

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

RECUPERACIÓN DE UNA MANCHA CIRCULAR CENTRADA EN EL  
ORIGEN EN EL PROBLEMA INVERSO DE CONDUCTIVIDADES

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA  
CARMINA SÁNCHEZ ZÁRATE

DIRECTORES DE TESIS  
DR. JOSÉ JACOBO OLIVEROS OLIVEROS  
DRA. MARÍA MONSERRAT MORÍN CASTILLO

PUEBLA, PUE.

NOVIEMBRE 2019



## Agradecimientos

Gracias Dr. Jacobo Oliveros y Dra. Monserrat Morín por haber llevado la dirección de este trabajo, por el tiempo y la paciencia al dar sus valiosas observaciones para su mejora. Al Dr. Escamilla, Dr. Mendoza y al Dr. Conde al ser los sinodales ya que han sido una gran guía, no solo al enriquecer esta tesis con sus opiniones y observaciones; sino también siendo mis profesores dentro de la licenciatura.

A mi familia que siempre ha estado conmigo: mi madre que nunca ha dejado de apoyarme, que con sus palabras de aliento me ha dado la fuerza para seguir adelante a pesar de todos mis desaciertos; a mi cómplice en la vida mi hermano, con quien he pasado innumerables aventuras y por supuesto a mi tío que ha alimentado con su forma de enseñar el gusto por cada tema.

Además, a los profesores a quienes en el transcurso de la carrera han dejado en mí grandes enseñanzas. En especial a la Dra. Araceli Juárez y al Dr. José Arrozola(DEP) por haber creído en mí y por haberme brindado su apoyo, ya que sin ello no habría podido concluir la carrera.

Y no podrían faltar mis amigos y compañeros en esta travesía que fue la carrera, ya que sin ellos no habría pasado los mejores años de mi vida.



# Introducción

Los modelos matemáticos son de gran interés en la solución de problemas en diferentes áreas, como por ejemplo en Geofísica, Astronomía, Medicina, Ingeniería, etc. La solución de los modelos matemáticos, puede ser interpretada en términos del fenómeno estudiado. Además, el modelo permite predecir el comportamiento del fenómeno en ciertas situaciones que no pueden ser medidas o exploradas o por el costo que generan. En particular, se usan modelos matemáticos para estudiar problemas que surgen cuando un objeto o proceso en sí mismo es inaccesible para la observación, pero se conocen los efectos producidos de la interacción de un sistema físico. En este tipo de problemas se pretende determinar las causas a partir de sus efectos. Tal tipo de problemas son denominados problemas inversos. En este trabajo se analiza un problema inverso el cual se modela por medio de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. Más precisamente, se trata de determinar una curva interior en un medio no homogéneo a partir de mediciones de potencial eléctrico medido en la frontera de dicho medio. Esa curva interior corresponde a una circunferencia en la que el radio es desconocido. Así, se trata de determinar el radio de dicha circunferencia a partir de las mediciones en la frontera del medio no homogéneo.

Por otra parte, el problema inverso de conductividades consiste en determinar la característica eléctrica definida en una región conductora a partir de los datos de Cauchy (potencial y su derivada normal) definidos sobre la frontera de dicha región. Para el caso de una inclusión, es decir, en el que la conductividad toma dos valores conocidos, se ha demostrado un resultado de la recuperación de la mancha interior, que corresponde a la inclusión, a partir de los datos de Cauchy [15]. Si la inclusión corresponde a un círculo centrado en el origen, el problema se reduce a recuperar el radio de dicho círculo. Más aún, cuando la región conductora corresponde a un círculo centrado en el origen, el problema puede ser analizado por medio de series de Fourier. Este problema tiene una relación muy estrecha con el problema de determinar la distribución de permitividades en un corte transversal de una tubería a partir de la medición de capacitancias en la región, las cuales se obtienen aplicando un voltaje sobre la frontera exterior de la mencionada tubería.

Este trabajo se divide de la siguiente manera: una introducción, dos capítulos, las conclusiones, un apéndice y la bibliografía.

En el primer capítulo se presenta un resumen de conceptos básicos y teoremas necesarios para el desarrollo de este trabajo. Se abordan elementos de problemas inversos, los conceptos de problema bien y mal planteado presentando algunos ejemplos, también se verán elementos de la Teoría de Operadores, Conceptos Básicos de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales: la ecuación de Laplace, serie de Fourier y su convergencia, las fórmulas de Green. Además se definen las funciones Armónicas y el Principio de Máximo y Mínimo, se presenta el concepto de solución clásica y débil de la ecuación de Laplace con condiciones en la frontera, teoremas sobre la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Laplace con condiciones en la frontera. Todos los resultados son conocidos y son tomados de [1],[2], [4] y [6].

En el segundo capítulo se muestra el modelo matemático para determinar el voltaje que es producido al aplicar una corriente eléctrica sobre la frontera exterior en forma de una tubería suponiendo conocidos los datos para así dar solución al problema directo; posteriormente se presenta la solución al problema inverso que consiste en determinar el radio de dicha tubería a partir de la solución del problema directo. Además como el problema de recuperación o problema inverso es mal planteado, se propone un ejemplo numérico para mostrarlo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Resumen de Conceptos</b>	<b>1</b>
1.1. Problemas Inversos y Problemas Mal Planteados . . . . .	1
1.2. Elementos de la teoría de operadores . . . . .	8
1.3. Traza de una función . . . . .	12
1.4. La ecuación de Laplace . . . . .	13
1.4.1. Ecuación de Laplace en dos y tres dimensiones . . . . .	13
1.5. Series de Fourier . . . . .	14
1.5.1. Convergencia de una serie de Fourier . . . . .	15
1.6. Fórmulas de Green . . . . .	17
1.7. Armónicos circulares . . . . .	17
1.8. Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno . . . . .	21
1.8.1. Existencia y unicidad de la solución débil en el caso de condiciones límites homogéneas . . . . .	22
1.8.2. Soluciones débiles para los problemas de contorno con condiciones límites no homogéneas . . . . .	24
<b>2. Planteamiento del Problema</b>	<b>29</b>
2.1. Planteamiento del Problema de Contorno . . . . .	30
2.1.1. Análisis de solubilidad . . . . .	31
2.2. Problema Directo . . . . .	33
2.3. Problema Inverso . . . . .	33
2.3.1. Ejemplo de Inestabilidad numérica del primer proble- ma inverso . . . . .	36
<b>Conclusión y Perspectivas</b>	<b>38</b>

<b>Apéndice</b>	<b>38</b>
<b>A. Solución del Problema de Contorno</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

**Recuperación de un Mancha circular  
centrada en el origen en el Problema inverso  
de Conductividades**

**Carmina Sánchez Zárate**

NOVIEMBRE 2019



# Capítulo 1

## Resumen de Conceptos

### 1.1. Problemas Inversos y Problemas Mal Planteados

Los **Problemas Directos** son aquellos en los que se tiene información sobre las causas que describen un proceso en un medio y la solución del problema nos conduce a describir el efecto producido por dichas causas.

Los **problemas inversos** son problemas que consisten en encontrar una propiedad desconocida de un objeto o de un medio, a partir de las observaciones de una respuesta de este objeto o medio de una señal de prueba. Por lo tanto, los problemas inversos proporcionan una base teórica para la detección lejana y la evaluación no destructiva o invasiva del medio.

#### Problemas Bien y Mal Planteados

Hadamard en 1932 clasificó los problemas físicos que son representados por un modelo matemático, en el siguiente sentido:

*Se dice que un problema es bien planteado o propiamente planteado si cumple:*

1. *Existe una solución del problema (existencia).*
2. *Existe a lo más una solución del problema (unicidad).*
3. *La solución depende continuamente de los datos de entrada (estabilidad).*

Este planteamiento se define para ecuaciones operacionales como sigue: Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados,  $A : X \rightarrow Y$  un operador continuo (lineal o no lineal), la ecuación operacional

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

se dice que es bien planteada si:

1. Para cada  $y$  en  $Y$  existe una solución en  $X$ .
2. Para cada  $y$  en  $Y$  la solución  $x$  es única en  $X$ .
3. Para cada solución  $x$ , el problema depende continuamente de los datos iniciales  $y$ .

Las ecuaciones que no satisfacen alguna de las condiciones anteriores son llamadas mal planteadas[11].

### Ejemplos de Problemas bien y mal planteados.

En los ejemplos siguientes se muestran ecuaciones operacionales bien planteadas y mal planteadas. Dichos ejemplos se tomaron de [1] y [6].

#### Ejemplo 1.1.

Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Consideremos el operador lineal  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A(x) = ax. \tag{1.2}$$

El operador  $A$  es inyectivo y sobreyectivo, por lo tanto  $A$  es biyectivo y su inverso está dado por:

$$A^{-1}(y) = a^{-1}y.$$

Ya que las funciones  $f$  de la forma  $f(x) = cx + d$  son continuas se tiene que  $A$  es continua y  $A^{-1}$  también es continua.

Otra forma de mostrar que el operador  $A$  es continuo es ver que,

$$|A(x)| = |ax| \leq |a| |x|$$

y tomando la acotación del operador como equivalencia del mismo. Se obtiene

$$\|A\| \leq |a|.$$

Más aún,  $|A(x)| = |ax| = |a| |x|$ , para  $x = 1$  se obtiene que

$$\|A\| = |a|.$$

Análogamente  $A^{-1}$  también es continuo. En este caso la ecuación operacional  $Ax = y$  es bien planteada.

**Ejemplo 1.2.**

Considérese la matriz  $\bar{A}$  dada por:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 + \sigma & 2 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

cuyo determinante es igual a  $-2\sigma$ , que puede ser muy pequeño si lo es  $\sigma$ . Consideremos el operador  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A(x) = \bar{A}x,$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$  y el lado derecho de la ecuación es el producto de una matriz por un vector. Para analizar las dos primeras condiciones para verificar si es un problema bien planteado, notemos primero que la inversa  $\bar{A}^{-1}$  de la matriz  $\bar{A}$  está dada por

$$\bar{A}^{-1} = -\frac{1}{2\sigma} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -(1 + \sigma) & 1 \end{pmatrix}.$$

Con la matriz  $\bar{A}^{-1}$  se puede hallar el operador inverso de  $A$ . De hecho  $\bar{A}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\bar{A}^{-1}(y) = \bar{A}^{-1}y.$$

Por lo tanto, las dos primeras condiciones se satisfacen.

Ahora analicemos la tercera condición. Veamos que  $A$  es un operador continuo.

Consideremos sobre  $\mathbb{R}^2$  la norma euclidiana, es decir, si  $x \in \mathbb{R}^2$  con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

entonces  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Notemos que  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , donde  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid T \text{ es lineal}\}$ . Consideremos la norma:

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|T(x)\| \leq M \|x\| \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ya que

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ (1 + \sigma)x_1 + 2x_2 \end{pmatrix},$$

hallamos que

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= x_1^2 (1 + (1 + \sigma)^2) + 8x_2^2 + 4x_1x_2(2 + \sigma) \\ &\leq x_1^2 |1 + (1 + \sigma)^2| + 8x_2^2 + 2|2 + \sigma|(x_1^2 + x_2^2) \\ &= x_1^2 (|1 + (1 + \sigma)^2| + 2|2 + \sigma|) + x_2^2 (8 + 2|2 + \sigma|) \\ &\leq M [x_1^2 + x_2^2] = M \|x\|^2, \end{aligned}$$

donde  $M = \max \{|1 + (1 + \sigma)^2| + 2|2 + \sigma|, (8 + 2|2 + \sigma|)\}$ .

De aquí se deduce que  $A$  es continuo. Análogamente el operador  $A^{-1}$  es continuo. Por lo tanto, la ecuación operacional  $Ax = y$ , es bien planteada.

Lo anterior es consecuencia de que en espacios normados de dimensión finita, todo operador lineal  $A$  es continuo y puede representarse por una matriz (fijando bases en los espacios en que actúa). Para ver esto, el operador  $A$  está representado por una matriz

$\bar{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrices de } n \times n \text{ con entradas reales}\}$ . Es decir con  $\bar{A}$  podemos definir el operador  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$Ax = \bar{A}x,$$

donde el lado derecho representa el producto usual de una matriz por un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\det \bar{A} \neq 0$ , entonces  $A$  es inyectivo ya que  $\text{Ker} A = \{0\}$ . Como se está trabajando sobre espacios de dimensión finita, se tiene que la inyectividad es equivalente a la sobreyectividad y de aquí se concluye que se satisfacen las dos primeras condiciones para ver que la ecuación operacional esté bien planteada.

De lo expuesto anteriormente, tanto  $A$  como su inverso (el cual existe porque  $A$  es biyectivo) son continuos. De esto concluimos que la ecuación operacional  $Ax = y$ , es bien planteada.

El ejemplo siguiente se tomó de [6].

**Ejemplo 1.3.**

Se muestra un problema mal planteado de acuerdo a la clasificación de Hadamard. Sea  $\Omega = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ , encontrar una solución  $z(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_y^1(\bar{\Omega})$  tal que  $z_x(x, y)$  y  $z_y(x, y)$  sean continuas para  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in [0, \infty]$ ;  $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2}$  son continuas con  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in [0, \infty]$ ;  $z(x, y)$  cumple con la ecuación de Laplace.

$$\Delta z(x, y) = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

y satisface las condiciones iniciales

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} z(x, 0) = u(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Supongamos que la función  $u(x) \in C((-\infty, \infty)) \cap B(\Omega)$ ; es decir,  $u(x)$  es continua y acotada para  $x \in (-\infty, \infty)$ . Notemos que en los conjuntos de funciones  $u(x)$  y  $z(x, y)$  tienen la métrica uniforme. Ahora, mostremos que este es un problema mal planteado. Consideremos el conjunto de funciones:

$$u_0(x) = 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Estas funciones determinan la correspondiente solución:

$$z_0(x, y) = 0, \quad z_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} ny.$$

Por lo tanto, para cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |u_n(x) - u_0(x)| \rightarrow 0$$

y

$$\sup_{-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty} |z_n(x, y) - z_0(x, y)| \rightarrow \infty,$$

como consecuencia tenemos que, la condición de dependencia continua de la solución de los datos iniciales falla, ya que el error en los datos de entrada tiende a cero mientras que el error en la solución tiende a infinito. Por lo tanto, es un problema mal planteado.

**Ejemplo 1.4.**

Consideremos la matriz

$$\bar{A}_o = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es singular y define al operador  $A_o : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de manera análoga a la matriz  $\bar{A}$  del segundo ejemplo. Para  $\bar{A}_o$  tenemos que

$$\ker \bar{A}_o = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\text{Im} \bar{A}_o = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto,  $A_o$  no es un operador inyectivo, ni sobreyectivo y se tiene que la ecuación

$$A_o x = y,$$

es mal planteada.

**Observaciones**

1) En el Ejemplo 1.1 se tiene que la ecuación operacional (1.2) es bien planteada de acuerdo con la definición. Pero si  $a = 10^{-7}$ ; observemos que, con  $y = 10^{-7}$  la ecuación tiene por solución a  $x = 1$ . Para  $\tilde{y} = 10^{-6}$  la solución es  $\tilde{x} = 10$ . Observemos que,  $|y - \tilde{y}| = 9 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ . Sin embargo  $|x - \tilde{x}| = 9$ . Esto nos dice que la ecuación presenta una inestabilidad numérica, debido a que dados  $y$  y  $\tilde{y}$  cercanos, se tiene que las soluciones  $x$  y  $\tilde{x}$  se encuentran alejadas.

2) Para el Ejemplo 1.2 se tiene que la ecuación operacional (1.3) es bien planteada, sin embargo, la función de  $\sigma \in \mathbb{R}$  puede presentar una *inestabilidad numérica*, debido a que la matriz con la que se obtiene la ecuación operacional tiene determinante cercano a cero. Recordemos que la matriz  $\bar{A}$  está dada por

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 + \sigma & 2 \end{pmatrix},$$

y que su determinante es  $(-2\sigma)$ , entonces el determinante de la matriz tiene valores cercanos a cero, si  $\sigma$  es cercano a cero. Veamos que si

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 + \sigma \end{pmatrix},$$

entonces la solución del sistema  $A(x) = \bar{A}x = y$ , está dada por  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Supóngase que en vez de conocer a  $y$ , se conoce una perturbación  $y^\delta$ , donde

$$y^\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta + \sigma \end{pmatrix}, \quad \|y - y^\delta\|_Y < \delta, \quad \delta > 0.$$

En este caso la solución está dada por

$$x^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\sigma} \\ -\frac{\delta}{2\sigma} \end{pmatrix}.$$

Observe que no necesariamente  $\|x - x^\delta\|_X$  es un valor pequeño; por ejemplo si  $\sigma = 0.0001$  y  $\delta = 0.01$ , la solución aproximada del sistema será

$$x^\delta = \begin{pmatrix} 101 \\ -49 \end{pmatrix},$$

de donde  $\|x - x^\delta\| = 111.8033$ . Esto nos dice que el sistema es numéricamente inestable y además  $\sigma$  es una característica del operador que indica si la ecuación operacional es inestable numéricamente. En las aplicaciones  $\delta$  puede representar el error que se comete en la medición y/o redondeo en cualquiera de sus formas, por lo que hay que considerar que en problemas concretos  $\delta$  es fijo. Como se comentó anteriormente en la Observación 2) esta inestabilidad numérica se presenta debido a que la matriz es casi singular. Esto puede interpretarse en el sentido de que el operador puede enviar a dos elementos cercanos en su dominio, a imágenes que pueden estar muy alejadas entre sí.

Cuando la matriz  $A$  con la que se define una ecuación operacional presenta inestabilidad numérica se dice que es **numéricamente mal condicionada** y el grado de mal condicionamiento se mide por medio del número  $Cond(A)$  llamado *número de condición* de  $A$ , que se define como:

$$Cond(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1},$$

donde  $\lambda_n$  y  $\lambda_1$  son los valores propios mayor y menor de  $A^t A$ .

En el caso de que  $\lambda_1$  sea muy cercano a cero, el número  $Cond(A)$  puede ser muy grande y mide cuanto se amplifican los errores cometidos en el lado derecho de la ecuación en las soluciones de la ecuación operacional.

## 1.2. Elementos de la teoría de operadores

**Definición 1.1.** *Un operador lineal entre los espacios normados  $X$  y  $Y$  es una aplicación  $A : X \rightarrow Y$  tal que:*

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi,$$

para toda  $\varphi, \psi \in X$  y toda  $\alpha, \beta \in K = \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C} \text{)}$ .

**Nota:** Si  $X$  es un espacio normado sobre el campo  $K$  y  $Y$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , el operador lineal  $A$  es llamado funcional lineal.

**Definición 1.2.** *Un operador lineal  $A : X \rightarrow Y$  de un espacio normado  $X$  en un espacio normado  $Y$  es llamado acotado si existe un número positivo  $M$  tal que:*

$$\|A(\varphi)\|_Y \leq M\|\varphi\|_X,$$

para toda  $\varphi \in X$ . Todo número  $M$  para el cual esta desigualdad se cumple es llamado una cota superior para el operador  $A$ .

Para un operador lineal  $A : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  espacios normados. Se tienen las siguientes equivalencias:

1.  $A$  es continuo.
2.  $A$  es continuo en un punto.
3.  $A$  es continuo en cero.
4. Existe una constante  $M > 0$  tal que :  $\|A(\varphi)\|_Y \leq M\|\varphi\|_X$  (es decir  $A$  es acotado).

Denotamos por  $L(X, Y)$  al conjunto de operadores lineales y continuos de  $X$  en  $Y$ . Si  $A \in L(X, Y)$ , entonces el número  $\|A\| := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A(\varphi)\|_Y = \sup_{\varphi \in X - \{0\}} \frac{\|A(\varphi)\|_Y}{\|\varphi\|_X} < \infty$  es una norma en  $L(X, Y)$  y el espacio normado así obtenido resulta ser un espacio de Banach si  $Y$  lo es.

Recordemos que un *espacio de Hilbert*  $H$  es un espacio normado completo con la norma inducida por el producto escalar

$$\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Un espacio lineal normado  $H$  es completo si toda sucesión de Cauchy de elementos de  $H$  converge a un elemento de  $H$ . Los espacios normados completos son llamados espacios de Banach.

El siguiente teorema de F. Riesz provee una representación para cada funcional lineal en un espacio de Hilbert  $H$ .

**Teorema 1.3.** *Todo funcional lineal en un espacio de Hilbert  $H$  puede ser expresado en la forma*

$$A(h) = \langle h, f \rangle,$$

donde  $f$  es un elemento de  $H$  que está únicamente determinado por el funcional  $A$ , más aún,

$$\|A\| = \|f\|.$$

**Definición 1.4.** *Sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal entre dos espacios de Banach. Diremos que  $A$  es un operador compacto o totalmente continuo si transforma cada subconjunto acotado de  $X$  en un subconjunto relativamente compacto de  $Y$ .*

De la definición se obtiene que todo operador compacto  $A$  es también continuo. Como  $Y$  es un espacio métrico, el operador  $A$  es compacto si y sólo si para cada sucesión acotada  $\{x_n\} \in X$  la sucesión  $\{A(x_n)\}$  tiene una subsucesión convergente en  $Y$ .

El conjunto  $K(X, Y)$  formado por todos los operadores compactos de  $X$  en  $Y$  es un subespacio cerrado de  $L(X, Y)$ .

En un espacio normado  $X$  de dimensión infinita el operador identidad  $I$

no es un operador compacto [12]. Como la composición de un operador continuo y un operador compacto es siempre un operador compacto se tiene que en un espacio normado de dimensión infinita si el operador inverso de un operador compacto existe este no puede ser continuo.

**Definición 1.5.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $A$  un operador de  $H$  en sí mismo. Se define el operador adjunto (conjugado) de  $A$  denotado por  $A^*$ , como el operador que actúa de  $H$  en sí mismo y satisface la identidad :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

para todo  $x, y \in H$ .  $A$  se llama autoadjunto si  $A^* = A$ .

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Las definiciones anteriores 1.1-1.2 dan una estructura de espacio lineal al conjunto  $C(\Omega, K)$  de funciones continuas  $f : \Omega \rightarrow K$ , bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar  $\alpha$ :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ con } x \in \Omega. \text{ Denotamos este espacio con } C(\Omega).$$

Para cada subconjunto  $\Omega$  abierto y acotado del espacio euclidiano  $\mathbb{R}$ , consideremos los siguientes clases de funciones.

$C(\overline{\Omega})$ : Funciones reales y continuas definidas sobre  $\overline{\Omega}$ .

$C^m(\overline{\Omega})$ : Funciones reales con derivadas continuas sobre  $\Omega$  hasta el orden  $m$ , todas las cuales pueden ser prolongadas continuamente a  $\overline{\Omega}$  ( $1 \leq \infty$ ).

Recordemos que el soporte de una función  $f$  definida sobre  $\Omega$  y con valores en  $C$  es el complemento en  $\Omega$  del mayor subconjunto abierto donde  $f$  se anula. Esto es, para  $f \in C(\Omega)$  el soporte de  $f$  es la cerradura en  $\Omega$  del conjunto  $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$  y denotamos esto con  $\text{supp } f$ .

Con  $C_0(\Omega)$  denotamos al subconjunto de aquellas funciones en  $C(\Omega)$  con soporte compacto. Se definen:

$$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega), \quad m \geq 1,$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Si  $f : A \rightarrow B$  y  $C \subset A$ , denotamos con  $f|_C$  la *restricción* de  $f$  a  $C$ . Así los siguientes conjuntos forman espacios lineales de funciones sobre  $\bar{\Omega}$ :

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{f|_{\bar{\Omega}} : f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)\},$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{f|_{\bar{\Omega}} : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Mediante  $L_p(\Omega)$  denotaremos la clase de todas las funciones reales medibles  $u(x)$  definidas sobre  $\Omega$  y tales que  $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$  [12].

Es conocido que la aplicación:

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

es una norma en  $L_p(\Omega)$  que provee a este conjunto de funciones de una estructura de espacio de Banach.

Diremos que la frontera  $\partial\Omega$  de la región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  pertenece a la clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), si para cualquier punto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe una vecindad  $V(x_0)$  de  $x_0$  y un homeomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow V(x_0) \cap \partial\Omega,$$

tal que  $f \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$ .

Diremos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto con frontera regular o suave, si  $\partial\Omega$  es una variedad de clase  $C^\infty$  y dimensión  $n - 1$  y además  $\Omega$  localmente se encuentra siempre a un mismo lado de  $\partial\Omega$ , es decir si  $\partial\Omega$  es una variedad orientable [10], [12].

Para cada  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  de enteros no negativos con  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ , denotamos con  $D^\alpha$  la derivada parcial:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $m \geq 0$  un entero. Como hemos mencionado  $C^m(\bar{\Omega})$  es el espacio lineal de restricciones a  $\bar{\Omega}$  de funciones de  $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ . Sobre  $C^m(\bar{\Omega})$  se define un producto escalar por:

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum \left\{ \int_{\Omega} D^{\alpha} f \cdot \overline{D^{\alpha} g} : |\alpha| \leq m \right\}.$$

Se llama *Espacio de Sobolev de orden  $m$*  y se denota por  $H^m(\Omega)$  al completamiento del espacio lineal  $C^m(\overline{\Omega})$  con la norma  $|\cdot|_{H^m(\Omega)}$ .  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert que es muy importante para lo que se estudia en este trabajo. La norma de  $H^0(\Omega)$  y la norma de  $L_2(\Omega)$  coinciden sobre  $C(\overline{\Omega})$  [4], [12].

### 1.3. Traza de una función

El material de esta sección puede consultarse en [4],[7], [12].

Consideremos una función  $u \in C(\overline{\Omega})$  donde  $\overline{\Omega}$  denota la cerradura de una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$ . Para la función  $u$  tiene sentido hablar de su restricción a  $\partial\Omega$ . Sin embargo, para funciones de  $L_2(\Omega)$ , (las cuales se consideran iguales si difieren en un conjunto de medida nula) no es posible hablar, en general de su restricción a  $\partial\Omega$ . Dado que en este trabajo hablamos de condiciones de contorno para elementos de  $L_2(\Omega)$ , es necesario recurrir a un concepto más general que el usualmente utilizado para la restricción de una función. Tal generalización es la **traza de una función**  $f$  y se denota como  $tr_{\partial\Omega}(f)$  o como  $f|_{\partial\Omega}$  que es la notación usual .

Considere el espacio  $H^1(\Omega)$  el cual es un subespacio de  $L_2(\Omega)$ . Dada  $f \in H^1(\Omega)$  se sabe que existe una sucesión de funciones  $f_n$  de  $C^1(\overline{\Omega})$  que converge en la norma de  $H^1(\Omega)$  hacia  $f$ . Mediante algunos estimados se prueba que la sucesión de las restricciones a  $\partial\Omega$  de las funciones  $f_n$  (tales restricciones existen y están bien definidas ya que cada  $f_n$  es continua) es de Cauchy en  $L_2(\partial\Omega)$ . En vista de que  $L_2(\partial\Omega)$  es completo, existe una función de  $L_2(\partial\Omega)$ , denotada  $f_{\partial\Omega}(x)$  tal que hacia ella converge la sucesión de las restricciones  $f_n|_{\partial\Omega}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego se demuestra que la función  $f_{\partial\Omega}(x) \in L_2(\partial\Omega)$  no depende de como se elija la sucesión  $f_n$ . Hecho esto la función  $f_{\partial\Omega}(x) \in L_2(\partial\Omega)$  se define como la traza a  $\partial\Omega$  de la función  $f \in H^1(\Omega)$ . Esto puede generalizarse a cualquier espacio  $H^m(\Omega)$  ya que si  $m, n$  son números naturales tales que  $n > m$ , entonces  $H^n(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ .

Por  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  entenderemos el espacio formado por las funciones que son trazas de funciones definidas sobre  $\Omega$ , es decir  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  si y sólo si existe  $F \in H^1(\Omega)$  tal que  $tr_{\partial\Omega}(F) = f$ . Con la norma en  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{\{F \in H^1(\Omega): F|_{\partial\Omega} = f\}} \|F\|_{H^1(\Omega)},$$

es un espacio de Banach [3].

## 1.4. La ecuación de Laplace

Sean  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $u$  una función en  $C^2(\Omega)$ . El operador de Laplace o Laplaciano se denota como  $\Delta$  y se define:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{para toda } u \in C^2(\Omega). \quad (1.4)$$

La ecuación de Laplace es la siguiente

$$\Delta u = 0. \quad (1.5)$$

El material de esta sección puede consultarse en [3], [9] y [12].

### 1.4.1. Ecuación de Laplace en dos y tres dimensiones

La ecuación  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  en dos variables es llamada la ecuación de Laplace en el plano, donde  $u(x, y)$  es una función en  $\mathbb{R}^2$ . La correspondiente ecuación en tres variables es:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1.6)$$

llamada la ecuación de Laplace en el espacio.

En el plano, la ecuación de Laplace en coordenadas polares se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1.7)$$

para  $r \neq 0$ , donde  $(u, \theta)$  son coordenadas polares de un punto.

En tres dimensiones, la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es de la siguiente manera:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

La información puede encontrarse en [7], [12].

## 1.5. Series de Fourier

Sea  $I$  un subintervalo de  $\mathbb{R}$ . Designamos por  $L_2(I)$  el conjunto de todas las funciones reales  $f$  que son medibles en  $I$  y tales que  $|f(x)|^2 \in L(I)$ . El producto escalar  $\langle f, g \rangle_{L_2(I)}$  definido por medio de

$$\langle f, g \rangle_{L_2(I)} = \int_I f(x)g(x)dx,$$

siempre existe. El número no negativo  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$  es la norma  $L_2$  de  $f$ .

**Definición 1.6.** Sea  $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$  una colección de funciones de  $L_2(I)$ . Si

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{L_2(I)} = 0, \quad \text{siempre que } m \neq n,$$

la colección  $S$  se llama un sistema ortogonal en  $I$ . Si además cada  $\varphi_n$  tiene norma 1, entonces  $S$  se llama ortonormal en  $I$ .

Es claro que todo sistema ortogonal para el que cada  $\|\varphi_n\|_{L_2(I)} \neq 0$  se puede convertir en un sistema ortonormal dividiendo cada  $\varphi_n$  por su norma.

Sea  $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$  un sistema ortonormal en  $I$  y sea

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x),$$

en donde  $b_0, b_1, \dots, b_n$  son números reales arbitrarios.

**Teorema 1.7.** Sea  $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$  un sistema ortonormal en  $I$ , y supongamos que  $f \in L_2(I)$ . Definimos dos sucesiones de funciones  $\{s_n\}$  y  $\{t_n\}$  en  $I$  como sigue:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \quad t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x),$$

en donde

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{L_2(I)} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

y  $b_0, b_1, \dots, b_n$  son números reales arbitrarios. Entonces para cada  $n$  tenemos

$$\|f - s_n\|_{L_2(I)} \leq \|f - t_n\|_{L_2(I)}$$

y la igualdad se verifica si, y sólo si,  $b_k = c_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Así que usando la norma  $\|f - t_n\|_{L_2(I)}$  para medir el error cometido al aproximar  $f$  por medio de  $t_n$ , es deseable elegir de manera única las constantes  $b_0, b_1, \dots, b_n$  de tal forma que el error sea lo menor posible.

**Definición 1.8.** Sea  $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$  un sistema ortonormal en  $I$  y supongamos que  $f \in L_2(I)$ . La notación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

significa que los números  $c_0, c_1, \dots$ , vienen dados por las fórmulas :

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle_{L_2(I)} = \int_I f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La serie anterior se llama serie de Fourier de  $f$  relativa a  $S$ , y los números  $c_0, c_1, \dots$ , se llaman coeficientes de Fourier de  $f$  relativos a  $S$ .

El material de esta sección puede encontrarse en [12] y [14].

### 1.5.1. Convergencia de una serie de Fourier

**Definición 1.9.** (Convergencia puntual) Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas en un conjunto  $A$ . Se dice que converge puntualmente a  $f$  si para cada  $x \in A$  y para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N(x, \epsilon) = N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N(x, \epsilon)$ , entonces  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ .

**Definición 1.10.** (Convergencia Uniforme) Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en un conjunto  $A$ . Se dice que converge uniformemente a  $f$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N(\epsilon) = N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N(\epsilon)$  y para todo  $x \in A$  se cumple  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

La condición de Cauchy para la convergencia uniforme

**Teorema 1.11.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas en un conjunto  $A$ . Existe una función  $f$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $A$  si, y sólo si, se satisface la siguiente condición (Condición de Cauchy): Para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $m > N$  y  $n > N$  implican  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ , para cada  $x$  en  $A$ .

Convergencia Uniforme de Series Infinitas de funciones

**Definición 1.12.** Dada una sucesión  $f_n$  de funciones definidas en un conjunto  $A$ , para cada  $x$  de  $A$  se considera

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), (k = 1, 2, \dots).$$

Si existe una función  $f$  tal que  $S_n \rightarrow f$  uniformemente en  $A$ , se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $A$  y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x), (\text{uniformemente en } A).$$

**Teorema 1.13.** (La condición de Cauchy para la convergencia uniforme de las series). La serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $A$  si, y sólo si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $n > N$  implica

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon,$$

para  $p = 1, 2, \dots$  para cada  $x \in A$ .

**Teorema 1.14.** Si los números  $c_k$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  con respecto a la sucesión ortonormal  $(\varphi_k(x))$ , entonces la serie  $\sum_0^{\infty} c_k^2$  es convergente y satisface la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int [f(x)]^2 dx.$$

Puesto que el  $k$ -ésimo término de una serie convergente debe tender hacia cero, el teorema anterior implica.

**Teorema 1.15.** Si los números  $c_k$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto a la sucesión ortonormal  $(\varphi_k)$  entonces  $c_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

El material de esta sección puede consultarse en [16].

## 1.6. Fórmulas de Green

Se definen los espacios:  $C^1(\bar{\Omega})$  como  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u$  es una vez diferenciable en  $\Omega$  y  $u$  se extiende continuamente a la frontera de  $\Omega$ .

$C^2(\bar{\Omega})$  como  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u$  es dos veces diferenciable en  $\Omega$  y tanto  $u$  como su primera derivada  $\nabla u$  se extienden continuamente a  $\partial\Omega$ .

Las siguientes igualdades se conocen como fórmulas de Green:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\partial\Omega.$$

Para  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ , la segunda Fórmula de Green está dada por:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - \nabla v \nabla u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\partial\Omega.$$

La información de esta sección puede encontrarse en [2].

## 1.7. Armónicos circulares

**Definición 1.16.** Una función  $u$  de valores reales dos veces continuamente diferenciable definida sobre un dominio  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , es llamada armónica si satisface la ecuación de Laplace dada en (1.5).

Notemos que  $\Delta$  es un operador lineal y su núcleo no está formado sólo por el cero (basta tomar la función  $u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ ). Esto muestra que existen funciones armónicas no nulas. La función

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & n = 3, \end{cases}$$

es llamada **Solución Fundamental** de la ecuación de Laplace. Para  $y \in \mathbb{R}^n$  fijo, esta función es armónica en  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ .

**Ejemplo 2.1.**

La función  $f(z) = z^2$  es analítica en  $\mathbb{C}$ . Las partes real e imaginaria  $Re(f) = x^2 - y^2$  y  $Im(f) = 2xy$  de la función  $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$  satisfacen la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 Re(f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Re(f)}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

y

$$\frac{\partial^2 Im(f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Im(f)}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0.$$

**Ejemplo 2.2.**

La función  $f(z) = \operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen} x \cosh z + i \cos x \operatorname{senh} y$  es analítica, donde  $Re(f) = \operatorname{sen} x \cosh z$  y  $Im(f) = \cos x \operatorname{senh} y$ , satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 Re(f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Re(f)}{\partial y^2} = (-\operatorname{sen} x \cosh y) + (\operatorname{sen} x \cosh y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Im(f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Im(f)}{\partial y^2} = (-\cos x \operatorname{senh} y) + (\cos x \operatorname{senh} y) = 0.$$

**El principio del Máximo y Mínimo para funciones armónicas**

**Teorema 1.17.** *Sea  $\Omega$  una región acotada de  $\mathbb{R}^n$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , entonces se cumplen*

(i) *Si  $\Delta u \geq 0$  en  $\Omega$ , entonces para toda  $x \in \Omega$ ,*

$$u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

(ii) *Si  $\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$ , entonces para toda  $x \in \Omega$ ,*

$$u(x) \geq \min_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

(iii) *Si  $\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$ , entonces para toda  $x \in \Omega$ ,*

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

**Corolario 1.18.** *Sea  $\Omega$  una región acotada con frontera  $S$ . Sea  $u$  una función armónica en  $\Omega$  y continua en  $\overline{\Omega}$ . Sea  $M$  una constante tal que  $|u(P)| \leq M$  para todos los puntos  $P$  en la frontera  $S$ . Entonces se cumple que  $|u(P)| \leq M$  en  $\overline{\Omega}$ . Si la desigualdad estricta se mantiene en  $S$ , la desigualdad estricta también debe mantenerse en  $\Omega$ . En particular, si  $u = 0$  para todos los puntos de  $S$ , entonces  $u = 0$  para todos los puntos en  $\overline{\Omega}$ .*

Una consecuencia del Principio del Máximo y Mínimo en funciones armónicas, es el siguiente teorema de unicidad.

**Teorema 1.19.** *(Unicidad) Sea  $\Omega$  un dominio acotado. Existe a lo más una solución del problema de Dirichlet*

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u = h(x), x \in \Omega,$$

$$u = f(x), x \in \partial\Omega.$$

**Demostración:** Supongamos que  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones del problema de Dirichlet. Entonces  $u = u_1 - u_2$  satisface las condiciones

$$\Delta u = 0, x \in \Omega,$$

$$u = 0, x \in \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo y mínimo,  $u \equiv 0$ , esto es,  $u_1 = u_2$  en  $\Omega$ .  $\diamond$

En una región circular la solución  $u$  en coordenadas polares del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace se puede buscar en la forma

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \sen k\theta) \\ + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k r^{-k} \cos k\theta + d_k r^{-k} \sen k\theta).$$

Ya que

$$\Delta u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \Delta (r^k \cos k\theta) + b_k \Delta (r^k \sen k\theta)]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} [c_k \Delta (r^{-k} \cos k\theta) + d_k \Delta (r^{-k} \sen k\theta)] = 0,$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace expresado en coordenadas polares definido en la ecuación (1.7). Notemos que cada término de la suma satisface la ecuación de Laplace.

$$\begin{aligned} \Delta (r^k \cos k\theta) &= \cos k\theta (k(k-1)r^{k-2}) + \frac{\cos k\theta}{r} (kr^{k-1}) + \frac{r^k}{r^2} (-k^2 \cos k\theta) \\ &= \cos k\theta (k(k-1)r^{k-2} + \cos k\theta (k)r^{k-2} + \cos k\theta (-k^2)r^{k-2}) \\ &= r^{k-2} \cos(k\theta) [k(k-1) + k - k^2] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta (r^k \sen k\theta) &= \sen k\theta (k(k-1)r^{k-2}) + \frac{\sen k\theta}{r} (kr^{k-1}) + \frac{r^k}{r^2} (-k^2 \sen k\theta) \\ &= \sen k\theta (k(k-1)r^{k-2} + \sen k\theta (k)r^{k-2} + \sen k\theta (-k^2)r^{k-2}) \\ &= r^{k-2} \sen(k\theta) [k(k-1) + k - k^2] = 0. \end{aligned}$$

En regiones que no contienen al cero, se puede demostrar que  $\Delta (r^{-k} \cos k\theta) = 0$  y  $\Delta (r^{-k} \sen k\theta) = 0$ .

Para el caso de una región circular que contiene al origen y ya que buscamos potenciales finitos, la solución debe buscarse en la forma:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \sen k\theta).$$

Para que  $u(r, \theta)$  sea la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en una región circular centrada en el origen y de radio  $R$ , debe satisfacer en la frontera que  $u(R, \theta) = f(\theta)$ , suponiendo que  $f$  puede ser expresada en la forma:

$$f(\theta) = \frac{f_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k^1 \cos k\theta + f_k^2 \sen k\theta)$$

e igualando los coeficientes con los de  $u(R, \theta)$ , se tiene que

$$a_0 = \frac{f_0^1}{2}, \quad a_k = \frac{f_k^1}{R^k}, \quad b_k = \frac{f_k^2}{R^k},$$

de donde la solución  $u(r, \theta)$  para el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace es

$$u(r, \theta) = \frac{f_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \left(\frac{r}{R}\right)^k \sen k\theta.$$

## 1.8 Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno 21

Para el caso de una región anular circular la solución debe buscarse en la forma:

$$u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k + c_k r^{-k}) \cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k r^k + d_k r^{-k}) \operatorname{sen} k\theta,$$

ya que en este caso las funciones  $\ln(r)$  y  $r^{-k}$  están definidas, es decir, toman un valor finito.

*Lo anterior se emplea para buscar la solución del problema de valores en la frontera que se utiliza para estudiar el problema de identificación: (ver [4] y [12]).*

## 1.8. Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno

Sea  $\Omega$  un dominio  $n$ -dimensional y sea una ecuación elíptica

$$L(u) = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \quad (1.8)$$

cuyos coeficientes son de valores reales y satisfacen las condiciones  $a(x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $k(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $k(x) \geq k_0 > 0$  para toda  $x \in \Omega$ . La función  $u(x)$  y el término independiente  $f(x)$  de la ecuación (hablando en general) pueden ser de valores complejos.

La función  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  se llama *solución clásica del primer problema de contorno o del problema de Dirichlet* para la ecuación (1.8), si en  $\Omega$  ella satisface la ecuación (1.8) y en el contorno  $\partial\Omega$ , satisface la condición

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad (1.9)$$

donde  $\varphi(x)$  es una función prefijada.

La función  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  se llama *solución clásica del tercer problema de contorno* para la ecuación (1.8), si en  $\Omega$  dicha función satisface la ecuación (1.8), y en el contorno  $\partial\Omega$ , satisface la condición

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \psi(x), \quad (1.10)$$

para  $\sigma(x) \in C(\partial\Omega)$  y  $\psi(x)$  funciones prefijadas. Convengamos en considerar  $\sigma(x) > 0$ .

La función  $u \in H^1(\Omega)$  se llama *solución débil* del problema (1.8), (1.9) para  $f \in L_2(\Omega)$ , si ella satisface la identidad

$$\int_{\Omega} (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx = - \int_{\Omega} f\bar{v} dx, \quad (1.11)$$

para toda  $v \in H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$  y también satisface la condición (1.9). En la condición límite (1.9) la igualdad se entiende como igualdad de elementos pertenecientes a  $L_2(\partial\Omega)$ , siendo  $u|_{\partial\Omega}$  una traza de la función  $u$ .

Una función  $u \in H^1(\Omega)$  se denomina *solución débil del tercer problema de contorno para la ecuación* (1.8), siendo  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\psi \in L_2(\partial\Omega)$ , si para ella se cumple la identidad

$$\int_{\Omega} (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u\bar{v} ds = - \int_{\Omega} f\bar{v} dx + \int_{\partial\Omega} k\psi u\bar{v} ds, \quad (1.12)$$

para cualquiera que sea  $v \in H^1(\Omega)$ . Para más información se puede consultar en [12].

### 1.8.1. Existencia y unicidad de la solución débil en el caso de condiciones límites homogéneas

La investigación de las soluciones clásicas de los problemas de contorno es una tarea mucho más complicada y es natural dividirla en problemas más simples: primero construir una solución débil y luego, al establecer (admitiendo ciertas suposiciones) su suavidad, mostrar que es una solución clásica. La demostración de suavidad de la solución débil será llevada a cabo al establecer la existencia y unicidad de la solución débil cuando las condiciones límites son homogéneas (es decir, las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son iguales a cero).

Por definición, la solución débil del problema de contorno (1.8), (1.9) para  $\varphi = 0$ , es una función  $u$  en  $H_0^1(\Omega)$ , que satisface para toda  $v \in H_0^1(\Omega)$  la identidad integral

$$\int_{\Omega} (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx = - \int_{\Omega} f\bar{v} dx.$$

## 1.8 Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno 23

La solución débil del tercer problema de contorno (1.8), (1.10) para  $\psi = 0$  es una función  $u \in H^1(\Omega)$ , que para toda  $v \in H^1(\Omega)$  satisface la identidad integral

$$\int_{\Omega} (k \nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u \bar{v} ds = - \int_{\Omega} f \bar{v} dx. \quad (1.13)$$

Como en el espacio  $H_0^1(\Omega)$  se puede introducir un producto escalar que sea equivalente al producto ordinario ( $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} + u\bar{v}) dx$ ) que toma la forma:

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (k \nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx,$$

entonces (1.11) se puede escribir de la siguiente forma

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = - \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (1.14)$$

Para una  $f$  fija de  $L_2(\Omega)$  el producto de la derecha en (1.14) es un funcional lineal definida en  $H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$|\langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donde la constante positiva  $C$  no depende de  $f$  y  $v$ . De esta desigualdad se deduce que esta funcional es acotada y su norma no supera a  $C \|f\|_{L_2(\Omega)}$ . De acuerdo con el teorema de Riesz [9], en  $H_0^1(\Omega)$  existe una función  $F_1$  para la cual  $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \langle F_1, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$  cualquiera que sea  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Tal función es única y satisface la desigualdad  $\|F_1\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}$ . Por consiguiente, en  $H_0^1(\Omega)$  existe una única función  $u = F_1$  que satisface la identidad (1.14).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 1.20.** *Cuando  $a(x) \geq 0$  en  $\Omega$ , para toda  $f \in L_2(\Omega)$ , existe una sola solución débil del problema (1.8), (1.9) (para  $\varphi = 0$ ). Con ello,*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

donde la constante positiva  $C$  no depende de  $f$ .

Para la condición de contorno (1.10). Si  $a(x) \geq 0$  en  $\Omega$  y por lo menos una de las funciones  $a(x)$  o  $\sigma(x)$  no es idénticamente nula, entonces se puede introducir el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (k \nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u \bar{v} ds,$$

que es equivalente al producto ordinario.

Por consiguiente se puede escribir (1.13) en la forma

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = - \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (1.15)$$

Para una  $f \in L_2(\Omega)$  fijada, la funcional  $\langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}$  lineal, respecto a  $v \in H^1(\Omega)$ , es acotada:

$$|\langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

donde la constante  $C$  mayor que cero no depende de  $f$  ni de  $v$ , entonces según el teorema de Riesz, en  $H^1(\Omega)$  existe una función  $F_2$  para el cual  $\langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle F_2, v \rangle_{H^1(\Omega)}$  cualquiera que sea  $v \in H^1(\Omega)$ , con la particularidad de que esta función es única y  $\|F_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}$ . Por consiguiente, en  $H_0^1(\Omega)$  existe la única función  $u = F_2$  que satisface la identidad (1.15).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 1.21.** *Cuando  $a(x) \geq 0$  en  $\Omega$  y por lo menos una de las funciones  $a(x)$  o  $\sigma(x)$  no es idénticamente nula, entonces para toda  $f \in L_2(\Omega)$  también existe una sola solución débil del problema (1.8), (1.10) (para  $\psi = 0$ ). Con ello,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

donde la constante positiva  $C$  no depende de  $f$ .

### 1.8.2. Soluciones débiles para los problemas de contorno con condiciones límites no homogéneas

Recordemos que se llama solución débil del problema (1.8), (1.9) a una función  $u$  de  $H^1(\Omega)$  que satisface la identidad integral (1.11) y cuya traza en el contorno  $\partial\Omega$  es igual a la función límite o condición de contorno  $\varphi$ .

De la definición de solución débil se deduce una condición natural para la función límite  $\varphi$ . Se debe exigir que ésta pueda ser prolongada al dominio  $\Omega$  mediante una función  $\Phi$  del espacio  $H^1(\Omega)$ . En lo sucesivo vamos a suponer que esta condición se cumple. En caso contrario la solución del problema (1.8), (1.9) no puede existir. De la definición de trazas de funciones de  $H^1(\Omega)$  se infiere que  $\varphi$  debe pertenecer al espacio  $L_2(\partial\Omega)$ . Pero esto no es suficiente para que  $\varphi$  pueda ser prolongada en  $\Omega$  mediante una función de

## 1.8 Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno 25

$H^1(\Omega)$ ; más aún, para ello es insuficiente la continuidad de esta función, más adelante se obtiene una condición necesaria y suficiente para el caso de una circunferencia.

Señalemos que cuando  $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ , la prolongación citada existe en  $C^1(\bar{\Omega})$  y con mayor razón, de  $H^1(\Omega)$  para la cual  $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$ , con la particularidad de que tiene lugar la desigualdad

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|\varphi\|_{C^1(\partial\Omega)},$$

donde la constante  $C_1$  mayor que cero no depende de  $\varphi$  ([12], p. 215).

Así que, supongamos que existe una función  $\Phi$  en  $H^1(\Omega)$  para la cual  $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$ . Empleando la sustitución  $u - \Phi = w$ , el problema de la búsqueda de la solución débil  $u$  se reduce a la búsqueda de una función  $w \in H_0^1$  tal que para toda  $v \in H_0^1$  satisface la identidad integral

$$\int_{\Omega} (k\nabla w \nabla \bar{v} + aw\bar{v}) dx = - \int_{\Omega} (k\nabla \Phi \nabla \bar{v} + a\Phi\bar{v} + f\bar{v}) dx. \quad (1.16)$$

Se demuestra, utilizando el teorema de Riesz, la existencia de una única función  $w \in H_0^1$  que satisface la identidad (1.16), con la particularidad de que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \left( \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

En este caso  $u = w + \Phi$  es la solución débil del problema (1.8)-(1.9). Además, tiene lugar la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \left( \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

donde  $C_3$  mayor que cero, no depende de  $f$  ni de  $\Phi$ , y por lo tanto, también la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L_2(\Omega)} + \inf_{\Phi \in H^1(\Omega), \Phi|_{\partial\Omega} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (1.17)$$

donde la constante  $C$  no depende de  $f$  ni de  $\Phi$ . Si la función límite  $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ , de las desigualdades anteriores se desprende la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^1(\partial\Omega)} \right). \quad (1.18)$$

Mostremos que la solución encontrada es única. En efecto, si existe otra solución débil  $\hat{u}$ , la diferencia  $\tilde{u} = u - \hat{u}$  será una función de  $H_0^1(\Omega)$  que,

en virtud de (1.11), satisface la identidad integral  $\int_{\Omega}(k\nabla\tilde{u}\nabla\bar{v} + a\tilde{u}\bar{v}dx) = 0$  cualquiera que sea  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Como el primer miembro de esta igualdad representa un producto escalar en  $H_0^1(\Omega)$  de las funciones  $\tilde{u}$  y  $v$ , entonces  $\tilde{u} = 0$ .

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

**Teorema 1.22.** *Si  $a(x) \geq 0$  en  $\Omega$  y la función  $\varphi$  es un valor límite de cierta función de  $H^1(\Omega)$ , entonces el problema (1.8)-(1.9) admite a  $u = w + \Phi$  como la única solución débil. Esta solución satisface la desigualdad (1.17) y, para  $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ , satisface la desigualdad (1.18).*

Para el problema de las ecuaciones (1.8)-(1.10), una función  $u$  de  $H^1(\Omega)$  se denomina solución débil del problema citado, si satisface la identidad integral (1.12) para cualquier  $v \in H^1(\Omega)$ . Se supone que la función límite en este caso, pertenece a  $L_2(\Omega)$ .

**Teorema 1.23.** *Si  $a(x) \geq 0$  en  $\Omega$  y (o)  $a(x) \neq 0$  en  $\Omega$ , o bien  $\sigma(x) \neq 0$  en  $\partial\Omega$ , entonces el problema (1.8), (1.10) admite a la única solución débil cualesquiera que sean  $f \in L_2(\Omega)$  y  $\psi \in L_2(\partial\Omega)$ . Se cumple la desigualdad:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \right), \quad (1.19)$$

en la cual  $C$  es una constante mayor que cero que no depende de  $f$  y  $\psi$ .

También se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.24.** *Para que exista una solución débil del problema*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k(x)\nabla u) &= f, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \psi, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} k\psi ds.$$

En este caso, la solución débil  $u$  ortogonal a las constantes en el producto escalar de  $L_2(\Omega)$  es única y para ella tiene lugar la desigualdad (1.19). Todas las demás soluciones débiles del problema se diferencian de  $u$  por constantes.

## 1.8 Soluciones clásicas y débiles de los problemas de contorno 27

**Observación:** Si  $f$ ,  $\varphi$ , y  $\psi$  son de valores reales, las soluciones presentadas en los teoremas anteriores, también son de valores reales.

Al estudiar el primer problema de contorno para la ecuación (1.8) con condición límite no homogénea surgió el problema siguiente: hallar las condiciones para la función  $\varphi$  de  $L_2(\partial\Omega)$  con las cuales existe su prolongación en el dominio  $\Omega$  y que esta prolongación pertenezca a  $H^1(\Omega)$ . Está mostrado que la condición suficiente consiste en la pertenencia al espacio  $C^1(\partial\Omega)$ . Ahora establezcamos la condición necesaria y suficiente para el caso cuando  $\Omega$  sea un círculo.

Supongamos que el dominio  $\Omega$  ( $n = 2$ ) es un círculo  $\{|x| < 1\}$ . Examinemos en la circunferencia  $\partial\Omega = \{|x| = 1\}$  una función real  $\varphi$  del espacio (real)  $L_2(\partial\Omega)$ ,  $\varphi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$ . Supongamos

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

donde  $a_k$  y  $b_k$  son sus coeficientes de Fourier.

**Teorema 1.25.** *Para que la función  $\varphi(\theta)$  de  $L_2(0, 2\pi)$  sea una traza en la circunferencia  $\{|x| = 1\}$  de cierta función de  $H^1(|x| < 1)$ , es necesario y suficiente que converja la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 + b_k^2),$$

donde  $a_k$  y  $b_k$  son los coeficientes de Fourier de  $\varphi$ .

El material de esta subsección puede consultarse en ([12], pp. 188-221).

### Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $v$  el vector unitario normal a la frontera  $\partial\Omega$  dirigido hacia el exterior de  $\Omega$ .

**Definición 1.26.** *Dada una función continua  $\varphi$ , el problema consiste en hallar una función  $u$  que es armónica en  $\Omega$  y continua en  $\bar{\Omega}$ , y que satisface la condición en la frontera de Dirichlet*

$$u = \varphi, \text{ en } \partial\Omega.$$

Los teoremas siguientes garantizan la unicidad de la solución de los problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

**Teorema 1.27.** *El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace tiene una única solución.*

Para mayor información consultar ([10], pp. 74-85).

# Capítulo 2

## Planteamiento del Problema

Consideremos un medio compuesto por dos círculos concéntricos de radio  $R_1$  y  $R_2$  con conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente, como se muestra en la figura 2.1.

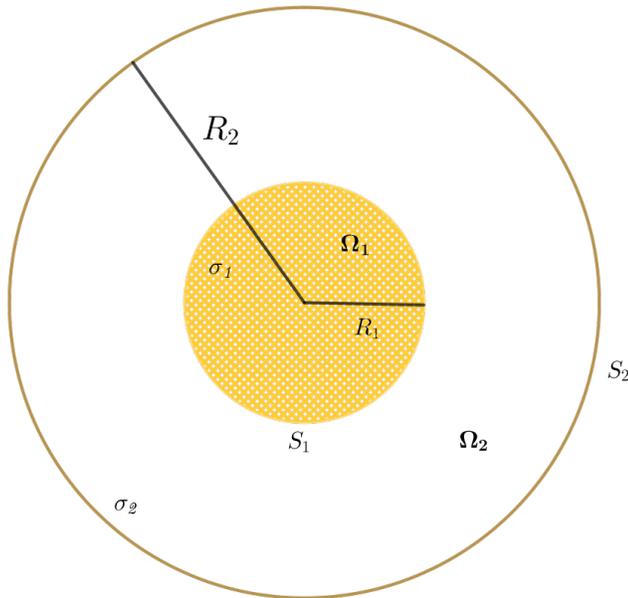


Figura 2.1: Círculos concéntricos.

Con  $S_1$  denotaremos la frontera de  $\Omega_1$  y con  $S_2$  la frontera de  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$ .

Supongamos que al aplicar una corriente  $\Psi(\theta)$  en la frontera  $S_2$  se mide el voltaje  $V$  sobre  $S_2$ , como se muestra en la figura 2.2.

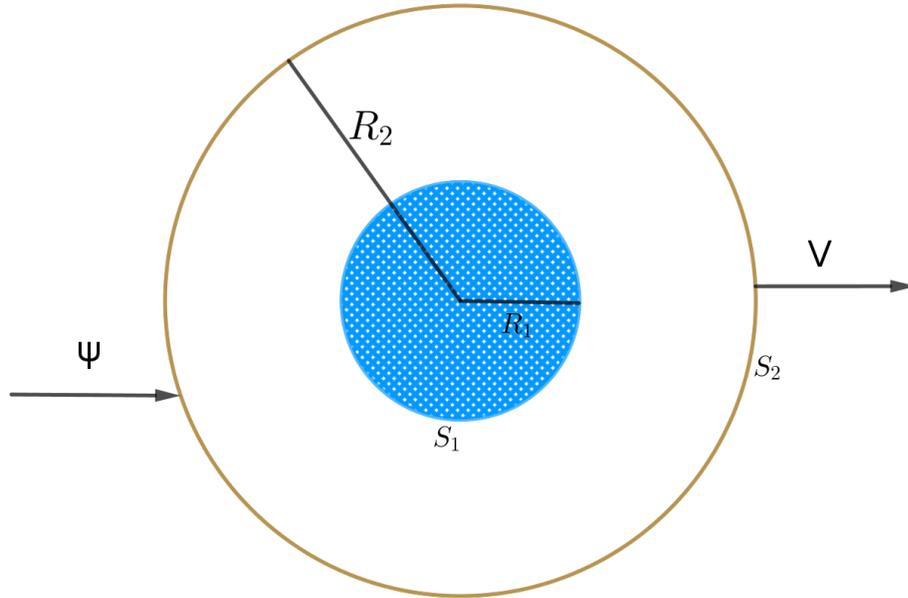


Figura 2.2: Aplicación de la corriente sobre  $S_2$ .

**PROBLEMA:** Determinar el radio de  $\Omega_1$  a partir de  $\Psi$  y  $V$ .

## 2.1. Planteamiento del Problema de Contorno

Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar tal que,

$u \in C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$ ; denotando  $u_i = u|_{\Omega_i}$  con  $i = 1, 2$ ;  $u$  satisface lo siguiente,

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.1)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.2)$$

$$u_1 = u_2, \quad \text{en } S_1, \quad (2.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \Psi(\theta), \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.5)$$

Siendo  $\Delta$  el operador de Laplace de la sección 1.4 .

### 2.1.1. Análisis de solubilidad

Una condición necesaria y suficiente para la solubilidad del problema de contorno es

$$\int_{S_2} \Psi(s) ds = 0. \quad (2.6)$$

Lo anterior se deduce de las fórmulas de Green sobre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$

$$0 = \int_{\Omega_2} \sigma_2 \Delta u_2 = \int_{S_2} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} = \sigma_2 \int_{S_2} \Psi - \sigma_2 \int_{S_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_1}$$

y

$$0 = \int_{\Omega_1} \sigma_1 \Delta u_1 = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1}.$$

Como la condición de contorno (2.4) es igual a cero, se tiene que

$$0 = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} - \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + \int_{S_2} \Psi.$$

Se buscará la solución del problema usando armónicos circulares que fueron desarrollados en la sección (1.7). Así, la solución  $u_1$  se busca en la forma:

$$u_1(r, \theta) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 r^k \sen k\theta, \quad (2.7)$$

donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares. Similarmente,

$$u_2(r, \theta) = a_0^2 + b_0^2 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sen k\theta. \quad (2.8)$$

Por lo tanto, para dar solución se tienen que encontrar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de  $u_1$  y  $u_2$ . Después de laboriosos cálculos (ver Apéndice A), se halla que

$$a_0^1 = a_0^2, \quad b_0^2 = 0,$$

$$a_k^1 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} \sigma_2}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (2.9)$$

$$b_k^1 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} \sigma_2}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (2.10)$$

$$a_k^2 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (2.11)$$

$$b_k^2 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} R_1^{2k} (\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (2.12)$$

$$c_k^2 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (2.13)$$

$$d_k^2 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} R_1^{2k} (\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}. \quad (2.14)$$

De lo anterior se deduce:

$$u_1(r, \theta) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sigma_2 R_2^{k+1} R_1^k}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^1 \cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sigma_2 R_2^{k+1} R_1^k}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^2 \sen k\theta, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
u_2(r, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^1 \cos k\theta \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} - (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^2 \sen k\theta,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

la cual es la solución del problema de contorno.

## 2.2. Problema Directo

De acuerdo con la definición del problema directo, se debe hallar el potencial  $u_2$  sobre la frontera  $S_2$ . Para ello, se debe evaluar  $V(\theta) = u_2(r, \theta)|_{S_2}$ , así que, al aplicar  $\Psi(\theta)$  sobre  $\partial\Omega = S_2$  y teniendo conocidos  $\sigma_1, \sigma_2, R_1$  y  $R_2$  se obtiene la solución del problema directo, que es:

$$\begin{aligned}
V(\theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^1 \cos k\theta \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} - (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^2 \sen k\theta.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

## 2.3. Problema Inverso

### Problema inverso para encontrar el radio interior

Para el problema inverso se necesita determinar el radio del círculo interior  $R_1$  a partir del par  $(\Psi, V)$  y suponiendo conocidos  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $R_2$ . Donde  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ . Como se conoce la forma de  $\Psi$ , entonces se propone que sea de la siguiente manera  $\Psi = \cos \theta$  tomando al primer sumando con  $k = 1$ , es decir  $\Psi_1^1 = 1$ .

Ahora tomando la solución del problema directo (2.17), con  $V(\theta) = V_1^1 \cos \theta$  se obtiene

$$V_1^1 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2 R_2}{\sigma_2 [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2]}. \tag{2.18}$$

De donde podemos despejar el  $R_1^2$  y así obtener

$$R_1^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 - \sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2}{\sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) R_2}. \quad (2.19)$$

Vamos a ver que la parte derecha de la igualdad anterior sea positiva, es decir que el numerador y denominador de  $R_1^2$  tengan el mismo signo. Supongamos que tienen signos contrarios, es decir

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 - \sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 > 0$$

y

$$\sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) R_2 < 0$$

de donde  $R_2 > \sigma_2 V_1^1$  y  $R_2 < -\sigma_2 V_1^1$ , se obtiene que  $-\sigma_2 V_1^1 > 0$  y sabemos que  $R_2 > 0$  y  $\sigma_2 > 0$ , entonces  $V_1^1$  tendría que tener signo negativo. Supongamos que  $V_1^1$  tiene signo negativo, es decir, que el numerador sea positivo y el denominador negativo o viceversa.

Para el primer caso tomemos de la ecuación (2.18)

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2 R_2 > 0$$

y

$$\sigma_2 [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2] < 0.$$

Veamos que

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 > (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2$$

y

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 < (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2,$$

así que  $0 < (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2 < (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2 < 0$  con  $R_1^2 > 0$  y  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$  se tiene una contradicción.

Para el segundo caso tenemos que en (2.18)

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2 R_2 < 0$$

y

$$\sigma_2 [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2] > 0$$

de donde

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 < (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2$$

y

$$(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 > (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2.$$

Sabemos que  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$  así que  $\sigma_1 + \sigma_2 > \sigma_1 - \sigma_2 > 0$  y  $R_2^2 > R_1^2 > 0$ . Por lo tanto  $(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 > (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2$  y  $(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 > (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2 > 0$  lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto,  $V_1^1 > 0$ , esto implica una contradicción al suponer que el numerador y el denominador de  $R_1$  tienen distinto signo. Entonces, se tiene que el lado derecho de la ecuación (2.13) es positivo y la solución del problema inverso es:

$$R_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^3 - \sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2}{\sigma_2 V_1^1 (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) R_2}}. \quad (2.20)$$

### Problema inverso para encontrar la conductividad $\sigma_1$

Si ahora el problema fuese determinar la conductividad  $\sigma_1$  del círculo interior a partir del par  $(\Psi, V)$ , suponiendo conocidos  $\sigma_2, R_1$  y  $R_2$ . Teniendo el mismo control sobre  $\Psi$ , se tiene:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 R_2 (R_2^2 + R_1^2) - V_1^1 \sigma_2^2 (R_2^2 - R_1^2)}{V_1^1 \sigma_2 (R_2^2 + R_1^2) - R_2 (R_2^2 - R_1^2)} \quad (2.21)$$

Veamos que  $\sigma_1$  es positivo, para ello tanto como el numerador como el denominador deben tener el mismo signo. Supongamos que el numerador es positivo y el denominador es negativo:

$$\sigma_2 R_2 (R_2^2 + R_1^2) - V_1^1 \sigma_2^2 (R_2^2 - R_1^2) > 0$$

$$V_1^1 \sigma_2 (R_2^2 + R_1^2) - R_2 (R_2^2 - R_1^2) < 0,$$

el cual es equivalente a

$$V_1^1 \sigma_2 (R_2^2 + R_1^2) > \frac{V_1^2 \sigma_2 (R_2^2 - R_1^2)}{R_2}$$

y

$$V_1^1 \sigma_2 (R_2^2 + R_1^2) < R_2 (R_2^2 - R_1^2).$$

Así

$$V_1^2 \sigma_2^2 (R_2^2 - R_1^2) < R_2^2 (R_2^2 - R_1^2),$$

por lo tanto

$$V_1^1 \sigma_2 < R_2.$$

De la ecuación (2.18), sustituyendo el valor de  $V_1^1$  se tiene que

$$1 = \frac{[(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2]}{[(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2]} < 1,$$

lo cual es una contradicción.

De manera análoga, si el denominador es positivo y el numerador es negativo se tiene que  $R_2 < V_1^1 \sigma_2$  y una vez más tomando la ecuación (2.18) y sustituyendo el valor de  $V_1^1$  se tiene

$$1 = \frac{[(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^2]}{[(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2]} > 1,$$

que también lleva a una contradicción. Por lo tanto, se tiene que  $\sigma_1$  es positivo.

### 2.3.1. Ejemplo de Inestabilidad numérica del primer problema inverso

En esta sección mostramos un ejemplo para ilustrar la inestabilidad numérica del problema de determinar el radio del círculo interior. Para ello, consideremos la medición

$$V_1^k = \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{[(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_1^1 \cos \theta,$$

$\Psi(\theta) = \cos k\theta$  con  $k = 11$ . Se toman los siguientes valores  $R_2 = 1$ ,  $R_1 = 0.9$ ,  $\sigma_1 = 3$  y  $\sigma_2 = 1$ . En este caso  $V_1^{11} = 0.9108$ .

Consideremos ahora  $R_1 = 0.1$  con los mismos valores para el resto de los parámetros. En este caso:  $V_1^{11} = 0.9999$ .

Por lo tanto, el problema inverso es mal planteado debido a que se tiene

la misma corriente y potenciales muy cercanos ( $|0.9108 - 0.9999| = 0.0891$ ), pero los radios están alejados entre sí, es decir, el problema es numéricamente inestable y no cumple con la tercera propiedad de Hadamard.

## Conclusión y Perspectivas

Este trabajo tuvo como objetivo determinar el radio interior de una inclusión centrada en el origen, mediante un problema inverso de conductividades. Para lograrlo, se consideró un medio formado por dos círculos concéntricos con cierta conductividad de cada una de ellos; además se consideraron condiciones de frontera llamadas de transmisión en la curva interior la condición de frontera de tipo Dirichlet, así como los datos de Cauchy en la curva exterior.

El modelo que se propuso, tomó en cuenta que se tiene manipulación en la forma algebraica que representa la corriente eléctrica. Se eligió dicha corriente en su forma más simple, ya que eso ayudó a disminuir el número de operaciones y obtener el valor del radio interior.

Además, se mostró mediante un ejemplo, que el problema inverso de identificar el radio interior es mal planteado, en el sentido de que ante pequeñas variaciones en la medición del potencial (en la frontera exterior) puede producir grandes variaciones en la identificación del radio interior.

Las perspectivas que se tienen para este trabajo es plantear el problema donde la inclusión no se encuentre centrada en el origen; es decir, plantear si bajo transformaciones se puede llegar al caso presentado en este trabajo y así llegar a la solución cuando los círculos no sean concéntricos. Otro tema a futuro es verificar si la solución propuesta en este trabajo para el problema inverso llega a ser correcta teniendo un error muy pequeño; es decir el valor del radio interior de la inclusión sea casi el valor obtenido bajo el modelo planteado.

# Apéndice



# Apéndice A

## Solución del Problema de Contorno

Problema de Contorno

Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar tal que,

$u \in C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$  que satisface el problema de contorno:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (\text{A.2})$$

$$u_1 = u_2, \quad \text{en } S_1, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \Psi(\theta), \quad \text{sobre } S_2, \quad (\text{A.5})$$

donde  $u_i = u|_{\Omega_i}$  con  $i = 1, 2$ .

Buscaremos la solución en la forma:

$$u_1(r, \theta) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 r^k \sen k\theta, \quad (\text{A.6})$$

donde  $r$  y  $\theta$  son coordenadas polares.

Similarmente se halla que

$$u_2(r, \theta) = a_0^2 + b_0^2 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta. \quad (\text{A.7})$$

Para hallar la solución del problema debe satisfacer las condiciones de frontera que son  $S_1$  y  $S_2$  de la ecuación (A.3) sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 r^k \sin k\theta &= a_0^2 + b_0^2 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_0^1 = a_0^2 + b_0^2 \ln(r), \\ a_k^1 r^k = a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}, \\ b_k^1 r^k = c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Evaluando en  $R_1$

$$a_0^1 = a_0^2 + b_0^2 \ln(R_1),$$

$$\begin{cases} a_k^1 R_1^k = a_k^2 R_1^k + b_k^2 R_1^{-k}, \\ b_k^1 R_1^k = c_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Ahora derivando con respecto a  $r$  en (A.6) y (A.7) con la condición de frontera (A.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^1 r^{k-1} \cos k\theta + \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} k b_k^1 r^{k-1} \sin k\theta, \\ \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= \frac{\sigma_2 b_0^2}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (k a_k^2 r^{k-1} - k b_k^2 r^{-k-1}) \cos k\theta \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (kc_k^2 r^{k-1} - kd_k^2 r^{-k-1}) \text{sen } k\theta.$$

Ahora evaluando  $R_1$  en  $r$  se tiene

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} ka_k^1 R_1^{k-1} \cos k\theta + \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} kb_k^1 R_1^{k-1} \text{sen } k\theta, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= \frac{\sigma_2 b_0^2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (ka_k^2 R_1^{k-1} - kb_k^2 R_1^{-k-1}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (kc_k^2 R_1^{k-1} - kd_k^2 R_1^{-k-1}) \text{sen } k\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dado que  $\frac{\partial a_0}{\partial n_1} = 0$  y la condición de contorno (A.4) se obtiene

$$\frac{\sigma_2 b_0^2}{R_1} = 0 \implies b_0^2 = 0,$$

ya que  $\sigma_2$  y  $R_1$  son distintos de cero.

$$\begin{cases} \sigma_1 a_k^1 R_1^{k-1} = \sigma_2 (a_k^2 R_1^{k-1} - b_k^2 R_1^{-k-1}), \\ \sigma_1 b_k^1 R_1^{k-1} = \sigma_2 (c_k^2 R_1^{k-1} - d_k^2 R_1^{-k-1}). \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

multiplicando por  $R_1$  en (A.12) se obtiene

$$\begin{cases} \sigma_1 a_k^1 R_1^k = \sigma_2 (a_k^2 R_1^k - b_k^2 R_1^{-k}), \\ \sigma_1 b_k^1 R_1^k = \sigma_2 (c_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}). \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Ahora sustituyendo (A.9) en (A.13) se obtiene

$$\begin{cases} \sigma_1 (a_k^2 R_1^k + b_k^2 R_1^{-k}) = \sigma_2 (a_k^2 R_1^k - b_k^2 R_1^{-k}), \\ \sigma_1 (c_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}) = \sigma_2 (c_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}). \end{cases}$$

Realizando algunas operaciones se llega a

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2) a_k^2 R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2) b_k^2 R_1^{-k} = 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_2) c_k^2 R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2) d_k^2 R_1^{-k} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Multiplicando las ecuaciones por  $R_1^k$

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2) a_k^2 R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) b_k^2 = 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_2) c_k^2 R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) d_k^2 = 0. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Tomando la ecuación (A.11) y la condición (A.5) en  $S_2$  evaluando  $R_2$  en  $r$  se halla

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (k a_k^2 R_2^{k-1} - k b_k^2 R_2^{-k-1}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_2 (k c_k^2 R_2^{k-1} - k d_k^2 R_2^{-k-1}) \sin k\theta.$$

Usando que  $\Psi(\theta)$  es de la siguiente manera:

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^2 \sin k\theta,$$

de donde se obtiene

$$\begin{cases} \sigma_2 k (a_k^2 R_2^k - b_k^2 R_2^{-k}) = \Psi_k^1 R_2, \\ \sigma_2 k (c_k^2 R_2^k - d_k^2 R_2^{-k}) = \Psi_k^2 R_2, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

ó

$$\begin{cases} a_k^2 R_2^{2k} - b_k^2 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1}}{\sigma_2 k}, \\ c_k^2 R_2^{2k} - d_k^2 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1}}{\sigma_2 k}. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Ahora, de la ecuación (A.15) se puede despejar  $b_k^2$

$$b_k^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} a_k^2 R_1^{2k}. \quad (\text{A.18})$$

A partir de este valor se puede sustituir en la primera ecuación de (A.17)

$$a_k^2 R_2^{2k} - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} a_k^2 R_1^{2k} = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1}}{\sigma_2 k}.$$

Así el valor para  $a_k^2$

$$a_k^2 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}. \quad (\text{A.19})$$

Ya teniendo el valor anterior se puede obtener  $b_k^2$  evaluandolo en (A.18)

$$b_k^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} R_1^{2k} \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_2^{2k}]}$$

Realizando algunas operaciones se obtiene

$$b_k^2 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} R_1^{2k} (\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}. \quad (\text{A.20})$$

Realizando un procedimiento similiar se obtiene  $c_k^2$  y  $d_k^2$ .  
Ahora, de la ecuación (A.15) se puede despejar  $d_k^2$

$$d_k^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} c_k^2 R_1^{2k}, \quad (\text{A.21})$$

a partir de este valor se puede sustituir en la segunda ecuación de (2.17)

$$c_k^2 R_2^{2k} - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} c_k^2 R_1^{2k} = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1}}{\sigma_2 k}$$

Así el valor para  $c_k^2$

$$c_k^2 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (\text{A.22})$$

ya teniendo el valor anterior se obtiene  $d_k^2$  evaluandolo en (A.21)

$$d_k^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} R_1^{2k} \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}$$

Realizando algunas operaciones se obtiene

$$d_k^2 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} R_1^{2k} (\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}. \quad (\text{A.23})$$

Ahora de la ecuación (A.9) se obtienen los coeficientes  $a_k^1$  y  $b_k^1$

$$a_k^1 = \frac{\Psi_k^1 R_2^{k+1} \sigma_2}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]}, \quad (\text{A.24})$$

$$b_k^1 = \frac{\Psi_k^2 R_2^{k+1} \sigma_2}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo cada valor de  $a_k^1$ ,  $b_k^1$ ,  $a_k^2$ ,  $b_k^2$ ,  $c_k^2$  y  $d_k^2$  (A.19, A.20, A.22-A.25) en las ecuaciones (A.6) y (A.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sigma_2 R_2^{k+1} R_1^k}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^1 \cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sigma_2 R_2^{k+1} R_1^k}{k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^2 \sen k\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta) = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^1 \cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k+1} - (\sigma_2 - \sigma_1) R_1^{2k} R_2}{\sigma_2 k [(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k}]} \right] \Psi_k^2 \sen k\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

donde  $a_0^1 = a_0^2$  son contantes.

# Bibliografía

- [1] Aquino F. (2009). Revisión de resultados sobre el método de regularización de Tijonov Tesis de Maestria en Ciencias Matemáticas Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [2] Apostol T. M. (1976). Análisis Matemático.Segunda Edición.Barcelona: Editorial Reverté, S. A.
- [3] Colton D., Kress R. (1992). Integral equations methods in scattering theory. Maqlabar Florida: Kriuger Publishing Company.
- [4] Cortes M. (2013). Análisis del Problema de identificación de curvas interiores usando potenciales de superficie Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [5] Cortes M. et al. (2011) .Solución estable del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace usando potenciales de superficie. Lecturas Matemáticas, 32: 61-77
- [6] Denisov A. M. (1999). Elements of the Theory of Inverse Problems (Inverse and the Ill-Posed Problems).Tokio: Editorial VSP Utrecht The Netherlands
- [7] Dennemeyer R. (1968). Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems. California: McGraw-Hill
- [8] Engl H.W. (1995). Inverse problems. México: Sociedad Matemática Mexicana-UNAM.
- [9] Fraguela Collar A. (1991). Teoría Espectral de Operadores Diferenciales. México: Publicado por el CINVESTAV I.P.N.

- 
- [10] Kress R.(1989). Linear Integral Equations. New York: Springer Verlag.
- [11] Kirsch A. (1996). An introduction to the mathematical theory of inverse problems. New York: Springer Verlag.
- [12] Mijailov V.P.(1982). Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Moscú: Editorial Mir.
- [13] Netzahualcoyotl C. et al. (2018). Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media. Advances in Differential Equations and Control Processes.
- [14] Rajendra Bhatia. (2005). Fourier Series. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- [15] Seo Jin Keun. (1996). On the Uniqueness in thye Inverse Conductivity Problem. The Journal of Fourier Analysis and Applications. 2(3): 227-235.
- [16] Uribe Hernández J.M. (2011). El fenómeno de Gibbs y el  $\sigma$ -Factor Lanczos Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.