Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Submodelos elementales y algunas aplicaciones a la topología y la teoría de conjuntos

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Cesar Alonzo Moreno Espinoza

Asesorado por

Iván Martínez Ruiz & Fernando Hernández Hernández

Puebla Pue.
3 de marzo de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Submodelos elementales y algunas aplicaciones a la topología y la teoría de conjuntos

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Cesar Alonzo Moreno Espinoza

Asesorado por

Iván Martínez Ruiz & Fernando Hernández Hernández

Puebla Pue.
3 de marzo de 2023

Título: Submodelos elementales y algunas aplicaciones a la topología y la teoría de conjuntos
Estudiante: Cesar Alonzo Moreno Espinoza

COMITÉ

Presidente

Secretario

Vocal

Vocal

Iván Martínez Ruiz & Fernando Hernández Hernández
Asesor

Dedicado con cariño a
mis padres María del Refugio Espinoza Flores y José César Moreno Cordero, quienes me han estado apoyando toda la vida, no hay palabras para mostrar mi eterna gratitud.
A mi abuela, Jovita Flores Rolón una gran mujer que siempre cuidó de mí, espero estés en un lugar mejor.

Agradecimientos

A mis hermanas Nelida y Diana por estar ahí, siempre apoyándome y ser muy buenas hermanas. A mi abuelo Juan por apoyarme y cuidarme cuando más lo necesitaba.

A mis asesores Iván Martínez Ruiz y Fernando Hernández Hernández por brindarme su paciencia para explicarme cuando no entendía ciertos temas, aún cuando cometí muchos errores; además de apoyarme emocionalmente cuando más decaído me sentí. Sin ellos esta tesis no habría sido posible, muchas gracias.

A todos mis maestros de la facultad por mostrarme lo fantástica que son las matemáticas; especialmente a los profesores Soriano, Badillo e Iván, por darme la motivación necesaria para no abandonar la carrera y continuar aprendiendo.

A mis amigos Rafa, Ángel, Pedro, Manuel, Aleida y Valeria por apoyarme durante los retos que supone la carrera. Especialmente a Enrique, gracias por ser un fantástico amigo.

Introducción

Los submodelos elementales son objetos creados en la teoría de modelos, una rama de la lógica. A pesar de que el método de los submodelos elementales es relativamente nuevo, rápidamente ganaron popularidad debido a la “sencillez” de su aplicación y a la gran flexibilidad que estos tienen al emplearse en las demostraciones. Los submodelos elementales se han aplicado con gran éxito en demostraciones de teoremas de teoría de conjuntos, topología e incluso resultados de combinatoria. Así como el profesor Dow sugiere, una de las ventajas más importantes que tienen los submodelos elementales en las demostraciones es que los submodelos elementales son una herramienta conveniente que contempla todos los argumentos estándares que hablan de la cerradura de alguna propiedad, es decir, permiten encontrar conjuntos o sucesiones de conjuntos que son cerrados respecto a alguna operación que nos interese.

Esta tesis se divide en dos partes. En la primera parte se presentan los conceptos de lógica necesarios para entender los submodelos elementales, algunos de los resultados más importantes de estos y finalizamos presentado unos resultados clásicos en los que se muestra el empleo de los submodelos elementales como una técnica de demostración. En la parte de lógica, se revisan conceptos que se ven en cursos de lógica, por tanto, es recomendable haber tomado un curso de lógica. Una de las cosas más importantes que proporcionan estos ejemplos es el poder notar cómo el pedir modelos con ciertas características nos ayudarán a ver que ciertos conjuntos poseen propiedades que facilitan la demostración de estos resultados. En uno de los ejemplos en los que se emplean los submodelos elementales, en topología, se usa la idea usual de que para demostrar ciertas desigualdades primero se considere un subespacio que es más pequeño y se aproxime al espacio original, en algún sentido; después calcular el tamaño del subespacio y como este es una aproximación del espacio total, entonces ambos tendrían el mismo tamaño. Esto nos dice lo importante que llegan a ser los submodelos elementales, lo cual no es de extrañar pues son submodelos elementales. Los resultados que se encuentran en esta primera parte se pueden consultar en [4] y [9]. Algunos otras referencias que se usan son [5], [15], [16] y [23].

En la segunda parte de la tesis, nos apoyandonos en [21], [22] y [2]. Usando un poco de combinatoria, se construyen árboles cuyos nodos resultan ser submodelos elementales, los cuales se van descomponiendo poco a poco hasta que estos tienen tamaño numerable. A los árboles de este tipo se les llamarán los árboles de Davies. Estos árboles serán aplicados para presentar demostraciones de resultados más profundos. En un artículo escrito por Ginsburg y Linek [7] se define una estrella como un punto y un segmento de longitud finita en cada media línea a partir del punto. Ahí también se estudia la pregunta de si el plano puede ser cubierto por tres estrellas. Algo que se vio es que un resultado más fuerte, junto con la Hipótesis del Continuo (**CH**), es válido. Este resultado dice que podemos cubrir al plano con tres nubes, donde una nube alrededor de un punto es un conjunto junto con el punto tal que cada línea que pasa por el punto interseca al conjunto en una cantidad finita de puntos. En la demostración del teorema de las tres nubes uno de los pasos clave fue la obtención de dos cadenas de conjuntos. Otra cosa que se demostró, ya sin la ayuda de **CH**, fue que si el continuo es a lo más $\aleph_n$ (n natural), entonces el plano es la unión de $n+2$ nubes. La demostración de estos dos últimos resultados se puede consultar en [14].

Los objetivos de esta tesis son cuatro. En primer lugar se pretende definir formalmente los submodelos elementales desde el punto de vista lógico, de la teoría de modelos. En segundo lugar se espera dar una respuesta concisa de por qué funcionan los submodelos elementales, pues algunas veces si se revisan demostraciones usando este método para demostrar podría resultar poco intuitivo el por qué la demostración es correcta. Se presentarán algunos resultados básicos que tienen los submodelos elementales, siendo un poco más rigurosos en las demostraciones así como explicar más a detalle ciertas cuestiones, que en las referencias suelen darse por hecho u omitirse. Finalmente también se presentará un método, releativamente nuevo, los "árboles de Daviesz se presentarán algunos resultados que usan dicha técnica en su demostración y, al igual que antes se mensionarán ciertas cosas que se omiten. Se pretende que lo anterior pueda ser realizado de forma autocontenida, y aunque hay resultados que no se demuestran aquí, dichos resultados pueden ser encontrados en las referencias que se dan y se omiten porque se escapan al alcance de esta obra, porque son resultados muy técnicos o porque son resultados que no son tan necesarios de demostrar.

Esperamos que con el contenido y las referencias presentadas en esta tesis se pueda convencer de la utilidad, además del empleo usual que tienen los submodelos elementales aplicados a la topología y la teoría de conjuntos.

Índice general

1. Lógica y teoría de modelos **1**
1.1. Sintaxis del Cálculo Predicativo 2
1.2. Semántica del Cálculo Predicativo 4
1.2.1. Algunos Resultados Importantes en Lógica 12
1.2.2. Submodelos Elementales 12
1.3. Modelos para la Teoría de Conjuntos 30
1.4. Resultados de Modelos Aplicados a la Teoría de Conjuntos 41

2. Definiciones y resultados adicionales **49**
2.1. Topología 49
2.2. Teoría de Conjuntos 53
2.3. Árboles 53

3. Primeras Aplicaciones de Submodelos Elementales **55**

4. Más resultados **65**

5. Conclusiones **73**

A. Resultados sin el uso del método de submodelos elementales **75**

Bibliografía **79**

Capítulo 1

Lógica y teoría de modelos

Uno de los objetivos de esta tesis es presentar algunos resultados que emplean el método de submodelos elementales en sus demostraciones, por tanto, estaremos trabajando con modelos del lenguaje del cálculo predicativo clásico de primer orden, con igualdad. Además, todas las definiciones que están relacionadas con lógica o teoría de modelos, tales como lenguaje, teoría, modelo, etc., están definidas en términos del lenguaje de primer orden clásico, con igualdad.

En esta sección se presentarán algunas nociones y resultados, de lógica y teoría de modelos, que serán necesarios para poder hablar de los submodelos elementales.

Definición 1.1. *Un* ***lenguaje*** $\mathscr{L}$ *es una colección de símbolos. Estos símbolos se clasifican en tres grupos: símbolos predicativos (o símbolos relacionales), símbolos funcionales y símbolos constantes.*

Cada símbolo funcional y cada símbolo predicativo tienen asociado una *aridad*, la cual se suele colocar como superíndice. Debido a que existen lenguajes con más de un símbolo funcional (o predicativo) de aridad n se usan subíndices con la finalidad de tener una enumeración. De esta forma, A_i^n denotará el i-ésimo símbolo predicativo de aridad n, f_j^m es el j-ésimo símbolo funcional de aridad m y c_k es el k-ésimo símbolo constante. Así, por ejemplo, un lenguaje $\mathscr{L}$ se puede expresar como sigue

$$\mathscr{L} = \{A_i^n : n \geq 1 \text{ y } i \in I\} \cup \{f_j^m : m \geq 1 \text{ y } j \in J\} \cup \{c_k : k \in K\}.$$

Ejemplo 1.2. *(a)* $\mathscr{L} = \{\leq\}$

(b) $\mathscr{L} = \{*, 0\}$

(c) $\mathscr{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$

(d) $\mathscr{L} = \{\in\}$

Donde cada símbolo predicativo, o funcional, tiene la aridad usual. Por ejemplo, el símbolo predicativo $\leq$ *tiene aridad 2.*

Definición 1.3. *El* ***cardinal*** *del lenguaje* $\mathscr{L}$*, denotado por* $\|\mathscr{L}\|$*, se define como sigue*

$$\|\mathscr{L}\| = \aleph_0 + |\mathscr{L}|.$$

Así, un lenguaje $\mathscr{L}$ es numerable o no numerable, dependiendo de si $\|\mathscr{L}\|$ es numerable o no numerable.

Definición 1.4. *Sean $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ dos lenguajes. Si $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ se dice que $\mathscr{L}'$ es una* ***expansión*** *de $\mathscr{L}$ o también se dice que $\mathscr{L}$ es una* ***reducción*** *de $\mathscr{L}'$. En caso de que $\mathscr{L}'$ sea expansión de $\mathscr{L}$ cuyos únicos símbolos adicionales son constantes, entonces se dice que $\mathscr{L}'$ es una* ***expansión simple*** *de $\mathscr{L}$.*

Si $\mathscr{L}'$ es expansión de $\mathscr{L}$, entonces podemos escribir $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup X$, donde X es el conjunto de los nuevos símbolos agregados.

1.1. Sintaxis del Cálculo Predicativo

Los ejemplos aquí presentados se desarrollan en el marco de la lógica clásica. Para poder estudiar el Cálculo Predicativo necesitamos de ciertos elementos adicionales, usualmente llamados *símbolos lógicos*, junto con un símbolo de igualdad

variables	$x_0, x_1, \ldots;$
conectivos	$\neg$ (negación) y $\wedge$ (conjunción);
paréntesis	(,);
coma	, ;
cuantificador	$\forall$ (para todo);
símbolo de igualdad	$\doteq$ (igualdad)

Se define el conjunto de términos y fórmulas como usualmente se hace en los cursos de lógica. Algunas veces, cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $=$ en lugar de $\doteq$.

Definición 1.5. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. Entonces $\boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$ es el menor conjunto X con las propiedades:*

1. *Si x_n es una variable, entonces $x_n \in X$;*

2. *Si c_n es un símbolo contante del lenguaje $\mathscr{L}$, entonces $c_n \in X$;*

3. *Si f^n_m es un símbolo funcional de aridad n del lenguaje $\mathscr{L}$ y $t_1, \ldots, t_n \in X$, entonces $f^n_m(t_1, \ldots, t_n) \in X$*

Ejemplo 1.6. *Si se toma el lenguaje $\mathscr{L} = \{\in\}$, entonces $\boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}} = \{x_n : n \in \omega\}$, es decir, el conjunto de términos del lenguaje $\mathscr{L} = \{\in\}$ consiste únicamente de las variables x_n.*

Es común denotar el conjunto de variables por **VAR**.

Definición 1.7. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. Definimos $\boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}}$ como el menor conjunto X con las propiedades:*

1. *Si $t_1, t_2 \in \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$, entonces $t_1 \doteq t_2 \in X$;*

2. *Si A^n_m es un símbolo relacional de aridad n del lenguaje $\mathscr{L}$ y $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$, entonces $A^n_m(t_1, \ldots, t_n) \in X$;*

3. *Si $\varphi, \psi \in X$, entonces $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in X$;*

4. *Si $\varphi \in X$ y x_n es una variable, entonces $(\forall x_n \varphi) \in X$*

A las fórmulas de la forma $t_1 \doteq t_2$ y $A^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ se les llama **fórmulas atómicas**. Como es usual se escribirá $\neg\varphi$ en lugar de $(\neg\varphi)$ y $\varphi \wedge \psi$ en lugar de $(\varphi \wedge \psi)$.

Ejemplo 1.8. *Continuando con el lenguaje $\mathscr{L} = \{\in\}$, algunas fórmulas son $x \in y$, $x \doteq y$, $\neg(x \in y)$, $(x \in y) \wedge ((z \in x) \vee (z \doteq w)))$, $\forall w(w \in x \to w \in y)$, etc. Como es usual se denotará por $x \notin y$ a $\neg(x \in y)$ y por $x \not\doteq y$ a $\neg(x \doteq y)$.*

Es común usar a x, y, z,etc. como variables (metavariables) y usarlas en fórmulas aunque ni x ni y ni z sean, estrictamente hablando, variables de nuestro lenguaje.

En teoría de modelos usualmente se dice que los términos son los objetos de los que se quiere decir algo, los objetos de estudio. Por otro lado, las fórmulas se pueden entender como "propiedades" que tienen los términos, lo que se dice de los términos.

Observación 1. *Si $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$, entonces $\boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}} \subseteq \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}'}$ y $\boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}} \subseteq \boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}'}$.*

Los demás conectivos lógicos se introducen como abreviaciones de fórmulas. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje y $\varphi, \psi \in \mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}$, entonces

$\varphi \vee \psi$	es la abreviación de	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
$\varphi \to \psi$	es la abreviación de	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$;
$\varphi \leftrightarrow \psi$	es una abreviación de	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$;
$\exists x_n \varphi$	es abreviación de	$\neg(\forall x_n \neg\varphi)$;

Se define de forma usual lo que se entiende por subfórmulas, ocurrencias libres (o acotadas) de variables en una fórmula, sustitución, y que un término t sea libre para una variable x es una fórmula φ. Para más información sobre cómo son estas definiciones se puede consultar [18].

Se hará la convención de que si t es un término y φ es una fórmula, entonces $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ denotará al término t, el cual cumple que las variables que ocurren en t se encuentra en $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, donde $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ son variables. Similarmente, $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ denotará a la fórmula φ, la cual satisface que $FV(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$. También, para evitar que la escritura se haga muy larga, en lugar de escribir $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ se escribirá simplemente $x_1, \ldots, x_n$.

Definición 1.9. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje y $\varphi \in \boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}}$. Se dice que φ es una **sentencia** si no tiene variables libres.*

El siguiente resultado, que se puede encontrar en los libros de lógica, nos dice que el número de fórmulas que podemos crear a partir de un lenguaje $\mathscr{L}$ depende exclusivamente del lenguaje mismo, es decir, de los símbolos no lógicos.

Proposición 1.10. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. Entonces $|\boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}}| = \|\mathscr{L}\|$*

Cuando se estudia sintácticamente el Cálculo Predicativo Clásico, se pueden usar sistemas de deducción, o sistemas deductivos. El sistema deductivo del que se hará uso es el *sistemas de deducción tipo Hilbert*. Un sistema tipo Hilbert, consta de un conjunto de axiomas lógicos y de un conjunto de reglas de inferencia los cuales nos ayudarán a *demostrar*, en un sentido sintáctico.

Definición 1.11. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. El* ***sistema de deducción tipo Hilbert*** *en el lenguaje $\mathscr{L}$, es el sistema formal que tiene como conjunto de (esquemas de) axiomas los siguientes: Sean $\varphi, \psi, \gamma \in$* ***FORM***$_{\mathscr{L}}$

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
(A2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$.
(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$.
(A4) $\forall x_i \varphi \to \varphi[t/x_i]$ *si t es libre para x_i en φ*
(A5) $\forall x_i(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x_i \psi)$ *si φ no tiene ocurrencias libre de x_i.*
(A6) $\forall x_i(x_i \equiv x_i)$.
(A7) $\forall x \forall y(x \equiv y \to t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv t(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$ *con t un término.*
(A8) $\forall x \forall y(x \equiv y \to \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$ *con φ una fórmula atómica.*

Y tiene como reglas de inferencia:

(MP) *Modus ponens* $\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$

(Gen) *Generalización* $\frac{\varphi}{\forall x_i \varphi}$

Definición 1.12. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje, $\Gamma \subseteq$* ***FORM***$_{\mathscr{L}}$ *y $\varphi \in$* ***FORM***$_{\mathscr{L}}$*. Una* ***prueba*** *para φ basada en Γ, denotada por $\Gamma \vdash \varphi$, es una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ que cumple lo siguiente:*

1. $\varphi_n = \varphi$;
2. *Para cada $1 \leq i \leq n$, φ_i satisface alguna de las siguientes condiciones:*
   a) φ_i *es un axioma;*
   b) $\varphi_i \in \Gamma$;
   c) *Existen $j, k < i$ tales que $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ y φ_i se obtuvo por aplicar (MP) a φ_j y a φ_k;*
   d) *Existe $j < i$ tal que $\varphi_i = \forall x_k \varphi_j$ y φ_i se obtuvo por aplicar (Gen) a φ_j.*

En caso de que $\Gamma = \emptyset$, escribimos $\vdash \varphi$ en lugar de $\emptyset \vdash \varphi$, y decimos que φ es un **teorema**.

Algunas veces una demostración por inducción sobre la complejidad se aplica al cuantificador existencial ($\exists$) en lugar del cuantificador universal ($\forall$). Esto no genera problemas pues se sabe que

$$\vdash \forall x \varphi \leftrightarrow \neg(\exists x \neg \varphi).$$

1.2. Semántica del Cálculo Predicativo

Definición 1.13. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. Una $\mathscr{L}$-**interpretación** (o $\mathscr{L}$-**estructura**) $\mathfrak{A}$, del lenguaje $\mathscr{L}$ consiste de un conjunto no vacío, A, llamado universo o dominio de la estructura, junto con una función de interpretación (o asignación) $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}$, la cual a cada elemento del lenguaje $\mathscr{L}$ le asigna un objeto de la siguiente manera:*

1. *Si* A^n_m *es un símbolo predicativo, entonces* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) \subseteq A^n$.

2. *Si* f^n_m *es un símbolo funcional, entonces* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m) : A^n \longrightarrow A$.

3. *Si* c_n *es un símbolo constante, entonces* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) \in A$

En caso de que $\mathfrak{A}$ *sea una estructura del lenguaje* $\mathscr{L}$ *con universo* A *y función de interpretación* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}$, *escribiremos* $\mathfrak{A} = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}})$.

A las interpretaciones de un lenguaje también se les conoce como **modelos** del lenguaje.

Ejemplo 1.14. 1. *Sea* $\mathscr{L} = \{\leq\}$, *entonces una interpretación del lenguaje es un conjunto* $A \neq \emptyset$ *y una relación, en este caso, de aridad* 2, $R \subseteq A \times A$, *con* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(\leq) = R$. *Es decir, una interpretación del lenguaje* $\{\leq\}$ *es* $\mathfrak{A} = (A, R)$.

2. *Si es el lenguaje de la teoría de grupos* $\mathscr{L} = \{*, e\}$, *entonces una interpretación de dicho lenguaje puede ser* $(A, +, 0)$, *donde* $*$ *se interpreta como una función en* A *(*$\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(*) = +$ *y* $+ : A^2 \to A$*) y* $0 = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(e)$.

3. *En el caso del lenguaje de la teoría de conjuntos* $\mathscr{L} = \{\in\}$, *una interpretación de dicho lenguaje puede ser cualquier conjunto no vacío,* A, *junto con una relación binaria en* A. *Si se considera, por ejemplo,* $\in_A = \{(a, b) \in A^2 : a \in b\}$, *entonces* $(A, \in_A)$ *es una interpretación de dicha teoría.*

Definición 1.15. *Sea* $\mathfrak{A}$ *una interpretación del lenguaje* $\mathscr{L}$. *El* ***cardinal*** *de* $\mathfrak{A}$ *es el cardinal* $|A|$.

Se dice que $\mathfrak{A}$ es finito (infinito numerable o infinito no numerable) si $|A|$ es finito (infinito numerable o infinito no numerable).

Definición 1.16. *Sean* $\mathscr{L}$ *un lenguaje,* $\mathscr{L}'$ *una expansión de* $\mathscr{L}$ *y* $\mathfrak{A} = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}})$ *una interpretación de* $\mathscr{L}$. *Decimos que* $\mathfrak{A}' = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}'})$ *es una* ***expansión*** *de* $\mathfrak{A}$ *al lenguaje* $\mathscr{L}'$ *si* $\mathfrak{A}'$ *es una estructura del lenguaje* $\mathscr{L}'$ *y para cada símbolo de* $\mathscr{L}$, $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}'}$ *y* $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}$ *asignan a dicho símbolo el mismo objeto. En caso de que* $\mathfrak{A}'$ *sea expansión de* $\mathfrak{A}$ *al lenguaje* $\mathscr{L}'$, *también decimos que* $\mathfrak{A}$ *es una* ***reducción*** *de* $\mathfrak{A}'$ *al lenguaje* $\mathscr{L}$.

Si $\mathscr{L}'$ es una expansión del lenguaje $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup X$ y así, si $\mathscr{F}_X$ es una función de interpretación de los símbolos de X en A, entonces $(A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}} \cup \mathscr{F}_X)$ es una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}'$. Por otro lado, si $\mathfrak{A}' = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}'})$ es una expansión de $\mathfrak{A}$ al lenguaje $\mathscr{L}'$, entonces existe una función de interpretación $\mathscr{F}_X$ de los símbolos de X en A, tal que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}} \cup \mathscr{F}_X = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}'}$. De aquí que algunas veces se prefiera usar la notación $(\mathfrak{A}, \mathscr{F}_X)$ para $\mathfrak{A}'$.

Definición 1.17. *Sean* $\mathscr{L}$ *un lenguaje y* $\mathfrak{A} = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}})$ *una interpretación del lenguaje. A las funciones de la forma* $\Phi_{\mathfrak{A}} : \{x_n : n \in \omega\} \longrightarrow A$, *se les conoce como* ***asignaciones***, *en la intepretación* $\mathfrak{A}$. *Si* $\Phi_{\mathfrak{A}}$ *es una asignación, podemos extenderla a una única función* $\Phi^*_{\mathfrak{A}}$ *en* $\boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$ *como sigue:*

(a) *Si* x_n *es una variable, entonces* $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(x_i) = \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i)$;

(b) *Si* c_n *es una constante del lenguaje, entonces* $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(c_i) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)$;

(c) *Si $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$ y f_m^n es un símbolo funcional, entonces $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(f_m^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n)(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n))$;*

Ejemplo 1.18. *Considérese $\mathscr{L} = \{A_1^2, f_3^2, e\}$ un lenguaje y $(\mathbb{N}, \leq, +, 2)$ una interpretación de dicho lenguaje (donde $\leq$ es el orden usual de $\mathbb{N}$ y $+$ es la suma usual de $\mathbb{N}$). Ahora, considérense las asignaciones $\Phi : \boldsymbol{VAR} \to \mathbb{N}$ tal que $\Phi(x_n) = n$ y $\Psi : \boldsymbol{VAR} \to \mathbb{N}$ tal que $\Psi(x_n) = 2n$. Si $t = f_3^2(x_8, f_3^2(x_2, e))$, entonces*

$$\begin{aligned}
\Phi^*(t) &= \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_3^2)(\Phi^*(x_8), \Phi^*(f_3^2(x_2, e))) \\
&= \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_3^2)(\Phi(x_8), \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_3^2)(\Phi^*(x_2), \Phi^*(e))) \\
&= \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_3^2)(8, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_3^2)(2, 2)) \\
&= (8 + (2 + 2)) \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Y con un razonamiento similar se tiene que $\Psi^*(t) = (16 + (4 + 2)) = 22$.

Definición 1.19. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una interpretación y Φ una asignación. Definimos la **valuación** inducida por Φ, $v_{\Phi^*} : \boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}} \to \{0, 1\}$ como sigue:*

1. *Si $t_1, t_2 \in \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$, entonces $v_{\Phi^*}(t_1 \doteq t_2) = 1$ si y sólo si $\Phi^*(t_1) = \Phi^*(t_2)$;*
2. *Si $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{TERM}_{\mathscr{L}}$ y A_m^n es un símbolo relacional, entonces $v_{\Phi^*}(A_m^n(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ si y sólo si $(\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_m^n)$;*
3. *$v_{\Phi^*}(\neg\varphi) = 1 - v_{\Phi^*}(\varphi)$;*
4. *$v_{\Phi^*}(\varphi \wedge \psi) = \text{mín}\{v_{\Phi^*}(\varphi), v_{\Phi^*}(\psi)\}$;*
5. *$v_{\Phi^*}(\forall x_i \varphi) = 1$ si y sólo si para cualquier asignación Φ_0 que coincida con Φ excepto, posiblemente, en x_i satisface que $v_{\Phi_0^*}(\varphi) = 1$;*

Se dice que la fórmula φ es válida en el modelo $\mathfrak{A}$, respecto de la valuación $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}$, si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\varphi) = 1$.

Realizando los cálculos necesarios se puede ver que

Si $\varphi = \psi \vee \gamma$	$v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\text{máx}\{v_{\Phi^*}(\psi), v_{\Phi^*}(\gamma)\} = 1$.
Si $\varphi = \psi \to \gamma$	$v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*}(\psi) = 0$ o $v_{\Phi^*}(\gamma) = 1$.
Si $\varphi = \psi \leftrightarrow \gamma$	$v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*}(\psi) = v_{\Phi^*}(\gamma)$.
Si $\varphi = \exists x_{i_j} \psi$	$v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ si y sólo si existe una asignación Φ_0 que difiere, posiblemente, de Φ en x_{i_j}, tal que $v_{\Phi_0^*}(\psi) = 1$

Ejemplo 1.20. *Continuando con el ejemplo anterior; si se consideran las fórmulas $A_1^2(x_2, e)$, $A_1^2(f_3^2(x_2, x_3), e) \wedge x_4 \doteq f_3^2(x_4, x_0)$ y $\forall x_7(\exists x_3(x_7 \doteq f_3^2(x_3, x_3))$. Ahora, $v_{\Phi^*}(A_1^2(x_2, e)) = 1$ si y sólo si $(\Phi^*(x_2), \Phi^*(e)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_1^2)$ si y sólo si $2 \leq 2$. Ya que efectivamente, la interpretación de dicha fórmula en el modelo se cumple (es decir, $2 \leq 2$), entonces $v_{\Phi^*}(A_1^2(x_2, e)) = 1$.*

	Φ	Ψ
$A_1^2(x_2, e)$	1	0
$A_1^2(f_3^2(x_2, x_3), e) \wedge x_4 \doteq f_3^2(x_4, x_0)$	0	0
$\forall x_7(\exists x_3(x_7 \doteq f_3^2(x_3, x_3))$	0	0

La razón por la que $v_{\Phi^*}(\forall x_7(\exists x_3(x_7 \doteq f_3^2(x_3, x_3)))) = 0$ *es porque* Φ *misma coincide con* Φ *en* $\boldsymbol{VAR} \setminus \{x_7\}$. *Y para cada asignación* Φ_0 *que coincida con* Φ *en* $\boldsymbol{VAR} \setminus \{x_3\}$ *no ocurre que* $\Phi_0^*(x_7) = (\Phi_0^*(x_3) + \Phi_0^*(x_3))$ *(*$\Phi_0(x_4) \in \mathbb{N}$ *y sabemos que* 7 *no es par, es decir, no existe un número natural* n *tal que* $7 = 2n$*). Por tanto* $v_{\Phi^*}(\exists x_3(x_7 \doteq f_3^2(x_3, x_3))) = 0$*, y por tanto* $v_{\Phi^*}(\forall x_7(\exists x_3(x_7 \doteq f_3^2(x_3, x_3))) = 0$*. Para* Ψ *ocurre algo parecido.*

Para saber más sobre interpretaciones de fórmulas en modelos se pueden consultar textos como [18] capítulo 2.

Por cómo se definen las asignaciones se puede sospechar que el valor de una fórmula depende de la estructura en la que se encuentre trabajando, lo cual es cierto, pero por los ejemplos anteriores, se observa que el valor de una fórmula φ depende también de la asignación que se esté considerando. Sin embargo, como lo muestra el siguiente lema (cuya demostración se puede encontrar en libros de lógica como por ejemplo [18]), el valor de una fórmula respecto de una asignación no depende de la asignación como tal, sino más bien, de los valores que se le asignen a las variables libres que ocurren en la fórmula.

Lema 1.21. *Sea* $\mathscr{L}$ *un lenguaje,* $\mathfrak{A}$ *una interpretación,* t *es un término,* φ *una fórmula y* Φ *y* Φ_0 *son asignaciones.*

(a) Si Φ *y* Φ_0 *coinciden en, al menos, las variables del término* t*, entonces* $\Phi^*(t) = \Phi_0^*(t)$*.*

(b) Si $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ *y* Φ *y* Φ_0 *coinciden en* $\{x_1, \ldots, x_n\}$*, entonces* $v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ *si y sólo si* $v_{\Phi_0^*}(\varphi) = 1$*.*

A continuación, se introducirá una notación que nos será de mucha utilidad cuando se esté trabajando con propiedades de las interpretaciones.

Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje, t un término, $\mathfrak{A}$ una interpretación del lenguaje y $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$. Entonces es posible encontrar una asignación $\Phi_{\mathfrak{A}}$ tal que $\Phi_{\mathfrak{A}}(x_{i_j}) = a_{i_j}$, para $1 \leq j \leq n$. Si las variables de t ocurren en $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces defínase el **valor** del término t respecto de $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$, denotado por $t[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$, como

$$t[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] = \Phi_{\mathfrak{A}}^*(t).$$

Por el lema anterior, $t[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ está bien definido, es decir, no depende de la asignación $\Phi_{\mathfrak{A}}$. Además, $t[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ satisfacen que

a) $x_{i_j}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] = a_{i_j}$;

b) $c_k[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] = \mathscr{F}(c_k)$;

c) $f_k^m(t_1, \ldots, t_m)[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] = \mathscr{F}(f_k^m)(t_1[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}], \ldots, t_m[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}])$.

Ocurre algo parecido con las fórmulas. Si φ es una fórmula del lenguaje, entonces existe una asignación $\Phi_{\mathfrak{A}}$ tal que $\Phi_{\mathfrak{A}}(x_{i_j}) = a_{i_j}$, para $1 \leq j \leq n$. Si $FV(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces se dirá que $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ **satisface** φ en $\mathfrak{A}$ si $v_{\Phi_{\mathfrak{A}}^*}(\varphi) = 1$ y se denotará por

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}].$$

Como antes, $\mathfrak{A} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ está bien definido por el lema anterior.

Así, la notación $\mathfrak{A} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ indica que existe una asignación tal que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\Phi(x_{i_j}) = a_{i_j}$ y $v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$ (o equivalentemente que toda asignación tal que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ $\Phi(x_{i_j}) = a_{i_j}$, $v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$). Como antes, por cómo se definió $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$, si $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in A$, $\Phi_{\mathfrak{A}}$ es tal que $\Phi_{\mathfrak{A}}(x_{i_j}) = a_{i_j}$, para $1 \leq j \leq n$ y $FV(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, entonces

a) Si $\varphi = t_1 \doteq t_2$, $\mathfrak{A} \vDash t_1 \doteq t_2[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(t_1 \doteq t_2) = 1$ si y sólo si $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1) = \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_2)$ si y sólo si $t_1[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}] = t_2[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$.

b) Si $\varphi = A^m_k(t_1, \dots, t_m)$, $\mathfrak{A} \vDash A^m_k(t_1, \dots, t_m)[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(A^m_k(t_1, \dots, t_m)) = 1$ si y sólo si $(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_m)) \in \mathscr{F}(A^m_k)$ si y sólo si $(t_1[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}], \dots, t_1[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]) \in \mathscr{F}(A^m_k)$.

c) Si $\varphi = \neg\psi$, $\mathfrak{A} \vDash \neg\psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\neg\psi) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi) = 0$ si y sólo si $\mathfrak{A} \nvDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$.

d) Si $\varphi = \psi \wedge \gamma$, $\mathfrak{A} \vDash (\psi \wedge \gamma)[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi \wedge \gamma) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi) = 1$ y $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\gamma) = 1$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ y $\mathfrak{A} \vDash \gamma[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$.

e) Si $\varphi = \psi \vee \gamma$, $\mathfrak{A} \vDash (\psi \vee \gamma)[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi \vee \gamma) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi) = 1$ o $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\gamma) = 1$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ o $\mathfrak{A} \vDash \gamma[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$.

f) Si $\varphi = \psi \to \gamma$, $\mathfrak{A} \vDash (\psi \to \gamma)[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi \to \gamma) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi) = 0$ o $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\gamma) = 1$ si y sólo si $\mathfrak{A} \nvDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ o $\mathfrak{A} \vDash \gamma[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$.

g) Si $\varphi = \psi \leftrightarrow \gamma$, $\mathfrak{A} \vDash (\psi \leftrightarrow \gamma)[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi \leftrightarrow \gamma) = 1$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\psi) = v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\gamma)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ siempre que $\mathfrak{A} \vDash \gamma[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ y viceversa.

h) Si $\varphi = \forall x_k \psi$, $\mathfrak{A} \vDash \forall x_k \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\forall x_k \psi) = 1$ si y sólo si para cualquier asignación Φ_0 que difiera de $\Phi_{\mathfrak{A}}$ en, posiblemente, x_k satisface $v_{\Phi^*_0}(\psi) = 1$ si y sólo si para cualquier $a \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_j, a, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_n}]$.

i) Si $\varphi = \exists x_k \psi$, $\mathfrak{A} \vDash \exists x_k \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ si y sólo si $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(\exists x_k \psi) = 1$ si y sólo si existe una asignación Φ_0 que difiere de $\Phi_{\mathfrak{A}}$ en, posiblemente, x_k tal que $v_{\Phi^*_0}(\psi) = 1$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_j}, a, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_n}]$.

Conviene notar una distinción entre la notación que se presenta aquí y la notación que se usa en el libro [1] ya que en ese libro se prefiere que $V(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ pues si se tiene la fórmula $\exists x \exists y \varphi(x_1, \dots, x_n)$, entonces las variables que importan, en una primera instancia, son $\{x, x_1, \dots, x_n\}$; sin embargo, a la hora de querer ver qué ocurre con la fórmula $\exists y \varphi(x_1, \dots, x_n)$ y las variables que ahora importan son $x, y, x_1, \dots, x_n$ y así sucesivamente. Por lo cual, para evitar el tener que estar añadiendo nuevos elementos y para evidenciar que la fórmula depende de los valores que toman las variables $x, y, x_1, \dots, x_n$ es que se prefiere que $V(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$. Sin embargo, si se toma como ejemplo la fórmula $\exists x \varphi(x_1, \dots, x_n)$, en realidad no importa si $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, o no, pues

$$\mathfrak{A} \vDash \exists x \varphi[a_1 \dots, a_n] \iff \mathfrak{A} \vDash \exists x \varphi[a, a_1, \dots, a_n],$$

donde en el último se está "sustituyendo" a x por a. Esto lo que nos dice es que al final de cuentas la fórmula es cierta, o no, independientemente de si todas las variables que ocurren en la fórmula son consideradas dentro de la lista $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Sintácticamente se sabe que hay algunas fórmulas que tienen un "buen" comportamiento, dichas fórmulas son conocidas como teoremas. Existe algo equivalente a los teoremas, pero vistos desde el punto de vista semántico, estas equivalencias son conocidas como fórmulas verdaderas. Como una consecuencia del Lema 1.21 se tiene que si φ es una sentencia, entonces cualesquiera dos asignaciones coinciden entre sí. Y por tanto, si φ es una sentencia y $\mathfrak{A}$ es una interpretación, entonces o φ es satisfecha por alguna asignación (o, equivalentemente, por todas), o φ no es satisfecha por ninguna asignación (o, equivalentemente, no existe una asignación que la satisface).

Definición 1.22. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje y φ una fórmula del lenguaje.*

1. *Si $\mathfrak{A}$ es una interpretación, se dice que φ es **verdadera** en la interpretación $\mathfrak{A}$, y se denota por $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, si para cualquier asignación Φ, $v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$.*

2. *Se dice que φ es **verdadera** o (**cierta**), denotado por $\vDash \varphi$, si es verdadera en cada interpretación.*

Por la definición anterior si $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ si y solo si $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ para cualesquier $a_1, \ldots, a_n \in A$. En caso de que $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi$, entonces se dice que φ es **falsa** en la interpretación. Por tanto, dada una sentencia φ, φ es verdadera en $\mathfrak{A}$ o φ es falsa en $\mathfrak{A}$, y de hecho, φ es falsa si y solo si $\neg\varphi$ es verdadera, y viceversa.

Lema 1.23. *(a) Sean $s_1, \ldots, s_n, t \in$ **TERM**, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ variables y Φ una asignación en $\mathfrak{A}$. Sea Φ_0 una asignación tal que $\Phi_0(x_k) = \Phi(x_k)$ si $k \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $\Phi_0(x_{i_j}) = \Phi^*(s_j)$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces*

$$\Phi^*(t[s_1, \ldots, s_n/x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]) = \Phi_0^*(t).$$

(b) Sean $t_1, \ldots, t_n$ términos, φ una fórmula y Φ una asignación en $\mathfrak{A}$. Sea Φ_0 una asignación tal que $\Phi_0(x_k) = \Phi(x_k)$ si $k \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $\Phi_0(x_{i_j}) = \Phi^*(t_j)$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si ninguna variable que aparece en cualquiera de los términos $t_1, \ldots, t_n$, ocurre acotada en φ, entonces

$$v_{\Phi^*}(\varphi[t_1 \ldots, t_n/x_{i_1} \ldots, x_{i_n}]) = 1 \text{ si y solo si } v_{\Phi_0^*}(\varphi) = 1$$

Algunas veces, cuando no hay riesgo de confusión, se escribe simplemente $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ para denotar a la fórmula $\varphi[t_1, \ldots, t_n/x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$, es decir, $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ es la fórmula obtenida al sustituir las ocurrencias de x_{i_j} por t_j, tal sustitución es como usualmente se define en los libros de lógica.

Observación 2. *Del Lema 1.23 se obtiene que si φ es una fórmula, $t_1 \ldots, t_n$ son términos, $V(\varphi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, $V(\varphi(t_1 \ldots, t_n)) \subseteq \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ y $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m} \in A$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi(t_1, \ldots, t_n)[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}] \iff & \text{ Existe } \Phi \text{ una asignación que cumple que } \Phi(x_{j_k}) = a_{j_k} \\
& \text{ con } 1 \leq k \leq m \text{ y } v_{\Phi^*}(\varphi(t_1, \ldots, t_n)) = 1 \\
\iff & \text{ Existe } \Phi_0 \text{ una asignación que cumple que } \Phi_0(x_k) = \Phi(x_k) \\
& \text{ con } k \notin \{i_1, \ldots, i_n\} \text{ y } \Phi_0(x_{i_r}) = \Phi^*(t_r)(= t_r[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]), \\
& \text{ con } r \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } v_{\Phi_0^*}(\varphi) = 1 \\
\iff & \mathfrak{A} \vDash \varphi[t_1[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}], \ldots, t_n[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]].
\end{aligned}$$

En particular si $t_1, \ldots, t_n$ son constantes, por ejemplo, $c_1, \ldots, c_n$, entonces $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ es una sentencia y

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi(c_1, \ldots, c_n)[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}] &\iff \mathfrak{A} \vDash \varphi[c_1[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}], \ldots, c_n[a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]] \\ &\iff \mathfrak{A} \vDash \varphi[\mathscr{F}(c_1), \ldots, \mathscr{F}(c_n)].\end{aligned}$$

Y debido a que $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ es una sentencia, entonces se concluye que

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(c_1, \ldots, c_n) \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi[\mathscr{F}(c_1), \ldots, \mathscr{F}(c_n)].$$

Lo anterior se puede resumir en que: la fórmula obtenida al reemplazar sus variables libres por símbolos constantes es cierta en la interpretación si y sólo si los valores de todas las constantes satisfacen la fórmula original en la interpretación.

A continuación, se presentarán algunas definiciones útiles cuando se estudia la parte semántica del cálculo predicativo.

Definición 1.24. 1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas. Se dice que $\mathfrak{A}$ es **modelo** de Γ, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, si toda fórmula de Γ es verdadera en la interpretación $\mathfrak{A}$.*

2. *Sea Γ un conjunto de fórmulas. Se dice que Γ es **satisfacible** si existe un modelo de Γ.*

Definición 1.25. *Sea φ una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas, se dice que φ es **consecuencia** de Γ, denotado por $\Gamma \vDash \varphi$, si en cada interpretación, toda asignación que satisface cada fórmula de Γ, también satisface φ.*

Por tanto, si Γ, consta de sentencias y φ es sentencia, entonces φ es consecuencia de Γ si en todo modelo de Γ, φ es verdadera.

Definición 1.26. *Una **teoría** T, en el lenguaje $\mathscr{L}$, es un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$.*

Puesto que una teoría es un conjunto de fórmulas, entonces se puede hablar de modelos de una teoría, teorías satisfacibles, etc.

Una noción importante entre modelos de un mismo lenguaje es la noción de *isomorfismo* de modelos.

Definición 1.27. *Sean $\mathfrak{A} = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, \mathscr{F}_{\mathfrak{B}})$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **isomorfos**, lo cual se donotado por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe una función $f : A \longrightarrow B$ biyectiva que satisface:*

1. *Para cada símbolo relacional de aridad n, A_m^n, y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple que*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_m^n) \text{ si y solo si } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_m^n).$$

2. *Para cada símbolo funcional de aridad n, f_m^n, y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple que*

$$f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n)(a_1, \ldots, a_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_m^n)(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

3. Para cada símbolo constante, c_n, se cumple que

$$f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n)$$

*A la función f se le llama **isomorfismo** de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y se denota por $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

A grandes rasgos se puede decir que un isomorfismo entre los modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es una función que *traslada* las propiedades o comportamientos de un modelo al otro.

Una de las nociones más importantes que vamos a utilizar es la de submodelos. Un submodelo es un modelo, del mismo lenguaje, tal que su universo es subconjunto del universo original y tal que las interpretaciones de los símbolos del lenguaje, en el submodelo, son las mismas interpretaciones de los símbolos del lenguaje en el modelo original "restringidas" al submodelo.

Definición 1.28. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es **submodelo** de $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si se cumple que $A \subseteq B$ y*

1. Para cada símbolo predicativo de aridad n, A^n_m, se cumple que

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) \cap A^n.$$

2. Para cada símbolo funcional de aridad n, f^n_m, se cumple que

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)_{\restriction A^n}.$$

3. Para cada símbolo constante, c_n, se cumple que

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n).$$

*En caso de que $\mathfrak{A}$ sea submodelo de $\mathfrak{B}$, también se suele decir que $\mathfrak{B}$ es una **extensión** de $\mathfrak{A}$.*

Se usará $\subseteq$ para denotar la relación de submodelo, entre modelos de un lenguaje $\mathscr{L}$. Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}$ no es $\mathfrak{B}$, entonces se dice que $\mathfrak{A}$ es un submodelo propio de $\mathfrak{B}$. Se prueba que $\subseteq$ es una relación de orden parcial y que si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $|A| \leq |B|$, esto último simplemente porque $A \subseteq B$.

Cuando se trabaja con submodelos, una de las cualidades más importante que se desea manipular es la de modelos elementalmente equivalentes.

Definición 1.29. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje. Se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **elementalmente equivalentes**, denotado por $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si toda sentencia verdadera en $\mathfrak{A}$ es verdadera en $\mathfrak{B}$, y toda sentencia que es verdadera en $\mathfrak{B}$ lo es en $\mathfrak{A}$.*

Definición 1.30. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ está **encajado isomórficamente** en $\mathfrak{B}$ si existe una interpretación $\mathfrak{C}$ de $\mathscr{L}$ y una función f tal que $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$. En este caso f se llamará un **isomorfismo de encaje** de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.*

1.2.1. Algunos Resultados Importantes en Lógica

A continuación, se presentarán algunos resultados clásicos de lógica los cuales son esenciales en el desarrollo de esta tesis y cuya demostración se encuentra en muchos textos clásicos de lógica como por ejemplo [18] y también en textos de teoría de modelos como [1].

Teorema 1.31. ***(Teorema de Completitud Extendido)****. Sea* Γ *un conjunto de sentencias de* $\mathscr{L}$. Γ *es consistente si y sólo si* Γ *es satisfacible.*

Teorema 1.32. ***(Teorema de Completitud de Gödel)****. Sea* φ *una sentencia de* $\mathscr{L}$*. Entonces* φ *es un teorema si y sólo si* φ *es verdadera.*

Teorema 1.33. ***(Teorema de Compacidad)****. Sea* Γ *un conjunto de sentencias.* Γ *es satisfacible si y sólo si cada subconjunto finito de* Γ *es satisfacible.*

Los siguientes dos teoremas serán especialmente importantes cuando se expongan ejemplos del uso de la teoría de modelos, pues estos resultados son los que nos permitirán obtener submodelos (o extensiones) elementales de cualquier cardinalidad. Al igual que los anteriores tres teoremas no presentaremos su demostración.

Teorema 1.34. ***(El teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente)****. Toda teoría* T *consistente de* $\mathscr{L}$ *tiene un modelo de cardinalidad a lo más* $\|\mathscr{L}\|$*.*

Teorema 1.35. ***(El teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente)****. Si la teoría* T *tiene un modelo infinito, entonces* T *tiene un modelo de cualquier cardinalidad* $\kappa \geq \|\mathscr{L}\|$*.*

Existen otras versiones de los teoremas de ascendencia y descendencia los cuales tienen un poco más de sentido con los nombres, sin embargo, para el propósito de esta tesis se usarán estas versiones.

1.2.2. Submodelos Elementales

Las nociones de ser submodelos y de ser modelos elementalmente equivalentes ya se han definido; la combinación natural de estos dos nos da como resultado modelos los cuales son submodelos (o extensiones) "elementalmente equivalentes".

Definición 1.36. *Sea* $\mathscr{L}$ *un lenguaje y* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *interpretaciones del lenguaje. Se dice que* $\mathfrak{A}$ *es un* ***submodelo elemental*** *de* $\mathfrak{B}$*, denotado por* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$*, si*

1. $\mathfrak{A}$ *es submodelo de* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.
2. *Para cualquier fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *y cualesquiera* $a_1 \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Si $\mathfrak{A}$ *es submodelo elemental de* $\mathfrak{B}$*, también se dice que* $\mathfrak{B}$ *es una* ***extensión elemental*** *de* $\mathfrak{A}$*.*

Recordando que podemos entender a los términos como los objetos y a las fórmulas como las propiedades, entonces ser submodelo elemental es algo más especial que ser simplemente modelo puesto que, además de ser submodelo, tienen la peculiaridad de que los elementos en común tienen las mismas propiedades de primer orden con respecto a ambos modelos, esto es, un submodelo elemental y el modelo original piensan lo mismo de los objetos que tienen en común, piensan lo mismo de aquello que pueden ver.

Antes de continuar debemos de aclarar que se eligió usar la notación para submodelos elementales $\preceq$ en lugar de la notación tradicional $\prec$, la cual es la notación común en los libros de teoría de modelos. La razón es porque para cualquier interpretación $\mathfrak{A}$, se cumple que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}$. En la notación que se está proponiendo se usará $\prec$ en caso de que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}$ no sea igual a $\mathfrak{B}$.

Algunas propiedades básicas de los submodelos elementales son las siguientes.

Proposición 1.37. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretacones del lenguaje $\mathscr{L}$. Entonces:*

(I) $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}$.

(II) *Si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$.*

(III) *Si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.*

Demostración: Claramente $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ (pues $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) \cap A^n = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ y $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)_{\restriction A^n} = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)$). Evidentemente si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula y $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Ahora, supóngase que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y que $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$. Entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) \cap A^n$ y $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) \cap B^n$, entonces tenemos que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) = (\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) \cap B^n) \cap A^n$ y como $A \subseteq B$, entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) \cap A^n$. Por otro lado, $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)_{\restriction A^n}$, $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)_{\restriction B^n}$ y $A \subseteq B$, entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m) = (\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)_{\restriction B^n})_{\restriction A^n} = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)_{\restriction A^n}$. Finalmente $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(c_n)$, así, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$. Ahora, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Ya que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, si $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n],$$

y como $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, si $b_1, \ldots, b_n \in B$, entonces

$$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{C} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n].$$

Debido a que $A \subseteq B$, entonces para cualesquier $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{C} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Por último, se verificará que se cumple el tercer inciso. Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in A \subseteq B$, entonces tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{C} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

$\square$

Los siguientes resultados, entre otras cosas, demuestran el porqué del interés en los submodelos elementales: un submodelo elemental es un submodelo, en ocasiones más pequeño que el modelo original, en el cual son válidas exactamente las mismas cosas.

Definición 1.38. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Sea $f : A \longrightarrow B$. Se dice que f es un* ***encaje elemental*** *de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, denotado por $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cada $a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple que*

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Observación 3. *Ya que se está trabajando con teorías de primer orden con igualdad, entonces se puede ver que si $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, entonces f es inyectiva.*

Observación 4. *Es fácil ver que si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces*

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \text{ si y solo si } i_A : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}.$$

Esto es, si tenemos que $\mathfrak{A}$ es submodelo de $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ es submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ si y solo si la función inclusión $i_A : A \longrightarrow B$, tal que $i_A(a) = a$, es un encaje elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Lema 1.39. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Si $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.*

Demostración: Suponga que $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Se probará por inducción sobre la complejidad que

1. $f(t[a_1, \ldots, a_n]) = t[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$
2. $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$

1. Si $t = x_i$ y $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, entonces
$$f(t[a_1, \ldots, a_n]) = f(a_i) = t[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$
2. Si $t = c_n$, entonces $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ y
$$f(t[a_1, \ldots, a_n]) = f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n) = t[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$
3. Si $t = f_k^m(t_1, \ldots, t_m)$, t_i satisface lo deseado, $1 \leq i \leq m$ y $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, entonces
$$\begin{aligned} f(t[a_1, \ldots, a_n]) =& f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_k^m)(t_1[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m[a_1, \ldots, a_n])) \\ =& \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_k^m)(f(t_1[a_1, \ldots, a_n]), \ldots, f(t_m[a_1, \ldots, a_n])) \\ =& \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_k^m)(t_1[f(a_1), \ldots, f(a_n)], \ldots, t_n[f(a_1), \ldots, f(a_n)]) \\ =& t[f(a_1), \ldots, f(a_n)]. \end{aligned}$$
   Donde la segunda igualdad se debe a que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y la tercera igualdad se cumple por hipótesis inductiva.

Ahora, supóngase que $a_1 \ldots, a_n \in A$.

1. Si $\varphi = t_1 \doteq t_2$ y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff t_1[a_1, \ldots, a_n] = t_2[a_1, \ldots, a_n] \\
&\iff f(t_1[a_1, \ldots, a_n]) = f(t_2[a_1, \ldots, a_n]) \\
&\iff t_1[f(a_1), \ldots, f(a_n)] = t_2[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]
\end{aligned}$$

   La segunda equivalencia se cumple porque f es una función biyectiva, y la tercera equivalencia es válida por lo que se demostró anteriormente.

2. Si $\varphi = A_k^m(t_1, \ldots, t_m)$ y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff (t_1[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m[a_1, \ldots, a_n]) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_k^m) \\
&\iff (f(t_1[a_1, \ldots, a_n]), \ldots, f(t_m[a_1, \ldots, a_n])) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_k^m) \\
&\iff (t_1[f(a_1), \ldots, f(a_n)], \ldots, t_m[f(a_1), \ldots, f(a_n)]) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_k^m) \\
&\iff \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]
\end{aligned}$$

   La segunda equivalencia se cumple porque f es un isomorfismo y la tercera equivalencia se cumple por lo que se demostró al principio.

3. Si $\varphi = \neg\psi$, ψ cumple lo deseado y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff \mathfrak{A} \not\models \psi[a_1, \ldots, a_n] \\
&\iff \mathfrak{B} \not\models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]
\end{aligned}$$

4. Si $\varphi = \psi \wedge \gamma$, ψ y γ cumplen lo deseado y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathfrak{A} \models \gamma[a_1, \ldots, a_n] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \text{ y } \mathfrak{B} \models \gamma[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]
\end{aligned}$$

5. Si $\varphi = \exists x_k \psi$, ψ cumple lo deseado y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff \text{ Existe } a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_k, a, a_{k+1}, \ldots, a_n] \\
&\iff \text{ Existe } b \in B\ \mathfrak{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_k), f(b), f(a_{k+1}), \ldots, f(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]
\end{aligned}$$

   En la segunda equivalencia, la necesidad se cumple porque $A \subseteq B$ y por hipótesis inductiva y la suficiencia se cumple porque f es sobreyectiva y por hipótesis inductiva.

$\square$

Lema 1.40. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Si existe una función f tal que $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Demostración: Supongáse que φ es una sentencia y $V(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$; sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, ya que f es un encaje elemental entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Como φ es sentencia, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$. Por tanto,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

□

Como una consecuencia de los lemas 1.39, 1.40 y de la Observación 4 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.41. *Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Entonces*

1. *$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces existe un encaje elemental $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.*
2. *Existe un encaje elemental $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Debido a la Observación 4 y al corolario anterior se concluye un hecho importante sobre submodelos elementales. Si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, esto es, si $\mathfrak{A}$ es un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ demuestran las mismas sentencias. Por esto, si se tiene un modelo de un lenguaje, por ejemplo, el lenguaje de la teoría de conjuntos $\mathscr{L} = \{\in\}$, y se encuentra un submodelo (o extensión) elemental, entonces se está encontrando un modelo, que puede ser más pequeño (o más grande), y que demuestra las mismas sentencias que tu modelo original.

Ejemplo 1.42. *Sea $\mathscr{L} = \{<\}$ un lenguaje y $(\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$, con $<$ las relaciones de orden usuales, interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$. Es evidente que $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n - 1$ es un isomorfismo, así por el Lema 1.39, $f : (\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$ y por el Lema 1.40 $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$. Sin embargo, $(\mathbb{N}, <) \not\preceq (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$ pues $1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y*

$$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \models \forall x(x \neq y \to y < x)[1].$$

Pero

$$(\mathbb{N}, <) \not\models \forall x(x \neq y \to y < x)[1].$$

El ejemplo anterior nos da dos modelos, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, que son elementalmente equivalentes, pero que $\mathfrak{A} \not\preceq \mathfrak{B}$. Este ejemplo nos permite concluir que las nociones de ser submodelo elemental y ser elementalmente equivalentes son distintas. Si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, pero si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ no necesariamente $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Con los encajes elementales es posible obtener una caracterización de los submodelos elementales (Observación 4), sin embargo, esta caracterización no resulta ser muy útil. Afortunadamente, existe una forma "rápida" de identificar cuándo un submodelo es elemental. Para ello es necesario notar que si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces las únicas fórmulas que podrían presentar algún tipo de problema son las fórmulas con cuantificadores. Si φ no tiene cuantificadores, no es difícil convencerse que φ es satisfecha por $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathfrak{A}$ si y sólo si es satisfecha por $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathfrak{B}$, esto porque los símbolos del lenguaje se interpretan de la "misma" forma en $\mathfrak{A}$ y en $\mathfrak{B}$. Así, solo es cuestión de revisar qué ocurre con las fórmulas cuantificadas; sin embargo, esto se reduce aún más, a fórmulas de la forma $\exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ como se muestra a continuación.

Proposición 1.43. ***(El Criterio de Tarski-Vaught)****. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ si y solo si para cualquier fórmula de la forma $\exists x\varphi$, con $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_i, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$,*

Si $\mathfrak{B} \vDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_i, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]$.

Demostración: Supóngase que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Sea φ como antes y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Si $\mathfrak{B} \vDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, así, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_i, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_i, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]$.

La otra implicación se demostrará por inducción.

(a) Primero se demostrará que para cualquier término t, el valor de t respecto una asignación, digamos Φ, en $\mathfrak{A}$ coincide con el valor de t respecto de esa misma asignación Φ en $\mathfrak{B}$.

(b) Después, se verá que para cualquier fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquiera $a_1 \ldots, a_n \in A$
$$\mathfrak{A} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n].$$

Para el (a), primero nótese que si Φ es una asignación en $\mathfrak{A}$, entonces la misma Φ es una asignación de $\mathfrak{B}$, pues $A \subseteq B$. Ahora, denotemos por $\Phi^*_{\mathfrak{A}}$ la extensión en $\mathfrak{A}$, definida en **TERM** inducida por Φ y por $\Phi^*_{\mathfrak{B}}$ la extensión en $\mathfrak{B}$, definida en **TERM** inducida por Φ.

(a) Si $t = x_n$, entonces $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi(x_n) = \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t)$.

(b) Si $t = c_n$, entonces $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n) = \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t)$

(c) Si $t = f^n_m(t_1 \ldots, t_n)$ y $t_1, \ldots, t_n$ satisfacen lo deseado, entonces
$$\begin{aligned}\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) &= \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n))\\ &= \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n))\\ &= \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(\Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_n))\\ &= \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t)\end{aligned}$$

La segunda igualdad se cumple por qué $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y la tercera igualdad se cumple por hipótesis inductiva.

Ahora, probemos por inducción que si: $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces
$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

(a) Si $\varphi = t_1 \doteq t_2$ y supóngase que $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces
$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i \text{ y } v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(t_1 \doteq t_2) = 1\\ &\iff \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i \text{ y } \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1) = \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_2)\\ &\iff \Phi_{\mathfrak{B}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{B}}(x_i) = a_i \text{ y } \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_1) = \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_2)\\ &\iff \Phi_{\mathfrak{B}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{B}}(x_i) = a_i \text{ y } v_{\Phi^*_{\mathfrak{B}}}(t_1 \doteq t_2) = 1\\ &\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]\end{aligned}$$

La tercera equivalencia se cumple por lo que se demostró anteriormente.

(b) Si $\varphi = A_k^m(t_1,\ldots,t_m)$ y supóngase que $\varphi = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ y $a_1,\ldots,a_n \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] &\iff \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i \text{ y } v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}}}(A_k^m(t_1,\ldots,t_m)) = 1\\
&\iff \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i \text{ y } (\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1),\ldots,\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_k^m)\\
&\iff \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i \text{ y } (\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1),\ldots,\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_k^m)\\
&\iff \Phi_{\mathfrak{B}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{B}}(x_i) = a_i \text{ y } (\Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_1),\ldots,\Phi^*_{\mathfrak{B}}(t_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_k^m)\\
&\iff \Phi_{\mathfrak{B}} \text{ es tal que } \Phi_{\mathfrak{B}}(x_i) = a_i \text{ y } v_{\Phi^*_{\mathfrak{B}}}(A_k^m(t_1,\ldots,t_m)) = 1\\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]
\end{aligned}$$

La tercera equivalencia se cumple porque $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

(c) Si $\varphi = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $\varphi = \neg\psi$, ψ cumple lo deseado y sean $a_1,\ldots,a_n \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] &\iff \mathfrak{A} \nvDash \psi[a_1,\ldots,a_n]\\
&\iff \mathfrak{B} \nvDash \psi[a_1,\ldots,a_n]\\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]
\end{aligned}$$

(d) Si $\varphi = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $\varphi = \psi \wedge \gamma$, ψ y γ cumplen lo deseado y sean $a_1,\ldots,a_n \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] &\iff \mathfrak{A} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_n] \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \gamma[a_1,\ldots,a_n]\\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_n] \text{ y } \mathfrak{B} \vDash \gamma[a_1,\ldots,a_n]\\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]
\end{aligned}$$

(e) Si $\varphi = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $\varphi = \exists x\psi$, ψ cumple lo deseado y sean $a_1,\ldots,a_n \in A$. Si $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_i,a,a_{i+1},\ldots,a_n]$. Como $\psi = \psi(x_1,\ldots,x_i,x,x_{i+1},\ldots,x_n)$, $a_1,\ldots,a_i,a,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ y ψ cumple lo deseado, entonces $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_i,a,a_{i+1},\ldots,a_n]$ y por tanto $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]$. Por otro lado, si $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]$, entonces existe $a \in A \subseteq B$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_i,a,a_{i+1},\ldots,a_n]$. Luego por hipotesís inductiva, $\mathfrak{B} \vDash \psi[a_1,\ldots,a_i,a,a_{i+1},\ldots,a_n]$ y como $a \in B$, entonces se concluye que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]$.

$\square$

Los siguientes resultados que se presentarán son los teoremas de "descendencia" y "ascendencia" sobre submodelos elementales. Estos resultados son muy importantes, puesto que gracias a ellos es que la técnica de submodelos elementales es tan popular y útil. Pero antes unos lemas auxiliares.

Proposición 1.44. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$, entonces son equivalentes:*

(a) Existe $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Existe $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$ y $g : A \longrightarrow C$ tal que $g : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ (f extiende a g).

(c) *Existe una extensión elemental* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ *y un isomorfismo* $g : \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ *(que extiende a* f*).*

Demostración: Primero se mostrará que (a) implica (b). Sea $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Defínase la interpretación $\mathfrak{C}$ de la siguiente forma: el universo $C = Im(f) = f[A] \subseteq B$ y la función de interpretación $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}$ se define como sigue:

1. $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) = \{(c_1, \ldots, c_n) \in C^n : (a_1 \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ y $c_i = f(a_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$;
2. $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)_{\restriction C^n}$;
3. $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(c_k) = f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k))$.

Es fácil ver qué $\mathfrak{C}$ es una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$, pues $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) \subseteq C^n$ y $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(c_k) \in C$. Además, si $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$, entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(c_1, \ldots, c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(c_1 \ldots, c_n)$. Como $C = f[A]$, entonces existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $f(a_i) = c_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por tanto $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(c_1, \ldots, c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Puesto que

$$\mathfrak{A} \vDash x \doteq f^n_m(x_1, \ldots, x_n)[\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n), a_1 \ldots, a_n],$$

y como f es un encaje elemental, entonces

$$\mathfrak{B} \vDash x \doteq f^n_m(x_1, \ldots, x_n)[f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n)), f(a_1), \ldots, f(a_n)],$$

es decir, $C \ni f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(c_1, \ldots, c_n)$. Es decir, $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m) : C^n \to C$.

Sea $g = f$, entonces $g : A \to C$. Por la Observación 3 g es inyectiva y claramente g es sobreyectiva, así, g es una biyección de A en C. Más aún, g es un isomorfismo entre los modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Si $a_1, \ldots, a_n \in A$, por definición de la interpretación de símbolos relacionales y ya que $f = g$ se tiene que $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ si y sólo si $(g(a_1), \ldots, g(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m)$.

Por cómo se definió la interpretación de símbolos constantes y porque $f = g$, entonces solo resta probar que se cumple la condición 2 de la definición de isomorfismo de modelos (Definición 1.27). Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, ya que $f(a_1), \ldots, f(a_n) \in C$, entonces

$$\begin{aligned} g(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n)) &= f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(a_1 \ldots, a_n)) \\ &= \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \\ &= \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \\ &= \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(g(a_1), \ldots, g(a_n)), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se demostró cuando se probó que $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)(c_1, \ldots, c_n) \in C$. Así, $g : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$.

Finalmente, se verá que $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$. Primero se verá que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$. Por definición, $C \subseteq B$. Si $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m)$, entonces existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ y $f(a_i) = c_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$\mathfrak{A} \vDash A^n_m(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n],$$

entonces

$$\mathfrak{B} \vDash A^n_m(x_1, \ldots, x_n)[f(a_1), \ldots, f(a_n)],$$

es decir, $(c_1,\dots,c_n) = (f(a_1),\dots,f(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m)$. Por tanto, $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) \subseteq \mathscr{F}_{\mathfrak{B}} \cap C^n$. Por otro lado, si $(b_1,\dots,b_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) \cap C^n$, entonces existe $a_1,\dots,a_n \in A$ tales que $f(a_i) = b_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Así, $(f(a_1),\dots,f(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m)$, es decir,

$$\mathfrak{B} \vDash A^n_m(x_1,\dots,x_n)[f(a_1),\dots,f(a_n)],$$

así,

$$\mathfrak{A} \vDash A^n_m(x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n].$$

Por tanto, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ y así $(f(a_1),\dots,f(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m)$. Se concluye que $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) \cap C^n$. La segunda parte de la Definición 1.27 se cumple por definición de $\mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f^n_m)$ y finalmente, ya que

$$\mathfrak{A} \vDash x \doteq c_k[\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k)],$$

entonces

$$\mathfrak{B} \vDash x \doteq c_k[f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k))],$$

es decir, $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_k) = f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(c_k)$. Por tanto $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.

Ahora se mostrará que $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$. Sean $c_1,\dots,c_n \in C$ y $\varphi = \varphi(x,x_1,\dots,x_n)$ y supóngase que $\mathfrak{B} \vDash \exists x\varphi[c_1,\dots,c_n]$. Ya que existen $a_1,\dots,a_n \in A$ tales que $f(a_i) = c_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ y como f es un encaje elemental, entonces $\mathfrak{A} \vDash \exists x\varphi[a_1,\dots,a_n]$. Y como g es un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{C}$, entonces por el Lema 1.39, se tiene que $\mathfrak{C} \vDash \exists x\varphi[g(a_1),\dots,g(a_n)]$. Entonces existe $c \in C$ tal que $\mathfrak{C} \vDash \varphi[c, g(a_1),\dots,g(a_n)]$. Al igual que antes, sea $a \in A$ es tal que $g(a) = c$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, a_1,\dots,a_n]$ (pues g es un encaje elemental), y como f es un encaje elemental, entonces $\mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a), f(a_1),\dots,f(a_n)]$ y como $f = g$ se concluye que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[c, a_i,\dots,a_n]$.

A continuación, se demostrará (b) implica (c). Sea $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$ y $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$. Defínase

$$D = A \cup \{x_b : b \in B \setminus Im(f)\}$$

de tal forma que $x_b \notin A$, para cada $b \in B \setminus Im(f)$, y si $a, b \in B \setminus Im(f)$ y $a \neq b$, entonces $x_a \neq x_b$. Ya que las funciones f y $\{(x_b, b) : b \in B \setminus Im(f)\}$ son funciones compatibles (pues sus dominios son ajenos), entonces considérese la función

$$g = f \cup \{(x_b, b) : b \in B \setminus Im(f)\}$$

la cual tiene como dominio D y cuyo rango está en B. Es evidente que g extiende a f y que $A \subseteq D$. Por otro lado, es fácil de demostrar que g es biyectiva. Si $g(a) = g(b)$, entonces por cómo se definió la función g solo existen dos casos posibles, $a, b \in A$, y así $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(b)$ y como f es biyectiva se sigue que $a = b$; el otro caso posible es que en realidad $a = x_c$ y $b = x_d$, con $c, d \in B \setminus Im(f)$ en cuyo caso $c = g(a) = g(b) = d$, por tanto g es inyectiva. Sea $b \in B$, si $b \in Im(f)$, entonces $b = f(a)$, así $g(a) = b$ y si $b \notin Im(f)$, entonces $g(x_b) = b$. Por tanto $g : D \to B$ es biyectiva. Defínase ahora la función de interpretación $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}$ como sigue:

1. $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(A^n_m) = \{(d_1,\dots,d_n) \in D^n : (g(d_1),\dots,g(d_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m)\}$;

2. Sean $d_1 \dots, d_n \in D$, entonces existe $d \in D$ tal que $g(d) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)(g(d_1),\dots,g(d_n))$, así, sea $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f^n_m)(d_1,\dots,d_n) = d$;

3. $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(c_k) \in D$ tal que $g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(c_k)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_k)$.

Por definición es claro que $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}$ es en efecto una función de interpretación y, además, $g : \mathfrak{D} \cong \mathfrak{B}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A_m^n) &\iff (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(A_m^n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_m^n) \cap C^n \\
&\iff (g(a_1), \dots, g(a_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A_m^n) \cap C^n \\
&\iff (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(A_m^n) \cap A^n,
\end{aligned}$$

donde la primera equivalencia es porque f es un isomorfismo y $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$, la segunda equivalencia es porque g extiende a f y la tercera es porque g es un isomorfismo entre $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$. Sea $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, entonces

$$\begin{aligned}
f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n)(a_1, \dots, a_n)) &= \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(f_m^n)(f(a_1), \dots, f(a_n)) \\
&= \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_m^n)(f(a_1), \dots, f(a_n)) \\
&= \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_m^n)(g(a_1), \dots, g(a_n)) \\
&= g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f_m^n)(a_1, \dots, a_n)),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a que f es isomorfismo de modelos, la segunda a que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, la tercera es porque g extiende a f y la cuarta es porque g es un isomorfismo. Sin embargo, por estas mismas igualdades se tiene que $g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f_m^n)(a_1, \dots, a_n)) \in Im(f)$, es decir, que existe $a \in A$ tal que $f(a) = g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f_m^n)(a_1 \dots, a_n))$ y como g extiende a f, entonces $g(a) = g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f_m^n)(a_1, \dots, a_n))$. Finalmente, como f es biyectiva, entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(a_1 \dots, a_n) = a \in A$. Por tanto $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(f_m^n)_{\restriction A^n}$. Ya que además,

$$f(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k)) = \mathscr{F}_{\mathfrak{C}}(c_k) = \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_k) = g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(c_k))$$

(la primera igualdad se debe a que f es un isomorfismo, la segunda porque $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ y la última porque g es un isomorfismo), como además g extiende a f, entonces $g(\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k)) = g(\mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(c_k))$, y debido a que g es biyectiva, entonces $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k) = \mathscr{F}_{\mathfrak{D}}(a_k)$. Por tanto $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$.

Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g & & \\
 & \mathfrak{D} & \longrightarrow & \mathfrak{B} & \\
i_A & \uparrow & & \uparrow & i_C \\
 & \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{C} & \\
 & & f & &
\end{array}$$

en el que i_C,f y g son encajes elementales. Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ y $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] &\iff \mathfrak{C} \vDash \varphi[f(a_1), \dots, f(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[i_C(f(a_1)), \dots, i_C(f(a_n))] \\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[g(a_1), \dots, g(a_n)] \\
&\iff \mathfrak{D} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n],
\end{aligned}$$

donde la tercera equivalencia se cumple porque g extiende a f.

A continuación, se demostrará (c) implica (a). Sea $\mathfrak{C}$ una extensión elemental de $\mathfrak{A}$ y $g : \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$. Sea $f = g_{\restriction A}$, entonces $f : A \to B$. Sean $a_1 \dots, a_n \in A$ y $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula, entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] &\iff \mathfrak{C} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \\ &\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[g(a_1), \dots, g(a_n)] \\ &\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \dots, f(a_n)],\end{aligned}$$

donde la primera equivalencia se cumple porque $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ y la segunda porque $f = g_{\restriction A}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$. Por tanto $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

□

Sea $\mathfrak{A}$ una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$ y $X \subseteq A$ La expansión del lenguaje $\mathscr{L}$ al nuevo lenguaje

$$\mathscr{L}_X = \mathscr{L} \cup \{c_a : a \in X\}$$

donde c_a es un nuevo símbolo constante para cada $a \in X$, con $c_a \neq c_b$ si $a \neq b$. La expansión, natural, de la interpretación $\mathfrak{A}$ al lenguaje $\mathscr{L}_X$ será denotada por

$$(\mathfrak{A}, a)_{a \in X} \quad \text{o} \quad \mathfrak{A}_X$$

donde cada símbolo constante c_a se interpreta como a. En caso de que $X = A$, el **diagrama** de $\mathfrak{A}$, denotado por $\Delta_{\mathfrak{A}}$ es el conjunto de fórmulas atómicas y negación de fórmulas atómicas del lenguaje $\mathscr{L}_A$ y el **diagrama elemental** de $\mathfrak{A}$ es la teoría $Th((\mathfrak{A}, a)_{a \in A})$, es decir, el conjunto de todas las sentencias que se cumplen en la interpretación $(\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$.

El siguiente resultado puede interpretarse como que $\mathfrak{A}$ es "submodelo elemental" de $(\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$. Aunque técnicamente, no es un submodelo elemental pues se está tratando con distintos lenguajes.

Lema 1.45. *Sean $\mathfrak{A}$ una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$, $(\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$ la expansión de la interpretación $\mathfrak{A}$ al nuevo lenguaje $\mathscr{L}_X = \mathscr{L} \cup \{c_a : a \in X\}$ y $X \subseteq A$. Entonces para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en* $\boldsymbol{FORM}_{\mathscr{L}}$ *y cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in A$ se cumple que*

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \textit{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, a)_{a \in X} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

Demostración: Primero se verá qué ocurre con los términos. Para ello, nótese que $\mathfrak{A}$ y $(\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$ son interpretaciones de los lenguajes (diferentes), $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_X = \mathscr{L} \cup \{c_a : a \in X\}$, sin embargo, ambos tienen como universo el mismo conjunto A, así que una asignación en $\mathfrak{A}$ es una asignación en $(\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$ y viceversa. Como se hizo antes, $\Phi^*_{\mathfrak{A}}$ denotará la extensión de la asignación Φ a la interpretación $\mathfrak{A}$ y $\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}$ la extensión a la interpretación $(\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$. Sea t un término y $\Phi : \mathbf{VAR} \to A$ una asignación.

1. Si $t = x_i$, entonces
$$\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi(x_i) = \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t).$$

2. Si $t = c_k$ (donde c_k es una constante del lenguaje $\mathscr{L}$), entonces

$$\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi^*_{\mathfrak{A}}(c_k) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_k) = \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(c_k) = \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t).$$

3. Si $t = f^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathbf{TERM}_{\mathscr{L}}$ que cumplen lo deseado, entonces

$$\begin{aligned}\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) &= \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n)) \\ &= \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(f^n_m)(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n)) \\ &= \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(f^n_m)(\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_1), \ldots, \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_n)) \\ &= \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t)\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple porque $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ es una expansión de $\mathfrak{A}$ y la tercera igualdad se cumple por hipótesis inductiva.

Así se concluye que $\Phi^*_{\mathfrak{A}} = (\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)})\restriction_{\mathbf{TERM}_{\mathscr{L}}}$, es decir, que $\mathfrak{A}$ y $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ asignan el mismo valor a términos del lenguaje $\mathscr{L}$, respecto a la misma asignación.

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en $\mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

1. Si $\varphi = t_1 \doteq t_2$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\Phi_{\mathfrak{A}}$ es una asignación tal que $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i$ y $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1) = \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_2)$ si y sólo si $\Phi_{(\mathfrak{A},a)}$ es una asignación tal que $\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(x_i) = a_i$ y $\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_1) = \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_2)$ (puesto que $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t)$ para cualquier término t del lenguaje $\mathscr{L}$) si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

2. Si $\varphi = A^m_k(t_1, \ldots, t_m)$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\Phi_{\mathfrak{A}}$ es una asignación tal que $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(x_i) = a_i$ y $(\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}}(t_n)) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m)$ si y sólo si $\Phi_{(\mathfrak{A},a)}$ es una asignación tal que $\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(x_i) = a_i$ y $(\Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_1), \ldots, \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t_n)) \in \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(A^n_m)$ (puesto que $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi^*_{(\mathfrak{A},a)}(t)$ para cualquier término t del lenguaje $\mathscr{L}$ y porque $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(A^n_m)$) si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

3. Si $\varphi = \neg\psi$ y ψ cumple lo deseado. Entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \nvDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \nvDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

4. Si $\varphi = \psi \wedge \gamma$ y ψ y γ cumplen lo deseado. Entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{A} \vDash \gamma[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ y $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \gamma[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

5. Si $\varphi = \exists x\psi$ y ψ cumple lo deseado, entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

□

Proposición 1.46. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$ y $f : A \to B$ una función. Entonces f es un encaje elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A}$ es modelo del diagrama elemental de $\mathfrak{A}$.*

Demostración: Primero se demostrará que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son interpretaciones (de un mismo lenguaje), $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula en $\mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}$, entonces

1. $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$,

2. $\mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$ si y sólo si $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$,

donde $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A}$ es la expensión de la interpretasión $\mathfrak{A}$ al lenguaje $\mathscr{L}_A = \mathscr{L} \cup \{c_a : a \in A\}$ y $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A}$ es la expansión de la interpretación $\mathfrak{B}$ al lenguaje $\mathscr{L}_A$, donde $\mathscr{F}_{(\mathfrak{B},f(a))}(c_a) = f(a)$ para cada $a \in A$.

Por el Lema 1.45, se tiene que si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ esta en $\mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

También, puesto que $f(a_1), \ldots, f(a_n) \in B$, y $f[A] \subseteq B$, entonces

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \text{ si y sólo si } (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Ya que $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ es una sentencia, entonces por la Observación 2 se tiene que

$$(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_i}, \ldots, c_{a_n}) \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi[\mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(c_{a_1}), \ldots, \mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(c_{a_n})].$$

También ocurre que

$$(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ si y sólo si } (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi[\mathscr{F}_{(\mathfrak{B},f(a))}(c_{a_1}), \ldots, \mathscr{F}_{(\mathfrak{B},f(a))}(c_{a_n})].$$

Ya que $\mathscr{F}_{(\mathfrak{A},a)}(c_{a_i}) = a_i$ y $\mathscr{F}_{(\mathfrak{B},f(a))}(c_{a_i}) = f(a_i)$, entonces se concluye que

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$$

y que

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)] \text{ si y sólo si } (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}).$$

Sea φ una fórmula del lenguaje $\mathscr{L}_A$ y supóngase que $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ son las únicas constantes, en el lenguaje $\mathscr{L}_A$, de φ que no están en $\mathscr{L}$. Entonces si ψ_φ es la fórmula obtenida al sustituir las constantes c_{a_i} por una variable x'_i la cual no aparece en la fórmula φ, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces se tiene que $\varphi = \psi_\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ (donde se está reemplazando cada ocurrencia de x'_i por c_{a_i}) y además, ψ_φ está en $\mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}$.

Supóngase que $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Si $\varphi \in Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$, entonces $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi$. Luego $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \psi_\varphi(c_{a_i}, \ldots, c_{a_n})$ y así $\mathfrak{A} \vDash \psi_\varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces $\mathfrak{B} \vDash \psi_\varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$ (pues f es un encaje elemental), entonces $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \psi_\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, es decir, $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi$.

Para demostrar la suficiencia, nótese que si $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A}$ es modelo de $Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$ y φ es una sentencia del lenguaje $\mathscr{L}_A$, entonces $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi$ implica que $\varphi \in Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$ y por tanto $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi$. Por otro lado, si $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi$ y $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \nvDash \varphi$, entonces $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \neg\varphi$. Consecuentemente $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \neg\varphi$; es decir, $(\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$, lo cual es una contradicción. Así, $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \equiv (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A}$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, del lenguaje $\mathscr{L}$, y $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\iff (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \\
&\iff (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A} \vDash \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \\
&\iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)],
\end{aligned}$$

donde la tercera equivalencia se cumple porque $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ es una sentencia del lenguaje $\mathscr{L}_A$ y $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \equiv (\mathfrak{B}, f(a))_{a\in A}$. □

De las proposiciones 1.44 y 1.46, se tiene el siguiente corolario

Corolario 1.47. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ interpretaciones de un lenguaje $\mathscr{L}$. Entonces son equivalentes*

1. *Existe un encaje elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$;*
2. *Existe un isomorfismo de encaje de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$;*
3. *$\mathfrak{B}$ es isomorfo a una extensión elemental de $\mathfrak{A}$;*
4. *$\mathfrak{B}$ puede ser extendido a un modelo del diagrama elemental de $\mathfrak{A}$ (en el lenguaje $\mathscr{L}_A$).*

Los siguientes resultados pueden considerarse como fortalecimientos de los teoremas de ascendencia y descendencia de Löwenheim-Skolem-Tarski.

Teorema 1.48. *Toda interpretación infinita tiene una extensión elemental arbitrariamente grande.*

Demostración: Sea $\mathfrak{A}$ una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$. El diagrama elemental de $\mathfrak{A}$, $Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$, es consistente. Luego, por el teorema ascendente de Löwenheim-Skolem-Tarski, existe un modelo de $Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$, en $\mathscr{L}_A$, de cualquier cardinalidad κ, si $\kappa \geq \|\mathscr{L}\|$, digamos $\mathfrak{B}'$. Sea $\mathfrak{B}$, la interpretación obtenida de $\mathfrak{B}'$, al reducirla al lenguaje $\mathscr{L}$, entonces $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, b_a)_{a\in A}$. Ya que $\mathfrak{B}$ puede ser extendido a un modelo del diagrama elemental de $\mathfrak{A}$, entonces por el Corolario 1.47, $\mathfrak{B}'$ es isomorfo a una extensión elemental de $\mathfrak{A}$, en particular, $\mathfrak{A}$ es submodelo elemental de un modelo de cardinalidad $|B'| = \kappa$. $\square$

Teorema 1.49. *Sea $\mathfrak{A}$ una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$ de cardinalidad $\kappa \geq \|\mathscr{L}\|$. Si $\|\mathscr{L}\| \leq \lambda \leq \kappa$ y $X \subseteq A$ tal que $|X| \leq \lambda$, entonces existe un submodelo elemental de $\mathfrak{A}$ de cardinalidad λ que contiene a X.*

Demostración: Supóngase que $|X| = \lambda$. Sea $X_0 = X$. Para cada fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_{n_\varphi})$, defínase

$$f_{\varphi,n_\varphi,0} : X_0^{n_\varphi} \longrightarrow A,$$

tal que si $\mathfrak{A} \vDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces $f_{\varphi,n_\varphi,0}(a_1, \ldots, a_n) = a$, donde $a \in A$, tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$; en caso de que $\mathfrak{A} \nvDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces $f_{\varphi,n_\varphi,0}(a_1, \ldots, a_n)$ es arbitrario. Sea

$$X_1 = X_0 \cup \bigcup_{\varphi,n_\varphi} ran(f_{\varphi,n_\varphi,0}).$$

Para cada φ y cada n_φ se cumple que $|ran(f_{\varphi,n_\varphi,0})| \leq |X^{n_\varphi}| = \lambda$, y ya que $|\mathbf{FORM}_{\mathscr{L}}| = \|\mathscr{L}\|$ (por la Proposición 1.10), entonces

$$|X_1| \leq |X_0| + |\bigcup_{\varphi,n_\varphi} ran(f_{\varphi,n_\varphi,0})| \leq \lambda + \|\mathscr{L}\| \cdot (\aleph_0 \cdot \lambda) = \lambda.$$

Pero a su vez $|X_0| \leq |X_1|$, así concluimos que $|X_1| = \lambda$. El procedimiento se repetirá ω veces. Sea $B = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Se probará que la restricción natural de la interpretación $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ nos da como resultado una interpretación que es submodelo de $\mathfrak{A}$. Para ello nótese que $B \subseteq A$, pues cada $X_n \subseteq A$, y $|B| = \lambda$. Defínase $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(A^n_m) \cap B^n$, $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f^n_m)_{\restriction B^n}$ y $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)$. Para ver que efectivamente $(B, \mathscr{F}_{\mathfrak{B}})$ es un modelo sólo resta ver que para cada símbolo funcional, f^n_m, $ran(\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f^n_m)) \subseteq B$ y que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) \in B$, pues claramente $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(A^n_m) \subseteq B^n$.

Sean $b_1, \ldots, b_n \in B$, entonces existe un $k \in \omega$, tal que $b_1, \ldots, b_n \in X_k$. Ya que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n)(b_1, \ldots, b_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(f_m^n)(b_1, \ldots, b_n)$, entonces

$$\mathfrak{A} \vDash (x \doteq f_m^n(x_1, \ldots, x_n))[\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n].$$

Por tanto,

$$\mathfrak{A} \vDash \exists x(x \doteq f_m^n(x_1, \ldots, x_n))[b_1 \ldots, b_n].$$

Sea $\psi = x \doteq f_m^n(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $f_{\psi, n_\psi, k}(b_1, \ldots, b_n)$ es tal que

$$\mathfrak{A} \vDash (x \doteq f_m^n(x_1, \ldots, x_n))[f_{\psi, n_\psi, k}(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n].$$

Por tanto se tiene que $f_{\psi, n_\psi, k}(b_1, \ldots, b_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ y así, $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in X_{k+1} \subseteq B$. Es decir, $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_m^n) : B^n \longrightarrow B$.

Probemos ahora que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) \in B$. Ya que $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)$, entonces

$$\mathfrak{A} \vDash (x \doteq c_n)[\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n), b],$$

con $b \in B$, es decir, $b \in X_k$ para algún $k < \omega$. Entonces

$$\mathfrak{A} \vDash \exists x(x \doteq c_n)[b].$$

Luego, si $\psi = x \doteq c_n$, $f_{\psi, n_\psi, k}(b)$ es tal que

$$\mathfrak{A} \vDash (x \doteq c_n)[f_{\psi, n_\psi, k}(b), b].$$

Entonces $f_{\psi, n_\psi, k}(b) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n)$ y así $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(c_n) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(c_n) \in X_{k+1} \subseteq B$. Se concluye que $\mathfrak{B} = (B, \mathscr{F}_{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{A}$. Claramente, $X \subseteq B$ y $|B| = \lambda$.

Finalmente, veamos qué $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$. Sea $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $b_1, \ldots, b_n \in B$ y supongamos que $\mathfrak{A} \vDash \exists x \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. Existe $k \in \omega$ tal que $b_1, \ldots, b_n \in X_k$. Entonces, $f_{\varphi, n_\varphi, k}(b_1, \ldots, b_n)$ es tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f_{\varphi, n_\varphi, k}(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n]$ y $f_{\varphi, n_\varphi, k}(b_1, \ldots, b_n) \in X_{k+1} \subseteq B$. Por tanto existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[b, b_1, \ldots, b_n]$. Por el críterio de Tarski-Vaught, Proposición 1.43, se tiene que $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$. $\square$

Otra noción importante sobre modelos, la cual se usará mucho, es la noción de cadenas elementales.

Definición 1.50. *Una* ***cadena elemental de modelos*** *es una sucesión creciente de interpretaciones, del lenguaje $\mathscr{L}$*

$$\mathfrak{A}_0 \preceq \mathfrak{A}_1 \preceq \cdots \preceq \mathfrak{A}_\beta \preceq \cdots, \quad \beta < \alpha,$$

cuya longitud es α, y tal que $\mathfrak{A}_\gamma \preceq \mathfrak{A}_\beta$ si $\gamma < \beta < \alpha$.

Proposición 1.51. *Sea $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ una cadena elemental de modelos. Definamos $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ y $\mathscr{F}$ como sigue:*

(I) $\mathscr{F}(A_m^n) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(A_m^n)$.

(II) $\mathscr{F}(f_m^n) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(f_m^n)$.

(III) $\mathscr{F}(c_n) = \mathscr{F}_\beta(c_n)$*, si c_n es un símbolo constante y $\beta < \alpha$.*

Entonces $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta = (A, \mathscr{F})$ *es una interpretación del lenguaje* $\mathscr{L}$. *Más aún,* $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ *es la única interpretación con universo* $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ *y tal que* $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$

Demostración: Primero veamos qué $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ es una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$. Para cada $\beta < \alpha$, $\mathscr{F}_\beta(A^n_m) \subseteq (A_\beta)^n \subseteq A^n$; así $\mathscr{F}(A^n_m) \subseteq A^n$. Veamos ahora que $\{\mathscr{F}_\beta(f^n_m) : \beta < \alpha\}$ es una familia de funciones compatibles.

Sean $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $\mathscr{F}_\gamma(f^n_m) = \mathscr{F}_\beta(f^n_m)_{\restriction (A_\gamma)^n}$ y

$$(A_\gamma)^n = dom(\mathscr{F}_\gamma(f^n_m)) = dom(\mathscr{F}_\gamma(f^n_m)) \cap dom(\mathscr{F}_\beta(f^n_m)),$$

pues $\mathfrak{A}_\gamma \preceq \mathfrak{A}_\beta$. Así, $\mathscr{F}(f^n_m) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(f^n_m)$ es una función con dominio $\bigcup_{\beta<\alpha}(A_\beta)^n = A^n$ y rango en A. Ya que para cada $\beta < \gamma < \alpha$, $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}_\gamma$, entonces $\mathscr{F}_\beta(c_n) = \mathscr{F}_\gamma(c_n)$. Por tanto, $\mathscr{F}(c_n)$ está bien definido y $\mathscr{F}_\beta(c_n) \in A$, para cada $\beta < \alpha$. Así, obtenemos que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta = (A, \mathscr{F})$, es una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$.

Veamos ahora que para cada $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ para cada $\beta < \alpha$. Primero veamos que $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ para cada $\beta < \alpha$. Sea $\beta < \alpha$, puesto que $\mathscr{F}(A^n_m) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(A^n_m)$, entonces $\mathscr{F}_\beta(A^n_m) \subseteq \mathscr{F}(A^n_m) \cap (A_\beta)^n$. Por otro lado, si $x \in \mathscr{F}(A^n_m) \cap (A_\beta)^n$, entonces existe $\delta < \alpha$ tal que $x \in \mathscr{F}_\delta(A^n_m)$. Dado que $\delta \leq \beta$ o $\beta \leq \delta$, por hipótesis $\mathfrak{A}_\delta \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ o $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}_\delta$. Si $\mathfrak{A}_\delta \subseteq \mathfrak{A}_\beta$, entonces $\mathscr{F}_\delta(A^n_m) = \mathscr{F}_\beta(A^n_m) \cap (A_\delta)^n$ y por tanto $x \in \mathscr{F}_\beta(A^n_m)$. Por el otro lado, si $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}_\delta$, como $x \in (A_\beta)^n$ y $\mathscr{F}_\beta(A^n_m) = \mathscr{F}_\delta(A^n_m) \cap (A_\beta)^n$, entonces $x \in \mathscr{F}_\beta(A^n_m)$. Así,

$$\mathscr{F}_\beta(A^n_m) = \mathscr{F}(A^n_m) \cap (A_\beta)^n.$$

Ya que $\{\mathscr{F}_\beta(f^n_m) : \beta < \alpha\}$ es una familia de funciones compatibles y $\mathscr{F}(f^n_m) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(f^n_m)$, entonces $\mathscr{F}(f^n_m)$ extiende a cada función $\mathscr{F}_\beta(f^n_m)$, con $\beta < \alpha$. En particular $\mathscr{F}_\beta(f^n_m) = \mathscr{F}(f^n_m)_{\restriction (A_\beta)^n}$. Finalmente, por definición $\mathscr{F}(c_n) = \mathscr{F}_\beta(c_n)$, para cada $\beta < \alpha$. Concluimos que para cualquier $\beta < \alpha$ $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$.

Veamos que para cada $\beta < \alpha$, $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$. Se probará por inducción sobre la complejidad de la fórmula que si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula, para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$

$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

En la demostración de la Proposición 1.43, se mostró que, en general, si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces para cualquier término t y cualquier asignación Φ en $\mathfrak{A}$, se tiene que $\Phi^*_{\mathfrak{A}}(t) = \Phi^*_{\mathfrak{B}}(t)$, donde $\Phi_{\mathfrak{A}}(x_i) = \Phi_{\mathfrak{B}}(x_i) = \Phi(x_i)$.

1. Supóngase que $\varphi = t_1 \doteq t_2$ y supóngase que $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\beta < \alpha$ y $a_1 \ldots, a_n \in A_\beta$, entonces $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si la asignación Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}}(t_1 \doteq t_2) = 1$ si y sólo si Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $\Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}(t_1) = \Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}(t_2)$ si y sólo si Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $\Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta}(t_1) = \Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta}(t_2)$ si y sólo si la asignación Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $v_{\Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta}}(t_1 \doteq t_2) = 1$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$

$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

2. Supóngase que $\varphi = A_k^m(t_1, \ldots, t_m)$ y supóngase que $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\beta < \alpha$ y $a_1 \ldots, a_n \in A_\beta$, entonces $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si la asignación Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $v_{\Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}}(A_k^m(t_1, \ldots, t_m)) = 1$ si y sólo si Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $(\Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\mathfrak{A}_\beta}(t_m)) \in \mathscr{F}_\beta(A_k^m)$ si y sólo si Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $(\Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta}(t_1), \ldots, \Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta}(t_m)) \in \mathscr{F}(A_k^m)$ si y sólo si la asignación Φ es tal que $\Phi(x_i) = a_i$ y $v_{\Phi^*_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta}}(A_k^m(t_1, \ldots, t_m)) = 1$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$
$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

3. Si $\varphi = \neg\psi$, ψ cumple lo deseado y supóngase que $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\beta < \alpha$ y $a_1 \ldots, a_n \in A_\beta$, entonces $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{A}_\beta \nvDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \nvDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$
$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

4. Si $\varphi = \psi \wedge \gamma$, ψ y γ cumplen lo deseado y supóngase que $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\beta < \alpha$ y $a_1 \ldots, a_n \in A_\beta$, entonces $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{A}_\beta \vDash \gamma[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n]$ y $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \gamma[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$
$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

5. Si $\varphi = \exists x\psi$, ψ cumple lo deseado y supóngase que $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\beta < \alpha$ y $a_1 \ldots, a_n \in A_\beta$, entonces $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si existe $a \in A_\beta$ tal que $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Por otro lado, si existe $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe un $\delta < \alpha$ tal que $a \in A_\delta$ y $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$, podemos suponer que $\beta \leq \delta$. Debido a que ψ cumple lo deseado y $\delta < \alpha$ y $a, a_1, \ldots, a_n \in A_\delta$, entonces $\mathfrak{A}_\delta \vDash \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$ y por tanto $\mathfrak{A}_\delta \vDash \exists x\psi[a_1, \ldots, a_n]$. Como $\mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{A}_\delta$, $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$ y $\mathfrak{A}_\delta \vDash \exists x\psi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe concluimos que $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Entonces para cualquier $\beta < \alpha$ y cualesquier $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$, tenemos que
$$\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Finalmente veamos qué $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta$ es la única interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$ con universo $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ y tal que para cualquier $\beta < \alpha$, $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta$. Supóngase que $\mathfrak{A} = (A, \mathscr{F}_{\mathfrak{A}})$ es una interpretación tal que cada $\mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{A}$ y su dominio es $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Evidentemente para cada símbolo constante $\mathscr{F}_\mathfrak{A}(c_n) = \mathscr{F}(c_n)$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_\mathfrak{A}(A^n_m) &\iff (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_\beta(A^n_m)\\ &\iff (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}(A^n_m),\end{aligned}$$

donde $\beta < \alpha$ es tal que $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$. Así, $\mathscr{F}_\mathfrak{A}(A^n_m) = \mathscr{F}(A^n_m)$. Por otro lado, sean $a_1, \ldots, a_n \in A^n$,

$$\mathscr{F}_\mathfrak{A}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n) = \mathscr{F}_\beta(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n) = \mathscr{F}(f^n_m)(a_1, \ldots, a_n),$$

donde $\beta < \alpha$ es tal que $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$. Así se concluye que $\mathscr{F}_\mathfrak{A}(f^n_m) = \mathscr{F}(f^n_m)$. Por tanto $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$. □

A la nueva interpretación $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$, definida en la proposición anterior, se le llamará la **unión de la cadena** $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$.

De la proposición 1.51 y la proposición 1.37 (iii) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.52. *Sean $\mathfrak{B}$ una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$ y $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ una α-sucesión de interpretaciones del lenguaje $\mathscr{L}$ tal que para cada $\beta < \alpha$ $\mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{B}$ y si $\beta < \gamma < \alpha$, $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}_\gamma$, entonces $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ es una cadena elemental y*

$$\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{B}$$

Demostración: Por la proposición 1.37 (iii) $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ es una cadena elemental y por la Proposición 1.51 $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ es una interpretación del lenguaje $\mathscr{L}$ tal que $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$. Evidentemente $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \subseteq B$. Como $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}_0 \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$, entonces para cualquier constante c del lenguaje $\mathscr{L}$ se tiene que

$$\mathscr{F}_{\bigcup \mathfrak{A}_\beta}(c) = \mathscr{F}_{\mathfrak{A}_0}(c) = \mathscr{F}_\mathfrak{B}(c).$$

Sea A^n_m un símbolo relacional. Entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\bigcup \mathfrak{A}_\beta}(A^n_m) &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(A^n_m)\\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} [\mathscr{F}_\mathfrak{B}(A^n_m) \cap (A_\beta)^n]\\ &= \mathscr{F}_\mathfrak{B}(A^n_m) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} (A_\beta)^n\\ &= \mathscr{F}_\mathfrak{B}(A^n_m) \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)^n,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que si $\beta < \gamma < \alpha$, entonces $A_\beta \subseteq A_\gamma$.

Finalmente, si f^n_m es un símbolo funcional, entonces

$$\mathscr{F}_{\bigcup \mathfrak{A}_\beta}(f^n_m) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(f^n_m) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\mathfrak{B}(f^n_m)_{\restriction (A_\beta)^n},$$

donde esta última función es igual a la función $\mathscr{F}_{\mathfrak{B}}(f_m^n)_{\restriction(\bigcup A_\beta)^n}$. Por tanto $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{B}$.

Resta ver que es submodelo elemental, para ello usaremos el Criterio de Tarski-Vaught. Sean $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con variables libres en $x, x_1, \ldots, x_n$ y sean $a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tales que $\mathfrak{B} \vDash \exists x\varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Sea $\beta < \alpha$ tal que $a_1, \ldots, a_n \in A_\beta$ (de nuevo, β existe porque $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ es una cadena respecto de la contención), como $\mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{B}$, entonces existe $a \in A_\beta$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$. □

1.3. Modelos para la Teoría de Conjuntos

Consideraremos al lenguaje de primer orden $\mathscr{L} = \{\in\}$, el cual tiene por único elemento un símbolo relacional de aridad 2, como el lenguaje de la teoría de conjuntos. Así, un modelo de la teoría de conjuntos es $\mathfrak{A} = (A, \in^{\mathfrak{A}})$, donde A es un conjunto y $\in^{\mathfrak{A}}$ es una relación en A. Un **$\in$-modelo** es un modelo de $\mathscr{L}$ tal que $\in^{\mathfrak{A}}$ es la relación de pertenencia restringida al conjunto A, es decir, $\in^{\mathfrak{A}}= \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$. Podemos referirnos al modelo $\mathfrak{A}$ simplemente como A, pues automáticamente sabemos que la interpretación de $\in$ es $\in^{\mathfrak{A}}$. Nótese también, que si A y B son $\in$-modelos y $A \subseteq B$, entonces es claro que $\in^{\mathfrak{A}}= (\in^{\mathfrak{B}})_{\restriction A\times A}$. Por tanto, en este caso, cuando se trata con $\in$-modelos, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ si y sólo si $A \subseteq B$. En lo que sigue, cuando se esté trabajando de $\in$-modelos $\mathfrak{A}$ y A van a representar al mismo objeto.

En esta sección nuestro objetivo es explicar a grandes rasgos porqué funciona el método de los submodelos elementales. Dividiremos esta sección en dos partes principales, las cuales las clasificaremos como: la sección "informal" y la sección "formal". En general toda esta sección será un poco larga y no tendrá demostraciones, sin embargo, las demostraciones (de aquello que puede demostrarse) podrán encontrarse en libros como [16] o [15].

Antes de comenzar, algo importante que se debe tener en cuenta es que, en matemáticas, no se puede crear algo a partir de la nada. Por ejemplo, en teoría de conjuntos se pide como axioma la existencia de un conjunto. Ya que a las teorías se les desea dar un estudio matemático, entonces es necesario tener como base algo. Piensa, por ejemplo, cuando se estudia lógica o teoría de conjuntos. Si se estudia lógica es necesario tener como base algunos aspectos de la teoría de conjuntos; por otro lado, cuando se estudia teoría de conjuntos se necesitan ciertas nociones lógicas. Por esto, nosotros tendremos como base la axiomática usual de la teoría de conjuntos, **ZFC**.

Un Primer Acercamiento al Método de Submodelos Elementales

Después de todo lo que se ha visto hasta ahora, sobre sintaxis y semántica, una pregunta natural es ¿y cómo relacionamos estas pruebas formales con las pruebas matemáticas que hacemos día con día, por ejemplo, en el curso de Álgebra o Topología?

Para poder responder esta pregunta introduciremos la siguiente convención. El prefijo "meta" se usará para referirse a conceptos que son abstracciones de otros conceptos, como por ejemplo "meta lógica", "metalenguaje", "meta prueba", etc. De esta forma para nosotros una meta afirmación (meta argumento o meta proposición) será una afirmación (argumento o proposición) que se usa en el estudio cotidiano de las matemáticas, por ejemplo, las afirmaciones que se hacen en cursos de matemáticas o los que aparecen en las demostraciones de los teoremas (lemas, corolarios, etc.) de libros de matemáticas, es decir, son esas

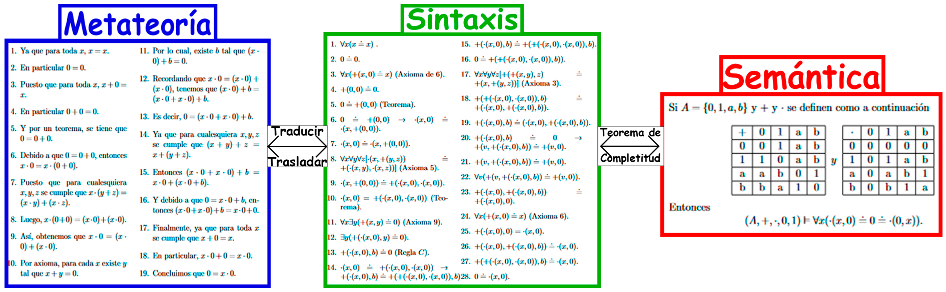


Figura 1.1: Relación entre la parte Meta, la parte sintáctica y la parte semántica.

oraciones de nuestro lenguaje, el español, que se usan en el estudio de las matemáticas. Por tanto, una meta prueba o meta demostración se entenderá como un conjunto de meta afirmaciones que representan una demostración, por ejemplo, la demostración de que $\forall a \in \mathbb{R}(a \cdot 0 = 0)$ que viene en los libros de matemáticas básicas.

Usando esta noción, la pregunta puede reestructurarse como sigue ¿de qué manera podemos relacionar las demostraciones formales con las meta demostraciones?

Una forma de abordar esta pregunta es como sigue. En lugar de un teorema arbitrario, consideramos el resultado que dice que $\forall a \in \mathbb{R}(a \cdot 0 = 0)$. Sabemos que existe una meta demostración de dicho teorema (esta se puede encontrar, por ejemplo, en el libro de Matemáticas Básicas de la BUAP). Reescribamos dicha meta demostración de tal forma que tengamos una sucesión de meta afirmaciones. Ahora, como este teorema usa nociones de teoría de campos, entonces supóngase que se está trabajando con el lenguaje de la teoría de campos (claro, junto con el lenguaje de la teoría de conjuntos). Podemos "trasladar" las meta afirmaciones en fórmulas (bien formadas) del lenguaje, y viceversa, las fórmulas (bien formadas) del lenguaje se pueden "trasladar" en meta afirmaciones. Por los trabajos de Gödel, más específicamente, el Teorema de Completitud, podemos pasar de la parte sintáctica a la parte semántica y viceversa. De esta manera, un poco informal, se están relacionando las meta pruebas con los conceptos de teoría de modelos. La Figura 1.1 da un ejemplo de cómo podemos relacionar las meta pruebas con la sintaxis y la semántica.

Sin embargo, no tenemos por qué detenernos ahí, podemos intentar generalizar este método para que no sean sólo teoremas de teoría de campos. Así que consideremos generalizar este método. Supóngase que se tiene una meta prueba de algún resultado y esa meta prueba tiene n meta afirmaciones las cuales se denotarán simplemente por su número i. Ahora, siguiendo nuestro ejemplo, el siguiente paso es trasladar la meta prueba en una "demostración formal". Pero a diferencia de antes, el único lenguaje con el que se trabajará es el lenguaje de la teoría de conjuntos $\mathscr{L} = \{\in\}$. Lo siguiente sería pasar de la parte "sintáctica" a la parte "semántica".

Claro que hacer todo esto nos deja con varias preguntas muy importantes, las cuales se espera sean respondidas en lo que sigue.

1. ¿Es cierto que cualquier meta afirmación se puede traducir en una fórmula de la teoría de conjuntos y que toda fórmula de la teoría de conjuntos tiene una meta afirmación?

2. En caso de que la primera pregunta sea afirmativa, ¿será cierto que dada una meta prueba, esta es válida si y sólo si la demostración (en la parte sintáctica) es correcta?

Es decir, si tenemos un resultado que se quiere demostrar y φ es la traducción de dicho resultado, entonces ¿el resultado tiene una meta prueba si y sólo si $\vdash \varphi$ es cierto?

Intentemos contestar la primera pregunta. El cálculo predicativo clásico de primer orden se originó como un intento de crear un lenguaje que abarcase todas las matemáticas, de formalizar las matemáticas mediante la axiomatización y más que nada para estudiar la fundación de las matemáticas. Sin embargo, a través del tiempo se encontraron otras formas de fundamentar las matemáticas, tal es el caso de la Teoría de Categorías. Pero esta última, para darle una fundación lógica, requiere de otro tipo de lógica. En todo este trabajo nosotros sólo consideraremos aquellas matemáticas que involucran el lenguaje usuales, así como el razonamiento clásicos. Por ejemplo, las matemáticas que se ven en Topología, Álgebra, Teoría de números y cualquier otra cuyos razonamientos y lenguaje se encuentre al "alcance" del cálculo predicativo clásico de primer orden.

Por otro lado, hay una cierta rama de la lógica conocida como lógica formal, la cual usualmente se relaciona con formas de validar argumentos del tipo deductivo. Se puede pensar, a grandes rasgos, que un argumento deductivo es uno en el cual se afirma que una proposición (conclusión) se sigue estrictamente de alguna otra, u otras proposiciones (premisas). Cuando la conclusión es correctamente deducida a partir de las premisas, la inferencia de las premisas a la conclusión se dice que es deductivamente válida, independientemente de si las premisas son o no válidas. Sin embargo, muchas de las ideas de la lógica formal generan problemas que pertenecen más a filosofía que a la lógica misma. Por ejemplo, ¿qué es un análisis correcto de la noción de verdad? ¿qué es una proposición y cómo se relaciona con la afirmación mediante la cual se expresa? Afortunadamente es posible hacer lógica formal sin tener respuesta a estas preguntas, de la misma forma que se hace matemáticas sin conocer la respuesta de preguntas como ¿los números son objetos reales o son construcciones mentales?

Por estas razones es que vamos a convenir en que, para la primera pregunta, aunque no se tiene una respuesta concreta, en el trabajo se supondrá que todas nuestras meta proposiciones tienen una representación en fórmulas bien formadas. Y que, si se tiene una fórmula bien formada, entonces se puede encontrar de forma exitosa un meta argumento que la represente.

Para la segunda pregunta, la cuál es, ¿será cierto que dada una meta prueba, está es válida si y sólo si la demostración (en la parte sintáctica) es correcta?

En textos como [15] se explica que si A es cualquier afirmación en la meta teoría sobre predicados recursivos, usando nuestra representación de fórmulas, se puede escribir una fórmula correspondiente A^* en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Y se puede esperar que, si se puede probar A mediante argumentos finitistas, entonces $\mathbf{ZF} \vdash A^*$, ya que $\mathbf{ZF}$ debería de incorporar todos los argumentos finitistas y muchos más. Aquí se está usando la tesis -*Todo hecho finitista puede ser formalizado y demostrado en **ZFC***. Si se adopta esta tesis se puede intentar responder a la pregunta. Sin embargo, ¿a qué se está refiriendo con argumentos finitistas?

Los finitistas son personas que tienen la corriente filosófica de que los conjuntos infinitos son ficción, no tienen un significado verdadero. Una cosa que se tiene que saber sobre esta corriente es que para poder analizar los argumentos finitistas es necesario conocer algunos otros razonamientos finitistas básicos.

Notemos que para intentar contestar la segunda pregunta es necesario conocer cosas que en principio no se estudian de forma casual y además se corre el riesgo de que nos empezamos a meter con corrientes filosóficas. Algo que se va más allá del alcance de esta tesis.

En vista de lo anterior es necesario tomar otro camino. En el esquema antes planteado, queríamos pasar de la parte meta a la parte sintáctica, y luego, pasar de la parte sintáctica a la semántica. Entonces ¿por qué no pasamos directamente a la parte semántica?

Para poder realizar esto surgen nuevas preguntas. Lo primero a notar es que si quisiéramos seguir con la idea del principio de abarcar tantas áreas como sea posible, entonces en un principio no se puede tomar como dominio de la interpretación cualquier conjunto. Es más, es razonable pensar en que el dominio de la interpretación no sea un conjunto sino una clase, la clase $\mathbb{V}$ de todos los conjuntos. Al intentar tomar este nuevo camino surgen nuevas preguntas.

1. ¿Qué significa que un modelo tenga como universo una clase? ¿Es siquiera posible hacer esto?

2. ¿Qué significa que una fórmula sea verdadera en esa "interpretación"?

3. En caso de poder tener una "buena" definición de que algo sea verdadero en la "interpretación" ¿Un meta argumento es verdadero si y sólo si la interpretación de dicho argumento (una fórmula) es verdadero en la interpretación?

Afortunadamente las primeras preguntas son posibles de responder y la respuesta es afirmativa; de hecho la definición es muy similar al caso cuando se trabajan con conjuntos. Pero antes de dar definiciones rigurosas veamos que ocurre con la segunda pregunta.

Para la segunda pregunta veamos lo que ocurre en el caso de los conjuntos, ¿qué significa que en $\mathfrak{M} \vDash \varphi$? Si se recuerdan los ejemplos y definiciones del principio es necesario verificar que para cualquier asignación, Φ, se cumpla que $v_{\Phi^*}(\varphi) = 1$, pero, ¿y cómo se verificaba esto último? Puesto que esto dependía únicamente de la fórmula φ y de los valores que la asignación toma en las variables libres de la fórmula (si tiene). Pero, por ejemplo, si la fórmula es $x \in y$ y además se está considerando un $\in$-modelo, entonces $v_{\Phi^*}(x \in y) = 1$ si y sólo si $\Phi^*(x) \in \Phi^*(y)$.

Lo importante, del ejemplo anterior, es notar el hecho de que, si se desea conocer la veracidad, o no, de $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, entonces es necesario apoyarse en la estructura $\mathfrak{M}$, en lo que se sabe de ella. Es decir, es necesario que cuando se interpreta la fórmula en la estructura, esta (que se convierte en una meta proposición) sea "cierta", pero no en el sentido de la Definición 1.22, más bien en la definición de verdad que tiene la estructura. Por ejemplo, si el dominio de la interpretación es $\mathbb{N}$ y la relación $\in$ se interpreta como la relación $<$ usual, entonces verificar que $x \in y$ se convierte en verificar que $n < m$, donde n es la interpretación de x y m la interpretación de y. En este caso $v_{\Phi^*}(x \in y) = 1$ si y sólo si efectivamente $n < m$ (es decir, si la estructura piensa que $n < m$). Resulta también que esta noción tiene sentido, aunque se reemplace el universo de la interpretación por una clase.

Regresemos ahora al problema de definir una interpretación para clases. Como se dijo, la idea es considerar a $\mathbb{V}$ como la interpretación que nos va a ayudar a pasar de la parte meta a la parte semántica. Intuitivamente $\mathbb{V}$ es modelo de **ZFC** porque todos los axiomas son ciertos en $\mathbb{V}$. Y de hecho, como se está considerando fundación, entonces $\mathbb{V} = \mathbf{WF}$ (muchos matemáticos consideran a **WF** como el lugar natural para hacer todas las matemáticas, en tanto se considere a **ZF** como la teoría básica). Sin embargo, en lugar de considerar a **WF** como la única clase que puede ser "modelo" se considerará cualquier clase arbitraría M.

La noción de modelo es exactamente la misma que se definió antes (considerando únicamente modelos con universo un conjunto). Sin embargo, puesto que el universo puede ser una clase propia, entonces la definición toma lugar en la meta teoría.

Definición 1.53. *Si Λ es un conjunto de axiomas en el lenguaje $\{\in\}$ para la teoría de conjuntos y $\mathscr{L}$ es un lenguaje finito, una interpretación relativa de $\mathscr{L}$ en Λ consiste de una clase no vacía M junto con una asignación de entidades semánticas $s^{\mathfrak{M}}$ para cada símbolo del lenguaje $\mathscr{L}$ de la siguiente manera:*

1. *Si c es un símbolo constante, entonces $c^{\mathfrak{M}} \in M$.*
2. *Si f es un símbolo funcional de aridad $n > 1$, entonces $f^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$.*
3. *Si p es un símbolo predicativo de aridad $n > 1$, entonces $p^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$.*

Lo siguiente es definir los conceptos de valor de un término y valor de verdad de una fórmula. Como antes, estos conceptos son exactamente los mismos que para conjuntos cuyo universo son únicamente conjuntos, excepto que formalmente la recursión es en la meta teoría. Por lo que comentamos antes, estas nociones deben de apelar a la noción de verdad de la estructura del modelo y no a la noción de verdad definida recursivamente.

Definición 1.54. *Dada una interpretación como la de la Definifión 1.53. Si t es un término y φ es una fórmula, de $\mathscr{L}$, entonces $t^{\mathfrak{M}}$ es el término y $\varphi^{\mathfrak{M}}$ es la fórmula que se obtienen al reemplazar los símbolos del lenguaje $\mathscr{L}$ por sus interpretaciones (fórmulas relativizadas) y relativizar todos los cuantificadores a M.*

Ejemplo 1.55. *Sea $\mathscr{L} = \{+, *, 0\}$. Sea M cualquier clase que tenga al conjunto $\emptyset$ y que sea cerrada bajo intersecciones y bajo la diferencia simétrica. Se interpretará $+^{\mathfrak{M}}$ como la diferencia simétrica, $*^{\mathfrak{M}}$ se interpreta como la intersección y $0^{\mathfrak{M}}$ se interpreta como $\emptyset$. Entonces la fórmula $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$ es verdadera porqué $x \cdot^{\mathfrak{M}} y = y \cdot^{\mathfrak{M}} x$ se traduce en $x \cap y = y \cap x$.*

Las definiciones anteriores son bastante generales pues hablan de un lenguaje $\mathscr{L}$ que extienda al lenguaje $\{\in\}$. Veamos que ocurre en nuestro caso particular. En la Definición 1.53 se está considerando $\mathscr{L} = \emptyset$; así, para nosotros una interpretación (como la de la Definición 1.53) es una clase no vacía M junto con la interpretación del símbolo $\in$. Y en este caso los únicos términos son las variables las cuales, como es usual, se interpretarán en objetos de M y el valor de verdad de las fórmulas queda establecido como sigue.

Definición 1.56. *Sea M una clase no vacía y E la interpretación del símbolo $\in$. Para cada fórmula φ se define la relativización de φ, denotado por $\varphi^{M,E}$, como sigue:*

1. *$(x \doteq y)^{M,E}$ es $x = y$ (aquí la igualdad es la igualdad de la interpretación).*
2. *$(x \in y)^{M,E}$ es $(x, y) \in E$.*

3. $(\neg\varphi)^{M,E}$ *es* $\neg\varphi^{M,E}$.

4. $(\varphi \wedge \psi)^{M,E}$ *es* $\varphi^{M,E} \wedge \psi^{M,E}$.

5. $(\exists x\varphi)^{M,E}$ *es* $\exists x \in M\varphi^{M,E}$.

De lo anterior se puede ver que las demás fórmulas se definen de la forma usual.

$(\varphi \vee \psi)^{M,E}$ es $\varphi^{M,E} \vee \psi^{M,E}$.
$(\varphi \rightarrow \psi)^{M,E}$ es $\varphi^{M,E} \rightarrow \psi^{M,E}$.
$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{M,E}$ es $\varphi^{M,E} \leftrightarrow \psi^{M,E}$.
$(\forall x\varphi)^{M,E}$ es $\forall x \in M\varphi^{M,E}$.

Donde $\forall x \in M\varphi$ es una abreviación de $\forall x(x \in M \rightarrow \varphi)$ y $\exists x \in M\varphi$ es una abreviación de $\exists x(x \in M \wedge \varphi)$.

En caso de que E sea la interpretación usual del símbolo $\in$, entonces se escribirá simplemente φ^M. Como antes, nuestro interés serán los modelos cuya interpretación del símbolo $\in$ es la usual, y a éstos también se les llamará $\in$-modelos.

Anteriormente se había dicho que para que una fórmula sea verdadera es necesario que así lo sea cuando se le da su respectivo significado a la fórmula, en la estructura. Esta va a ser nuestra definición de que una *sentencia sea cierta* en una estructura como la de la Definición 1.53. En caso de que una sentencia sea verdadera en una estructura M, se escribirá simplemente φ^M y, a diferencia de antes, esta definición es solo para sentencias.

Definición 1.57. *Sean M una clase y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Se dice que $a_1, \ldots, a_n \in M$ satisfacen la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en la interpretación M si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)^M$.*

En la definición anterior, $\varphi(a_1, \ldots, a_n)^M$ significa que cuando se interpreta la fórmula en el modelo, si se reemplazan las variables libres x_i por sus respectivos a_i, esta meta proposición es verdadera. Algunas veces, se prefiere escribir $(M, E) \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ en lugar de escribir $\varphi(a_1, \ldots, a_n)^{M,E}$. En caso de que M sea un conjunto resulta que si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula y $a_1, \ldots, a_n \in M$, entonces

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n)^{M,E} \iff (M, E) \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n],$$

donde la parte de la derecha hace referencia a la notación usada en la Definición 1.19. Así, si M es un conjunto no existe riesgo de confusión entre una notación y la otra.

Regresando a las preguntas que nos hicimos. Solo resta ver qué ocurre con la tercera ¿un meta argumento es verdadero si y sólo si la fórmula (asociada a ese meta argumento) es verdadero en la interpretación? La respuesta es sí. Sin embargo, como en el caso de la primera pregunta, no se puede dar una respuesta formal de esto.

Si $\mathbb{V}$ es la clase de todos los conjuntos y φ es una fórmula, aunque φ y $\varphi^{\mathbb{V}}$ no sean la misma fórmula, sí es cierto que ambas son equivalentes, porqué las fórmulas con las que se trabaja en matemáticas siempre se consideran que tienen alcance sobre los objetos matemáticos de interés, los conjuntos, y $\mathbb{V}$ contiene a todos los conjuntos matemáticos de interés, es decir, intuitivamente cada fórmula está relativizada a la clase $\mathbb{V}$.

Para entender lo que se quiere decir en la respuesta de la pregunta consideremos la meta proposición $a \in b$ y supongamos se tiene una meta demostración de esto. Si $x \in y$ es la fórmula asociada a ese meta proposición. Ya que existe una meta demostración de que $a \in b$, entonces tendría que ocurrir que en $\mathbb{V}$, es cierto que $a \in b$ (se tendría que $x \in y(a, b)^{\mathbb{V}}$). Es decir, al menos intuitivamente, se supone que, si se tiene una meta demostración de una meta proposición, entonces la fórmula asociada a esa meta proposición es verdadera en la interpretación $\mathbb{V}$. Por otro lado, cuando se valida, semánticamente, que una fórmula es verdadera lo que ocurre, aunque no se suele decir, es que se requiere de una meta prueba para verificar que, efectivamente, la fórmula es verdadera en la interpretación. Por ejemplo, para ver qué $x \in y(a,b)^M$ es necesaria una meta demostración que, de hecho, justifique qué $a \in b$.

Antes de finalizar esta sección se debe de advertir que, aunque en el nombre de la sección aparezca la palabra informal, no se debe de suponer que las demostraciones de las que se hablarán son informales, es todo lo contrario, las meta demostraciones de las que se hablan son demostraciones matemáticas, rigurosas. Y la razón de por qué la sección incluye la palabra "informal" es porque aquí, como se vio cuando se respondió la pregunta ¿es cierto que cualquier meta afirmación se puede traducir en una fórmula de la teoría de conjuntos y que toda fórmula de la teoría de conjuntos tiene una meta afirmación?, o cuando se respondió la pregunta ¿una meta prueba es verdadera si y sólo si la fórmula asociada, a lo que se desea demostrar, es verdadera en la interpretación?, no se está dando una demostración matemática que valide las respuestas, más bien, se están justificando apoyándonos de la idea intuitiva que se tiene de ello.

Formalizando el Método de Submodelos Elementales

En la sección anterior se vio la relación entre las meta pruebas y las fórmulas que son verdaderas en interpretaciones. El objetivo de esta sección es justificar por qué y cómo se puede pasar de modelos con universo una clase a modelos cuyos dominios son conjuntos. Como sabemos se definieron dos tipos de modelos, para distinguir los dos tipos de modelos se dirá que un *conjunto modelo* es aquel que satisface la Definición 1.13 y se dirá que una *clase modelo* es aquella que cumpla la Definición 1.53. Así, un conjunto modelo es un modelo en el que su universo solo puede ser un conjunto y una clase modelo es un modelo en el que su universo es una clase.

Uno podría preguntarse, ¿y por qué queremos pasar de clases modelo a conjuntos modelo? Recordemos que nuestro objetivo es responder a la pregunta "*¿Por qué funcionan los submodelos elementales?*". Para esta segunda pregunta, la idea es usar resultados que involucran nociones como, por ejemplo, las de isomorfismos de modelos, submodelos, submodelos elementales, etc. Sin embargo, resulta que estas nociones se definieron para conjuntos modelo. Por tanto, necesitaremos poder pasar de modelos conjunto a conjuntos modelo y viceversa, de tal forma que lo que piense un modelo sobre una fórmula lo piense el otro, y viceversa (algo así como lo que ocurre con los submodelos elementales).

Por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel sabemos que ninguna teoría formal, consistente, tan fuerte como para describir ciertas propiedades de los números naturales, como por ejemplo la Aritmética de Peano, puede demostrar su propia consistencia. Ya que nosotros estamos tomando como base **ZFC**, y sabemos que **ZFC** es capaz de describir la Aritmética de Peano, entonces **ZFC** no puede demostrar la existencia de un *conjunto* capaz de modelar **ZFC**. Por tanto, es absurda la idea de encontrar un "submodelo elemental" de $\mathbb{V}$.

Sabemos que nuestras demostraciones siempre son finitas, de la sección anterior sabemos que cualquier meta demostración se puede ver de la forma $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ donde cada

φ_i corresponde al i-ésimo paso de la meta demostración. Por tanto ocurre que sin importar qué se esté demostrando, siempre se van a ocupar una cantidad finita de axiomas de **ZFC**. Así, que en lugar de pensar en un conjunto que piense en "exactamente" lo mismo que piensa $\mathbb{V}$ se opta mejor por encontrar un conjunto el cual es modelo de un segmento suficientemente vasto de **ZFC** que nos permita llevar a cabo nuestros argumentos.

Así lo siguiente que se debe hacer es determinar tales conjuntos modelo que nos serán de utilidad. Lo que sigue se puede consultar textos como [16] capítulos 1 y 2 o [15] capítulos 3 y 4.

Se puede demostrar que en $\mathbb{V}$ son válidos los axiomas de **ZFC**. Para ello se definen los conjuntos V_α. Una forma de definir estos conjuntos es como sigue.

Definición 1.58. *Se define por recursión los* ***conjuntos de jerarquía acumulativa*** *como sigue*
$V_0 = \emptyset$;
$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ *con* α *ordinal límite.*

Una aclaración, esta definición hace creer la idea errónea de que los conjuntos V_α dependen del axioma del conjunto potencia. La verdad es que esto no es así. Existe una definición que no depende del conjunto potencia y se puede demostrar que ambas definiciones son equivalentes. Sin embargo, tales definiciones requieren de muchas otras más como, por ejemplo, la definición de relación bien fundada en clases. Ya que ese no es el propósito de esta tesis no vamos a hablar más de ello y nos quedaremos con la definición que aquí se propone.

La unión de los conjuntos anteriores se puede entender como la clase de los conjuntos construibles (o bien fundados). Y de hecho

$$\mathbf{WF} = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}.$$

Se puede probar que **WF** es una clase transitiva. Más aún, se puede probar que es un modelo de **ZFC**, sin embargo, para probar esto último es necesario, además de unas ciertas propiedades sobre los V_α y **WF**, un nuevo método que utiliza *fórmulas absolutas.*

Definición 1.59. *Sean* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *interpretaciones de un lenguaje* $\mathscr{L}$ *tales que* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *y* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula del lenguaje* $\mathscr{L}$*. Se dice que* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *es* ***absoluta*** *entre* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$*, denotado por* $\mathfrak{A} \preceq_\varphi \mathfrak{B}$*, si para cualesquiera* $a_1 \ldots, a_n \in A$ *se cumple que* $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1 \ldots, a_n]$ *si y sólo si* $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Así, φ es absoluta para los modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si ambos piensan lo mismo de la fórmula φ.

Definición 1.60. *Sea* $\mathscr{L}$ *un lenguaje que tiene el símbolo* $\in$*. Se dice que* φ*, una fórmula del lenguaje* $\mathscr{L}$*, es una* Δ_0*-**fórmula*** *si* φ *cumple una de las siguientes condiciones:*

1. φ *es una fórmula atómica.*
2. $\varphi = \neg\psi$ *y* ψ *es una* Δ_0*-fórmula.*
3. $\varphi = \psi\Box\gamma$*,* ψ *y* γ *son* Δ_0*-fórmulas y además* $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
4. $\varphi = \Box y \in t\psi$*,* ψ *es* Δ_0*-fórmula,* y *es una variable,* t *es un término que no contiene a* y*, y además* $\Box \in \{\forall, \exists\}$.

Una de las características más importantes de las Δ_0-fórmulas es que estas son absolutas para modelos transitivos.

Lema 1.61. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje como antes, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\in$-conjuntos modelo (o $\in$-clases modelo) de dicho lenguaje y supóngase que el domino de $\mathfrak{A}$, A, es transitivo. Entonces $\mathfrak{A} \preceq_\varphi \mathfrak{B}$ para cualquier Δ_0-fórmula φ.*

Si se considera $\mathscr{L} = \{\in\}$, puesto que muchas propiedades simples de conjuntos se pueden expresar como Δ_0-fórmulas, entonces por el lema anterior dichas propiedades tienen el mismo significado en todos los modelos transitivos. Algunos ejemplos de fórmulas equivalentes a Δ_0-fórmula son los que aparecen en la Tabla 1.1. Todas estas fórmulas fueron definidas en $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P} - \mathbf{Inf}$, por lo que se pide que $\mathbf{M}$ sea modelo de $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P} - \mathbf{Inf}$. Por otro lado, algunas otras cosas tales como x es ordinal, x es ordinal límite, x es ordinal sucesor, x es un ordinal finito, ω, etc., necesitan de un modelo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$.

$x \in y$;	$x = y$;	$x \subseteq y$;	$\{x, y\}$;	(x, y);
0;	$x \cup y$;	$x \cap y$	$x \setminus y$;	$S(x)$ (i.e., $x \cup \{x\}$);
x es transitivo;	$\bigcup x$;	$\bigcap x$;	$A \times B$;	R es una relación;
$dom(R)$;	$ran(R)$;	f es una función;	$f(x)$;	f es inyectiva;

Tabla 1.1: Ejemplos de fórmulas que son absolutas

Definición 1.62. *Sean M una clase y φ una fórmula del lenguaje $\{\in\}$. Se dice que φ es **absoluta** para M si $M \preceq_\varphi \mathbb{V}$.*

Por el Lema 1.61, si $B = \mathbb{V}$, entonces trivialmente $A \subseteq V$ y, como se comentó, $\varphi^{\mathbb{V}}$ es equivalente a φ, entonces si A es transitivo, entonces se tiene que toda Δ_0-fórmula es absoluta para A, es decir, para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces $\varphi(a_1, \ldots, a_n)^A$ si y sólo si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. De lo anterior se puede ver porqué las fórmulas absolutas son importantes. Si A es un meta argumento y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es la fórmula (bien formada) asociada a ese meta argumento, la cual es absoluta para la clase M. Entonces si el meta argumento es verdadero, $\psi(a_1, \ldots, a_n)^{\mathbb{V}}$ y como ésta última es equivalente a $\psi(a_1 \ldots, a_n)^M$, entonces se concluye que $\psi(a_1, \ldots, a_n)^M$, suponiendo que $a_1, \ldots, a_n \in M$. Recíprocamente, si $\psi(a_1, \ldots, a_n)^M$, entonces el meta argumento A es verdadero. Es decir, lo que piensa M que dice φ sobre los objetos de M es lo que "realmente" dice la fórmula φ sobre tales objetos.

Las fórmulas absolutas son importantes porque, en general, lo que un modelo piensa puede diferir de lo que un submodelo piensa. Existe un ejemplo sobre esto, el cual está relacionado con la paradoja de Skolem. Lo que sigue se puede consultar [16] para más información al respecto. Sea $\gamma > \omega_1$ un ordinal límite. Sea $A \preceq V_\gamma$ tal que A es numerable y $\omega, \omega_1 \in A$. Si M es el colapso de Mostowski de A, $\alpha = mos(\omega) = \omega$ y $\beta = mos(\omega_1)$. Entonces β sería un ordinal numerable que M piensa que no es numerable, es decir, existe $\alpha, \beta \in M$ tales que $(\alpha \cong \beta)^M$ es falso pero $(\alpha \cong \beta)^{V_\gamma}$ es verdadera. Así, se tiene un modelo transitivo M numerable que satisface suficiente teoría de conjuntos para producir un ordinal no numerable $\beta \in M$, pero $\beta \in M$ implica que β es numerable dando una "contradicción". Tal contradicción en realidad no existe, es solo un error de pensamiento; el error es creer que la propiedad de ser numerable es una propiedad absoluta.

Lema 1.63. *Si $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ y $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ son dos fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ y $\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n))$ se cumple en M y $\mathbb{V}$. Entonces φ es absoluta para M si y sólo si ψ es absoluta para M.*

El uso del lema anterior es porque es usual que cuando se defina un concepto está definición no tenga forma de una Δ_0-fórmula, pero exista una fórmula que se sabe que es absoluta. Por ejemplo, ya sabíamos que toda Δ_0-fórmula es absoluta para modelos transitivos, así por el Lema 1.63, se tiene que si φ es equivalente a una Δ_0-fórmula y M es una clase transitiva, entonces φ es absoluta para M. Toda fórmula equivalente a una Δ_0-fórmula es absoluta para modelos transitivos.

Habíamos dicho que lo que piensa M que dice φ sobre los objetos de M es lo que "realmente" dice la fórmula φ sobre tales objetos, en caso de que φ sea una fórmula absoluta para M. Usando el Lema 1.63, podemos dar un ejemplo más específico de esto. Si tenemos que M es una clase transitiva y $a,b\in M$. Si se puede ver qué $x\subseteq y(a,b)^M$, ya que $x\subseteq y$ es equivalente a una Δ_0-fórmula, entonces $x\subseteq y$ es una fórmula absoluta para M. Así que $x\subseteq y(a.b)^{\mathbb{V}}$, esto es, se tiene una meta demostración de que $a\subseteq b$. Lo importante de esto, es que si se tiene una meta demostración de que $\forall x\in M(x\in a\to x\in b)$ (es decir, $M\cap a\subseteq b$ que en realidad es $x\subseteq y(a,b)^M$), entonces tienes que $\forall x(x\in a\to x\in b)$ (es decir, que $a\subseteq b$).

Usando estas nociones de fórmulas absolutas se puede demostrar que **WF** es $\in$-modelo de **ZFC** y no solo eso, también se puede demostrar que si γ es un ordinal límite se tiene que $V_\gamma\vDash$ **ZC**, donde **ZC** es **ZFC** sin el axioma del reemplazo. Sin embargo, los conjuntos V_α no van a ser esos conjuntos modelo que buscamos. Relacionados a los conjuntos V_α se encuentran los conjuntos $H(\kappa)$. En $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$ se puede definir los siguientes conjuntos.

Definición 1.64. *Sea x un conjunto. Entonces*

1. $\bigcup^0 x = x$;
   $\bigcup^{n+1} x = \bigcup\bigcup^n x$.
2. *trcl(x)*$=\bigcup\{\bigcup^n x : n\in\omega\}$.

Intuitivamente, la $trcl(x)$ es el conjunto de todos los conjuntos usados para construir el conjunto x. Por ejemplo, tómese $3=\{0,1,2\}$, entonces $\bigcup^0 3=3$, $\bigcup^1 3=2$, $\bigcup^2 3=1$ y para toda $n\geq 3$, $\bigcup^n 3=0$. Así, $trcl(3)=\{3,2,1,0\}$. Como ocurría con los conjuntos V_α, la $trcl(x)$ se define de otra forma, pero se puede ver que es equivalente a esta otra definición.

Observación 5. *La clausura transitiva de un conjunto x es el menor conjunto transitivo que contiene a x. En efecto, primero nótese que $trcl(x)$ es un conjunto transitivo. Sea $y\in trcl(x)$, entonces existe $n\in\omega$ tal que $y\in\bigcup^n x$. Entonces $y\subseteq\bigcup^{n+1}x=\bigcup\bigcup^n x$ y como $\bigcup^n x\subseteq trcl(x)$ para toda $n\in\omega$, entonces $y\subseteq trcl(x)$. Ahora veamos que $trcl(x)$ es el menor conjunto transitivo que contiene a x. Sea z un conjunto transito tal que $x\subseteq z$. Así, $\bigcup^0 x\subseteq z$. Supóngase ahora que para $n\in\omega$ $\bigcup^n x\subseteq z$, como z es transitivo, entonces $\bigcup^{n+1}x=\bigcup\bigcup^n x\subseteq z$. Por tanto $trcl(x)\subseteq z$.*

Lema 1.65. *Algunas propiedades de la clausura transitiva son:*

1. $x\subseteq trcl(x)$;

2. *$trcl(x)$ es un conjunto transitivo;*

3. *$trcl(x)$ es el menor conjunto transitivo que contiene a x;*

4. *Si x es transitivo, entonces $trcl(x) = x$;*

5. *Si $x \in z$, entonces $trcl(x) \subseteq trcl(z)$;*

6. *$trcl(x) = x \cup \bigcup\{trcl(z) : z \in x\}$.*

Definición 1.66. *Para cualquier cardinal κ, sea*

$$H(\kappa) = \{x : |trcl(x)| < \kappa\}.$$

A los elementos de $H(\kappa)$ se dice que son ***hereditarios*** *de cardinalidad $< \kappa$.*

Se puede probar que para cada cardinal infinito κ, $H(\kappa)$ es un conjunto, $H(\kappa)$ tiene tamaño $2^{<\kappa}$, $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ y $H(\kappa) = V_\kappa$ si y sólo si κ es fuertemente inaccesible (si $\kappa = \omega$ se tiene que $H(\omega) = V_\omega$). Por el Lema 1.65 (5), se tiene que $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo.

El siguiente resultado muestra no solo que los $H(\kappa)$ son modelos de fragmentos de **ZFC** sino también resume lo que se ha visto de conjuntos modelo de fragmentos de **ZFC**.

Lema 1.67.

1. *$V_\alpha \models ZC$ si $\alpha > \omega$ y α es ordinal límite.*

2. *$H(\kappa) \models ZFC - P$ si κ es un cardinal regular no numerable.*

3. *$H(\omega) = V_\omega \models ZFC - Inf$.*

4. *$H(\kappa) \models ZFC$ si y solo si κ es fuertemente inaccesible.*

Usando el Lema 1.67 se tiene que si existe una demostración de φ que no usa el axioma del conjunto potencia, entonces $H(\kappa) \models \varphi$ y si φ es absoluta para $H(\kappa)$, entonces $\mathbb{V} \models \varphi$ y por tanto existe una meta demostración de la meta proposición asociada a φ y viceversa. Aunque en un principio pareciera ser que ya podemos usar la técnica de los modelos para nuestros fines de generar meta demostraciones, la realidad es que no es así. Existen dos inconvenientes importantes. El primero es que es necesario que lo que se desea demostrar sea una fórmula absoluta, lo cual no sabemos en general. El segundo problema es que es necesario que exista una demostración que no involucre el axioma del conjunto potencia. Lo que resta es ver cómo solucionar estos dos problemas. Para ello usaremos el *Principio del Reflejo.*

Sabemos que $H(\kappa)$ es modelo de **ZFC** si suponemos que κ es fuertemente inaccesible; sin embargo, la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles no pude ser demostrada en **ZFC**. Lo que sí se puede probar es que dada una lista finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ existe un conjunto transitivo $\mathbf{M}$ en el cual $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son ciertas.

Para probar el Principio del Reflejo es necesario notar que el hecho de que $H(\kappa)$ es modelo de $\mathbf{ZFC} - \mathbf{P}$ en realidad significa que para cada axioma φ de $\mathbf{ZFC} - \mathbf{P}$,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \forall\kappa(\omega < \kappa \wedge \kappa \text{ es regular} \rightarrow \varphi^{H(\kappa)}).$$

Se verá que para cualquier lista finita de fórmulas de **ZFC**

$$\mathbf{ZFC} \vdash \exists\mathbf{M}(\varphi_1^{\mathbf{M}} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{\mathbf{M}})$$

donde $\mathbf{M}$ puede ser un adecuado conjunto transitivo.

El Principio del Reflejo se enuncia como sigue.

Teorema 1.68. *Sea* $\boldsymbol{Z}$ *una clase, para cada* $\alpha \in \boldsymbol{ON}$*,* $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ *es un conjunto y supóngase que se cumple lo siguiente.*

1. *Si* $\alpha < \beta$*, entonces* $\boldsymbol{Z}(\alpha) \subseteq \boldsymbol{Z}(\beta)$*.*
2. *Si* γ *es un ordinal límite, entonces* $\boldsymbol{Z}(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{Z}(\alpha)$*.*
3. $\boldsymbol{Z} = \bigcup_{\alpha\in \boldsymbol{ON}} \boldsymbol{Z}(\alpha)$*.*

Entonces para cualesquiera fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$*,*

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n \textit{ son absolutas para } \boldsymbol{Z}(\beta), \boldsymbol{Z}).$$

El nombre de "Principio del Reflejo" viene del hecho que propiedades del universo de todos los conjuntos son "reflejadas" a conjuntos más pequeños.

Definamos

$$\mathbf{Z}(\alpha) = H(\aleph_\alpha).$$

Veamos qué $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathbf{Z}(\alpha)$ cumple las condiciones anteriores. Ya que si $\alpha < \beta$, entonces $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$, entonces $H(\aleph_\alpha) \subseteq H(\aleph_\beta)$. Por otro lado, si γ es un ordinal límite, entonces $\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beta$ y $\aleph_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta$. Es claro que para cada $\beta < \gamma$, $H(\aleph_\beta) \subseteq H(\bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta)$, es decir, $\bigcup_{\beta<\gamma} H(\aleph_\beta) \subseteq H(\bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta)$. Si $x \in H(\bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta)$, entonces $|trcl(x)| = \aleph_\beta$, para algún $\beta < \gamma$ y como γ es límite, entonces $|trcl(x)| < \aleph_{\beta+1}$, es decir, $x \in \bigcup_{\beta<\gamma} H(\aleph_\beta)$. Así los $\mathbf{Z}(\alpha)$ antes definidos satisfacen el teorema anterior. Notemos que $\mathbf{Z} = \mathbb{V}$.

Además de este resultado otros resultados indispensables para trabajar con submodelos elementales son los siguientes, cuyas demostraciones se encuentran en [13].

Teorema 1.69. *Sea* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *una fórmula de un lenguaje* $\mathscr{L}$*. Entonces*

$$C_\varphi = \{\alpha : \forall a_1, \dots, a_n \in V_\alpha(\mathbb{V} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow V_\alpha \models \varphi[a_1, \dots, a_n])\}$$

contiene una clase c.l.u.b.

Lema 1.70. *La clase*

$$E = \{\kappa \in \boldsymbol{Card} : V_\kappa = H(\kappa)\}$$

es una clase c.l.u.b.

El lema anterior indica que para cualquier fórmula φ siempre podemos encontrar un cardinal κ arbitrariamente grande tal que φ es absoluta para $H(\kappa)$.

1.4. Resultados de Modelos Aplicados a la Teoría de Conjuntos

El primer resultado que mencionaremos no es más que una aplicación del Teorema 1.49 aplicado a la teoría de conjuntos. Para comodidad, ya que estamos trabajando con $\in$-modelos denotaremos por $|\mathfrak{M}|$ el cardinal del modelo $\mathfrak{M}$ (recuerde que en el caso de los $\in$-modelos el modelo $\mathfrak{M}$ y el universo del modelo, M, son lo *mismo*).

Proposición 1.71. *Para cualquier cardinal regular no numerable* κ *y cualquier conjunto* $X \subseteq H(\kappa)$ *existe un submodelo elemental* $\mathfrak{M}$ *de* $H(\kappa)$ *tal que* $X \subseteq \mathfrak{M}$ *y* $|\mathfrak{M}| \leq |X| + \aleph_0$*.*

Ahora se introducirán los resultados que serán clave en todo lo que sigue. Estos resultados son los que nos ayudarán en las pruebas que involucren submodelos elementales.

Lema 1.72. *Si κ es regular y $M \subseteq H(\kappa)$ tal que $|M| < \kappa$, entonces $M \in H(\kappa)$.*

Demostración: Si $\kappa = \omega$, entonces $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Por (6) del Lema 1.65 se sabe que $trcl(M) = M \cup \bigcup_{i=1}^{n} trcl(x_i)$. Así, $|trcl(M)| \leq |M| + |trcl(x_1)| + \cdots + |trcl(x_n)| < \aleph_0$.

Sean κ un cardinal regular no numerable, $\lambda = |M| < \kappa$ y $S_n = \bigcup^n M$. Entonces $S_0 = M$ y si $x \in M$, por el Lema 1.65 (1), $|x| \leq |trcl(x)| < \kappa$. Supongamos que para $n \in \omega$, $|S_n| < \kappa$ y si $x \in S_n$, entonces $|x| < \kappa$. Luego, $S_{n+1} = \bigcup S_n$ y así

$$|S_{n+1}| \leq \sum_{x \in S_n} |x| = |S_n| \cdot \sup\{|x| : x \in S_n\}.$$

Sin embargo, $\{|x| : x \in S_n\}$ es una sucesión (creciente) de ordinales en κ de longitud $< \kappa$ y como κ es regular, concluimos que $\sup\{|x| : x \in S_n\} < \kappa$. Por tanto, $|S_{n+1}| < \kappa$. Si $y \in S_{n+1}$, entonces $y \in x$, para algún $x \in S_n$, así por 1.65 (5), tenemos que $|trcl(y)| \leq |trcl(x)| < \kappa$, es decir, $|y| < \kappa$. Por tanto, para cada $n \in \omega$, $|S_n| < \kappa$ y si $x \in S_n$, entonces $|x| < \kappa$. Luego,

$$|trcl(M)| = |\bigcup_{n \in \omega} S_n| \leq \aleph_0 \cdot \sup\{|S_n| : n \in \omega\}.$$

De nuevo, como κ es regular y $\{|S_n| : n \in \omega\}$ es una sucesión de ordinales (creciente) en κ de longitud ω, entonces $|trcl(M)| < \kappa$. □

El siguiente teorema será usado frecuentemente en las aplicaciones de submodelos elementales, sobre todo en la primera parte.

Teorema 1.73. *Sea θ un cardinal regular y κ un cardinal infinito tal que $2^\kappa \leq \theta$ y $X \subseteq H(\theta)$ con $|X| \leq 2^\kappa$, entonces existe $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $X \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$ y $\mathfrak{M}^\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, es decir, $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones.*

Demostración: Por la Proposición 1.71 existe $\mathfrak{M}_0 \preceq H(\theta)$ tal que $\mathfrak{M}_0$ es subconjunto de $H(\theta)$, $X \subseteq \mathfrak{M}_0$ y $|\mathfrak{M}_0| \leq 2^\kappa$. Afirmamos que $\mathfrak{M}_0^\kappa \subseteq H(\theta)$. Sea $f : \kappa \to \mathfrak{M}_0$ una κ-sucesión. Si $S_0 = f$, entonces claramente $|S_0| = \kappa < 2^\kappa \leq \theta$. Además, si $z \in S_0$, entonces $z = \{\{\alpha\}, \{\alpha, y\}\}$ con $y \in \mathfrak{M}_0 \subseteq H(\theta)$ y $\alpha < \kappa$. Por (4) del Lema 1.65 para todo ordinal α, $trcl(\alpha) = \alpha$, así para cada $\alpha < \kappa$, $\alpha \in H(\theta)$. Luego, por el Lema 1.72, $\{\alpha\}, \{\alpha, y\} \in H(\theta)$. Así, $z = (\alpha, y) \in H(\theta)$, es decir, $S_0 \subseteq H(\theta)$.

Ya que $S_1 = \bigcup S_0$, entonces

$$|S_1| \leq \sum_{x \in S_0} |x| = |S_0| \cdot \sup\{|x| : x \in S_0\}.$$

De nuevo, como $\{|x| : x \in S_0\}$ se puede ver como una sucesión creciente de elementos de θ de longitud $|S_0| < \theta$, entonces $\sup\{|x| : x \in S_0\} < \theta$ y como $|S_0| < \theta$, entonces $|S_1| < \theta$. Si $x \in S_1$, entonces $x \in y$ con $y \in S_0$ y como $S_0 \subseteq H(\theta)$, entonces $x \in H(\theta)$ (pues por (5) del Lema 1.65 $trcl(x) \subseteq trcl(y)$), es decir, S_1 es subconjunto de $H(\theta)$ de tamaño $< \theta$. Supóngase que para $n \in \omega$, $S_n \subseteq H(\theta)$ y $|S_n| < \theta$. Entonces $S_{n+1} = \bigcup S_n$ y

$$|S_{n+1}| \leq \sum_{x \in S_n} |x| = |S_n| \cdot \sup\{|x| : x \in S_n\},$$

como antes, se concluye que $|S_{n+1}| < \theta$ y que $S_{n+1} \subseteq H(\theta)$. Por tanto, para cada $n \in \omega$, $S_n \subseteq H(\theta)$ y $|S_n| < \theta$. Luego,

$$|trcl(f)| \leq \sum_{n\in\omega} |S_n| = \aleph_0 \cdot \sup\{|S_n| : n \in \omega\}.$$

Como κ es infinito, entonces θ no numerable. Luego, $\sup\{|S_n| : n \in \omega\} < \theta$ y así $|trcl(f)| < \theta$, es decir, $f \in H(\theta)$. El resto de la demostración es igual a la del Teorema Descendente de Löwenheim-Skolem-Tarski para submodelos elementales.

Supóngase que para $0 < \alpha < \kappa^+$ se tiene $\mathfrak{M}_\beta \preceq H(\theta)$ para cada $\beta < \alpha$. Sea $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}[\mathfrak{M}_\beta \cup \mathfrak{M}_\beta^\kappa] \subseteq H(\theta)$. Entonces existe $\mathfrak{M}_\alpha \preceq H(\theta)$ tal que $\mathfrak{M}_\alpha$ es subconjunto de $H(\theta)$, $X_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\alpha$ y $|\mathfrak{M}_\alpha| \leq |X_\alpha| + \aleph_0$. Ya que $|\mathfrak{M}_\beta| \leq 2^\kappa$, entonces

$$|\mathfrak{M}_\beta^\kappa| = |(|\mathfrak{M}_\beta|)^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa,$$

entonces

$$|X_\alpha| \leq \sum_{\beta<\alpha} |\mathfrak{M}_\beta| + |\mathfrak{M}_\beta|^\kappa \leq |\alpha| \cdot 2^\kappa = 2^\kappa,$$

pues $\alpha < \kappa^+$. Consecuentemente $|\mathfrak{M}_\alpha| \leq 2^\kappa$. Además, se puede ver (de forma análoga a como se hizo con $\mathfrak{M}_0$ pues sólo se necesitó que $\mathfrak{M}_0 \subseteq H(\theta)$) que $\mathfrak{M}_\alpha^\kappa \subseteq H(\theta)$.

Es claro que $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ es una cadena bajo la contención de submodelos elementales de $H(\theta)$. Luego por el Corolario 1.52, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathfrak{M}_\alpha \preceq H(\theta)$ tal que $X \subseteq \mathfrak{M}$ y

$$|\mathfrak{M}| \leq \kappa^+ \cdot \sup\{|\mathfrak{M}_\alpha| : \alpha < \kappa^+\} \leq 2^\kappa.$$

Veamos ahora que es cerrado bajo κ-sucesiones. Sea $f : \kappa \to \mathfrak{M}$. Sea $B = \{\alpha < \theta : \exists\gamma < \kappa(f(\gamma) \in \mathfrak{M}_\alpha)\}$. Entonces $|B| \leq \kappa$, de nuevo, considerando a B como sucesión creciente de ordinales y ya que $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ (por ser cardinal), entonces existe $\beta < \kappa^+$ tal que $\beta = \sup B$. Por ser cadena $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$, entonces $f \in \mathfrak{M}_\beta^\kappa$, y por tanto $f \in \mathfrak{M}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{M}$. □

A pesar de que el Teorema 1.73 puede pensarse como una consecuencia directa de la Proposición 1.71, y de hecho la prueba es muy parecida, en realidad no es así pues el modelo del Teorema 1.73 tiene la particularidad de que es cerrado bajo κ-sucesiones, lo cual será útil cuando veamos algunas aplicaciones.

En general ninguna de las dos implicaciones se cumple: (i) si $x \in \mathfrak{M}$, entonces $x \subseteq \mathfrak{M}$; (ii) si $x \subseteq \mathfrak{M}$, entonces $x \in \mathfrak{M}$. Sin embargo, con unas pocas hipótesis más se puede tener casi la primera implicación. Por otro lado, la segunda implicación se cumple siempre que x sea finito y, de hecho, se tiene algo más general. Siempre que se tenga un *conjunto definible*, entonces se puede suponer que ese conjunto es elemento de tu modelo. Esta última implicación se verá más adelante, después de ver las primeras aplicaciones de los submodelos elementales.

Teorema 1.74. *Sea θ un cardinal regular. Si $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, y $\kappa \in \mathfrak{M}$ es un cardinal tal que $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, entonces para todo $X \in \mathfrak{M}$ tal que $|X| \leq \kappa$, $X \subseteq \mathfrak{M}$. En particular, cada elemento numerable de $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$.*

Demostración: Sea $X \in \mathfrak{M}$ tal que $|X| \leq \kappa$, entonces en $\mathbb{V} \vDash \exists f(f : \kappa \to X \wedge f \text{ es sobreyectiva})$. Ya que la anterior es equivalente a una Δ_0-fórmula, $H(\theta)$ es transitivo, $\kappa, X \in H(\theta)$ y si $\varphi(x, y, z)$ es la fórmula "$x : y \to z \wedge\ x \text{ es sobreyectiva}$", entonces $H(\theta) \vDash \exists f(f : \kappa \to X \wedge\ f \text{ es sobreyectiva})$ (pues $\mathbb{V} \vDash \exists x\varphi[\kappa, X]$ si y sólo si $H(\theta) \vDash \exists x\varphi[\kappa, X]$, en donde se está sustituyendo la variable y por κ y la variable z por X).

Por otro lado, como $X, \kappa \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, entonces existe $g \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \varphi[g, \kappa, X]$. Ya que $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, entonces $H(\theta) \vDash \varphi[g, \kappa, X]$. Veamos ahora que $X \subseteq \mathfrak{M}$. Sea $x \in X$, como $H(\theta) \vDash g$ es sobreyectiva, entonces existe $\alpha < \kappa$ (y por tanto $\alpha \in H(\theta)$) tal que $H(\theta) \vDash (\alpha, x) \in g$, entonces $H(\theta) \vDash \exists y((\alpha, y) \in g)$, así, $\mathfrak{M} \vDash \exists y(\alpha, y) \in g$. Sea $y \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash (\alpha, y) \in g$, entonces $H(\theta) \vDash (\alpha, y) \in g$ y como $H(\theta) \vDash g$ es función, entonces $H(\theta) \vDash x = y$. Ya que en general la fórmula $u = v$ es absoluta, entonces $x = y$. Así $x \in \mathfrak{M}$.
□

Los siguientes resultados hablan de conjuntos **c.l.u.b.** y de conjuntos **estacionarios**.

Definición 1.75. *Sean $\alpha > 0$ un ordinal límite y $C \subseteq \alpha$.*

1. *C es **cerrado** en α si para cualquier ordinal límite $\beta < \alpha$ se cumple que si $\beta = \sup(C \cap \beta)$, entonces $\beta \in C$.*

2. *C es **no acotado** en α si $\sup C = \alpha$.*

3. *C es **cerrado y no acotado** (c.l.u.b.) si C es cerrado y no acotado en α.*

Proposición 1.76. *Para cardinales regulares no numerables $\kappa \leq \theta$ y $X \in H(\theta)$ con $|X| < \kappa$,*

$$\{\alpha \in \kappa : (\exists \mathfrak{M} \preceq H(\theta))(X \subseteq \mathfrak{M} \wedge |\mathfrak{M}| < \kappa \wedge \alpha = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)\}$$

contine un conjunto c.l.u.b., de κ.

Demostración: Definamos una función $f : \kappa \to \kappa$ como sigue.

1. Escojamos $\mathfrak{M}_0 \preceq H(\theta)$ tal que $X, 2 \subseteq \mathfrak{M}_0$ y $|\mathfrak{M}_0| < \kappa$, entonces definamos
$$f(0) = \sup(\mathfrak{M}_0 \cap \kappa).$$

2. Supongamos que ya se definió $f(\alpha)$ y sea $\mathfrak{M}_{\alpha+1} \preceq H(\theta)$ tal que $\mathfrak{M}_\alpha \cup \{\mathfrak{M}_\alpha\} \cup \alpha + 3 \subseteq \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ y $|\mathfrak{M}_{\alpha+1}| < \kappa$, entonces definamos
$$f(\alpha + 1) = \sup(\mathfrak{M}_{\alpha+1} \cap \kappa).$$

3. Supongamos que $\alpha < \kappa$ es un ordinal límite y que $f_{\restriction\alpha}$ ya se definió. Por construcción $(\mathfrak{M}_\xi)_{\xi<\alpha}$ es una $\in$-cadena elemental, luego por el Corolario 1.52 tenemos que $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi \preceq H(\theta)$. Sea $\mathfrak{M}_\alpha := \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi$, notemos que $|\mathfrak{M}_\alpha| < \kappa$ pues κ es regular y para cada $\xi < \alpha$ se tiene que $\xi + 2 \cup \mathfrak{M}_\xi \cup \{\mathfrak{M}_\xi\} \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$. Definamos
$$f(\alpha) = \sup(\mathfrak{M}_\alpha \cap \kappa).$$

Por el Teorema de Recursión, f está bien definida. Veamos qué f es una función continua, es decir, si para cada $0 < \alpha < \kappa$ límite se tiene que $f(\alpha) = \lim_{\xi\to\alpha} f(\xi)$. Es claro que $\bigcup_{\xi<\alpha}\sup(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa) \leq \sup(\bigcup_{\xi<\alpha}(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa))$. Por otro lado, si $\delta < \sup(\bigcup_{\xi<\alpha}(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa))$, entonces existen $\xi < \alpha$ y $\beta \in \mathfrak{M}_\xi \cap \kappa$ tal que $\delta < \beta \leq \sup(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa) \leq \bigcup_{\xi<\alpha}\sup(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa)$. Por tanto, $\sup(\bigcup_{\xi<\alpha}(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa)) = \bigcup_{\xi<\alpha}\sup(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa)$. De aquí que

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sup(\mathfrak{M}_\alpha \cap \kappa) \\ &= \sup((\bigcup_{\xi<\alpha}\mathfrak{M}_\xi) \cap \kappa) \\ &= \sup(\bigcup_{\xi<\alpha}(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa)) \\ &= \bigcup_{\xi<\alpha}\sup(\mathfrak{M}_\xi \cap \kappa)) \\ &= \lim_{\xi<\alpha} f(\xi). \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función continua. Más aún, ya que si $\beta < \alpha < \kappa$, entonces $\mathfrak{M}_\beta \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$, entonces $f(\beta) = \sup(\mathfrak{M}_\beta \cap \kappa) \leq \sup(\mathfrak{M}_\alpha \cap \kappa) = f(\alpha)$ y como además para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $\alpha < \alpha + 1 \in \alpha + 3 \subseteq \mathfrak{M}_{\alpha+1} \cap \kappa$, entonces $\alpha < \sup(\mathfrak{M}_{\alpha+1} \cap \kappa) = f(\alpha + 1)$, es decir, la función es cofinal. Por tanto, ya que si una función $f : \lambda \to \lambda$ es cofinal, continua y no decreciente (con λ un cardinal regular no numerable), entonces su rango es un c.l.u.b., entonces concluimos que $ran(f)$ es un c.l.u.b. el cual está contenido en el conjunto $\{\alpha \in \kappa : (\exists \mathfrak{M} \preceq H(\theta))(X \subseteq \mathfrak{M} \wedge |\mathfrak{M}| < \kappa \wedge \alpha = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa))\}$. □

Notemos que si $\kappa = \lambda^+$ y $|X| = \lambda$, entonces se puede pedir, además, que $\lambda + 1 \subseteq \mathfrak{M}$.

Definición 1.77. *Sea $0 < \alpha$ un ordinal con $cf(\alpha) > \omega$. $S \subseteq \alpha$ es llamado conjunto* ***estacionario*** *si para cualquier conjunto c.l.u.b., C, de α, $S \cap C \neq \emptyset$.*

Observación 6. *Sean $\kappa < \theta$ un cardinal no numerable y $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$. Entonces $\sup(\mathfrak{M}\cap\kappa)$ es un ordinal límite.*

Demostración: Supongamos que $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \beta + 1$. Ya que $\beta < \beta + 1 = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)$, entonces existe $\beta < \delta \leq \beta + 1$ en $\mathfrak{M} \cap \kappa$, es decir, $\beta + 1 \in \mathfrak{M} \cap \kappa$.

Por otro lado, ya que para cualquier $\delta \in \mathfrak{M}$ se tiene que $\{\delta\} \in \mathfrak{M}$, entonces $\delta + 1 = \delta \cup \{\delta\} \in \mathfrak{M}$, por ser $\mathfrak{M}$ un submodelo elemental.

Luego, se tiene que $(\beta + 1) + 1 \in \mathfrak{M}$ y como κ es límite, entonces $\beta + 2 \in \mathfrak{M} \cap \kappa$, es decir,

$$\beta + 2 \leq \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \beta + 1$$

□

Si κ es regular y $|\mathfrak{M}| < \kappa$, entonces $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)$ es un límite $< \kappa$.

Proposición 1.78. *Sean S, C, X subconjuntos de un cardinal regular $\kappa > \omega$ y sea $\theta > \kappa$ un cardinal regular.*

(1) Si S es un conjunto estacionario en κ, entonces para cualquier $A \in H(\theta)$ existe un $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $A \in \mathfrak{M}$ y $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in S$.

(2) Si $C \in \mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $|\mathfrak{M}| < \kappa$ y C es un c.l.u.b. en κ, entonces $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in C$.

(3) Si $X \in \mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $|\mathfrak{M}| < \kappa$ y $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in X$, *entonces X es estacionario en κ.*

Demostración: Consideremos la familia $\{A\} \subseteq H(\theta)$, de tamaño $< \theta$, entonces por el Lema 1.72, $\{A\} \in H(\theta)$. Por la Proposición 1.76,

$$\{\alpha \in \kappa : (\exists \mathfrak{M} \preceq H(\theta))(\{A\} \subseteq \mathfrak{M} \wedge |\mathfrak{M}| < \kappa \wedge \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \alpha)\}$$

contiene un c.l.u.b., y como S es estacionario, entonces existe $\alpha \in S$, con $\alpha < \kappa$, para el cual existe $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, tal que $A \in \mathfrak{M}$ y $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \alpha$.

Supongamos ahora que $C \in \mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $|\mathfrak{M}| < \kappa$ y C es un c.l.u.b. en κ. Por la observación anterior, tenemos que $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)$ es un ordinal límite, sea $\gamma = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)$. Veamos que C es cofinal en γ, es decir, que $\sup(C \cap \gamma) = \gamma$. Claramente $\sup(C \cap \gamma) \leq \gamma$. Sea $\beta < \gamma$, entonces existe $\beta < \delta \in \mathfrak{M} \cap \kappa$. Ya que C es c.l.u.b. en κ y $\mathfrak{M}$ es un submodelo elemental, entonces se tiene que

$$\mathfrak{M} \models \exists x(\delta < x \wedge x \in C).$$

Así, existe un $\sigma \in \mathfrak{M} \cap C$ tal que $\sigma > \beta$; por tanto, $\beta < \sup(\mathfrak{M} \cap C)$. Ya que C es c.l.u.b. en κ y γ es un límite $< \kappa$, entonces $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \gamma = \sup(C \cap \gamma) \in C$.

Finalmente, supongamos que $X \in \mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $|\mathfrak{M}| < \kappa$ y $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in X$. Supongamos que C un c.l.u.b. en κ tal que $C \cap X = \emptyset$. Luego, por elementalidad, podemos suponer que C está en $\mathfrak{M}$, pero por el inciso 2, tenemos que $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in C$ lo cual contradice que $C \cap X = \emptyset$. □

Lema 1.79. *Sea $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, con θ un cardinal regular. Si $\kappa < \theta$, $|\mathfrak{M}| = \kappa$ y $\kappa + 1 \subseteq \mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{M} \cap \kappa^+$ es un ordinal δ, y $\kappa \leq \delta < \kappa^+$.*

Demostración: $\mathfrak{M} \cap \kappa^+ \neq \emptyset$, pues $\kappa + 1 \subseteq \mathfrak{M} \cap \kappa^+$. Sean $\delta = \min\{\alpha < \kappa^+ : \alpha \notin \mathfrak{M} \cap \kappa^+\}$ (δ existe pues $\mathfrak{M} \cap \kappa^+$ tiene cardinalidad $\kappa < \kappa^+$). Claramente $\kappa \leq \delta$ y $\delta \subseteq \mathfrak{M} \cap \kappa^+$. Sea $\alpha \in \mathfrak{M} \cap \kappa^+$, entonces $|\alpha| \leq \kappa$ y $\alpha \in \mathfrak{M}$, así, por la proposición 1.74 $\alpha \subseteq \mathfrak{M}$, por tanto no puede ocurrir que $\delta < \alpha$ y como evidetemente $\delta \neq \alpha$, entonces $\alpha < \delta$. Así, $\mathfrak{M} \cap \kappa^+ = \delta$. □

Lema 1.80. *Sean $X \subseteq H(\theta)$ con $|X| < \kappa$ y $\kappa < \theta$ un cardinal regular, entonces existe $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $|\mathfrak{M}| < \kappa$, $X \subseteq \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M} \cap \kappa$ es un ordinal límite.*

Demostración: Sea $M_0 \preceq H(\theta)$ tal que $|\mathfrak{M}| < \kappa$ y $X \subseteq \mathfrak{M}_0$. Si $\mathfrak{M}_0 \cap \kappa$ no es un ordinal límite, entonces sea $\mathfrak{M}_1 \preceq H(\theta)$ tal que $\sup(\mathfrak{M}_0 \cap \kappa) \cup \mathfrak{M}_0 \cup \{\sup(\mathfrak{M}_0 \cap \kappa), \sup(\mathfrak{M}_0 \cap \kappa) + 1\} \subseteq \mathfrak{M}_1$ y $|\mathfrak{M}_1| < \kappa$ (esto último porque κ es regular). Repitamos el proceso inductivamente. Si para algún $n \in \omega$ se cumple que $\mathfrak{M}_n \cap \kappa$ es un ordinal límite, entonces acabamos. Supongamos que no es así; afirmamos que $\mathfrak{M}_\omega \cap \kappa$ es un ordinal límite, con $\mathfrak{M}_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{M}_n$. Es claro, por la Proposición 1.51, que $\mathfrak{M}_\omega$ es un submodelo elemental de $H(\theta)$ y como κ es regular, entonces $\mathfrak{M}_\omega$ tiene tamaño $< \kappa$. Sea $\delta = \sup(\mathfrak{M}_\omega \cap \kappa)$. Sea $\alpha < \delta$, entonces existe $n \in \omega$ y $\xi \in \mathfrak{M}_n \cap \kappa$ tal que $\alpha < \xi$ y así $\alpha < \xi \leq \sup(\mathfrak{M}_n \cap \kappa) \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}$. Sea $\xi \in \mathfrak{M}_\omega \cap \kappa$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $\xi \in \mathfrak{M}_n \cap \kappa$, entonces $\xi \leq \sup(\mathfrak{M}_n \cap \kappa)$ y en cualquiera de los dos casos $\xi \in \mathfrak{M}_{n+1}$.

Finalmente, veamos qué δ es límite. Supongamos que $\delta = \beta + 1$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $\beta \in \mathfrak{M}_n \cap \kappa$, entonces $\beta \leq \sup(\mathfrak{M}_n \cap \kappa)$, pero

$$\sup(\mathfrak{M}_n \cap \kappa) < \sup(\mathfrak{M}_n \cap \kappa) + 1 \in \mathfrak{M}_{n+1} \cap \kappa \subseteq \mathfrak{M}_\omega \cap \kappa = \delta.$$

□

Sea α un ordinal. Definimos

$$\alpha^* = \text{mín}\{\xi \geq \alpha : \xi \geq \omega \text{ es un ordinal límite}\}.$$

Definición 1.81. *Una cadena elemental* $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha<\beta}$ *es* ***continua*** *si para cada ordinal límite* $\gamma < \beta$ *se cumple que*

$$\mathfrak{M}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathfrak{M}_\alpha.$$

Lema 1.82. *Si* $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $|\mathfrak{M}| = \kappa$ *y* $x \in \mathfrak{M}$, *entonces existe una cadena creciente y continua* $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ *tal que*

1. *Para cada* $\alpha < \kappa$, $\mathfrak{M}_\alpha \preceq \mathfrak{M}$ *y* $x \in \mathfrak{M}_\alpha$.

2. $|\mathfrak{M}_\alpha| \leq |\alpha^*|$.

3. $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{M}_\alpha$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{M} = \{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}$ numerable tal que $x \in \mathfrak{M}_0$. Supongamos ahora que ya tenemos $\mathfrak{M}_\alpha$ para $\alpha < \kappa$. Sea $\mathfrak{M}_{\alpha+1} \preceq \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M}_\alpha \cup \{z_\alpha\} \subseteq \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ y $|\mathfrak{M}_{\alpha+1}| \leq |(\alpha+1)^*|$, esto se sigue del Teorema 1.49 ya que $|\mathfrak{M}_\alpha \cup \{z_\alpha\}| \leq |\alpha^*| \leq |(\alpha+1)^*|$.

Supongamos que $\alpha < \kappa$ es un ordinal límite y ya está construida $(\mathfrak{M}_\xi : \xi < \alpha)$. Por el Corolario 1.52, $\mathfrak{M}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi \preceq \mathfrak{M}$ y $|\mathfrak{M}_\alpha| \leq \sum_{\xi<\alpha} |\mathfrak{M}_\xi| \leq |\alpha| \cdot \sup\{|\xi^*| : \xi < \alpha\} = |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha| = |\alpha^*|$. □

Los anteriores resultados nos ayudarán a usar los submodelos elementales en resultados de topología y teoría de conjuntos.

Existe otro método con el que se introducen los submodelos elementales en la literatura. Aunque este otro método usa la noción de fórmula, si se reemplaza la fórmula arbitraria φ con una fórmula fija se obtiene un resultado puramente matemático que no involucra la noción de fórmula.

Teorema 1.83. *Sean* $\varphi_1(x_1, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{r_1}}), \ldots, \varphi_1(x_n, x_{n_1}, \ldots, x_{n_{r_n}})$ *fórmulas de la teoría de conjuntos. Si* X *es cualquier conjunto, entonces existe un conjunto* $\mathfrak{M}$ *tal que* $X \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq |X| \cdot \aleph_0$ *y siempre que existan* $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$ *tales que existe* x *para el cual* $\varphi_i(x, m_1, \ldots, m_n)$, *entonces existe* $m \in \mathfrak{M}$ *tal que* $\varphi_i(m, m_1, \ldots, m_n)$, *para cualquier* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Capítulo 2

Definiciones y resultados adicionales

En este capítulo se presentarán las definiciones y resultados necesarios para las aplicaciones de submodelos posteriores.

2.1. Topología

Primero veamos algunas definiciones topológicas que usaremos con recurrencia. Empezaremos definiendo lo que es un espacio topológico. Para más información se puede consultar [6].

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Se dirá que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una* ***topología*** *para el espacio X si cumple lo siguiente.*

1. *$X, \emptyset \in \tau$.*

2. *Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.*

3. *Si $\mathscr{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathscr{A} \in \tau$.*

Si τ es una topología para el espacio X, entonces se escribirá (X, τ) y se dirá que (X, τ) es un espacio topológico.

Definición 2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Decimos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una base para el espacio topológico (X, τ) si para cada $A \in \tau$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$.*

2. *Decimos que $\mathcal{S}$ es una subbase para el espacio topológico (X, τ) si*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } 0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$$

   es una base para el espacio topológico (X, τ).

Definición 2.3. *1. Un espacio topológico (X, τ) es* ***primero numerable*** *si para cada $x \in X$, existe una base de vecindades de x numerable.*

2. *Un espacio topológico (X, τ) es* ***segundo numerable*** *si existe una base numerable.*

Los espacios topológicos se pueden clasificar en distintos tipos según sus propiedades. La clasificación más común es la de los Axiomas de Separación, la cual clasifica a los espacios en función del grado en que puntos o conjuntos cerrados pueden ser separados por medio de conjuntos abiertos.

Definición 2.4.

1. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio** T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen un conjunto abierto que tiene a exactamente uno de estos puntos.*

2. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio** T_1 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$.*

3. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio de Hausdorff** (o T_2) si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

4. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio regular** (o T_3) si (X, τ) es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

5. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio Tychonoff** ($T_{3\frac{1}{2}}$ o **completamente regular**) si (X, τ) es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[F] = \{1\}$.*

6. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado un **espacio normal** (o T_4) si (X, τ) es un espacio T_1 y para cualesquiera $E, F \subseteq X$ cerrados tales que $E \cap F = \emptyset$, existen $U, V \in \tau$ tales que $E \subseteq U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Lema 2.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico primero numerable y $A \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x.*

Las siguientes definiciones son las de espacios compactos y espacios numerablemente compactos.

Definición 2.6.

1. *Sea X un conjunto. Una **cubierta** para el conjunto X es una familia de subconjuntos de X, $\{A_i : i \in I\}$, tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Una **subcubierta** de $\{A_i : i \in I\}$ para X es una cubierta para el conjunto X, $\{B_j : j \in J\}$, tal que $\{B_j : j \in J\} \subseteq \{A_i : i \in I\}$.*

2. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces una **cubierta abierta** (o **cerrada**) para el espacio topológico (X, τ) es una cubierta para el conjunto X tal que todos sus elementos son conjuntos abiertos (cerrados).*

Definición 2.7. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado **espacio compacto** si es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta para el espacio (X, τ) tiene una subcubierta finita.*

Definición 2.8. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado espacio **numerablemente compacto** si es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta numerable para el espacio (X, τ) tiene una subcubierta finita.*

Lema 2.9. *Si (X, τ) es un espacio topológico (numerablemente) compacto, entonces todo subconjunto cerrado de X es (numerablemente) compacto.*

Un par de resultados importantes que usaremos más adelante son los siguientes.

Lema 2.10. *Si X es Hausdorff y compacto, entonces X es normal.*

Teorema 2.11. ***(Teorema de Metrización de Urysohn)***. *Si (X, τ) es un espacio topológico segundo numerable y T_3, entonces X es metrizable.*

Definición. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ es* ***punto numerable*** *si para cada $x \in X$ se cumple que $|\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| = \aleph_0$.*
2. *Si $\mathcal{A}$ es punto numerable y además es base del espacio topológico (X, τ), entonces $\mathcal{A}$ se dice* ***base punto numerable****.*

Definición 2.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es llamado* ***punto de acumulación completo*** *del conjunto $A \subseteq X$ si para cada vecindad U de x se tiene que $|A \cap U| = |A|$.*

Lema 2.13. *Sea X un espacio T_1. Entonces X es numerablemente compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de X tiene un punto límite (un punto en el derivado de X).*

Corolario 2.14. *Si X es T_1, entonces todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación completo si y sólo si X es numerablemente compacto.*

Demostración: Supongamos que todo conjunto $A \subseteq X$ infinito numerable tiene un punto de acumulación completo. Sea $B \subseteq X$ infinito y sea $A \subseteq B$ infinito numerable. Existe un punto de acumulación completo de A. Claramente dicho punto de acumulación completa es punto límite de A el cual es también punto límite de B. Así por el Lema 2.13, X es numerablemente compacto. Supongamos que X es numerablemente compacto y sea $A \subseteq X$ infinito numerable, A tiene un punto límite x. Sea U vecindad de x, como X es T_1, entonces toda vecindad de x debe tener una cantidad infinita de puntos de A, así $|A| = \aleph_0 \leq |A \cap U| \leq |A|$.

□

Definición. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *El carácter de $x \in X$ se define como*
$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } x \text{ en } X\} + \aleph_0.$$
2. *El carácter de X es*
$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Definición. 1. *Sea Σ un conjunto y $\leq$ una relación en Σ. Se dice que $(X, \leq)$ es un* ***conjunto dirigido*** *si $\leq$ satisface*

a) *$\leq$ es transitiva, es decir, si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.*

b) *$\leq$ es reflexiva, es decir, $x \leq x$ para todo $x \in \Sigma$.*

c) *Para cada $x, y \in \Sigma$, existe un $z \in \Sigma$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.*

2. *Una **red** en un espacio topológico X es una función $r : \Sigma \to X$, donde Σ es un conjunto dirigido. Se denotará por x_σ al punto $r(\sigma)$ y a la expresión "$r : \Sigma \to X$ es una red" se denotará por "$(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$".*

3. *Una red $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ en el espacio topológico X **converge** al punto $x \in X$, denotado por $x_\sigma \to x$, si para cada vecindad U de x, existe un $\sigma_0 \in \Sigma$, tal que para cada $\sigma \geq \sigma_0$ $x_\sigma \in U$.*

Lema 2.15. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A que converge a x.*

Definición. *Sea (X, τ) un espacio topológico. La **densidad del espacio** X se define como*

$$d(X) = \text{mín}\{|A| : A \text{ es un subconjunto denso de } X\}$$

Definición 2.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Si $x \in X$, el **pseudocaracter** de x se define como sigue*

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una familia de abiertos tal que } \bigcap \mathcal{B} = \{x\}\} + \aleph_0.$$

2. *El **pseudocaracter** de X es*

$$\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}.$$

Definición 2.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Sea $x \in X$, la **estrechez** de x es*

$$t(x, X) = \text{mín}\{\kappa : \forall A \subseteq X(x \in \overline{A} \to \exists B \subseteq A(|B| \leq \kappa \wedge x \in \overline{B}))\}.$$

2. *La **estrechez** de X es*

$$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\} + \aleph_0.$$

Definición 2.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. El **grado de Lindelöf**, denotado por $l(X)$, se define como*

$$l(X) = \text{mín}\{\kappa \geq \aleph_0 : \forall \mathcal{U} \subseteq \tau(X = \bigcup \mathcal{U} \to \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}(|\mathcal{V}| \leq \kappa \wedge X = \bigcup \mathcal{V}))\}.$$

2.2. Teoría de Conjuntos

Para consultar más acerca de la teoría de conjuntos se pueden revisar [10], [11], [12] y [13].

Definición 2.19. *Sean $S \subseteq \alpha$ y $f : S \to \beta$ una función. Se dice que f es* ***regresiva*** *en S si para cada $0 \neq \gamma \in S$ se cumple que $f(\gamma) < \gamma$.*

Definición 2.20. *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es llamada un* ***Δ-sistema*** *si existe un conjunto R tal que para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{A}$, distintos, $X \cap Y = R$. R es llamado la* ***raíz*** *del Δ-sistema.*

Definición 2.21. *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ se dice que es* ***casi ajena*** *si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, tales que $A \neq B$, se cumple que $A \cap B$ es finito.*

Definición 2.22.

1. *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es d-**casi ajena** si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$, se cumple que $|A \cap B| < d$.*

2. *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es **esencialmente ajena** si para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $F_A \subseteq A$ tal que $\{A \setminus F_A : A \in \mathcal{A}\}$ es ajena por pares.*

2.3. Árboles

Definición 2.23. *Un* ***árbol*** *es un conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq)$ tal que para cada $t \in T$, el segmento inicial $(t)\downarrow = \{x \in T : x < t\}$ es bien ordenado por la relación $\leq$.*

A los elementos de un árbol se les llama **nodos**. A continuación, presentaremos una terminología útil cuando se emplean árboles.

1. Sea $t \in T$ un nodo, la altura del nodo se define como el tipo de orden del segmento inicial $t\downarrow$
$$\mathrm{ht}(t) = \mathrm{otp}((t)\downarrow)$$
.

2. El α-ésimo nivel del árbol T es
$$\mathrm{Lev}(\alpha, T) = \{t \in T : \mathrm{ht}(t) = \alpha\}.$$
A veces, también se denotará por $T(\alpha)$.

3. La altura de un árbol T es
$$\mathrm{ht}(T) = \sup\{\mathrm{ht}(t) + 1 : t \in T\},$$
o bien, $\mathrm{ht}(T) = \min\{\alpha : \mathrm{Lev}(\alpha, T) = \emptyset\}$.

4. Un subconjunto P de un árbol T es un camino si P es cadena ($\subseteq$-linealmente ordenado) y para cada $t \in P$, $(t)\downarrow \subseteq P$.

5. Una **rama** es un camino maximal.

6. Una **rama cofinal** es una rama que interseca a todos los niveles del árbol.

7. Una anticadena es un subconjunto del árbol tal que cualesquiera dos elementos son incomparables.

Definición 2.24. *Sea* $(T, \leq_T)$ *un árbol. Un subárbol de* T *es un subconjunto* S *tal que para cada* $s \in S$ $(s) \downarrow \subseteq S$.

Si T es un árbol, entonces

$$T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Lev}(\beta, T)$$

es un subárbol de T.

Lema 2.25. *Sea* $(T, \leq)$ *un árbol,* $\beta < \alpha < ht(T)$ *y* $t \in Lev(\alpha, T)$, *entonces existe un único* $s \in T$ *tal que* $s \in Lev(\beta, T)$ *y* $s < t$.

Algunos textos recomendados acerca de este tema son [8] y [16]

Capítulo 3

Primeras Aplicaciones de Submodelos Elementales

Ciertas propiedades son más fáciles de demostrar en ciertos modelos y en otros modelos pueden ser más difíciles. Por ejemplo, si se considera la fórmula $x \subseteq y$, la cual es absoluta para modelos transitivos, y si $a, b \in \mathfrak{M}$, entonces en lugar de demostrar que $a \subseteq b$ se puede demostrar que $a \cap \mathfrak{M} \subseteq b$, donde $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ para un θ *suficientemente grande*, lo cual podría ser más rápido que demostrar lo primero. Así, podríamos resumir que la aplicación de los submodelos elementales consiste en saltar de un modelo a otro, entre $\mathfrak{M}$ y $H(\theta)$, siempre teniendo en cuenta lo que $\mathfrak{M}$ y $H(\theta)$ "piensan" e intentando usar de la forma más conveniente lo que cada modelo sabe, es decir, lo que se puede demostrar en él.

Proposición 3.1. *(Stephenson Jr.). Sea (X, τ) un espacio topológico numerablemente compacto y B cualquier subconjunto de X de cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$. Entonces existe $G \subseteq X$ numerablemente compacto tal que $B \subseteq G$ y $|G| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Vamos a usar la técnica de los submodelos elementales para encontrar un conjunto G tal que $B \subseteq G \subseteq X$ de tamaño a lo más $2^{\aleph_0}$.

Sean θ un cardinal regular no numerable suficientemente grande, es decir, sea θ tan grande como para que $X, \tau, \omega + 1 \in H(\theta)$, $B \subseteq H(\theta)$ y $2^{\aleph_0} \leq \theta$. Y sea $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $A \subseteq \mathfrak{M}$, con $A = B \cup \{X, \tau, \omega\}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^{\aleph_0}$ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones. Ya que $B \subseteq \mathfrak{M}$, entonces $B \subseteq \mathfrak{M} \cap X = G$. Claramente $|G| \leq 2^{\aleph_0}$. Resta ver que G es numerablemente compacto. Sea $S \in [G]^\omega$, ya que S es infinito numerable entonces existe una biyección de ω en S digamos $(a_n)_{n\in\omega}$, donde $\{a_n : n \in \omega\} = S$. Así, $(a_n)_{n\in\omega}$ es una ω-sucesión en $\mathfrak{M}$ y como $\mathfrak{M}$ es cerrada bajo ω-sucesiones, entonces $(a_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{M}$. Sea $f : \omega \to S$, tal que $f(n) = a_n$, y consideremos la fórmula

$$\psi(x, x_1, x_2) = x_1 \text{ es una función sobreyectiva de } x_2 \text{ a } x.$$

Entonces, ya que X es numerablemente compacto y

$$H(\theta) \models \exists x \psi(x, x_1, x_2)[f, \omega],$$

se cumple que

$$\mathfrak{M} \models \exists x \psi(x, x_1, x_2)[f, \omega].$$

Sea $y \in \mathfrak{M}$ tal que
$$\mathfrak{M} \vDash \psi(x, x_1, x_2)[y, f, \omega].$$
Luego,
$$H(\theta) \vDash \psi(x, x_1, x_2)[y, f, \omega],$$
es decir,
$$H(\theta) \vDash y = f[\omega].$$
Por tanto, $S = f[\omega] \in \mathfrak{M}$.

Si consideramos la fórmula
$$\varphi(x, x_1, x_2, x_3) = x \in x_1 \wedge (\forall w \in x_2)(x \in w \to |w \cap x_3| = |x_3|),$$
puesto que X es numerablemente compacto y S es numerable, entonces existe $x \in X$ tal que x es punto de acumulación completo de S, es decir,
$$H(\theta) \vDash \exists x \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[X, \tau, S].$$
Así, por elementalidad,
$$\mathfrak{M} \vDash \exists x \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[X, \tau, S].$$
Sea $y \in \mathfrak{M}$ tal que
$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[y, X, \tau, S],$$
entonces existe $y \in G$ el cuel es un punto de acumulación completo de S,
$$H(\theta) \vDash \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[y, X, \tau, S].$$
Consecuentemente, y es punto de acumulación completo de S en el espacio topológico $(G, \tau_{\restriction G})$, pues si $U = O \cap G$ es una vecindad de y en $(G, \tau_{\restriction G})$, entonces como $O \cap S \subseteq S \subseteq G$, así $U \cap S = (O \cap G) \cap S = (O \cap S) \cap G = O \cap S$, y por tanto $|U \cap S| = |O \cap S| = |S|$, pues sabemos que y es un punto de acumulación completo de S en el espacio topológico (X, τ) y O es una vecindad de y. $\square$

En la demostración anterior se presenta la situación comentada previamente: se está comparando lo que $H(\theta)$ sabe con lo que $\mathfrak{M}$ sabe. Por ejemplo, dado que
$$\mathfrak{M} \vDash \exists x \varphi(x, x_1, x_2)[f, \omega],$$
fue posible encontrar un elemento $y \in \mathfrak{M}$ tal que
$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(x, x_1, x_2)[y, f, \omega].$$
Luego, por elementalidad
$$H(\theta) \vDash \varphi(x, x_1, x_2)[y, f, \omega].$$
Es decir, sabemos que $H(\theta)$ piensa que hay un elemento que cumple una cierta propiedad. Resumiendo, debido a que en $H(\theta)$ se cumple la fórmula existencial, por elementalidad, la fórmula existencial ($\exists$) se cumplen en $\mathfrak{M}$, por tanto, es posible encontrar un elemento en $\mathfrak{M}$ que cumple esa propiedad, pero, por la misma elementalidad, $H(\theta)$ piensa que ese elemento cumple la propiedad.

Como mencionamos en la demostración anterior, la parte "Sean θ un cardinal suficientemente grande..." se refiere, por un lado, a que es necesario que θ sea tan grande como para que $X, \tau, \omega + 1 \in H(\theta)$, $B \subseteq H(\theta)$ y, como estamos utilizando el Teorema 1.73, $2^{\aleph_0} \leq \theta$. Sin embargo, la frase θ suficientemente grande abarca más cosas. Previamente habíamos establecido que no existe modelo de **ZFC**, pero que los conjuntos $H(\kappa)$ son modelos de un fragmento bastante grande de la teoría de conjuntos (de hecho, de **ZFC** $-$ **P**). Más aún, por el Principio del Reflejo, se tiene que para cualquier número finito de fórmulas de la teoría de conjuntos se podría encontrar un $H(\kappa)$ tal que dichas fórmulas fueran absolutas para $H(\kappa)$. Así, θ suficientemente grande también implica que, por ejemplo, la fórmula $\psi(x, x_1, x_2)$ sea absoluta para $H(\theta)$, que la fórmula $\varphi(x, x_1, x_2, x_3)$ sea absoluta para $H(\theta)$ y también que sea absoluta la "fórmula" un conjunto es numerablemente compacto si y sólo si todo subconjunto infinito numerable tiene un punto de acumulación completo.

Proposición 3.2. *(Pospišil). Cualquier espacio Hausdorff que sea primero numerable y tenga un subconjunto denso de cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$ tiene cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$.*

Demostración: La idea aquí es encontrar un conjunto que tenga cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$ y que sea igual o que contenga a X. Por ejemplo, si G es un conjunto cerrado y $D \subseteq G$ es un conjunto denso en X, entonces $X = \overline{D} \subseteq \overline{G} = G$.

Sean $D \subseteq X$ un conjunto denso en X de cardinalidad no mayor a $2^{\aleph_0}$, θ un cardinal regular no numerable suficientemente grande y $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que si $A = D \cup \{X, \tau, \omega\}$, entonces $A \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones y las fórmulas

$$\varphi(x, x_1, x_2, x_3) = x \in x_1 \wedge (\forall w \in x_2)(x \in w \rightarrow |x_3 \setminus w| < \aleph_0)$$

(la cual se interpreta como "Si w es un abierto que tiene a x, entonces todos a excepción de una cantidad finita de elementos de x_3 están en w") y

$$\psi(x, x_1, x_2) = x_1 \text{ es una función sobreyectiva de } x_2 \text{ a } x$$

sean absolutas para $H(\theta)$.

Definamos $G = X \cap \mathfrak{M}$. Claramente $D \subseteq G$ y $|G| \leq 2^{\aleph_0}$. Resta ver G es cerrado en X. Sea $c \in \overline{G}$, como X es primero numerable por el Lema 2.5, existe una sucesión $(a_n)_{n \in \omega}$, en G, que converge a c. Como antes, si $f : \omega \rightarrow S$, con $S = \{a_n : n \in \omega\}$, entonces $f \in \mathfrak{M}$ (pues $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones), como $H(\theta) \models \exists x \psi(x, x_1, x_2)[f, \omega]$, entonces por elementalidad se concluye que $S = f[\omega] \in \mathfrak{M}$. Luego, como $X, \tau, S \in \mathfrak{M}$ y

$$H(\theta) \models \exists x \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[X, \tau, S]$$

(pues $H(\theta) \models \varphi[c, X, \tau, S]$), entonces

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[X, \tau, S],$$

es decir, existe $m \in \mathfrak{M}$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[m, X, \tau, S].$$

Por tanto,

$$H(\theta) \models \varphi(x, x_1, x_2, x_3)[m, X, \tau, S].$$

Y como X es Hausdorff, entonces $c = m \in \mathfrak{M}$. Así, $c \in \mathfrak{M} \cap X = G$. Se concluye que G es cerrado. De aquí que $X = \overline{D} \subseteq \overline{G} = G$, pero $|G| \leq 2^{\aleph_0}$. Así, $|X| \leq 2^{\aleph_0}$. □

Usualmente no se mencionan las fórmulas que se desean sean absolutas y, en general, se asume que $\mathfrak{M}$ es absoluto para una cantidad suficiente de fórmulas. Aplicando lo anterior, una demostración breve del resultado anterior quedaría como sigue: sea D un conjunto denso tal que $|D| \leq 2^{\aleph_0}$. Sea $\mathfrak{M}$ un submodelo elemental de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ tal que X y τ son elementos de $\mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones. Sea $x \in \overline{\mathfrak{M} \cap X}$, entonces existe una sucesión $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{M} \cap X$ que converge a x. Claramente $\overline{\{a_n : n \in \omega\}} = \{a_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$. Definamos la fórmula

$$\varphi(x, x_1, x_2, x_3) = x \subseteq x_1 \wedge \forall w(x \in x_1 \rightarrow (w \in x \leftrightarrow \forall y(y \in x_2 \wedge w \in y \rightarrow y \cap x_3 \neq \emptyset))),$$

la cual se entiende como "x es la clausura de x_3 en el espacio topológico (x_1, x_2)". Debido a que la fórmula φ es equivalente a una Δ_0-fórmula,

$$H(\theta) \models \varphi(x, x_1, x_2, x_3)(\overline{\{a_n : n \in \omega\}}, X, \tau, \{a_n : n \in \omega\}),$$

$X, \tau, \{a_n : n \in \omega\} \in \mathfrak{M}$ (donde $\{a_n : n \in \omega\} \in \mathfrak{M}$ por la razón de siempre, se supone $\mathfrak{M}$ cerrado bajo ω-sucesiones y que la fórmula $\psi(x, x_1, x_2)$ que aparece en las proposiciones 3.1 y 3.2 es absoluta para $H(\theta)$) y además se está suponiendo que la fórmula $\varphi(x, x_1, x_2, x_3)$ es absoluta para $H(\theta)$, entonces existe $m \in \mathfrak{M}$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \varphi(m, X, \tau, \{a_n : n \in \omega\}).$$

Luego, por la definición de la fórmula φ concluimos que $m = \overline{\{a_n : n \in \omega\}}$, es decir, $\overline{\{a_n : n \in \omega\}} \in \mathfrak{M}$. Por el Teorema 1.74 $\overline{\{a_n : n \in \omega\}} \subseteq \mathfrak{M}$, así, $x \in \mathfrak{M} \cap X$. Luego, $X = \overline{D} \subseteq \overline{\mathfrak{M} \cap X} = \mathfrak{M} \cap X$.

Diremos que $a \in A$ es **definible en el modelo** $\mathfrak{A}$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x = a)[a_1, \ldots, a_n]$. Nosotros diremos que b es definible en $\mathfrak{B}$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ para referirnos al siguiente caso: si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, b es definible en $\mathfrak{B}$ por la fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y los parámetros $a_1, \ldots, a_n \in A$. Ya que

$$\mathfrak{B} \models \exists x \varphi[a_1, \ldots, a_n],$$

entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Sea $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Entonces $\mathfrak{B} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Y como b es definible en $\mathfrak{B}$, entonces

$$\mathfrak{B} \models a = b.$$

Así, siempre se puede suponer que los conjuntos definibles son elementos del modelo (pues siempre se puede suponer que $\mathfrak{M}$ es absoluto para las fórmulas que definen esos conjuntos). Algunos ejemplos de conjuntos definibles son $\emptyset$, ω, ω_n, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathfrak{c}$, $\sqrt{2}$, etc. En lo sucesivo, en lugar de escribir la fórmula simplemente enunciaremos que el conjunto en cuestión es definible.

Proposición 3.3. *Si X es numerablemente compacto y tiene una base punto numerable, entonces X es metrizable.*

Demostración: Sean $\mathcal{U}$ una base punto numerable de (X,τ), θ un cardinal regular suficientemente grande y $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $\{X,\tau,\mathcal{U}\} \subseteq \mathfrak{M}$ y $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$.

Sea $D = \mathfrak{M} \cap X$, entonces D es denso en X, pues si $z \in X \setminus \overline{D}$, para cada $x \in \overline{D}$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}$ (porqué $\mathcal{U}$ es base del espacio topológico (X,τ)) tal que $x \in U_x$ y $z \notin U_x$ (pues X es T_1). Como $x \in \overline{D}$, entonces $U_x \cap (X \cap \mathfrak{M}) \neq \emptyset$, sea $x_0 \in U_x \cap D \cap \mathfrak{M}$. Entonces $U_x \in \{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\}$. Debido a que $\{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\}$ es definible en $H(\theta)$ con parámetros $x_0, \mathcal{U} \in \mathfrak{M}$, entonces $\{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\} \in \mathfrak{M}$. Como $\mathcal{U}$ es punto numerable, entonces el conjunto $\{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\}$ es un elemento numerable de $\mathfrak{M}$, así por el Teorema 1.74 se concluye que $U_x \in \mathfrak{M}$.

Así, se puede cubrir a $\overline{D}$ con $\{U_x : x \in \overline{D}\}$ y $\{U_x : x \in \overline{D}\} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathfrak{M}$. Como $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$, entonces

$$|\{U_x : x \in \overline{D}\}| \leq |\mathcal{U} \cap \mathfrak{M}| \leq \aleph_0,$$

es decir, $\{U_x : x \in \overline{D}\}$ es una cubierta abierta numerable de $\overline{D}$. Como $\overline{D}$ es cerrado en X, y X es numerablemente compacto, entonces existe $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ tales que $\overline{\mathfrak{M} \cap X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, es decir, $\{U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubre a $\overline{D}$. Ya que, subconjuntos finitos de $\mathfrak{M}$ son elementos de $\mathfrak{M}$ (pues, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathfrak{M}$, entonces es evidente que A es definible en $H(\theta)$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}$, por el Lema 1.72, $A \in H(\theta)$. Así, $A \in \mathfrak{M}$), entonces $\{U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\} \in \mathfrak{M}$. Consecuentemente se tiene que

$$\mathfrak{M} \models \forall x(x \in X \to x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}).$$

Luego

$$H(\theta) \models \forall x(x \in X \to x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}).$$

Y como la fórmula anterior es equivalente a una Δ_0-fórmula, entonces se concluye que $\{U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubre a X. Sin embargo, por construcción de las U_x, $z \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, D es denso en X.

Si $x \in D$, entonces $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} \subseteq \mathcal{U}$, por tanto $\bigcup\{\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} : x \in D\} \subseteq \mathcal{U}$. Por otro lado, si $U \in \mathcal{U}$, entonces existe $x \in D$ tal que $x \in U$ (se puede suponer que $\mathcal{U}$ no tiene al conjunto vacío), entonces $U \in \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$, así, $U \in \bigcup\{\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} : x \in D\}$. Es decir,

$$\mathcal{U} = \bigcup\{\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} : x \in D\}.$$

Dado que $\mathcal{U}$ es base punto numerable y como D es numerable, entonces $\mathcal{U}$ es unión numerable de conjuntos numerables, es decir, $\mathcal{U}$ es numerable.

Veamos que el espacio X es compacto. Por hipótesis es Hausdorff (ya que X es numerablemente compacto). Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X, entonces sea $A^* = \{U \in \mathcal{U} : (\exists A \in \mathcal{A})(U \subseteq A)\}$. Como $\mathcal{U}$ es numerable, entonces A^* es numerable. Para cada $U \in A^*$, elíjase $A_U \in \mathcal{A}$ tal que $U \subseteq A_U$ y sea $B = \{A_U : U \in A^*\}$. Se tiene que B es numerable. Más aún, si $x \in X$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{U}$ es base, sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subseteq A$, entonces $U \subseteq A_U$. Así, $x \in A_U$ y $A_U \in B$. Por tanto $X \subseteq \bigcup B$, donde $B \subseteq \mathcal{A}$. Como B es numerable y X es numerablemente compacto, entonces existe una subcubierta finita de B, es decir, existe una subcubierta finita de $\mathcal{A}$.

Finalmente, como X es T_2 y compacto, entonces por el Lema 2.10 X es normal, en particular, X es regular. Luego, por el Teorema de Metrización de Urysohn (Teorema 2.11), se concluye que X es metrizable. $\square$

Proposición 3.4. *Si X es compacto, entonces $|X| \leq 2^{\chi(X)}$.*

Demostración: Sea $\kappa = \chi(X)$. Sea θ suficientemente grande tal que $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$, $X, \tau \in \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$ y $\mathfrak{M}$ sea cerrado bajo κ-sucesiones.

Sean $G = \mathfrak{M} \cap X$ y $a \in \overline{G}$, entonces por el Lema 2.15 existe una red $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ en G que converge a a. La red tiene longitud $\leq \kappa$, y de hecho, tal red es la red natural $(x_V)_{V\in\mathcal{B}(a)}$, donde para cada vecindad $V \in \mathcal{B}(a)$, $x_V \in V \cap G$ y $\mathcal{B}(a)$ es una base de vecindad para a que tiene tamaño $\chi(a, X) \leq \chi(X) = \kappa$. Más aún, por elementalidad podemos suponer que $\mathcal{B}(a) \in \mathfrak{M}$. Si

$$\begin{aligned}\varphi(x, x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & x : x_3 \to x_1 \text{ es función } \wedge \\ & \forall u(u \in x_2 \to (x_4 \in u \to \exists y(y \in x_3 \wedge \forall w(w \in x_3 \wedge w \subseteq y \to x(w) \in u)))),\end{aligned}$$

puesto que $(x_V)_{V\in\mathcal{B}(a)}$ es una red que converge a a, entonces

$$H(\theta) \vDash \exists x\varphi[X, \tau, \mathcal{B}(a), a].$$

Asi, existe $f \in \mathfrak{M}$ tal que $f : \mathcal{B}(a) \to X$ y para cada vecindad V de a existe $V_a \in \mathcal{B}(a)$ tal que para toda $U \in \mathcal{B}(a)$, con $U \subseteq V_a$, entonces $f(U) \in V$. Es decir, la nueva red $(f(V))_{V\in\mathcal{B}(a)} \in \mathfrak{M}$ converge a a. Sea

$$\psi(y, y_1, y_2, y_3) = \forall u(u \in y_1 \to (y \in u \to \exists s(s \in y_2 \wedge \forall w(w \in y_2 \wedge w \subseteq s \to y_3(w) \in u)))),$$

entonces

$$H(\theta) \vDash \exists y\psi(y, y_1, y_2, y_3)[\tau, \mathcal{B}(a), f].$$

Luego, por elementalidad existe $m \in \mathfrak{M}$ tal que

$$H(\theta) \vDash \psi(y, y_1, y_2, y_3)[m, \tau, \mathcal{B}(a), f].$$

Por tanto, $(f(V))_{V\in\mathcal{B}(a)}$ converge a a y a m, pero X es Hausdorff, así que $a = m$, es decir, $a \in \mathfrak{M}$; como además $a \in X$, entonces $a \in G$. Por tanto G es un conjunto cerrado.

Para cada $x \in G$, existe una base de vecindades $\mathcal{B}'(x)$ de tamaño $\leq \kappa$. Luego, por elementalidad existe una base de vecindades $\mathcal{B}(x) \in \mathfrak{M}$ para x de tamaño $\leq \kappa$, así por el Teorema 1.74 $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathfrak{M}$.

Si $y \in X \setminus G$, entonces para cada $x \in G$ sea $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B_x$ y $y \notin B_x$. Entonces $G \subseteq \bigcup\{B_x : x \in G\}$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que $G \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}$. Es decir,

$$\mathfrak{M} \vDash X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}.$$

Luego, se estaría probando que $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}\}$ cubre a X pero evidentemente $y \notin \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}$. Así que $X = G$. Por tanto $|X| \leq |\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$. $\square$

Comparando la demostración de la Proposición 3.4 con la demostración de la Proposición A.2 nos damos cuenta que las demostraciones son muy parecidas, dado que en ambas se busca un conjunto G que contenga a X, que sea cerrado (y por tanto compacto) y que tenga cardinalidad no mayor a 2^κ. La diferencia entre ambas demostraciones radica en que en la Proposición A.2 sí se tiene que construir dicho conjunto G.

Para finalizar esta primera parte se presentarán tres resultados muy importantes, los cuales pertenecen a Teoría de Conjuntos y Topología: el *Pressing Down Lemma*, el *Lema de las* Δ *Familias* y un resultado de *Arkhangel'skiĭ* que habla sobre el tamaño de espacios de Hausdorff.

Teorema 3.5. *[**Fodor**]. Sean $\kappa = \lambda^+$ un cardinal regular no numerable, $S \subseteq \kappa$ un conjunto estacionario de κ y $f : S \to \kappa$ una función regresiva en S, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\alpha\}]$ es estacionario en κ.*

Demostración: Sea $\theta > \kappa$ un cardinal regular suficientemente grande. Por lo que se mencionó después de la Proposición 1.76 podemos, además, pedir que en la Proposición 1.78 (1) $\lambda + 1 \subseteq \mathfrak{M}$. Así, sean $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $\lambda + 1 \cup \{f\} \subseteq \mathfrak{M}$ y $\delta = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in S$. Como f es regresiva, entonces $\xi = f(\delta) < \delta$ y por tanto $\xi \in \delta = \sup(\mathfrak{M} \cap \kappa)$.

Ya que $f, \xi \in \mathfrak{M}$ y $H(\theta) \models \exists x(\forall y(y \in x \leftrightarrow f(y) = \xi)))$, entonces $X = f^{-1}[\{\xi\}] \in \mathfrak{M}$. Ya que $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) = \delta \in X$, por (3) de la Proposición 1.78, se tiene que X es estacionario. $\square$

Si comparamos esta última demostración, con su contraparte que no usa submodelos elementales, queda claro la ventaja de usar submodelos elementales.

A continuación, realizamos la demostración de una versión del Lema del Δ-sistema.

Proposición 3.6. *Sea κ un cardinal no numerable y $\mathcal{F} \subseteq [\kappa^+]^{<\omega}$ con $|\mathcal{F}| = \kappa^+$. Entonces existe $N \in [\kappa^+]^\kappa$ y un Δ-sistema $\mathcal{B}$ de cardinalidad κ^+ con raíz $R \subseteq N$.*

Demostración: Sea $\theta > \kappa$ un cardinal regular lo suficientemente grande tal que $\mathcal{F}, \kappa^+ \in H(\theta)$. Sea $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$, $\kappa + 1 \cup \{\kappa^+\} \subseteq \mathfrak{M}$ y $|\mathfrak{M}| = \kappa$. Defínase $N = \mathfrak{M} \cap \kappa^+$. Por el Lema 1.79 sea $N = \delta$, entonces $\kappa \leq \delta < \kappa^+$, así $N \in [\kappa^+]^\kappa$.

Ya que

$$|[N]^{<\omega}| = |N| = \kappa$$

y $|\mathcal{F}| = \kappa^+$, entonces existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $F_0 \not\subseteq N$. Más aún, puesto que

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq N\} \cup \{F \in \mathcal{F} : F \not\subseteq N\}$$

y $\mathcal{F}$ consta de subconjuntos finitos, entonces $\mathcal{F} \subseteq [N]^{<\omega} \cup \{F \in \mathcal{F} : F \not\subseteq N\}$, así, existen más de κ elementos en $\mathcal{F}$ que no estan contenidos en N. Y como $\mathfrak{M}$ tiene cardinalidad κ, entonces se puede escoger $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $F_0 \not\subseteq N$ y $F_0 \notin \mathfrak{M}$. Sea $R = F_0 \cap N$; ya que $R \subseteq F_0$, entonces R es un subconjunto finito de κ^+. Además, como $R \subseteq N \subseteq \mathfrak{M}$, entonces R es un subconjunto finito de $\mathfrak{M}$, luego, $R \in \mathfrak{M}$. Por otro lado, no puede ocurrir que $F_0 \subseteq R$, pues entonces $F_0 = R$, pero $R \in \mathfrak{M}$ y $F_0 \notin \mathfrak{M}$, así, $F_0 \setminus R \neq \emptyset$ (pues $R \subseteq F_0$).

Sea α un ordinal $< \kappa^+$ en $\mathfrak{M}$, entonces $\alpha \in N$, es decir, $\alpha < \delta$. Entonces $\alpha < \mathrm{mín}(F_0 \setminus R)$, pues en caso contrario, existe $d \in F_0 \setminus R$ tal que $d \leq \alpha < \delta = N$, es decir, $d \in N \cap F_0 = R$ lo cual es una contradicción. De lo anterior se tiene que

$$H(\theta) \models \exists x \in \mathcal{F}(R \subseteq x \wedge x \setminus R \neq \emptyset \wedge \mathrm{mín}(x \setminus R) > \alpha).$$

Y como $R, \alpha, \mathcal{F} \in \mathfrak{M}$, entonces

$$\mathfrak{M} \models \exists x \in \mathcal{F}(R \subseteq x \wedge x \setminus R \neq \emptyset \wedge \text{mín}(x \setminus R) > \alpha),$$

pero esto ocurre para toda $\alpha \in \mathfrak{M} \cap \kappa^+$. Luego,

$$\mathfrak{M} \models \forall \alpha \in \kappa^+(\exists x \in \mathcal{F}(R \subseteq x \wedge x \setminus R \neq \emptyset \wedge \text{mín}(x \setminus R) > \alpha)).$$

Y como $\kappa^+, \mathcal{F}, R \in \mathfrak{M}$ se concluye que

$$H(\theta) \models \forall \alpha \in \kappa^+(\exists x \in \mathcal{F}(R \subseteq x \wedge x \setminus R \neq \emptyset \wedge \text{mín}(x \setminus R) > \alpha)).$$

Se construirán dos sucesiones $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ y $(F_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ de la siguiente forma: supóngase que para cada $\xi < \eta < \kappa^+$, ya se eligierón los $\alpha_\xi > \delta$ y F_ξ de tal forma que $F_\xi \in \mathcal{F}$, $R \subseteq F_\xi$, $F_\xi \setminus R \neq \emptyset$ (es decir, $R \subsetneq F_\xi$) y $\alpha_\xi < \text{mín}(F_\xi \setminus R)$. Entonces $\alpha_\xi < \text{máx}(F_\xi) < \kappa^+$ (el máximo existe porque F_ξ es finito). Luego, $A_\eta = \{\text{máx}(F_\xi) : \xi < \eta\} \subseteq \kappa^+$ de longitud $\eta < \kappa^+$ y como κ^+ es regular, entonces existe α_η tal que $\delta < \alpha_\eta < \kappa^+$ y $\text{máx}(F_\xi) < \alpha_\eta$ para toda $\xi < \eta$. De lo anterior se tiene que para cada $\xi < \eta < \kappa^+$ $R \subsetneq F_\xi$ y

$$\delta < \alpha_\xi < \text{mín}(F_\xi \setminus R) \leq \text{máx}(F_\xi) < \alpha_\eta.$$

Ya que

$$H(\theta) \models \forall \alpha \in \kappa^+(\exists x \in \mathcal{F}(R \subseteq x \wedge x \setminus R \neq \emptyset \wedge \text{mín}(x \setminus R) > \alpha)),$$

entonces sea $F_\eta \in \mathcal{F}$ tal que $R \subseteq F_\eta$, $F_\eta \setminus R \neq \emptyset$ y $\text{mín}(F_\eta \setminus R) > \alpha_\eta$.

Sean $\xi, \eta < \kappa^+$ y $F_\xi, F_\eta \in \{F_\xi : \xi < \kappa^+\}$ y supóngase sin perdida de generalidad que $\xi < \eta$, entonces

$$\text{máx}(F_\xi) < \alpha_\eta < \text{mín}(F_\eta \setminus R).$$

Sea $y \in F_\xi \setminus R$, entonces $y \leq \text{máx}(F_\xi) < \text{mín}(F_\eta \setminus R)$, es decir, $y \notin F_\eta \setminus R$. Por otro lado, si $y \in F_\eta \setminus R$, entonces $\text{máx}(F_\xi) < \text{mín}(F_\eta \setminus R) \leq y$, es decir, $y \notin F_\xi$, en partícular, $y \notin F_\xi \setminus R$. Así, $\emptyset = F_\xi \setminus R \cap F_\eta \setminus R = (F_\xi \cap F_\eta) \setminus R$, es decir, $F_\xi \cap F_\eta \subseteq R$ y como $R \subseteq F_\xi$ para cada $\xi < \kappa^+$, se concluye que $\{F_\xi : \xi < \kappa^+\}$ es un Δ-sistema. □

Lema 3.7. *Sean (X, τ) es un espacio topológico con $\psi(X) \leq \kappa$, θ un cardinal regular suficientemente grande y $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $X, \tau \in \mathfrak{M}$, $\kappa + 1 \subseteq \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones, entonces si $z \in X \setminus \mathfrak{M}$, para cada $y \in \mathfrak{M} \cap X$ se puede seleccionar un $U_y \in \mathfrak{M} \cap \tau$ tal que $y \in U_y$ y $z \notin U_y$.*

Demostración: Sean $z \in X \setminus \mathfrak{M}$ y $y \in \mathfrak{M} \cap X$. Ya que $\psi(X) \leq \kappa$, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ y $\bigcap \mathcal{B} = \{y\}$, es decir,

$$H(\theta) \models \exists x(x \subseteq \tau \wedge |x| \leq \kappa \wedge \bigcap x = \{y\}),$$

como $\kappa, y, \tau \in \mathfrak{M}$, entonces existe $\mathcal{B}_y \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathcal{B}_y \subseteq \tau$, $\bigcap \mathcal{B}_y = \{y\}$ y $|\mathcal{B}_y| \leq \kappa$, entonces $\mathcal{B}_y \subseteq \mathfrak{M}$. Como $z \neq y$, entonces existe $U_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $z \notin U_y$. Claramente $y \in U_y$ y $U_y \in \mathfrak{M} \cap \tau$. □

Proposición 3.8. *Sea (X, τ) un espacio Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{l(X)\cdot\psi(X)\cdot t(X)}$.*

Demostración: Sea $\kappa = l(X)\cdot\psi(X)\cdot t(X)$. Sea θ un cardinal regular suficientemente grande y (por el teorema 1.73) sea $\mathfrak{M} \preceq H(\theta)$ tal que $|\mathfrak{M}| = 2^\kappa$, $\{X, \tau\} \cup \kappa + 1 \subseteq \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones. Se probará que $X \subseteq \mathfrak{M}$.

Primero demostraremos que $\mathfrak{M} \cap X$ es cerrado en X. Puesto que $\overline{X \cap \mathfrak{M}} \subseteq X$ resta ver que $\overline{X \cap \mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Supongamos que existe $z \in \overline{X \cap \mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{M}$, ya que $\psi(X) \leq \kappa$, entonces existe una familia de abiertos $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tales que $\{z\} = \bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha$. Debido a que X es Hausdorff, entonces para cada $\alpha < \kappa$ y cada $y \in X \setminus V_\alpha$ existen $U_y^\alpha, V_y^\alpha \in \tau$ tales que $y \in U_y^\alpha$, $z \in V_y^\alpha$ y $U_y^\alpha \cap V_y^\alpha = \emptyset$, de aquí que para cada $\alpha < \kappa$ y para cada $y \in X \setminus V_\alpha$, $z \notin \overline{U_y^\alpha}$.

Para cada $\alpha < \kappa$ se cumple que $X \setminus V_\alpha$ es cerrado y como $l(X) \leq \kappa$, entonces $l(X \setminus V_\alpha) \leq \kappa$, luego, como $\{U_y^\alpha : y \in X \setminus V_\alpha\}$ cubre a $X \setminus V_\alpha$, entonces existe $\{U_{y_\beta}^\alpha : \beta < \kappa\}$ subcubierta, de tamaño κ, de $\{U_y^\alpha : y \in X \setminus V_\alpha\}$.

Ya que $t(X) \leq \kappa$ y $z \in \overline{X \cap \mathfrak{M}} \subseteq X$, entonces existe $Y \subseteq X \cap \mathfrak{M}$ tal que $|Y| \leq K$ y $z \in \overline{Y}$. Como $Y \subseteq \mathfrak{M}$ de tamaño a lo más κ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ sucesiones, entonces $Y \in \mathfrak{M}$.

Para cada $\alpha, \beta < \kappa$ definamos

$$Y_\beta^\alpha := Y \cap U_{y_\beta}^\alpha.$$

Como antes, puesto que $Y_\beta^\alpha \subseteq \mathfrak{M}$ de cardinalidad a lo más κ, entonces $Y_\beta^\alpha \in \mathfrak{M}$. Dado que $Y_\beta^\alpha \subseteq U_{y_\beta}^\alpha$ y $z \notin \overline{U_{y_\beta}^\alpha}$, entonces $z \notin \overline{Y_\beta^\alpha}$ para cada $\alpha, \beta < \kappa$. Más aún, ya que $z \notin U_{y,\beta}^\alpha$, entonces $\overline{Y_\beta^\alpha} \subseteq \overline{Y} \setminus \{z\}$, es decir, $\bigcup_{\alpha,\beta<\kappa} \overline{Y_\beta^\alpha} \subseteq \overline{Y} \setminus \{z\}$. Supongamos que $x \in \overline{Y} \setminus \{z\}$, como $x \neq z$ y $\bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \{z\}$, entonces tenemos que existe $\alpha < \kappa$ tal que $x \in X \setminus V_\alpha$ y como $\{U_{y_\beta}^\alpha : \beta < \kappa\}$ cubre a $X \setminus V_\alpha$, entonces existe $\beta < \kappa$ tal que $x \in U_{y_\beta}^\alpha$. Afirmamos que $x \in \overline{Y_\beta^\alpha}$. Sea $O \in \tau$ tal que $x \in O$, entonces $O \cap U_{y_\beta}^\alpha \in \tau$ y como $x \in \overline{Y}$, entonces $(O \cap U_{y_\beta}^\alpha) \cap Y \neq \emptyset$, es decir, $O \cap Y_\beta^\alpha \neq \emptyset$, así $x \in \overline{Y_\beta^\alpha}$. Por tanto,

$$\overline{Y} \setminus \{z\} = \bigcup \{\overline{Y_\beta^\alpha} : \alpha, \beta < \kappa\}.$$

Si $z \notin \mathfrak{M}$ y para cada $\alpha, \beta < \kappa$ $Y_\beta^\alpha \in \mathfrak{M}$ y $Y \in \mathfrak{M}$, entonces

$$\mathfrak{M} \vDash \overline{Y} = \bigcup \{\overline{Y_\beta^\alpha} : \alpha, \beta < \kappa\},$$

sin embargo

$$H(\theta) \vDash z \in \overline{Y} \wedge z \notin \bigcup \{\overline{Y_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \kappa}\}.$$

Por tanto, concluimos que $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado.

Para finalizar, veamos que $X \subseteq \mathfrak{M}$. Supongamos que $x \in X \setminus \mathfrak{M}$, por el lema anterior para cada $y \in X \cap \mathfrak{M}$ existe $U_y \in \mathfrak{M} \cap \tau$ tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$, entonces $\{U_y : y \in X \cap \mathfrak{M}\}$ es una cubierta abierta de $X \cap \mathfrak{M}$ el cual es un conjunto cerrado, por tanto existe $\{U_{y_\beta} : \beta < \kappa\} \subseteq \{U_y : y \in X \cap \mathfrak{M}\}$ que cubre a $X \cap \mathfrak{M}$. Como $\{U_{y_\beta} : \beta < \kappa\} \subseteq \mathfrak{M}$ de cardinalidad a lo más κ, entonces $\mathscr{M} = \{U_{y_\beta} : \beta < \kappa\} \in \mathfrak{M}$. Luego, como $X, \tau, \mathscr{M} \in \mathfrak{M}$, entonces

$$\mathfrak{M} \vDash \mathscr{M} \text{ es cubierta de } X \cap \mathfrak{M}.$$

Pero

$$H(\theta) \vDash x \in X \wedge x \notin \bigcup \mathscr{M}.$$

$\square$

Capítulo 4

Más resultados

Después de haber demostrado y empleado la la técnica de submodelos elementales en algunos resultados clásicos, vamos a presentar algunos otros resultados que usan una nueva técnica derivada de los submodelos elementales: en lugar de trabajar con submodelos elementales fijos, se emplearán sucesiones de submodelos elementales, para ser más precisos, árboles de submodelos elementales.

La solución de muchos problemas que involucran el conocer el tamaño de un conjunto, tal es el caso de algunos problemas combinatorios, tienen el mismo acercamiento: encontrar un buen conjunto, junto con una correcta enumeración, y encontrar una función adecuada. Aunque encontrar tal función y tal conjunto varía de problema en problema, encontrar la correcta enumeración usualmente sigue las mismas ideas. Una técnica común es escribir al conjunto $\mathcal{X}$ como la unión de $\mathcal{X}_\alpha$ conjuntos más pequeños que cumplen ciertas propiedades similares al conjunto original. Esto usualmente se conoce como una *filtración*. Para conseguir una filtración se puede, por ejemplo, intersectar al conjunto $\mathcal{X}$ con una cadena elemental de submolelos y así, con la elementalidad, se tiene que cada una de esas intersecciones reflejan las propiedades de $\mathcal{X}$.

La técnica de usar árboles de submodelos elementales se le atribuye a R. O. Davies y se cree que originalmente apareció en [2] en 1960. A continuación, presentaremos la noción principal que será empleada en lo que resta de la tesis: los **árboles de Davies**.

La siguiente demostración, al igual que la mayoria de las demostraciones siguientes, se encuentran en [22]. Además de que el resultado siguiente fue originalmente escrito en [22] como una versión más simple del Lema 3.17 de [19].

Teorema 4.1. *Sean κ un cardinal y x un conjunto. Entonces existen un cardinal regular θ suficientemente grande y una sucesión $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de submodelos elementales de $H(\theta)$, tales que:*

(a) Para cada $\alpha < \kappa$, $|\mathfrak{M}_\alpha| = \omega$ y $x \in \mathfrak{M}_\alpha$.

(b) $\kappa \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{M}_\alpha$

(c) Para cada $\beta < \kappa$ existe $m_\beta \in \omega$ y una colección $\mathfrak{N}_{\beta,j} \preceq H(\theta)$, con $j < m_\beta$, tal que

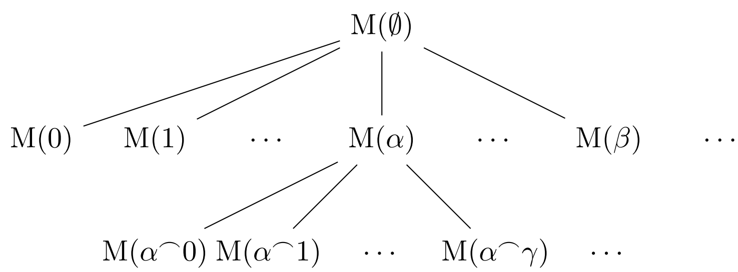
$$\bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha = \bigcup_{j<m_\beta} \mathfrak{N}_{\beta,j}.$$

Demostración: Sea θ un cardinal regular suficientemente grande tal que $\kappa, x \in H(\theta)$. Construiremos, recursivamente un árbol T, el cual es un subárbol[1] de $\mathbf{Ord}^{<\omega}$. Consideremos la sucesión $\emptyset$ y sea $\mathfrak{M}(\emptyset) \preceq H(\theta)$ tal que $\kappa \cup \{x\} \subseteq \mathfrak{M}(\emptyset)$ y $|\mathfrak{M}(\emptyset)| = \kappa$.

Supongamos que ya tenemos el árbol T' y los submodelos elementales $\mathfrak{M}(a)$. Si $a \in T'$ es tal que $\mathfrak{M}(a)$ tiene cardinalidad no numerable, entonces por el Lema 1.82, existe $(\mathfrak{M}(a^\frown\alpha) : \alpha < \kappa_a)$ ($\kappa_a = |\mathfrak{M}(a)|$) una cadena creciente y continua tal que

1. Para cada $\xi < \kappa_a$, $x \in \mathfrak{M}(a^\frown\xi)$ y $|\mathfrak{M}(a^\frown\xi)| \leq |\xi^*| < \kappa_a$.
2. $\mathfrak{M}(a) = \bigcup_{\xi<\kappa_a} \mathfrak{M}(a^\frown\xi)$.

Extendamos T' con los nuevos nodos $\{a^\frown\xi : \xi < \kappa_a\}$ de forma usual para seguir teniendo un buen orden e iteremos el proceso para obtener T. Observemos que si $a \in T$, entonces a es terminal si y sólo si $\mathfrak{M}(a)$ es numerable.



Veamos que
$$\mathfrak{M}(\emptyset) = \bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}.$$

Sea $z \in \mathfrak{M}(\emptyset)$. Afirmamos que existe un $n \in \omega$ tal que $z \in \mathfrak{M}(<\alpha_0, \ldots, \alpha_n>)$. Supongamos, por contradicción, que no podemos encontrar dicho $n \in \omega$, entonces por la construcción de los árboles, a cada $n \in \omega$ le asignamos el ordinal $|\mathfrak{M}(a_n)|$, donde $z \in \mathfrak{M}(a_n)$ y $|\mathfrak{M}(a_n)| > |\mathfrak{M}(a_{n+1})|$ para toda n. Así, existe una sucesión decreciente infinita en κ, lo cual contradice que κ sea bien ordenado (pues, todo subconjunto no vacío de κ tiene elemento mínimo). Notemos que por lo anterior T no puede tener una rama infinita. La otra contensión se cumple por un proceso simple de inducción sobre la longitud de a.

Ordenemos $\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}$ con el orden lexicográfico, es decir, $\mathfrak{M}(a) <_{\text{lex}} \mathfrak{M}(b)$ si y sólo si $k = \text{mín}\{n \in dom(a) \cap dom(b) : a(n) \neq b(n)\}$ y $a(k) < b(k)$. Veamos ahora que $|\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}| = \kappa$. Para esto último, verifiquemos lo siguiente:

1. $|\{a \in T : a \text{ es terminal}\}| \geq \kappa$.
2. Para cada $a \in T$, $\mathfrak{M}(a)$ tiene menos de κ $<_{\text{lex}}$-predecesores.

Lo primero se sigue del hecho de que $\mathfrak{M}(\emptyset) = \bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}$ y que cada $\mathfrak{M}(a)$ es numerable.

Veamos ahora que cada $a \in T$, $\mathfrak{M}(a)$ tiene $< \kappa$ $<_{\text{lex}}$-predecesores. Procedamos por inducción sobre la longitud de a. Supongamos que $\text{long}(a) = 0$, es decir, $a \in \text{Lev}(1, T)$.

[1] Aunque técnicamente no existe un orden en $\mathbf{ORD}^{<\omega}$, nos estamos refiriendo de la clase-orden lexicográfica.

Sea $b \in T$ tal que $b <_{\text{lex}} a$, entonces $b(0) < a(0)$, luego por el Lema 1.82 tenemos que $|\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})| \leq |\mathfrak{M}(a)|$. Ahora, si $|\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})| > \omega$, entonces por el mismo lema existen $|\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})|$ particiones de $\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})$ en submodelos de tamaño $< |\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})|$ y así sucesivamente. Por tanto, si $c \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$ que extiende a $b_{\restriction 0}$, entonces c es una de las posibles $|\mathfrak{M}(b_{\restriction 0})|$ extensiones de $b_{\restriction 0}$. Ya que hay a lo más $|\mathfrak{M}(a)|$ sucesiones de longitud 0 $<_{\text{lex}}$-menores que a, entonces a tiene a lo más $|\mathfrak{M}(a)| < \kappa$ $<_{\text{lex}}$-predecesores. Ahora, supongamos que se cumple para $b \in T$ tales que $\text{long}(b) = n$ y sea $a \in T$ tal que $\text{long}(a) = n + 1$. Si $b \in T$ tal que $b <_{\text{lex}} a$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $b(k) < a(k)$. Si $k \leq n$, entonces $b <_{\text{lex}} a_{\restriction n}$, así por hipótesis inductiva, existe $< \kappa$ $<_{\text{lex}}$-predecesores de a que difieren de a antes del natural $n+1$. Por otro lado, al igual que en el caso base hay a lo más $|\mathfrak{M}(a)| < \kappa$ $<_{\text{lex}}$-predecesores de a. Por tanto, a tiene $< \kappa$ $<_{\text{lex}}$ predecesores.

De 1 y 2 tenemos que $|\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}| = \kappa$.

Para finalizar, mostremos que si $b \in T$ es terminal, entonces $\bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a <_{\text{lex}} b \text{ y } a \text{ es terminal}\}$ se puede escribir como la unión de una cantidad finita de submodelos elementales que tienen a x. Sea $b \in T$ terminal y supongamos que $|b| = m$. Para $j \in \{1, \ldots, m\}$, por el Lema 1.82, sabemos que $(\mathfrak{M}((b_{\restriction j-1})^\frown \xi) : \xi < b(j-1))$ es una cadena de submodelos elementales y por tanto $\bigcup\{\mathfrak{M}((b_{\restriction j-1})^\frown \xi) : \xi < b(j-1)\}$ es un submodelo elemental, así para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ definamos

$$N_{b,j} = \bigcup\{\mathfrak{M}((b_{\restriction j-1})^\frown \xi) : \xi < b(j-1)\}.$$

Afirmamos que

$$\bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a <_{\text{lex}} b \text{ y } a \text{ es terminal}\} = \bigcup\{N_{b.j} : j \leq m\}.$$

Para demostrar esta igualdad, sea $y \in N_{b,j}$, con $j \leq m$, entonces existe $\xi < b(j-1)$ tal que si $a := (b_{\restriction j-1})^\frown \xi$, entonces $a <_{\text{lex}} b$ y $y \in \mathfrak{M}(a)$. Por el Lema 1.82 y por lo que vimos cuando demostramos que $\mathfrak{M}(\emptyset) = \bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}$, sabemos que existe $c \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$ terminal en T que extiende a a y $y \in \mathfrak{M}(c)$. Evidentemente tal $c <_{\text{lex}} b$, por tanto

$$\bigcup\{N_{b.j} : j \leq m\} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{M}(a) : a <_{\text{lex}} b \text{ y } a \text{ es terminal}\}.$$

Por otro lado, supongamos que para algún $a <_{\text{lex}} b$, terminal, $y \in \mathfrak{M}(a)$. Sea $m - 1 \geq k = \text{mín}\{n : a(n) \neq b(n)\}$, entonces $a(k) < b(k)$. Si definimos $l = k + 1$ y $\xi = a(k)$, entonces $1 \leq l \leq m$, $\mathfrak{M}(a) \subseteq \mathfrak{M}(a_{\restriction l})$, $a_{\restriction l} = (b_{\restriction k})^\frown \xi$ y $\mathfrak{M}(a_{\restriction l}) \in \{\mathfrak{M}((b_{\restriction l-1})^\frown \xi) : \xi < b(l-1)\}$, por tanto, $y \in \mathfrak{M}(a_{\restriction l}) \subseteq N_{b,l}$.

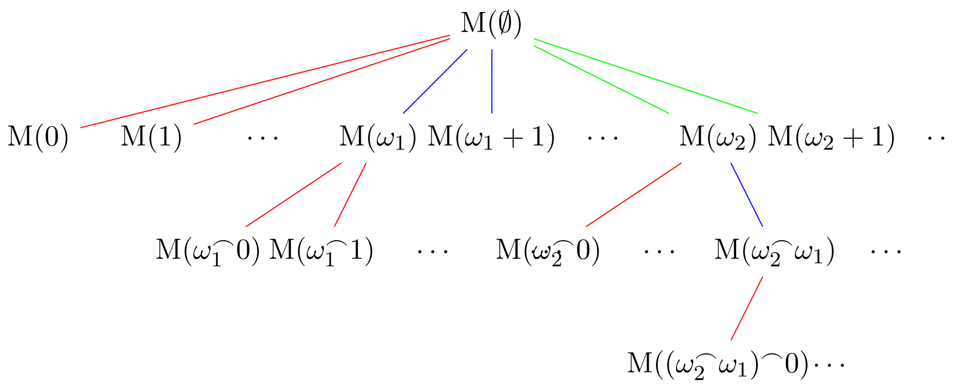
Ya que $|\{\mathfrak{M}(a) : a \in T \text{ y } a \text{ es terminal}\}| = \kappa$, entonces podemos cambiar los $\mathfrak{M}(a)$ por $\mathfrak{M}_\alpha$. □

A partir de ahora, nos referiremos a la sucesión del teorema anterior como un **árbol de Davies** para κ sobre x. El cardinal κ usualmente denotará el tamaño de la estructura con la que estemos trabajando y, como es usual, x representará el conjunto de todos los objetos de interés.

Si $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ es una sucesión de modelos, entonces usaremos la siguiente notación:

$$\mathfrak{M}_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{M}_\beta.$$

Notemos que si nuestro modelo original tiene tamaño $\aleph_n$, entonces el árbol tiene altura n. De aquí que en el Teorema 4.1, los m_β son números entre 1 y n. Por tanto, podemos reemplazar los m_β por n. La siguiente figura ilustra el caso en que $\kappa = \aleph_3$, como se observa segun la construcción de los árboles de Davies, primero se "divide" al modelo en $\aleph_1$ modelos de tamaño $\aleph_0$, luego se divide en $\aleph_2$ modelos de tamaño $\aleph_1$ y finalmente en $\aleph_3$ modelos de tamaño $\aleph_2$. Cada modelo de tamaño $\aleph_1$ se divide en modelos de tamaño $\aleph_0$ y cada modelo de tamaño $\aleph_2$ se divide en modelos de tamaño $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Finalmente, estos últimos se dividen en modelos de tamaño $\aleph_0$.



A continuación, presentaremos el primer resultado que usó la técnica de los árboles de Davies. W. Sierpinski demostró que **CH** implica que $\mathbb{R}^2$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de gráficas de funciones rotadas. Además, Sierpinski preguntó si en el resultado anterior es necesario **CH**. En 1963, R. O. Davies dio una respuesta negativa a esta pregunta mostrando que el resultado anterior seguía siendo válido en **ZFC**.

Teorema 4.2. $\mathbb{R}^2$ *puede ser cubierto por una cantidad numerable de gráficas de funciones rotadas.*

Demostración: Escojamos ℓ_i, $i < \omega$, líneas distintas que pasan por el origen. Nuestro objetivo es encontrar conjuntos A_i tales que $\mathbb{R}^2 = \bigcup\{A_i : i < \omega\}$ y si $\ell \perp \ell_i$, entonces $|\ell \cap A_i| \leq 1$.

Sean $\kappa = \mathfrak{c}$, $r : \kappa \to \mathbb{R}^2$ sobreyectiva, $x = \{\kappa, \mathbb{R}^2, r\} \cup \{\ell_i : i < \omega\}$ y sea $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ un árbol de Davies para κ sobre x. Notemos que si $\xi \in \kappa \cap \mathfrak{M}_\alpha$, entonces por elementalidad

$$\mathfrak{M}_\alpha \models (\exists y)((\xi, y) \in r).$$

Por tanto, $r(\xi) \in \mathfrak{M}_\alpha$. Puesto que $\kappa \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{M}_\alpha$ y r es sobreyectiva, entonces se concluye que $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{M}_\alpha$.

La forma de construir los A_i es por inducción sobre $\beta < \kappa$. El objetivo será distribuir los puntos de $\mathbb{R}^2 \cap \mathfrak{M}_{<\beta}$ en los conjutos A_i asegurandonos que si $\ell \perp \ell_i$, entonces $|\ell \cap A_i| \leq 1$. Para 0 es fácil. Ya que $\mathfrak{M}_0$ es numerable, entonces simplemente colocamos cada punto de $\mathbb{R}^2 \cap \mathfrak{M}_0$ en un A_i distinto. Supongamos que para $\beta < \kappa$ ya hemos listado los puntos de $\mathbb{R}^2 \cap \mathfrak{M}_{<\beta}$. De nuevo, como $\mathfrak{M}_\beta$ es numerable, entonces enumeremos $\mathbb{R}^2 \cap \mathfrak{M}_\beta \setminus \mathfrak{M}_{<\beta}$ como $\{t_n : n < \omega\}$.

Por inducción sobre n, colocaremos cada t_n en un adecuado A_{i_n}. Supongamos que para $k < n$, ya hemos colocado a t_k en un A_{i_k}. Recordemos que $\mathfrak{M}_{<\beta}$ se puede escribir como

$\bigcup\{N_{\beta,j} : j < m_\beta\}$, donde cada $N_{\beta,j}$ es un submodelo elemental que tiene a x. Afirmamos que existen a lo más m_β naturales i, en $\omega\setminus\{i_k : k < n\}$ para los cuales la línea perpendicular a ℓ_i que pasa por t_n, la cual denotaremos por $\ell(t_n, i)$, ya tenía un punto de A_i. Supongamos que existen más de m_β naturales i. Denotemos por x_i al punto que está en $A_i \cap \ell(t_n, i)$, por la contrucción de los conjuntos A_i tenemos que tales x_i estan en $\mathbb{R}^2 \cap \mathfrak{M}_{<\beta}$ y por tanto, existen $i, i' \in \omega \setminus \{i_k : k < n\}$ y $j < m_\beta$ tales que $x_i, x_{i'} \in N_{\beta,j}$. Como además, $x \in N_{\beta,j}$, entonces $\ell(x_i, i), \ell(x_{i'}, i') \in N_{\beta,j}$. Por tanto, $t_n = \ell(x_i, i) \cap \ell(x_{i'}, i') \in N_{\beta,j}$, es decir, $t_n \in \mathfrak{M}_{<\beta}$ lo cual es una contradicción. Por tanto, es posible poner a t_n en un A_i de tal forma que se siga cumpliendo lo requerido. $\square$

Teorema 4.3. *Para cada $d \in \mathbb{N}$, toda familia d-casi ajena $\mathcal{A}$ de conjuntos numerables es esencialmente ajena.*

Demostración: Sean $\kappa = |\mathcal{A}|$, $f : \kappa \to \mathcal{A}$ una función sobreyectiva, $x = \{\kappa, \mathcal{A}, f\}$ y $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ un árbol de Davies para κ sobre x. Al igual que antes, $\mathcal{A} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y para cada $\beta < \alpha$, existe $m_\beta \in \omega$ tal que $\mathfrak{M}_{<\beta} = \bigcup\{N_{\beta,j} : j < m_\beta\}$.

Nuestro objetivo es definir una función F en $\mathcal{A}$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$, $F(A) \in [A]^{<\omega}$ y además $\{A \setminus F(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es ajena por pares.

Definamos $\mathcal{A}_\beta = (\mathcal{A}\cap\mathfrak{M}_\beta)\setminus\mathfrak{M}_{<\beta}$ y $\mathcal{A}_{<\beta} = \mathcal{A}\cap\mathfrak{M}_{<\beta}$. Para cada $\alpha < \kappa$ definiremos F en A_α de forma independiente. Sea $\beta < \kappa$, afirmamos que para cada $A \in \mathcal{A}_\beta$, $|A\cap(\bigcup \mathcal{A}_{<\beta})| < \omega$. Supongamos que $A \cap (\bigcup \mathcal{A}_{<\beta})$ es infinito. Ya que

$$\begin{aligned}
A \cap (\bigcup \mathcal{A}_{<\beta}) &= A \cap (\bigcup \mathcal{A} \cap \mathfrak{M}_{<\beta}) \\
&= A \cap (\bigcup (\mathcal{A} \cap \bigcup\{N_{\beta,j} : j < m_\beta\})) \\
&= A \cap (\bigcup (\bigcup\{\mathcal{A} \cap N_{\beta,j} : j < m_\beta\})) \\
&= A \cap \bigcup\{\bigcup \mathcal{A} \cap N_{\beta,j} : j < m_\beta\} \\
&= \bigcup\{A \cap \bigcup(\mathcal{A} \cap N_{\beta,j}) : j < m_\beta\}.
\end{aligned}$$

Entonces, existe un $j < m_\beta$ tal que $A \cap \bigcup(\mathcal{A} \cap N_{\beta,j})$ es infinito. Luego, sea $a \in [A \cap \bigcup(\mathcal{A} \cap N_{\beta,j})]^d$. Aunque no se estableció explícitamente, se pueden elegir los modelos $N_{\beta,j}$, en el Teorema 4.1, de tal forma que cumplan que $\omega + 1 \subseteq N_{\beta,j}$. Lo anterior implica que $\bigcup(\mathcal{A} \cap N_{\beta,j}) \subseteq N_{\beta,j}$, pues si $x \in \bigcup(\mathcal{A} \cap N_{\beta,j})$, entonces existe $y \in \mathcal{A} \cap N_{\beta,j}$ tal que $x \in y$. Como $y \in \mathcal{A}$, entonces y es numerable y como $y \in N_{\beta,j}$, entonces $y \subseteq N_{\beta,j}$, así $x \in N_{\beta,j}$. Luego, $a \subseteq N_{\beta,j}$ y como a es finito, entonces $a \in N_{\beta,j}$. Debido a que $a \subseteq A$, $A \in \mathcal{A}$, $|a| = d$ y $\mathcal{A}$ es d-casi ajena, entonces existe un único elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a a, luego, por elementalidad

$$N_{\beta,j} \models \text{“existe un único elemento de } \mathcal{A} \text{ que contiene a } a\text{”}.$$

Por tanto, $A \in N_{\beta,j}$, pero $N_{\beta,j} \subseteq \mathfrak{M}_{<\beta}$, lo cual contradice la elección de A. Consecuentemente, $A \cap \bigcup \mathcal{A}_{<\beta}$ es finito.

Ya que cada $\mathfrak{M}_\alpha$ es numerable, entonces enumeremos $\mathcal{A}_\beta = \{A_{\beta,l} : l \in \omega\}$. Definamos

$$F(A_{\beta,l}) = A_{\beta,l} \cap (\bigcup \mathcal{A}_{<\beta} \cup \bigcup\{A_{\beta,k} : k < l\}).$$

Evidentemente se cumple que F está bien definida y $F(A) \in [A]^{<\omega}$. Veamos ahora que $\{A \setminus F(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es ajeno por pares. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $A \neq B$. Ya que $\mathcal{A} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces existe $\alpha, \beta < \kappa$ tales que $A \in \mathfrak{M}_\alpha$ y $B \in \mathfrak{M}_\beta$, supongamos, sin perdida de generalidad, que $A \in \mathcal{A}_\alpha$ y $B \in \mathcal{A}_\beta$. Supongamos que $\alpha < \beta$, $A = A_{\alpha,r}$, $B = A_{\beta,s}$ y $x \in A_{\alpha,r} \setminus F(A_{\alpha,r}) \cap A_{\beta,s} \setminus F(A_{\beta,s})$. Ya que $x \in A_{\beta,s} \setminus F(A_{\beta,s})$, entonces $x \notin \bigcup \mathcal{A}_{<\beta}$. Por otro lado, ya que $x \in A_{\alpha,r} \setminus F(A_{\alpha,r})$ y $A_{\alpha,r} \in \mathcal{A}_{<\beta}$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{A}_{<\beta}$, lo cual es una contradicción. Supongamos que $\alpha = \beta$, $A = A_{\alpha,r}$, $B = A_{\alpha,s}$, $r < s$ y $x \in A_{\alpha,r} \setminus F(A_{\alpha,r}) \cap A_{\alpha,s} \setminus F(A_{\alpha,s})$. Ya que $x \in A_{\alpha,s} \setminus F(A_{\alpha,s})$, entonces $x \notin \bigcup\{A_{\alpha,l} : l < s\}$, pero $x \in A_{\alpha,r} \setminus F(A_{\alpha,r})$ y $r < s$, lo cual es una contradicción, así que $\{A \setminus F(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es ajeno a pares. $\square$

El último resultado que vamos a presentar es muy interesante, dado que muestra cómo podemos cubrir al plano con un tipo especial de conjuntos, las **nubes**. La demostración del siguiente resultado hace un fuerte uso del hecho de que un conjunto de tamaño $\aleph_n$ ($n \in \mathbb{N}$) puede ser cubierto por un árbol de Davies, tal que los segmentos iniciales pueden ser expresados como la unión de m submodelos elementales.

Definición. *Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es una **nube** alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}^2$ si cada línea que pasa por a intersecta a A en un conjunto finito.*

Una o dos nubes no puden cubrir el plano; supongamos que A_1 y A_2 son nubes alrededor de a_1 y a_2, respectivamente. Entonces la línea que pasa por a_1 y a_2 tiene que intersectar a A_1 y A_2 es una cantidad finita de puntos, por tanto, existe una cantidad infinita de puntos, por ejemplo puntos de la línea, que no estan en ningún A_i.

A pesar de que dos nubes no pueden cubrir el plano, resulta que el plano puede ser cubierto por una cantidad numerable de nubes. Aunque este hecho por sí sólo resulta muy impresionante, el resultado probado por P. Komjáth y J. H. Schmerl es aún más sorprendente, logrando mostrar que el número de nubes que son necesarias para cubrir el plano está relacionado con el tamaño del continuo.

J. H. Schmerl demostró en [20] que si $\mathbb{R}^2$ puede ser cubierto por n+2 nubes, entonces el continuo tiene tamaño a lo más $\aleph_n$. La demostración de este hecho se escapa del alcance de la tesis. Sin embargo la idea es la siguiente: Primero que nada vamos a dar dos definiciones.

Definición 4.4. *Definimos el n-**espacio proyectivo** de $\mathbb{R}^{n+1}$, denotado por $P(\mathbb{R}^{n+1})$, $P^n(\mathbb{R})$ o $P_n(\mathbb{R})$, como el espacio cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con la relación de equivalencia $\sim$, dada por $x \sim y$ si y sólo si $y = \lambda x$, con $\lambda \neq 0$.*

De la definición anterior, el espacio proyectivo de $\mathbb{R}^{n+1}$ se puede pensar como el conjunto de líneas en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen. Ya que cada línea intersecta a la n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i \leq n} x_i = 1\}$, en dos puntos $\pm u$, entonces $P_n(\mathbb{R})$ es S^n con puntos antipodales identificados.

Ya que cada vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ se puede escribir como

$$v = \sum_{i<n+1} x_i e_i,$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces si $v \neq 0$, escribimos a $[v]$ como $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ y a esta representación se le llamará las **coordenadas homogéneas** del vector v.

Podemos encajar a $\mathbb{R}^n$ en $P_n(\mathbb{R})$ identificando a $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ con el punto en el n-espacio proyectivo con coordenadas homogéneas $[x_0, \ldots, x_{n-1}, 1]$.

Definición 4.5. *Una colineación es una biyección entre dos espacios proyectivos tal que la imagen de puntos colineales son colineales.*

Supongamos que cada C_i es una nube alrededor de a_i, con $i < n+2$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ningún a_i es el 0.

Sean e_i, $i < n+2$, es el i-ésimo vector perteneciente a la base estándar de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\infty_i \in P_{n+2}(\mathbb{R})$ el punto en el infinito del i-ésimo eje coordenado de $\mathbb{R}^{n+2}$. Sean $S : P_{n+2}(\mathbb{R}) \to P_{n+2}(\mathbb{R})$ una colineación tal que $S(\infty_i) = e_i$ y $S(0) = 0$ y $T : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2$ la única transformación lineal tal que $T(e_i) = a_i$. Si $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, entonces $TS(x)$ está definido siempre que $x \notin H = P_{n+2}(\mathbb{R}) \setminus S(P_{n+2}(\mathbb{R}))$. Ya que $0 \notin H$, entonces podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que si $I = (-\epsilon, \epsilon)$, entonces $I^{n+2} \cap H = \emptyset$. Debido a que los C_i cubren el plano, entonces los conjuntos $D_i = (TS)^{-1}[C_i] \cap I^{n+2}$ cubren al conjuntos I^{n+2}.

Si ℓ es la línea en $P_{n+2}(\mathbb{R})$ que une a ∞_i y 0, por la linealidad de T y como $T(e_i) \neq 0$, entonces se obtiene que TS es inyectiva en $\ell \cap I^{n+2}$; además, TS preserva colinealidad, así que existe una única línea ℓ' de $\mathbb{R}^2$ tal que TS mapea ℓ en ℓ'. Luego, cada $a_i = TS(\infty_i) \in \ell'$, consecuentemente, $D_i \cap \ell$ es finito, pues cada punto de $D_i \cap \ell$ está en $C_i \cap \ell'$ bajo TS y como además, estos puntos estaban en I^{n+2}, por definición de D_i, y ahí TS es inyectiva, entonces por cada punto de $D_i \cap \ell$, existe un punto en $C_i \cap \ell'$, pero ℓ' al ser una línea que pasa por a_i y al ser C_i nube al rededor de a_i, entonces $C_i \cap \ell'$ es finito; por tanto $D_i \cap \ell$ es finito.

Para concluir con la prueba se usa el resultado de Kuratowski que dice: Si $n < \omega$ y X es un conjunto, entonces $|X| \leq \aleph_n$ si y sólo si existen $D_0, \ldots, D_{n+1} \subseteq X^{n+2}$ tales que los D_i cubren al conjunto X^{n+2} y para cada $i < n+2$ y cada $\ell \subseteq X^{n+2}$ línea paralela al i-ésimo eje coordenado el conjunto $D_i \cap \ell$ es finito.

Teorema 4.6. *Sea $m \in \mathbb{N}$, si $2^\omega \leq \aleph_m$, entonces $\mathbb{R}^2$ es cubierto por, a lo más, $m+2$ nubes.*

Demostración: Supongamos que el continuo es a lo más $\aleph_m$. Escojamos $m+2$ puntos en $\mathbb{R}^2$, digamos $\{a_k : k < m+2\}$, en posición general (es decir, no hay tres puntos colineales). Sea $\mathcal{L}^k$ el conjunto de líneas que pasan por a_k y sea $\mathcal{L} = \bigcup\{\mathcal{L}^k : k < m+2\}$. Sean $f : \mathfrak{c} \to \mathbb{R}^2$ y $f_k : \mathfrak{c} \to \mathcal{L}^k$ funciones sobreyectivas, con $k < m+2$, y $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \aleph_m)$ un árbol de Davies para $\mathfrak{c}$ sobre $\{\mathfrak{c}, f, \mathbb{R}^2\} \cup \{f_k, a_k : k < m+2\}$ tal que para cada $\alpha < \aleph_m$ se cumpla que $\mathfrak{M}_{<\alpha} = \bigcup\{N_{\alpha,j} : j \leq m\}$. Como antes, $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \aleph_m\}$ y $\mathcal{L} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \aleph_m\}$.

Definiremos las nubes A_k alrededor de a_k usando una función $F : \mathcal{L} \to [\mathbb{R}^2]^{<\omega}$ de tal forma que para cada $\ell \in \mathcal{L}$, $F(\ell) \in [\ell]^{<\omega}$.

Para cada $\alpha < \aleph_m$, definamos $\mathcal{L}_\alpha = (\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}_\alpha) \setminus \mathfrak{M}_{<\alpha}$. Definiremos la función F de forma independiente en cada $\mathcal{L}_\alpha$. Denotemos por $\mathcal{L}'$ el conjunto de las $\binom{m+2}{2}$ líneas determinadas por $\{a_k : k < m+2\}$ y sea $\alpha < \aleph_m$, ya que $\mathfrak{M}_\alpha$ es numerable, entonces $\mathcal{L}_\alpha$ es numerable. Luego, $\mathcal{L}_\alpha \setminus \mathcal{L}' = \{\ell_{\alpha,n} : n \in \omega\}$. Sea $n < \omega$, definamos

$$F(\ell_{\alpha,n}) = \bigcup\{\ell \cap \ell_{\alpha,n} : \ell \in \mathcal{L}' \cup \{\ell_{\alpha,i} : i < n\}\}.$$

En caso de que $\ell \in \mathcal{L}'$, entonces definamos $F(\ell)$ como el conjunto que tiene a los dos a_k que se encuentran en ℓ. Ya que $\mathcal{L}' \cup \{\ell_{\alpha,i} : i < n\}$ es finito, entonces efectivamente

$F(\ell_{\alpha,n}) \in [\ell_{\alpha,n}]^{<\omega}$. Notemos además que debido a que hay $m+2$ puntos, entonces para cada $\ell \in \mathcal{L}^k$, $a_k \in F(\ell)$. Así, si $\ell, \ell' \in \mathcal{L}^k$, entonces $\ell \cap F(\ell') = \{a_k\}$ o $\ell = \ell'$, es decir, $\ell \cap F(\ell') = \ell \cap F(\ell) = F(\ell)$.

Para cada $k < m+2$ definamos

$$A_k = \{a_k\} \cup \bigcup \{F(\ell) : \ell \in \mathcal{L}^k\}.$$

Los conjuntos así definidos son efectivamente nubes, pues si $\ell \in \mathcal{L}^k$, entonces $\ell \cap A_k = \{a_k\} \cup F(\ell) = F(\ell)$, el cual es finito.

Mostremos ahora que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un $\ell \in \mathcal{L}$ tal que $x \in F(\ell)$. Sean $x \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha < \aleph_m$ el único ordinal tal que $x \in \mathfrak{M}_\alpha \setminus \mathfrak{M}_{<\alpha}$. Supongamos que $x \in \bigcup \mathcal{L}'$, entonces existe una línea ℓ tal que $x \in \ell$ y existen $r, s < m+2$, distintos, tales que $a_r, a_s \in \ell$. Escojamos un $t < m+2$ tal que $a_t \neq a_r$, $a_t \neq a_s$ y sea ℓ' la línea que pasa por x y por a_t, entonces $x = \ell \cap \ell'$. Si $x = a_r$ o $x = a_s$, es evidente que $x \in F(\ell)$. Supongamos que x no es ni a_r ni a_s, entonces si $\alpha < \aleph_m$ es tal que $\ell' \in \mathcal{L}_\alpha$ y $\ell' = \ell_{\alpha,n}$, entonces $x \in F(\ell_{\alpha,n})$.

Sea $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \mathcal{L}'$. Denotemos por ℓ_k la línea que pasa por x y a_k para $k < m+2$. Afirmamos que $|\mathfrak{M}_{<\alpha} \cap \{\ell_k : k < m+2\}| \leq m$. Supongamos que $|\mathfrak{M}_{<\alpha} \cap \{\ell_k : k < m+2\}| > m$, entonces $|\bigcup_{j \leq m} (N_{\alpha,j} \cap \{\ell_k : k < m+2\})| > m$. Así, por el principio del palomar, existe $j \leq m$ tal que $|(N_{\alpha,j} \cap \{\ell_k : k < m+2\})| \geq 2$. Supongamos que $\ell_r, \ell_s \in N_{\alpha,j}$, entonces $\{x\} = \ell_r \cap \ell_s \in N_{\alpha,j} \subseteq \mathfrak{M}_{<\alpha}$, es decir, $x \in \mathfrak{M}_{<\alpha}$. Pero esto contradice la elección de α.

Ya que $x, a_k \in \mathfrak{M}_\alpha$, con $k \in \{0, \ldots, m+1\}$, entonces $\ell_k \in \mathfrak{M}_\alpha$. Por lo anterior, tenemos que

$$|\{\ell_k : k < m+2\} \cap \mathcal{L}_\alpha \setminus \mathcal{L}'| \geq 2.$$

Por tanto, existen $r, s < m+2$ y $p, q < \omega$ tales que $\ell_r = \ell_{\alpha,p}$, $\ell_s = \ell_{\alpha,q}$ y si $k = \text{máx}\{p, q\}$, entonces $x \in F(\ell_{\alpha,k})$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

Como se pudo apreciar, el método de los submodelos elementales nos ayudó, en muchos casos, a evitar tener que construir conjuntos que cumplan ciertas propiedades útiles en las demostraciones, como en los ejemplos del Capítulo 3. La otra gran utilidad que empleamos de los submodelos elementales es la de sucesiones de modelos que tiene un comportamiento similar al de un cierto conjunto de interés.

Dos comentarios finales. Recientemente, en 2019, S. Desrochers demostró en [3] el siguiente resultado más general que el Teorema 4.6.

Teorema 5.1. *Sea $n \geq 1$ y $N \geq 2$. Son equivalentes:*

1. $2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$
2. *$n+2$ nubes cubren el plano*
3. *Para cualesquiera $n+2$ puntos, distintos, no colineales de $\mathbb{R}^2$ hay nubes centradas en esos puntos que cubren el plano*
4. *$n+2$ nubes cubren $\mathbb{R}^N$*
5. *Para cualesquiera $n+2$ puntos, distintos, no colineales de $\mathbb{R}^N$ hay nubes centradas en esos puntos que cubren a $\mathbb{R}^N$*

Regresando al tema de los árboles de Davies, en el artículo [22] se presentan los árboles **altos** de Davies, o bien, los árboles de Davies altos. Los árboles altos de Davies surgieron debido a que es usual trabajar con submodelos elementales numerablemente cerrados, es decir, submodelos tales que $[\mathfrak{M}]^\omega \subseteq \mathfrak{M}$; y aunque sean muy similares a los árboles de Davies, estos nuevos árboles requieren de algo más que **ZFC**. Primero que nada se necesita que de un buen orden $\lhd$ en $H(\theta)$.

Un árbol alto de Davies para κ sobre x es una sucesión $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de submodelos elementales de $(H(\theta), \in, \lhd)$, para un cardinal regular suficientemente grande θ, tal que

(I) $[\mathfrak{M}_\alpha]^\omega \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$, $|\mathfrak{M}_\alpha| = \mathfrak{c}$ y $x \in \mathfrak{M}_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$,

(II) $[\kappa]^\omega \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{M}_\alpha$, y

(III) para cada $\beta < \kappa$, existen $N_{\beta,j} \preceq H(\theta)$, con $[N_{\beta,j}]^\omega \subseteq N_{\beta,j}$ y $x \in N_{\beta,j}$, para cada $j < \omega$, tales que

$$\bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha = \bigcup \{N_{\beta,j} : j < \omega\}.$$

Aunque es posible, usando argumentos similares a los del Teorema 4.1, demostrar que los árboles altos de Davies existen para sucesores finitos de $\mathfrak{c}$, es decir, $\kappa < \mathfrak{c}^{+\omega}$. En [22] se demostró un resultado para cardinales más grandes que $\mathfrak{c}^{+\omega}$, aunque para poder realizar esto es necesario asumir ciertas hipótesis adicionales. Una de estas hipótesis adicionales el *Principio del Cuadrado de Jensen*, el cual dice que $\square_\mu$ se cumple para un singular μ si y sólo si existe una sucesión $(C_\alpha : \alpha < \mu^+)$ tal que para cada $\alpha < \mu^+$, C_α es un club en α de tamaño $< \mu$ y si α es punto de acumulación de C_β, entonces $C_\alpha = \alpha \cap C_\beta$. Además, diremos que un cardinal μ es ω-inaccesible si para cada $\upsilon < \mu$ se cumple que $\upsilon^\omega < \mu$.

El teorema queda establecido como sigue:

Si se cumple que

1. $\kappa = \kappa^\omega$, y
2. μ es ω-inaccesible, $\mu^\omega = \mu^+$ y $\square_\mu$ se cumple para cada $\mathfrak{c} < \mu < \kappa$, con $cf(\mu) = \omega$.

Entonces existe un árbol alto de Davies $(\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ para κ sobre x. Más aún, el árbol alto de Davies se puede construir de tal forma que cumple

(a) $(\mathfrak{M}_\beta : \beta < \alpha) \in \mathfrak{M}_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, y

(b) $\bigcup \{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un submodelo elemental numerablemente cerrado de $H(\theta)$.

Apéndice A

Resultados sin el uso del método de submodelos elementales

En esta sección se van a demostrar algunos resultados, sin emplear la técnica de los submodelos elementales, de forma que el lector pueda contrastar las demostraciones con sus versiones que sí usan submodelos elementales. Lo anterior, para constatar la utilidad de los submodelos elementales.

El primer resultado que vamos a presentar es el que establece que se puede acotar el tamaño de espacios compactos por el cardinal $2^{\chi(X)}$.

Lema A.1. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.*

Para más información acerca del siguiente resultado, así como una demostración del lema anterior se puede consultar, por ejemplo, [6].

Proposición A.2. *Si X es compacto, entonces $|X| \leq 2^{\chi(X)}$.*

Demostración: Supóngase que X es finito. Ya que para cada $x \in X$, $\chi(x, X) \geq \aleph_0$, entonces $\chi(X) \geq \aleph_0$, y por tanto claramente $|X| \leq 2^{\chi(X)}$.

Supóngase que X es infinito y sea $\kappa = \chi(X)$, entonces para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}(x)$ base de vecindades para x tal que $\aleph_0 \leq |\mathcal{B}(x)| \leq \kappa$. Sea $\lambda = \kappa^+$. Mediante inducción transfinita se construirá una λ-sucesión de conjuntos $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ tal que F_α es cerrado en X, $|F_\alpha| \leq 2^\kappa$, si $\beta < \alpha < \lambda$, entonces $F_\beta \subseteq F_\alpha$ y para cada $\mathcal{U} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}$ finita, si $X \setminus \bigcup\mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces $F_\alpha \setminus \bigcup\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Supóngase que $\alpha < \lambda$ y que para cada $\beta < \alpha$ ya se escogieron los conjuntos F_β que cumplen todo lo anterior. Sean

$$\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}$$

y

$$\mathbf{B} = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} : \mathcal{U} \text{ es finito y } X \setminus \bigcup\mathcal{U} \neq \emptyset\}.$$

Puesto que $\alpha < \kappa^+$ y para cada $\beta < \alpha$ $|F_\beta| \leq 2^\kappa$, entonces

$$|\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta| \leq |\alpha| \cdot 2^\kappa = 2^\kappa.$$

Y puesto que, $|\mathcal{B}(x)| \leq \kappa$, entonces $|\mathcal{B}| \leq 2^\kappa$. Por otro lado, ya que $\mathbf{B} \subseteq [\mathcal{B}]^{<\omega}$, entonces $|\mathbf{B}| \leq 2^\kappa$.

Para cada $\mathcal{U} \in \mathbf{B}$, elíjase un punto $x_\mathcal{U} \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ y sea $B = \{x_\mathcal{U} \in X : \mathcal{U} \in \mathbf{B}\}$; obviamente $|B| \leq 2^\kappa$. Sea

$$F_\alpha = \overline{B \cup \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta}.$$

Entonces F_α es un conjunto cerrado, y por tanto, compacto. Por el Lema A.1, $|F_\alpha| \leq d(F_\alpha)^{\chi(F_\alpha)}$. Puesto que $\chi(F_\alpha) \leq \chi(X)$ y debido a que $B \cup \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ es denso en F_α, entonces $d(F_\alpha) \leq |B \cup \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta| \leq 2^\kappa$, entonces $|F_\alpha| \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$. Así, F_α es cerrado, tiene cardinalidad $\leq 2^\kappa$ y si $\beta < \alpha$, entonce $F_\beta \subseteq F_\alpha$.

Supóngase que $\mathcal{U} \subseteq \bigcup \{\mathcal{B}(x) : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}$ es finito y $X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{U} \in \mathbf{B}$, y por tanto existe $x_\mathcal{U} \in B$ tal que $x_\mathcal{U} \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Como $x_\mathcal{U} \in F_\alpha$, entonces $F_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Sea $F = \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha$. Si $A \subseteq F$ de cardinalidad $\leq \kappa$, entonces para cada $a \in A$, existe un $\alpha < \lambda$ tal que $a \in F_\alpha$. Sea α_a el menor ordinal que cumple eso y sea $C_A = \{\alpha_a : a \in A\}$. Entonces

$$|C_A| = |A| \leq \kappa < \lambda$$

y como λ es regular, entonces existe $\alpha < \lambda$ tal que $\alpha_a \leq \alpha$ para cada $a \in A$. Debido a que $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ es una cadena respecto de la contención, entonces se concluye que $A \subseteq F_\alpha$. Entonces

$$\overline{A} \subseteq \overline{F_\alpha} = F_\alpha \subseteq F.$$

Así, todo subconjunto de F de cardinalidad $\leq \kappa$ satisface que su clausura esta contenida en F.

Sea $x \in \overline{F}$, entonces existe una red que converge a x digamos $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$. Como $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\} \subseteq F$ y tiene cardinalidad $\leq \kappa$, entonces $\overline{\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}} \subseteq F$. En particular $x \in \overline{\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}}$, se concluye que $x \in F$, es decir, F es cerrado. Y como X es compacto, entonces F es compacto.

Supóngase que existe $y \in X \setminus F$, entonces para cada $x \in F$ sea $U_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $y \notin U_x$ (esto debido a que X es Hausdorff). Así, existe una subfamilia finita $\mathcal{U}$ de $\{U_x : x \in F\}$ tal que $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Ya que $\mathcal{U}$ es finita supóngase que $\mathcal{U} = \{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Por la elección de los U_x se tiene que $x_1, \ldots, x_n \in F$, así existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in F_\alpha$ (por ser $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una cadena respecto de la contención). Luego,

$$\mathcal{U} \subseteq \bigcup \{\mathcal{B}(x) : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}.$$

Como $y \notin U_x$ para toda $x \in F$, entonces $y \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$, es decir, $X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$. Pero $F_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$, pues $F_\alpha \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y esto último contradice la construcción de los F_α. Por tanto $F = X$. Por otro lado, como cada F_α tiene cardinalidad $\leq 2^\kappa$, entonces $|F| \leq \lambda \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. □

La siguiente demostración que vamos a agregar es la demostración del *Pressing Down Lema*, pero antes unos lemas auxiliares.

Definición A.3. *Sea α un ordinal y $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ una familia de subconjuntos de α. Se define la* ***intersección diagonal*** *de la familia como*

$$\Delta_{\beta<\alpha} B_\beta = \{\beta \in \alpha : \beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} B_\gamma\}.$$

Lema A.4. *Si α es un ordinal límite y $\kappa = cf(\alpha) > \omega$, entonces la intersección de una familia no vacía de $< \kappa$ subconjuntos c.l.u.b. de α es un c.l.u.b. en α.*

Lema A.5. *Si $\kappa > \omega$ es un cardinal regular y para toda $\alpha < \kappa$, C_α es un c.l.u.b. en κ, entonces la intersección diagonal, $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, es un c.l.u.b. en κ.*

Teorema A.6. ***[Fodor]****. Sean κ un cardinal regular, $S \subseteq \kappa$ estacionario y $f : S \to \kappa$ una función regresiva en S, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\alpha\}]$ es estacionario en κ.*

Demostración: Supóngase, por contradicción, que para cada $\alpha < \kappa$, $f^{-1}[\{\alpha\}]$ no es un conjunto estacionario de κ. Para cada $\alpha < \kappa$ existe C_α c.l.u.b. tal que $C_\alpha \cap f^{-1}[\{\alpha\}] = \emptyset$. Entonces $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ es un c.l.u.b. en κ, por tanto, $S \cap \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha \neq \emptyset$, es decir, existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha < \kappa$ y para toda $\beta < \alpha$, $\alpha \in C_\beta \subseteq S \setminus f^{-1}[\{\beta\}]$, entonces para cada $\beta < \alpha$, $f(\alpha) \neq \beta$, pero f es regresiva en S y como $\alpha \in S$, entonces $f(\alpha) < \alpha$. $\square$

La última demostración adicional que vamos a agregar es la demostración del lema del Δ-sistema.

Proposición A.7. *Sean κ un cardinal regular no numerable y $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos finitos con $|\mathcal{F}| = \kappa$. Entonces existe $\mathcal{A} \in [\mathcal{F}]^\kappa$ tal que $\mathcal{A}$ forma un Δ-sistema.*

Demostración: Ya que para cada $X \in \mathcal{F}$, $|X| < \aleph_0$, entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega}\{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}$, si ocurriese que para cada $n \in \omega$, $|\{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}| < \kappa$, entonces $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0 \cdot \sup\{|\{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}| : n \in \omega\}$. Como $cf(\kappa) = \kappa > \omega$, y $\{|\{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}| : n \in \omega\}$ se puede ver como una sucesión creciente de ordinales menores que κ de longitud $\omega < \kappa$, entonces $\sup\{|\{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}| : n \in \omega\} < \kappa$. Y por tanto $|\mathcal{F}| < \kappa$, lo cual es una contradicción, por tanto se puede fijar $n \in \omega$ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^\kappa$ tal que $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{F} : |X| = n\}$.

Supóngase que $n = 1$, entonces $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{F} : |X| = 1\}$. Claramente $\mathcal{B}$ es un Δ-sistema con raíz el vacío. Supóngase que para n se cumple que si $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad κ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{D}]^\kappa$ es tal que para toda $X \in \mathcal{D}$, $|X| = n$, entonces existe $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^\kappa$ tal que $\mathcal{A}$ es un Δ-sistema y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos finitos de cardinalidad κ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^\kappa$ tal que para cada $X \in \mathcal{B}$, $|X| = n + 1$. Para cada objeto p defínase $\mathcal{B}_p = \{X \in \mathcal{B} : p \in X\}$. Hay dos casos:

1. Existe p tal que $|\mathcal{B}_p| = \kappa$. Sea $\mathcal{C} = \{X \setminus \{p\} : X \in \mathcal{B}_p\}$, entonces $\mathcal{C} \in [\mathcal{D}]^\kappa$, donde $\mathcal{D} = \{X \setminus \{p\} : X \in \mathcal{F}\}$, es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad κ, y tal que para cada $C \in \mathcal{C}$, $|C| = n$, entonces por hipótesis inductiva existe $\mathcal{A} \in [\mathcal{C}]^\kappa$ Δ-sistema con raíz R. Sea $\mathcal{E} = \{A \cup \{p\} : A \in \mathcal{A}\}$, entonces $\mathcal{E} \in [\mathcal{B}_p]^\kappa$. Más aún, si $Y, Z \in \mathcal{E}$, entonces $Y \cap Z = (A_Y \cup \{p\}) \cap (A_Z \cup \{p\}) = (A_Y \cap A_Z) \cup \{p\} = R \cup \{p\}$. Así, $\mathcal{E}$ es un Δ-sistema con raíz $R \cup \{p\}$

2. Para toda p, $|\mathcal{B}_p| < \kappa$. Entonces para cualquier conjunto S con $|S| < \kappa$, como $\{X \in \mathcal{B} : X \cap S \neq \emptyset\} = \bigcup_{p\in S} \mathcal{B}_p$, entonces $|\{X \in \mathcal{B} : X \cap S \neq \emptyset\}| \leq |S| \cdot \sup\{|\mathcal{B}_p| : p \in S\} < \kappa$, pues κ es regular. Así, existe $X \in \mathcal{B}$ tal que $X \cap S = \emptyset$. Defínase la sucesión por recursión $(X_\beta)_{\beta<\kappa}$ como sigue. Supongase que para toda $\beta < \alpha < \kappa$ ya se eligieron X_β tales que $X_\beta \in \mathcal{B}$, $|X_\beta| = n + 1$ y sea $S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$, entonces $|S_\alpha| < \kappa$. Así, existe $X_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $X_\alpha \cap \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta = \emptyset$. Sean $\beta < \alpha < \kappa$, entonces $X_\beta \cap X_\alpha \subseteq X_\alpha \cap \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta = \emptyset$. Así, $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \in [\mathcal{B}]^\kappa$ es un Δ-sistema con raíz el vacío.

$\square$

Existen otras versiones de este resultado que pueden, igual, ser demostradas con la técnica de submodelos elementales.

Bibliografía

[1] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, volume 73 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[2] R. O. Davies, *Covering the plane with denumerably many curves*, Journal of the London Mathematical Society 38, 1988.

[3] S. Desrochers, Clouds in higher dimensions. `https://arxiv.org/abs/1910.06406v1`.

[4] A. Dow, An introduction to applications of elementary submodels to topology. Topology Proc. 13(1):17-72, 1988.

[5] A. Dow, *More set-theory for topologists*, Topology and its Applications., 64(3):243-300, 1995.

[6] R. Engelking, *General topology*, volume 6 of Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from Polish by the author.

[7] J. Ginsburg, V. Linek, A space-/lling complete graph, Ars Combin. LVIII (2001), to appear.

[8] F. Hernández, D. Meza, *Árboles y algunas de sus aplicaciones*, Topología y sus aplicaciones 2. Textos Científicos, BUAP (2013) 29-44.

[9] F. Hernández, *Submodelos elementales en Topología*, Aportaciones Matemáticas Serie Comunicaciones 35 (2005) 147-174.

[10] F. Hernández. *Teoría de Conjuntos. Una introducción.* Aportaciones Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, segunda edición, 2019.

[11] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Berlin, Heidelberg, third edition, 2003.

[12] W. Just, M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. I: The Basics*, Graduate Studies in Mathematics, vol 8. American Mathematical Society first edition, 1995.

[13] W. Just, M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. II: Set-Theoretic Tools for Every Mathematician*, Graduate Studies in Mathematics, vol 8. American Mathematical Society first edition, 1997.

[14] P. Komjáth, Three clouds may cover the plane, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 109 (2001), pp. 71-75, 2001.

[15] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, Volume 102, North-Holland, U.S.A, Fifth impresion, 1992.

[16] K. Kunen, *Set Theory*, Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, Uk, Revised edition, 2011.

[17] C. Kuratowski, *Sur une caractérisation des alephs*, Fund. Math. 38 (1951), 14-17.

[18] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, CRC Press, New York, sixth edition, 2015.

[19] D. Milovich, Noetherian types of homogeneous compacta and dyadic compacta, Topology and its Applications 156 (2008) 443–464. 1963 433–438.

[20] J. H. Schmerl, *How many clouds cover the plane?*, Fundamenta Mathematicae 177.3 (2003): 209-211. `http://eudml.org/doc/283389`.

[21] L. Soukup, Elementary submodels in infinite combinatorics, `https://arxiv.org/abs/1007.4309v2`.

[22] L. Soukup, D. T. Soukup, Infinite combinatorics plain and simple, `https://arxiv.org/abs/1705.06195v3`.

[23] S. Watson, *The Lindelöf number of a power; an introduction to the use of elementary submodels in general topology*, Topology and its Applications., 58(1):25-34, 1994.

[24] *Formal logic | Definition, Examples, Symbols & Facts*. (2022, 29 julio). Encyclopedia Britannica. `https://www.britannica.com/topic/formal-logic`.