BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CONCEPTO DEL SUPREMO
BASADA EN LA TEORÍA APOE

TESIS PROFESIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

CECILIA ACEVEDO CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

Puebla, Pue., Junio 2011

A mi familia en especial a mi madre y a mi hermana ya que ellas son mi fuente de energía y sin ellas no hubiera podido lograr esta meta.

A mi asesora la Dra. Lidia A. Hernández Rebollar, por su tiempo, críticas y consejos para que este trabajo fuera realizado de la mejor manera posible.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El concepto del supremo se introduce en el curso de matemáticas básicas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este curso se imparte a los alumnos de nuevo ingreso de las cinco licenciaturas que ofrece esta Facultad: matemáticas, matemáticas aplicadas, física, física aplicada y actuaría. La mayoría de los profesores que imparten este curso, usan como texto el libro de la comisión [2], el cual, en el capítulo 3, desarrolla el tema del supremo y al final presenta una lista de ejercicios. Nosotros hemos estudiado este material y lo hemos comparado con la presentación que del mismo tema hacen Apostol [3], Spivak [7] y Hasser [4] en sus respectivos libros de Cálculo o de introducción al análisis. Además contamos con la experiencia en la impartición de este curso y con las respuestas de una encuesta aplicada a 100 estudiantes del primer año de esta facultad, en la cual 90 % eligió al supremo como el concepto más difícil del curso de matemáticas básicas. Es por ésto que en este trabajo partimos de la hipótesis de que este concepto es complicado para los estudiantes de nuevo ingreso y nos planteamos realizar un estudio que permita conocer las dificultades a las cuales se enfrenta el estudiante. Para responder a la pregunta ¿Por qué es difícil el concepto del supremo?, decidimos utilizar la teoría APOE pues ésta presenta un modelo para explicar cómo se construyen los conceptos de matemáticas de nivel superior. Esta teoría propone construir una descomposición genética del concepto en estudio y con base a ella, hacer una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje del concepto. En esta tesis explicamos los fundamentos de la teoría APOE y proporcionamos unos ejemplos de aplicación de esta teoría, este material es lo que constituye el capítulo uno. En el capítulo dos presentamos una descomposición genética del concepto del supremo, aquí debemos mencionar que esta descomposición genética fue elaborada con la asesoría de la Dra. María Trigueros. En el capítulo tres, hacemos una revisión de la forma en que los libros mencionados arriba y el libro de texto de nuestra facultad presentan el tema del supremo. Finalmente, en el capítulo cuatro presentamos una secuencia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto. Esta tesis también se basa en un estudio realizado con estudiantes del primer año de la Facultad [1] en el que se aplicó un instrumento para observar las concepciones que los estudiantes alcanzan al estudiar este tema en un curso tradicional.

Esperamos que esta propuesta genere la reflexión entre los profesores que tienen la responsabilidad de enseñar este concepto.

Capítulo 2

LA TEORÍA APOE

2.1. ¿Qué es la teoría APOE?

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) [8] toma como marco de referencia epistemológico la teoría de Piaget (Dubinsky, 1996; Czamocha et al., 1999).

A partir de las ideas piagetianas acerca de la manera de cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro, en la teoría APOE se hace una construcción, o modelo, de la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos, en particular en la educación superior. En sus inicios, la teoría APOE fue elaborada por el doctor Ed Dubinsky. Con el tiempo y con la colaboración de nuevos investigadores, se ha probado en distintos contextos de las matemáticas.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. El paso por estas tres etapas no es necesariamente secuencial.

El manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente, además el tipo de respuesta del sujeto dependerá en gran medida de la demanda cognitiva del tipo de problema al que responde.

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva, en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre los objetos de un cierto nivel de pensamiento.

El mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento. La interacción entre el sujeto y el objeto es dialéctica. Es decir, no es posible separar el objeto de conocimiento del sujeto que conoce.

Una **acción** es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación se lleva a cabo como una reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a seguir. Si una persona únicamente puede resolver problemas haciendo uso de este tipo de transformaciones, decimos que tiene una **concepción acción**.

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. El **proceso** es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. El individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos, es decir, tiene más control sobre la transformación. Si una persona resuelve problemas y da muestras de utilizar transformaciones de este tipo, cuando el problema a tratar lo requiere, decimos que tiene una **concepción proceso** del concepto estudiado.

Los objetos cognitivos se pueden construir de dos maneras:

- Encapsulando un proceso para que el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él. Es decir, cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una **concepción objeto** del concepto.
- Cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema.

En la teoría APOE, un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática.

Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza siempre por hacer una descomposición genética del o de los conceptos de interés. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de irlos estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto y para propiciar después la construcción de las relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos. De esta manera, se fomenta la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de una parte de las matemáticas.

Después de tener una descomposición genética del concepto se procede de dos formas: elaborar instrumentos tipo examen o cuestionarios para detectar las construcciones que han logrado hacer los estudiantes después de haber aprendido el concepto en estudio. La segunda consiste en diseñar material didáctico, para que, de acuerdo a la descomposición genética elaborada, se favorezcan las construcciones necesarias para aprender el concepto. En esta segunda modalidad se puede aplicar también un instrumento para detectar las construcciones alcanzadas por los estudiantes y así refinar la descomposición genética inicial y volver al diseño de material didáctico. María Trigueros reporta dos descomposiciones genéticas de los conceptos: base de un espacio vectorial y conteo, algunos en su tercera o cuarta etapa de refinamiento.

2.2. Algunos ejemplos de la aplicación de la teoría APOE

En esta sección se presenta un resumen del trabajo de Darly Kú, María Trigueros y Asuman Oktaç [5] en el cual utilizan la teoría APOE para el aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial.

2.2.1. Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE

Para la compresión de un nuevo concepto es necesario el establecimiento adecuado de las relaciones entre los conceptos conocidos que involucra el nuevo concepto. Se cree que si el estudiante logra construir dichas relaciones, podrá alcanzar una mejor comprensión de los conceptos de algebra lineal. Esta investigación se centra en el concepto de base de un espacio vectorial. Este concepto es importante ya que es un elemento principal en la estructura de un espacio vectorial y además guarda relación con otros conceptos de esta disciplina.

La pregunta que responde este trabajo se plantea de la siguiente manera: ¿Qué construcciones han desarrollado los estudiantes universitarios acerca del concepto de base de un espacio vectorial después de haber cursado la materia de algebra lineal? Para responderla, presentamos en primer término los antecedentes de investigación sobre el aprendizaje del concepto de base, el marco teórico que utilizamos en el diseño y análisis de los instrumentos desarrollados para llevarla a cabo y los principales resultados obtenidos. Terminamos este trabajo proponiendo algunas sugerencias que pueden ser de utilidad en la enseñanza del concepto. Un marco adecuado para la investigación que se desarrolla en el trabajo es la teoría APOE.

Descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial

Con el propósito de comprender la manera como los estudiantes construyen el concepto de base de un espacio vectorial se propone una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial. Para construir el concepto de base de un espacio vectorial V, un individuo deberá mostrar una concepción proceso del concepto de espacio vectorial, lo que incluye un buen manejo de las operaciones entre vectores, incluida la multiplicación por un escalar. La acción de verificación de cada axioma se convierte en un proceso que implica una coordinación entre la verificación de cada propiedad particular y el proceso de verificación de axiomas en general. Cuando el estudiante trabaja sobre diferentes tipos de espacios vectoriales, se da cuenta de las propiedades que posee la estructura; en ese momento puede decirse que tiene una concepción proceso del concepto de espacio vectorial. Según la teoría APOE, un individuo que no muestra posibilidades de ir más allá de la realización de estas acciones muestra una concepción acción del concepto correspondiente. Un individuo con una concepción proceso del concepto de conjunto generador puede, por ejemplo, decidir qué propiedades tienen que tener los vectores pertenecientes a un espacio vectorial generado por un conjunto generador dado. Un individuo con una concepción proceso del concepto de independencia lineal puede, por ejemplo, decidir cuáles vectores se pueden quitar de un conjunto para reducirlo a un conjunto linealmente independiente. El individuo puede, además, considerar este proceso como un todo, es decir, puede encapsularlo para considerar los conjuntos de vectores que satisfacen esta propiedad y revertir estos objetos en los procesos que les dieron origen para verificar las propiedades de los vectores que los conforman. Los procesos anteriores pueden coordinarse en un nuevo proceso en el que se verifica si los vectores de un conjunto dado son linealmente independientes y se determina cuáles vectores de un espacio vectorial se pueden generar a partir de ellos. Este proceso incluye también el decidir si dichos vectores son los indispensables para generar a todos los elementos de un espacio vectorial determinado. Este proceso se encapsula, como un todo, en un objeto relacionado con el espacio vectorial: la base, que permite al estudiante, por una parte, caracterizar el espacio vectorial y, por la otra, ejercer sobre él nuevas acciones. Cuando el individuo es capaz de relacionar estas acciones, procesos y objetos, empieza entonces a construir un esquema; estas relaciones pueden ser débiles o fuertes, lo cual nos indicaría que el esquema está en distintos niveles de evolución. Cuando el esquema tiene coherencia, se convierte en un nuevo objeto que puede ser transformado por nuevas acciones y el objeto puede utilizarse en problemas que no son familiares para el individuo.

Se llevó a cabo una investigación en base a la descomposición anterior para notar cómo los estudiantes asimilan el concepto de base y algunos resultados fueron: los alumnos no llegaron a interiorizar el concepto de base de un espacio vectorial, algunos están en camino a la interiorización de dicho concepto, otros muestran una concepción acción y otros una concepción que podría llamarse de pre-acción. Con pre-acción se refiere a que el estudiante no muestra una comprensión de algún tipo y ni siquiera puede realizar acciones sobre vectores concretos. Cuando los alumnos muestran una concepción acción o se encuentran en transición de la concepción acción a la concepción proceso, se les dice que están camino a la interiorización del concepto.

Acción y proceso del concepto de base

Acción del concepto de base

La concepción acción del concepto de base se pone en evidencia cuando el estudiante verifica si un vector concreto puede escribirse como combinación lineal de otros vectores que pertenecen a un conjunto S dado y cuando verifica si el conjunto de vectores dado es o no linealmente independiente en términos de la aplicación de la definición correspondiente. Sin embargo, un estudiante con esta concepción no puede pensar en estas propiedades en términos generales y muestra la necesidad de hacer cálculos explícitos.

En base a la descomposición genética inicial, se concluye que hay dos procesos que se coordinan para dar lugar a la concepción proceso del concepto de base. El primero se relaciona con el conjunto generador y consiste en un proceso que le permite al estudiante establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no escribirse como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original. El segundo tiene que ver con la independencia lineal, donde inicialmente el individuo puede identificar, a partir de las acciones que le permiten establecer combinaciones lineales de los elementos de conjuntos dados, cuáles de entre ellas producen el vector cero y, de ahí, determinar cuáles serían los conjuntos en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite determinar si un conjunto dado de vectores cumple con esta condición. Cuando estos dos procesos se coordinan, el estudiante puede también decidir si dichos vectores son los indispensables para generar todos los elementos de un espacio vectorial determinado. Se llama "camino a la interiorización" a la concepción que muestra el estudiante.

Interiorización del concepto de base

El estudiante tiene presente las propiedades del concepto de base, es decir, utiliza las propiedades de independencia lineal y conjunto generador que definen a una base, aunque muestra dificultades para coordinarlas. De acuerdo con la descomposición genética dada al inicio para el concepto de base, se puede decir que el estudiante tiene una concepción proceso con respecto al concepto de independencia lineal, ya que, en general, puede decidir si un conjunto es o no linealmente independiente empleando diferentes tipos de argumentos, por ejemplo, usando el número de vectores, explicando verbalmente la propiedad que cumple o no un conjunto candidato a ser linealmente independiente, interpretando de manera correcta el resultado de reducción por matrices para decidir la independencia-dependencia lineal. Es capaz, además, de averiguar la dependencia lineal de un conjunto de vectores que contienen una variable, de manera general, sin tener la necesidad de dar valores concretos. Respecto al conjunto generador, cuando el alumno puede hacer todo esto el alumno se encuentra camino a la interiorización, ya que no toma en consideración la pertenencia de los vectores al espacio vectorial dado. Además que se encuentra en camino a la interiorización del concepto de base, pues aún no ha construido el concepto de conjunto generador en el nivel de proceso y, por lo tanto, no puede coordinar ambos procesos en uno solo.

Conclusiones

En el análisis surgieron algunos elementos importantes que no se consideraron en la descomposición genética propuesta: los conceptos de conjunto y subespacio, que se relacionan con las dificultades acerca de las propiedades, conjunto generador e independencia lineal, que satisface un conjunto para ser una base y que constituyen un elemento fundamental para la comprensión de dicho concepto.

Estas dificultades se observaron, en particular, cuando los estudiantes no ponían atención al hecho de que los vectores de un conjunto generador tienen que pertenecer al espacio vectorial o al subespacio que generan.

Como se había previsto, los estudiantes no pueden tener una concepción proceso de la base si no han construido los procesos de independencia y de dependencia lineal y de conjunto generador. De acuerdo con ello, se puede concluir que es necesario incluir en la descomposición genética propuesta los conceptos de conjunto y subespacio vectorial, los cuales se deberán de manejar en un nivel proceso para que sea posible coordinarlos con los conceptos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador y, asi, construir el concepto de base.

Esta investigación también revela que resulta muy difícil alcanzar una concepción objeto del concepto de base, dado que, según la teoría, cuando hay necesidad de aplicar acciones sobre un proceso ya construido, éste se encapsula en un objeto.

Creeemos que un estudiante puede lograr una concepción objeto del concepto de base sin trabajar necesariamente otros espacios que $\mathbb{R}^n$; sin embargo, la experiencia de reflexionar sobre diferentes espacios vectoriales enriquece las conexiones que se deben establecer para la construcción de un esquema.

Otro factor que influye de manera importante en la construcción del concepto de base es la posibilidad de trabajar con espacios vectoriales diferentes al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es decir, la no aceptación de otros elementos como vectores restringe en gran medida la construcción de un esquema para este concepto.

Por último, la necesidad de realizar investigaciones de fondo en relación con la comprensión de los conceptos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador-espacio generado, puesto que, como se ha mencionado, varias dificultades de los estudiantes están relacionadas con la comprensión de estos conceptos.

2.2.2. Conteo: una propuesta didáctica y su análisis

En esta sección se presenta el trabajo de Hilda Salgado y María Trigueros [6]. En este trabajo se da respuesta a las preguntas:

- ¿Qué construcciones mentales necesitan realizar los alumnos para construir las nociones de ordenación y combinación?

Con base a la teoría APOE, se propuso la siguiente descomposición genética como sustento teórico de la investigación. Al enfrentar un problema de conteo, los alumnos requieren llevar a cabo las acciones necesarias para desglosar el problema y mostrar explícitamente todos los casos posibles, a fín de poder contar físicamente. Cuando los alumnos reflexionan sobre estas acciones, las interiorizan en un proceso en el cual ya no es necesario desglosar el problema e, incluso, pueden generalizar el proceso para simbolizarlo en una fórmula que tenga sentido para ellos. Cuando los alumnos utilizan estos procesos y reflexionan sobre ellos, los encapsulan en un proceso. En este momento pueden comparar fórmulas, utilizar en un problema dos fórmulas distintas cuando es necesario, distinguir entre diversas situaciones, distinguir las fórmulas que se deben emplear en cada caso e incluso desencapsular el objeto en el proceso que dio origen.

En la descomposición genética refinada se agregó la acción de comparar distintos tipos de problemas con o sin orden. Cuando los alumnos interiorizan la acción de distinguir un problema sin orden de otro con orden, son capaces de llevar a cabo la acción de dividir la fórmula de ordenación y realizar el proceso de conteo que conduce a la generalización en una fórmula de combinación que puedan usar para resolver problemas sin orden. Cuando los alumnos reflexionan sobre los procesos mencionados anteriormente, los encapsulan para construir el objeto de conteo de ordenación. En este momento, podrán hacer comparaciones entre el objeto de ordenación y el objeto de combinación.

- ¿Es posible diseñar una secuencia didáctica que permita lograr una mejor comprensión de estos conceptos por parte de los alumnos?

Para responder esta pregunta, se diseñó una descomposición genética que se describió anteriormente, que sirvió como base para diseñar dos series de problemas relacionados con el conteo: unos que incluyeran orden y otros, sin orden. Con base en los resultados obtenidos en la primera experiencia y a través del análisis de las construcciones que los alumnos requerían para lograr la construcción de los conceptos, se rediseñó la descomposición genética.

La descomposición genética refinada funciona adecuadamente para predecir las construcciones mentales que permiten a los alumnos construir los conceptos relacionados con el tema del orden.

No se tiene mucha investigación en relación al tema de conteo. Se encontró un artículo en el que se da resultados de un experimento con niños de entre 7 y 12 años de edad que no habían estudiado problemas de conteo. Los niños tenían que encontrar todas las combinaciones posibles de vestir a osos de peluche con shorts y blusas de diferentes colores (dos dimensiones) y shorts, blusas y raquetas (tres dimensiones). Con este experimento se llegó a dos conclusiones para la matemática educativa, la primera, la diversidad de estrategias que los niños usan para resolver problemas, la segunda, y el potencial de los niños en el aprendizaje autónomo de conceptos de matemática discreta.

Se intenta contribuir a la investigación acerca de la forma en la que los alumnos enfrentan los problemas de conteo cuando se les enseña siguiendo una estrategia constructivista. En particular, nos interesa determinar si es posible diseñar una enseñanza que permita a los alumnos aprender los conceptos de conteo de manera significativa, así como investigar cuáles son las estrategias que utilizan los alumnos cuando enfrentan problemas de conteo por primera vez y cómo evolucionan durante el proceso de enseñanza, además de señalar algunas de las dificultades de los alumnos en la solución de este tipo de problemas.

Metodología

El tema de conteo se introdujo mediante una secuencia que incluyó:

- Una primera serie preliminar de problemas con orden diseñados a partir de la descomposición genética, con la finalidad de que los alumnos reflexionaran sobre sus acciones e iniciaran así la construcción de los distintos procesos y objetos necesarios para la comprensión de los conceptos matemáticos del conteo: ordenación. Esta serie se aplicó en los dos semestres que se estudiaron.

- Una segunda serie preliminar de problemas sin orden diseñados a partir de la descomposición genética y con la misma finalidad de la serie anterior, pero en el tema de combinaciones. Esta serie fue aplicada en el primer semestre. Como los alumnos de la primera experiencia tuvieron muchas dificultades para resolver los problemas donde el orden no es relevante, se decidió revisar la descomposición genética, puesto que los alumnos no habían realizado las construcciones mentales que se esperaban.

- Se refinó la descomposición genética y se diseñó una nueva (tercera) serie de problemas con y sin orden, con la finalidad de diferenciar entre ambos tipos de problemas y para aplicarse en una nueva experiencia conjuntamente con las otras dos.

La primera experiencia se llevó a cabo en el semestre agosto-diciembre de 2006. En ella se utilizaron las dos primeras series de problemas, una con orden y otra sin orden. Una vez refinada la descomposición genética con base en los resultados obtenidos de la primera experiencia, se llevó a cabo otra experiencia en el semestre enero-mayo de 2007. En esta ocasión se utilizó, además de las dos series de problemas antes mencionadas, una serie adicional de problemas que, como se describió anteriormente, incluía tanto problemas sin orden como problemas con orden, a fin de proporcionar a los alumnos oportunidades de diferenciar entre ellos. En ambas ocasiones los alumnos participantes cursaban la materia de Álgebra Superior en una universidad de México.

Los alumnos trabajaron los problemas incluidos en cada una de las series de varias ocasiones que denominaremos etapas, con el objetivo de proporcionarles repetidas ocasiones de reflexión y favorecer así los procesos de interiorización de sus acciones y de encapsulación de los procesos:

- Etapa 1. Antes de estudiar el tema en una clase de dos horas que incluyó trabajo colaborativo en equipos sin ayuda de ningún maestro o libro.
- Etapa 2. A través de una discusión general en clase sobre el tema de conteo correspondiente: ordenación (con orden) o combinación (sin orden).
- Etapa 3. Después de haber generalizado los procesos en fórmulas, se pidió a los alumnos que resolvieran algunos problemas de la serie, con la finalidad de comparar las soluciones de los alumnos con la estrategia de solución de la primera vez.
- Etapa 4. De manera individual, los alumnos resolvieron los problemas como tarea.

Además de las etapas anteriores, se aplicaron dos exámenes de conteo que incluían preguntas donde el orden es importante y otras donde no existe el orden.

A continuación se presentan algunos problemas junto con su solución y análisis a priori.

Problema 1 de la serie con orden

Los coches marca BNW se producen en cuatro modelos, ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) ¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?

b) ¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?

c) ¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?

Solución:

a) $4 \times 8 \times 3 \times 2 = 192$ coches distintos.

b) $4 \times 3 \times 2 = 24$ coches azules.

c) $4 \times 2 = 8$ coches azules y motor V-8.

En este problema se espera que los alumnos lleven a cabo la acción de seleccionar los datos relevantes para cada inciso: en el inciso a, cuatro datos; b, tres datos, y c, dos datos. Si unicamente puede realizar las acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos efectuan el producto, indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

Problema 2 de la serie sin orden

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (cinco jugadores) de entre 12 jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución:

$\binom{12}{5} = 792$ equipos.

$\binom{10}{3} = 120$ equipos con el más débil y el más fuerte.

En este problema se espera que los alumnos realicen la acción de reconocer que no importa el orden y, si resuelven como ordenación, dividir para quitarlo. Además, deben reconocer que no puede haber repeticiones por tratarse de personas. En la segunda pregunta se espera que lleven a cabo la acción de restar el total de personas a las más débil y las más fuerte, y componer el equipo de tres personas. Puede ser que intenten escribir todos los casos y contarlos. Si los alumnos efectúan el producto y la división, indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

Problema 3 del examen

En una taquería se pueden pedir los tacos al pastor con o sin cebolla, con o sin cilantro, con o sin piña y con o sin salsa. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los tacos?

Solución:

$OR_2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

En este problema se espera que los alumnos realicen la acción de reconocer cada ingrediente, que puede o no estar presente en los tacos, lo que les da dos opciones. Si los alumnos efectúan únicamente acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si lo alumnos han interiorizado la acción en un proceso, entonces reconocerán que el problema consiste en una ordenación con repetición y usarán la formula $OR_n^m = n^m$ con n objetos y m por seleccionar. En el caso de que se utilice la fórmula, es importante distinguir si la usan de manera correcta y cómo la usan.

Problema 4 de la serie con y sin orden

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues 12 $\neq$21.

b) ¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden {1,2} = {2,1}.

c) ¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?

d) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a y b?

Solución:

a)$OR_4^2 = 4 \times 3 = 12$ números de dos dígitos.

b)$\binom{4}{2} = 6$ conjuntos de dos elementos.

c) En el inciso a hay orden mientras que en b, no lo hay.

d) Debe dividirse el inciso a entre 2!=2 (permutaciones de dos elementos) para obtenr el inciso b.

En este problema se espera que los alumnos lleven a cabo la acción de distinguir el inciso a, con orden, del inciso b, sin orden, y así contestar el inciso c. En el inciso d, deben relacionar las respuestas de los incisos a y b y darse cuenta de que existen menos conjuntos que números, pues hay secuencias que en a se cuentan como diferentes, mientras que en b se cuentan como una. Si realizan únicamente acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso, entonces el inciso d dividirán inciso a entre $2! = 2$, son dos secuencias iguales, para obtener el inciso a.

Problema 5 de la serie con y sin orden
Si tienes 10 objetos y quieres escoger a los 10 objetos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución:
$\binom{10}{10} = 1$ forma.

En este problema se espera que los alumnos efectúen la acción de reconocer que el orden no importa y sólo existe una forma de tomar 10 objetos de 10 objetos. Si llevan a cabo únicamente acciones, puede ser que escriban el caso. Si los alumnos contestan correctamente sin escribir el caso, puede ser que hayan interiorizado la acción en un proceso.

Problema 6 de la serie sin orden
¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra mississippi que no tengan las letras s consecutivas? ¡¡¡explica detalladamente cuáles fórmulas usas y por qué!!! La explicación cuenta la mitad de la pregunta.

Solución:
$\frac{7!}{4!2!}\binom{8}{4}$ palabras distintas.

En este problema hay varias acciones: la acción de separar las letras s de las demás letras, la acción de permutar las demás letras y la acción de introducir nuevamente las letras s. Estas acciones se pueden interiorizar en un proceso.

Las producciones de los alumnos se revisaron en cada etapa para determinar cuáles acciones se habían interiorizado en un proceso y si algunos procesos se habían encapsulado en objetos. También se tomó en consideración el hecho de que los alumnos pudieran estar en tránsito entre acción y proceso o entre proceso y objeto. El maestro iba anotando todas las preguntas, respuestas, dudas, comentarios, etc., que surgían en el momento de la discusión en clase, así como el procedimiento que siguió para llegar, junto con los alumnos, a encontrar las relaciones entre los conceptos que se pueden expresar en términos de fórmulas de conteo. Para el análisis, se utilizó esta bitácora conjuntamente con toda la producción de los alumnos.

Análisis de las producciones de los alumnos

Primera experiencia

Se analizaron las respuestas de los alumnos del semestre agosto-diciembre de 2006 de las diversas actividades diseñadas con base en la descomposición genética. A lo largo del análisis, se hizo evidente que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada por 95 % de los alumnos, un proceso que les permitía encontrar la solución.

En el análisis de los resultados de los alumnos se encuentran datos que muestran que han interiorizado las acciones de suma y enumeración de casos en un proceso que generalizan dichas acciones. Los alumnos poco a poco dejan de contar físicamente para introducir productos y, posteriormente, generalizan estos productos en fórmulas.

Sin embargo, en el caso de la serie diseñada con los problemas donde el orden no existe, los alumnos tuvieron dificultades. Únicamente un grupo de tres alumnos resolvió los problemas cuando los enfrentaron por primera vez. La información recabada se analizó con base en el marco teórico para averiguar si, efectivamente, los alumnos llevaban a cabo las construcciones mentales que se habían propuesto en la descomposición genética. El resultado de este estudio mostró que dicha descomposición no incluía la necesidad de realizar acciones específicas que permitieran a los alumnos distinguir entre los problemas que incluyen orden y los que no lo incluyen.

Debido a esta situación se consideró necesario refinar la descomposición genética para que diera cuenta de mejor manera de las observaciones del trabajo con los alumnos. Una vez refinada la descomposición genética, se rediseñó la serie de problemas sin orden y se probó en una segunda experiencia la que se consideró la inclusión de problemas de distinta índole, a fin de que los alumnos efectuaran las acciones de comparar y diferenciar.

Los resultados del análisis de la solución del examen muestran evolución en la comprensión de los conceptos involucrados en el tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. El promedio del examen de conteo de 8.06 está muy por encima del obtenido por los alumnos de la misma maestra en semestres anteriores, que no pasaba de 6.

Segunda experiencia

Nuevamente, el análisis de los datos de esta experiencia muestra que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada por 96 % de los alumnos, en un proceso que les permite encontrar la solución mediante el producto de los datos relevantes o la aplicación de una fórmula.

Al introducir la nueva serie de actividades basada en la descomposición genética revisada, se encontró que se interiorizaron las acciones de comparar y diferenciar entre distintos tipos de problemas y, en esta ocasión, los alumnos fueron capaces de distinguir cuándo un problema tiene orden y cuándo no lo tiene.

Los alumnos interiorizaron las acciones de desglosar y representar el problema en un proceso que las generaliza y los conduce a encontrar fórmulas generales. Un 23 % de los alumnos, incluso, encapsuló la fórmula de ordenación en un objeto e hicieron en ella la división para quitar el orden, como se muestra su solución al problema 5.

El análisis del examen de conteo muestra la evolución de los alumnos en el conocimiento del tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. Una vez más, se encuentra que 24 % de los alumnos requiere un diagrama, entre ellos, 90 % sólo lo utilizan para comprobar su respuesta. El uso correcto de las fórmulas y la explicación de sus distintas componentes indica que los alumnos han interiorizado las acciones en un proceso que les permite distinguir cuál fórmula usar en cada problema y cómo aplicarla correctamente. Siete alumnos dan muestras de haber encapsulado los procesos en un objeto que les permite plantear problemas donde se puedan usar dichas fórmulas y explicar cómo pasar de una fórmula a otra, lo que no se logró en la primera experiencia.

Conclusiones

La experiencia didáctica muestra que la construcción de los conceptos asociados al conteo es difícil para los alumnos; este trabajo muestra que estas dificultades pueden ser superadas mediante el diseño de una estrategia didáctica basada en consideraciones teóricas, en particular, en la teoría APOE.

El tema de conteo se introduce en muchas ocasiones en los niveles medio y medio superior: secundaria y preparatoria. El trabajo didáctico que se realizó en este trabajo no supone ningún conocimiento previo por parte de los alumnos. Por lo tanto, la descomposición genética desarrollada para esta experiencia podría ser también de utilidad para diseñar didácticas específicas para esos niveles. Las series de problemas que se diseñaron con base en la descomposición genética podrían utilizarse con alumnos de estos niveles.

Se encontró, en ambas experiencias, que pocos alumnos pudieron detectar los casos. Diferenciar distintos casos dentro de un mismo problema implica, en primer lugar, una comprensión profunda del problema. Además, este tipo de problemas requiere estrategias que no son fáciles de generalizar, sino que se necesita una experiencia que permita identificar las posibilidades de elección dentro del problema y clasificarlas por tipos que se tratan de manera específica.

El tema de conteo es muy amplio. En muchas ocasiones es necesario resolver problemas que se separan en casos.

Capítulo 3

EL SUPREMO

3.1. El supremo en el libro de la comisión de la FCFM

Axioma del supremo: *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo.*

Comentario: En el libro de la comisión [2] se presenta el axioma del supremo antes de definir cota superior, supremo y conjunto acotado superiormente los cuales son conceptos que involucra el axioma. Esto en muchas ocasiones causa confusión entre los estudiantes. Cuando se les pide enunciar la definición del supremo los estudiantes escriben el axioma del supremo, esto se verá en el siguiente capítulo.

Como se menciona anteriormente seguido del axioma de supremo se presenta la siguiente definición:

Definición 3.1.1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.*

(1) *Si $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que x_0 es una cota superior de A si*

$$\forall a \in A : \quad a \leq x_0.$$

(2) *Diremos que A está acotado superiormente si existe una cota superior de A.*

Ejemplos:

1. Sea $A = \{-2, -1.5, 0, 1, 1.5, 2\}$. Entonces 2 es una cota superior de A porque es mayor o igual que cualquier otro elemento de A. En general, si A es un conjunto finito el mayor de sus elemento es una cota superior de A.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
$A = (a, b)$ como $\forall x \in A$, $a < x < b$, entonces b es una cota superior de A.

3. $B = [a, b]$ como $\forall x \in B$, $a \leq x \leq b$, entonces b es una cota superior de B.

4. Supongamos que $A = (2, 3)$. Como vimos en el Ejemplo 2, 3 es una cota superior de A. Pero $\pi, 3.5, 4,\ 5, \sqrt{10}$ y cualquier otro número mayor que 3 también son cotas superiores de A.

En general, dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y una cota superior x_0 de A,

cualquier $y \in \mathbb{R}$ mayor que x_0 también es una cota superior de A.

El ejemplo 5 resulta ser muy interesante:

5. Sea $A = \emptyset$. Demostraremos que cualquier número real es una cota superior de A. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces es verdadera la proposición

$$\forall a \in \emptyset : a \leq x_0.$$

¿Por qué? He aquí la respuesta:
Demostración. Queremos demostrar que:

$$A = \emptyset \text{ y } x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall a \in \emptyset : \quad a \leq x_0.$$

$\exists a \in \emptyset$ tal que $a \leq x_0$ lo cual es una contradicción ya que el conjunto $\emptyset$ no tiene elementos. ■

Definición 3.1.2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que x_0 es supremo de A, si se cumplen:*
s_1) *x_0 es cota superior de A.*
s_2) *Si m es cota superior de A, entonces $x_0 \leq m$.*

La condición s_2) nos dice que x_0 es la mínima cota superior de A. Además de que nos permite demostrar la unicidad de x_0, es decir, que en contraste con el concepto de cota superior un conjunto A puede tener a lo más un supremo. Lo cual se enuncia en el siguiente teorema que presenta el libro.

Teorema 3.1.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y x_0, y_0 supremos de A. Entonces $x_0 = y_0$.*

Axioma del supremo: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $x_0 = \sup A$.

Ejemplos:

1. Sea $B = [2,3]$. Sabemos ya que 3, y todo numero mayor que 3, son cotas superiores de B. Intuitivamente, es claro que 3 es la menor de las cotas superiores de B, así proponemos que $3 = \sup B$.

Para demostrar esto, solo resta probar la propiedad s_2), lo cual es sencillo:

Sea m una cota superior de B. Entonces para cada $b \in B, b \leq m$. Como 3 es elemento de B, $3 \leq m$ y ya.

2. Sea $A = (2,3)$. En este caso también demostraremos que $3 = \sup A$. Ya sabemos que 3 es una cota superior de A. Para ver que cumple s_2), tendríamos que demostrar que, dado $m \in \mathbb{R}$ entonces

$$m \text{ es una cota superior de } A \Rightarrow 3 \leq m.$$

Pero para esto conviene demostrar la contrarrecíproca de dicha implicación:

$$m < 3 \ \Rightarrow m \text{ no es una cota superior de } A.$$

Para demostrarla, supongamos que $m < 3$. Entonces

(i) Si $m \leq 2$, $2.5 \in A$ y $m < 2.5$. Esto demuestra que m no es una cota superior de A.

(ii) Si $m > 2$, por Ejercicio 2 (4), el promedio aritmético de m y 3, $x_0 = \frac{m+3}{2}$, está entre m y 3, así que

$$2 < m < x_0 < 3.$$

Gracias a esto podemos asegurar que $x_0 \in A$ y que $m < x_0$, lo cual implica que m no es cota superior de A.

Comentario: Con el ejemplo 1 y 2, podemos sacar una conclusión. Cuando el supremo está en el conjunto, es muy fácil de probar s_2), que podría ser la parte difícil de la definición del supremo, pero cuando el supremo no está dentro del conjunto, entonces podemos demostrar la contrarrecíproca de la proposición: m es una cota superior de $A \Rightarrow \sup A \leq m$ y para su demostración se usará la media aritmética para proponer a $x_0 \in A$ y que nos sirve para demostrar que m no es cota superior de A, es decir que $m < x_0$.

En el ejemplo 3 pondremos a prueba la conclusión que obtuvimos de los ejemplos anteriores.

3. $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, entonces $\sup \mathbb{R}_- = 0$.

Ya sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ x \leq 0$. Esto prueba la propiedad s_1), solo falta la propiedad s_2), con la conclusión anterior podemos hacer la demostración análoga al ejemplo 2.

Ahora demostraremos la contrarrecíproca de la propiedad s_2) :

$$m < 0 \Rightarrow m \text{ no es una cota superior de } \mathbb{R}_-$$

Para demostrar que m no es cota superior de $\mathbb{R}_-$. Debemos demostrar que $\exists x_0 \in \mathbb{R}_-$ tal que $m < x_0$. Sea $x_0 = \frac{m+0}{2}$,está entre m y 0, así que

$$m < x_0 < 0$$

hemos encontrado un x_0 que cumple que $m < x_0$, esto nos asegura que m no es cota superior de $\mathbb{R}_-$.

4. Si A es un conjunto que no está acotado superiormente, entonces A no tiene supremo, porque el supremo sería una cota superior.

5. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, entonces $\mathbb{R}_+$ no tiene supremo (¿por qué?).

6. Sea $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, ...\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...\}$

Claramente $A \neq \emptyset$ y $1 - \frac{1}{n} < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que $A \neq \emptyset$ y está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, A tiene supremo.

Teorema 3.1.4 *Si* $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ A$ *acotado superiormente y* $a_0 = \sup A$, *entonces*

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \ \exists a \in A \text{ tal que } a_0 - r < a \leq a_0.$$

Corolario 3.1.5 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ A$ *acotado superiormente y* $a_0 = \sup A$. *Entonces*

$$\forall r > 0,\ \exists a \in A \text{ tal que } |a - a_0| < r.$$

El cual se interpreta de la siguiente forma:

Si a_0 es el supremo de A, entonces en cualquier intervalo abierto con centro en a_0 y radio r, siempre hay elementos del conjunto.

Definición 3.1.6 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Diremos que* x_0 *es un máximo de* A *si se cumplen:*

M_1) x_0 *es una cota superior de* A.

M_2) $x_0 \in A$.

Como el caso del supremo, un conjunto A no puede tener más de un máximo (ejercicio).

Demostración. Sean x_0, y_0 máximos de A. Luego como x_0, y_0 satisface

M_1) entonces

$$\begin{aligned} x &\leq x_0 \\ x &\leq y_0 \end{aligned}$$

Como x_0 satisface M_2) $\Rightarrow x_0 \leq y_0$ y como y_0 satisface M_2) $\Rightarrow y_0 \leq x_0$, luego entonces $y_0 = x_0$. ■

Notación: $x_0 = \max A$.

Teorema 3.1.7 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ *y* $x_0 = \max A$, *entonces*

$$\sup A = x_0.$$

Ejemplos

1. Como $3 = \sup(2,3)$, pero $3 \notin (2,3)$, entonces 3 no es el máximo de $(2,3)$. El conjunto $(2,3)$ no tiene máximo porque si lo tuviera, por el teorema, sabríamos que este máximo sería el supremo, o sea 3, pero como ya vimos, 3 no puede ser el máximo del conjunto.

Entonces un conjunto puede tener supremo pero no máximo.

2. Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$. El máximo de este conjunto es el mayor de los tres elementos.

En forma análoga a los conceptos de cota superior, supremo y máximo de un conjunto tenemos los conceptos simétricos de cota inferior, ínfimo y mínimo de un conjunto y los correspondientes teoremas.

Definición 3.1.8 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$*

(1) *Si $y_0 \in \mathbb{R}$, diremos que y_0 es una cota inferior de A si*

$$\forall a \in A : y_0 \leq a.$$

(2) *Diremos que A está acotado inferiormente, si existe una cota inferior de A.*

Definición 3.1.9 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $y_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que y_0 es un ínfimo de A si se cumplen:*

i_1) y_0 es una cota inferior de A.

i_2) Si m es una cota inferior de A, entonces $y_0 \geq m$.

Coloquialmente, un ínfimo de A es un máxima cota inferior de A. De hecho éste es otro nombre que suele dársele a un ínfimo.

Tambien puede demostrarse que un conjunto no puede tener más de un ínfimo:

Teorema 3.1.10 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y x_0, y_0 ínfimos de A. Entonces $x_0 = y_0$.*

La notación que el libro da al ínfimo y_0 de un conjunto A es, $y_0 = \inf A$.

El axioma simétrico al de supremo, sería el axioma del ínfimo, se puede probar usando el axioma del supremo y, por lo tanto, ya no es un axioma, sino el siguiente teorema:

Teorema 3.1.11 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \emptyset$ y A acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.*

Algunas otras propiedades del infímo son:

Teorema 3.1.12 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A acotado inferiormente y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \inf A$, entonces*

$$\forall r > 0, \ \exists a \in A \ \text{tal que} \ a_0 \leq a \leq a_0 + r.$$

Corolario 3.1.13 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A acotado inferiormente y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \inf A$, entonces*

$$\forall r > 0, \ \exists a \in A \ \text{tal que} \ |a - a_0| < r.$$

Este resultado lo podemos interpretar de la siguiente forma:

Si a_0 es el ínfimo de A, entonces en cualquier intervalo abierto con centro en a_0 y radio r, hay elementos de A.

Definición 3.1.14 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe $a_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que a_0 es un mínimo de A si se cumplen:*

m_1) a_0 es una cota inferior de A.

m_2) $a_0 \in A$.

Por supuesto en este caso también hay unicidad, si un conjunto A tiene un mínimo, este es el único número real que satisface m_1) y m_2). Por eso se habla de "el mínimo de A" y la proposición "a_0 es el mínimo de A" se representa como: $a_0 = \min A$.

Teorema 3.1.15 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y $x_0 = \min A$, entonces*

$$\inf A = x_0.$$

Definición 3.1.16 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es* ***acotado*** *si y sólo si A es acotado superior e inferiormente.*

Como ya habíamos comentado, los resultados acerca de infimo y minímo se dejan como ejercicio para el estudiante ya que son consecuencias del supremo.

3.2. El supremo en otros libros

3.2.1. Cálculo infinitesimal de Michael Spivak

El libro de Cálculo infinitesimal de Michael Spivak, presenta el tema del supremo en el *capítulo 8* y lo titula: *Cotas superiores mínimas.* Menciona que va a revelar la propiedad más importante de los números reales y que es una continuación del capítulo 7 titulado Tres teoremas fuertes. Los teoremas fuertes que se mencionan en el capítulo 7 son los siguientes.

Teorema 1. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema 2. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número entero N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.

Teorema 3. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Se inicia el capítulo 8, Cotas superiores mínimas con la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Un conjunto A de números reales se dice* ***acotado superiormente*** *si existe un número real x tal que*

$$x \geqq a \quad \text{para todo } a \text{ de } A.$$

Un número x con esta propiedad se dice que es una ***cota superior*** *de A.*

Evidentemente A está acotado superiormente, si y sólo si, existe un número x que sea cota superior de A (y en este caso habrá muchas cotas superiores de A); se suele decir abreviadamente que A tiene una cota superior queriendo decir que existe un número que es cota superior de A.

Obsérvese que el término acotado superiormente ha sido utilizado de dos maneras: primero en el capítulo 7, con referencia a funciones, y ahora con referencia a conjuntos. Las dos definiciones están íntimamente relacionadas: si A es el conjunto $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ entonces la función f está acotada superiormente en $[a, b]$, si y sólo si, el conjunto A está acotado superiormente.

El conjunto total $\mathbb{R}$ de números reales, y los números naturales $\mathbb{N}$, son ejemplos ambos de conjuntos que *no* están acotados superiormente. Un ejemplo de conjunto que *está* acotado superiormente es

$$A = \{x : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Para demostrar que A está acotado superiormente, nos basta con exhibir alguna cota superior de A, lo cual es bastante fácil; por ejemplo, 138 es una cota superior de A, e igualmente lo son 2, $1\,\frac{1}{2}$, $1\,\frac{1}{4}$ y 1. Evidentemente, 1 es la cota superior mínima de A, aunque la frase que acabamos de introducir se comprende por sí misma, para evitar cualquier posible confusión (en particular para estar seguros de saber todos lo que significa el superlativo de "menor"), vamos a dar una definición explícita.

Definición 3.2.2 *Se dice que un número x es una* ***cota superior mínima*** *de A si*
(1) *x es cota superior de A*
(2) *si y es una cota superior de A, entonces $x \leq y$.*

El uso del artículo indefinido "un" en esta definición ha sido sencillamente una concesión a la ignorancia temporal. Una vez dada la definición precisa, se ve facilmente que si x e y son ambos cotas superiores mínimas de A, entonces $x = y$.

En efecto, en este caso: $x \leq y$, puesto que y es una cota superior, y x es una cota superior mínima, e $y \leq x$, puesto que x es una cota superior, e y es una cota superior mínima; se sigue que $x = y$. Por esta razón hablamos de la cota superior mínima de A.

El términmo **supremo** de A es sinónimo y tiene una ventaja: se presta a la muy comóda abreviación $\sup A$.

Comentario: Como podemos observar el libro presenta el tema del supremo de una manera muy escueta, primero definiendo cota superior, posteriormente, muestra la definición de cota superior mínima haciendo al final referencia de que el término cota superior mínima es lo mismo que supremo, también hace mención de la unicidad del supremo de un conjunto, pero éste no lo presenta en forma de teorema como lo menciona el libro de la comisión, sin hacer mención del máximo de un conjunto.

Más adelante el libro continúa con la definición de cota inferior mínima.

Existe una serie de importantes definiciones, análogas a las que ya hemos dado, y que podrán tratarse con más brevedad. Un conjunto A de números reales está a**cotado inferiormente** si existe un número x tal que

$$x \leqq a \quad \text{para todo } a \text{ de } A.$$

Un tal número x recibe el nombre de **cota inferior** de A. Un número x es la **cota inferior máxima** de A si
(1) x es una cota inferior de A
(2) si y es una cota inferior de A, entonces $x \geq y$.

La cota inferior máxima de A es también llamada **ínfimo** de A, y tiene la abreviación inf A.

Comentario: Como en el caso del supremo, el ínfimo se presenta de una manera muy resumida y poco formal respecto al libro de la comisión, además no hace mención del mínimo de un conjunto.

Hemos omitido hasta aquí un detalle: la cuestión de cuáles son los conjuntos que tienen por lo menos una, y en consecuencia exactamente una, cota superior mínima o cota inferior máxima. Consideraremos únicamente las cotas superiores mínimas, ya que con ello, las cuestiones relativas a cotas inferiores máximas se resolverán fácilmente por analogía.

Si A no está acotado superiormente, entonces A no tiene cota superior mínima. Se tiene la tentación de afirmar que siempre A tiene alguna cota superior, tiene cota superior mínima, pero, como ocurre con el principio de inducción matemática, este aserto puede dejar de ser cierto de una manera bastante especial.

Si $A = \emptyset$, entonces A está acotado superiormente. En efecto, cualquier número x es una cota superior de $\emptyset$:

$$x \geq y \quad \text{para todo } y \text{ de } \emptyset,$$

simplemente porque no existe ningún y en $\emptyset$. Puesto que todo número es una cota superior de $\emptyset$, no existe evidentemente ninguna cota superior mínima para $\emptyset$. Prescindiendo, sin embargo, de esta excepción trivial, nuestro aserto es verdad, y por cierto muy importante que vale la pena considerarlo en detalle. Estamos finalmente en condiciones de establecer la última propiedad que necesitamos de los números reales.

Propiedad de la cota superior mínima. Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.

Es posible que la propiedad anterior llame la atención del lector por su falta de originalidad, pero ésta es, precisamente, una de sus virtudes. Para completar nuestra lista de propiedades básicas de los números reales no nos hace falta ninguna proposición abstrusa, sino únicamente una propiedad tan sencilla que puede asombrarnos el que nos haya podido pasar por alto. Por supuesto, la propiedad de la cota superior mínima no es, en realidad, tan inocente como parece; después de todo, no se cumple para los números racionales $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los números racionales x que satisfacen $x^2 < 2$, entonces no existe ningún número racional que sea cota superior mínima de A. La importancia de la propiedad aparecerá cada vez más clara, pero sólo gradualmente.

Comentario: Hay que hacer notar que el axioma del supremo y otros axiomas se presentan en este libro como propiedades de los números reales.

3.2.2. Calculus Volumen 1 de Tom M. Apostol

El tema del supremo lo presenta en el *capítulo I*; *parte 3*, titulada: *Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales*; la cual comprende las secciones I 3.1 hasta la I 3.15. Pero para nuestro objeto de estudio en particular nos interesa tratar las secciones I 3.8; I 3.9; I 3.10; 1.3.11.

Una breve introducción. Los números reales son como conceptos primitivos que satisfacen a un cierto número de propiedades que se toman como axiomas; es decir, se suponen que existen ciertos objetos, llamados números reales, que satisfacen los 10 axiomas enunciados en las cinco secciones que siguen. Los axiomas se agrupan en forma natural en tres grupos, que son, *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y el a*xioma del extremo superior* (llamado también *axioma de continuidad* o *axioma de completitud*).

Para empezar expondremos los axiomas de cuerpo y los axiomas de orden que el libro presenta en las secciones I 3.2 y I 3.4 respectivamente.

Axiomas de campo

Axioma 1. Propiedad conmutativa. $x + y = y + x, \;\; xy = yx.$

Axioma 2. Propiedad asociativa. $x+(y+z) = (x+y)+z,\ x(yz) = (xy)z$.
Axioma 3. Propiedad distributiva. $x(y+z) = xy + xz$.
Axioma 4. Existencia de elementos neutros. *Existen dos números reales distintos, que se indican por* 0 *y* 1 *tales que para cada número real* x *se tiene:* $0 + x = x + 0 = x$ y $1.x = x.1 = x$.
Axioma 5. Existencia de negativos. *Para cada número real* x *existe un número real* y *tal que* $x + y = y + x = 0$.
Axioma 6. Existencia del recíproco. *Para cada número real* $x \neq 0$ *existe un número real* y *tal que* $xy = yx = 1$.

Axiomas de orden

Axioma 7. *Si* x *e* y *pertenecen a* $\mathbb{R}^+$, *lo mismo ocurre a* $x + y$ *y* xy.
Axioma 8. *Para todo real* $x \neq 0$ *, o* $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, *pero no ambos.*
Axioma 9. $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Después de este breve resumen sigamos con nuestro objeto de estudio, iniciando con la sección:

I 3.8 Cota superior de un conjunto, elemento máximo, extremo superior

Los nueve axiomas expuestos hasta ahora contienen todas las propiedades de los números reales estudiados ordinariamente en álgebra elemental. Hay otro axioma de importancia fundamental en el cálculo que de ordinario no se estudia en los cursos de álgebra elemental. Este axioma (u otro equivalente) es necesario para establecer la existencia del número irracional.

En álgebra elemental se presentan números irracionales cuando se trata de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea tener un número real x tal que $x^2 = 2$. A partir de los nueve axiomas anteriores no se puede probar que exista un x en el sistema de los números reales que verifique tal ecuación, ya que estos nueve axiomas son satisfechos también por los números racionales y no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma 10 permite introducir números irracionales en el sistema de los números reales. Se verá también que atribuye al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que es especialmente importante en el estudio del cálculo.

Antes de exponer el axioma 10, conviene introducir alguna terminología y notaciones especiales. Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B tal que

$$x \leq B$$

para todo x de S. Entonces se dice que S está *acotado superiormente* por B. El número B se denomina *cota superior* para S. Decimos una cota superior debido a que todo número mayor que B también es una cota superior. Si una cota superior B pertenece también a S, entonces B se llama el *elemento máximo* de S. A lo sumo puede existir un B que sea elemento máximo. Si existe, se escribe

$$B = \max S.$$

Así que, $B = \max S$ si $B \in S$ y $x \leq B$ para todo x de S. Un conjunto sin cotas superiores se dice que es *no acotado superiormente*.

Comentario: Hasta aquí, podemos observar que el libro antes de presentar el axioma 10 (axioma del supremo) expone las definiciones que están involucradas en la definición de extremo superior (supremo) y, ésta a la vez está ligada al axioma 10 ya que ésta es necesaria para la comprensión del axioma 10. Esto es un punto a favor del libro de Apostol, ya que el libro de la comisión de la FCFM empieza presentando el axioma del supremo y posteriormente define cota superior, conjunto acotado superiormente y supremo, lo cual puede causar confusión en el estudiante. El libro presenta las definiciones de manera clara para el lector.

Los ejemplos que siguen ilustran el significado de las definiciones.

Ejemplo 1. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos. Es un conjunto no acotado superiormente. No tiene cotas superiores ni elemento máximo.

Ejemplo 2. Sea S el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. Este conjunto está acotado superiormente por el 1. Su elemento máximo es el 1.

Ejemplo 3. Sea T el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x < 1$. Es parecido al conjunto del ejemplo 2 salvo que el punto 1 no está incluido. Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene elemento máximo.

Comentario: En los ejemplos 2 y 3 de intervalos concretos [0,1] y [0,1) es fácil notar que son conjuntos acotados superiormente y además, que existe el elemento máximo en el caso del ejemplo 2. En el ejemplo 1 podría ser díficil notar que es un conjunto no acotado superiormente y mucho más si tiene elemento máximo o no, ya que para que el máximo exista el conjunto debe estar acotado superiormente. En los ejemplos anteriores podemos observar que en ninguno de ellos demuestran las afirmaciones que enuncian.

Algunos conjuntos, parecidos al ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al del máximo. Este se llama extremo superior del conjunto y se define como sigue:

Definición 3.2.3 *Definición de extremo superior. Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:*
a) B es una cota superior de S.
b) Ningún número menor que B es una cota superior para S.

Si S tiene máximo, éste es también extremo superior de S. Pero si S no posee máximo, puede tener extremo superior. En el ejemplo 3 precendente, el número 1 es extremo superior de T si bien T no tiene máximo.

Comentario: La afirmación anterior se enuncia en el libro como teorema a saber teorema 3.1.7. La parte b) de la definición de extremo superior (supremo) se enuncia de manera distinta a comparación de los libros estudiados anteriormente. Observemos que el autor utiliza la negación en b) lo cual podría ser más complicado para el alumno.

Teorema 3.2.4 *Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.*

Demostración. *Sean B y C dos extremos superiores para el conjunto S. La propiedad b) implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; ánalogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego, tenemos $B = C$.*
■

I 3.9 Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Podemos ahora establecer el axioma del extremo superior para el sistema de números reales.

Axioma 10. Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = \sup S$.

Insistamos una vez más en que el extremo superior de S no pertenece necesariamente a S. En realidad $\sup S$ pertenece a S si y sólo si S posee máximo, en cuyo caso $\max S = \sup S$.

Las definiciones de *cota inferior, acotado inferiormente y mínimo,* se formulan en forma parecida. Si S tiene mínimo, se expresa $\min S = \inf S$.

Un número L se llama *extremo inferior* (o *ínfimo*) de S si a) L es una cota inferior para S, y b) ningún número mayor que L es cota inferior para S. El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $\inf S$. Si S posee mínimo, entonces $\min S = \inf S$.

Comentario: Consideramos que esta forma de exponer el axioma del supremo es más fácil de comprender para el estudiante porque se expusieron las definiciones de los conceptos que se involucran en el axioma.

Con el axioma 10, se puede demostrar el siguiente:

Teorema 3.2.5 *Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior; esto es, existe un número real L tal que $L = \inf S$.*

Demostración. Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = \inf S$. ■

Consideremos una vez más los ejemplos de la sección anterior. En el ejemplo 1, el conjunto de todos los números reales positivos, tiene al 0 como extremo inferior. Ese conjunto no tiene mínimo. En los ejemplos 2 y 3, el 0 es el mínimo.

En todos esos ejemplos resulta fácil decidir si el conjunto S es o no acotado superior e inferiormente, y también es fácil de determinar los números $\sup S$ e $\inf S$.

I 3.10 La propiedad arquimediana del sistema de los número reales

Esta sección contiene algunas propiedades importantes del sistema de los números reales que son consecuencia del extremo superior.

Teorema 3.2.6 *El conjunto P de los números enteros positivos 1,2,3,... no está acotado superiormente.*

Como corolarios del teorema precedente, se obtienen inmediatamente las consecuencias siguientes:

Teorema 3.2.7 *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Teorema 3.2.8 *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Teorema 3.2.9 *Si tres números reales a, x e y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

I 3.11 Propiedades fundamentales del extremo superior

En esta sección se consideran tres propiedades fundamentales de los extremos superior e inferior. La primera de ellas establece que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo; del mismo modo, un conjunto con extremo inferior contiene números tan próximos a él como se quiera.

Teorema 3.2.10 *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

a) Si S tiene extremo superior, para un cierto x de S se tiene

$$x > \sup S - h$$

b) Si S tiene extremo inferior, para un cierto x de S se tiene

$$x < \inf S + h$$

Teorema 3.2.11 *Propiedad aditiva. Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

a) Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior, y

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

b) Si A y B poseen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior, y

$$\inf C = \inf A + \inf B.$$

Teorema 3.2.12 *Dados dos conjuntos no vacíos S y T de $\mathbb{R}$ tales que*

$$s \leq t$$

para todo s de S y todo t de T. Entonces S tiene extremo superior, T extremo inferior, y se verifica

$$\sup S \leq \inf T.$$

3.2.3. Análisis matemático 1 de Norman B. Hasser

El tema del axioma del supremo se encuentra en el *Capítulo 9*, titulado: *El axioma del supremo* e inicia con una breve introducción muy interesante.

Introducción

La consideración del axioma del supremo ha sido diferida hasta este momento, no porque sea menos importante que los otros axiomas si no para que podamos apreciar mejor el papel que juega en el ánalisis.

Es este axioma el que distingue el sistema de los números reales del sistema de los números racionales, el sistema de los números racionales satisface todos los axiomas del sistema de los número reales, excepto el del axioma del supremo. Así, sin este axioma, no podríamos demostrar la existencia de números irracionales tales como $\sqrt{2}$, sino que hasta el momento teníamos que presumir su existencia.

2. Cotas de un conjunto

Si S es un conjunto finito de números reales, entonces S tiene un elemento mínimo y un elemento máximo. Sin embargo, si S es un conjunto infinito de números reales puede ser que tenga un elemento máximo y uno mínimo pero puede ser también que no.

Respecto a la afirmación anterior, aunque aún no se ha definido máximo y mínimo de un conjunto podemos dar un acercamiento. Se dice que si es un conjunto finito entonces podemos decidir si es acotado superior e inferiormente, entonces existe el supremo e ínfimo y si éstos están en el conjunto se sigue que tiene máximo y mínimo. Si el conjunto es infinito, no podemos asegurar si es acotado superior e inferiormente y mucho menos si existe máximo o mínimo del conjunto. Siguiendo con nuestro estudio.

Definición 3.2.13 *Un conjunto S de números reales está **acotado superiormente** (o tiene una cota superior) si existe un número c tal que, para todo $x \in S$, $x \leq c$. Tal número c se llama **cota superior** de S.*

Para el intervalo abierto $\langle a, b \rangle, b$ o cualquier número mayor que b es una cota superior. En una forma ánaloga definimos una cota inferior para un conjunto.

Definición 3.2.14 *Un conjunto S de números reales está **acotado inferiormente** (o tiene una cota inferior) si existe un número c tal que, para todo $x \in S$, $x \geq c$. Tal número c se llama **cota inferior** de S.*

Para el intervalo abierto $\langle a, b \rangle, a$ o cualquier número menor que a es una cota inferior.

Comentario: Hasta aquí, el libro define algunos conceptos de una manera muy accesible para su comprensión y muestra ejemplos de conjuntos abstractos pero muy sencillos para determinar sus cotas superiores e inferiores, lo cual facilita su entendimiento.

Definición 3.2.15 *Un conjunto S de números reales está **acotado** si existe un número c tal que para todo $x \in S, |x| \leq c$.*

Es fácil ver que un conjunto S está acotado si y sólo si es superior e inferiormente acotado, ya que el $|x| \leq c$ es equivalente a $-c \leq x \leq c$.

Evidentemente, si algún número c es una cota superior (inferior) de un conjunto S entonces cualquier número mayor (menor) que c es también una cota superior (inferior) de S. Así pues, la existencia de una cota superior (inferior) de un conjunto asegura la existencia de infinitas cotas superiores (inferiores) para el conjunto. En el caso del intervalo abierto $\langle a, b \rangle$, el conjunto de cotas superiores tiene un elemento mínimo, a saber, b. El número b se llama supremo de $\langle a, b \rangle$. En general, el supremo de un conjunto se define como sigue:

Definición 3.2.16 *Un número c se llama* ***supremo*** *de un conjunto S, lo que escribimos $c = \sup S$, si c es una cota superior de S y ningún número menor que c es una cota superior de S.*

Como cualquier número menor que c puede escribirse como $c - \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$, podemos reformular la anterior definición en la siguiente manera.

$$c = \sup S \text{ si}$$

1) para todo $x \in S$, $x \leq c$, y
2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in S$ tal que $x > c - \varepsilon$.

Comentario: La condición (1) afirma que c es una cota superior de S y la (2) enuncia que ningún número menor que c es una cota superior de S, además se escribe de una manera que tal vez resulte un poco más complicada de entender y justifica por qué se escribe de esa manera.

El ínfimo de un conjunto S, escrito $\inf S$, se define de un modo análogo.

En general, supremo e ínfimo de un conjunto pueden ser y pueden no ser del conjunto. Si el supremo de un conjunto es un elemento del conjunto, entonces el conjunto tiene un elemento máximo (que es supremo). Además, si un conjunto tiene un elemento máximo, entonces tal elemento es el supremo del conjunto.

Estas afirmaciones se verifican usando la definición del supremo. Relaciones análogas se verifican entre el ínfimo y el mínimo de un conjunto. Así pues, el supremo (ínfimo) de un conjunto puede considerarse una generalización del máximo (mínimo) elemento del conjunto.

3. El axioma del supremo

Una pregunta que ha sido ignorada en la discusión de la sección precedente es: ¿todos los conjuntos superiormente acotados tienen supremo? En el sistema de los número reales todos los conjuntos de tal tipo tienen supremo. En realidad, eso es precisamente lo que nos dice el axioma del supremo.

Daremos ahora el último axioma del sistema de los números reales.

Axioma: Si S es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.17 *Si a y b son números reales positivos cualesquiera, existe un número positivo n tal que $b \geq na$. Sea*

$$S = \{na \mid n, \textit{ entero positivo cualquiera}\}$$

Corolario 3.2.18 *Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Teorema 3.2.19 *Si a y b son dos números reales cualesquiera tales que $a < b$, entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$.*

En la introducción de este capítulo afirmamos que el axioma del supremo distingue el sistema de los números reales del sistema de los números racionales; es decir los números racionales satisfacen todos los axiomas para el sistema de los números reales, excepto el axioma del supremo.

Ejemplo. El conjunto S de todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2 es acotado superiormente, pero no tiene supremo en el sistema de los números racionales.

3.3. Conclusiones

El libro de la comisión de la FCFM comienza presentando el axioma del supremo sin antes haber dado las definiciones de los conceptos que involucra el axioma a comparación de los tres libros que revisamos, la manera en que empieza el libro de la comisión causa un poco de confusión en los estudiantes.

Cuando se les pide que escriban la definición de supremo, algunos, en lugar de la definición, escriben el axioma del supremo, esto se reporta en [1].

Los libros de Michael Spivak y de Tom M. Apostol presentan las definiciones y el axioma del supremo de manera distinta (a comparación del libro de la comisión) pero esta manera hace que las definiciones y el axioma resulten más claras para el lector.

Los libros de la comisión y el de Michael Spivak coinciden en la redacción de la segunda parte de la definición del supremo, mientras que los libros de Tom M. Apostol y de Norman B. Hasser, utilizan una proposición que involucra una negación lo cual podría resultar más complicado para los estudiantes. Además, Hasser representa a todos los números menores que el supremo con la diferencia del supremo menos un número positivo denotado por la letra épsilon.

En ninguno de los tres libros se demuestran de manera formal las afirmaciones que se hacen de conjuntos acotados y no acotados superiormente y del supremo, a diferencia del libro de la comisión en el cual si se dan ejemplos de estas demostraciones.

En el libro de Michael Spivak no se hace mención de los elementos máximo y mínimo de un conjunto, además, en este libro al supremo se le da el nombre de cota superior mínima y en el de Tom M. Apostol el nombre de extremo superior.

En los tres libros que estudiamos se da una breve reseña de la importancia que juega el axioma del supremo en el sistema de los números reales, en ellos se afirma que sin este axioma no se podría demostrar la existencia de los números irracionales.

Capítulo 4

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL SUPREMO

4.1. Concepciones del concepto del supremo

Nosotros consideramos que un estudiante muestra una *concepción acción del supremo* cuando éste es capaz de identificar el supremo de subconjuntos finitos de los reales y además, que pueda comprobar que efectivamente, ese elemento satisface la definición, o de identificar el supremo en intervalos acotados utilizando reglas memorizadas, o de identificar que no existe el supremo cuando no están acotados, también utilizando reglas memorizadas.

Un estudiante muestra una *concepción proceso del supremo* cuando, para distintos tipos de conjuntos y en particular para conjuntos definidos de manera general o abstracta, es capaz de encontrar el supremo y argumentar, incluyendo cuantificadores en su justificación, al menos en algunos casos.

Un estudiante muestra una *concepción objeto del concepto del supremo* cuando es capaz de encontrar el supremo de conjuntos arbitrarios (limitados a los que se revisan en este curso), incluidos los que se obtienen a través de operaciones entre conjuntos, y demostrar formalmente que efectivamente lo es.

4.2. Concepciones previas para el concepto del supremo

Suponemos que los alumnos han construido un esquema de conjuntos que incluye notación formal de conjuntos, operaciones básicas con conjuntos, identificación de complementos de conjuntos, representaciones analíticas, representaciones gráficas (en recta numérica o con diagramas de Venn) y que han construido un esquema de lógica que incluye traducción de proposiciones no cuantificadas, que incluyan conectivos y, o, no e implicación y su negación de lenguaje natural al simbólico y viceversa, el uso de cuantificadores y su negación en proposiciones compuestas (que incluyen varios cuantificadores, conectivos y negaciones), como proceso. Además la posibilidad de construir argumentos simples y demostraciones directas e indirectas como un proceso.

4.3. Construcción del concepto de cota superior

Dado un conjunto discreto numérico pequeño el estudiante hace la acción de identificar un conjunto de números que sean mayores o iguales que todos los elementos del conjunto, así como el mayor de los elementos del conjunto y las acciones de comparación necesarias para mostrar que efectivamente esos elementos son mayores que los elementos del conjunto.

Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización que consiste en identificar el conjunto de todos los números mayores que todos los elementos de un conjunto discreto de elementos numéricos y en el proceso de generalización que consiste en identificar el conjunto de todos los números mayores que todos los elementos de un intervalo de cualquier tipo, si existe e incluyendo algún elemento del propio conjunto. El proceso anterior se coordina con el proceso de demostración de que efectivamente esos conjuntos contienen únicamente elementos que son mayores a todos los elementos del conjunto dado. Los procesos anteriores se pueden revertir en el proceso de encontrar un conjunto para el cual otro conjunto dado constituye un conjunto de cotas superiores.

4.4. Construcción del concepto de mínima cota superior

Dado un conjunto de cotas superiores de otro conjunto no vacío dado, el estudiante debe hacer la acción de identificación del elemento mínimo del conjunto y las acciones necesarias para justificar que efectivamente lo es. Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización que permite encontrar la mínima cota superior de un conjunto acotado superiormente dado. Este proceso se coordina con el proceso necesario para demostrar que efectivamente ese número es el mínimo de las cotas superiores (la mínima cota superior). Los procesos anteriores se pueden revertir en el proceso de encontrar un conjunto para el cual un número dado constituye una mínima cota superior.

Los procesos de encontrar el conjunto de cotas superiores y de encontrar la mínima cota superior se generalizan para encontrar el conjunto de cotas superiores para un conjunto abstracto dado y en el proceso de encontrar la mínima cota superior de ese conjunto. Estos procesos involucran el uso de notación simbólica de conjuntos y de lógica por lo que se deben coordinar con los elementos de los esquemas correspondientes. Los procesos anteriores de demostración se deben generalizar para incluir las demostraciones para este tipo de conjuntos.

El estudiante efectúa las acciones y los procesos necesarios para determinar el conjunto de cotas superiores y el supremo de conjuntos definidos mediante operaciones con conjuntos. Esto hace necesaria la coordinación con el esquema de conjunto, incluyendo el uso de distintas representaciones de los mismos, y el proceso de demostrar que efectivamente lo son.

4.5. Encapsulación del concepto del supremo

Ante la necesidad de demostrar proposiciones que involucran supremos de conjuntos generales obtenidos mediante operaciones con conjuntos, el estudiante encapsula los procesos descritos anteriormente en el objeto supremo de cada uno de los conjuntos para poder hacer las acciones necesarias sobre ellos.

Capítulo 5

SECUENCIA DIDÁCTICA

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CONCEPTO DE SUPREMO

INTRODUCCIÓN

Una secuencia didáctica es, sencillamente, un conjunto articulado de actividades de aprendizaje que, con la mediación del docente, se busca el aprendizaje de algún concepto. La secuencia didáctica que se presenta está basada en la descomposición genética desarrollada en el capítulo 4. Esta secuencia se divide en ocho sesiones y en cada sesión se presenta una tabla con tres columnas. La primera columna corresponde a la concepción que se desea alcanzar después de que el estudiante haya terminado la sesión; la segunda columna corresponde a las actividades que debe realizar el estudiante y la última a las actividades que debe realizar el docente después de que el estudiante haya realizado los ejercicios que se presentan en la segunda columna.

IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Nivel de estudio: Educación Superior
Asignatura: Matemáticas Básicas
Semestre: Primero
Número de sesiones: 8
Recurso: Matemáticas Elementales; J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Linares García, Armando Martínez Gracia. Ejercicos propuestos por la secuencia didáctica.

PROBLEMA SIGNIFICATIVO

Comprender el concepto del supremo y aplicar este concepto para demostrar propiedades del supremo y de los números reales.

FORMA DE TRABAJO

El docente deberá pedir a los estudiantes que se integren en pequeños grupos heterogéneos de 4 o 5 personas máximo donde cada uno se responsabiliza de su propio aprendizaje pero contribuye a dar soporte y ayuda al de los demás. Posteriormente el docente proporcionará a los equipos los ejercicios correspondientes a la sesión que se esté trabajando y el tiempo asignado para la solución de ellos. Los estudiantes resolverán los ejercicios pero deberán trabajar colaborativamente y cooperativamente eliminándose a su mínima expresión la competitividad y el individualismo, además de que, explicarán, discutirán, aprenderán entre ellos y enseñarán lo que saben a sus compañeros. El maestro supervisará que los alumnos trabajen en torno a los objetivos académicos y puede animarlos a realizar su trabajo, puede también hacer preguntas a fin de encaminarlos a la solución de los ejercicios. El profesor debe brindar la confianza para poder hacer las aclaraciones que hagan falta, si se percata de dudas o confusiones por parte de los grupos de trabajo. Después de que se hayan resuelto los ejercicios correspondientes a la sesión el profesor deberá intervenir para proporcionar las definiciones, teoremas, corolarios y ejemplos correspondientes a la sesión con el propósito de ayudar en la construcción del concepto y que ellos alcancen la concepción esperada.

5.1. Sesión 1 Cota superior

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Acción	1. Escribe el número que es mayor o igual a todos los elementos del conjunto. *a)* $A_1=\{-2,-1,-11,0,8,6,4,1\}$ *b)* $A_2=\{9,11,-1,-5,-14,6\}$ *c)* $A_3=\{(1/2),(1/4),(1/6),(1/8)\}$ *d)* $A_4=[-4,7]$ *e)* $A_5=[-8,2]$ *f)* $A_6=[-11,10]$ *g)* $A_7=(1,4)$ *h)* $A_8=(-3,19)$ *i)* $A_9=(-13,-6)$ *j)* $B_1=(2,3)\cap[1,\infty)$ *k)* $B_2=(2,3)\cup[1,\infty)$ *l)* $B_3=(2,3)\cup\{4\}$ *m)* $B_4=(\infty,3]^c$ *n)* $B_5=(-3,3)-(\infty,3]$ 2. Escribe el conjunto de números que cumplan que sus elementos son mayores o iguales que los elementos del conjunto dado.	Después de que los estudiantes hayan resuelto los problemas, presentarles la siguiente definición y las observaciones de esta. **Definición** *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$.* *(1) Si $x_o\in\mathbb{R}$, diremos que x_o es una cota superior de A si* $$\forall a\in A:\ a\leq x_o.$$ *(2) Diremos que A está acotado superiormente si existe una cota superior de A.* Hacer hincapié que x_o no es el único elemento que cumple esta propiedad, pueden existir más elementos que satisfagan tal propiedad, de hecho cualquier número $y_o\in\mathbb{R}$ tal que $y_o\geq x_o$ es una cota superior de A, es decir todos los números que están a la derecha de x_o son también cotas superiores de A, además de que el = involucrado en el $\leq$ nos dice que una cota superior del conjunto A puede ser el elemento mayor del conjunto. Realizar a los estudiantes las siguientes preguntas para motivar a que infieran algunas propiedades de los conjuntos finitos, intervalos abiertos y cerrados. ¿Siempre hay una cota superior para conjuntos finitos? ¿Siempre hay una cota superior para intervalos cerrados? ¿Siempre hay una cota superior para los intervalos abiertos? Con las respuestas de los estudiantes, encaminarles para deducir las siguientes propiedades. En general: *Si A es un conjunto finito el mayor de sus elementos es una cota superior de A.* En los intervalos podemos observar que las cotas superiores (si existen) son los números del extremo derecho de cada intervalo y que el conjunto de números que están a la derecha del extremo derecho del intervalo, también son cotas superiores. *Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, $B=[a,b]$. Como $\forall x\in B$, $a\leq x\leq b$, entonces b es una cota superior de B.* Además, en los intervalos abiertos ninguna cota superior pertenece al intervalo como en el caso de intervalos cerrados y de conjuntos finitos. *Sea $A=(a,b)$, como $\forall x\in A$, $a<x<b$, entonces b es una cota superior de A.*

5.2. Sesión 2 Supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Acción	3. Determine el elemento más pequeño del conjunto de cotas superiores de cada conjunto del ejercicio 2.	Después de haber resuelto los ejercicios 3 y 4, definir el concepto de mínima cota superior. Al elemento que cumple con ser la menor de las cotas superiores se le da el nombre de supremo.
	4. Escriba una definición para el elemento más pequeño de un conjunto de cotas superiores.	Enunciar la definición formal. **Definición** *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y $x_0\in\mathbb{R}$. Diremos que x_0 es supremo de A, si se cumplen:* *s_1) x_0 es cota superior de A.* *s_2) Si m es cota superior de A, entonces $x_0 \leq m$.* Señalar que la definición anterior involucra dos propiedades, la primera de ser x_0 cota superior de A, lo cual ya sabemos qué significa. Es importante recalcar la segunda propiedad, para ello el profesor debe pedir al estudiante explique con lenguaje natural la propiedad s_2), posteriormente el profesor ratificará la condición s_2), explicando que ésta significa que x_0 debe de ser la mínima cota superior del conjunto A. Puntualizar que m es cualquier otra cota superior del conjunto A, no una en particular es decir no es una cota superior concreta. Será bueno mencionar que la propiedad s_2) es una propiedad que a veces resulta difícil de demostrar pero todo es cuestión de práctica y de algunos estrategias de demostración. Presentar un teorema que nos asegura la unicidad del supremo. **Teorema** *Sea $A\subset\mathbb{R}$ y supongamos que x_0, y_0 son supremos de A. Entonces $x_0 = y_0$.* **Demostración.** *Si $x_0 = \sup A$ satisface s_1) y s_2) $\Rightarrow x_0 \leq y_0$ por s_2).* *Si $y_0 = \sup A$ satisface s_1) y s_2) $\Rightarrow y_0 \leq x_0$ por s_2).* *Luego entonces $x_0 = y_0$.*

5.3. Sesión 3 Supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Acción	5. Determina el supremo de los conjuntos siguientes y demuestra que efectivamente cumplen con la definición. *a)* $A=\{-24,-4,2,5,19\}$ *b)* $B=[-5,9]$ *c)* $C=[10,26]$ *d)* $D=(-8,2)$ *e)* $F=(-3,3)$	Después de haber resuelto el ejercicio 5 plantear a los estudiantes las siguientes preguntas, para así motivarlos a que infieran ciertas implicaciones para conjuntos en los que el supremo pertenece al conjunto y para los que no lo sea. ¿Cómo se demuestra la propiedad $s_2)$ cuando el supremo pertenece al conjunto? Como en el caso de conjuntos finitos e intervalos cerrados. ¿Cómo se demuestra la propiedad $s_2)$ cuando el supremo no pertenece al conjunto? Como en el caso de intervalos abiertos. Después de haber respondido las preguntas anteriores, se proporcionaran las siguientes ideas para la demostración. En los ejercicios donde el supremo es un elemento del conjunto es fácil demostrar $s_2)$ pues el supremo de cada conjunto pertenece al conjunto. En general: Si $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ y $c \geq a,b,d,e,f$ entonces el $sup\ A = c$. **Demostración.** *Como vimos anteriormente c es cota superior de A, pues es el elemento mayor del conjunto el cual es un conjunto finito.* *Ahora demostremos la condición $s_2)$.* *Sea $m\in\mathbb{R}$, tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $m \geq x$ es decir m es otra cota superior de A.* *Por demostrar que $c<m$.* *Como $c\in A$ por la definición del conjunto se tiene que $c\leq m$.* *Esto es lo que se quería demostrar.* Si $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ y $B=[a,b]$ entonces se tiene que $\forall x\in B$, $a\leq x\leq b$. Demostraremos que $sup\ B = b$. **Demostración.** *Sabemos que b es cota superior de B. Falta demostrar que b es la mínima cota superior.* *Como en el caso anterior $b\in B$. Sea m otra cota superior de B, luego entonces $b\leq m$.* Si $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ y $A=(a,b)$ entonces se tiene que $\forall x\in A$, $a<x<b$, entonces b es una cota superior de A. Demostraremos que $sup\ A=b$.

Demostración.

Sabemos que b es cota superior de A. Falta demostrar que b es la mínima cota superior.
Este caso es diferente que los anteriores porque $b \notin A$.
Notemos como se resuelve este caso.
Tenemos que demostrar que, dado $m \in \mathbb{R}$ entonces

$$m \text{ es una cota superior de } A \Rightarrow b \leq m.$$

Pero para esto conviene demostrar la contrarrecíproca de dicha implicación:

$$m < b \Rightarrow m \text{ no es una cota superior de } A.$$

Para demostrarla, supongamos que $m < b$. Entonces $m > a$, el promedio aritmético de m y b, $x_0 = ((m+b)/2)$, está entre m y b, así que $a < m < x_0 < b$.
Con esto podemos asegurar que $x_0 \in A$ y que $m < x_0$, lo cual implica que m no es cota superior de A.

5.4. Sesión 4 Máximo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Acción	6. ¿En qué conjuntos del ejercicio anterior el supremo es un elemento del conjunto?	**Definición.** *Sea $A \subseteq R$, y $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que x_0 es un máximo de A si se cumplen:* *M_1) x_0 es una cota superior de A.* *M_2) $x_0 \in A$.* La notación que se da en el libro es: $x_0 = max\ A$. A continuación se presentará un teorema y su correspondiente demostración que nos garantiza la unicidad del máximo de un conjunto. **Teorema.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y supongamos que x_0, y_0 son máximos de A. Entonces $x_0 = y_0$.* **Demostración.** *Sean x_0, y_0 máximos de A. Tenemos que x_0, y_0 satisfacen M_1) entonces* $x \leq x_0$ $x \leq y_0$ *Como x_0 satisface M_2) implica que $x_0 \leq y_0$ y como y_0 satisface M_2) implica que $y_0 \leq x_0$, entonces $y_0 = x_0$.* Después de esta demostración, se debe de hacer a los estudiantes la observación de que cuando se quiere demostrar la unicidad, conviene proponer dos elementos que cumplan lo requerido y así concluir que estos dos elementos son iguales. **Teorema.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y $x_0 = max\ A$, entonces* $sup\ A = x_0$. **Demostración.** *$x_0 = max\ A$, por M_1) x_0 es una cota superior de A con esto satisface s_1). Para demostrar s_2), sea m cualquier otra cota superior de A.* $\Rightarrow \forall x \in A,\ x \leq m$ *Como $x_0 \in A$ por M_1 implica que $x_0 \leq m$.*

5.5. Sesión 5 Axioma del supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Proceso	7. Contestar las siguientes preguntas: a) ¿Cualquier subconjunto de los reales, acotado superiormente tiene supremo? b) ¿Qué pasa si A=$\emptyset$? ¿Es A=$\emptyset$ acotado superiormente? Si lo es, ¿Por quién es acotado? ¿A=$\emptyset$ tiene supremo? 8. Demuestre que si $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ no tiene supremo	Ahora mostraremos que $A = \emptyset$ es acotado superiormente por el conjunto de los reales pero $A = \emptyset$ no tiene supremo y esto responden las preguntas planteadas en el ejercicio 7. Mostrar que: $A = \emptyset$ y $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall a \in \emptyset$: $a \leq x_0$. **Demostración.** *$\exists a \in \emptyset$: $a \leq x_0$ lo cual es una contradicción ya que el conjunto $\emptyset$ no tiene elementos. Por lo tanto cualquier número real es una cota superior de A.* *Ahora solo falta demostrar que $A = \emptyset$ no tiene supremo. Efectivamente como en el conjunto de los números reales, no existe el número real "más pequeño" de todos. Entonces no existe la menor de las cotas superiores de $\emptyset$ y por lo tanto el conjunto $\emptyset$ no tiene supremo* Después de haber resuelto los ejercicios correspondientes a los conceptos de cota superior, mínima cota superior, supremo y máximo de un conjunto, ya estamos en condiciones para enunciar el axioma de supremo. Así como algunos teoremas y corolarios pertenecientes al concepto de supremo y máximo de un conjunto. ***Axioma del supremo**: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo.* Demostraremos que si $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ entonces $\sup \mathbb{R}_- = 0$. **Demostración.** *Ya sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $x \leq 0$. Esto prueba la propiedad s_1), solo falta la propiedad s_2)* la cual probaremos como en el caso de intervalos abiertos. *Ahora demostraremos la contrarrecíproca de la propiedad s_2):* $m < 0 \Rightarrow m$ *no es una cota superior de* $\mathbb{R}_-$ *Para demostrar que m no es cota superior de $\mathbb{R}_-$ demostraremos que $\exists x_0 \in \mathbb{R}_-$: $m < x_0$. Sea $x_0=((m+0)/2)$, está entre m y 0, así que* $m < x_0 < 0$ *Hemos encontrado un x_0 que cumple que $m < x_0$, esto nos asegura que m no es cota superior de $\mathbb{R}_-$.*

5.6. Sesión 6 Propiedades del supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Objeto	9. Leer lo siguiente: a) En lo siguiente utiliza el hecho de que el supremo es la menor de las cotas superiores y esto garantiza que cualquier número a la derecha del supremo no es una cota superior. Sea $A = (1,3)$ y el $3 = supA$. Sea $r=1 \in \mathbb{R}_+$, $3-1 < 3$ y $3-1$ no es cota superior ya que $3 = supA$ y esto nos garantiza que es la menor de las cotas superiores, luego entonces como $3-1$ no es cota superior esto significa $\exists\, a \in A$ tal que $3-1 < a$ Por ejemplo $a=2.5$ pero $2.5 \leq 3 = sup\ A$ $\Rightarrow 3-1<2.5\leq 3$. Hacer una pausa para presentar el teorema correspondiente a este ejercicio. b) Como el mismo ejemplo anterior sea $A = (1,3)$ y el $3 = sup\ A$. *Sea* $r=1 \in \mathbb{R}_+$, sabemos por el teorema anterior que $\exists\, a \in A$, *tal que* $3-1< a \leq 3$, por ejemplo $a=2.5$ pero $3 < 3+1$ $\Rightarrow 3-1 < a \leq 3<3+1$ $\Rightarrow 3-1 < a <3+1$ *por lo tanto* $\lvert 2.5-3 \rvert < 1$	En la demostración del siguiente teorema utiliza el hecho de que el supremo es la menor de las cotas superiores y esto garantiza que cualquier número a la derecha del supremo no es una cota superior. Posterior al ejercicio 9 a) podemos enunciar el siguiente teorema y su demostración que será más fácil de comprender. **Teorema.** *Si* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *A está acotado superiormente y* $a_0 = sup\ A$, *entonces* $\forall\, r \in \mathbb{R}_+\ \exists\, a \in A$ *tal que* $a_0-r < a \leq a_0$. **Demostración.** *Si* $a_0 = sup\ A$, *sabemos que por* s_2), a_0 *es la menor de las cotas superiores de A, o sea que si* $r \in \mathbb{R}_+$ *entonces* a_0-r *no es una cota superior de A, lo cual implica que* $\exists\, a \in A$ *tal que* $a_0-r < a$ *pero* $a \leq a_0 \Rightarrow a_0-r < a \leq a_0$. Posterior al ejercicio 9 b) podemos enunciar el siguiente corolario el cual nos dice que: Si a_0 es el supremo de A, entonces en cualquier intervalo abierto con centro en a_0 y radio r, siempre hay elementos del conjunto. **Corolario.** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *A está acotado superiormente y* $a_0 = sup\ A$. *Entonces* $\forall\, r > 0,\ \exists\, a \in A$ *tal que* $\lvert a-a_0 \rvert < r$. **Demostración.** *Si* $a_0 = sup\ A$, *por el teorema anterior* $\forall\, r \in \mathbb{R}_+$ $\exists\, a \in A$ *tal que* $a_0-r < a \leq a_0$ *y* $a_0 < a_0+r$ $\Rightarrow a_0-r < a \leq a_0 < a_0+r$ $\Rightarrow a_0-r < a < a_0+r$ $\Rightarrow -r < a-a_0 < r$ *Por lo tanto* $\lvert a-a_0 \rvert < r$.

5.7. Sesión 7 Propiedades del supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Objeto	*10. Definir cuatro conjuntos de números reales A_1, A_2, B_1, B_2 de tal forma que B_1 y B_2 estén acotados superiormente y $A_1 \subseteq B_1$ y $A_2 \subseteq B_2$.* *11 .¿Los conjuntos A_1, A_2 son acotados superiormente?* *12. Demostrar que, en general, si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ y $A \subseteq B$ y B acotado superiormente, entonces A también es acotado superiormente.* *13. Para los conjuntos A_1, B_1, ¿Qué relación se cumple?* *a) $\sup A_1 \leq \sup B_1$* *b) $\sup B_1 \leq \sup A_1$* *14. Demostrar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset \neq B$, A y B están acotados superiormente y $A \subseteq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.*	*Demostración del siguiente teorema:* *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset \neq B$, A y B están acotados superiormente y $A \subseteq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.* **Demostración.** *Sea $x_0 = \sup A$ y $y_0 = \sup B$. Sabemos que $a \leq x_0$ $\forall a \in A$.* *Luego $a \in B$ implica que $a \leq y_0$, pero x_0 es la mínima cota superior entonces $x_0 \leq y_0$* *Por lo tanto $\sup A \leq \sup B$, que es lo que se quería demostrar.*

5.8. Sesión 8 Propiedades del supremo

CONCEPCIÓN	ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO	ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE
Objeto	*15. Definir dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A,B \neq \emptyset$ y acotados superiormente.* *a) ¿$A \cup B$ es acotado superiormente?* *b) Si lo es, ¿cuál es el supremo de la unión?* *c) ¿$A \cap B$ es acotado superiormente?* *d) Si lo es, ¿cuál es el supremo de la intersección?* *16. Demostrar que, en general, si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A,B \neq \emptyset$ y A y B están acotados superiormente, entonces:* $A \cup B$ y $A \cap B$ *están acotados superiormente.* *17. Con los conjuntos del ejercicio 13, verificar qué relación se cumple.* *a) $Sup\ (A \cup B) = max\ \{sup\ A, sup\ B\}$* *b) $Sup\ (A \cup B) = min\ \{sup\ A, sup\ B\}$*	*Demostración de los siguientes teoremas:* *1. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A,B \neq \emptyset$ y A y B están acotados superiormente, entonces* $A \cup B$ y $A \cap B$ *están acotados superiormente.* **Demostración.** *Empezamos demostrando la unión de conjuntos acotados superiormente.* *Sea α una cota superior de A y β una cota superior de B.* *Sea $x \in A \cup B$ implica que $x \in A \vee x \in B$.* *Si $x \in A$ entonces $x \leq \alpha$* *si $x \in B$ entonces $x \leq \beta$.* *Por lo tanto B está acotado superiormente.* Ahora para la intersección de conjuntos. *Sea α una cota superior de A y β una cota superior de B.* *Sea $x \in A \cap B$ implica que $x \in A \wedge x \in B$ entonces $x \leq \alpha \wedge x \leq \beta$.* *Por lo tanto $A \cap B$ esta acotado superiormente.* *2. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A,B \neq \emptyset$ y A y B están acotados superiormente, entonces* $Sup\ (A \cup B) = max\ \{sup\ A, sup\ B\}$ **Demostración.** *Como $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente entonces por el axioma del supremo A tiene supremo, sea $x_0 = sup\ A$, de la misma manera B tiene supremo, sea $y_0 = sup\ B$.* *Supongamos que $x_0 \leq y_0$ entonces* $y_0 = max\ \{sup\ A, sup\ B\}$. *Como $A \neq \emptyset \neq B$ entonces $A \cup B \neq \emptyset$ además $A \cup B$ está acotado superiormente por el teorema anterior y por el axioma del supremo $A \cup B$ tiene supremo.* *Demostraremos que $y_0 = sup\ (A \cup B)$ para esto basta demostrar $s_1)$ y $s_2)$.* *Empezemos demostrando $s_1)$.* *Sea $x \in A \cup B$ implica que $x \in A \vee x \in B$.* *Si $x \in A$ entonces $x \leq x_0 \leq y_0$ entonces $x \leq y_0$.* *Si $x \in B$ entonces $x \leq y_0$.* *Por lo tanto y_0 es cota superior de $A \cup B$.* *Ahora demostraremos $s_2)$.* *Sea m una cota superior de $A \cup B$, probaremos que $y_0 \leq m$.* *Si m es cota superior de $A \cup B$ entonces $\forall x \in A \cup B$ $x \leq m$, como m es cota superior de $A \cup B$ entonces es cota superior de A y de B luego x_0 y y_0 son supremos entonces son mínimas cotas superiores entonces se tiene que $x_0 \leq m \wedge y_0 \leq m$.* *Por lo tanto $y_0 \leq m$.*

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos hecho una revisión de la teoría APOE y hemos presentado unos ejemplos de su aplicación para estudiar la construcción de los conceptos de base y de conteo. Esto ha sido con la finalidad de investigar acerca de la construcción del concepto del supremo y poder proponer una mejor manera de enseñar y aprender este concepto. Aquí hemos combinado la teoría APOE con la teoría de secuencias didácticas, pues aunque provienen de diferentes escuelas ambas tienen al constructivismo como una de sus raíces. También hemos presentado una comparación de la presentación que hacen cuatro autores del concepto del supremo. El libro de la comisión, que conocemos y usamos en la facultad de ciencias físico matemáticas de la BUAP, tiene una buena presentación didáctica de los conceptos relacionados con el supremo, pues presenta ejemplos que los otros libros no toman en cuenta. Sin embargo, en pruebas realizadas a estudiantes detectamos que presentar primero el axioma del supremo y después las definiciones correspondientes causa cierta confusión. En el capítulo tres presentamos una descomposición genética del supremo y en base a ella se diseñó una secuencia didáctica la cual se presenta en el capítulo cuatro. Esta secuencia didáctica tiene la finalidad de que los alumnos realicen las acciones y procesos necesarios para la construcción del concepto del supremo.

Por último queremos mencionar que esta tesis es una propuesta sobre una manera de investigar cómo es que se construye un concepto de matemáticas de nivel superior y cómo entonces debe de enseñarse y aprenderse. Existe la necesidad de continuar investigando en relación a los conceptos de matemáticas que resultan complicados para los estudiantes, especialmente los de nivel superior.

Bibliografía

[1] Acevedo Contreras Cecilia, Hernández Rebollar Lidia Aurora y Trigueros Gaisman María, Acerca de la Construcción del Concepto del Supremo, Artículo en revisión, 2011.

[2] Angoa Amador J. Juan, Contreras Carreto Agustín, Ibarra Contreras Manuel, Linares Gracia Raúl, Martínez García Armando, Matemáticas Elementales, Dirección de fomento editorial BUAP, Puebla, 2008.

[3] Apostol Tom M., Calculus, Vol. 1, Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1967.

[4] Hasser Norman B., Análisis matemático 1, Vol. 1, Trillas, México, 1988.

[5] Kú Darly, Trigueros Gaisman María y Oktaç Asuman, Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE, Educación Matemática, Vol. 20, Núm. 2, 2008.

[6] Salgado Hilda y Trigueros Gaisman María. Conteo: una propuesta didáctica y su análisis, Educación Matemática,Vol. 21, Núm. 1, Santillana, Distrito Federal, México. 2009.

[7] Spivak Michael, Calculus Calculo infinitesimal Segunda Edición, Reverté, Barcelona España, 1992.

[8] Trigueros Gaisman María, La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior, Educación Matemática, Vol. 17, Núm. 001, Santillana, Distrito Federal, México, 2005.

[9] http://www.itesm.mx/viti/cie/competencias_oea/modulo_5/aprendiz_col.pdf. Consultado 25 de Enero de 2010.