BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Extensiones Simples de Topologías

TESIS

Que para obtener el grado de

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Carolina Cenobio Castillo

Asesores:

Dr. Marcelino Texis Texis.

Dr. Fernando Sánchez Texis.

H. Puebla de Z. 9 de diciembre de 2013

Agradecimientos

Les agradezco a mis asesores al Dr. Marcelino Texis Texis y al Dr. Fernando Sánchez Texis, por compartir sus conocimentos, su paciencia y compromiso a este proyecto que culmino para cerrar esta etapa profesional en mi vida.

Para ...

Todas las parcelas de mi vida tienen algo tuyo y eso es verdad, no es nada extraordinario tú lo sabes tan objetivamente como yo. Sin embargo hay algo que quisiera aclararte cuando digo todas las parcelas no me refiero solo a esto de ahora, a esto de esperarte y ¡aleluya! encontrarte y carajo perderte y volverte a encontrar....

Te Amo Fer.

Tus brazos siempre se abren cuando quiero un abrazo. Tu corazón comprende cuando necesito a una amiga. Tu fuerza y amor me guiaron y me dieron alas para volar.

Te quiero Mami.

A los que son fuertes y débiles a la vez, pero se que me aman y me cuidan.

Mis hermanos.

Índice general

Introducción

Sean X un conjunto (no vacío) y τ y σ dos topologías sobre X. Se dice que σ es una extensión de τ si ocurre que $\tau \subset \sigma$. Uno tiene que en el caso en que σ es una extensión de τ, la función identidad $id : (X, \sigma) \to (X, \tau)$ es una función continua. Y de este hecho se sigue que si $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica que se preserva bajo imágenes continuas, entonces podemos garantizar que si el espacio (X, σ) tiene la propiedad $\mathcal{P}$, el espacio (X, τ) también tendrá la propiedad $\mathcal{P}$. Tal es el caso de $\mathcal{P} =$ *compacidad* o $\mathcal{P} =$ *conexidad*, por ejemplo. Esto resuelve, parcialmente, el problema siguiente.

Problema General 1. Suponga que $\mathcal{P}$ es una propiedad y que σ es una extensión de τ. Suponga además que (X, σ) tiene la propiedad $\mathcal{P}$. ¿Bajo qué condiciones ocurre que (X, τ) cumple $\mathcal{P}$?

En el mismo contexto, el problema anterior nos lleva naturalmente a su recíproco:

Problema General 2. Suponga que $\mathcal{P}$ es una propiedad y que σ es una extensión de τ. ¿Bajo qué condiciones se verifica que al tener (X, τ) la propiedad $\mathcal{P}$, ocurre que (X, σ) cumple $\mathcal{P}$?

Norman Levine en [8] establece un método para obtener expansiones de topologías llamado extensiones simples. Estas expansiones resuelven parcialmente el Problema General 2 para el caso de algunas propiedades topológicas como por ejemplo: Hausdorff, Regular, Completamente Regular y Normal. Por otra parte, es importante mencionar que las extensiones simples también son estudiadas por varios autores como Borges [1], Reynolds [10], Douglas [2].

El objetivo principal de este trabajo es presentar cómo se resuelve parcialmente el Problema General 2, para el caso cuando P es la propiedad de ser $\mathcal{T}_0, T_1, T_2$, Regular, Completamente Regular y Normal, usando extensiones simples de Norman Levine [8]: Sean X un conjunto y τ y σ dos topológias sobre X, se dice que una extensión σ de τ es una *extensión simple* de τ, si existe $A \subset X$ tal que $\tau \cup \{A\}$ es una subbase de σ.

La tesis se encuentra dividida en tres capítulos. El primero es un resumen de resultados, notaciones y definiciones que se usan a lo largo de la misma. En el segundo, nos ocupamos del Problema General 2, para tres tipos de propiedades; a saber, *Axiomas de separación* y propiedades de tipo *compacidad y conexidad*. En este mismo presentaremos los resultados de Carlos J. R. Borges [1], los cuales son una mejora a los dados por Norman Levine [8], en en el contexto de las propiedades de: regularidad, completamente regular y normalidad.

En el último capítulo, presentamos algunas propiedades de los espacios R-Maximales, utilizando extensiones simples, estos fuerón obtenidos de Douglas [2], [3].

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Espacios Topológicos

En este capítulo presentamos de manera breve los conceptos que serán utilizados en el desarrollo de este trabajo. Muchos de los resultados que se presentan son conocidos, por lo cual sólo los enunciamos, sin embargo se recomienda consultar sus pruebas en alguna de las siguientes referencias [4] ó [11].

Como es usual $\mathbb{R}$,$\mathbb{Q}$, $[0, 1]$ y ω representan el conjunto de los números reales, el de los números racionales, el intervalo cerrado y el primer ordinal infinito (el conjunto de los números enteros no negativos), respectivamente.

Definición 1.1.1. *Un espacio topológico es una pareja (X, τ) que consiste de un conjunto X y una colección τ de subconjuntos de X que cumpla las propiedades siguientes:*

a) $\emptyset$, $X \in \tau$.

b) *Si* U, $V \in \tau$, *entonces* $U \cap V \in \tau$.

c) *Si* $\mathcal{F} \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcup \mathcal{F} \in \tau$.

A los miembros de τ se les conoce como *conjuntos τ-abiertos* de X o simplemente conjuntos abiertos de X (cuando no hay peligro de confusión). La familia τ se denomina una *topología* en X. Diremos que un subconjunto $N \subseteq X$ con $p \in N$ es una *vecindad de p* si existe un conjunto abierto U de X tal que $p \in U$ y $U \subseteq N$. Un subconjunto $V \subseteq X$ es *abierto* de X si para cada $x \in V$ existe una vecindad U_x de x contenida en V.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos de X. Diremos que $\mathcal{B}$ es *base* para el espacio topológico (X, τ) si para todo $x \in X$ y cualquier vecindad U de x, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$. Una colección de conjuntos abiertos $\mathcal{C}$ de X es una *subbase* para el espacio topológico (X, τ) si la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$, resulta ser una base para (X, τ).

Sea (X, τ) es un espacio topológico. Se dice que un subconjunto C de X es *τ-cerrado* de X si $X \setminus C$ es τ-abierto de X. Para cualquier $A \subseteq X$, consideremos la familia $\mathcal{C}_A$ de todos los conjuntos τ-cerrados de X que contienen a A. La cerradura o clausura de A respecto a τ, denotada por $cl_\tau(A)$ o por $\bar{A}$ (cuando no hay peligro de confusión) es la intersección $\bigcap \mathcal{C}_A$. Además, si $D \subseteq X$ es tal que $\overline{D} = X$, diremos que D es un subconjunto denso de X.

Algunas propiedades de la cerradura son:

Teorema 1.1.2. *([4], pág. 13) Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

a) $A \subseteq \bar{A}$.

b) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

c) Si $A \subseteq B$, *entonces* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

d) $x \in \bar{A}$ *si y sólo si para cada vecindad* U_x *de* x *se cumple que* $U_x \cap A \neq \emptyset$.

e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

f) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $p \in A$ es un *punto interior* de A respecto a τ si existe un conjunto abierto U en τ tal que $p \in U \subseteq A$. El conjunto de puntos interiores de A respecto a la topología τ es denotado por $Int_\tau(A)$ o por $Int(A)$ (cuando no hay peligro de confusión) y se llama el interior de A.

Teorema 1.1.3. *([4], pág. 15) Sean (X, τ) un espacio topológico, y $A, B \subseteq X$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

a) $Int(A) = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$, *donde* $\{U_i | i \in \Lambda\}$ *es la familia de todos los subconjuntos abiertos de* X *contenidos en* A.

b) $Int(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

c) $Int(A) \subseteq A$.

d) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

e) $Int(Int(A)) = Int(A)$.

Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $p \in X$ se dice que es un punto frontera de A respecto a τ si cualquier vecindad U de p satisface $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos frontera de A respecto a la topología τ es denotado por $Fr_\tau(A)$ o por $Fr(A)$ (cuando no hay peligro de confusión) se llama la frontera de A.

Teorema 1.1.4. *([4], pág. 26) Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

a) $Fr(\emptyset) = \emptyset$.

b) $Fr(A) = Fr(X \setminus A)$.

c) $Fr(Fr(A)) = Fr(A)$.

d) $Int(A) = A \setminus Fr(A)$.

e) $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

f) $Fr(\bar{A}) \subseteq Fr(A)$.

g) $\bar{A} = A \cup Fr(A)$.

h) $\bar{A} = X \setminus Int(X \setminus A)$.

i) $X = Int(A) \cup Fr(A) \cup Int(X \setminus A)$.

j) A es abierto si y sólo si $Fr(A) = \bar{A} \setminus A$.

k) A es cerrado si y sólo si $Fr(A) = A \setminus Int(A)$.

Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces la familia $\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$ define una topología en A. Denotado con esta topología, A se convierte en un espacio topológico y decimos que A es un subespacio de X. Es fácil probar que si A es un subespacio de X y $B \subseteq A$, entonces $cl_{\tau|_A}(B) = cl_\tau(B) \cap A$.

Sean (X,τ) y $(Y,\tau^{'})$ espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es *continua* si $f^{-1}(U) \in \tau$ para todo $U \in \tau^{'}$. Si $Y = [0,1]$ y $\tau^{'} = \tau|_{[0,1]}$ es la topología usual del $[0,1]$. Entonces decimos que $f : X \longrightarrow [0,1]$ es τ-*continua* si f es continua.

Teorema 1.1.5. *([4], pág. 28) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función de un espacio (X,τ) en un espacio $(Y,\tau^{'})$. Las propiedades siguientes son equivalentes* *a)* f *es continua.*

b) *Las imágenes inversas de miembros de una subbase* $\mathcal{P}$ *en* Y *son abiertos de* X.

c) *Las imágenes inversas de miembros de una base* $\mathcal{B}$ *en* Y *son abiertos de* X.

d) *Las imágenes inversas de conjuntos cerrados de* Y *son cerrados de* X.

e) *Para todo* $A \subseteq X$ *se tiene que* $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

f) *Para todo* $B \subseteq Y$ *tenemos que* $f^{-1}(Int(B)) \subseteq Int(f^{-1}(B))$.

g) *Para todo* $B \subseteq Y$ *se cumple que* $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$.

Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y su inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es continua. Si existe un homeomorfismo entre los espacios topológicos X e Y, diremos que X es homeomorfo a Y.

1.2. Axiomas de Separación

Entre otros conceptos topológicos están *los axiomas de separación*, los cuales jugarán un papel importante en el capítulo 3, y enunciamos a continuación

Definición 1.2.1. *Un espacio topológico* (X, τ) *es espacio:*

a) T_0, *si dados dos puntos distintos* x, $y \in X$ *existe un conjunto abierto de* X *que contiene a uno de esos puntos pero no al otro.*

b) T_1, *si dados dos puntos distintos* x, $y \in X$ *existen dos abiertos* U *y* V *de* X, *tales que* $x \in U$, $y \notin U$ *y* $y \in V$, $x \notin V$.

c) T_2 *o Hausdorff, si dados dos puntos distintos* x, $y \in X$ *existen vecindades* U_x *y* U_y *de* x *y* y, *respectivamente, tales que* $U_x \cap U_y = \emptyset$.

d) *Regular o* T_3, *si es* T_1 *y para todo subconjunto cerrado* F *y para todo punto* $x \in X \backslash F$, *existen conjuntos abiertos ajenos* U_1 y U_2, *tales que* $F \subseteq U_1$ *y* $x \in U_2$.

e) *Normal o* T_4, *si es* T_1 *y para cualesquiera conjuntos cerrados* F_1 *y* F_2, *de* X *con* $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, *existen conjuntos abiertos ajenos* U_1 y U_2 *de* X *tales que* $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$.

f) *Completamente regular o Tychonoff, si es* T_1 *y para todo* $x \in X$ *y para todo* $F \subset X$ *cerrado con* $x \notin F$, *existe* $f : X \to [0, 1]$ *continua tal que* $f(x) = 0$ *y* $f(y) = 1$ *para todo* $y \in F$.

Teorema 1.2.2. *Engelking [4] ó Willard [11]. Un espacio topológico* (X, τ) *es* T_1 *si y sólo si para todo* $x \in X$*, el conjunto* $\{x\}$ *es un subconjunto cerrado de* X*.*

Teorema 1.2.3. *Engelking [4] ó Willard [11]. Sea* (X, τ) *un espacio* T_1*. El espacio* (X, τ) *es regular si y sólo si para cualquier punto* $x \in X$ *y cualquier abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe un abierto* V *de* X *tal que* $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq U$*.*

Teorema 1.2.4. *Engelking [4] ó Willard [11]. Sea* (X, τ) *un espacio* T_1*. El espacio* (X, τ) *es normal si y sólo si para cualquier cerrado* F *en* (X, τ) *y cualquier abierto* U *de* X *con* $F \subseteq U$*, existe un conjunto abierto* V *de* X *tal que* $F \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq U$

Teorema 1.2.5. *Engelking [4] ó Willard [11]. Sea* (X, τ) *un espacio* T_1*. El espacio* (X, τ) *es completamente regular si y sólo si para todo* $x \in X$ *y cualquier abierto* U *de* X *con* $x \in U$ *existe una función* $f : X \longrightarrow [0, 1]$ *continua tal que* $f(x) = 0$ *y para todo* $y \in X \setminus U$ *se tiene que* $f(y) = 1$*.*

1.3. Espacios compactos y conexos

Los espacios compactos constituyen una de las clases de espacios topológicos que más se han estudiado. En esta sección presentamos algunas de sus propiedades principales.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X es una *cubierta abierta* de X si $\mathcal{U} \subseteq \tau$ y $X = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$. Una subcubierta $\mathcal{D}$ de $\mathcal{U}$ es una colección de $\mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{D}} U_i$.

Definición 1.3.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Decimos que* (X, τ) *es compacto, si cualquier cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta finita.*

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es compacto, si $(A, \tau|A)$ es compacto. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X satisface la propiedad de la intersección finita (*pif*), si toda subcolección finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

Teorema 1.3.2. *Engelking [4] ó Willard [11]. Se cumplen las propiedades siguientes.*

a) Un espacio (X, τ) *es compacto si y sólo si para toda colección* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos cerrados de* X *que satisface la pif, ocurre que* $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$*.*

b) Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ *una función continua. Si* (X, τ) *es compacto, entonces* $(f(X), \tau'|_{f(X)})$ *es compacto.*

c) *Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

d) *Sean* (X, τ) *un espacio de Hausdorff y* $B \subseteq X$. *Si* B *es compacto, entonces* B *es cerrado.*

e) *Sea* $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ *una función continua y biyectiva. Si* (X, τ) *es compacto y* (Y, τ') *es de Hausdorff, entonces* f *es homeomorfismo.*

Finalizamos este capítulo con otro de los conceptos que usaremos más adelante.

Definición 1.3.3. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Decimos que* (X, τ) *es conexo, si para todo par de abiertos* G_1 *y* G_2 *tales que* $X = G_1 \cup G_2$ *y* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ *entonces* $G_1 = \emptyset$ *ó* $G_2 = \emptyset$.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es conexo en (X, τ) si $(A, \tau|_A)$ es conexo. Tenemos que A es conexo si y sólo si para todo par de abiertos de X, G_1 y G_2 tal que $A \subseteq (G_1 \cup G_2)$ y $A \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$ entonces $G_1 \cap A = \emptyset$ ó $G_2 \cap A = \emptyset$. La conexidad se preserva respecto a imágenes continuas.

CAPÍTULO 2

Extensiones simples

2.1. Propiedades básicas de las extensiones simples

Para construir una topología más fina que otra, el método que se mediante una extensión simple, eśte fue introducido por Levine [8] en 1936, también por E. Hewitt en 1943.En este capítulo mostraremos cómo se hace esto y también veremos algunas propiedades respecto a los operadores de interior y clausura.

Definición 2.1.1. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X.*

a) Decimos que τ_2 es una extensión de τ_1 (ó que τ_2 es más fina que τ_1) si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

b) Decimos que τ_2 es una extensión simple de τ_1 si existe un subconjunto $A \subseteq X$, tal que $\tau_1 \cup \{A\}$ es una subbase para τ_2.

De la definición resulta claro que toda extensión simple de τ_1 es una extensión de τ_1. El lema siguiente nos ayudará a describir explícitamente cómo son los abiertos de una extensión simple.

Lema 2.1.2. *Sean τ_1, τ_2 dos topologías sobre X. Entonces τ_2 es una extensión simple de τ_1 si y sólo si existe $A \subseteq X$ tal que $\tau_2 = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau_1\}$.*

Demostración. (*Necesidad*) Como τ_2 es una extensión simple de τ_1, entonces existe $A \subseteq X$ tal que $\tau_1 \cup \{A\}$ es una subbase para τ_2. Denotemos por $\mathcal{B}$ a la base generada por $\tau_1 \cup \{A\}$ y por τ al conjunto $\{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau_1\}$. Verifiquemos que $\tau = \tau_2$. Primero demostremos que $\tau_2 \subseteq \tau$. Sea $C \in \tau_2$, si $C = \emptyset$, claramente $C = \emptyset \cup (\emptyset \cap A)$, y por lo tanto $C \in \tau$. Ahora si $C \neq \emptyset$, entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, tal que $C = \bigcup \mathcal{F}$. Como τ_1 es una topología, entonces cada $F \in \mathcal{F}$ es de la forma $W \cap A$ ó W ó A, para algún $W \in \tau_1$, nuevamente como τ_1 es una topología, entonces $C = \bigcup \mathcal{F} = U \cup (V \cap A)$ para algunos $U, V \in \tau_1$. Así $C \in \tau$ y por lo tanto $\tau_2 \subseteq \tau$. Ahora demostremos que $\tau \subseteq \tau_2$. Sea $D \in \tau$, entonces existen $U, V \in \tau_1$

tales que $D = U \cup (V \cap A)$. Ahora consideremos la familia $\mathcal{F} = \{U, V \cap A\}$, tenemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ y como $\mathcal{B}$ es una base para τ_2, entonces $\bigcup \mathcal{F} \in \tau_2$ y como $\bigcup \mathcal{F} = U \cup (V \cap A) = D$. Así tenemos que $D \in \tau_2$ y por lo tanto $\tau \subseteq \tau_2$.

(*Suficiencia*) La prueba es análoga al caso anterior. □

Observación: Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $A \subset X$, entonces A es abierto en $(X, \tau(A))$.

Denotemos por τ^* o por $\tau(A)$ la extensión simple de τ generada por A. A continuación veamos qué relación tienen el interior y la cerradura en la topología original, con el interior y la cerradura tomadas en la topología $\tau(A)$.

Teorema 2.1.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

a) $Int_{\tau^*}(B) = Int_\tau(B) \cup Int_{\tau|A}(B \cap A)$.

b) $cl_{\tau^*}(B) = cl_\tau(B) \cap ((X \backslash A) \cup (A \cap cl_\tau(B \cap A)))$.

c) $(A, \tau|A) = (A, \tau^*|A)$.

d) $(X \backslash A, \tau|(X \backslash A)) = (X \backslash A, \tau^*|(X \backslash A))$.

e) $cl_\tau(B \cap A) = cl_{\tau^*}(B \cap A)$.

f) *A es cerrado en τ^* sí y sólo si A es cerrado en τ.*

g) *Si F es cerrado en τ^*, entonces $F \cap A$ es cerrado en $(A, \tau|_A)$ y $F \cap (X \backslash A)$ es cerrado en $((X \backslash A), \tau|_{(X \backslash A)})$.*

Demostración. *a*) ($\subseteq$) Sea $x \in Int_{\tau^*}(B)$, entonces por el Lema 2.1.2, existen U y V en τ tales que $x \in U \cup (A \cap V) \subseteq B$, entonces $x \in U$ o $x \in A \cap V$. En el primer caso tenemos que $x \in U \subseteq B$, así $x \in Int_\tau(B)$. En el segundo caso tenemos que si $x \in A \cap V \subseteq B \cap A$, entonces $x \in Int_{\tau|A}(B \cap A)$, pues $A \cap V \in \tau|A$. Por lo tanto $int_{\tau^*}(B) \subseteq Int_\tau(B) \cup Int_{\tau|A}(B \cap A)$.

($\supseteq$) Sea $x \in [Int_\tau(B) \cup Int_{\tau|A}(B \cap A)]$. Si $x \in Int_\tau(B)$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq B$, pero como $U \in \tau^*$, $x \in Int_{\tau^*}(B)$. Ahora si $x \in Int_{\tau|A}(B \cap A)$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \cap A \subseteq B \cap A \subseteq B$, dado que $V \cap A \in \tau^*$, entonces $x \in Int_{\tau^*}(B)$. Por lo tanto $Int_\tau(B) \cup Int_{\tau|A}(B \cap A) \subseteq Int_{\tau^*}(B)$.

b) Del inciso *a*) tenemos que: $cl_{\tau^*}(B) = X \backslash Int_{\tau^*}(X \backslash B) = X \backslash (Int_\tau(X \backslash B) \cup Int_{\tau|A}((X \backslash B) \cap A)) = (X \backslash Int_\tau(X \backslash B)) \cap (X \backslash Int_{\tau|A}((X \backslash B) \cap A)) = cl_\tau(B) \cap (X \backslash (Int_{\tau|A}(A \cap (X \backslash (B \cap A))))) = cl_\tau(B) \cap (X \backslash (Int_{\tau|A}(A) \cap Int_{\tau|A}(X \backslash (B \cap A)))) = cl_\tau(B) \cap ((X \backslash Int_{\tau|A}(A)) \cup (X \backslash Int_{\tau|A}(X \backslash (B \cap A)))) = cl_\tau(B) \cap ((X \backslash A) \cup cl_{\tau|A}(B \cap A)) = cl_\tau(B) \cap ((X \backslash A) \cup (A \cap cl_\tau(B \cap A)))$.

c) Demostremos $\tau|A = \tau^*|A$. ($\subseteq$) Sea $B \in \tau|A$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $B = A \cap V$. Entonces $B = (\emptyset \cup (A \cap V)) \cap A \in \tau^*|A$. Así $\tau|A \subseteq \tau^*|A$.

($\supseteq$) Sea $B \in \tau^*|A$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $B = A \cap (U \cup (A \cap V))$. Entonces $B = A \cap (U \cup (A \cap V)) = (A \cap U) \cup (A \cap (A \cap V)) = (A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) \in \tau|A$. Así, $B \in \tau|A$ y por lo tanto $\tau^*|A \subseteq \tau|A$.

d) Ahora veamos que $\tau|(X\backslash A) = \tau^*|(X\backslash A)$. Tenemos que $\tau^*|(X\backslash A) = \{(X\backslash A) \cap (U \cup (A \cap V)) : U, V \in \tau\} = \{((X\backslash A) \cap U) \cup ((X\backslash A) \cap (A \cap V)) : U, V \in \tau\} = \{((X\backslash A) \cap U) \cup \emptyset : U, V \in \tau\} = \{(X\backslash A) \cap U : U \in \tau\} = \tau|(X\backslash A)$.

e) Demostremos que $cl_\tau(B \cap A) = cl_{\tau^*}(B \cap A)$. Tenemos que $cl_{\tau^*}(B \cap A) = cl_\tau(B \cap A) \cap [(X\backslash A) \cup (A \cap cl_\tau(B \cap A))] = cl_\tau(B \cap A) \cap [((X\backslash A) \cup A) \cap ((X\backslash A) \cup cl_\tau(B \cap A))] = cl_\tau(B \cap A) \cap [X \cap ((X\backslash A) \cup cl_\tau(B \cap A))] = cl_\tau(B \cap A) \cap [(X\backslash A) \cup cl_\tau(B \cap A)] = cl_\tau(B \cap A)$.

f) Por e) tenemos que $cl_{\tau^*}(A) = cl_{\tau^*}(A \cap A) = cl_\tau(A \cap A) = cl_\tau(A)$. Entonces $cl_{\tau^*}(A) = cl_\tau A$. Así, A es cerrado en τ^* si y sólo si $A = cl_{\tau^*} A = cl_\tau A$ si y sólo si A es cerrado en τ.

g) Si F es cerrado en τ^*, entonces $F \cap A$ es cerrado en $(A, \tau^*|A)$ y $F \cap (X\backslash A)$ es cerrado en $(X\backslash A, \tau^*|(X\backslash A))$ y por los incisos c) y d), tenemos que $F \cap A$ es cerrado en $(A, \tau|A)$ y $F \cap (X\backslash A)$ es cerrado en $(X\backslash A, \tau|(X\backslash A))$. $\square$

2.2. Extensiones infinitas

Definición 2.2.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X : \alpha \in \Lambda\}$ una colección de subconjuntos de X. Sea τ^* la topología sobre X tal que:*

a) τ^* es más fina que $\tau(A_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

b) Si σ es una topología sobre X tal que, $\tau(A_\alpha) \subseteq \sigma$, entonces $\tau^* \subseteq \sigma$.

Notación $\tau^* = \tau(\mathcal{F})$.

Lema 2.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X : \alpha \in \Lambda\}$ una colección de subconjuntos de X. Si $\mathcal{F}$ es una topología sobre X, entonces $\tau(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\tau) = \tau \bigvee \mathcal{F}$, donde $\tau \bigvee \mathcal{F}$ es la topología sobre X la cual tiene como subbase a $\tau \cup \mathcal{F}$.*

Demostración. Demostremos que para cada $\tau^* \subseteq \mathcal{F}^*$, es decir, $\tau(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}(\tau)$. Basta demostrar que $\tau(A_\alpha) \subseteq \mathcal{F}^*$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Sea $B_\alpha \in \tau(A_\alpha)$, entonces existe U_α y $V_\alpha \in \tau$ tales que $B_\alpha = U_\alpha \cup (A_\alpha \cap V_\alpha)$. Ahora $(A_\alpha \cap V_\alpha) = \emptyset \cup (A_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathcal{F}(V_\alpha) \subseteq \mathcal{F}^*$y $U_\alpha = \emptyset \cup (U_\alpha \cap X) \in \mathcal{F}(U_\alpha) \subseteq \mathcal{F}^*$, entonces $(A_\alpha \cap V_\alpha)$, $U_\alpha \in \mathcal{F}^*$ pero $\mathcal{F}^*$ es topología, entonces $B_\alpha = U_\alpha \cup (A_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathcal{F}^*$. Así $\tau(A_\alpha) \subseteq \mathcal{F}^*$.

Ahora probemos que $\mathcal{F}^* \subseteq \tau^*$, es decir $\mathcal{F}(\tau) \subseteq \tau(\mathcal{F})$. Basta demostrar que $\mathcal{F}(U) \subseteq \tau^*$, para todo $U \in \tau$. Sea $B \in \mathcal{F}(U)$ entonces existen $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{F}$ tales que $B = A_\alpha \cup (U \cap A_\beta)$. Ahora $U \cap A_\beta = \emptyset \cup (A_\beta \cap U) \in \tau(A_\beta) \subseteq \tau^*$ y $A_\alpha = \emptyset \cup (A_\alpha \cap X) \in \tau(A_\alpha) \subseteq \tau^*$, entonces $U \cap A_\beta$, $A_\alpha \in \tau^*$. Pero τ^* es topología, entonces $B = A_\alpha \cup (U \cap A_\beta) \in \tau^*$, entonces $\mathcal{F}(U) \subseteq \tau^*$. Así tenemos que $\mathcal{F}^* = \tau^*$.

Por último demostremos que $\tau(\mathcal{F}) = \tau \bigvee \mathcal{F}$. Primero probemos que $\tau(\mathcal{F}) \subseteq \tau \bigvee \mathcal{F}$. Basta demostrar que $\tau(A_\alpha) \subseteq \tau \bigvee \mathcal{F}$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Sea $B \in \tau(A_\alpha)$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $B = U \cup (A_\alpha \cap V)$, pero $\{U\}$, $\{A_\alpha, V\} \subseteq S = \tau \cup \mathcal{F}$ entonces U, $(A_\alpha \cup V) \in S^* = \{\cap\mathcal{H} : \mathcal{H} \subset S \text{ y } \mid \mathcal{H} \mid < \omega\}$, donde S^* es la base que genera a la topología $\tau \bigvee \mathcal{F}$, entonces $B = U \cup (A_\alpha \cap V) \in \tau \bigvee \mathcal{F}$.

Ahora probemos que $\tau(\mathcal{F}) \supseteq \tau \bigvee \mathcal{F}$. Sea $W \in \tau \bigvee \mathcal{F}$, entonces $W = \cup G$, donde $G \subseteq S^*$. Sea $x \in W$, entonces existe $\cap\mathcal{H} \in G$ tal que $x \in \cap\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \subset S$ y $\mid \mathcal{H} \mid < \omega$

Así tenemos tres casos:

1. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\cap H \in \mathcal{F}$ ya que $\mathcal{F}$ es topología. Ahora como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^* = \tau^*$ se tiene que $\cap H \in \tau^*$. Así $x \in \cap\mathcal{H} \subseteq W$ y $\cap H \in \tau^*$.

2. Si $\mathcal{H} \subseteq \tau$, entonces $\cap H \in \tau$ ya que τ es topología. Ahora como $\tau \subseteq \tau^*$ se tiene que $\cap H \in \tau^*$. Así $x \in \cap\mathcal{H} \subseteq W$ y $\cap H \in \tau^*$.

3. Si $\mathcal{H}$ tiene al menos un elemento de τ y al menos un elemento de $\mathcal{F}$, entonces $\cap H = U \cap V$, donde $U \in \tau$ y $V \in \mathcal{F}$, entonces $\cap H = U \cap V \in \tau(V) \subseteq \tau(\mathcal{F}) = \tau^*$. Así $x \in \cap\mathcal{H} \subseteq W$ y $\cap H \in \tau^*$.

Así tenemos que para $x \in W$, existe $O \in \tau^*$ tal que $x \in O \subseteq W$. Por lo tanto $W \in \tau^*$. Entonces $\tau(\mathcal{F}) \supseteq \tau \bigvee \mathcal{F}$. □

Teorema 2.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topologíco. Sean $A, B \subseteq X$. Entonces $\tau^* = \tau(\{A, B\}) = (\tau(A))(B)$.*

Demostración. Demostremos la primera contención $\tau(\{A, B\}) \subseteq (\tau(A))(B)$. Basta con demostrar que $\tau(A) \subseteq (\tau(A))(B)$ y $\tau(B) \subseteq (\tau(A))(B)$. La primera $\tau(A) \subseteq (\tau(A))(B)$ es inmediata. Ahora la segunda $\tau(B) \subseteq (\tau(A))(B)$. Como $B \in (\tau(A))(B)$ y $\tau \subseteq \tau(A) \subseteq (\tau(A))(B)$, entonces $\tau(B) = \{U \cup (B \cap V) : U, V \in \tau\} \subseteq (\tau(A))(B)$ ya que $U, V, B \in (\tau(A))(B)$. Así tenemos que $\tau(A), \tau(B) \subseteq (\tau(A))(B)$ y por la definición de $\tau(\{A, B\})$, se tiene que $\tau(\{A, B\}) \subseteq (\tau(A))(B)$.

Ahora demostremos la otra contención $(\tau(A))(B) \subseteq \tau(\{A, B\})$. Se tiene que $B \in \tau(\{A, B\})$ y $\tau(A) \subseteq \tau(\{A, B\})$. Ahora sea $U \cup (B \cap V) \in \tau(A)(B)$, donde

$U, V \in \tau(A)$. Como $B, U, V \in \tau(\{A, B\})$, entonces $U \cup (B \cap V) \in \tau(\{A, B\})$. Así $(\tau(A))(B) \subseteq \tau(\{A, B\})$

$\square$

El resultado siguiente caracteriza cuando una topología es más fina que otra, utilizando extensiones infinitas.

Teorema 2.2.4. *Si* τ_1 *y* τ_2 *son dos topologías sobre* X*, entonces* $\tau_1 \subseteq \tau_2$ *si y sólo si existe una familia* $\mathcal{F} \subseteq X$ *tal que* $\tau_2 = \tau_1(\mathcal{F})$

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sea $\mathcal{F} = \tau_2$, entonces por el Lema 4.1.4, tenemos que $\tau_1(\mathcal{F}) = \tau_1(\tau_2) = \tau_2(\tau_1) = \tau_2 \bigvee \tau_1 = \tau_2$, la última igualdad es debido a que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y por lo tanto $\tau_1(\mathcal{F}) = \tau_2$.

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que existe una familia $\mathcal{F}$ de X tal que $\tau_2 = \tau_1(\mathcal{F})$, entonces $\tau_2 = \tau_1(\mathcal{F}) \supseteq \tau_1$. Así tenemos que $\tau_1 \supseteq \tau_2$. $\square$

CAPÍTULO 3

Preservación bajo extensiones simples

3.1. Preservando axiomas de separación

El presente capítulo tiene por objetivo ver cómo se comportan las extensiones simples respecto a los axiomas de separación. Para ser más precisos probamos que la extensión simple de un espacio T_0, T_1, T_2 comparte la misma propiedad, mientras que para el caso de los espacios regulares, completamente regulares y normales no se tiene la misma suerte.

Teorema 3.1.1. *Levine [8]. Sea (X, τ) un espacio topologíco. Sea $A \subseteq X$. Si (X, τ) es T_0 ó T_1 ó T_2, respectivamente entonces $(X, \tau(A))$ es T_0 ó T_1 ó T_2, respectivamente.*

Demostración. Hagamos la prueba para el caso T_2. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, y $\in V$ y $U \cap V = \emptyset$ (pues (X, τ) es T_2). Ahora como $\tau \subseteq \tau(A)$, entonces $U, V \in \tau(A)$. Por lo tanto $(X, \tau(A))$ es T_2. De manera análoga se demuestra para T_0 y T_1. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la extensión simple de un espacio regular, completamente regular y normal, no siempre tiene la misma propiedad. Antes que eso daremos el siguiente resultado, el cual utilizaremos más adelante.

Lema 3.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $A \subseteq X$ es denso en (X, τ), entonces A es denso en $(X, \tau(A))$.*

Demostración. Sea $W \subseteq X$ un abierto no vacío en $\tau(A)$, entonces $W = U \cup (V \cap A)$, para algunos $U, V \in \tau$. Dado que W es no vacío, entonces U es no vacío o $V \cap A$ es no vacío. Si ocurre que U es no vacío entonces $U \cap A$ es no vacío, pues A es denso en (X, τ), de donde que $W \cap A$ es no vacío. Ahora si $V \cap A \neq \emptyset$, entonces se sigue de inmediato que $W \cap A$ es no vacío. Por lo tanto A es denso en $(X, \tau(A))$.

$\square$

Ejemplo 3.1.3. Sea $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología usual. Es claro que este espacio es normal, completamente regular y regular. Ahora consideremos la extensión simple generada por $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{R}$ con la topología $\tau(\mathbb{Q})$. Veamos que este último no es regular y por ende tampoco será completamente regular, ni mucho menos normal.

Supongamos que $(\mathbb{R}, \tau(\mathbb{Q}))$ es regular. Como $\mathbb{Q}$ es un abierto en $(\mathbb{R}, \tau(\mathbb{Q}))$ y $2 \in \mathbb{Q}$, entonces debe existir un abierto $W \in \tau(\mathbb{Q})$, tal que $2 \in W$ y $cl_{\tau(\mathbb{Q})}W \subset \mathbb{Q}$. Por otro lado sabemos que $W = U \cup (V \cap \mathbb{Q})$, para algunos $U, V \in \tau$, ahora note que por la densidad de $\mathbb{I}$ y como $U \subset W \subset \mathbb{Q}$ se puede inferir que U es vacío, así que $W = V \cap \mathbb{Q}$, de esto último y por el Lema 3.1.2 se tiene que $cl_{\tau(\mathbb{Q})}W = cl_{\tau(\mathbb{Q})}V$, de donde $V \subset \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción pues V es no vacío e $\mathbb{I}$ es denso.

Ahora vamos a dar resultados que dan condiciones, algunas suficientes y otras necesarias y suficientes, para garantizar que el espacio $(X, \tau(A))$ herede regularidad, completamente regular y normalidad de (X, τ). Los siguientes tres resultados se encuentran en el artículo de Levine [8]. Para las demostraciones invitamos al lector a revisar el trabajo que se encuentra en J. Juan Angoa [7].

Teorema 3.1.4. *Si (X, τ) es un espacio regular, $A \notin \tau$ y $(X \setminus A) \in \tau$, entonces $(X, \tau(A))$ es regular.*

Teorema 3.1.5. *Si (X, τ) es un espacio completamente regular, $A \notin \tau$ y $(X \setminus A) \in \tau$, entonces $(X, \tau(A))$ es completamente regular.*

Teorema 3.1.6. *Sean (X, τ) un espacio topológico normal y $A \subseteq X$ con $A \notin \tau$ y $X \setminus A \in \tau$. Entonces $(X, \tau(A))$ es normal si y sólo si $(X \setminus A, \tau|(X \setminus A))$ es normal.*

En [1] J.R. Borges menciona que Norman Levine falla en dar las condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(X, \tau(A))$ herede regularidad, completamente regular y normalidad de (X, τ). Los resultados siguientes son una mejora a los dados por Levine, mismos que fueron dados por Borges.

Teorema 3.1.7. *([1], pág. 475). Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subseteq X$. Entonces $(X, \tau(A))$ no es regular si y sólo si existe $x_0 \in A$ tal que para todo $N \in \tau$, con $x_0 \in N$, se tiene que $N \cap (\overline{A} \setminus A) \neq \emptyset$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $(X, \tau(A))$ no es regular y para todo $x \in A$, existe una τ-vecindad N de x tal que $N \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$. Como $(X, \tau(A))$ no es regular entonces existen $y_0 \in X$ y $U \in \tau(A)$ tales que $y_0 \in U$ y para todo $V \in \tau(A)$ se tiene que $y_0 \in V \subseteq cl_{\tau(A)}(V) \nsubseteq U$. Ahora como $U \in \tau(A)$, existen O, $O' \in \tau$ tales que $U = O \cup (A \cap O')$.

Afirmación 1: $y_0 \notin O$. En efecto, supongamos que $y_0 \in O$. Ahora como (X, τ) es regular, entonces existe $W \in \tau$ tal que $y_0 \in W \subseteq \overline{W} \subseteq O$. Entonces por Teorema 2.1.3, se tiene que $cl_{\tau(A)}(W) = \overline{W} \cap ((X \setminus A) \cup (A \cap \overline{W \cap A})) \subseteq \overline{W}$, entonces $y_0 \in W \subseteq cl_{\tau(A)}(W) \subseteq \overline{W} \subseteq O \subseteq U$. Así $y_0 \in W \subseteq cl_{\tau(A)}(W) \subseteq U$, esto es una contradicción, pues $(X, \tau(A)$ no es regular en y_0.

Ahora como $y_0 \in U$ y $y_0 \notin O$, entonces $y_0 \in A \cap O'$. Asi que $y_0 \in A$, entonces existe $N_0 \in \tau$ tal que $y_0 \in N_0$ y $N_0 \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$.

Afirmación 2: $(X, \tau(A))$ es regular en y_0. Como $y_0 \in N_0 \cap O'$ y (X, τ) es regular, entonces existe $H \in \tau$ tal que $y_0 \in H \subseteq \overline{H} \subseteq N_0 \cap O'$.

Demostremos que: $\overline{H} \cap \overline{A} = \overline{H} \cap A$. La primera contención $\overline{H} \cap \overline{A} \supseteq \overline{H} \cap A$ es verdadera, ya que $\overline{H} \supseteq \overline{H}$ y $\overline{A} \supseteq A$, ahora demostremos la contención $\overline{H} \cap \overline{A} \subseteq \overline{H} \cap A$. Sea $z \in \overline{H} \cap \overline{A}$, así tenemos que $z \in \overline{H} \subseteq N_0 \cap O'$ y $z \in \overline{A}$, y de aquí tenemos que $z \in N_0$ y $z \in \overline{A}$. Ahora como $N_0 \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$, entonces $z \in \overline{A}$ y $z \notin (\overline{A} \setminus A)$, y por lo tanto $z \in \overline{H} \cap A$. Así $\overline{H} \cap \overline{A} \subseteq \overline{H} \cap A$.

Ahora haciendo $D = \emptyset \cup (A \cap H) \in \tau(A)$, tenemos que $cl_{\tau(A)}(D) = cl_{\tau(A)}(A \cap H) = \overline{A \cap H} \subseteq \overline{A} \cap \overline{H} = \overline{H} \cap A$. Así que $cl_{\tau(A)}(D) \subseteq \overline{H} \cap A$, luego $cl_{\tau(A)}(D) \subseteq \overline{H} \subseteq N \cap O' \subseteq O'$ y $cl_{\tau(A)}(D) \subseteq A$, entonces $cl_{\tau(A)}(D) \subseteq A \cap O' \subseteq U$, y por lo tanto $y_0 \in D \subseteq cl_{\tau(A)}(D) \subseteq U$.

Pero esto es una contradicción ya que $(X, \tau(A))$ no es regular en y_0.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $(X, \tau(A))$ es regular y existe $x_0 \in A$ tal que para todo $N \in \tau$ con $x_0 \in N$ se cumple que $N \cap (\overline{A} \setminus A) \neq \emptyset$.

Como $A \in \tau(A)$, por la regularidad de $(X, \tau(A))$, existe $U \in \tau(A)$ tal que $x_0 \in U \subseteq cl_{\tau(A)}(U) \subseteq A$. Como $U \in \tau(A)$, entonces existen $O, O' \in \tau$ tales que $U = O \cup (A \cap O')$. Entonces $x_0 \in O \cap A \subseteq U$ o $x_0 \in O' \cap A \subseteq U$. Así $x_0 \in W \cap A \subseteq U$ para algún $W \in \tau$. Ahora por la hipótesis existe $z \in W \cap (\overline{A} \setminus A)$. De aquí tenemos que $z \in \overline{W \cap A}$ ya que como $z \in W$ y $z \in (\overline{A} \setminus A) \subseteq \overline{A}$, se tiene que $z \in W$ y para todo $V \in \tau$ con $z \in V$ se cumple $V \cap A \neq \emptyset$. Entonces para todo $V \in \tau$ con $z \in V$ se cumple $V \cap (W \cap A) \neq \emptyset$. Por lo tanto $z \in \overline{W \cap A}$. Entonces se tiene que $z \in \overline{W \cap A} \subseteq \overline{U} = \overline{U \cap A} = cl_{\tau(A)}(U \cap A) = cl_{\tau(A)}(U) \subseteq A$. Por lo tanto $z \in A$, lo cual es una contradicción, ya que $z \notin A$. □

Lema 3.1.8. *Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces para toda τ-vecindad N se tienen que $N \cap Fr(A) \subseteq A \cap Fr(A)$ si y sólo si $N \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A)$.*

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sea $x \in N$ y supongamos que $x \in \overline{A} \setminus A$, entonces $x \in Fr(A)$, (pues $\overline{A} \setminus A \subseteq Fr(A)$). De todo lo anterior podemos decir que $x \in N \cap Fr(A)$, de donde que $x \in A \cap Fr(A)$, lo cual es una contradicción. $(\Longleftarrow)$ Sea

$x \in N \cap Fr(A)$ y supongamos que $x \notin A \cap Fr(A)$, entonces $x \notin A$, de donde que $x \in N \cap \overline{A} \setminus A$. Observe que ésto es una contradiccón, por lo tanto $x \in A \cap Fr(A)$

□

Lema 3.1.9. *Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subseteq X$. Si $(X, \tau(A))$ es regular, entonces para todo $x \in A \cap Fr(A)$ existe una τ-vecindad N de x tal que $N \cap Fr(A) \subseteq A \cap Fr(A)$.*

Demostración. Sea $x \in A \cap Fr(A)$, entonces en particular se tiene que $x \in A$. Ahora como $(X, \tau(A))$ es regular y por el Teorema 3.1.7 se tiene que existe una N, τ-vecindad de x, tal que $N \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$. De el lema 3.1.8 se sigue que $N \cap Fr(A) \subseteq A \cap Fr(A)$.

□

Demostremos dos resultados que mejora el Teorema 4.1.8 de Levin.

Teorema 3.1.10. *([1], pág. 476). Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subseteq X$. Entonces $(X, \tau(A))$ es regular, si y sólo si $(\overline{A} \setminus A)$ es τ-cerrado.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Demostremos que $X \setminus (\overline{A} \setminus A) \in \tau$. Sea $x \in X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. Como $X \setminus (\overline{A} \setminus A) = (X \setminus \overline{A} \setminus A) \cup A$, tenemos dos casos: Si $x \in (X \setminus \overline{A})$, entonces haciendo $U = X \setminus \overline{A}$ tenemos que $U \in \tau$ y $x \in U \subseteq X \setminus (X \setminus \overline{A})$. Ahora si $x \in A$ por el Teorema 3.1.7 existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq (X \setminus (\overline{A} \setminus A))$ por lo tanto $(\overline{A} \setminus A)$ es cerrado.

($\Longrightarrow$) Como$\overline{A} \setminus A$ es $\tau-$cerrado, entonces $X \setminus (\overline{A} \setminus A) \in \tau$. Ahora sea $x \in A$, entonces $x \in X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. Así existe un abierto N_0 tal que $N_0 \in \tau$ y $x \in N_0 \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. Por lo tanto cada $x \in A$ existe una $N_0 \in \tau$ y $x \in N_0 \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A)$, entonces por el Teorema 3.1.7 se tiene que la extensión simple $(X, \tau(A))$ es regular.

□

Definición 3.1.11. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

a) Decimos que A es R-abierto si $A \in \tau|_{\overline{A}}$.

b) Decimos que A es localmente cerrado, si A es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado, es decir $A = U \cap B$ donde $U \in \tau$ y B es cerrado en (X, τ).

Teorema 3.1.12. *Reynolds [10]. Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subseteq X$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) $(X, \tau(A))$ *es regular.*

b) A *es R-abierto.*

c) A *es localmente cerrado.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Por el Teorema 3.1.10, tenemos que $\overline{A} \setminus A$ es τ-cerrado, entonces $X \setminus (\overline{A} \setminus A) \in \tau$ y $X \setminus (\overline{A} \setminus A) = (X \setminus \overline{A}) \cup A$. Sea $U = X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. Entonces $U \cap \overline{A} = (X \setminus (\overline{A} \setminus A)) \cap \overline{A} = ((X \setminus \overline{A}) \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{A}) = A \cap \overline{A} = A$. Así $A = U \cap \overline{A}$, entonces $A \in \tau|\overline{A}$ y por lo tanto A es R-abierto.
$b) \Rightarrow c)$. Como A es R-abierto, entonces existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap \overline{A}$. Así A es localmente cerrado.
$c) \Rightarrow a)$. Sean $x_0 \in X$ y $B \in \tau(A)$ entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $x_0 \in B = U \cup (V \cap A)$. Tenemos dos casos:

1) Si $x_0 \in U$, entonces por la regularidad de (X, τ), existe $U' \in \tau$ tal que $x_0 \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq U \subseteq B$, entonces $x_0 \in U' \subseteq cl_{\tau(A)}(U') \subseteq \overline{U'} \subseteq B$. Así $(X, \tau(A))$ es regular en x_0.

2) Si $x_0 \in (V \cap A)$, como A es localmente cerrado, existen $W \in \tau$ y C τ-cerrado tales que $A = W \cap C$, entonces $x_0 \in V \cap A = V \cap (W \cap C) = (V \cap W) \cap C$, entonces $x_0 \in (V \cap W)$ y $x_0 \in C$. Ahora, como (X, τ) es regular, existe $W_0 \in \tau$ tal que $x_0 \in W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq V \cap W$. Como $W_0 \cap A \subseteq W_0$, entonces $\overline{W_0 \cap A} \subseteq \overline{W_0} \subseteq V \cap W$. Así $\overline{W_0 \cap A} \subseteq V \cap W$. Por otro lado tenemos que $W_0 \cap A = W_0 \cap (W \cap C) \subseteq C$ y por lo tanto $(\overline{W_0 \cap A}) \subseteq C$. Así $\overline{W_0 \cap A} \subseteq (V \cap W) \cap C = V \cap A$, entonces $x_0 \in W_0 \cap A \subseteq cl_{\tau(A)}(W_0 \cap A) \subseteq \overline{W_0 \cap A} \subseteq (V \cap A) \subseteq B$. Así $(X, \tau(A))$ es regular en x_0.

□

El siguiente resultado mejora el Teorema 4.1.9 de Levine.

Teorema 3.1.13. *([1], pág. 476). Sean (X, τ) un espacio completamente regular y $A \subseteq X$. Entonces $(X, \tau(A))$ es completamente regular, si y sólo si $(X, \tau(A))$ es regular.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es trivial, pues cualquier espacio completamente regular es regular.

$(\Leftarrow)$ Sean $x_0 \in X$ y $N \in \tau(A)$ tal que $x_0 \in N$. Tenemos que $N = U \cup (A \cap V)$ donde $U, V \in \tau$. Ahora, como $X = (X \setminus A) \cup Int(A) \cup Fr(A) \cap A$, entonces tenemos tres casos:

a) $x_0 \in X \setminus A$. Entonces $x_0 \in U \subseteq N$. Ahora, como (X, τ) es completamente regular, entonces existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$, tal que f es τ-continua (y por ende $\tau(A)$-continua), $f(x_0) = 0$ y para todo $y \in X \setminus U$ se tiene que $f(y) = 1$. Ahora, como $(X \setminus N) \subseteq (X \setminus U)$, entonces para todo $y \in X \setminus N$ se tiene que $f(y) = 1$. Así $(X, \tau(A))$ es completamente regular en x_0.

b) $x_0 \in Int(A)$. Entonces $x_0 \in Int(A) \cap U \subseteq N$ o $x_0 \in Int(A) \cap V \subseteq N$. Así $x_0 \in int(A) \cap B \subseteq N$ para algún $B \in \tau$. Por otro lado tenemos que (X, τ) es completamente regular, entonces existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que f es τ-continua (y por ende $\tau(A)$-continua), $f(x_0) = 0$ y para todo $y \in X \setminus (Int(A) \cap B)$ se tiene que $f(y) = 1$. Ahora como $(X \setminus N) \subseteq (X \setminus (Int(A) \cap B))$, entonces para todo $y \in X \setminus N$ se tiene que $f(y) = 1$. Por lo tanto $(X \setminus \tau(A))$ es completamente regular en x_0.

c) $x_0 \in A \cap Fr(A)$. Por el Lema 3.1.9, existe un $W \in \tau$ tal que $x_0 \in W$ y $W \cap Fr(A) \subseteq A \cap Fr(A)$, es decir $W \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. Por la regularidad de (X, τ), existe $D \in \tau$ tal que $x_0 \in D \subseteq \overline{D} \subseteq W$. Sea $B = D \cap N \in \tau(A)$, entonces $x_0 \in B$ y $B \cap Fr(A) \subseteq A \cap Fr(A)$ (es decir $B \subseteq Cl_{\tau(A)}(B) \subseteq (X \setminus (\overline{A} \setminus A)))$ y $B \subseteq N$. Sabemos que $(A, \tau|A) = (A, \tau(A)|A)$ y $(A, \tau|A)$ que es completamente regular, entonces $(A, \tau(A)|A)$ es completamente regular, entonces existe una función $f : A \to [0,1]$ tal que f es $\tau(A)|A$-continua, $f(x_0) = 0$ y para todo $y \in (A - (A \cap B))$ se tiene que $f(y) = 1$.

Ahora, definamos $F : X \to [0,1]$ como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Resulta que $F(x_0) = 0$. Por otro lado se tiene que $A \cap B \subseteq N$, entonces $X \setminus N \subseteq X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (A \setminus (A \cap B))$. También tenemos que para todo $y \in X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (A \setminus (A \cap B))$ se cumple $F(y) = 1$. Entonces para todo $y \in X \setminus N$ resulta que $F(y) = 1$.

Demostremos que F es $\tau(A)$-continua. Tenemos que $X = (X \setminus B) \cup B = (X \setminus Cl_{\tau(A)}(B)) \cup Fr_{\tau(A)}(B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (X \setminus Cl_{\tau(A)}(B)) \cup (Fr_{\tau(A)}(B) \cap (X \setminus A)) \cup (Fr_{\tau(A)}(B) \cap A) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Ahora sea $z \in X$, entonces tenemos cinco casos:

Caso 1) Si $z \in A \cap B \subseteq A$. Sea $H \in \tau_{[0,1]}$ tal que $F(z) = f(z) \in H$ y por la $\tau(A)|A$-continuidad de f, se tiene que $f^{-1}(H) \in \tau(A)|A$ y como $A \in \tau(A)$, entonces $O = f^{-1}(H) \in \tau(A)$. Entonces $z \in O \subseteq F^{-1}(H)$. Así F es $\tau(A)$-continua en todo punto $z \in A \cap B$

Caso 2) Si $z \in (B \setminus A)$. Como $z \in B \setminus A \subseteq X \setminus A$, entonces $F(z) = 1$. Sea $H \in \tau_{[0,1]}$(la topología usual de $[0,1]$) tal que $F(z) = 1 \in H$. Ahora como $z \in B \setminus A \subseteq B \subseteq W \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A)$, entonces $z \in X \setminus (\overline{A} \setminus A)$. De aquí tenemos que $z \notin \overline{A}$ y $z \notin A$ y por lo tanto $z \in X \setminus \overline{A}$. Sea $O = X \setminus \overline{A}$. Entonces $z \in O \subseteq X \setminus A \subseteq F^{-1}(H)$ y por lo tanto $z \in O \in F^{-1}(H)$. Así F es continua en todo punto $z \in B \setminus A$.

Caso 3) Si $z \in Fr_{\tau(A)}(B) \cap A$, es análogo al caso 1).

Caso 4) Si $z \in Fr_{\tau(A)}(B) \cap (X \setminus A)$. Como $z \in Fr_{\tau(A)}(B) \subseteq Cl_{\tau(A)}(B) \subseteq X \setminus (\overline{A} \setminus A))$ y $z \in (X \setminus A)$, entonces $z \notin (\overline{A} \setminus A))$ y $z \in (X \setminus A)$ y por lo tanto $z \in (X \setminus \overline{A})$. Entonces $z \in O = (X \setminus \overline{A}) \subseteq (X \setminus A)$. Sea $H \in \tau_{[0,1]}$ tal que $F(z) = 1 \in H$. Entonces $z \in O \subseteq X \setminus A \subseteq F^{-1}(H)$. Así F es continua en todo punto $z \in (Fr_{\tau(A)}(B) \cap (X \setminus A))$.

Caso 5) Si $z \in (X \setminus Cl_{\tau(A)}(B))$. Como $(X \setminus Cl_{\tau(A)}(B)) \subseteq (X \setminus B) \subseteq (X \setminus (A \cap B))$ y para todo $y \in (X \setminus (A \cap B))$ se tiene que $f(y) = 1$. Entonces $F(z) = 1$. Sea $H \in \tau_{[0,1]}$ tal que $1 \in H$, entonces $z \in O = (X \setminus Cl_{\tau(A)}(B)) \subseteq F^{-1}(H)$ y $O \in \tau(A)$. Así F es $\tau(A)$-continua en todo punto $z \in (X \setminus Cl_{\tau(A)}(B))$.

Por 1), 2), 3), 4) y 5) se tiene que F es continua en todo $z \in X$.

□

Demostremos el siguiente resultado que mejora el Teorema 4.1.10 de Levine.

Teorema 3.1.14. *([1], pág. 477). Sean (X, τ) un espacio normal y $A \subseteq X$. Entonces $(X, \tau(A))$ es un espacio normal si y sólo si $(X, \tau(A))$ es un espacio regular y $(X \setminus A, \tau|_{(X \setminus A)})$ es espacio normal.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como todo espacio normal es regular, entonces $(X, \tau(A))$ es regular. Ahora demostremos la otra propiedad. Tenemos que $X \setminus A$ es $\tau(A)$-cerrado, entonces $(X \setminus A)$ es normal con la topología $\tau(A)|_{(X \setminus A)}$. Por otro lado tenemos que $(X \setminus A, \tau|_{(X \setminus A)}) = (X \setminus A, \tau(A)|_{(X \setminus A)})$, entonces $X \setminus A$ es normal con la topología τ.

($\Longleftarrow$) Sean F y G dos subconjuntos $\tau(A)$-cerrados en X tales que $F \cap G = \emptyset$. Sean $F' = F \cap (\overline{A} \setminus A)$ y $G' = G \cap (\overline{A} \setminus A)$, entonces $F' \cap G' = \emptyset$. Ahora tenemos que $F' = F \cap (\overline{A} \setminus A) = cl_{\tau(A)}(F) \cap (\overline{A} \setminus A) = (\overline{F} \cap [(X \setminus A) \cup (A \cap (\overline{F \cap A})]) \cap (\overline{A} \setminus A) = \overline{F} \cap [(X \setminus A) \cap (\overline{A} \setminus A) \cup (A \cap (\overline{F \cap A})) \cap (\overline{A} \setminus A)] = \overline{F} \cap [(\overline{A} \setminus A) \cup \emptyset] = \overline{F} \cap (\overline{A} \setminus A)$, es decir F' es τ-cerrado. De la misma manera se demuestra que G' es τ-cerrado. Se tiene que $F' \cap \overline{G} = \emptyset$ y $G' \cap \overline{F} = \emptyset$ (ya que $F' \cap \overline{G} = (\overline{F} \cap (\overline{A} \setminus A)) \cap \overline{G} = (\overline{F} \cap (\overline{A} \setminus A)) \cap (\overline{A} \setminus A) \cap \overline{G}) = F' \cap G' = \emptyset$, entonces $F' \cap \overline{G} = \emptyset$. De igual forma se demuestra que $G' \cap \overline{F} = \emptyset$).

Sabemos que (X, τ) es normal, entonces existen W y $W' \in \tau$ tales que $W \cap W' = \emptyset$, $F' \subseteq W$ y $G' \subseteq W'$. Sean $B = W \cap (X \setminus \overline{G})$ y $B' = W' \cap (X \setminus \overline{F})$. Entonces $F' \subseteq B$, $G' \subseteq B'$ y $B \cap B' = \emptyset$. Otra vez por la normalidad de (X, τ), existen U y $V \in \tau$ tales que $F' \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B$ y $G' \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq B'$. Entonces $F' \subseteq U$, $G' \subseteq V$, $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, $\overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset$ y $\overline{V} \cap \overline{F} = \emptyset$.

Sean $F_* = (F \setminus A) \setminus U$ y $G_* = (G \setminus A) \setminus V$. Entonces $F_* = (F \setminus A) \setminus U = F \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus U) = cl_{\tau(A)}(F) \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus U) = (\overline{F} \cap [(X \setminus A) \cup A \cap (\overline{F \cap A})]) \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus U) = (\overline{F} \cap (X \setminus A) \cup \emptyset) \cap (X \setminus U) = \overline{F} \cap (X \setminus U) \cap (X \setminus A)$. Así F_* es $\tau|_{(X \setminus A)}$-cerrado. Análogamente se demuestra que G_* es $\tau|_{(X \setminus A)}$-cerrado.

Por la normalidad de $(X \setminus A, \tau|_{(X \setminus A)})$ existen U' y $V' \in \tau$ tales que $F_* \subseteq U' \cap (X \setminus A) = (U' \setminus A)$, $G_* \subseteq V' \cap (X \setminus A) = (V' \setminus A)$ y $(U' \setminus A) \cap (V' \setminus A) = \emptyset$. Sin embargo F_*, $G_* \subseteq (X \setminus \overline{A})$ (ya que si existiera un $z \in F_*$ tal que $z \notin (X \setminus \overline{A})$, entonces $z \in F \cap (\overline{A} \setminus A)$ y $z \notin U$, pero $F \cap (\overline{A} \setminus A) \subseteq U$, entonces $z \in U$ y $z \notin U$ tenemos una contradicción. Similarmente se demuestra $G_* \subseteq (X \setminus \overline{A})$).

Entonces $F_* \subseteq (U' \setminus A) \cap (X \setminus \overline{A}) = (U' \setminus \overline{A})$ y $G_* \subseteq (V' \setminus A) \cap (X \setminus \overline{A}) = (V' \setminus \overline{A})$. Por otro lado tenemos que $U' \setminus \overline{A} = U' \cap (X \setminus \overline{A})$ y $V' \setminus \overline{A} = V' \cap (X \setminus \overline{A})$. Así tenemos que $U' \setminus \overline{A}$ y $V' \setminus \overline{A}$ son τ-abiertos tales que $(U' \setminus \overline{A}) \cap (V' \setminus \overline{A}) = \emptyset$, $F_* \subseteq (U' \setminus \overline{A})$ y $G_* \subseteq (V' \setminus \overline{A})$.

Sean $U_* = U \cup (U' \setminus (\overline{A} \cup \overline{V}))$ y $V_* = V \cup (V' \setminus (\overline{A} \cup \overline{U}))$. Entonces $U_* = U \cup (U' \setminus (\overline{A} \cup \overline{V})) = U \cup (U' \cap (X \setminus \overline{A \cup V}))$ y $V_* = V \cup (V' \setminus (\overline{A} \cup \overline{U})) = V \cup (V' \cap (X \setminus \overline{A \cup U}))$. Así U_* y V_* son conjuntos τ-abiertos. Ahora tenemos que $U_* \cap V_* = (U \cup [U' \setminus \overline{A \cup V}]) \cap (V \cup [V' \setminus \overline{A \cup U}]) = (U \cup V) \cup (V \cap [U' \setminus \overline{A \cup V}]) \cup (U \cap [V' \setminus \overline{A \cup U}]) \cup ([U' \setminus \overline{A \cup V}] \cap [V' \setminus \overline{A \cup U}]) = \emptyset \cup (V \cap [U' \setminus \overline{A}] \cap (U' \setminus \overline{V})) \cup (U \cap [V' \setminus \overline{A}] \cap (V' \setminus \overline{U})) \cup ([U' \setminus \overline{A}] \cap (U' \setminus \overline{V})) \cap [V' \setminus \overline{A}] \cap (V' \setminus \overline{U}))) = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Por lo tanto $U_* \cap V_* = \emptyset$.

Ahora tenemos que $\overline{V} \cap (F \setminus A) = \emptyset$ (ya que $\overline{V} \cap \overline{F} = \emptyset$) y por lo tanto $(F \setminus A) \subseteq (X \setminus \overline{V})$. Ahora como $F_* = (F \setminus A) \setminus U \subseteq (U' \setminus \overline{A})$. Se tiene que $(F \setminus A) \subseteq U \cup (U' \setminus \overline{A})$. Así que $(F \setminus A) \subseteq (U \cup (U' \setminus \overline{A})) \cap (X \setminus \overline{V}) = U \cup ((U' \setminus \overline{A}) \cap (X \setminus \overline{V})) = U \cup ((U' \setminus \overline{A}) \cap U' \cap (X \setminus \overline{V})) = U \cup ((U' \setminus \overline{A}) \cap (U' \setminus \overline{V})) = U \cup (U' \setminus (\overline{A} \cup \overline{V})) = U_*$, entonces $(F \setminus A) \subseteq U_*$. Análogamente se prueba que $(G \setminus A) \subseteq V_*$. Por lo tanto U_* y V_* son conjuntos τ-abiertos tales que $U_* \cap V_* = \emptyset$, $(F \setminus A) \subseteq U_*$ y $(G \setminus A) \subseteq V_*$.

Sean $F_A = F \setminus U_*$ y $G_A = G \setminus V_*$. Entonces $F_A \cap G_A = (F \setminus U_*) \cap (G \setminus V_*) \subseteq F \cap G = \emptyset$. Así $F_A \cap G_A = \emptyset$. Ahora demostremos que F_A y G_A son τ-cerrados. Como $(F \setminus A) \subseteq U_*$, entonces $(X \setminus U_*) \subseteq X \setminus (F \setminus A) = (X \setminus F) \cup A$ Ahora $F_A = F \setminus U_* = F \cap (X \setminus U_*) \subseteq F \cap ((X \setminus F) \cup A) = F \cap A \subseteq A$. Así tenemos que $F_A \subseteq A$. Por otro lado tenemos $F_A = F \cap (X \setminus U_*) = cl_{\tau(A)}(F) \cap (X \setminus U_*)$ y por lo tanto F_A es $\tau(A)$-cerrado. Entonces $F_A = cl_{\tau(A)}(F_A) = cl_{\tau(A)}(F_A \cap A) = cl_\tau(F_A \cap A) = cl_\tau(F_A)$. Así $F_A = cl_\tau(F_A)$ y por lo tanto F_A es τ-cerrado. De la misma manera se demuestra que G_A es τ-cerrado.

De aquí tenemos que $(\overline{U} \cup F_A)$ y $(\overline{V} \cup G_A)$ son τ-cerrados. Verifiquemos $(\overline{U} \cup F_A) \cap (\overline{V} \cup G_A) = \emptyset$. En efecto $(\overline{U} \cup F_A) \cap (\overline{V} \cup G_A) = ((\overline{U} \cup F_A) \cap \overline{V}) \cup ((\overline{U} \cup F_A) \cap G_A) = ((\overline{U} \cap \overline{V}) \cup (F_A \cap \overline{V})) \cup ((\overline{U} \cap G_A) \cup (F_A \cap G_A)) = (\emptyset \cup (F_A \cap \overline{V})) \cup ((\overline{U} \cap G_A) \cup \emptyset) = (F_A \cap \overline{V}) \cup (\overline{U} \cap G_A) \subseteq (\overline{F} \cap \overline{V}) \cup (\overline{G} \cap \overline{U}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Así $(\overline{U} \cup F_A) \cap (\overline{V} \cup G_A) \subseteq \emptyset$ y de aquí $(\overline{U} \cup F_A) \cap (\overline{V} \cup G_A) = \emptyset$. Por la normalidad de (X, τ) existen M, $N \in \tau$ tales que $M \cap N = \emptyset$, $(\overline{U} \cup F_A) \subseteq M$ y $(\overline{V} \cup G_A) \subseteq N$.

Sean $O = U_* \cup (M \cap A)$ y $O' = V_* \cup (N \cap A)$. Entonces O, $O' \in \tau(A)$. Ahora verifiquemos que $O \cap O' = \emptyset$. En efecto $O \cap O' = (U_* \cup (M \cap A)) \cap (V_* \cup (N \cap A)) = (U_* \cap V_*) \cup ((M \cap A) \cap V_*) \cup (U_* \cap (N \cap A)) \cup ((M \cap A) \cap (N \cap A)) = (M \cap A \cap V_*) \cup (N \cap A \cap U_*) \subseteq (M \cap A \cap N) \cup (N \cap A \cap M) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. De aquí $O \cap O' = \emptyset$. Finalmente demostremos que $F \subseteq O$ y $G \subseteq O'$. Como $(F \setminus U_*) = F_A \subseteq O$, entonces $F = (F \setminus U_*) \cup (F \cap U_*) \subseteq O \cup U_* = O$. Así tenemos que $F \subseteq O$. Análogamente se demuestra que $G \subseteq O'$. Por lo tanto $(X, \tau(A))$ es normal.

$\square$

Teorema 3.1.15. *([8], pág. 23). Sean (X, τ) un espacio regular, y $A, B \subseteq X$. Las proposiciones siguientes son verdaderas:*

a) Si A es cerrado, entonces $(X, \tau(A))$ es regular.

b) Si A es denso en X y $A \notin \tau$, entonces $(X, \tau(A))$ no es regular.

c) Si $(X, \tau(A))$ y $(X, \tau(B))$ son regulares entonces $(X, \tau(A \cap B))$ es regular.

Demostración. a) Como A es cerrado, entonces $cl(A) - A = A - A = \emptyset$ es cerrado en X y por el Teorema 3.1.10, se tiene que $(X, \tau(A))$ es regular.

b) Supongamos que $(X, \tau(A))$ es regular. Como $A \notin \tau$, entonces $A \setminus Int(A) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in A \setminus Int(A)$, entonces existe $B \in \tau(A)$ tal que $x_0 \in B \subseteq cl_{\tau(A)}(B) \subseteq A$. Existen $U, V \in \tau$ tales que $B = U \cup (A \cap V)$. Si $x_0 \in U$, entonces $x_0 \in U \subseteq B \subseteq A$. Así $x_0 \in int(A)$, entonces $x_0 \in int(A)$ y $x_0 \notin int(A)$ lo cual nos lleva a una contradicción. Si $x_0 \in (A \cap V)$ se tiene que $(A \cap V) \subseteq cl_\tau(A \cap V) = cl_{\tau(A)}(A \cap V) \subseteq cl_{\tau(A)}(B) \subseteq A$, entonces $A \cap V \subseteq \overline{A \cap V} \subseteq A$. Como A es denso en X, se tiene que $\overline{A \cap V} = \overline{V}$ y por lo tanto $A \cap V \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$. De aquí se tiene que $x_0 \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A$. Entonces $x_0 \in int(A)$. Pero otra vez es una contradicción. Por lo tanto $(X, \tau(A))$ no es regular.

c) Como $(X, \tau(A))$ y $(X, \tau(B))$ son regulares entonces por Teorema 3.1.12. Se tiene que A y B son localmente cerrados, entonces existen $U, U' \in \tau, C, C'$ τ-cerrados tales que $A = U \cap C$ y $B = U' \cap C'$, entonces $A \cap B = ((U \cap C) \cap (U' \cap C')) = (U \cap U') \cap (C \cap C')$, pero $(U \cap U') \in \tau$ y $(C \cap C')$ es τ-cerrados, entonces $A \cap B$ es localmente cerrado otra vez por Teorema 3.1.12, $(X, \tau(A \cap B))$ es regular.

$\square$

3.2. Preservando compacidad y conexidad

Para el caso de la compacidad, las siguientes líneas muestran que la extensión simple de un espacio compacto no resulta ser compacta. Consideremos el espacio compacto (X, τ), donde $X = [0, 1]$ con su topología usual. Sea la extensión simple generada por $A = \{\frac{1}{3}\}$, es decir, $X = [0, 1]$ con la topología $\tau(A)$. Resulta que este último espacio no es compacto, para convencernos de esto supongamos lo contrario, es decir, que $(X, \tau(A))$ es compacto.

Como $X \setminus A$ es cerrado en $(X, \tau(A))$, entonces $X \setminus A$ es un subconjunto compacto de $(X, \tau(A))$ (ver (c) de Teorema 1.3.2), ahora por (d) del Teorema 2.1.3 tenemos que $X \setminus A$ es un subconjunto compacto de (X, τ) y por ende cerrado en(X, τ) (ver (d) del Teorema 1.3.2), lo cual es una contradicción. Así que $(X, \tau(A))$ no es compacto.

El siguiente Teorema aporta condiciones necesarias y suficientes para la compacidad en las extensiones simples.

Teorema 3.2.1. *([8], pág. 24). Sean (X, τ) un espacio compacto y $A \subseteq X$ con $A \notin \tau$. Entonces $(X, \tau(A))$ es compacto si y sólo si $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$ es compacto.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \bigwedge}$ una cubierta abierta de $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$, entonces $X \setminus A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \bigwedge} U_\alpha$ y para cada $\alpha \in \bigwedge$ se tiene que $U_\alpha = V_\alpha \cap (X \setminus A)$, donde $V_\alpha \in \tau$. Como $\tau \subseteq \tau(A)$, entonces $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \bigwedge} \cup \{A\}$ es una cubierta abierta de $(X, \tau(A))$ (ya que $X = (X \setminus A) \cup A \subseteq (\bigcup_{\alpha \in \bigwedge} V_\alpha) \cup A$). Como $(X, \tau(A))$ es compacto existe una subcolección finita que cubre a X de la forma $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, ..., V_{\alpha_n}\} \cup \{A\}$. Ahora para cada $x \in X \setminus A$, existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in V_{\alpha_i}$, entonces $x \in U_{\alpha_i} = V_{\alpha_i} \cap (X \setminus A)$ de aquí se tiene que $(X \setminus A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Así que $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$ es compacto.

$(\Leftarrow)$ Sea $\{B_\alpha | \alpha \in \bigwedge\}$ es una cubierta abierta de $(X, \tau(A))$, entonces para cada $\alpha \in \bigwedge$ se tiene que $B_\alpha = U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A)$, donde U_α, $V_\alpha \in \tau$ y $X = \bigcup_{\alpha \in \bigwedge} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \bigwedge} (U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A))$. Si $x \in X \setminus A$, existe $\alpha_0 \in \bigwedge$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$, entonces $\{U_\alpha | \alpha \in \bigwedge\}$ cubre a $X \setminus A$. Luego $\{U_\alpha \cap (X \setminus A) | \alpha \in \bigwedge\}$ es una cubierta abierta de $(X \setminus A, \tau|_{X\setminus A})$, el cual es compacto, entonces existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_i} \cap (X \setminus A) | i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ que cubre a $X \setminus A$. Es claro que la colección $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ cubre a $X \setminus A$. Por otro lado, la colección $\{U_\alpha \cup V_\alpha | \alpha \in \bigwedge\}$ cubre a (X, τ). Como (X, τ) es compacto existe una subcolección finita $\{U_{\beta_1} \cup V_{\beta_2}, U_{\beta_2} \cup V_{\beta_2}, ..., U_{\beta_m} \cup V_{\beta_m}\}$, donde $\beta_j \in \bigwedge$ para $j \in \{1, 2, .., m\}$ que cubre a (X, τ), es decir $X = \bigcup_{j=1}^m [U_{\beta_j} \cup V_{\beta_j}]$. De aquí $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m [U_{\beta_j} \cup (A \cap V_{\beta_j})]$. Finalmente tenemos que $X = (X \setminus A) \cup A = (\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \cup \bigcup_{j=1}^m [U_{\beta_j} \cup (A \cap V_{\beta_j})] = \bigcup_{i=1}^n [U_{\alpha_i} \cup (A \cap V_{\alpha_i})] \cup \bigcup_{j=1}^m [U_{\beta_j} \cup (A \cap V_{\beta_j})] = \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i} \cup \bigcup_{j=1}^m B_{\beta_j} = \bigcup_{k=1}^{n+m} B_{\alpha_i}$ con lo que concluimos que $(X, \tau(A))$ es compacto. □

Ahora es el turno de la conexidad. Primero que nada veamos que tampoco es preservada por extensiones simples. Para esto consideremos $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología usual, es bien conocido que tal espacio es conexo. Sin embargo, la extensión simple generada por cualquier cerrado (digamos $A = [0, 1]$), no es conexo, en otras palabras el espacio $(\mathbb{R}, \tau(A))$ no es conexo, pues en este último resulta que el subconjunto propio $[0, 1]$ es cerrado y abierto, lo cual es imposible que suceda en los conexos.

Si queremos remediar el hecho del ejemplo anterior, es decir, para garantizar que conexidad sea preservada por la extensión simple, una condición es pedir que el conjunto sobre el cual se haga la extensión sea conexo, denso y que no sea abierto. La anterior y otras condiciones se encuentran en los siguientes renglones.

Teorema 3.2.2. *([8], pág. 25) Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ con $A \notin \tau$. Si $(A, \tau|_A)$ es conexo y A es denso en (X, τ), entonces $(X, \tau(A))$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $(X, \tau(A))$ no es conexo, entonces existe $F \cup (F' \cap A), G \cup (G' \cap A) \in \tau(A)$ tales que $F \cup (F' \cap A) \neq \emptyset, G \cup (G' \cap A) \neq \emptyset, ((F \cup (F' \cap A)) \cap (G \cup (G' \cap A))) \neq \emptyset$y$X = F \cup (F' \cap A) \cup G \cup (G' \cap A)$.

Demostremos que $F \cup (F') \neq \emptyset$ y $G \cup G' \neq \emptyset$. En efecto, si $F \cup (F') = \emptyset$ entonces $F = F \setminus \emptyset = F \setminus (F \cup F') = (F \setminus F) \cap (F \setminus F') = \emptyset$. Así tenemos que $F = \emptyset$, de forma similar se tiene que $F' = \emptyset$. Entonces $F \cup (F' \cap A) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. De manera análoga se demuestra que $G \cup G' \neq \emptyset$.

Como A es denso en (X, τ), entonces $(F \cup F') \cap A \neq \emptyset$ y $(G \cup G') \cap A) \neq \emptyset$. Es claro que $((F \cup F') \cap A$ y $(G \cup G') \cap A$ son conjuntos abiertos en A. Por otro lado, tenemos que $[(F \cup F') \cap A] \cap [(G \cup G') \cap A] = [(F \cap A) \cup (F' \cap A)] \cap [G \cap A) \cup (G' \cap A)] \subseteq (F \cup (F' \cap A)) \cap (G \cup (G' \cap A)) = \emptyset$. Luego tenemos que $[(F \cup F') \cap A] \cap [(G \cup G') \cap A] = \emptyset$.

Ahora $(F \cup F') \cup (G \cup G') = (F \cup (F' \cup (F' \cap A))) \cup (G \cup (G' \cup (G' \cap A))) = (F \cup (F' \cap A)) \cup (G \cup (G' \cap A)) \cup (F' \cup G') = X \cup (F' \cup G') = X$, de aquí se tiene que $X = (F \cup F') \cup (G \cup G')$, entonces $A = X \cap A = ((FUF') \cap A) \cup ((G \cup G') \cap A)$. Entonces $((F \cup F') \cap A)$ y $((G \cup G') \cap A)$ es una separación de $(A, \tau|A)$ lo cual es una contradicción ya que $(A, \tau|A)$ es conexo.

□

Teorema 3.2.3. *([1], pág. 481) Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ tal que A no es τ-cerrado. Si A y $X \setminus A$ son conexos de (X, τ), entonces $(X, \tau(A))$ es conexo.*

Demostración. . Supongamos que $(X, \tau(A))$ no es conexo, entonces existen $B, D \in \tau(A)$ tales que $X = B \cup D$, $D \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$. Entonces B y D son $\tau(A)$-cerrados y $\tau(A)$-abiertos.

Demostremos que $B \neq A$ y $D \neq A$. Supongamos que $B = A$ o $D = A$. Si $B = A$, entonces A es $\tau(A)$-cerrado y por el Teorema 2.1.3 inciso (f) se tiene que A es τ-cerrado. Así que tenemos una contradicción con la hipótesis. De manera análoga llegamos a una contradicción con la hipótesis si $D = A$.

Ahora verifiquemos que ($A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap D \neq \emptyset$) o ($(X \setminus A) \cap B \neq \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap D \neq \emptyset$). En efecto supongamos que ($A \cap B = \emptyset$ o $A \cap D = \emptyset$) y ($(X \setminus A) \cap B = \emptyset$ o $(X \setminus A) \cap D = \emptyset$). Entonces ($A \cap B = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap B = \emptyset$) o ($A \cap D = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap B = \emptyset$) o ($A \cap B = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap D = \emptyset$) o ($A \cap D = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap D = \emptyset$). Tenemos cuatro casos:

a) Si ($A \cap B = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap B = \emptyset$), entonces $B = X \cap B = (A \cup (X \setminus A)) \cap B = (A \cap B) \cup ((X \setminus A) \cap B) = \emptyset$. De aquí tenemos que $B = \emptyset$. Lo cual es una contradicción.

b) Si ($A \cap D = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap B = \emptyset$), entonces $A \subseteq (X \setminus D) = B$ y $B \subseteq A$. Luego tenemos que $A = B$. Lo cual es una contradicción.

c) Si ($A \cap B = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap D = \emptyset$), entonces $A \subseteq (X \setminus B) = D$ y $D \subseteq A$. Luego tenemos que $A = D$. Lo cual es una contradicción.

d) Si ($A \cap D = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap D = \emptyset$), entonces $D = X \cap D = (A \cup (X \setminus A)) \cap D = (A \cap D) \cup ((X \setminus A) \cap D) = \emptyset$. De aquí tenemos que $D = \emptyset$. Lo cual es una contradicción.

Ahora, por Teorema 2.1.3 inciso (g), tenemos que $A \cap B$ y $A \cap D$ son cerrados en $(A, \tau|_A)$ y $((X \setminus A) \cap B)$ y $((X \setminus A) \cap D)$ son cerrados en $((X \setminus A), \tau|_{X \setminus A})$. Así tenemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap D)$, $A \cap D \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ y $(A \cap B) \cap (A \cap D) = \emptyset$, entonces $(A \cap B)$ y $(A \cap D)$ es una separación de A lo cual es una contradicción. Análogamente tenemos que $(X \setminus A) \cap B$ y $(X \setminus A) \cap D$ es una separación de $X \setminus A$ lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 3.2.4. *([1], pág. 482) Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ tal que A no es τ-cerrado. Si A y $X \setminus A$ son conexos de (X, τ) entonces $(X, \tau(A))$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) no es conexo, entonces existen U y $V \in \tau$ tales que $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V \neq \emptyset$ y $X = U \cup V$. Ahora como $\tau \subseteq \tau(A)$, entonces $U, V \in \tau(A)$. Así tenemos que U y V es una separación de $(X, \tau(A))$ luego, tenemos una contradicción con el Teorema 3.2.3. $\square$

CAPÍTULO 4

Extensiones simples y espacios maximales

4.1. Espacios maximales

Los conceptos de espacios R-Maximales y R-Minimales fueron introducidas por A. S Parhomenko [9] y por E. Hewitt [6]. El estudio de propiedades R-Minimales es más intensa que el estudio de R-Maximales. En este capítulo estudiamos algunas propiedades de R-Maximales usando el concepto de extensión simple (ver el artículo de Douglas [3]).

Definición 4.1.1. *Sean $(\Lambda, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $a_0 \in \Lambda$. Decimos que a_0 es un elemento maximal de Λ si para cada $a \in \Lambda : a_0 \leq a \Rightarrow a_0 = a$.*

Sean X un conjunto y R una propiedad topológica. El conjunto $R(X) = \{\tau : \tau \text{ es topología sobre } X \text{ y } (X, \tau) \text{ tiene la propiedad } R\}$ es parcialmente ordenado por la inclusión: $\tau \leq \tau^{'} \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau^{'}$.

Definición 4.1.2. *Sean X un conjunto y R una propiedad topológica. Un espacio topológico (X, τ) es R-maximal si τ es un elemento maximal de $R(X)$.*

Definición 4.1.3. *Sea R una propiedad topológica.*

a) R es contractivo si (X, τ) tiene la propiedad R y si $\tau^{'} \leq \tau$, entonces $(X, \tau^{'})$ tiene la propiedad R.

b) R es hereditariamente cerrado si todos los subconjuntos cerrados de un espacio (X, τ) con la propiedad R, tambíen tienen la propiedad R.

c) R es expansivo cerrado si (X, τ) tiene la propiedad R y $A \subseteq X$ tal que $(A, \tau|_A)$ tiene la propiedad R, entonces $(X, \tau(X \setminus A))$ tiene la propiedad R.

d) R es puntual si para cualquier espacio (X, τ) con la propiedad R, entonces para todo $x \in X$: $\{x\}$ tiene la propiedad R.

Teorema 4.1.4. *Sean X un conjunto y R una propiedad topológica tal que R es contractivo. Entonces un espacio (X, τ) es R-maximal si y sólo si para todo $A \subseteq X$ tal que $A \notin \tau$ se tiene que $(X, \tau(A))$ no tiene la propiedad R.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ) es R-maximal y que existe $A \subseteq X$ tal que $A \notin \tau$ y $(X, \tau(A))$ tiene la propiedad R. Así tenemos que $\tau(A) \in R(X)$, pero como $\tau \leq \tau(A)$ y τ es elemento maximal de $R(X)$, entonces $\tau = \tau(A)$. Por otro lado tenemos que $A \in \tau(A) = \tau$, entonces $A \in \tau$ lo cual es una contradición.

($\Leftarrow$) Supongamos que para todo $A \subseteq X$ tal que $A \notin \tau$ se tiene que $(X, \tau(A))$ no tiene la propiedad R y (X, τ) no es R-maximal. Entonces existe una topología $\tau^{'}$ sobre X tal que $\tau^{'} \in R(X)$ y $\tau < \tau^{'}$. Así existe un abierto $A \in \tau'$ tal que $A \notin \tau$, luego por hipótesis el espacio $(X, \tau(A))$ no tiene la propiedad R. Por otro lado como $A \in \tau'$, entonces $\tau < \tau(A) \leq \tau^{'}$. Ahora como R es contractivo y $(X, \tau^{'})$ tiene la propiedad R, entonces $(X, \tau(A))$ tiene la propiedad R, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 4.1.5. *Sea R una propiedad topológica tal que es contractivo, hereditariamente cerrado y expansivo cerrado. Un espacio topológico (X, τ) es R-maximal si y sólo si cualquier subconjunto A de X tal que $(A, \tau|_A)$ tiene la propiedad R es τ-cerrado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ) es R-maximal y existe un subconjunto A de X tal que $(A, \tau|_A)$ tiene la propiedad R y no es τ-cerrado. Como A no es τ-cerrado, entonces $X \setminus A \notin \tau$. Por otro lado, como R es expansivo cerrado, entonces $(X, \tau(X \setminus A))$ tiene la propiedad R. Así, existe un subconjunto $X \setminus A$ de X tal que $X \setminus A \notin \tau$ y $(X, \tau(X \setminus A))$ tiene la propiedad R. Ahora por el Teorema 4.1.4 se tiene que el espacio (X, τ) no es R-maximal, lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Supongamos que cualquier subconjunto A de X tal que $(A, \tau|_A)$ tiene la propiedad R es τ-cerrado y (X, τ) no es R-maximal. Entonces existe $\tau' \in R(X)$ tal que $\tau < \tau'$. Así, existe $A \in \tau'$ tal que $A \notin \tau$. Luego tenemos que $\tau < \tau(A) \leq \tau^{'}$. Como R es contractivo y (X, τ') tiene la propiedad R, entonces $(X, \tau(A))$ tiene la propiedad R. Ahora como $X \setminus A$ es $\tau(A)$-cerrado y R es hereditariamente cerrado, entonces $(X \setminus A, \tau(A)|_{X \setminus A})$ tiene la propiedad R, por el Teorema 2.1.3 inciso (d) se tiene que $(X \setminus A, \tau(A)|_{X \setminus A}) = (X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$. Así el espacio $(X \setminus A, \tau|A)$ tiene la propiedad R, luego por hipótesis se tiene que $X \setminus A$ es τ-cerrado. Así $A \in \tau$ lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 4.1.6. *Si R es una propiedad topológica tal que es contractivo, hereditariamente cerrado, expansivo cerrado y puntual, entonces cualquier espacio (X, τ) tal que es R-maximal es τ_1.*

Demostración. Sean (X, τ) tal que es R-maximal y $x \in X$. Ahora como R es puntual, entonces $\{x\}$ tiene la propiedad R y por el Teorema 4.1.5 se tiene que $\{x\}$ es τ-cerrado. Así (X, τ) es τ_1 $\square$

Teorema 4.1.7. *Sea R una propiedad topológica tal que es contractivo, hereditariamente cerrado y expansivo cerrado. Si (X, τ) es un espacio R-maximal, entonces los subconjuntos $A \subseteq X$ que tienen la propiedad R se tiene que $(A, \tau|_A)$ es R-maximal en $R(A)$.*

Demostración. Sean (X, τ) tal que es R-maximal y $A \subseteq X$ tal que $(A, \tau|A)$ tiene la propiedad R. Ahora sea $B \subseteq A$ tal que $(B, (\tau|_A)|_B)$ tiene la propiedad R, pero como $(B, (\tau|_A)|_B) = (B, \tau|_B)$ y entonces por Teorema 4.1.5 tenemos que B es τ-cerrado. Como $B = B \cap A$ luego B es $\tau|_A$-cerrado. Por lo tanto cualquier subconjunto B de A tal que $(B, (\tau|_A)|_B)$ tiene la propiedad R es $\tau|_A$-cerrado. Nuevamente por el Teorema 4.1.5 tenemos que $(A, \tau|_A)$ es R-maximal en $R(A)$, es decir $\tau|_A$ es un elemento maximal en $R(A)$. $\square$

Conclusiones

En el trabajo de tesis se estudiaron la preservación de propiedades como *Axiomas de Separación* y propiedades de tipo *Compacidad y Conexidad* usando extensiones simples de Norman Levine [8]: Se dice que una extensión σ de τ es una *extensión simple* de τ, si existe $A \subset X$ tal que $\tau \cup \{A\}$ es una subbase de σ. Lo anterior se derivó como resultado de abordar el problema:

Problema 1. Suponga que $\mathcal{P}$ es una propiedad y que σ es una extensión de τ. ¿Bajo qué condiciones se verifica que al tener (X, τ) la propiedad $\mathcal{P}$, ocurre que (X, σ) cumple $\mathcal{P}$?

Se probó que para los axiomas de separación: T_0, T_1, T_2, la extensión simple de un espacio con tales propiedades, siempre comparte la misma propiedad y que para el caso de la regularidad, completamente regular y normalidad, no siempre se tiene el mismo resultado, ver Ejemplo 3.1.3. Las condiciones que se requieren para garantizar la preservación de estos últimos están dados en los siguientes resultados mismos que fueron dados por Levine [8]:

Teorema 4.1.8. *Si (X, τ) es un espacio regular y $A \notin \tau$ y $(X \setminus A) \in \tau$, entonces $(X, \tau(A))$ es regular.*

Teorema 4.1.9. *Si (X, τ) es un espacio completamente regular, $A \notin \tau$ y $(X \setminus A) \in \tau$, entonces $(X, \tau(A))$ es completamente regular.*

Teorema 4.1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico normal y $A \subseteq X$ con $A \notin \tau$ y $X \setminus A \in \tau$. Entonces $(X, \tau(A))$ es normal si y solo si $(X \setminus A, \tau|(X \setminus A))$ es normal.*

En este mismo contexto se encontraron unas mejoras a las condiciones dadas por Levine, estos fueron dados por Borges los cuales dicen:

Teorema 4.1.11. *([1], pág. 476). Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subseteq X$. Entonces $(X, \tau(A))$ es regular, si y sólo si $(\overline{A} \setminus A)$ es τ-cerrado.*

Teorema 4.1.12. *([1], pág. 476). Sean* (X, τ) *un espacio completamente regular y* $A \subseteq X$*. Entonces* $(X, \tau(A))$ *es completamente regular, si y sólo si* $(X, \tau(A))$ *es regular.*

Teorema 4.1.13. *([1], pág. 477). Sean* (X, τ) *un espacio normal y* $A \subseteq X$*. Entonces* $(X, \tau(A))$ *es un espacio normal si y sólo si* $(X, \tau(A))$ *es un espacio regular y* $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$ *es un espacio normal.*

Por último, para el caso de la compacidad y conexidad también se observó que la extensión simple de un espacio con estas mismas características, no preserva tales propiedades. Los resultados: Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.2, Teorema 3.2.3, aportan condiciones para garantizar la preservación de las mismas.

Bibliografía

[1] Borges C.J.R. , *On extensions of topologies*, Canad. J. Math. 19(1996), 474-487

[2] Douglas E. Cameron, *Maximal and Minimal Topologies*, Transactions of the American Mathematical Society, Volumen 160, Octuber 1971.

[3] Douglas E. Cameron, *A Survey of Maximal Topological Spaces*, Topology proceedings, Volumen 2, 1977

[4] Engelking R. , *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[5] Hernández Hernández F. , *Teoría de conjuntos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, 1998.

[6] E. Hewitt, *A problem of set theoretic topology*, Duke Math. J. 10 (1943), 309-333.

[7] J. Juan Angoa, José Arrazola, Raúl Escobedo, ... , *Topología y Sistemas Dinamicos III*, Textos científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[8] Levine N., *Simple extensions of topologies*, Amer. Math . 71 (1964), 22-25.

[9] A. S. Parhomenko, *Uber eineindeutige stetige A bbildungen*, Mat. Sb. 5 (47) (1939), 197-210 (Russian) MR 1, 221.

[10] Reynolds D. F., *Simple extensions of topologies*, Topology (Proc. Ninth Annual Spring Topology Conf. , Memphis 1975), Lect. Notes in Pure and Appi. Math. , Vol. 24, Dekker, New York, 1976.

[11] Willard S., General Topology, Addison-Wesley, 1970.