Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

VECINDADES CONEXAS DE SUBCONTINUOS EN PRODUCTOS DE ESPACIOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
BRIAN ELIEZER ORTEGA SANTIAGO

DIRECTOR DE TESIS
RAÚL ESCOBEDO CONDE

PUEBLA, PUE. Marzo 2021

A esa dama de mis primeros recuerdos.

Agradecimientos

Empezando por lo obvio quiero agradecer al Dr. Raúl Escobedo Conde por su asesoría y ayuda en este proceso y a mis sinodales cuyas observaciones y comentarios fueron de gran ayuda para completar este trabajo.
Más allá de lo académico quiero hacer una mención a "los perros y princesa", personas que sin duda hicieron de este proceso algo más ameno.
A Vannessa y Bruno les doy las gracias por estar ahí siempre que en verdad los necesité.
Y finalmente, aunque estas palabras queden cortas, le agradezco a mi madre quien me apoyó en todos mis sueños aunque muchos de ellos parecieran locuras a sus ojos.

Introducción

Esta tesis se basa principalmente en el artículo de A. Illanes [6], en el cual se responden algunas preguntas planteadas por Bellamy y Lysko en [1].

Este trabajo se divide en dos capítulos. El primero está dedicado a enunciar algunos resultados básicos, probablemente bien conocidos por el lector cotidiano de teoría de continuos, que se incluyen aquí para su ágil referencia, y porque no siempre son conocidos por los "novatos" en el área. En este primer capítulo, denominado Preliminares, merece mención especial la sección titulada Teorema del cable cortado, en la cual se presenta este teorema con una prueba diferente a la que se expone en el libro de Nadler, [9].

En el capítulo 2 se desarrolla el tema principal de esta tesis, que es lo que hemos llamado la propiedad B-L, por las iniciales de los autores Bellamy y Lysko. Esta es una propiedad de aquellos continuos que pueden verse como producto de espacios, y expresa la existencia de vecindades abiertas y conexas arbitrariamente pequeñas alrededor de cualquier subcontinuo que se proyecte sobreyectivamente, es decir, que las imágenes del subcontinuo en cuestión bajo las funciones proyección coinciden con las respectivas coordenadas.

En la sección 2.1 se define formalmente la propiedad B-L, y se muestra que los productos localmente conexos tienen esta propiedad.

En la sección 2.2 se demuestra que el producto arbitrario de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L.

En la secciń 2.3 se prueba que algunos productos que incluyen al pseudoarco como factor tienen también esta propiedad.

En la sección 2.4 se demuestra que si el producto de dos continuos tiene la propiedad B-L entonces los espacios coordenados son continuos de Kelley.

Contenido

Introducción **i**

1 Preliminares **1**

1.1 Distancia entre conjuntos 1
1.2 Conexidad Local 4
1.3 Teorema del cable cortado 5
1.4 Teorema de Effros 9

2 Productos con la propiedad B-L **11**

2.1 Definición de la propiedad B-L 11
2.2 Productos de continuos de Knaster 13
2.3 Productos con pseudo-arco 23
2.4 Propiedad B-L implica factores de Kelley 25

Conclusión **29**

Índice alfabético **33**

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como finalidad enunciar (y probar en algunos casos) resultados y definiciones de topología general necesarios para el capítulo 2. Se incluyen nociones de distancia entre conjuntos y la métrica de Hausdorff; algunas observaciones en conexidad local; el teorema del cable cortado y algunas de sus consecuencias, reconocidas en los textos como teoremas de golpes en la frontera; y una versión del teorema Effros para continuos homogéneos.

1.1 Distancia entre conjuntos

1.1 Definición. Sea X un espacio métrico con métrica d[1] . Sean A, B subconjuntos no vacíos de X y $x \in X$. Se define la distancia entre A y B como:

$$d(A, B) = \textbf{ínf}\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

En particular la distancia entre un punto x y un conjunto A está dada por:

$$d(A, x) = d(A, \{x\}).$$

De aquí en adelante X representa un espacio métrico y d_X su métrica, en caso de no haber posible confusión simplemente se escribirá d.

1.2 Observación. Sean $x \in X$ y $A \subset X$ no vacío, entonces $d(A, x) = 0$ si y solo si $x \in \mathbf{cl}_X(A)$.

[1] Recuerde que un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y d es una función $d : E \times E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ satisfaciendo que para $x, y \in E : d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ y que para cualesquiera $x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Para un estudio más general se recomienda consultar [7].

Demostración. Si $d(A,x) = 0$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $a_\epsilon \in A$ tal que $d(a_\epsilon, x) < \epsilon$, de aquí, $a_\epsilon \in B(x,\epsilon)$ y así, $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ por tanto $x \in \mathbf{cl}_X(A)$.
Ahora bien, si $x \in \mathbf{cl}_X(A)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que existe $a_\epsilon \in B(x,\epsilon) \cap A$ y por tanto $d(A,x) = 0$. $\square$

1.3 Observación. Si A, B, C son subconjuntos de X y tales que $C \subset B$, entonces:

$$d(A,B) \leq d(A,C).$$

Demostración. Nótese que si $C \subset B$, entonces

$$\{d(a,c) : \ a \in A, \ c \in C\} \subset \{d(a,b) : \ a \in A, \ b \in B\}$$

y por tanto

$$\mathbf{\acute{i}nf}\{d(a,b) : \ a \in A, \ b \in B\} \leq \mathbf{\acute{i}nf}\{d(a,c) : \ a \in A, \ c \in C\},$$

es decir,

$$d(A,B) \leq d(A,C).$$

$\square$

1.4 Observación. Si A, B son subconjuntos no vacíos de un espacio métrico X, entonces

$$d(A,B) = \mathbf{\acute{i}nf}\{d(A,b) : b \in B\} = \mathbf{\acute{i}nf}\{d(B,a) : a \in A\}.$$

Demostración. Sea $x \in B$, de la definición de $d(A,B)$ se tiene que para cualquier $y \in A$

$$d(A,B) \leq d(x,y)$$

y por tanto $d(A,B)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(x,y) : \ y \in A\}$ luego

$$d(A,B) \leq d(A,x),$$

dado que $x \in B$ es arbitrario, la última desigualdad indica que $d(A,B)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(x,A) : \ x \in B\}$. Ahora bien, sea $\epsilon > 0$. En virtud de la definición de $d(A,B)$, existe un $x \in B$ y un $y \in A$ tales que

$$d(y,x) < d(A,B) + \epsilon$$

pero

$$d(x, A) \leq d(x, y),$$

es decir,

$$d(x, A) < d(A, B) + \epsilon$$

para algún $x \in B$ y por tanto

$$d(A, B) = \mathbf{\acute{i}nf}\{d(A, b) : b \in B\}.$$

De manera análoga se prueba que $d(A, B) = \mathbf{\acute{i}nf}\{d(B, a) : a \in A\}$. □

1.5 Lema. Sea X un espacio métrico. Si E es compacto en X y F es un subconjunto no vacío de X, entonces $d(E, F) = 0$ si y solo si $\mathbf{cl}_X(F) \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. Para la suficiencia. Como $d(E, F) = 0$, de la observación 1.4, se tiene que $\mathbf{\acute{i}nf}\{d(F, x) : x \in E\} = 0$ así, para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in E$ tal que $d(F, x) < \epsilon$, en particular para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(F, x_n) < \frac{1}{n}$. Sea $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, nótese C que bien puede ser finito o infinito.

Si C es finito, $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, existe $x_i \in C$ tal que para un conjunto infinto $N \subset \mathbb{N}$ se cumple que $d(F, x_i) < \frac{1}{n}$ si $n \in N$, pero al ser N un conjunto infinito de naturales se sigue que N no es acotado superiormente así, para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ y por tanto $d(F, x_i) = 0$, por consiguiente $x_i \in \mathbf{cl}_X(F)$ y por tanto $\mathbf{cl}_X(F) \cap E \neq \emptyset$.

Ahora bien, si C es infinito existe $x_0 \in C$ punto de acumulación de C, pues $C \subset E$ y E es compacto. De la desigualdad del triángulo,

$$\mathbf{\acute{i}nf}\{d(y, x_0) : y \in F\} \leq \mathbf{\acute{i}nf}\{d(y, x_n) + d(x_0, x_n) : y \in F\}$$

así,

$$d(F, x_0) \leq d(F, x_n) + d(x_n, x_0)$$

pero al ser x_0 un punto de acumulación de C, para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $B(x_0, \frac{\epsilon}{2})$ contiene una cantidad infinita de elementos de C, es decir, existe $M \subset \mathbb{N}$ un conjunto infinito tal que para todo $n \in M$ se cumple que $x_n \in B(x_0, \frac{\epsilon}{2})$ entonces existe $n_0 \in M$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto

$$d(F, x_0) \leq d(F, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

por consiguiente $d(F, x_0) = 0$, es decir, $x_0 \in \mathbf{cl}_X(F)$ y por tanto $\mathbf{cl}_X(F) \cap E \neq \emptyset$.

Para la necesidad basta notar que si $\mathbf{cl}_X(F) \cap E \neq \emptyset$, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \in \mathbf{cl}_X(F)$ así, de la observación 1.2, se tiene que $d(x_0, F) = 0$, pero $\{x_0\} \subset E$ y por tanto $d(E, F) \leq d(x_0, F)$, por consiguiente $d(E, F) = 0$. □

1.6 Definición. Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $A \in 2^X = \{B : B$ es un subconjunto cerrado no vacío de $X\}$ se define:
$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon$ para algún $a \in A\}$.
Ahora, para cualesquiera $A, B \in 2^X$, sea
$H_d(A, B) = \mathbf{\acute{i}nf}\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B)$ y $B \subset N_d(\epsilon, A)\}$.
H_d es llamada la métrica de Hausdorff.

1.7 Proposición. Sea X un espacio métrico. Si E es compacto en X y W es un conjunto abierto de X que tiene a E como subconjunto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, E) \subset W$.

Demostración. Notar que $X \setminus W$ es un cerrado en X tal que $\mathbf{cl}_X(X \setminus W) \cap E = \emptyset$ así, del lema 1.5, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(E, X \setminus W) > \epsilon$, entonces $\forall a \in E$ y $\forall b \in X \setminus W$ se cumple que $d(a, b) > \epsilon$, entonces $N(\epsilon, E) \cap X \setminus W = \emptyset$, es decir, $N(\epsilon, E) \subset W$. □

El siguiente lema es un resultado básico de topología el cual se incluye en este trabajo para su fácil referencia.

1.8 Lema. Todo espacio Hausdorff compacto es normal.

Demostración. [3, Corolario 7.8]. □

1.2 Conexidad Local

En este trabajo llamaremos vecindad de p a cualquier conjunto que tenga como subconjunto un conjunto abierto que contenga al punto p.

1.9 Definición. Se dice que un espacio X es localmente conexo si para cada $x \in X$ y cualquier vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq U$.

1.10 Definición. Sea X un espacio topológico. Una componente de X es un subconjunto conexo máximo (con respecto a $\subset$). Si $p \in X$, entonces C_p, se define por

$$C_p = \cup\{A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

1.11 Observación. Las componentes de un espacio son conjuntos cerrados, pues si A es un conjunto conexo entonces $\overline{A}$ también es un conjuto conexo.

1.12 Proposición. Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto de X son conjuntos abiertos de X.

Demostración. [3, Proposición 8.23]. $\square$

1.13 Teorema. Sea J un conjunto y $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es localmente conexo si y solo si, cada X_α es localmente conexo y todos los X_α son conexos, con excepción, quizás, de un número finito de ellos.

Demostración. [3, Teorema 8.26]. $\square$

1.3 Teorema del cable cortado

En esta sección se dará una prueba del teorema del cable cortado (la cual prescinde del uso de hiperespacios), aunque su verdadera finalidad es enunciar el teorema 1.23 el cual es fundamental en la demostración del teorema 2.29.

1.14 Definición. Sea X un espacio topológico y sea $p \in X$. La casicomponente de p en X, denotada por Q_p, es un subconjunto de X definido por

$$Q_p = \cap\{L : p \in L \text{ y } L \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

1.15 Observación. Dado que las casicomponentes de un espacio son intersecciones de conjuntos abiertos y cerrados (en particular son intersecciones de conjutos cerrados), entonces las casicomponentes son conjuntos cerrados.

1.16 Proposición. Sea X un espacio topológico y sea $p \in X$, entonces $C_p \subset Q_p$.

Demostración. Supóngase que $C_p \subsetneq Q_p$, entonces existe $x \in C_p$ tal que $x \notin Q_p$, de la definicón de Q_p se sigue que existe L un conjunto abierto y cerrado en X tal que $p \in L$ y $x \notin L$. Nótese que $C_p \cap L$ es un conjunto abierto y cerrado en C_p. Puesto que $C_p \cap L \neq \emptyset$, pues $p \in C_p \cap L$, y $C_p \cap L \neq C_p$, pues $x \neq L$, entonces C_p no es conexo lo cual es una contradicción y por tanto $C_p \subset Q_p$. □

1.17 Proposición. Sea X un espacio Hausdorff compacto, y sea Q_p una casicomponente de X. Si $Q_p \subset U$ donde U es un conjunto abierto de X, entonces existe L un subconjunto abierto y cerrado de X tal que $Q_p \subset L \subset U$.

Demostración. Como $Q_p = \bigcap\{L_\alpha : \alpha \in J\}$ (donde cada L_α es un conjunto abierto y cerrado en X que tiene como elemento el punto p y J es un conjunto), entonces $Q_p \subset L_\alpha$ así, $X \setminus L_\alpha \subset X \setminus Q_p$ y por tanto para cada $\alpha \in J$ $(X \setminus L_\alpha) \cap Q_p = \emptyset$. Puesto que $Q_p \subset U$, entonces $X \setminus U \subset X \setminus Q_p$, por otro lado se tiene que $\bigcup\{X \setminus L_\alpha : \alpha \in J\} = X \setminus \bigcap\{L_\alpha : \alpha \in J\} = X \setminus Q_p$ así, $\{X \setminus L_\alpha : \alpha \in J\}$ constituye una cubierta abierta de $X \setminus U$. Dado que X es compacto y $X \setminus U$ es un conjunto cerrado de X, se sigue que $X \setminus U$ es compacto así, existe J_0 un subconjunto finito de J tal que $X \setminus U \subset \bigcup\{X \setminus L_\alpha : \alpha \in J_0\}$. Nótese que $\bigcup\{X \setminus L_\alpha : \alpha \in J_0\}$ es un conjunto abierto y cerrado en X, pues es la unión finita de conjuntos abiertos y cerrados en X, por consiguiente $L = X \setminus \bigcup\{X \setminus L_\alpha : \alpha \in J_0\}$ es un conjunto abierto y cerrado en X tal que $Q_p \subset L \subset U$. □

1.18 Proposición. En un espacio Hausdorff compacto, componentes y casicomponentes son iguales.

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff compacto y supóngase además que existe $p \in X$ tal que $C_p \subsetneq Q_p$.

Si $C_p \subsetneq Q_p$, entonces Q_p no es conexo así, existen A, B conjunto disjuntos entre si, cerrados en Q_p y por tanto cerrados en X, pues Q_p es un conjunto cerrado en X. Como X es Hausdorff y compacto entonces X es normal así, existen U, V conjuntos abiertos en X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A \subset U, B \subset V$. De la proposición 1.17 se sigue que existe L un conjunto abierto y cerrado en X tal que $Q_p \subset L \subset U \cup V$. Defínase $E = X \setminus L$.
Si $x \in V \setminus E$ entonces $x \in V$ y $x \notin E$, pero $V \cap U = \emptyset$ así, $V \subset X \setminus U$ y $x \in X \setminus E$, entonces

$$x \in (X \setminus U) \cap (X \setminus E) = X \setminus (U \cup E)$$

y por tanto $V \setminus E \subset X \setminus (U \cup E)$.

Para ver que $X \setminus (U \cup E) \subset V \setminus E$ sea $x \in X \setminus (U \cup E)$, entonces $x \notin U$ y $x \notin E$ pero $E = X \setminus L$ por tanto $x \in L \setminus U$ y dado que $L \subset U \cup V$ entonces $x \in V \cap L$ y por tanto $x \in V \setminus E$, en consecuencia $X \setminus (U \cup E) = V \setminus E$.

Claramente $V \setminus E = V \cap L$ y $U \cup E$ son conjuntos abiertos y al ser uno el complemento del otro se concluye que ambos conjuntos ($V \setminus E = V \cap L$, $U \cup E$) son cerrados, pero además p es un elemento de alguno de ellos así, Q_p debe de estar contenido en alguno de los dos conjuntos en cuestión lo cual es una contradicción pues $A \subset Q_p \cap (U \cup E)$ y $B \subset Q_p \cap V \setminus E$. Por lo anterior y de la proposición 1.16 se concluye que $C_p = Q_p$. $\square$

El siguiente teorema es conocido como el Teorema del cable cortado (*cut wire theorem*).

1.19 Teorema. Sea X un espacio topológico Hausdorff compacto y sean A, B conjuntos cerrados en X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta a ambos A y B, entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 son conjuntos cerrados de X y disjuntos entre si tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.

Demostración. Sean A, B conjuntos cerrados de X tales que ningún conjunto conexo intersecta a ambos. Nótese A y B son disjuntos, pues $\{x\}$ es un conjunto conexo.

Para cada $b \in B$ sea C_b la componente de X que contiene a b. De la proposición 1.18 se sigue que $Q_p = C_p \subset X$, entonces, de la proposición1.17, para cada $b \in B$ existe L_b un conjunto abierto y cerrado en X tal que

$$Q_p \subset L_b \subset X \setminus A.$$

Nótese que $\{L_b : b \in B\}$ es una cubierta abierta de B, pues para cada $b \in B$ $b \in L_b$. Como B es compacto existe B_0 un subcojunto finito de B tal que $B \subset \bigcup\{L_b : b \in B_0\}$ así, $X_2 = \bigcup\{L_b : b \in B_0\}$ es un conjunto abierto y cerrado en X tal que

$$B \subset X_2 \subset X \setminus A$$

y por tanto $X_1 = X \setminus X_2$ es un conjunto abierto y cerrado en X tal que

$$A \subset X_1 \subset X \setminus B.$$

$\square$

1.20 Teorema. Sea X un continuo y sea $U \subsetneq X$ no vacío y abierto en X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.

Demostración. Supóngase que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Como X es un continuo, entonces X es Hausdorff y compacto, K y $Fr(U)$ son claramente cerrados y se está suponiendo que $K \cap Fr(U) = \emptyset$ y por tanto ningún subconjunto conexo de X intersecta a ambos así, del teorema 1.19, existen M_1, M_2 conjuntos cerrados en $\overline{U}$ y disjuntos entre si tales que $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, $K \subset M_1$ y $Fr(U) \subset M_2$.
Sea $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$. Como $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, entonces

$$\begin{aligned} M_1 \cup M_3 &= M_1 \cup M_2 \cup (X \setminus U) \\ &= \overline{U} \cup (X \setminus U) = X. \end{aligned}$$

Dado que $K \neq \emptyset$, pues K es una componente, y $K \subset M_1$, entonces $M_1 \neq \emptyset$. Por otro lado, como $X \setminus U \subset M_3$ y $U \subsetneq X$ se tiene que $M_3 \neq \emptyset$. Nótese que

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_3 &= M_1 \cap (M_2 \cup (X \setminus U)) \\ &= (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap (X \setminus U)). \end{aligned}$$

Como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, entonces $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (X \setminus U)$ así, dado que $M_1 \subset \overline{U}$, se sigue que $M_1 \cap M_3 \subset \overline{U} \cap (X \setminus U)$, pero $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en X así, $X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ y por tanto

$$M_1 \cap M_3 \subset \overline{U} \cap (\overline{X \setminus U}) = Fr(U) \subset M_2,$$

entonces $M_1 \cap M_3 = \emptyset$, pues $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. En resumen M_1, M_3 son cerrados, ajenos entre si y $M_1 \cup M_3 = X$ lo cual contradice la conexidad de X y por tanto $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. $\square$

1.21 Corolario. Sea X un continuo no degenerado. Si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subsetneq U$, entonces existe B un subcontinuo de X tal que

$$A \subset B \neq A \quad \text{y} \quad B \subset U.$$

Demostración. Sea $x \in X \setminus A$, entonces $U \setminus \{x\}$ es un subconjunto abierto en X tal que $A \subset U \setminus \{x\}$ así, de la normalidad de X, existe V un conjunto abierto de X tal que que $A \subset V$ y $\overline{V} \subset U \setminus \{x\} \subset U$. Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A (nótese que B existe pues A es un subconjunto conexo de $\overline{V}$). Claramente B es un subcontinuo de X, y dado que $\overline{V} \subset U$, entonces $B \subset U$. Del teorema 1.20 se sigue que $B \cap Fr(V) \neq \emptyset$, es decir, $B \cap (\overline{V} \cap (\overline{X \setminus V})) \neq \emptyset$, pero V es abierto así, $X \setminus V = \overline{X \setminus V}$, en consecuencia $B \cap (\overline{V} \cap (X \setminus V)) \neq \emptyset$ y por tanto $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, dado que $A \subset V$, entonces $A \neq B$. □

1.22 Corolario. Sea X un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado.

Demostración. Sea $p \in X$ y sea $U \subsetneq X$ un conjunto abierto en X que contiene a p, dado de $\{p\}$ es un subcontinuo de X, del corolario 1.21, existe B un subcontinuo de X tal que

$$\{p\} \subsetneq B \quad \text{y} \quad B \subset U,$$

es decir, B es un subcontinuo propio de X no degenerado. □

1.23 Teorema. Sea X un continuo, y sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto propio de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$ (equivalentemente $\overline{K} \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset$, pues $\overline{K} \subset \overline{E}$).

Demostración. Supóngase que $\overline{K} \cap (\overline{X \setminus E}) = \emptyset$. Entonces, dado que $K \neq \emptyset$ y $\overline{X \setminus E} \neq \emptyset$, $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X. Sea $U = X \setminus (\overline{X \setminus E})$, como $\overline{K} \cap (\overline{X \setminus E}) = \emptyset$, entonces $\overline{K} \subset U \subset E$, pero U es abierto en X, por tanto, del corolario 1.21, existe un continuo B tal que

$$\overline{K} \subset B \neq \overline{K} \quad \text{y} \quad B \subset U.$$

Así B es un subconjunto conexo que contiene propiamente a K, además $B \subset E$, pues $U \subset E$, lo cual contradice el hecho de que K es una componente de E. □

1.4 Teorema de Effros

En 1965, E. G. Effros probó en [4] un teorema que se presenta a continuación el cual tiene como corolario el lema 1.26 el cual es necesario para el desarrollo del capítulo 2.

1.24 Teorema. Si G es un grupo métrico completo y separable que actua en un espacio métrico completo X, entonces las siguientes proposiciones son

equivalentes:
(a) Para cada $x \in X$, la función $\Psi_x : G/G_x \to G \cdot x$ dada por $\Psi_x(g \cdot G_x) = g \cdot x$ es un homeomorfismo.
(b) G actua micro-transitivamente en cada órbita.
(c) Cada órbita es de la segunda categoria (en si misma).
(d) Cada órbita en un G_δ subconjunto de X.
(e) X/G es un espacio T_0.

Demostración. [8, Theorem 4.2.25]. $\square$

1.25 Definición. Un espacio topológico X se dice que es homogéneo siempre que para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$, existe un homeomorfismo h de X en X tal que $h(p) = q$.

1.26 Lema. Si X es un continuo homogéneo, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$ y $d_X(u, h(u)) < \epsilon$ para todo $u \in X$.

Demostración. [5, lemma 4]. $\square$

1.27 Corolario. Sea X un continuo homogéneo y $\epsilon > 0$. Entonces para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset \{h(x) \in X : h$ está en la $\epsilon -$ bola con centro en la identidad en el espacio de automorfismos de $X\}$.

Demostración. Sean X un continuo homogéneo y $\epsilon > 0$. Sea $x \in X$, del lema 1.26 se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta)$ entonces existe un homeomrfismo $h_1 : X \to X$ tal que $h_1(x) = y$ y $d(u, h_1(u)) < \epsilon$ para todo $u \in X$, es decir, h_1 es un automorfismo de X que está en la $\epsilon-$bola con centro en la identidad y por tanto $y = h_1(x) \in \{h(x) \in X : h$ está en la $\epsilon -$ bola con centro en la identidad en el espacio de automorfismos de $X\} = B$, de aquí,

$$B(x, \delta) \subset B.$$

$\square$

Capítulo 2

Productos con la propiedad B-L

En este capítulo se desarrolla el tema principal de esta tesis, que es lo que hemos llamado la propiedad B-L. En la sección 2.1, se define formalmente esta propiedad, y se muestra que los productos localmente conexos la tienen. En la sección 2.2 se demuestra que el producto arbitrario de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L. En la sección 2.3 se prueba que algunos productos que incluyen al pseudo-arco como factor también poseen esta propiedad. En la sección 2.4 se demuestra que si el producto de dos continuos tiene la propiedad B-L entonces los espacios coordenados son continuos de Kelley.

2.1 Definición de la propiedad B-L

Dado un continuo X, cada vez que se use una métrica compatible d_X para X, suponemos que la métrica es acotada por el número 1. Para un producto de continuos $X \times Y$, se considerará la métrica

$$d_{X\times Y}((u,v),(x,y)) = \frac{1}{2}(d_X(u,x) + d_Y(v,y))$$

y para un producto numerable $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ de continuos, se usará la métrica

$$d_\Pi((u_i)_{i\in\mathbb{N}},(x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(u_i,x_i).$$

Para J un conjunto y $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ la α-ésima proyección se denotará por π_α.

2.1 Definición. Dada una familia de continuos métricos $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$, el producto $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tiene la propiedad B-L [1] si para cada subcontinuo M de X tal que $\pi_\alpha(M) = X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ y para cada W subconjunto abierto de X tal que $M \subset W$, existe un subconjunto U conexo y abierto en X tal que $M \subset U \subset W$.

Un ejemplo de espacios que cumplen con la propiedad B-L son los localmente conexos.

2.2 Proposición. Sea $X = \prod_{\alpha\in J} X\alpha$ un espacio localmente conexo, entonces X tiene la propiedad B-L.

Demostración. Sea M un subcontinuo de X tal que para cualquier $\alpha \in J$ se cumple que $\pi_{X_\alpha}(M) = X_\alpha$ y sea W un conjunto abierto de X tal que $M \subset W$.

Sea $x \in M$ y sea C la componente de W que contiene a x. Dado que $x \in M$ y M es conexo, de la definición de componente, se sigue que $M \subset C$. De la proposición 1.12 se sigue que C es un conjunto abierto en X y por tanto X tiene la propiedad B-L. □

El siguiente lema es una equivalencia de la propiedad B-L la cual será usada frecuentemente para demostrar que algunos espacios tienen la propiedad B-L por ejemplo en el teorema 2.10.

2.3 Lema. Un producto $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tiene la propiedad B-L si y solo si para cada subcontinuo M de X tal que $\pi_\alpha(M) = X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ (π_α es la α-ésima proyección) y para cada W subconjunto abierto de X tal que $M \subset W$, existe un subcontinuo L de X tal que $M \subset \mathbf{int}_X(L) \subset L \subset W$.

Demostración. Sean M es un subcontinuo de X y W un sunconjunto abierto de X tal que $M \subset W$ y $\pi_\alpha(M) = X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Para probar la necesidad nótese que, como X tiene la propiedad B-L, existe U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $M \subset U \subset W$, notar además que $\mathbf{cl}_X(U)$ es un subcontinuo de X y

$$U = \mathbf{int}_X(U) \subset \mathbf{cl}_X(U).$$

[1] En [1], D. P. Bellamy y J. M. Lysko introducen esta propiedad y establecen los primeros resultados relacionados con ella; en [6], A. Illanes la llama *fupcon property* (full projection implies arbitrary small connected open neighborhoods). Nosotros, en honor de los primeros, decidimos usar las siglas B-L para nombrarla.

Como M es cerrado en X y X es normal, existe B un conjunto abierto de X tal que

$$M \subset B \subset \mathbf{cl}_X(B) \subset U,$$

como X tiene la propiedad B-L, existe U_1 conexo y abierto en X tal que $M \subset U_1 \subset B$, entonces

$$M \subset \mathbf{int}_X(U_1) \subset \mathbf{int}_X(\mathbf{cl}_X(U_1)) \subset \mathbf{cl}_X(U_1) \subset \mathbf{cl}_X(B) \subset U,$$

así $\mathbf{cl}_X(U_1)$ es el subcontinuo buscado.
Para probar la suficiencia, se define por recursión:
L_1 un subcontinuo de X tal que $M \subset \mathbf{int}_X(L_1) \subset L_1 \subset W$. Supóngase que se ha definido L_i para cada $i \leq n$, se define L_{n+1} un subcontinuo de X tal que $L_n \subset \mathbf{int}_x(L_{n+1}) \subset L_{n+1} \subset W$. Notar que $\bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo, $\bigcup\{\mathbf{int}_X(L_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en X y $\bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{\mathbf{int}_X(L_n) : n \in \mathbb{N}\}$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $L_n \subset \mathbf{int}_X(L_{n+1})$ y $\mathbf{int}_X(L_n) \subset L_n$ así, $V = \bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un abierto y conexo en X que satisface $M \subset V \subset W$. $\square$

2.2 Productos de continuos de Knaster

2.4 Definición. Una sucesión inversa es una sucesión de pares $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde cada X_i es un espacio y $f_i : X_{i+1} \to X_i$ es una función continua. El límite inverso de $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, denotado por $\mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, f_i\}$, es un subespacio del producto cartesiano $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ definido por

$$\mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, f_i\} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Una sucesión inversa de continuos $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa donde cada X_i es un continuo.

Si $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa entonces para cada par $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, se define $f_{m,n} : X_{m+1} \to X_n$ como $f_{m,n} = f_n \circ f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1} \circ f_m$ si $n < m$ y $f_{m,m} = f_m$.

2.5 Proposición. Si $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa donde para cada $i \in \mathbb{N}$ el espacio X_i es no vacío, f_i es suprayectiva y $X = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, f_i\}$, entonces cada proyección $\pi_i : X \to X_i$ es suprayectiva ($\pi_i(X) = X_i$).

Demostración. Como para cada $i \in \mathbb{N}$ la función f_i es suprayectiva, entonces para cada par de naturales m, n la función $f_{m,n}$ lo es, dado $x_N \in X_N$ se tiene que $f_{i,N}^{-1}(x_N)$ es no vacío así, para cada $i \geq N$ podemos elegir $x_i \in f_{i,N}^{-1}(x_N)$, por consiguiente

$$(f_{N,1}(x_N), f_{N,2}(x_N), \dots, x_N, x_{N+1}, \dots x_i, \dots) \in X$$

y $x_N \in \pi_N(X)$, por tanto $\pi_n(X) = X_N$. □

El siguiente teorema es un resultado bien conocido y fundamental en el estudio de límites inversos.

2.6 Teorema. El límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.

Demostración. [9, Theorem 2.4] □

2.7 Definición. Una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ se denomina plegable si y solo si existe una partición $R : 0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1$ tal que para cada $j \in \{1, 2, \dots m\}$, $f|_{[x_{j-1}, x_j]} : [x_{j-1}, x_j] \to [0,1]$ es un homemorfismo.

2.8 Definición. Un continuo el cual es el límite inverso de una sucesión de arcos $[0,1]$ y funciones plegables es llamado un continuo tipo Knaster o simplemente un continuo de Knaster.

2.9 Lema. Sea $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos tal que $\forall i \in \mathbb{N}$ f_i es suprayectiva y sea $X = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, f_i\}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ si $d_{X_N}(x_N, y_N) < \delta$, entonces $d_X((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \epsilon$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nótese que si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$, entonces $f_{m,n}$ es uniformemente continua, pues $f_{m,n}$ es continua y X_{m+1} es compacto así, si $N \in \mathbb{N}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ sea $\delta_i > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X_N$ con $d_{X_N}(x, y) < \delta_i$ implique que $d_{X_i}(f_{N-1,i}(x), f_{N-1,i}(y)) < \frac{\epsilon}{2N}$ (tales δ_i existen pues $f_{m,n}$ es uniformemente continua). Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \mathbf{mín}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}, \frac{\epsilon}{2}\}$.

Obsérvese que si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son puntos de X tales que $d_{X_N}(x_N, y_N) < \delta$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ se tiene que $d_{X_i}(f_{N-1,i}(x), f_{N-1,i}(y)) < \frac{\epsilon}{2N}$, es decir, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ se tiene que $d_{X_i}(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{2N}$. Así,

$$
\begin{aligned}
d_X((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(x_i, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(x_i, y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d_{X_i}(x_i, y_i) + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \sum_{i=1}^{N} d_{X_i}(x_i, y_i) + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \underbrace{\frac{\epsilon}{2N} + \cdots + \frac{\epsilon}{2N}}_{N-\text{veces}} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

□

2.10 Teorema. Sean $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones inversas de continuos. Sean $X = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, f_i\}$ y $Y = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{Y_i, g_i\}$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que:
(a)f_i y g_i son suprayectivas
(b)$X_i \times Y_i$ tiene la propiedad B-L
(c)Para cada subconjunto conexo A de $X_i \times Y_i$ tal que $\pi_{X_i}(A) = X_i$ y $\pi_{Y_i}(A) = Y_i$, el conjunto $B = (f_i \times g_i)^{-1}(A)$ es conexo, $\pi_{X_i+1}(B) = X_{i+1}$ y $\pi_{Y_i+1}(B) = Y_{i+1}$.
Entonces $X \times Y$ tiene la propiedad B-L.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi_n : X \times Y \to X_n \times Y_n$ la proyección definida por $\pi_n((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_n, y_n)$. Sea M un subcontinuo de $X \times Y$ y W un subconjunto abierto de $X \times Y$ tales que $\pi_X(M) = X$, $\pi_Y(M) = Y$ y $M \subset W$. De la proposición 1.7 se sigue que existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, M) \subset W$. Sea N tal que $N > 1$ y $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2}$. Por el lema 2.9 se tiene que existe $\delta > 0$ que

cumple lo siguiente:
(1) $\delta < \frac{\epsilon}{2}$
(2) si $w, z \in X \times Y$ y $d_{X_N \times Y_N}(\pi_N(w), \pi_N(z)) < \delta$, entonces $d_{X \times Y}(w, z) < \epsilon$.

Sea M_N el subcontinuo de $X_N \times Y_N$ definido por $M_N = \pi_N(M)$. Dada $x_N \in X_N$, puesto que f_N es suprayectiva, existe $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ tal que $\pi_{X_N}(x) = x_N$. Como $\pi_X(M) = X$, existe $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in Y$ tal que $(x, y) \in M$. De lo anterior se obtiene que $x_N = \pi_{X_N}(x_N, y_N) = \pi_{X_N}(\pi_N(x, y)) \in \pi_{X_N}(M_N)$. Esto prueba que $\pi_{X_N}(M_N) = X_N$, análogamente $\pi_{Y_N}(M_N) = Y_N$.

Dado que $X_N \times Y_N$ tiene la propiedad B-L, del lema 2.3, existe un subcontinuo L_N de $X_N \times Y_N$ tal que $M_N \subset \mathbf{int}_{X_N \times Y_N}(L_N) \subset L_N \subset N(\delta, M_N)$, pues $N(\delta, M_N)$ es un conjunto abierto en $X_N \times Y_N$ que tiene a M_N como subconjunto. Nótese que $\pi_{X_N}(L_N) = X_N$ y $\pi_{Y_N}(L_N) = Y_N$.

Para cada $m \geq N$, sea $L_{m+1} = (f_m \times g_m)^{-1}(L_m)$. Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ L_{N+n} es un continuo tal que $\pi_{X_{N+n}}(L_{N+n}) = X_{N+n}$ y $\pi_{Y_{N+n}}(L_{N+n}) = Y_{N+n}$, en efecto, para $n = 1$, como $L_{N+1} = (f_N \times g_N)^{-1}(L_N)$ y dado que f_N, g_N son funciones continuas, entonces L_{N+1} es cerrado en $X_{N+1} \times Y_{N+1}$ y por tanto compacto en $X_{N+1} \times Y_{N+1}$, y por (c) L_{N+1} es un conexo tal que $\pi_{X_{N+1}}(L_{N+1}) = X_{N+1}$ y $\pi_{Y_{N+1}}(L_{N+1}) = Y_{N+1}$. Ahora bien, si L_{N+n} es un sucontinuo de $X_{N+n} \times Y_{N+n}$ tal que $\pi_{X_{N+n}}(L_{N+n}) = X_{N+n}$ y $\pi_{Y_{N+n}}(L_{N+n}) = Y_{N+n}$, dado que f_{N+n}, g_{N+n} son funciones continuas, entonces L_{N+n+1} es cerrado en $X_{N+n+1} \times Y_{N+n+1}$ y por tanto compacto en $X_{N+n+1} \times Y_{N+n+1}$, y por (c) L_{N+n+1} es un conexo tal que $\pi_{X_{N+n+1}}(L_{N+n+1}) = X_{N+n+1}$ y $\pi_{Y_{N+n+1}}(L_{N+n+1}) = Y_{N+n+1}$.

Se define $L_{N-1} = (f_{N-1} \times g_{N-1})(L_N), L_{N-2} = (f_{N-2} \times g_{N-2})(L_{N-1}), \ldots, L_1 = (f_1 \times g_1)(L_2)$. Así $\{L_i, (f_i \times g_i)|_{L_{i+1}}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa de continuos. Sea $L = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{L_i, (f_i \times g_i)|_{L_{i+1}}\}$. Entonces L es un subcontinuo de $Z = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i \times Y_i, (f_i \times g_i)\}$. La función $h : X \times Y \to Z$ dada por $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un homeomorfismo, en efecto, pues si $w^1, w^2 \in X \times Y$ y $w^1 = ((x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i^1)_{i \in \mathbb{N}})$, $w^2 = ((x_i^2)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i^2)_{i \in \mathbb{N}})$, entonces

$$
\begin{aligned}
d_{X\times Y}(w^1,w^2) &= d_{X\times Y}(((x_i^1)_{i\in\mathbb{N}},(y_i^1)_{i\in\mathbb{N}}),((x_i^2)_{i\in\mathbb{N}},(y_i^2)_{i\in\mathbb{N}}))\\
&= \frac{1}{2}(d_X((x_i^1)_{i\in\mathbb{N}},(x_i^2)_{i\in\mathbb{N}})+d_Y((y_i^1)_{i\in\mathbb{N}}),(y_i^2)_{i\in\mathbb{N}})\\
&= \frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_{X_i}(x_i^1,x_i^2))+(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_{Y_i}(y_i^1,y_i^2))]\\
&= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}(d_{X_i}(x_i^1,x_i^2)+d_{Y_i}(y_i^1,y_i^2))]\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}[\frac{1}{2}(d_{X_i}(x_i^1,x_i^2)+d_{Y_i}(y_i^1,y_i^2))]\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}(d_{X_i\times Y_i}(x_i^1,y_i^1),(x_i^2,y_i^2))]\\
&= d_Z(h(w^1),h(w^2))
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
d_{X\times Y}(w^1,w^2)=d_Z(h(w^1),h(w^2)).
$$

Sea $((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}})\in\pi_N^{-1}(L_N)\subset X\times Y$, es decir, $(x_N,y_N)\in L_N$ así, de la construcción de L, se sigue que $h((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}})\in L$, por tanto $h(\pi_N^{-1}(L_N))\subset L$. Por otro lado si $a=(x_i',y_i')_{i\in\mathbb{N}}\in L$, entonces para cada $i\in\mathbb{N}$ se tiene que $(x_i',y_i')\in L_i$ y $(f_i\times g_i)(x_{i+1}',y_{i+1}')=(x_i',y_i')$, es decir, para cada $i\in\mathbb{N}$ $f_i(x_{i+1}')=x_i'$ y $g_i(y_{i+1}')=y_i'$, por consiguiente $(x_i')_{i\in\mathbb{N}}\in X$ y $(y_i')_{i\in\mathbb{N}}\in Y$, además $(x_N',y_N')\in L_N$, por tanto $a=(x_i',y_i')_{i\in\mathbb{N}}\in\pi_N^{-1}(L_N)\subset X\times Y$, luego $a\in h(\pi_N^{-1}(L_N))$, así $L\subset h(\pi_N^{-1}(L_N))$, por tanto $h(\pi_N^{-1}(L_N))=L$, luego, dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $\pi_N^{-1}(L_N)$ es un subcontinuo de $X\times Y$.
Como $\pi_N(M)=M_N\subset\mathbf{int}_{X_N\times Y_N}(L_N)$, entonces

$$
\begin{aligned}
M\subset\pi_N^{-1}(M_N)\subset{}&\pi_N^{-1}(\mathbf{int}_{X_N\times Y_N}(L_N))\\
&=\mathbf{int}_{X\times Y}(\pi_N^{-1}(\mathbf{int}_{X_N\times Y_N}(L_N)))\\
&\subset\mathbf{int}_{X\times Y}(\pi_N^{-1}(L_N))\\
&\subset\pi_N^{-1}(L_N).
\end{aligned}
$$

Dado $(x,y)=((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}})\in X\times Y$ cumple que $\pi_N(x,y)\in L_N$, se tiene que $(x_N,y_N)\in L_N$. Como $L_N\subset N(\delta,M_N)$, existen $u=(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y

$v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $(u, v) \in M$ y $d_{X_N\times Y_N}((x_N, y_N), (u_N, v_N)) < \delta$. De la elección de δ se tiene que $d_{X\times Y}((x, y), (u, v)) < \epsilon$, por tanto $(x, y) \in N(\epsilon, M)$, es decir,$\pi_N^{-1}(L_N) \subset N(\epsilon, M) \subset W$. Del lema 2.3 se concluye que $X \times Y$ tiene la propiedad B-L.

$\square$

2.11 Lema. Sean X, X' espacios topológicos homeomorfos. Si $X \times Y$ tiene la propiedad B-L, entonces $X' \times Y$ también tiene la propiedad B-L.

Demostración. Sea M un subcontinuo de $X' \times Y$ tal que $\pi_{X'}(M) = X'$ y $\pi_Y(M) = Y$, donde $\pi_{X'}, \pi_Y$ denotan a las funciones proyección de $X' \times Y$ en X' y $X' \times Y$ en Y respectivamente, y sea W' un subconjunto abierto de $X' \times Y$ tal que $M \subset W$.

Considérese f un homemorfismo de X' en X, entonces (f, id_Y) es un homeomorfismo de $X' \times Y$ en $X \times Y$. Si $x \in X$, entonces existe $x' \in X'$ tal que $f(x') = x$, como $x' \in \pi_{X'}(M)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(x', y) \in M$, así $(f, \mathrm{id}_Y)(x', y) = (f(x'), y) = (x, y) \in (f, \mathrm{id}_Y)(M)$, entonces $x \in \pi_X((f, \mathrm{id}_Y)(M))$ y por tanto $\pi_X((f, \mathrm{id}_Y)(M)) = X$, análogamente se puede concluir que $\pi_Y((f, \mathrm{id}_Y)(M)) = Y$. Como $X \times Y$ tiene la propiedad B-L y $(f, \mathrm{id}_Y)(M)$ es un subcontinuo de $X \times Y$, existe U un conjunto abierto y conexo de $X \times Y$ tal que $(f, \mathrm{id}_Y)(M) \subset U \subset (f, \mathrm{id}_Y)(W)$, al ser (f, id_Y) un homeomorfismo, se sigue que $M \subset (f, \mathrm{id}_Y)^{-1}(U) \subset W$ y $(f, \mathrm{id}_Y)^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y conexo de $X' \times Y$ y portanto $X' \times Y$ tiene la propiedad B-L.

$\square$

2.12 Teorema. Sea X un continuo tal que $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad B-L. Entonces para cada continuo de Knaster K el producto $X \times K$ tiene la propiedad B-L.

Demostración. Supóngase que $K = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{[0, 1]_i, f_i\}$ donde $f_i : [0, 1]_{i+1} \to [0, 1]_i$ es una función plegable. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $\rho_i : K \to [0, 1]_i$ la proyección sobre la $i-$ésima cordenada.

Como para cada $i \in \mathbb{N}$ la función f_i es suprayeciva, entonces de la proposición 2.5 se sigue que para cada $i \in \mathbb{N}$ la proyección $\rho_i(K) = [0, 1]_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $R_i : 0 = t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \cdots < t_{m_i}^{(i)} = 1$ la partición de $[0, 1]_{i+1}$ tal que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$, la función $h_j^{(i)} = f_i|_{[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}]}$:

$[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \to [0,1]_i$ es un homeomorfismo.

Para probar que $X \times K$ tiene la propiedad B-L, se aplicará el teorema 2.10 a los sistemas $\{X_i, \mathrm{id}_X\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{[0,1]_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde $X_i = X$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y id_X es la función identidad en X. Nótese que id_X y f_i son sobreyectivas así, (a) se cumple. Por hipótesis se tiene que $X \times [0,1] = X_i \times [0,1]_i$ tiene la propiedad B-L y por tanto (b) se cumple, así solo resta probar que (c) se cumple.

Sea $i \in \mathbb{N}$ y A un subconjunto conexo de $X_i \times [0,1]_i$ tal que $\pi_{X_i}(A) = X_i$ y $\pi_{[0,1]_i}(A) = [0,1]_i$. Se define

$$B = (\mathrm{id}_X \times f_i)^{-1}(A) \subset X_{i+1} \times [0,1]_{i+1}.$$

Sea $b = (b_1, b_2) \in B$, entonces $b_1 \in X_i$ y $b_2 \in [0,1]_i$, en particular $b_1 \in X_i$ y $b_2 \in [t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}]$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$, entonces $b \in (\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})^{-1}(A)$, entonces $b \in (\mathrm{id}_X \times h_1^{(i)})^{-1}(A) \cup \cdots \cup (\mathrm{id}_X \times h_{m_i}^{(i)})^{-1}(A)$ y por tanto $B \subset (\mathrm{id}_X \times h_1^{(i)})^{-1}(A) \cup \cdots \cup (\mathrm{id}_X \times h_{m_i}^{(i)})^{-1}(A)$.
Por otro lado, si $b \in (\mathrm{id}_X \times h_1^{(i)})^{-1}(A) \cup \cdots \cup (\mathrm{id}_X \times h_{m_i}^{(i)})^{-1}(A)$, entonces $b \in (\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})^{-1}(A)$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$, pero $h_j^{(i)}(A) \subset f_i(A)$ así, $(\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})^{-1}(A) \subset (\mathrm{id}_X \times f_i)^{-1}(A)$, entonces $b \in (\mathrm{id}_X \times f_i)^{-1}(A)$ y por tanto $B = (\mathrm{id}_X \times h_1^{(i)})^{-1}(A) \cup \cdots \cup (\mathrm{id}_X \times h_{m_i}^{(i)})^{-1}(A)$.

Puesto que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$,

$$(\mathrm{id}_X \times h_i^{(i)}) : X_{i+1} \times [t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \to X_i \times [0,1]_i$$

es un homeomorfismo, entonces $(\mathrm{id}_X \times h_i^{(i)})^{-1}(A)$ es conexo en $X_{i+1} \times [0,1]_i$. Dado que $\pi_{[0,1]_i}(A) = [0,1]_i$, existe $(x,t) \in A$ tal que $t = f_i(t_j^{(i)})$, entonces

$$(\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})(x, t_j^{(i)}) = (x, f_i(t_j^{(i)})) = (\mathrm{id}_X \times h_{j+1}^{(i)})(x, t_j^{(i)})$$

así,

$$(x, t_j^{(i)}) \in (\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})^{-1}(A) \cap (\mathrm{id}_X \times h_{j+1}^{(i)})^{-1}(A),$$

luego $(\mathrm{id}_X \times h_j^{(i)})^{-1}(A) \cap (\mathrm{id}_X \times h_{j+1}^{(i)})^{-1}(A) \neq \emptyset$ y por tanto B es un subconjunto conexo de $X_{i+1} \times [0,1]_{i+1}$.

Si $t \in [0,1]_{i+1}$, sea $s = f_i(t) \in [0,1]_i$. Puesto que $A \subset X_i \times [0,1]_i$ es tal que $\pi_{[0,1]_i}(A) = [0,1]_i$, entonces existe $x \in X_i$ tal que $(x,s) \in A$ así, $(\mathrm{id}_X \times f_i)(x,s) \in A$, por tanto $(x,t) \in B$, entonces $t \in \pi_{[0,1]_{i+1}}(B)$ y por tanto $\pi_{[0,1]_{i+1}}(B) = [0,1]_{i+1}$.

Si $x \in X_{i+1}$, entonces como $\pi_{X_i}(A) = X$, existe $s \in [0,1]_i$ tal que $(x,s) \in A$. Dado que f_i es suprayectiva, existe $t \in [0,1]_{i+1}$ tal que $s = f_i(t)$ así, $(\mathrm{id}_X \times f_i)(x,t) \in A$, entonces $(x,t) \in B$ así, $x \in \pi_{X_{i+1}}(B)$ y por tanto $X_{i+1} = \pi_{X_{i+1}}(B)$.
De lo anterior se concluye que $X' \times K$ tiene la propiedad B-L, donde $X' = \mathbf{lím}_{\leftarrow}\{X_i, \mathrm{id}_X\}$. Claramente X es homeomorfo a X' así, del lema 2.11, $X \times K$ tiene la propiedad B-L.

□

2.13 Lema. Si el espacio $X \times Y$ tiene la propiedad B-L, entonces $Y \times X$ tiene la propiedad B-L.

Demostración. Nótese que $f : X \times Y \to Y \times X$ dada por $f(x,y) = (y,x)$ es un homeomorfismo. Sean

$$\begin{aligned} \pi'_X &: X \times Y \to X \\ \pi'_Y &: X \times Y \to Y \\ \pi_X &: Y \times X \to X \\ \pi_Y &: Y \times X \to Y \end{aligned}$$

las funciones proyección de los espacios en cuestión.

Sea M un subcontinuo de $Y \times X$ tal que $\pi_X(M) = X$, $\pi_Y(M) = Y$ y W un subconjunto abierto de $Y \times X$ tal que $M \subset W$. Sean

$$\begin{aligned} M' &= \{(x,y) \in X \times Y : (y,x) \in M\} = f^{-1}(M) \\ W' &= \{(x,y) \in X \times Y : (y,x) \in W\} = f^{-1}(W). \end{aligned}$$

Nótese que si $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(y,x) \in M$ así, $(x,y) \in M'$, entonces $x \in \pi'_X(M')$ y por tanto $\pi'_X(M') = X$, análogamente se concluye que $\pi'_Y(M') = Y$. Como M' es un subcontinuo que se proyecta y W' es un abierto de $X \times Y$ tal que $M' \subset W'$ entonces existe U' un subconjunto abierto y conexo de $X \times Y$ tal que $M' \subset U' \subset W'$, entonces $f(M') \subset f(U') \subset f(W')$ y por tanto $M \subset f(U') \subset W$ con $f(U')$ abierto y conexo en $Y \times X$. □

2.14 Corolario. Cualquier producto finito de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $K_1, K_2, \ldots, K_n$ continuos de Knaster. Como $[0,1]^n$ es localmente conexo, entonces $[0,1]^n$ tiene la propiedad B-L.

Puesto que $[0,1]^n = [0,1]^{n-1} \times [0,1]$, del 2.12, $[0,1]^{n-1} \times K_n$ tiene la propiedad B-L así, del lema 2.13, se tiene que $K_n \times [0,1]^{n-1}$ tiene la propiedad B-L. $K_n \times [0,1]^{n-1} = (K_1 \times [0,1]^{n-2}) \times [0,1]$ tiene la propiedad B-L así, nuevamente por el teorema 2.12 y el lema 2.13, $K_{n-1} \times K_n \times [0,1]^{n-2}$ tiene la propiedad B-L. Aplicando el proceso anterior ($(n-1)$-veces) se concluye que $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ tiene la propiedad B-L. □

2.15 Definición. Sean J un conjunto y $\{X_\alpha \ : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $J' \subset J$. La función

$$\pi_{J'} : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in J'} X\alpha$$

definida por

$$\pi_{J'}(x) = x|_{J'}$$

para todo $x \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ se llama la función proyección del producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ al subproducto $\prod_{\alpha \in J'} X_\alpha$.

2.16 Observación. La función $\pi_{J'}$ es abierta y suprayectiva.

2.17 Lema. Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ donde J es un conjunto. Si $M \subset X$ es compacto y U es un abierto de X tal que $M \subset U$, entonces existe $F \subset J$ finito y V un conjunto abierto en $\pi_F(X)$ tal que $M \subset V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha \subset U$.

Demostración. Como U es un abierto, enonces $U = \bigcup A$, $A \subset B$ donde B es la base usual de X, es decir, $W \in B$ si y solo si

$$W = \prod_{\alpha \in J'} W_\alpha \times \prod_{\alpha \in J \setminus J'} X_\alpha \quad \text{con } J' \subset J \text{ finito y donde para cada } \alpha \in J'$$

$$W_\alpha \text{ es un conjunto abierto de } X_\alpha$$

Nótese que A es una cubierta abierta para M, así existe $C \subset A$ finito tal que $M \subset \bigcup C$. Sea $C = \{W_1, W_2, \ldots, W_n\}$ donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$W_i = \prod_{\alpha \in J_i} W_\alpha^i \times \prod_{\alpha \in J \setminus J_i} X_\alpha.$$

Sea $F = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ y sea

$$V = \bigcup_{i=1}^{n}(\pi_F(W_i)).$$

Veamos que

- (1). V es abierto en $\pi_F(X) = \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$.
- (2). $\pi_F(M) \subset V$.
- (3). $M \subset V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha \subset U$.

Para (1) basta notar que V es la unión de conjuntos abiertos pues la función $\pi_F : X \to \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ es continua, abierta, suprayectiva y cada W_i es abierto en X.

Para (2), sea $M_F = \pi_{F(M)}$ y $x_F \in M_F$, entonces existe $x \in M$ tal que $\pi_F(x) = x_F$. Como $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, entonces $x \in W_j$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así para cada $\alpha \in F$, $x_\alpha \in W_\alpha^j$ donde $x_\alpha = \pi_\alpha(x)$ y $W_\alpha^j = X_\alpha$ si $\alpha \in F \setminus J_j$ y por tanto $x_F \in \pi_F(W_j) \subset V$, es decir, $\pi_F(M) \subset V$.

Para (3). De (2) se sigue que $M \subset V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$, ahora bien, si $x \notin U = \cup A$ y por tanto $x \notin \cup C$, así para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $x \notin W_i$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\pi_F(x) \notin \pi_F(W_i)$, pues $x \in \prod_{\alpha \in J_i} W_\alpha^i \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$ si y solo si $\pi_F(x) \in \prod_{\alpha \in J_i} W_\alpha^i$, por tanto $\pi_F(x) \notin V$, luego $x \notin V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$, pues $x \in V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$ si y solo si $\pi_F(x) \in V$ y $\pi_{J \setminus F}(x) \in \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$ si y solo si $\pi_F(x) \in V$, de aquí que $x \notin V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$ y así se concluye que $V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha \subset U$. □

2.18 Corolario. El producto numerable de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L.

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, donde para cada $\alpha \in J$, X_α es un continuo de Knaster. Sea M un subcontinuo de X tal que para cada $\alpha \in J$ $\pi_\alpha(M) = X_\alpha$ y sea W un subconjunto abierto de X tal que $M \subset W$. Como M es compacto, del lema 2.17, existen $F \subset J$ un conjunto finito y V un conjunto abierto de $\pi_F(X)$ tal que $M \subset V \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha \subset W$.

Al ser $\pi_F(X)$ un producto finito de continuos de Knaster, del corolario 2.14, se tiene que existe U' un subconjunto abierto, conexo de $\pi_F(X)$ tal que

$\pi_F(M) \subset U' \subset V$, así $U = U' \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} X_\alpha$ es un conjunto abierto en X tal que $M \subset U \subset W$ y U es conexo, pues es el producto de conexos y por tanto X tiene la propiedad $B - L$. $\square$

Nótese que en la prueba anterior no depende de la cardinalidad de J, es decir, si la propiedad B-L se define para continuos de Hausdorff el resultado anterior sigue siendo cierto para un protucto arbitrario de continuos de Knaster.

2.3 Productos con pseudo-arco

2.19 Definición. Un punto fijo de un función f es un punto p tal que $f(p) = p$. Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo siempre que cada función continua de X en X tenga un punto fijo.

2.20 Teorema. Si X es un continuo localmente conexo y Y es un continuo homogéneo con la propiedad del punto fijo, entonces $Y \times X$ tiene la propiedad B-L.

Demostración. Sean M un subcontinuo de $Y \times X$ y W un conjunto abierto en $Y \times X$ tales que $M \subset W$, $\pi_Y(M) = Y$ y $\pi_X(M) = X$. Considérese $\epsilon > 0$ tal que $N(2\epsilon, M) \subset W$. Sea R la bola de radio ϵ con centro en la función identidad en el espacio de homeomorfismos de Y en Y (métrica uniforme). Para cada punto $p \in Y$ sea $R(p) = \{h(p) \in Y : h \in R\}$. Por el teorema de Effros, especificamente del corolario 1.27, $R(p)$ es una vecindad de p en Y.
Para cada $x \in X$ sea $S(x)$ un conjunto abierto y conexo en X tal que $x \in S(x)$ y de diametro menor a ϵ ($S(x)$ existe pues X es localmente conexo).
Sea $U = \bigcup\{R(p) \times S(x) : (p, x) \in M\}$. Nótese que $M \subset U$, pues si $(p, x) \in M$, entonces $R(p) \times S(x) \subset U$ y $p \in R(p)$ ($p = I_Y(p)$ y $I_Y(p) \in R(p)$) y $x \in S(x)$.

Como $R(p)$ es una vecindad de p en Y y $S(x)$ es un conjunto abierto en X, entonces $R(p) \times S(x)$ es una vecindad de (p, x) en $Y \times X$, así $M \subset \mathbf{int}_{Y \times X}(U)$.

Por otro lado, sea $(y, x') \in U$, entonces $(y, x') \in R(p) \times S(x)$ para algún $(p, x) \in M$, por tanto $y \in R(p)$ y $x' \in S(x)$ así, $y = h(p)$ para alguna $h \in R$, lo cual implica que $d_Y(y, p) < \epsilon$; como $S(x)$ tiene diametro menor a ϵ, se sigue que $d_X(x', x) < \epsilon$ y por tanto $d_{Y\times X}((y, x'), (p, x)) < \epsilon$ así, $(y, x') \in N(\epsilon, M)$ y por tanto $U \subset N(\epsilon, M)$. En resumen se tiene que

$$M \subset \mathbf{int}_{Y\times X}(U) \subset U \subset N(\epsilon, M) \subset \mathbf{cl}_{Y\times X}(N(\epsilon, M)) \subset W \subset Y \times X.$$

Se probará que U es conexo. Sea $(q, x') \in U$, entonces $(q, x') \in R(p) \times S(x)$, para algún $(p, x) \in M$. Dado que $q \in R(p)$, existe $h \in R$ tal que $h(p) = q$. Considérese el homeorfismo $g : Y \times X \to Y \times X$ dado $g = h \times \mathrm{id}_X$. Sea $N = g(M)$, entonces N es un subcontinuo de $Y \times X$. Dado que Y tiene la propiedad del punto fijo, existe $p_0 \in Y$ tal que $h(p_0) = p_0$. Dado que $\pi_Y(M) = Y$, existe $x_0 \in X$ tal que $(p_0, x_0) \in M$, entonces $(p_0, x_0) = g(p_0, x_0) \in N$. De lo anterior se concluye que $M \cup N$ es conexo.

Dado $g(r, v) \in M$ y la función $g(r, v) = (h(r), v) \in R(r) \times S(v) \subset U$, entonces $M \cap N \subset U$. Puesto que $g(p, x) = (q, x)$, se sigue que $(q, x) \in N \subset U$.

Dado que $(q, x') \in \{q\} \times S(x) \subset R(p) \times S(x) \subset U$ y $(q, x) \in N \cap (\{q\} \times S(x))$, entonces $M \cup N \cup (\{q\} \times S(x))$ es un subconjunto conexo de U que contiene a (q, x') e intersecta a M, al ser (q, x') arbitrario, se concluye que U es conexo. Por tanto $\mathrm{cl}_{Y\times X}(U)$ es un subcontinuo de $Y \times X$ contenido en W y que contiene a M en su interior. Del lema 2.3 se concluye que $Y \times X$ tiene la propiedad B-L. □

2.21 Definición. El Pseudo-arco es un continuo no degenerado, hereditariamente indescomponible y encadenable.

Se denotará por P al pseudo-arco. De [2] se tiene que P es homogéneo.

2.22 Lema. Si X es un continuo encadenable, con métrica d, entonces X tiene la propiedad del punto fijo

Demostración. [8, 2.4.18]. □

2.23 Corolario. $P \times [0, 1]$ tiene la propiedad B-L.

Demostración. Dado que P es homogéneo y tiene la propiedad del punto fijo y además $[0, 1]$ es localmente conexo basta aplicar 2.20. □

Del teorema 2.12 y del corolario 2.23 se obtiene la siguiente observación.

2.24 Observación. $P \times K$ tiene la propiedad B-L, donde K es un continuo de Knaster.

Ahora bien, dado que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $[0,1]^n$ es localmente conexo, procediendo como en la demostración del corolario 2.14 se obtiene la siguiente observación.

2.25 Observación. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el producto $P \times \prod_{i=1}^{n} K_i$ tiene la propiedad B-L, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el conjunto K_i es un continuo de Knaster.

2.4 Propiedad B-L implica factores de Kelley

2.26 Definición. Un continuo X es un continuo de Kelley siempre que dados un punto p de X, un subcontinuo A de X y una sucesión $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X tales que $p \in A$ y $p_i \to p$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_i \in A_i$ y $A_i \to A$ con la métrica de Hausdorff.

2.27 Lema. Sean X y Y continuos y $X \times Y$ con la propiedad B-L. Si A un subcontinuo de X, $p \in A$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\mathbf{lím}_{n\to\infty} p_n = p$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y para cualquier $a \in A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$, $p_n \in N(\epsilon, A)$ y $a \in N(\epsilon, \mathrm{cl}_X(C_n))$, donde C_n es la componente de $N(\epsilon, A)$ que contiene a p_n.

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $3\delta < \mathbf{mín}\{\epsilon,\ \text{diámetro}(Y)\}$. Sean $y_0, y_1 \in Y$ tal que $d_Y(y_0) = \mathrm{diam}(Y)$. Sea $M = (X \times \{y_0\}) \cap (\{a\} \times Y) \cap (A \times \{y_1\})$, como $X \times \{y_0\}$, $\{a\} \times Y$, $A \times \{y_1\}$ son homeomorfos a X y A respectivamente se sigue que $X \times \{y_0\}$, $\{a\} \times Y$, $A \times \{y_1\}$ son subcontinuos de $X \times Y$, además como $(a, y_0) \in (X \times \{y_0\}) \cap (\{a\} \times Y)$ y $(a, y_1) \in (\{a\} \times Y) \cap (A \times \{y_1\})$ se deduce que M es un subcontinuo de $X \times Y$ que además cumple que $\pi_X(M) = X$ y $\pi_Y(M) = Y$. Como $X \times Y$ tiene la propiedad B-L, del lema 2.3, existe L un subcontinuo de $X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} M &\subset U \subset \mathbf{int}_{X\times Y}(L) \subset L \\ &\qquad \subset (X \times B_Y(y_o, \delta)) \cap (B_X(a, \delta) \times Y) \cap (N(\delta, A) \times B_Y(y_1, \delta), \end{aligned}$$

nuevamente como $(X \times Y)$ tiene la propiedad B-L, existe U un conjunto abierto y conexo de $X \times Y$ tal que $M \subset U \subset \mathbf{int}_{X\times Y}(L) \subset L = \mathbf{cl}_{X\times Y}(L)$ y por tanto

$$\begin{aligned} M &\subset U \subset \mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \\ &\qquad \subset (X \times B_Y(y_o, \delta)) \cap (B_X(a, \delta) \times Y) \cap (N(\delta, A) \times B_Y(y_1, \delta). \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{l\acute{\imath}m}_{n\to\infty}(p_n, y_1) = (p, y_1) \in A \times \{y_1\}$ y $\mathbf{l\acute{\imath}m}_{n\to\infty}(p_n) = p \in A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, el punto $(p_n, y_1) \in U$ y $p_n \in N(\epsilon, A)$. Dado $n \geq N$, sea D_n la componente de $\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))$ tal que $(p_n, y_1) \in D_n$. Puesto que $3\delta < d(y_1, y_0)$, entonces

$$\mathbf{cl}_{X\times Y}(X \times B_Y(y_1, \delta)) \cap \mathbf{cl}_{X\times Y}(X \times B_Y(y_0, \delta)) = \emptyset,$$

lo cual implica que

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}(D_n) \cap (X \times B_Y(y_0, \delta)) = \emptyset$$

así,

$$\mathbf{cl}_{X\times Y}(D_n) \subset \mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \backslash (X \times B_Y(y_0, \delta)) \subset (B_X(a, \delta) \times Y) \cup (N(\delta, A) \times B_Y(y_1, \delta)$$

y $p_n \in \pi_X(\mathbf{cl}_{X\times Y}(D_n)) \subset N(\delta, A)$. Como $\pi_X(\mathbf{cl}_{X\times Y}(D_n))$ es un conjunto conexo contenido en $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$, entonces $\pi_X(\mathrm{cl}_{X\times Y}(D_n)) \subset C_n$. Dado que $X \times \{y_0\} \subset M \subset U$ y $(X \times \{y_0\}) \cup (X \times B_Y(y_!, \delta)) = \emptyset$ (pues $\{y_0\} \cap B_Y(y_1, \delta) = \emptyset$), tenemos que $\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_y(y_1\delta))$ es un subconjunto propio de $\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)$, del teorema 1.23, existe un punto

$$z \in \mathrm{Fr}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))) \cap \mathbf{cl}_{\mathrm{cl}_{X\times Y}(U)}(D_n).$$

así,

$$\begin{aligned} z \in &\mathbf{cl}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))) \\ &\cap \mathbf{cl}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \setminus (\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta)))) \\ &= \mathbf{cl}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))) \\ &\cap \mathbf{cl}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \setminus (X \times B_Y(y_1, \delta))) \\ &= \mathbf{cl}_{\mathbf{cl}_{X\times Y}(U)}(\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))) \\ &\cap (\mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \setminus (X \times B_Y(y_1, \delta))) \end{aligned}$$

de aquí, $z \notin \mathbf{cl}_{X\times Y}(U) \cap (X \times B_Y(y_1, \delta))$. De lo anterior se concluye que $z \in B_X(a, \delta) \times Y$ y $\pi_X(z) \in B_X(a, \delta)$. $\square$

2.28 Lema. Sean X y Y continuos y $X \times Y$ con la propiedad B-L. Si A un subcontinuo de X, $p \in A$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\mathbf{l\acute{\imath}m}_{n\to\infty} p_n = p$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe, $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$, $p_n \in N(\epsilon, A)$ y $H(\mathbf{cl}(C_n), A) < 2\epsilon$, donde C_n es la componente de $N(A, \epsilon)$ que contiene a p_n.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. $\mathcal{F} = \{B(a,\epsilon) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, dado que A es compacto, existe $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un subconjunto de A tal que $A \subset \cup_{a \in A_0} B(a,\epsilon)$. Como $A_0 \subset A$ entonces $A_0 \subset N(\epsilon, A)$. Por otro lado, $\bigcup_{a \in A_0} B(a,\epsilon) \subset N(\epsilon, A_0)$ y por tanto $H(A, A_0) < \epsilon$. Del lema 2.27 se sigue que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_i$, $p_n \in N(A,\epsilon)$ y $a_i \in N(\epsilon, \mathrm{cl}_X(C_n))$. Sea $N = \mathbf{máx}\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ así, para cada $n \geq N$, $p_n \in N(\epsilon, A)$, además como C_n es una componente de $N(\epsilon, A)$, entonces $\mathrm{cl}_X(C_n) \subset N(2\epsilon, A)$. Por otro lado, como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ el punto $a_i \in N(\epsilon, \mathbf{cl}_X(C_n))$, entonces $A_0 \subset N(\epsilon, \mathbf{cl}_X(C_n))$ lo cual implica que $N(\epsilon, A_0) \subset N(2\epsilon, \mathbf{cl}_X(C_n))$, pero $A \subset N(\epsilon, A)$ así $A \subset N(2\epsilon, \mathbf{cl}_X(C_n))$ y por tanto $H(\mathbf{cl}_X(C_n), A) < 2\epsilon$. $\square$

2.29 Teorema. Si X, Y son continuos y $X \times Y$ tiene la propiedad B-L, entonces X, Y son continuos de Kelley.

Demostración. Veremos que X es un continuo de Kelley. Sea A un subcontinuo de X, $p \in A$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\mathbf{lím}_{n \to \infty} p_n = p$.

Aplicando el lema 2.28 es posible construir una sucesión creciente $1 < N_1 < N_2 < \cdots$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq N_m$, $p_n \in N(\frac{1}{m}, A)$ y $H(\mathbf{cl}_X(C_N^{(m)}), A) < \frac{2}{m}$, donde $C_n^{(m)}$ es la componente de $N(\frac{1}{m}, A)$ que contiene a p_n.
Denótese por $A_1, A_2, \ldots$ los elementos de la secuencia

$$X_1, X_2, \ldots, X_{N_1 - 1}, \mathbf{cl}_X(C_{N_1}^{(N_1)}), \ldots, \mathbf{cl}_X(C_{N_2-1}^{(N_1)}), \mathbf{cl}_X(C_{N_2}^{(N_2)}), \ldots,$$
$$\mathbf{cl}_X(C_{N_2}^{(N_3-1)}), \mathbf{cl}_X(C_{N_3}^{(N_3)}), \ldots, \mathbf{cl}_X(C_{N_3}^{(N_4-1)}), \mathbf{cl}_X(C_{N_4}^{(N_4)}), \ldots$$

Donde $X = X_1 = X_2 = \cdots = X_{N_1 - 1}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un subcontinuo de X, $p_n \in A_n$ y $\mathbf{lím}_{n \to \infty} A_n = A$, por tanto, X es un continuo de Kelley. $\square$

Conclusiones

En esta memoria se presenta un estudio de una propiedad topológica que se expresa en productos de espacios, particularmente en productos de continuos, y que hemos denominado propiedad B-L. Esta noción, es introducida originalmente por D. P. Bellamy y J. M. Lysko en 2014, [1]. Poco después, en 2016, A. Illanes en [6] la llama *fupcon property* (full projection implies arbitrary small connected open neighborhoods) y presenta varios teoremas relevantes, resolviendo problemas planteados por los primeros. De hecho, fundamentalmente, esta tesis trata de hacer una exposición de los resultados contenidos en ese artículo de A. Illanes.

Se define formalmente la propiedad B-L. Se demuestra que los productos localmente conexos, que el producto arbitrario de continuos de Knaster, y que algunos productos que incluyen al pseudo-arco como factor tienen esta propiedad. Además, se demuestra que si el producto de dos continuos tiene la propiedad B-L entonces los espacios coordenados son continuos de Kelley.

Comentario final con pregunta: Con los resultados expuestos se obtiene, de una forma indirecta, que los continuos localmente conexos, los productos de continuos de Knaster, y el pseudo-arco, son continuos de Kelley. Podría ser interesante comparar esta forma de obtener tales conclusiones con otras pruebas conocidas de estos hechos. Por otra parte, debido a que el producto del pseudo-arco con un producto finito de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L, da la "sensación" de que bastaría un argumento de compacidad para responder de forma afirmativa la siguiente pregunta, que se deja planteada para gusto de quien gustare: ¿El producto del pseudo-arco con un producto numerable de continuos de Knaster tiene la propiedad B-L?

Noticia de última hora: Hace unas semanas nos enteramos de que un joven doctorante de la Facultad de Ciencias de la UNAM, ha elaborado dos artículos de investigación, [10] de publicación reciente y [11] de publicación pendiente, en los cuales demuestra que el producto de dos continuos encadenables de Kelley es un continuo de Kelley que tiene la propiedad B-L. Se incluye este dato para hacer notar que lo que se estudia en esta tesis es un tema de investigación en la actualidad.

Referencias

[1] D. P. Bellamy and J. M. Lysko, Conected open neighborhoods of subcontinua of product continua with indecomposable factors, *Topology Proc.*, **44** (2014), 223–231.

[2] R. H. Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math. J.*,**15**(1948), 729–742.

[3] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas: Serie Textos; SMM-UNAM., 2011.

[4] E. G. Effros, Transformations groups and C*-algebras, *Ann. of Math (2)* **81**(1965), 38–55.

[5] C. L. Hagopian, Homogeneous continua, *Houston J. Math.*, **1** (1975), 35–41.

[6] A. Illanes, Conected open neighborhoods in products, *Acta Math. Hungar.*, **148 (1)**(2016), 73–82.

[7] I. Iribarren *Topología de espacios métricos*, Limusa, 1973.

[8] Sergio Macías, *Topics on Continua*, second edition, Springer, 2018.

[9] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, Inc, 1992.

[10] J. A. Naranjo-Murillo, The product of two chainable Kelley continua is also a Kelley continuum, *Topol. Appl.*, **269** (2020), 106924, 13 pp.

[11] J. A. Naranjo-Murillo, The product of two chainable Kelley continua has the fupcon property, *preprint*, (2020).

Índice alfabético

B
B-L, p.11
C
Casi componente, p.5
Continuo de Kelly, p.25
continuo de Knaster, p.14

F
Función plegable, p.14
Fupcon, p.11

H
Homogéneo, p.9

L
Límite inverso, p.13

M
Métrica de Hausdorff, p.4

N
$N(\epsilon, A)$, p.4

P
Pseudoarco, p.24