 0.133333 | 0.001535              |
| 5   | 0.166667 | 0.164819   | 0.166667 | 0.001848              |
| 6   | 0.200000 | 0.197864   | 0.200000 | 0.002136              |
| 7   | 0.233333 | 0.230933   | 0.233333 | 0.002400              |
| 8   | 0.266667 | 0.264025   | 0.266667 | 0.002641              |
| 9   | 0.300000 | 0.297138   | 0.300000 | 0.002862              |
| 10  | 0.333333 | 0.330272   | 0.333333 | 0.003061              |
| 11  | 0.366667 | 0.363425   | 0.366667 | 0.003242              |
| 12  | 0.400000 | 0.396595   | 0.400000 | 0.003405              |
| 13  | 0.433333 | 0.429783   | 0.433333 | 0.003550              |
| 14  | 0.466667 | 0.462987   | 0.466667 | 0.003680              |
| 15  | 0.500000 | 0.496206   | 0.500000 | 0.003794              |
| 16  | 0.533333 | 0.529439   | 0.533333 | 0.003895              |
| 17  | 0.566667 | 0.562685   | 0.566667 | 0.003981              |
| 18  | 0.600000 | 0.595945   | 0.600000 | 0.004055              |
| 19  | 0.633333 | 0.629216   | 0.633333 | 0.004117              |
| 20  | 0.666667 | 0.662498   | 0.666667 | 0.004168              |
| 21  | 0.700000 | 0.695791   | 0.700000 | 0.004209              |
| 22  | 0.733333 | 0.729094   | 0.733333 | 0.004239              |
| 23  | 0.766667 | 0.762406   | 0.766667 | 0.004261              |
| 24  | 0.800000 | 0.795726   | 0.800000 | 0.004274              |
| 25  | 0.833333 | 0.829055   | 0.833333 | 0.004278              |
| 26  | 0.866667 | 0.862391   | 0.866667 | 0.004276              |
| 27  | 0.900000 | 0.895734   | 0.900000 | 0.004266              |
| 28  | 0.933333 | 0.929084   | 0.933333 | 0.004250              |
| 29  | 0.966667 | 0.962440   | 0.966667 | 0.004227              |
| 30  | 1.000000 | 0.995801   | 1.000000 | 0.004199              |

En cada caso la cota de error no fue superada.

## 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se cumplieron los dos objetivos que nos propusimos en el capítulo introductorio:

1. El diseño de un esquema de resolución aproximada de ecuaciones integrales de Fredholm del segundo tipo. Este esquema está basado en la utilización de cierta partición de la unidad y de un operador aproximante.
2. La creación de un algoritmo que muestra el logro del punto anterior en la práctica y a través de nuestro programa Pascal. Las soluciones aproximadas tienen un error de orden aceptable.

En lo referente al trabajo de tesis de Maestría, pretendemos que éste sea un ahondamiento de lo expuesto en el trabajo presente. Se han sugerido algunas ideas, entre ellas las siguientes:

1. Utilizar otras particiones de la unidad, con el objetivo de acelerar la convergencia de las soluciones. Esto supone que el operador aproximante cambiará también, pero hay que notar que podemos utilizar otro operador de este tipo aun sin alterar la partición que se utilice.
2. Generalizar nuestro método a su aplicación sobre un intervalo  $[a, b]$  cualquiera de  $\mathbb{R}$ .
3. Resolver ecuaciones del tipo Volterra bajo lo ya expuesto.
4. Hallar estimadores de error que no dependan de la solución.
5. Resolver casos reales utilizando nuestro método.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] *Integral Equations* (Ecuaciones integrales).  
S.G. Mikhlin.  
Edición Revolucionaria, Instituto Cubano del Libro, La Habana, 1971.
- [2] *Numerical Solutions Of Integral Equations* (Soluciones numéricas de ecuaciones integrales).  
L.M. Delves, J. Walsh.  
Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [3] *Análisis numérico*.  
Richard L. Burden, J. Douglas Faires.  
Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.
- [4] *Introduction to Functional Analysis* (Introducción al análisis funcional).  
Angus E. Taylor, David C. Lay.  
John Wiley & Sons, E.U.A., 1958.
- [5] *Introductory Functional Analysis with Applications* (Análisis funcional introductorio con aplicaciones).  
Erwin Kreyszig.  
John Wiley & Sons., Inc., Nueva York, 1978.