# Algunas caracterizaciones de anillos MAX


Tesis escrita por

Brenda Navarro Flores

Director de tesis

Dr. César Cejudo Castilla


Como requerimiento para obtener
el título de
Licenciado en matemáticas


BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Puebla, Puebla


5 de enero de 2018

# AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue producto del esfuerzo de muchas personas, que con su paciencia, enseñanzas, cariño y apoyo me impulsaron a lograrlo. Para empezar, quiero agradecer a mi familia y amigos, a todos los profesores que con sus clases y consejos me nutrieron de matemáticas y me permitieron llegar hasta aquí, y a todos los matemáticos de la historia porque gracias a ellos pude acceder a tantas cosas sorprendentes e inimaginables.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr César Cejudo Castilla, por su clase de anillos, que tanto me gustó y me encaminó hacía esta área tan bonita e indomable. También agradezco su guía y que haya creído en mí.

Gracias a mi familia por todo. A mi papá por enseñarme a creer en el trabajo duro, por enseñarme a creer que no importa lo lejos que parezca lo que se desea mientras uno trabaje lo suficiente. Y también por trabajar arduamente cada día para brindarme la oportunidad de estudiar lo que me gusta y seguir el camino que deseo. ¡Muchas gracias papá!.
A mi mamá por estar siempre ahí, por cuidarme y apoyarme siempre, por tenerme tanta paciencia, por enseñarme tantas cosas, por sus consejos, por buscar siempre lo mejor para mí y por quererme cada día incluso aquellos días en que no me lo merezco. ¡Gracias por todo mamá!.
A mi hermana por ser mi mejor amiga. Por apoyarme en cada momento, por guiarme y aconsejarme. Por mostrarme este camino de las matemáticas, que tanto me gusta, y que nunca deja de sorprenderme.¡Muchas gracias hermanita!.

Quiero agradecer a Levent por todo su apoyo y cariño. Por su paciencia y entusiamo, por mostrarme tantas cosas maravillosas de las matemáticas. Por darme esperanza y alegría. Gracias por impulsarme a crecer y a soñar, gracias por no rendirte nunca y caminar a mi lado. ¡Gracias por tanto, amor!.

# INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se estudian algunas caracterizaciones de anillos MAX, las que se hacen a través de la categoría de $R-$Mód, es decir, se dice qué condiciones son necesarias y suficientes en $R-$Mód para que el respectivo anillo sea MAX.
Se consideran anillos asociativos con unidad. Un $R-$módulo izquierdo $M$ es Max si cada submódulo distinto de cero de $M$, tiene al menos un submódulo máximo. Un anillo $R$ es MAX izquierdo si cada $R-$módulo izquierdo $M$ distinto de cero es Max.
Los anillos MAX tomaron interés tras la conjetura del Dr Hyman Bass, la cual dice que: un anillo $R$ es perfecto izquierdo si, y sólo si, $R$ es MAX y $R$ no tiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales.
En 1966, Ross M. Hamsher demostró que la conjetura es cierta para anillos conmutativos [5], para lo que estableció algunas equivalencias de anillos MAX conmutativos.
En 1969, John H. Cozzens en "Homological properties of the ring of differential polýnomials" y L.A. Koifman en "Rings over which every module has a maximal submodule" dan ejemplos con los que muestran que en el caso general la conjetura de Bass no es cierta; Koifman en el camino de su ejemplo estableció equivalencias de anillos MAX.
Más tarde V. P. Camillo, en 1975, con "On some rings whose modules have maximal submodules" retoma los anillos MAX con el fin de hablar de $V-$anillos, pero es en 1995, cuando el matemático estadounidense Carl Faith escribió un artículo en el cual se centra única y exclusivamente en anillos MAX, "RINGS WHOSE MODULES HAVE MAXIMAL SUBMODULES" [3], en el se dedica a establecer equivalencias de los anillos MAX.
El objetivo de este trabajo es estudiar el artículo de Faith y con ayuda de otros articulos de álgebra abstracta, como [5] y [6], presentar de forma explícita las demostraciones correspondientes. Para ello exponemos dos teoremas de Ross M. Hamsher que nos suministran las siguientes equivalencias: (1) Un anillo conmutativo $R$ es MAX si y sólo si $R/rad(R)$ es Von Neumann regular y $rad(R)$ es $T-$nilpotente derecho. (2) Un anillo $R$ es MAX si y sólo si $R/rad(R)$ es MAX y $rad(R)$ es $T-$nilpotente derecho. Estas equivalencias son herramientas importantes para el trabajo de Faith.
En el capítulo I se encuentran definiciones y resultados que son necesarios para entender el capítulo II, en el cual se presentan todas las caracterizaciones de anillos MAX dadas en el trabajo de Faith.

En la primera sección del capítulo II, Módulos Max, se tienen las siguientes equivalencias de anillos MAX: (1) $R$ es un anillo MAX izquierdo si y sólo si $R-$Mód tiene un cogenerador Max. (2) Otra equivalencia involucra radicales transfinitos. Existe un cogenerador $R-$Mód tal que para algún ordinal $\alpha$, $rad^{\alpha}(C) = 0$ si y sólo tal cogenerador es Max y de acuerdo a la equivalencia anterior ocurre si y sólo si $R$ es MAX. (3) $R$ es MAX si y sólo si cada $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo $M$, distinto de cero, tiene al menos un submódulo máximo y esto ocurre si y sólo si cada $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo co-cíclico M, distinto de cero, tiene al menos un submódulo máximo.

En la sección 2.2, Series Loewy y módulos semisimples transfinitos, se obtiene una condición necesaria para que un anillo $R$ sea MAX: que las cápsulas inyectivas de cada $R-$módulo simple sean semisimples transfinitas. En las secciones 2.3 y 2.4 se establecen relaciones de los anuladores, que serán necesarias para la sección 2.5.

Los $V-$anillos son ejemplos de anillos MAX, en la sección de cogeneradores inyectivos (2.5) queda establecido que dado un cogenerador inyectivo $C$ de $R-$Mód, se tiene que $R$ es un $V-$anillo si y sólo si $rad(C) = 0$. Además en la sección 2.5, con ayuda de la sección 2.4 y $\Lambda$, el anillo de endomorfismos de un cogenerador inyectivo $C$ de $R-$Mód, se formulan algunas equivalencias más de anillos MAX, por ejemplo: (1) $R$ es MAX si y sólo si $\Lambda/L$ tiene zoclo distinto de cero para $L = ann_{\Lambda}(M)$, donde $M$ es un submódulo distinto de cero de $C$ y (2) $R$ es MAX si y sólo si $rad(R)$ es $T-$nilpotente y $\Lambda/L$ tiene zoclo distinto de cero para $L = ann_{\Lambda}(M)$, donde $M$ es un submódulo distinto de cero de $C$, anulado por $rad(R)$.

# ÍNDICE

Agradecimientos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . iii
Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . iv
índice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . vi
Capítulo I: Preliminares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.1 Anillos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.2 Localización de un anillo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.3 Módulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.4 Morfismos de módulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.5 Productos directos sumas directas y módulos libres . . . . . . . . . . 17
1.6 Módulos inyectivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.7 Módulos semisimples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
1.8 Anuladores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
1.9 Módulos divisibles. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
1.10 Radical y zoclo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
1.11 Cogeneradores de $R-$Mód . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
Capítulo II: Caracterizaciones de anillos MAX . . . . . . . . . . . . . . . 50
2.1 Módulos Max . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
2.2 Series Loewy y módulos semisimples transfinitos . . . . . . . . . . . 65
2.3 Módulos Bass . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
2.4 Condiciones de doble anulador para cogeneradores . . . . . . . . . . 70
2.5 Cogeneradores inyectivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
Bibliografía . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

*Capítulo 1*

# PRELIMINARES

## 1.1 Anillos

**Definición 1.1.1.** 1) Un **anillo** $R$ es un conjunto distinto del vacío con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, llamadas adición y multiplicación, respectivamente, que satisfacen:

i) $(R, +)$ es un grupo abeliano.

ii) $\cdot$ es asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para cada $a, b, c \in R$.

iii) Se cumplen las leyes distributivas: para cada $a, b, c \in R$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \text{ y } a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

2) Decimos que el anillo $R$ es un **anillo con identidad** si existe un elemento $1 \in R$ tal que para cada $a \in R$ se cumple que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

3) El anillo $R$ es **conmutativo** si la multiplicación es conmutativa.

4) Para un anillo $R$ con identidad, decimos que $r \in R$, $r \neq 0$, tiene **inverso multiplicativo izquierdo** si existe $z \in R$ tal que $zr = 1$. Decimos que $r$ tiene **inverso multiplicativo derecho** si existe $w \in R$ tal que $rw = 1$. Decimos que $r \in R$, $r \neq 0$, es **unidad** si $r$ tiene inverso multiplicativo derecho e inverso multiplicativo izquierdo.

**Nota:** En lo sucesivo del trabajo usamos anillos con identidad, en adelante escribiremos solamente anillo para referirnos a anillos con identidad.

**Definición 1.1.2.** Un anillo $R$ con identidad, donde $1 \neq 0$, es llamado **anillo con división** si cada elemento diferente de cero $a \in R$ tiene inverso multiplicativo. Un anillo conmutativo con división es llamado un **campo**.

**Definición 1.1.3.** Sea $R$ un anillo y $I \subseteq R$ no vacio. $I$ es un **ideal izquierdo** de $R$ si y sólo si:

1) $I$ es un subgrupo aditivo de $R$.

2) Para cada $(r, a) \in R \times I$ se cumple que $r \cdot a \in I$.

Análogamente se define **ideal derecho**. Un **ideal** es un ideal derecho e izquierdo.

Sea $R$ un anillo y $a \in R$, entonces se puede verificar que $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ es un ideal izquierdo. A $Ra$ le llamaremos **ideal principal izquierdo**.
También se puede verificar que $aR = \{ar \mid r \in R\}$ es un ideal derecho, al que llamaremos **ideal principal derecho**.

**Definición 1.1.4.** Sea $R$ un anillo. Y $P$ un ideal propio de $R$, entonces $P$ es **un ideal primo** si y sólo si: $ab \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

**Definición 1.1.5.** Un ideal propio $I$ de $R$ es llamado **semiprimo** si para cualquier $J$ ideal de $R$ tal que para algún entero positivo $n$ se cumple que $J^n \subseteq I$, entonces $J \subseteq I$.

**Definición 1.1.6.** Sea $R$ un anillo y $A$ un subconjunto del conjunto de ideales de $R$. Decimos que $A$ es una **cadena** de ideales de $R$ si y sólo si para cualesquiera $I_1, I_2 \in A$ se cumple que $I_1 \subseteq I_2$ o $I_2 \subseteq I_1$.

**Definición 1.1.7.** Sea $R$ un anillo y $A$ una cadena de ideales de $R$. Definimos la **longitud** de $A$ como la cardinalidad de $A$.

**Definición 1.1.8.** Sea $R$ un anillo. La **dimensión de Krull** de $R$ es el supremo de las longitudes de todas las cadenas de ideales primos de $R$.

**Definición 1.1.9.** Sea $R$ un anillo. $a \in R$ es **nilpotente** si y sólo si existe $n$ entero positivo tal que $a^n = 0$.

**Definición 1.1.10.** Sea $R$ un anillo. $R$ es un **anillo reducido** si y sólo si $R$ no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

**Definición 1.1.11.** Sea $R$ un anillo. $I$ es un **ideal máximo** de $R$ si no existe otro ideal propio de $R$ que contenga propiamente a $I$.

**Definición 1.1.12.** Sea $R$ un anillo. $R$ es un **anillo local** si y sólo si existe un único ideal $M$ de $R$ máximo. Usualmente decimos que $(R, M)$ es local.

**Definición 1.1.13.** Sea $R$ un anillo, el **radical primo** de un anillo, $Nil_*R$, es el más pequeño ideal semiprimo de $R$.

**Observación:** Si $R$ es conmutativo $Nil_* R = Nil(R)$, donde $Nil(R)$ es el conjunto de todos los elementos nilpotentes de $R$.

**Definición 1.1.14.** Sea $R$ un anillo. $R$ es un anillo **Von Neumann regular** si y sólo si para cada $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$.

**Teorema 1.1.15.** *Sea R un anillo. R es Von Neumann regular si y sólo si cada ideal principal izquierdo de R es un sumando directo de R si y sólo si cada ideal iderecho es un sumando directo de R.*

***Demostración***. Página 175 [1]. ■

## 1.2 Localización de un anillo

**Motivación de localización:**

Sea $R$ un anillo conmutativo con identidad que no es un campo, es decir, en el que no todos sus elementos distintos de cero tienen inverso multiplicativo. La idea algebraica de localización es entonces hacer a más (o incluso a todos) de los elementos distintos de cero, invertibles, introduciendo fracciones de la misma forma que pasamos de los números enteros $\mathbb{Z}$ a los números racionales $\mathbb{Q}$.

Lo mostraremos de forma más precisa con este ejemplo particular: empezemos con $R = \mathbb{Z}$, y sea $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ el subconjunto de $R$ cuyos elementos deseamos que sean invertibles. En el conjunto $R \times S$ consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow as' - a's = 0$$

y denotemos a la clase de equivalencia de $(a, s)$ como $\frac{a}{s}$. El conjunto de estas "fracciones" es claramente $\mathbb{Q}$, y podemos definir la adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$ en la forma esperada por:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$$

y

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

**Definición 1.2.1.** Sea $R$ un anillo conmutativo. Un subconjunto $S \subseteq R$ es llamado **cerrado bajo la multiplicación** si $1 \in S$ y $ab \in S$ para cada $a, b \in S$.

**Proposición 1.2.2.** *Sean R un anillo conmutativo y $S \subseteq R$ un conjunto cerrado bajo la multiplicación. Entonces:*

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \text{ existe un elemento } u \in S \text{ tal que } u(as' - a's) = 0$$

*es una relación de equivalencia en $R \times S$*

***Demostración***. Claramente $\sim$ es reflexiva y simétrica ($R$ es conmutativo). Veamos que es transitiva:
Si $(a, s) \sim (a', s')$ y $(a', s') \sim (a'', s'')$ entonces existe $u, v \in S$ con $u(as' - a's) = v(a's'' - a''s') = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} s'uv(as'' - a''s) &= uv(as's'' - a''s's) \\ &= uv(as's'' - a'ss'' + a'ss'' - a''s's) \\ &= uv(as's'' - a'ss'') + uv(a'ss'' - a''s's) \\ &= s''v \cdot u(as' - a's) + su \cdot v(a's'' - a''s') = 0 \end{aligned}$$

Como $S$ es cerrado con la multiplicación, $s'uv \in S$, entonces $(a, s) \sim (a'', s'')$ y por tanto $\sim$ es transitiva. ■

**Definición 1.2.3.** Sea $R$ un anillo conmutativo, $S \subseteq R$ un conjunto cerrado bajo la multiplicación y $\sim$ la relación de equivalencia en $R \times S$ definida en la Proposición 1.2.2. Denotamos la clase de equivalencia del par $(a, s) \in R \times S$ por $\frac{a}{s}$. El conjunto de clases de equivalencia

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} : a \in R, s' \in S \right\}$$

es llamada la **localización** de $R$ **en el conjunto cerrado bajo multiplicación S**

**Proposición 1.2.4.** *Sea $R$ un anillo conmutativo, $S \subseteq R$ un conjunto cerrado bajo la multiplicación, entonces $S^{-1}R$ es un anillo con adición y multiplicación*

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \text{ y } \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

*y cuyo cero es $\frac{0}{1}$ y uno es $\frac{1}{1}$.*

***Demostración***. Veamos que la adición y multiplicación en $S^{-1}R$ están bien definidas:
Si $(a, s) \sim (a'', s'')$, es decir, $u(as'' - a''s) = 0$ para algún $u \in S$, entonces

$$\begin{aligned} u((as' + a's)(s''s') - (a''s' + a's'')(ss')) &= u(as's''s' + a'ss''s' \\ &\quad -a''s'ss' - a's''ss') \\ &= u(as's''s' - a''s'ss') \\ &= u(s')^2(as'' - a''s) = 0 \end{aligned}$$

y

$$u((aa')(s''s) - (a''a')(ss')) = a's' \cdot u(as'' - a''s) = 0,$$

por tanto $\frac{as'+a's}{ss'} = \frac{a''s'+a's''}{s''s'}$ y $\frac{aa'}{ss'} = \frac{a''a'}{s''s'}$.
Se verifica facilmente que las operaciones cumplen lo necesario para que $S^{-1}R$ sea un anillo. ■

**Ejemplos:**

a) La localización de $\mathbb{Z}$ con $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es $\mathbb{Q}$.

b) Sea $P \leq R$ un **ideal primo**. Entonces $S = R \setminus P$ es cerrado bajo la multiplicación. **La localización** $S^{-1}R$ **es denotada por** $R_{(P)}$.

c) Para un elemento fijo $a \in R$, $S = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente cerrado bajo la multiplicación. $S^{-1}R$ se denota como $R_{(a)}$.

d) Si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo entonces la localización del elemento $p$ nos da el anillo
$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{p^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Proposición 1.2.5.** *Sea $S$ un subconjunto de $R$ cerrado bajo la multiplicación. Sea $\varphi\colon R \to S^{-1}R$ tal que $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ morfismo de anillos.*

*a) Para cada ideal $I \leq R$ tenemos que*
$$\varphi(I) = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}.$$

*b) Para cada ideal $I \leq S^{-1}R$, $\varphi(\varphi^{-1}(I)) = I$, ($\varphi^{-1}(I)$ es la preimagen de $I$).*

*c) $\varphi$ nos proporciona una correspondencia biyectiva entre los siguientes conjuntos:*
$$\begin{array}{ccc} \{ \textit{ideales primos } I \textit{ en } R \textit{ con } I \cap S = \emptyset\} & \longleftrightarrow & \{ \textit{ideales primos en } S^{-1}R\}. \\ I & \mapsto & \varphi(I) \end{array}$$

***Demostración***. *a*) Para $s \in S$, $\frac{1}{s}\varphi(a) = \frac{a}{s} \in \varphi(I)$ para cada $a \in I$ y como
$$\left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$$

es un ideal en $S^{-1}R$, se sigue la igualdad.
$b$) Basta mostrar que $I \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(I))$. Sea $\frac{a}{s} \in I$, entonces $a \in \varphi^{-1}(I)$, pues $\varphi(a) = \frac{a}{1} = s\frac{a}{s} \in I$, de a) aplicado a $\varphi-1(I)$ se sigue que $\frac{a}{s} \in \varphi(\varphi^{-1}(I))$.
$c$) Notemos primero que la siguiente relación está bien definida:

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \text{ideales primos en } S^{-1}R \right\} & \longrightarrow & \{ \text{ideales primos } I \text{ en } R \text{ con } I \cap S = \varnothing \} . \\ I & \mapsto & \varphi^{-1}(I) \end{array}$$

Si $I$ es un ideal primo en $S^{-1}R$, entonces $\varphi^{-1}(I)$ es primo en $R$. Además, $\varphi^{-1}(I) \cap S = \varnothing$ pues todos los elementos de $S$ son enviadas a unidades por $\varphi$, y $I$ no contiene unidades.
Ahora veamos que la siguiente relación está bien definida:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{ideales primos } I \text{ en } R \text{ con } I \cap S = \varnothing \} & \longrightarrow & \left\{ \text{ideales primos en } S^{-1}R \right\} . \\ I & \mapsto & \varphi(I) \end{array}$$

Sea $I \leq R$ un ideal primo con $I \cap S = \varnothing$, debemos ver que $\varphi(I)$ es primo. Para $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$ tal que $\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in \varphi(I)$, de a) tenemos que $\frac{ab}{st} = \frac{c}{u}$ para algún $c \in I$ y $u \in S$, es decir, existe $v \in S$ tal que $v(abu - stc) = 0$ y $vstc \in I$, esto implica que $vabu \in I$. Como $I$ es primo, alguno de esos elementos debe estar en $I$, pero $u, v \in S$, entonces se concluye que $a \in I$ o $b \in I$ y por tanto de a) se tiene que $\frac{a}{s} \in \varphi(I)$ o $\frac{b}{t} \in \varphi(I)$. Además, para cada ideal primo $I$ en $S^{-1}R$ por b) se cumple que

$$\varphi(\varphi^{-1}(I)) = I.$$

Veamos que para cada ideal primo $I$ en $R$ con $I \cap S = \varnothing$ se cumple

$$\varphi^{-1}(\varphi(I)) = I.$$

Para eso basta verificar que $\varphi^{-1}(\varphi(I)) \subseteq I$.
Sea $a \in \varphi^{-1}(\varphi(I))$, es decir, $\varphi(a) = \frac{a}{1} \in \varphi(I)$. De a) se tiene que $\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$ para $b \in I$ y $s \in S$, y por tanto existe $u \in S$ tal que $u(as - b) = 0$ de donde $uas \in I$, como $I$ es primo alguno de los factores debe estar en $I$. Pero $s, u \in S$ de ahí que $a \in I$.

Finalmente, si tenemos $I$, $J$ ideales primos en $R$ con $I \cap S = \varnothing$ y $J \cap S = \varnothing$ tales que $\varphi(I) = \varphi(J)$, entonces $\varphi^{-1}(\varphi(I)) = \varphi^{-1}(\varphi(J))$ y por tanto $I = J$ lo que es una contradicción, de ahí que $\varphi$ es inyectiva. Además, para $I$ ideal primo en $S^{-1}R$, $\varphi^{-1}(I)$ es un ideal primo en $R$ con $\varphi^{-1}(I) \cap S = \varnothing$ y como $\varphi(\varphi^{-1}(I)) = I$, de ahí que $\varphi$ es suprayectiva, por tanto tenemos lo deseado. $\blacksquare$

## 1.3 Módulos

**Definición 1.3.1.** Sea $R$ un anillo. Decimos que $M$ es un $R-$**módulo izquierdo** si y sólo si se cumple lo siguiente:

1. $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano.

2. Existe una operación o una ley de composición externa

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$

   tal que para cualesquiera $r_1, r_2, r \in R$ y $a_1, a_2, a \in M$ satisface:

   i) $(r_1 r_2)a = r_1(r_2 a)$.

   ii) $(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a$.

   iii) $r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2$.

   iv) $1a = a$.

**Definición 1.3.2.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Un subconjunto $A$ de $M$ es un **submódulo** de $M$ si y sólo si con las operaciones heredadas de $M$ es un $R-$módulo izquierdo. Que $A$ sea submódulo de $M$ se denota por $A \leq M$.

**Lema 1.3.3.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Si $A$ es un subconjunto no vacío de $M$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*1) $A \leq M$.*

*2) Para cada $a_1, a_2 \in A$ se tiene que $a_1 + a_2 \in A$ (con respecto a la adición en $M$) y para cada $a \in A$ y para cada $r \in R$, se cumple que $ra \in A$.*

***Demostración.*** Lema 2.2.2 [7]. ■

**Definición 1.3.4.** 1) Se dice que $M$ es un $R-$**módulo izquierdo cíclico** si y sólo si existe $m \in M$ tal que $M = Rm$.

2) Un ideal cíclico izquierdo es llamado **ideal principal izquierdo**.

3) El $R-$módulo izquierdo $S$ es **simple** si y sólo si $S \neq 0$ y para cada submódulo $A \leq S$ se tiene que: $A = 0$ ó $A = S$.

4) El anillo $R$ es **simple** si y sólo si $R \neq 0$ y para cada $A \leq {}_R R_R$ se tiene que: $A = 0$ o $A = R$.

5) Un submódulo $N \lneq M$ es llamado **mínimo** de $M$ si y sólo si $0 \lneqq N$ y para todo $B \leq M$ tal que $B \lneqq N$ se tiene que $B = 0$.

6) Decimos que $N \lneqq M$ es **máximo** de $M$ si y sólo si $0 \lneqq N$ y para cada $B \leq M$ tal que $N \lneqq B$ se tiene que $B = M$.

**Lema 1.3.5.** *Un $R-$módulo izquierdo $S$ es simple si y sólo si para cada $m \in S$ distinto de cero, $S = Rm$.*

***Demostración***. Sea $S$ un $R-$módulo izquierdo simple, entonces $S \neq 0$ y en consecuencia existe $m \in M$ con $m \neq 0$. Luego $0 \neq Rm \leq M$. Por tanto $Rm = S$.
Para el recíproco, sea $N \leq S$ tal que $N \neq 0$. Podemos tomar $n \in N$, tal que $0 \neq n$. Por hipótesis, $Rn = M$ y $Rn \leq N$. Así $S \leq N$, por lo tanto $S = N$. ■

**Lema 1.3.6.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y sea $X \subseteq M$, entonces*

$$A = \begin{cases} \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \in N\} & si\ X \neq \varnothing \\ \{0\} & si\ X = \varnothing \end{cases}$$

*es un submódulo de $M$.*

***Demostración***. Si $X = \varnothing$, el resultado es inmediato.
Supongamos que $X \neq \varnothing$, entonces existe $x \in X$, luego $(-1)x \in A$ y $x \in A$. Por tanto $0 = -x + x \in A$.
Sean $a_1, a_2 \in A$, entonces $a_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ y $a_2 = \sum_{i=1}^{m} r_i' x_i'$, y por tanto

$$a_1 + a_2 = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{i=1}^{m} r_i' x_i' = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n + r_1' x_1' + \cdots + r_m' x_m' \in A.$$

Ahora tomemos $r \in R$ y $a \in A$, entonces, $a = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Luego

$$\begin{aligned} ra = r \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r(r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n) &= r(r_1 x_1) + \ldots r(r_n x_n) \\ &= (rr_1)x_1 + \ldots + (rr_n)a_n \in A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \leq M$. ■

**Notación:** Denotamos $\bigcap\{N \leq M \mid X \subseteq N\}$ como $(X]$.

**Proposición 1.3.7.** $(X]$ *es el menor submódulo de $M$ que contiene a $X$.*

***Demostración***. Sea $N$ un submódulo de $M$ tal que $X \subseteq N$ Veamos que $(X] \subseteq N$. Si $N$ es un submódulo de $M$ que contiene a $X$, entonces $N$ es un intersectando de $(X]$ y por tanto $(X] \subseteq N$. ■

**Lema 1.3.8.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq M$, entonces*

$$(X] = A = \begin{cases} \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X\} & si\ X \neq \varnothing \\ \{0\} & si\ X = \varnothing. \end{cases}$$

***Demostración***. Si $X = \varnothing$, entonces $(X] = \{0\} = A$.
Supongamos que $X \neq \varnothing$. Como $(X]$ es el menor submódulo de $M$ que contiene a $X$, entonces $(X] \subseteq A$, pues $x = 1x \in A$ para cada $x \in X$, es decir, $X \subseteq A$, y ya sabemos por el Lema 1.3.6 que $A \leq M$.
Resta ver que $A \subseteq (X]$. Sea $a \in A$, entonces existen $r_i \in R$, $x_i \in X$ tales que $a = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$.
Para cada $N$ submódulo de $M$ tal que $X \subseteq N$, se tiene que $r_i x_i \in N$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto implica que $r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n \in N$ para todo $N$ submódulo de $M$ que contiene a $X$, es decir, $a \in \bigcap\{N \leq M \mid X \subseteq N\}$. Entonces $a \in (X]$, por tanto $A \subseteq (X]$ obteniendo lo deseado. ■

**Notación**: $(X] = RX$

**Definición 1.3.9.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo.

1) $X \subseteq M$ es llamado un **conjunto generador** de $M$ si $(X] = M = RX$.

2) Un $R-$módulo izquierdo (o ideal izquierdo) es llamado **finitamente generado** si y sólo si existe $X \subseteq M$ finito tal que $(X] = M$.

3) Sea $X \subseteq M$. Diremos que $X$ es **libre** si y sólo si para todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbf{X}$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, ocurre que si $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ con $r_i \in R$, entonces $r_i = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4) Un subconjunto $X$ de $M$ es llamado **base** de $M$ si y sólo si $X$ es libre y es un conjunto generador de $M$.

**Proposición 1.3.10.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $M_1$, $M_2 \leq M$. Entonces,*

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1 \wedge m_2 \in M_2\}$$

*es un submódulo de $M$.*

***Demostración***. Para esta demostración usaremos el Lema 1.3.3. Como $M_1, M_2 \leq M$, entonces tanto $M_1$ como $M_2$ son distintos del vacío y por tanto existe $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$. Luego $m_1 + m_2 \in M_1 + M_2$ de donde $M_1 + M_2$ es distinto del vacío. Ahora, si $m_1 + m_2, m'_1 + m'_2 \in M_1 + M_2$, entonces

$$(m_1 + m_2) + (m'_1 + m'_2) = (m_1 + m'_1) + (m_2 + m'_2) \in M_1 + M_2$$

pues $M_1, M_2 \leq M$. Y dado $r \in R$, $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, y $rm_1 \in M_1$ y $rm_2 \in M_2$ pues $M_1, M_2 \leq M$ de ahí que $r(m_1 + m_2) \in M_1 + M_2$. Se sigue del Lema 1.3.3 que $M_1 + M_2 \leq M$. ■

**Proposición 1.3.11.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de $M$, entonces:*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \begin{cases} \{\sum_{J\subseteq I} a_i \mid a_i \in A_i,\ J \text{ finito}\} & si\ I \neq \emptyset \\ 0 & si\ I = \emptyset. \end{cases}$$

***Demostración***. Si $I$ es distinto del vacío entonces por definición

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid a_i \in A_i, r_i \in R \text{y } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sea $a'_i = r_i a_i$, $a'_i \in A_i$ pues $A_i \leq M$, entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right] \leq \left\{\sum_{J\subseteq I} a_i \mid\ i \in J, J \subseteq I \text{ finito}\right\}.$$

Además, $\sum_J a_i \in (\bigcup_{i\in I} A_i]$ con $J \subseteq I$ finito, entonces

$$\left\{\sum a_i \mid i \in J, J \text{ finito}\right\} \leq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right].$$

Por tanto, tenemos lo deseado. ■

**Definición 1.3.12.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de $M$, entonces $\sum_{i\in I} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i]$ es llamada la **suma de los submódulos** $A'_i s$.

**Lema 1.3.13.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $A \lneq M$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*1) $A$ es submódulo máximo de $M$.*

2) *Para todo* $m \in M$ *distinto de cero, si* $m \notin A$ *entonces* $A + Rm = M$.

***Demostración***. Supongamos que $A$ es submódulo máximo de $M$. Sea $m \in M$ con $m \neq 0$ tal que $m \notin A$, entonces $A \lneq A + Rm$, pero $A$ es máximo en $M$, en consecuencia $A + Rm = M$.
Para el recíproco supongamos que existe $B \leq M$ tal que $A \lneq B$, luego existe $m \in B$ tal que $m \notin A$, note que $m \neq 0$ ya que $0 \in A$, se sigue que $A + Rm = M$, pero $Rm \leq B$ y $A \lneq B$, entoces $M = Rm + A \leq B$. Tenemos así que $M = B$ y por tanto $A$ es máximo. ∎

En álgebra la versión más usada del axioma del elección es el Lema de Zorn, que para comodidad del lector mencionamos a continuación:

**Lema 1.3.14.** ***(Lema de Zorn)*** *Sea A un COPO. Si todo subconjunto de A totalmente ordenado tiene cota superior en A, entonces A tiene elemento máximo.*

**Teorema 1.3.15.** *Sea* $M$ *un* $R-$*módulo izquierdo. Si* $M$ *es finitamente generado, entonces cada submódulo propio de* $M$ *está contenido en un submódulo máximo de* $M$.

***Demostración***. Sea $\{m_1, \ldots, m_t\} \subseteq M$ un conjunto generador de $M$ y sea $N \lneq M$. Definamos

$$\Phi = \{A \mid \ N \leq A \lneq M\}.$$

Note que $\Phi$ es distinto del vacío pues $N \in \Phi$.
Observe que $(\Phi, \subseteq)$ es un COPO. Sea $\Gamma \subseteq \Phi$ un conjunto totalmente ordenado. Si $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ y

$$C = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

veamos que $C$ es cota superior de $\Gamma$ en $\Phi$.
Como $N \leq A_i$ para todo $i \in I$, entoces $N \subseteq C$. Resta verificar que $C$ es submódulo propio de $M$.

i) Para cada $i \in I$, $0 \in A_i$, de donde, $0 \in C$.

ii) Si $m_1, m_2 \in C$ existen $A_{i_1}, A_{i_2} \in \Gamma$ tal que $m_1 \in A_{i_1}$ y $m_2 \in A_{i_2}$, luego $m_1 + m_2 = \in A_{i_1} \cup A_{i_2} \subseteq C$.

iii) Sea $r \in R$ y $m \in C$, entonces $m \in A_i$ para algún $i \in I$ y $A_i$ es $R-$módulo, por tanto, $rm \in A_i$ y en consecuencia $rm \in C$.

Por lo tanto, $C \leq M$ y $N \leq C$ .
Supongamos que $C = M$, entonces $\{m_1, \ldots, m_t\} \subseteq C$, y existe $A_i \in \Gamma$ tal que $\{m_1, \ldots, m_t\} \subseteq A_i$. De esto se sigue que $M = (\{m_1, \ldots, m_t\}] \leq A_i$ y por tanto $A_j = M$, lo que es una contradiccón pues $A_i \in \Gamma$, es decir, $A_i \lneqq M$. Por tanto $C \lneqq M$ y $N \leq C$, además es claro que para toda $i \in I$ sucede que $A_i \subseteq C$, entonces $C$ es cota superior de $\Gamma$ en $\Phi$. Luego por el Lema de Zorn existe $D$ un elemento máximo en $\Phi$.
Veamos que $D$ es submódulo máximo de $M$.
Sea $L \lneqq M$ tal que $D \leq L$. Como $N \leq D$, entonces $N \leq L \lneqq M$, lo que implica que $L \in \Phi$ y $D \leq L$, en consecuencia $D = L$. Por tanto $D$ es un submódulo máximo de $M$ que contiene a $N$. ■

**Lema 1.3.16.** *(**Ley modular**) Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y sean, $A, B, C \leq M$ con $B \leq C$. Entonces:*

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + B.$$

***Demostración***. Sea $c \in (A+B) \cap C$, entonces $c \in C$ y $c = a + b$ para algunos $a \in A$ y $b \in B$, luego, $a = c - b \in A$ y como $B \leq C$ entonces $c - b \in C$ en consecuencia $a \in A \cap C$ y $b \in B$. Por tanto $a + b \in (A \cap C) + B$.
Sea $d \in (A \cap C) + B$, entonces $d = a + b$ para algunos $a \in A \cap C$ y $b \in B$, y como $B \leq C$, se tiene que $b \in C$, luego $a + b \in C$ y $a + b \in A + B$, es decir, $a + b \in (A + B) \cap C$. ■

**Definición 1.3.17.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $\{B_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de $M$, decimos que $M$ es la **suma directa de los** $B_i$'s si:

1) $M = \sum_{i \in I} B_i$.
2) $B_i \cap \left( \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} B_j \right) = 0$.

La suma directa de la familia $\{B_i \mid i \in I\}$ se denota por $\bigoplus_{i \in I} B_i$.

**Definición 1.3.18.** Sea $N \leq M$, definimos

$$\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$$

el **cociente** de $M$ con $N$.

**Observación:** $\frac{M}{N}$ es un $R-$módulo izquierdo con las operaciones:

1) $(m_1 + N) + (m_1 + N) = (m_1 + m_2) + N$.

2) Para $r \in R$, $r(m + N) = rm + N$.

3) $\left(\frac{M}{N}, +, N\right)$ es un grupo abeliano pues como $M$ es abeliano, todos los subgrupos son normales y así $\frac{M}{N}$ está bien definido.

## 1.4 Morfismos de módulos

**Definición 1.4.1.** Sean $M$ y $M_1$ $R-$módulos izquierdos, decimos que una función $\alpha\colon M \longrightarrow M_1$ es un morfismo de módulos si y sólo si para todo $r_1, r_2 \in R$ y para todo $m_1, m_2 \in M$ se tiene que:

$$\alpha(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1\alpha(m_1) + r_2\alpha(m_2)$$

**Ejemplos** Sean $M$ y $M_1$ $R-$módulos izquierdos:

$$\begin{aligned} \overline{o}\colon \quad & M && \longrightarrow M_1 \text{ es el morfismo cero de R-módulos.} \\ & m && \longmapsto 0 \\ Id\colon \quad & M && \longrightarrow M \text{ es el morfismo identidad en } M. \\ & m && \longmapsto m \\ \iota\colon \quad & N && \longrightarrow M \text{ es la inclusión de } N \text{ en } M \text{ cuando } N \leq M. \\ & n && \longmapsto n \\ \nu\colon \quad & M && \longrightarrow \frac{M}{N} \text{ es el morfismo canónico.} \\ & m && \longmapsto m + N \end{aligned}$$

**Proposición 1.4.2.** *Sean $U \leq M$, $V \leq M_1$ y $\alpha\colon M \longrightarrow M_1$ morfismos de módulos izquierdos, entonces:*

*1)* $\alpha(U) \leq M_1$.

*2)* $\alpha^{-1}(V) \leq M$.

***Demostración*.** 1) Como $0 \in U$ entonces $0 = \alpha(0) \in \alpha(U)$. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $m_1, m_2 \in \alpha(U)$ entonces existen $n_1, n_2 \in U$ tales que $\alpha(n_1) = m_1$ y $\alpha(n_2) = m_2$, luego,

$$r_1 m_1 + r_2 m_2 = r_1\alpha(n_1) + r_2\alpha(_2) = \alpha(r_1 n_1 + r_2 n_2)$$

y $r_1 n_1 + r_2 n_2 \in U$ pues $U \leq M$.
2) Es análoga a 1). ∎

**Definición 1.4.3.** Dado un morfismo de $R-$módulos izquierdos, $\alpha \colon A \to B$, definimos:

1) $ker(\alpha) = \alpha^{-1}(0)$.

2) $Im(\alpha) = \alpha(A)$.

**Observación**
Sean $\alpha \colon A \to B$ y $\beta \colon B \to C$ dos morfismos de $R-$módulos izquierdos con $Im(\alpha) \subseteq B$, entonces $(\beta \circ \alpha) = \beta\alpha \colon A \to C$ es un morfismo de módulos.

**Definición 1.4.4.** Sean $C$ y $A$ $R-$módulos izquierdos, definimos a $Hom_R(C, A)$ como sigue:

$$Hom_R(C, A) = \{f \colon C \to A \mid f \text{ es morfismo de módulos } \}.$$

En caso de que $C = A$, se denota a $Hom_R(C, C)$ como $End_R(C)$.

**Observación:** Dado un $R-$módulo izquierdo $A$, $(End(A), +, \circ)$ es un anillo, al que llamamos el **anillo de endomorfismos** de $A$.

**Definición 1.4.5.** Dado un morfismo de $R-$módulos izquierdos $\alpha \colon A \to B$.

1) Decimos que $\alpha$ es un **monomorfismo** si y sólo si para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in Hom_R(C, A)$ si $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

2) $\alpha$ es **epimorfismo** si y sólo si para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in Hom_R(B, C)$, si $\gamma_1\alpha = \gamma_2\alpha$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

3) $\alpha$ es **bimorfismo** si y sólo si $\alpha$ es monomorfismo y $\alpha$ es epimorfismo.

4) $\alpha$ es **isomorfismo** si y sólo si existe $\beta \colon B \to A$, $\beta \in Hom_R(B, A)$ tal que $\beta\alpha = 1_A$ y $\alpha\beta = 1_B$.

**Teorema 1.4.6.** *Sea $\alpha \colon A \to B$ un morfismo de módulos izquierdos, entonces:*

*1) $\alpha$ es inyectiva si y sólo si $\alpha$ es monomorfismo.*

*2) $\alpha$ es suprayectiva si y sólo si $\alpha$ es epimorfismo.*

*3) $\alpha$ es biyectiva si y sólo si $\alpha$ es bimorfismo si y sólo si $\alpha$ es isomorfismo.*

***Demostración***. Teorema 3.1.5 de [7]. ■

**Notación:** Sea $\alpha\colon A \to C$ un morfismo de $R-$módulos izquierdos.

1) Si $\alpha$ es monomorfismo, entonces lo denotamos como: $\alpha\colon A \rightarrowtail C$ .

2) Si $\alpha$ es epimorfismo, lo denotamos como: $\alpha\colon A \twoheadrightarrow C$ .

3) Si $\alpha$ es isomorfismo, entonces lo denotamos como: $\alpha\colon A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ .

4) Si $A \leq C$, $\iota$ el morfismo inclusión de $A$ a $C$ se denota como: $\iota\colon A \hookrightarrow C$

**Definición 1.4.7.** Dados dos $R-$módulos izquierdos A y B decimos que son **isomorfos**, $A \cong B$, si y sólo si existe un isomorfismo $\alpha\colon A \to B$.

**Observación:** $\cong$ es una relación de equivalencia en $R-$Mód, donde $R-$Mód es la categoría de todos los $R-$módulos izquierdos.

**Lema 1.4.8.** *Sea $\alpha\colon A \to B$ un morfismo de $R-$módulos izquierdos, entonces se cumplen:*

*1) $\alpha$ es monomorfismo si y sólo si $ker(\alpha) = 0$.*

*2) Si $U \leq A$ entonces $\alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + ker(\alpha)$.*

*3) $V \leq B$ entonces $\alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap Im(\alpha)$.*

*4) Sea $\beta\colon B \to C$, entonces*

   *a) $ker(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(ker(\beta))$.*

   *b) $Im(\beta\alpha) = \beta(Im(\alpha))$.*

***Demostración***. Lema 3.1.8. de [7]. ■

**Definición 1.4.9.** Una **retícula** es un COPO $(X, \leq)$ en el que para todo $x, y \in X$ existen $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$.

**Observación:** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo entonces

$$[0, M] = \{N \mid 0 \leq N \leq M\}$$

con el orden de la inclusión es una retícula con las siguientes operaciones: para $N_1$, $N_2 \in [0, M]$

i) $sup\{N_1, N_2\} = N_1 + N_2$.

ii) $inf\{N_1, N_2\} = N_1 \cap N_2$.

En general, si $N \leq M$, $[N, M] = \{B \mid N \leq B \leq M\}$ con el orden de la inclusión es una retícula con las mismas operaciones definidas en i) y en ii).

**Definición 1.4.10.** Sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ retículas. Una función $\alpha\colon L \to L'$ es un **morfismo de retículas** si y sólo si para cualesquiera $x,\ y \in L$ se cumple que: $\alpha(sup\{x, y\}) = sup\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ y $\alpha(inf\{x, y\}) = inf\{\alpha(x), \alpha(y)\}$.

**Observación:** Sean $M$ un $R-$módulo izquierdo y $N \leq M$, entonces el morfismo canónico

$$\begin{aligned} \nu\colon M &\to \frac{M}{N} \\ m &\mapsto m + N \end{aligned}$$

es un epimorfismo. Dado $k + N \in \frac{M}{N}$ se cumple que $k \in M$ y por tanto $\nu(k) = k + M$.

**Teorema 1.4.11.** *(**Cuarto teorema de isomorfismos**) Sea $A$ un $R-$módulo y $C \leq A$. Si $\nu\colon A \to \frac{A}{C}$ el epimorfismo canónico, entonces*

$$\begin{aligned} \alpha\colon [C, A] &\to \left[\frac{C}{C}, \frac{A}{C}\right] \\ N &\longmapsto \nu(N) \end{aligned}$$

*Es un isomorfismo de retículas.*

***Demostración***. Corolario 3.1.13 de [7]. ■

**Corolario 1.4.12.** *Sea $A$ un $R-$módulo izquierdo y $C \leq A$, $C$ es máximo en $A$ si y sólo si $\frac{A}{C}$ es simple.*

***Demostración***. Basta notar que $\{C, A\} = [C, A] \cong [0, \frac{A}{C}] = \{0, \frac{A}{C}\}$. ■

**Teorema 1.4.13.** *(**Primer teorema de isomorfismos**) Sea $\alpha\colon A \to B$ un morfismo de $R-$módulos izquierdos. Entonces existe un monomorfismo $\varphi\colon \frac{A}{Ker\alpha} \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & B, \\ \frac{A}{Ker\alpha} \arrow[ur, tail, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

*donde $\nu$ es el epimorfismo canónico. Además $\varphi$ es isomorfismo si y sólo si $\alpha$ es epimorfismo.*

***Demostración***. Teorema 3.4.1 [7]. ■

**Lema 1.4.14.** *Sean $A$ y $B$ $R-$módulos izquierdos simples. Entonces cada morfismo de $A$ a $B$ es el morfismo cero o es un isomorfismo.*

***Demostración***. Sea $\alpha\colon A \to B$ un morfismo. $Ker(\alpha) \leq A$, entonces $Ker(\alpha) = 0$ o $Ker(\alpha) = A$, es decir, $\alpha$ es el morfismo cero o es un monomorfismo. Además $Im(\alpha) \leq B$, entonces $Im(\alpha) = 0$ o $Im(\alpha) = B$, entonces si $\alpha \neq 0$, $\alpha$ es un isomorfismo, con lo cual queda demostrado el lema. ■

**Lema 1.4.15.** *(**Lema de Schur**) El anillo de endomorfismos de un $R-$módulo izquierdo simple es un anillo con división.*

***Demostración***. Del Lema 1.4.14, cada endomorfismo diferente de cero es un isomorfismo y por tanto tiene un elemento inverso en el anillo de endomorfismos. Consecuentemente el anillo de endomorfismos es un anillo con división. ■

**Definición 1.4.16.** Sean $A$, $B$ y $C$ $R-$módulos izquierdos.

1) Decimos que $B_1 \leq B$ es **sumando directo** de $B$ si y sólo si existe $B_2 \leq B$ tal que $B = B_1 \oplus B_2$.

2) Decimos que un **monomorfismo** $\alpha\colon A \to B$ se **escinde** si $Im\alpha$ es sumando directo de $B$.

3) Decimos que un **epimorfismo** $\beta\colon B \to C$ se **escinde** si $Ker\beta$ es sumando directo de $B$.

## 1.5 Productos directos sumas directas y módulos libres

### Productos y coproductos

Dada una familia de conjuntos $\{A_i \mid i \in I\}$ definimos su producto

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{\alpha : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \alpha(i) \in A_i\right\}$$

$\prod_{i\in I} A_i$ es llamado producto directo.
**Notación:** $\alpha(i) = a_i$ que es la $i-$ésima componente.

**Definición 1.5.1.** Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de $R-$módulos izquierdos. Definimos en $\prod_{i\in I} A_i$ las siguientes operaciones:

1) Si $(a_i), (b_i) \in \prod_{i\in I} A_i$,entonces $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$.

2) Para $r \in R$ y $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$, $r(a_i) = (ra_i)$.

**Proposición 1.5.2.** *Con las operaciones definidas anteriormente, tenemos que $\prod_{i\in I} A_i$ es un $R-$módulo izquierdo.*

***Demostración***. Note que

$$\begin{aligned} \overline{o} : I &\rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\ i &\mapsto o_i \end{aligned}$$

está en $\prod_{i\in I} A_i$. Y si $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$, entonces $(a_i) + (o_i) = (a_i + o_i) = (a_i)$. Además si $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$, $-(a_i) = (-a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$. Es claro que $(a_i) + (-(a_i)) = (a_i - a_i) = (o_i)$. ■

**Definición 1.5.3.** Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de $R-$módulos, si $\alpha \in \prod_{i\in I} A_i$ definimos su soporte como $sop(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0\}$.

**Proposición 1.5.4.** *Sea $A = \{\alpha \in \prod_{i\in I} A_i \mid sop(\alpha) \text{ es finito}\}$. Entonces $A \leq \prod_{i\in I} A_i$.*

***Demostración***. Como $sop(\overline{o}) = \varnothing$ y $\varnothing$ es finito, entonces $\overline{o} \in A$. Sean $(a_i), (b_i) \in A$, entonces $sop(a_i)$ y $sop(b_i)$ son finitos. Además como $(a_i)+(b_i) = (a_i+b_i)$, entonces $sop((a_i) + (b_i)) = sop((a_i + b_i))$. Si $j \in sop((a_i + b_i))$, entonces $a_j + b_j \neq 0$ de donde $a_j \neq 0$ o $b_j \neq 0$ y por tanto $j \in sop(a_i) \cup sop(b_i)$, de ahí que $sop((a_i + b_i)) \subseteq sop(a_i) \cup sop(b_i)$ y la union de conjuntos finitos es finito entonces $(a_i) + (b_i) \in A$. Sea $r \in R$ y $(a_i) \in A$, sabemos que $r(a_i) = (ra_i)$. Si $j \in sop(ra_i)$ se tiene que $ra_j \neq 0$ por tanto $a_j \neq 0$ con lo que $j \in sop(a_i)$, por lo tanto $sop(ra_i) \subseteq sop(a_i)$ y $sop(a_i)$ es finito, así $r(a_i) \in A$. ■

**Definición 1.5.5.** Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de $R-$módulos izquierdos.

1) Al $R-$módulo $\prod_{i\in I} A_i$ lo llamamos **producto directo** de la familia.

2) Al $R-$módulo $A$ de la Proposición 1.5.4 lo llamamos **suma directa externa** (o **coproducto**) de la familia y se denota por $\coprod_{i\in I} A_i$.

**Observación:** Para $j \in I$ tenemos el siguuiente morfismo:

$$\begin{aligned} \iota_j : A_j &\to \coprod_{i\in I} A_i \\ a_j &\mapsto (\tilde{a_j}), \text{ donde } (\tilde{a_j}) = \begin{cases} a_j \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Denotaremos a $\iota_i(A_i)$ por $A'_i$.

**Teorema 1.5.6.** *Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de $R-$módulos. Entonces $\coprod_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A'_i$.*

***Demostración.*** Como $A'_i = \iota_i(A_i) \leq \coprod_{i\in I} A'_i$, entonces $\sum_{i\in I} A'_i \leq \coprod_{i\in I} A_i$. Sea $0 \neq (a_i) \in \coprod_{i\in I} A_i$ con $sop((a_i)) = \{a_{i1}, \ldots, a_{im} \mid m \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\begin{aligned} (a_i) &= (\tilde{a_{i1}}) + \ldots + (\tilde{a_{im}}) \\ &= \iota_i(a_{i1}) + \ldots \iota_m(a_{im}) \in \sum_{i\in I} A'_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\coprod_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I} A'_i$ .

Sea $(a_j) \in A'_j \cap \sum_{\substack{i\in I \\ j\neq i}} A'_i$, entonces $(a_i) \in A'_j$ y $(a_i) \in \sum_{\substack{i\in I \\ j\neq i}} A'_i$, de ahí que

$$(a_i) = (\tilde{a_j}) \text{ y } (a_i) = (a_{i1}) + \ldots + (a_{in})$$

con $ik \neq j$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, luego $(\tilde{a_j}) = (a_{i1}) + \ldots + (a_{in})$ y por tanto $(a_i) = (0_i)$, con lo que $\coprod_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A'_i$. ■

**Definición 1.5.7.** Un $R-$módulo izquierdo $F$ es libre si y sólo si tiene base.

**Lema 1.5.8.** *Sea $F$ un $R-$módulo izquierdo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*1) $F$ tiene base.*

*2) $F = \bigoplus_{i\in I} A_i$, para algún conjunto $I$, donde $A_i \cong R$ para cada $i \in I$.*

***Demostración.*** 1) $\Rightarrow$ 2) Si $F = 0$, entonces $\emptyset$ es una base e indexar sobre $I = \emptyset$ nos da el módulo 0.

Si $F$ tiene base $X \neq \emptyset$. Sea $a \in X$, definimos

$$\begin{aligned} \varphi_a : {}_R R &\to {}_R Ra \\ r &\mapsto ra. \end{aligned}$$

Entonces observe que $\varphi_a$ es un epimorfismo, pues si $ra \in Ra$, $\varphi_a(r) = ra$. Veamos que $\varphi_a$ es monomorfismo.
Sean $r_1, r_2 \in R$ tales que $\varphi_a(r_1) = \varphi_a(r_2)$, entonces $r_1 a = r_2 a$ y dado que $X$ es base se sigue que $r_1 = r_2$. De donde $R \cong Ra$ para toda $a \in X$. Afirmamos que

$$F = \bigoplus_{a\in X} Ra.$$

Como $X$ es base de $F$, $(X] = F$ y $(X] = \sum_{a\in X} Ra$, así que $F = \sum_{a\in X} Ra$. Sean $a_o \in X$ y

$$c \in Ra_o \cap \sum_{\substack{a\in X\\ a\neq a_o}} Ra$$

entonces existen $r_o, \ldots, r_n \in R$ y $a_o, \ldots, a_n \in X$ con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ tales que

$$c = r_o a_o = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n,$$

luego $0 = -r_o a_o + r_1 a_1 + \ldots + r_n + a_n$, de donde $r_i = 0$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $c = 0$ y en consecuencia $F = \bigoplus_{a\in X} Ra$.
2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe un conjunto $I$ tal que $F = \bigoplus_{a\in I} A_i$ de forma que $A_i \cong R$ para cada $i \in I$ y para cada $i \in I$ sea $\varphi_i \colon R \to A_i$ tal isomorfismo. Consideremos $X = \{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ y demostremos que $X$ es base de $F$. Para eso basta mostrar que $F \leq (X]$ y que $X$ es libre.
Sea $m \in F$. Como $F = \bigoplus_{a\in I} A_i$, existen $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ con $a_{ik} \in A_{ik}$ para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $m = a_{i1} + \ldots + a_{in}$. Luego existen $r_{ik} \in R$ con $k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $\varphi_{ik}(r_{ik}) = a_{ik}$, de esto se sigue que

$$m = \varphi_{i1}(r_{i1}) + \ldots + \varphi_{in}(r_{in}) = r_{i1}\varphi_{i1}(1) + \ldots + r_{in}\varphi_{in}(1) \in (X].$$

Sea $I' \subseteq I$ finito. Consideremos $\sum_{i\in I'} r_i \varphi_i(1) = 0$ como

$$0 = \sum_{i\in I'} r_i \varphi_i(1) = \sum_{i\in I'} \varphi_i(r_i),$$

entonces $\varphi_i(r_i) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ pues $F = \bigoplus_{a\in I} A_i$, luego $r_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ pues $\varphi_i$ es isomorfismo, así se obtiene lo deseado. ∎

### 1.6 Módulos inyectivos

**Definición 1.6.1.** Sean $M$ y $A$ $R-$módulos izquierdos y sea $I$ ideal de $R$.

1) Sea $U \leq M$, decimos que $U$ es **superfluo** si y sólo si para $A \leq M$ tal que $U + A = M$ siempre ocurre que $A = M$ (Notación $U \ll M$).

2) Sea $A \leq M$, decimos que $A$ es **esencial** si y sólo si para $U \leq M$ tal que $A \cap U = 0$ siempre se tiene que $U = 0$ (Notación $A \leq_{es} M$).

3) $I$ es superfluo (esencial) en $R$ si y sólo si $I$ es superfluo (esencial) como submódulo de ${}_R R$.

4) Sea $\alpha \colon A \to M$ un **morfismo**, $\alpha$ es llamado **superfluo** si $Ker\alpha \ll A$.

5) Sea $\alpha \colon A \to M$ un **morfismo**, $\alpha$ es llamado **esencial** si $Im\alpha \leq_{es} B$.

**Observaciones:**

1) Si $U \ll M$ entonces para todo $A \lneq M$ se tiene que $U + A \lneq M$.

2) $A \leq_{es} M$ si y sólo si para todo $0 \neq U \leq M$ se tiene que $A \cap U \neq 0$.

3) Si $M \neq 0$ y $A \ll M$ entonces $A \neq M$.

4) Si $M \neq 0$ y $A \leq_{es} M$ entonces $A \neq 0$.

**Lema 1.6.2.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Para $a \in M$ se tiene que: $Ra$ no es superfluo si y sólo si existe un submódulo máximo $C \leq M$ tal que $a \notin C$.*

***Demostración***. Si existe $C \leq M$ máximo tal que $a \notin C$ entonces se sigue que $C + Ra = M$. Por tanto $Ra$ no es superfluo pues $C \neq M$.
Para la otra implicación usaremos el Lema de Zorn. Sea

$$\Gamma := \{B \mid B \lneq M \text{ y } Ra + B = M\},$$

entonces $(\Gamma, \leq)$ es un COPO. Como $Ra$ no es superfluo, $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $\Lambda$ una cadena no vacía de $\Gamma$. Entonces

$$B_o = \bigcup_{B \in \Lambda} B$$

es una cota superior de $\Lambda$. Suponga que $a \in B_o$, entonces existe $B \in \Lambda$ tal que $a \in B$, de lo que se sigue que $Ra \leq B$, entonces

$$B = Ra + B = M$$

pero eso es una contradicción. De ahí que $a \notin B_o$ y por tanto $B_o \lneq M$. Como $B \leq B_o$ para cada $B \in \Lambda$ se tiene que

$$Ra + B_o = M,$$

de lo cual se sigue que $B_o \in \Gamma$. Por el Lema de Zorn existe $C \in \Gamma$ máximo. Si $a \in C$, entonces $C = Ra + C = M$ lo que es una contradicción. Veamos que $C$ en efecto es máximo en $M$. Si $C \lneq U \leq M$, entonces se sigue que $U \notin \Gamma$ pues $C$ es máximo el $\Gamma$. Además $M = Ra + C \leq Ra + U \leq M$, entonces $Ra + U = M$ y como $U \notin \Gamma$ debe pasar que $U = M$, por lo tanto $C$ es máximo en $M$ tal que $a \notin C$. ■

**Teorema 1.6.3.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de $M$. Si $\{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de submódulos de $M$ tal que $A_i \leq_{es} M_i$ para cada $i \in I$ y si*

$$A = \bigoplus_{i\in I} A_i,$$

*entonces $A \leq_{es} M$ y*

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

***Demostración***. Teorema 5.1.7 [7]. ■

**Definición 1.6.4.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $A \leq M$.

a) $B \leq M$ es llamado **suplemento** de $A$ si se cumplen:

   i) $A + B = M$.

   ii) $B$ es mínimo tal que $A + B = M$, es decir, si $C \leq M$, $A + C = M$ y $C \leq B$ entonces $B = C$.

   Denotaremos a $B$ por $A'$.

b) $B \leq M$ es llamado **seudocomplemento** de $A$, si se cumplen las siguientes condiciones:

   i) $A \cap B = 0$.

   ii) Si $B$ es máximo tal que $A \cap B = 0$, es decir, si $C \leq M$ tal que $A \cap C = 0$ y $B \leq C$, entonces $B = C$.

**Lema 1.6.5.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y sean $A, B \leq M$ tales que $A \cap B = 0$, entonces existe $K$ el seudocomplemento de $A$ en $M$ tal que $B \leq K$.*

***Demostración***. Sea $\Gamma = \{C \leq M \mid A \cap C = 0 \text{ y } B \leq C\}$ entonces $\Gamma \neq \varnothing$ pues $B \in \Gamma$. Sea $\Lambda \subseteq \Gamma$ una cadena y sea

$$C_o = \bigcup_{C\in\Lambda} C,$$

entonces $C_o \leq M$ y $C_o$ es cota superior de $\Lambda$. Veamos que $C_o \in \Gamma$, es decir, $A \bigcap C_o = 0$. Note que

$$C_o \cap A = \left( \bigcup_{C \in \Lambda} C \right) \cap A = \bigcup_{C \in \Lambda} (C \cap A) = 0.$$

Por lo tanto $C_o \in \Gamma$. Por el Lema de Zorn $\Gamma$ tiene un elemento máximo que satisface lo deseado. ■

**Teorema 1.6.6.** *Sea $N$ un $R-$módulo izquierdo y sea $K \leq N$ y $K'$ un seudocomplemento de $K$ en $N$. Entonces:*

*1)*

$$\frac{K + K'}{K'} \leq_{es} \frac{N}{K'}.$$

*2)*

$$K + K' \leq_{es} N.$$

***Demostración***. 1) Sea $L \leq N$ tal que $K' \leq L$ y

$$\frac{L}{K'} \cap \frac{K + K'}{K'} = 0,$$

entonces $L \cap (K + K') \subseteq K'$ y por la ley modular $L \cap (K + K') = (L \cap K) + K'$, de ahí que $L \cap K \subseteq K'$ de donde se sigue que $L \cap K \subseteq K' \cap K = 0$, es decir, $K' \leq L$ y $L \cap K = 0$. Como $K'$ es seudocomplemento de $K$ se sigue que $L = K'$ y por tanto $L/K' = 0$, de donde se concluye que

$$\frac{K + K'}{K'} \leq_{es} \frac{N}{K'}.$$

2) Sea $\nu\colon N \to N/K'$ el epimorfismo canónico, $(K + K')/K' \leq_{es} N/K'$, entonces la preimagen de $(K + K')/K'$ bajo $\nu$, $K + K'$, es esencial en $N$. ■

**Teorema 1.6.7.** *Sea $I$ un $R-$módulo izquierdo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *Para cada $R-$módulo izquierdo $B$, cada monomorfismo $\psi\colon I \to B$ se escinde.*

2) *Sean $A$ y $B$ $R-$módulos izquierdos. Para cada monomorfismo $\alpha\colon A \to B$ y para cada morfismo $\varphi\colon A \to I$ existe un morfismo $\kappa\colon A \to B$ con $\varphi = \kappa\alpha$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \\ I & \end{tikzcd} .$$

***Demostración***. Inciso a) del Teorema 5.3.1 [7]. ■

**Definición 1.6.8.** Sea $I$ un $R-$módulo izquierdo. Decimos que $I$ es **inyectivo** si satisface las condiciones del Teorema 1.6.7.

**Corolario 1.6.9.** *Sean $I$ y $A$ un $R-$módulos izquierdos. Si $I$ es inyectivo y $A \cong I$, entonces $A$ es inyectivo.*

***Demostración***. Supongamos que $I$ es inyectivo y $A \cong I$, entonces existe $\beta\colon M \longrightarrow I$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[ddl, dashed, "\beta"] \\ A \arrow[d, tail, two heads, "\kappa"'] & \\ I & \end{tikzcd} .$$

Luego $\kappa^{-1}\beta\alpha = \varphi$ pues $\beta\alpha = \kappa\varphi$ y por tanto $A$ es inyectivo. ■

**Teorema 1.6.10.** *Sea $I$ un $R-$módulo izquierdo inyectivo y $A \leq I$ sumando directo de $I$, entonces $A$ es inyectivo.*

***Demostración***. Como $A$ es sumando directo de $I$, existe $B \leq I$ tal que $I = A \oplus B$. Sea $\alpha\colon N \longrightarrow M$ un monomorfismo y $\beta\colon N \longrightarrow A$ un morfismo. Considetemos el morfismo inclusión $\iota\colon A \longrightarrow I$. Como $I$ es inyectivo existe $\kappa\colon M \longrightarrow I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\kappa"] \\ A \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ I & \end{tikzcd}$$

Si tomamos el morfismo proyección sobre $A$:

$$\begin{aligned} p_A\colon A \oplus B &\longrightarrow A \\ a + b &\longmapsto a \end{aligned}$$

entonces $p_{A\kappa}$ es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[dl, dashed, "p_{A\kappa}"] \\ A & \end{tikzcd} .$$

Y por tanto $A$ es inyectivo. ■

**Definición 1.6.11.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. La pareja $(\eta, E)$ donde $\eta$ es un morfismo $\eta\colon M \to E$ es llamado **cápsula inyectiva** de $M$ si y sólo si $\eta$ es monomorfismo esencial en $E$ y $E$ es inyectivo.

**Proposición 1.6.12.** *Sea $\varphi\colon M_i \to M_2$ un isomorfismo, $\eta_1\colon M_1 \to Q_1$ una cápsula inyectiva de $M_1$, y sea $\eta_2\colon M_2 \to Q_2$ un monomorfismo donde $Q_2$ es inyectivo. Entonces existe un monomorfismo que se escinde $\psi\colon Q_1 \to Q_2$ de manera que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, tail, two heads, "\varphi"] \arrow[d, tail, "\eta_1"'] & M_2 \arrow[d, tail, "\eta_2"] \\ Q_1 \arrow[r, tail, "\psi"'] & Q_2 \end{tikzcd}$$

*y existe*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta_2} : M_2 &\to Im\psi \\ m &\mapsto \eta_2(m) \end{aligned}$$

*$\tilde{\eta_2} = \eta_2 \mid^{Im\psi}$, tal que es una cápsula inyectiva de $M_2$. Además $\eta_2$ es una cápsula inyectiva de $M_2$ si y sólo si $\psi$ es un isomorfismo.*

***Demostración*.** Teorema 5.6.3 [7]. ■

**Teorema 1.6.13.** *Todo $R-$módulo izquierdo tiene cápsula inyectiva.*

***Demostración*.** Teorema 5.6.4 [7]. ■

**Teorema 1.6.14.** *(**Criterio de Baer**) Un $R-$módulo izquierdo $E$ es inyectivo si y sólo si para todo ${}_RI \leq {}_RR$ y para todo morfismo $\rho\colon I \to E$ existe un morfismo $\tau\colon R \to E$ tal que $\tau\iota = \rho$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\rho"'] & R \arrow[dl, "\tau"] \\ E & \end{tikzcd}$$

*donde $\iota$ es la inclusión.*

***Demostración***. Teorema 5.7.1 [7]. ∎

**Módulos casi-inyectivos**

**Definición 1.6.15.** Sean $Q$ y $M$ $R-$módulos izquierdos.

1) $Q$ es **inyectivo relativo a** $M$($M-$inyectivo) si y sólo si para cada monomorfismo $\psi\colon K \to M$ y cada morfismo $\lambda\colon K \to Q$ existe $\varphi\colon M \to Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ Q & \end{tikzcd} .$$

2) $Q$ es **casi-inyectivo** si y sólo si $Q$ es inyectivo relativo a $Q$.

**Definición 1.6.16.** Sea $M$ un $R$ módulo izquierdo. Un submódulo $B \leq M$ es **fuertemente invariante** en $M$ si y sólo si para cada $\kappa \in End_R(M)$, $\kappa(B) \leq B$.

**Teorema 1.6.17.** *Un $R-$módulo izquierdo $A$ es casi-inyectivo si y sólo si $A$ es un submódulo fuertemente invariante en $E(A)$.*

***Demostración***. Sea $\varphi\colon E(A) \to E(A)$ un morfismo, consideremos $\varphi^{-1}(A)$ la preimagen de $A$, $\hat{\varphi}\colon A \cap \varphi^{-1}(A) \to A$ una restricción de $\varphi$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \cap \varphi^{-1}(A) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"'] & A \\ A & \end{tikzcd} .$$

Como $A$ es casi-inyectivo, existe $\kappa\colon A \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \cap \varphi^{-1}(A) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"'] & A \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \\ A & \end{tikzcd} .$$

Como $\iota$ es la inclusión, $\kappa\colon A \to A$ es un morfismo que extiende a $\hat{\varphi}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} \lambda\colon E(A) & \to & E(A) \\ m & \mapsto & \lambda(m), \text{ donde } \lambda(m) = \begin{cases} \kappa(m) \text{ si } m \in A \\ 0 \text{ si } m \notin A \end{cases} \end{array}$$

Notemos que $\lambda(A) = \kappa(A) \leq A$ y $(\varphi - \lambda)(A \cap \varphi^{-1}(A)) = 0$.
Como $\lambda(A) \leq A$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} A \cap (\lambda - \varphi)^{-1}(A) & = & \{x \in A \mid \lambda(x) - \varphi(x) = a \text{ para algún } a \in A\} \\ & = & \{x \in A \mid \varphi(x) = \lambda(x) - a \text{ para algún } a \in A\} \\ & \leq & \{x \in A \mid \varphi(x) \in A\} = A \cap \varphi^{-1}(A). \end{array}$$

Entonces

$$A \cap (\lambda - \varphi)^{-1}(A) \leq A \cap \varphi^{-1}(A) \leq Ker(\lambda - \varphi),$$

luego $(\lambda - \varphi)(A) \cap A = 0$ y como $A \leq_{es} E(A)$ se sigue que $(\lambda - \varphi)(A) = 0$, por lo que $\varphi(A) = \lambda(A) \leq A$, por tanto $A$ es fuertemente invariante en $E(A)$.
Ahora supongamos que $A$ es fuertemente invariante en $E(A)$. Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, $\varphi_1$ monomorfismo y $\varphi_2$ morfismo tales que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A . \\ A & \end{tikzcd}$$

Notemos que $M \cong Im\varphi_1$ y $Im\varphi_1 \leq A$, entonces podemos considerar a $M$ como submódulo de $A$. Sea

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi}_2 \colon E(A) & \to & E(A) \\ a & \mapsto & \hat{\varphi}_2(a), \text{ donde } \hat{\varphi}_2(a) = \begin{cases} \varphi_2(a) \text{ si } a \in M \\ 0 \text{ si } m \notin M \end{cases} \end{array}$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_1"] \arrow[d, "\hat{\varphi}_2|_M"'] & A . \\ E(A) & \end{tikzcd}$$

Como $E(A)$ es inyectivo, existe $\hat{\varphi} \colon A \to E(A)$ tal que $\hat{\varphi}_2 \mid_M = \hat{\varphi}\varphi_1$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_1"] \arrow[d, "\hat{\varphi}_2|_M"'] & A \arrow[dl, dashed, "\hat{\varphi}"] & . \\ E(A) & & \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi = \hat{\varphi} \mid_A$, como $A$ es fuertemente invariante en $E(A)$, $\varphi_2(M) = \hat{\varphi}_2(M) \leq \hat{\varphi}_2(A) \leq A$, luego $\varphi_2 = \hat{\varphi}_2 \mid_M = \hat{\varphi}\varphi_1 = \hat{\varphi} \mid_A \varphi_1 = \varphi\varphi_1$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

y por tanto $A$ es casi-inyectivo.

■

## 1.7 Módulos semisimples

**Lema 1.7.1.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, en el cual cada submódulo es un sumando directo. Entonces cada submódulo de $M$ distinto de cero contiene un submódulo simple.*

***Demostración***. Sea $U \leq M$, $U \neq 0$ y finitamente generado, entonces existe un submódulo máximo $C \leq U$. Por hipótesis $U = C \oplus M_1$, por la ley modular se sigue que

$$U = M \cap U = C \oplus (M_1 \cap U),$$

por tanto $U/C \cong M_1 \cap U$. Como $C$ es máximo en $U$, $U/C$ es simple. Por tanto $M_1 \cap U$ es un submódulo simple de $U$. ■

**Lema 1.7.2.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo tal que $M = \sum_{i \in I} S_i$, donde $S_i$ es simple para cada $i \in I$. Además sea $U \leq M$, entonces tenemos*

*a) Existe $J \subseteq I$ tal que $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i\right)$.*

*b) Existe $K \subseteq I$ tal que $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$.*

***Demostración***. $a$) Usaremos el lema de Zorn. Sea

$$\Gamma := \left\{ L \mid L \subseteq I \text{ y } U + \sum_{i \in L} M_i = U \oplus \left( \bigoplus_{i \in L} M_i \right) \right\}.$$

Como $\bigoplus_{i \in \varnothing} M_i = 0$, se tiene que $\varnothing \in \Gamma$, de donde $\Gamma \neq \varnothing$ y $\Gamma$ es ordenada por $\subseteq$. Sea $\Lambda$ una cadena en $\Gamma$ (un subconjunto totalmente ordenado de $\Gamma$). Afirmamos que

$$L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$$

es una cota superior de $\Lambda$ en $\Gamma$. Es claro que $L^*$ es cota superior de $\Lambda$. Veamos que $L^* \in \Gamma$.
Sea $E \subseteq L^*$, entonces $E$ finito y por tanto existe $L \in \Lambda$ tal que $E \subseteq L$. Si

$$u + \sum_{i \in E} m_i = 0, \ u \in U, \ m_i \in M_i$$

entonces se sigue, de que $E \subseteq L$, que: $u = m_i = 0$ para cada $i \in E$, de ahí que

$$U + \sum_{i \in L^*} M_i = U \oplus \left( \bigoplus_{i \in L^*} M_i \right)$$

y consecuentemente $L^* \in \Gamma$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo $J \in \Gamma$. Sea

$$N := U + \sum_{i \in J} M_i = U \oplus \left( \bigoplus_{i \in J} M_i \right).$$

Ahora consideremos $N + M_{i_o}$ para algún $i_o \in I$ arbitrario. $N + M_{i_o} = N \oplus M_{i_o}$ no es posible pues de ser así $J \subsetneq J \bigcup \{i_o\} \in \Gamma$ lo que contradice el hecho de que $N$ se máximo en $\Gamma$. Por lo tanto $N \bigcap M_{i_o} \neq 0$, pero $M_{i_o}$ es simple, de ahí que $N \cap M_{i_o} = M_{i_o}$ y por tanto $M_{i_o} \leq N$. Entonces se sigue que

$$M = \sum_{i \in I} M_i \leq N \leq M,$$

es decir, $N = M$.
b) Sea ahora $M = U \oplus \left( \bigoplus_{i \in J} M_i \right)$. Aplicamos a) a $\bigoplus_{i \in J} M_i$, entonces existe $K \subseteq I$ tal que

$$M = \left( \bigoplus_{i \in J} M_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in K} M_i \right).$$

Por el Primer Teorema de Isomrfismos se sigue que

$$U \cong M / \bigoplus_{i \in J} M_i \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$$

■

**Teorema 1.7.3.** *Para un $R-$módulo izquierdo $M$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

*1) Cada submódulo de $M$ es una suma de submódulos simples.*

*2) $M$ es una suma de submódulos simples.*

*3) $M$ es una suma directa de submódulos simples.*

*4) Cada submódulo de $M$ es sumando directo de $M$.*

***Demostración*.** 1) $\Rightarrow$ 2) Basta notar que $M$ es submódulo de $M$.
2) $\Rightarrow$ 3) se sigue del Lema 1.7.3 para $U = 0$.
3) $\Rightarrow$ 4) se sigue del inciso a) del Lema 1.7.3.
4) $\Rightarrow$ 1) Sea $U \leq M$. Sea

$$U_o := \sum_{\substack{S_i \text{ simple} \\ S_i \leq U}} S_i.$$

Entonces $U_o \leq U$ y por 4) $U_o$ es sumando directo de $M$, es decir $M = U_o \oplus N$ para algún $N \leq M$, entonces por la ley modular

$$U = M \cap U = U_o \oplus (N \cap U).$$

Si $N \cap U = 0$, entonces $U = U_o$ y ya se cumple 1). Si $N \cap U \neq 0$, por el Lema 1.7.1 existe un submódulo simple $B \leq N \cap U$, por como definimos $U_o$ se sigue que $B \leq U_o$ y por tanto $B \leq U_o \cap (N \cap U) = 0$, lo cual es una contradicción. ■

**Definición 1.7.4.** a) Un $R-$módulo izquierdo $M$ es llamado **semisimple** si y sólo si $M$ satisface las equivalencias del Teorema 1.7.3.

b) Un **anillo** $R$ es llamado **semisimple** izquierdo si y sólo si ${}_RR$ es semisimple.

**Corolario 1.7.5.** *1) Cada submódulo de un módulo semisimple es semisimple.*

*2) Cada imagen de un módulo semisimple es semisimple.*

*3) Cada suma de modulos semisimples es semisimple.*

***Demostración*.** 1) Se sigue del Teorema 1.7.3.
2) Sea $A$ un $R-$módulo izquierdo simple y $\alpha\colon A \to B$ un epimorfismo, por el primer teorema de isomorfismos existe $\beta\colon A/Ker(\alpha) \to B$ isomorfismo tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & B . \\ A/Ker(\alpha) \arrow[ur, dashed, two heads, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

por tanto $B \cong A/Ker(\alpha)$. Si $Ker(\alpha) = 0$, entonces $B$ es simple.
Si $Ker(\alpha) = A$, entonces $B = 0$. Como $A$ es simple no existe otra posibilidad para

$Ker(\alpha)$. La imagen de una suma de módulos simples con respecto a un morfismo es por tanto una suma de módulos simples y módulos cero, y por el Teorema 1.7.3, la imagen es nuevamente semisimple.
3) Por el Teorema 1.7.3 cada módulo semisimple es una suma de módulos simples, una suma de módulos semisimples es nuevamente una suma de módulos simples y por el Teorema 1.7.3 es nuevamente semisimple. ■

**Teorema 1.7.6.** *Sea $M$ un $R-$módulo simple. $M$ es semisimple si y sólo si $M$ no contiene propiamente submódulos esenciales.*

***Demostración*.** Si $M$ es semisimple, cada submódulo propio es un sumando directo de $M$ y por tanto no es esencial en $M$.
Para demostrar el recíproco, sea $K \leq M$ y $K' \leq M$ un seudocomplemento de $K$ en $M$, por el incisio 2) del Teorema 1.6.6, $K + K' \leq_{es} M$. Como $M$ no contiene propiamente submódulos esenciales se sigue que $K + K' = M$ y como $K'$ es seudocomplemento de $K$, $K \cap K' = 0$, de ahí que $M = K \oplus K'$ con lo cual queda demostrado lo deseado. ■

## 1.8 Anuladores

Sea $R$ un anillo, y sean $A$ y $B$ subconjuntos de $R$, definimos el **anulador izquierdo** de $a \in A$ con respecto a $B$ como:

$$a^{\perp} = ann_B a = \{b \in B \mid ab = 0\}.$$

Análogamente, definimos el **anulador derecho** de $a \in A$ con respecto a $B$

$${}^{\perp}a = ann_B a = \{b \in B \mid ba = 0\}.$$

Si $X$ es un subconjunto de $A$, entonces, definimos el **anulador izquierdo** (respectivamente derecho) como:

$$X^{\perp} = ann_B X = \bigcap_{a \in X} a^{\perp}.$$

La notación $Xb = 0$ significa que $b \in ann_B X$. Se usará la notación $ann_B(X)$ cuando se pueda inferir del contexto si es un anulador derecho o un anulador izquierdo de $X$ relativo a $B$.
Para $X$ subconjunto de $A$, se cumple la siguiente relación:

$$X^{\perp} = ann_B X = ann_B(ann_A(ann_B X)) = ({}^{\perp}(X^{\perp}))^{\perp}.$$

Cuando no se diga de forma explícita quién es $B$ y se considere $X^{\perp}$ con $X \subseteq R$, entonces nos referiremos a $ann_R(X)$.

De la misma manera se define el anulador $ann_R X$ de algún subconjunto $X$ de un $R-$módulo, el cual es un ideal izquierdo de $R$ llamado el **anulador izquierdo** de $X$. Para $M$ un $R-$módulo izquierdo y $\Lambda = End_R(M)$, definimos el **anulador** de $\lambda \in \Lambda$ reativo a $M$ como

$$ann_M(\lambda) = Ker(\lambda)$$

y para $X \subseteq \Lambda$, el **anulador** de $X$ relativo a $M$:

$$ann_M(X) = \bigcap_{\alpha \in X} Ker(\alpha).$$

También tenemos la siguiente notación: Sea $R$ un anillo y $M$ un $R-$módulo. Sea $m \in M$, el anulador de $m$ en $R$ se denota también por

$${}_R(0 : m) = \{r \in R \mid rm = 0\}.$$

**Lema 1.8.1.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, $X$, $Y$ subconjuntos de $M$ y $A$, $B$ subconjuntos de $R$. Entonces:*

*a)* *$X \subseteq Y$ implica $ann_R(Y) \subseteq ann_R(X)$ y $A \subseteq B$ implica $ann_M(B) \subseteq ann_M(A)$.*

*b)* *$X \subseteq ann_M ann_R(X)$ y $A \subseteq ann_R ann_M(A)$.*

*c)* *$ann_R(X) = ann_R ann_M ann_R(X)$ y $ann_M(A) = ann_M ann_R ann_M(A)$.*

***Demostración***. *a*) Sea $r \in ann_R(Y)$ y sea $x \in X$, entonces $x \in Y$ y por tanto $rx = 0$ por lo que $r \in ann_R(X)$, así que $ann_R(Y) \subseteq ann_R(X)$. Ahora sea $m \in ann_M(B)$ y $a \in A$. Como $A \subseteq B$, por hipótesis se cumple que $am = 0$, de ahí que $ann_M(B) \subseteq ann_M(A)$.
*b*) Sea $x \in X$ y $r \in ann_R(X)$, entonces $rx = 0$ por lo que $x \in ann_M ann_R(X)$. Por tanto $X \subseteq ann_M ann_R(X)$. Sea $a \in A$ y $m \in ann_M(A)$, entonces $am = 0$, por lo que $a \in ann_R ann_M(A)$ y por tanto $A \subseteq ann_R ann_M(A)$.
*c*) Si consideramos $ann_R(X)$, de *b*)

$$ann_R(X) \subseteq ann_R ann_M(ann_R(X)),$$

además por *b*), $X \subseteq ann_M ann_R(X)$, de a) $ann_R(ann_M ann_R(X)) \subseteq ann_R(X)$ se sigue que

$$ann_R(X) = ann_R ann_M ann_R(X).$$

Ahora, consideremos $ann_M(A)$, de $b$)

$$ann_M(A) \subseteq ann_M ann_R(ann_M(A))$$

y de $b$) también $A \subseteq ann_R ann_M(A)$, entonces por $a$)

$$ann_M(ann_R ann_M(A)) \subseteq ann_M(A).$$

Por lo tanto $ann_M(A) = ann_M ann_R ann_M(A)$, como deseabamos. ■

### 1.9 Módulos divisibles.

**Definición 1.9.1.** Sea $D$ un $R-$módulo izquierdo. $D$ es **divisible** si y sólo si para cada $u \in D$ y $a \in R$ con $ann_R(a) \subseteq ann_R(u)$ se cumple que $u \in aD$.

**Proposición 1.9.2.** *Para algún $R-$módulo izquierdo $M$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$M$ es divisible.*
2) *Para cada $a \in R$, $ann_M ann_R(a) = aM$.*
3) *Para cada $a \in R$, cada morfismo $\varphi\colon Ra \to M$ se puede extender a un morfismo de ${}_RR$ a $M$.*

***Demostración***. 3) $\Rightarrow$ 2) Sea $a \in R$. Veamos primero que $aM \subseteq ann_M ann_R(a)$. Sea $am \in aM$ y $r \in ann_R(a)$, entonces $ra = 0$, por tanto

$$0 = (ra)m = r(am),$$

de ahí que $am \in ann_M ann_R(a)$ y en consecuencia $aM \subseteq ann_M ann_R(a)$. Sea $u \in ann_M ann_R(a)$ y sea

$$\begin{aligned} \varphi\colon Ra &\to M \\ ra &\mapsto ru. \end{aligned}$$

Por 3), $\varphi$ se puede extender a $\psi$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Ra \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_RR \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd},$$

luego

$$a\psi(1) = \psi(a) = \psi(\iota(a)) = \varphi(a) = u$$

y por tanto $u \in aM$ quedando demostrada la igualdad.
2) $\Rightarrow$ 1) Sea $m \in M$ y $a \in R$ tal que $ann_R(a) \subseteq ann_R(m)$. Si $r \in ann_R(a) \subseteq ann_R(m)$, $rm = 0$, entonces

$$m \in ann_M(ann_R(a)) = aM.$$

Por tanto, $M$ es divisible.
1) $\Rightarrow$ 3) Sea $a \in R$ y $\varphi\colon Ra \to M$ un morfismo y sea $u = \varphi(a) \in M$. Entonces $x \in ann_R(a)$ implica que $xa = 0$, luego $0 = f(xa) = xf(a) = xu$, es decir, $x \in ann_R(u)$ y por tanto

$$ann_R(a) \subseteq ann_R(u).$$

Como $M$ es divisible, existe $v \in M$ tal que $u = av$. Sea

$$\begin{aligned} \psi\colon {}_RR &\to M \\ 1 &\mapsto v \end{aligned}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Ra \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_RR \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

pues $\psi(\iota(ra)) = \psi(ra) = ra\psi(1) = rav = ru = r\varphi(a) = \varphi(ra)$. ■

**Corolario 1.9.3.** *Sea $I$ un $R-$módulo izquierdo. Si $I$ es inyectivo, entonces $I$ es divisible.*

***Demostración***. Se sigue del criterio de Baer y del inciso 3) de la Proposición 1.9.2. ■

## 1.10 Radical y zoclo

**Teorema 1.10.1.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, entonces*

*a)*
$$\sum_{A \ll M} A = \bigcap_{\substack{B \leq M \\ B \text{ máximo}}} B = \bigcap_{\substack{N \text{ semisimple} \\ \varphi \in Hom_R(M,N)}} Ker(\varphi).$$

*b)*

$$\bigcap_{A\leq_{es}M} A = \sum_{\substack{B\leq M\\ B \text{ mínimo}}} B = \sum_{\substack{N \text{ semisimple}\\ \varphi\in Hom_R(N,M)}} Im(\varphi).$$

***Demostración***. *a*) En el orden en que están escritos los submódulos de $M$ de las igualdades, los denotamos por $U_1$, $U_2$ y $U_3$. Veamos que $U_2 \leq U_1$.
Sea $a \in U_2$. Suponga que $Ra$ no es supefluo en $M$, entonces por el Teorema 1.6.2 debe existir un submódulo máximo $C$ de $M$ tal que $a \notin C$, por tanto $a \notin U_2$ lo cual es una contradicción. De ahí que $a \in U_1$.
Ahora veamos $U_3 \leq U_2$. Sea $B$ un submódulo máximo en $M$ y sea $\nu_B\colon M \longrightarrow M/B$ el epimorfismo canónico. Notemos que $M/B$ es simple, entonces $Ker(\nu_B) = B$, se sigue que

$$U_3 \leq \bigcap_{\substack{B\leq M\\ B \text{ máximo}}} Ker(\nu_B) \leq \bigcap_{\substack{B\leq M\\ B \text{ máximo}}} B = U_2.$$

Para $U_1 \leq U_3$, notemos que si $A \ll M$, entonces para cada morfismo $\varphi\colon M \longrightarrow N$, $\varphi(A) \ll N$. Si $N$ es semisimple, entonces 0 es el único submodulo superfluo de $N$, por lo que se debe tener que $\varphi(A) = 0$, es decir, $A \leq Ker(\varphi)$ y por tanto $U_1 \leq U_3$.
*b*) Denotemos a los submódulos nuevamente por $U_1$, $U_2$ y $U_3$. Para $U_2 \leq U_1$, si $B$ es un módulo simple de $M$ y $A \leq_{es} M$, entonces $B \cap A \neq 0$, por tanto $A \cap B = B$, de ahí que $B \leq A$ y $U_2 \leq U_1$.
Para $U_3 \leq U_2$, por el Teorema 1.7.5 la imagen de un módulo semisimple es de nuevo un módulo semisimple y la suma de semisimples es semisimple, entonces $U_3$ es un submódulo semisimple de $M$, de ahí que $U_3 \leq U_2$.
Para $U_1 \leq U_3$, veamos que $U_1$ es semisimple. Sea $C \leq U_1$ y sea $C'$ su seudocomplemento, entonces por el Teorema 1.6.6 se tiene que $C + C' = C \oplus C' \leq_{es} M$, así que $U_1 \leq C + C'$. Notemos que $C \leq U_1$, por la ley módular

$$U_1 = (C \oplus C') \cap U_1 = C \oplus (C' \cap U_1),$$

por tanto $U_1$ es semisimple. Sea $\iota\colon U_1 \longrightarrow M$, la inclusión, entonces se sigue que $U_1 = Im(\iota) \leq U_3$. ∎

**Definición 1.10.2.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo.

1) El sumódulo de $M$ definido en el inciso *a*) del Teorema 1.10.1 es llamado el **radical** de $M$ y es denotado por $rad(M)$. En caso que $M$ no tenga submódulos máximos entonces definimos el radical de $M$ como $rad(M) = M$.

2 El submódulo de $M$ definido en el inciso $b$) del Teorema 1.10.1 es llamado el **zoclo** de $M$ y es denotado por $zoc(M)$.

**Observaciones:**

1) Para un anillo $R$ el radical de $R$ es el radical de $_RR$ y se llama el **radical de Jacobson**.

2) Si $(R, M)$ es local, $rad(R) = M$.

**Algunas propiedades del radical**

**Teorema 1.10.3.** *Sean $M$ y $N$ $R-$módulos izquierdos, si $\varphi \in Hom(M, N)$ entonces $\varphi(rad(M)) \leq rad(N)$.*

***Demostración*.** Sea $\varphi \in Hom(M, N)$, como $rad(M) = \sum_{A \ll M} A$ se sigue que $\varphi(rad(M)) = \sum_{A \ll M} \varphi(A)$ y siempre ocurre que imagen de superfluo es superfluo, entonces $\varphi(A) \ll N$. Por lo tanto $\varphi(rad(M)) \leq rad(N)$. ∎

**Teorema 1.10.4.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, entonces $rad(R)M \leq M$.*

***Demostración*.** Sea $m \in M$ y $\varphi_m \colon {}_RR \to M$ tal que $\varphi_m(r) = rm$ es un morfismo. Por el Teorema 1.10.3, $rad(R)m = \varphi_m(rad(R)) \leq rad(M)$, por lo tanto

$$\sum_{m \in M} rad(R)m = rad(R)M \leq Rad(M).$$

∎

**Teorema 1.10.5.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Sea $C \leq M$ tal que $rad\left(\frac{M}{C}\right) = 0$, entonces $rad(M) \leq C$.*

***Demostración*.** Sea $\nu \colon M \to \frac{M}{C}$ el epimorfismo canónico. Por el Teorema 1.10.3 $\nu(rad(M)) \leq rad\left(\frac{M}{C}\right) = 0$, en consecuencia $rad(M) \leq Ker(\nu) = C$. ∎

**Teorema 1.10.6.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Si $M$ es semisimple, entonces $rad(M) = 0$.*

***Demostración*.** Si $M$ es semisimple, entonces cada submódulo es un sumando directo, luego 0 es el único submódulo superfluo, por tanto $rad(M) = \sum_{A \ll M} A = 0$. ∎

**Teorema 1.10.7.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, para $m \in M$ tenemos que: $Rm \ll M$ si y sólo si $m \in rad(M)$.*

***Demostración.*** Si $Rm \ll M$, como $rad(M) = \sum_{A \ll M} A$, entonces $m \in Rm \leq rad(M)$. Sea $a \in rad(M)$ y supongamos que $Ra$ no es superfluo en $M$, entonces por el Lema 1.6.2 existe un submódulo máximo $C \leq M$ tal que $a \notin C$, como

$$rad(M) = \bigcap_{\substack{B \leq M \\ B \text{ máximo}}} B,$$

se sigue que $a \notin rad(M)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $Ra \ll M$. ∎

**Teorema 1.10.8.** *Sea $R$ un anillo y $J = rad(R)$ el radical de Jacobson de $R$. Para cualquier ideal $I$ izquierdo de $R$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

*1)* $I \subseteq rad(R) = J$.

*2)* $1 + I = \{1 + x \mid x \in I\}$ *consiste de unidades de $R$.*

***Demostración.*** 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $x \in I$, como $I \subseteq rad(R)$, entonces $x \in rad(R)$ y por el Teorema 1.10.7, $Rx \ll R$. Como $R = Rx + R(1 + x)$, $R = R(1 + x)$. De esto se sigue que $1 = y(1 + x)$ para algún $y \in R$, por lo tanto si $x \in I$, $1 + x$ tiene inverso izquierdo en $R$. Además, $-yx \in I$, luego $1 - xy$ tiene inverso izquierdo $w \in R$ y $1 = y(1 + x) = y + yx$, de donde $y = 1 - xy$. Así que $y$ tiene inverso izquierdo $w$ e inverso derecho $1 + x$ y por tanto es unidad. Luego $y^{-1} = 1 + x = w$. Por lo tanto $1 + x$ es unidad.
2) $\Rightarrow$ 1) Sea $x \in I$, si $R = Rx + K$ para algún ideal izquierdo $K$, entonces $1 = ax + k$ con $a \in R$, $k \in K$, por lo que $k = 1 - ax \in 1 + I$ y por tanto $k$ es unidad en $R$. Luego $R = K$ y por tanto $Rx \ll R$. Así que por el Teorema 1.10.7, $I \subseteq rad(R)$. ∎

**Teorema 1.10.9.** *Sea $R$ un anillo, entonces $rad(R)$ contiene todos los ideales nilpotentes de $R$.*

***Demostración.*** Corolario 6.2.8 [2]. ∎

**Teorema 1.10.10.** *Sea $R$ un anillo. $R$ es un anillo local si y sólo si $R/rad(R)$ es un anillo con división.*

***Demostración.*** Página 170 [1]. ∎

**Proposición 1.10.11.** *Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de $R-$módulos izquierdos. Entonces*

$$rad\left(\bigoplus_\Delta M_\alpha\right) = \bigoplus_\Delta rad(M_\alpha).$$

***Demostración*.** Proposición 6.1.4 [2]. ∎

**Corolario 1.10.12.** *Sea $F$ un $R-$módulo izquierdo libre, entonces*

$$rad(F) = rad(R)F.$$

***Demostración*.** Como $F$ es libre existe un conjunto $\Delta$ tal que $F \cong \bigoplus_\Delta R$. Entonces

$$rad(F) \cong rad\left(\bigoplus_\Delta R\right) \cong \bigoplus_\Delta rad(R) \cong rad(R)\left(\bigoplus_\Delta R\right) \cong rad(R)F.$$

∎

**Algunas propiedades del zoclo**

**Proposición 1.10.13.** *Sean $M$ y $N$ $R-$módulos izquierdos y $\varphi\colon M \to N$ un morfismo. Entonces*

$$\varphi(zoc(M)) \leq zoc(N).$$

***Demostración*.** Se sigue de que la imagen de un módulo semisimple es semisimple (Corolario 1.7.5). ∎

**Corolario 1.10.14.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y $K \leq M$. Entonces*

$$zoc(K) = K \cap zoc(M).$$

***Demostración*.** De la Proposición 1.10.13 usando la inclusión $\iota\colon K \to M$ se cumple que $zoc(K) \leq zoc(M)$. Además cada submódulo de un semisimple es semisimple, de ahí que $K \cap zoc(M)$ es semisimple y por tanto $K \cap zoc(M) \leq zoc(K)$. ∎

**Teorema 1.10.15.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Entonces $zoc(M)$ es esencial en $M$ si y sólo si cada submódulo distinto de cero de $M$ contiene un submódulo simple.*

***Demostración*.** Por definición sabemos que

$$zoc(M) = \sum\{K \leq M \mid K \text{ es simple en } M\}.$$

Si $zoc(M)$ es esencial en $M$, para $B \leq M$ distinto de cero se tiene que $B \cap zoc(M) \neq 0$ y por el Corolario 1.10.14 se cumple que $zoc(B) \neq 0$. Así que $zoc(B)$ es semisimple contenido en $B$, por lo tanto $B$ tiene al menos un submódulo simple.
El recíproco es inmediato.

■

## 1.11 Cogeneradores de $R-$Mód

**Definición 1.11.1.** Sea $C$ un $R-$módulo izquierdo. $C$ es llamado **cogenerador izquierdo** en la categoría $R$-Mód si y sólo si para cada $R-$módulo izquierdo $M$

$$0 = \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi).$$

**Notación:**
Para $R$-módulos izquierdos arbitrarios $M$, $C$ tendremos la siguiente notación:

$$Ker(M, C) = \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi).$$

**Teorema 1.11.2.** *Si $C$ es cogenerador y $D$ es un $R-$módulo tal que $Ker(C, D) = 0$, entonces $D$ es un cogenerador.*

***Demostración***. Sea $D$ un $R-$módulo izquierdo tal que

$$0 = Ker(C, D) = \bigcap_{\psi \in Hom_R(C,D)} Ker\psi.$$

Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, entonces:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\substack{\varphi \in Hom_R(M,C) \\ \psi \in Hom_R(C,D)}} Ker(\psi\varphi) &= \bigcap_{\substack{\varphi \in Hom_R(M,C) \\ \psi \in Hom_R(C,D)}} \varphi^{-1}(Ker\psi) \\
&= \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\psi \in Hom_R(C,D)} Ker\psi\right) \\
&= \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} \varphi^{-1}(0) \\
&= \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por tanto, $D$ es cogenerador. ■

**Teorema 1.11.3.** *Sea $C$ un $R-$módulo izquierdo. $C$ es un cogenerador de $R-$Mód si y sólo si para cada $\lambda \in Hom_R(L, M)$ con $\lambda \neq 0$ existe $\psi \in Hom_R(M, C)$ con $\psi \neq 0$ tal que $\psi\lambda \neq 0$.*

***Demostración***. Sea $\lambda \in Hom_R(L, M)$ con $\lambda \neq 0$, entonces existe $a \in L \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(a) \neq 0$. Como $C$ es cogenerador entonces $\lambda(a) \notin Ker\psi$ para algún $\psi \in Hom_R(M, C)$ y por tanto $\psi(\lambda(a)) \neq 0$. Se sigue que $\psi\lambda \neq 0$, es decir, existe $\psi \in Hom_R(M, C)$ tal que $\psi\lambda \neq 0$ como era deseado.
El recíproco se hará por contradicción. Supongamos que $C$ no es cogenerador, entonces para algún $R-$módulo izquierdo $M$:

$$0 \neq \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,N)} Ker\varphi.$$

Sabemos que

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,N)} Ker\varphi = Ker(M, C).$$

Ahora consideremos la inclusión $\iota\colon Ker(M, C) \to M$, como $\iota \neq 0$ y

$$\iota \in Hom_R(Ker(M, C), M).$$

Entonces por hipótesis existe $\varphi \in Hom_R(M, C)$ con $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi\iota \neq 0$. Luego existe $m \in Ker(M, C)$ tal que $(\varphi\iota)(m) \neq 0$, así que

$$\varphi(\iota(m)) = \varphi(m) \neq 0$$

y por tanto $m = \iota(m) \notin Ker\varphi$, pero esto es una contradicción pues

$$m \in \bigcap_{\psi \in Hom_R(M,C)} Ker\psi.$$

■

**Teorema 1.11.4.** *Un $R-$módulo izquierdo $C$ es cogenerador de $R-$Mód si y sólo si para todo $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$ existe un morfismo $h\colon M \to C$ tal que $h \neq 0$.*

***Demostración***. Supongamos que $C$ es cogenerador de $R-$Mód. Sea $M \neq 0$ un $R-$módulo izquierdo y consideremos el morfismo identidad $Id\colon M \to M$. Como $M \neq 0$, $Id \neq 0$, por el Teorema 1.11.3 existe $\phi \in Hom_R(M, C)$ tal que $\phi Id \neq 0$. Por tanto $\phi \neq 0$ y en consecuencia $\phi$ es el morfismo deseado.
Ahora verifiquemos el recírpoco. Sea $\lambda \in Hom_R(L, M)$ tal que $\lambda \neq 0$, notemos que

$Im\lambda \neq 0$, luego por hipótesis existe $h\colon Im\lambda \to C$ tal que $h \neq 0$.
Afirmamos que $h\lambda \neq 0$. En efecto, como $h \neq 0$ existe $b \in Im\lambda$ tal que $h(b) \neq 0$ además dado que $b \in Im\lambda$ existe $a \in L$ tal que $\lambda(a) = b$, tenemos así que

$$(h\lambda)(a) = h(\lambda(a)) = h(b) \neq 0.$$

Por tanto $h\lambda \neq 0$ y del Teorema 1.11.3 se sigue $C$ es cogenerador. ∎

**Una caracterización de cogeneradores.**

**Lema 1.11.5.** *Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de $R-$módulos izquierdos. Para cada morfismo $\psi : M \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, tenemos:*

$$Ker(\psi) = \bigcap_{i\in I} Ker(\pi_i\psi).$$

***Demostración***. Para cada $i \in I$ consideremos la $i-$ésima proyección:

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & A_i \\ (a_i) & \longmapsto & a_i \end{array}$$

Sea $m \in Ker(\psi)$, entonces $\psi(m) = 0$, es decir, se tiene que $\pi_i(\psi(m)) = 0$ para cada $i \in I$ y por tanto $m \in Ker(\pi_i\psi)$ para cada $i \in I$. Se sigue que:

$$Ker(\psi) \leq \bigcap_{i\in I} Ker(\pi_i\psi).$$

Ahora, si $m \in \bigcap_{i\in I} Ker(\pi_i\psi)$, entonces todas las componentes de $\psi(m)$ son igual a cero, luego $\psi(m) = 0$, obteniendo así

$$\bigcap_{i\in I} Ker(\pi_i\psi) \leq Ker(\psi),$$

de donde se obtiene la igualdad deseada. ∎

**Teorema 1.11.6.** *Sea $C$ un $R-$módulo izquierdo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*1) $C$ es un cogenerador.*

*2) Cada producto directo de copias de $C$ es un cogenerador.*

*3) Un producto directo de copias de $C$ es un cogenerador.*

*4) Cada $R-$módulo izquierdo $M$ existe un monomorfismo de $M$ a un producto directo de copias de $C$.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que $C$ es un cogenreador. Sea $\prod_{i\in I} C_i$ un producto directo de copias de $C$. Veamos que

$$Ker\left(C, \prod_{i\in I} C_i\right) = 0.$$

Como $C_i \cong C$, existe $\varphi_i : C \to C_i$ isomorfismo para cada $i \in I$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi} : C & \to & \prod_{i\in I} C_i \\ c & \mapsto & (\varphi_i(c)) \end{array}$$

Entonces $\hat{\varphi} \in Hom_R(C, \prod_{i\in I} C_i)$, además notemos que $\hat{\varphi}$ es un monomorfismo, pues: $\hat{\varphi}(a) = 0$ si y sólo si $(\varphi_i(a)) = 0$ y esto sucede si y sólo si para cada $i \in I$ $\varphi_i(a) = 0$ y dado que cada $\varphi_i$ es un isomorfismo, eso ocurre si y sólo si $a = 0$. Por lo tanto $Ker\hat{\varphi} = 0$. Entonces

$$Ker\left(C, \prod_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{\varphi\in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) \leq Ker(\hat{\varphi}) = 0.$$

Por tanto,

$$Ker\left(C, \prod_{i\in I} C_i\right) = 0.$$

Por el Teorema 1.11.2, $\prod_{i\in I} C_i$ es un cogenerador.
2) $\Rightarrow$ 3) Es claro. 3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\prod_{i\in I} C_i$ un producto directo de copia de $C$ que es cogenerador. Por la definición de cogenerador, para cada $R-$módulo izquierdo $M$ ocurre:

$$\bigcap_{\varphi\in Hom_R(M,\prod_{i\in I} C_i)} Ker(\varphi) = 0.$$

Notemos que dado $\varphi \in Hom_R(M, C)$, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi} : M & \to & \prod_{i\in I} C_i \\ m & \mapsto & \iota_1(\varphi(m)) \end{array}$$

donde $\iota_i : A_i \to \prod_{i\in I} A_i$ es tal que

$$\iota_j(a_i) = \begin{cases} a_i, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Entonces, para cada $\varphi \in Hom(M,C)$ podemos encontrar $\hat{\varphi} : M \to \prod_{i \in I} C_i$ tal que $Ker\varphi \subseteq Ker\hat{\varphi}$. Por tanto

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) \subseteq \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M, \prod_{i \in I} C_i)} Ker(\varphi) = 0.$$

Con lo que

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0.$$

Por tanto $C$ es cogenerador.

1) $\Rightarrow$ 4) Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y sea

$$\prod_{\varphi \in Hom_R(M,C)} C_\varphi$$

con $C_\varphi \cong C$ para todo $\varphi \in Hom_R(M,C)$. Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi \colon M & \to & \prod_{\varphi \in Hom_R(M,C)} C_\varphi \\ m & \mapsto & (c_\varphi) \end{array}$$

donde $(c_\varphi) = \varphi(m)$ par todo $\varphi \in Hom_R(M,C)$. Para $m \in Ker(\psi)$, se cumple

$$m \in \bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0.$$

Por lo tanto $\psi$ es un monomorfismo.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, por hipótesis existe un monomorfismo $\psi \colon M \to \prod_{i \in I} C_i$ con $C_i \cong C$ para cada $i \in I$. Si $\pi_i$ es la i-ésima proyección de $\prod_{i \in I} C_i$ en $C_i$, entonces $\pi_i \psi \in Hom_R(M,C)$. Luego

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) \leq \bigcap_{i \in I} Ker(\pi_i \psi) = Ker(\psi) = 0.$$

Entonces

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0.$$

Por tanto $C$ es un cogenerador. ∎

**Propiedades y caracterizaciones fuertes de cogeneradores.**

**Teorema 1.11.7.** *Sea $C$ un $R-$módulo izquierdo. $C$ es un cogenerador de $R-$Mód si y sólo si para cada módulo inyectivo $I$ existe un producto directo de copias de $C$ el cual contiene un sumando directo isomorfo a $I$.*

***Demostración***. Si $C$ es cogenerador, por el Teorema 1.11.6, para cada módulo $M$ existe un monomorfismo, $\varphi\colon M \to \prod_{i\in I} C_i$, donde $C_i \cong C$. Entonces en particular, para $I$ $R-$módulo izquierdo inyectivo existe un monomorfismo $\varphi\colon I \to \prod_{i\in I} C_i$, donde $C_i \cong C$, y como $I$ es inyectivo, cada monomorfismo se escinde, es decir, $Im(\varphi)$ es un sumando directo de $\prod_{i\in I} C_i$. Además, $Im(\varphi) \cong I$ dado que $\varphi$ es monomorfismo. Con lo cual, se cumple lo deseado.
Verifiquemos el recíproco. Por el Teorema 1.6.13, para cada $R$-módulo izquierdo $M$ existe un monomorfismo $\psi\colon M \to I$ con $I$ inyectivo. Sean $M$ e $I$ $R$-módulos izquierdos con $I$ inyectivo tal que $\psi\colon M \to I$ es monomorfismo. Como $I$ es inyectivo existe, por hipótesis, un producto directo $\prod_{i\in I} C_i$ de copias de $C$ que contiene un sumando directo isomorfo a $I$. Sea $N$ sumando directo de $\prod_{i\in I} C_i$ tal que $N \cong I$, entonces si $\varphi\colon I \to N$ es un isomorfismo, $\pi_i\colon N \to C_i$ la $i-$ésima proyección de $N$ en $C_i$ y $\gamma\colon C_i \to C$ un isomorfismo, tenemos:

$$\bigcap_{\varphi\in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) \leq Ker(\gamma\pi\varphi\psi) = 0.$$

Se cumple que $Ker(\gamma\pi\varphi\psi) = 0$ pues $\gamma$ es isomorfismo. Por lo tanto $C$ es un cogenerador. ■

**Corolario 1.11.8.** *Sea $I$ un cogenerador inyectivo y $C$ un $R$ módulo izquierdo. Entonces C es un cogenerador si y sólo si existe un producto directo de copias de C que contiene un sumando directo isomorfo a $I$.*

***Demostración***. Si $C$ es cogenerador, el resultado se cumple por el Teorema 1.11.7. Supongamos que existe un producto directo de copias de $C$ que contiene un sumando directo isomorfo a $I$. Entonces

$$\prod_{i\in A} C_i = I' \oplus L$$

con $A$ un conjunto, $C_i \cong C$ y $I' \cong I$. Sea $\iota\colon I \to \prod_{i\in A} C_i$ el monomorfismo inclusión, sean $M$, $B$ $R-$módulos izquierdos y sea $\lambda \in Hom_R(M, B)$ tal que $\lambda \neq 0$. Como $I$ es cogenerador existe $\psi \in Hom_R(B, I)$ con $\psi \neq 0$ tal que $\psi\lambda \neq 0$, entonces $\iota\psi \in Hom_R(B, \prod_{i\in A} C_i)$ con $\iota\psi \neq 0$ y $0 \neq \iota\psi\lambda$. Por el Teorema 1.11.3, $\prod_{i\in A} C_i$ es un cogenerador y por el Teorema 1.11.6 $C$ es un cogenerador. ■

**Teorema 1.11.9.** *Sea C un R-módulo izquierdo. C es un cogenerador de R−Mód si y sólo si cada morfismo $\alpha\colon A \to B$ para el que $Hom(\alpha, 1_C)$ es un epimorfismo, es un monomorfismo.*

***Demostración***. Si $C$ es cogenerador y $\alpha\colon A \to B$ es un morfismo tal que $Hom(\alpha, 1_C)$ es un epimorfismo, entonces dado $\varphi \in Hom_R(A, C)$ existe $\psi \in Hom_R(B, C)$ tal que $\varphi = \psi\alpha$, luego

$$0 \leq ker(\alpha) = \alpha^{-1}(0) \leq \bigcap_{\psi \in Hom_R(B,C)} \alpha^{-1}(ker(\psi)) =$$

$$= \bigcap_{\psi \in Hom_R(B,C)} ker(\psi\alpha) = \bigcap_{\varphi \in Hom_R(A,C)} ker(\varphi) = 0.$$

Por tanto $\alpha$ es monomorfismo.
Verifiquemos el recíproco. Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo y definamos

$$B = \prod_{\varphi \in Hom_R(M,C)} C_\varphi$$

con $C_\varphi = C$ para cada $\varphi \in Hom_R(M, C)$ y sea

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon M & \to & B \\ m & \mapsto & (\varphi(m)) \end{array}$$

entonces para $\varphi_o \in Hom_R(M, C)$ ocurre que $\varphi_o = \pi_{\varphi_o}\alpha = 1_C\pi_{\varphi_o}\alpha$, donde

$$\pi_{\varphi_o}\colon \prod_{\varphi \in Hom_R(M)} C_\varphi \to C_{\varphi_o} = C$$

es la $\varphi_o-$ésima proyección, entonces

$$\begin{array}{rcl} Hom(\alpha, 1_C)\colon Hom_R(B, C) & \to & Hom_R(M, C) \\ \psi & \mapsto & 1_C\psi\alpha \end{array}$$

es un epimorfismo. Por hipótesis se sigue que $\alpha$ es un monomorfismo, por tanto

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} ker(\varphi) = ker(\alpha) = 0$$

y en consecuencia $C$ es cogenerador, como se deseaba. ■

**Corolario 1.11.10.** *Si $C$ es un cogenerador inyectivo de $R-$Mód y si $\alpha\colon A \to B$ es un morfismo, entonces: $\alpha$ es un monomorfismo si y sólo si $Hom(\alpha, 1_C)$ es un epimorfismo.*

***Demostración***. Supongamos que $\alpha\colon A \to B$ es un monomorfismo. Para cada morfismo $\psi\colon A \to C$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & B \\ C & \end{tikzcd} .$$

Por hipótesis $C$ es inyectivo, así que existe un morfismo $\lambda\colon B \to C$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ C & \end{tikzcd} ,$$

es decir, $\psi = \lambda\alpha = 1_C\lambda\alpha$ y por tanto

$$\begin{aligned} Hom(\alpha, 1_C)\colon Hom_R(B, C) &\to Hom_R(A, C) \\ \psi &\mapsto 1_C\psi\alpha \end{aligned}$$

es un epimorfismo.

El recíproco se sigue del Teorema 1.11.9. ■

Ahora concentraremos nuestra atención en un módulo particular. Sea $S$ un módulo simple y $E(S)$ su cápsula inyectiva, para la que asumimos $S \leq E(S)$. Sea $C$ un cogenerador, entonces como

$$\bigcap_{\varphi\in Hom_R(E(S),C)} Ker(\varphi) = 0$$

debe haber un morfismo $\varphi \in Hom_R(E(S), C)$ tal que $S \nleq Ker(\varphi)$ y como $S$ es simple se sigue que $S \cap Ker(\varphi) = 0$. Además $S$ es esencial en $E(S)$, entonces $Ker(\varphi) = 0$, es decir, $\varphi$ es un monomorfismo. Luego

$$\begin{aligned} \varphi'\colon \quad S &\to Im(\varphi) \\ \alpha &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

es también cápsula inyectiva de $S$ donde el módulo $Im(\varphi)$, que es isomorfo a $E(S)$, es un submódulo inyectivo de $C$. Como es un submódulo inyectivo, es de hecho un sumando directo de $C$.

Se estableció por tanto que el cogenerador $C$, para cada módulo simple $S$, contiene una cápsula inyectiva de éste.

***Observación***. Consideremos los $R-$módulos izquierdos simples, como $\cong$ es una relación de equivalencia podemos formar clases de equivalencia con ellos.
Notemos que dado $S$ simple, $S = Rs$ con $s \in S$. Si consideramos el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_s \colon R &\to Rs \\ r &\mapsto rs \end{aligned}$$

es claro que es un epimorfismo, entonces por el Primer Teorema de Isomorfismo existe $\kappa \colon \frac{R}{ker(\varphi_s)} \to Rs$ isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "\varphi_s"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & Rs \, . \\ \frac{R}{ker(\varphi_s)} \arrow[ur, dashed, two heads, tail, "\kappa"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, para cada $R-$módulo izquierdo simple existe un ideal $I$ de $R$ tal que $S \cong R/I$. Por lo tanto la cantidad de $R-$móduos izquierdos simples está acotada por la de los ideales de $R$, el cual sabemos que es un conjunto. De ahí que si tomamos un representante de cada clase de isomorfismos de los $R-$módulos izquierdos simples, $S_i$, entonces $\{S_i \mid i \in I\}$ es en efecto un conjunto.

**Teorema 1.11.11.** *a) El $R-$módulo izquierdo $C$ es un cogenerador de $R-$Mód si y sólo si $C$ contiene una cápsula inyectiva de cada $R-$módulo izquierdo simple.*

*b) Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples y sea $E(S_i)$ la cápsula inyectiva de $S_i$. Entonces*

$$C_o = \coprod_{i \in I} E(S_i)$$

*es un cogenerador.*

*c) Un $R-$módulo izquierdo $C$ es un cogenerador si y sólo si $C$ posee un submódulo isomorfo a $C_o$.*

***Demostración***. $a$) Se determinó previamente que un cogenerador contiene una cápsula inyectiva para cada módulo simple. Resta verificar el recíproco.
Supongamos ahora que $C$ cumple que contiene una cápsula inyectiva para cada $R-$módulo simple $S$. Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo distinto de cero, y tomemos

$m \in M$ tal que $0 \neq m$, entonces $Rm$ es finitamente generado y por el Teorema 1.3.15 tiene un submódulo máximo $A$. Luego $S = Rm/A$ es simple. Sea $\gamma\colon S \to E(S)$ una cápsula inyectiva de $S$ con $E(S) \leq C$, la cual existe por hipótesis. Como $\gamma$ es un monomorfismo se tiene que $\gamma(m + A) \neq 0$. Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \nu\colon \quad Rm &\to \frac{Rm}{A} \\ rm &\to rm + A \end{aligned}$$

entonces $\gamma\nu(m) = \gamma(m + A) \neq 0$.
Como $E(S)$ es inyectivo, existe $\gamma'\colon M \to E(S)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Rm \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\gamma\nu"'] & M \arrow[dl, "\gamma'"] \\ E(S) & \end{tikzcd}$$

En consecuencia $\gamma'(m) \neq 0$. Si

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad M &\to C \\ x &\to \gamma'(x) \end{aligned}$$

entonces se sigue que $\varphi(m) \neq 0$, es decir $m \notin Ker(\varphi)$. Como $m$ es arbitrario se sigue que:

$$\bigcap_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0$$

se concluye que $C$ es un cogenerador.
$b)$ $C_o$ contiene una cápsula inyectiva de cada $R-$módulo izquierdo simple. Del inciso $a)$ $C_o$ es cogenerador.
$c)$ Si $C$ es un cogenerador, por el inciso $a)$ para cada módulo simple $S_i$ existe $Q_i \leq C$ con $Q_i \cong E(S_i)$. Sea $\gamma_i\colon E(S_i) \to Q_i$ isomorfismo. Afirmamos que

$$\sum_{i \in I} Q_i = \bigoplus_{i \in I} Q_i.$$

Sea $S_i' = \gamma_i(S_i)$, entonces $S_i' \cong S_i$ y $S_i' \leq_{es} Q_i$. Por el Teorema 1.6.3, para demostrar la afirmación es suficiente verificar que:

$$\sum_{i \in I} S_i' = \bigoplus_{i \in I} S_i'.$$

Supongamos que la suma no es directa, entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $\sum_{i \in J} S_i'$ no es directa, luego $\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} S_{r_i}'$ no es directa $\}$ es un subconjunto no vacío de los naturales y por tanto tiene elemento menor $n$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} S'_{r_i}$$

no es directa pero

$$\sum_{i=2}^{n} S'_{r_i} = \bigoplus_{i=2}^{n} S'_{r_i}.$$

Entonces $S'_{r_1} \cap (S'_{r_2} \oplus S'_{r_3} \oplus \cdots \oplus S'_{r_n}) \neq 0$, como $S'_{r_1}$ es simple se sigue que $S'_{r_1} \subseteq S'_{r_2} \oplus S'_{r_3} \oplus \cdots \oplus S'_{r_n}$. Sea $\pi_i$ la $i-$ésima proyección de $S'_{r_2} \oplus \cdots \oplus S'_{r_n}$ en $S'_i$ con $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces existe $i_o \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $\pi_{i_o}(S'_{r_1}) \neq 0$. Como $S'_{r_1}$ y $S'_{r_{i_o}}$ son simples se sigue que $S'_{r_1} \cong \pi_{i_o}(S'_{r_1}) \cong S'_{r_{i_o}}$, luego $S_{r_1} \cong S'_{r_1} \cong S'_{r_{i_o}} \cong S_{r_{i_o}}$ lo que es una contradicción. Así que

$$\sum_{i \in I} Q_i = \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon \coprod_{i\in I} E(S_i) & \to & \bigoplus_{i\in I} Q_i \\ (a_i) & \mapsto & \sum \gamma_i(a_i) \end{array}$$

es un isomorfismo pues $\gamma_i$ es un isomorfismo para cada $i \in I$. Luego, $C$ tiene un submódulo isomorfo a $C_o$. Ahora, si suponemos que $C$ posee un submódulo isomorfo a $C_o$ del inciso $a$) se sigue que $C$ es cogenerador. ■

*Capítulo 2*

# CARACTERIZACIONES DE ANILLOS MAX

**Definición 2.0.1.** Un $R$-módulo izquierdo $M$ es un **módulo Max** si y sólo si cada submódulo $N \neq 0$ de $M$ tiene al menos un submódulo máximo.

**Definición 2.0.2.** Un anillo $R$ es un **anillo MAX izquierdo** si y sólo si cada $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$ es un módulo Max.

## 2.1 Módulos Max

**Teorema 2.1.1.** *Sea $\{B_i \mid i \in I\}$ una familia de $R-$módulos izquierdos. $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$ es Max si y sólo si $B_i$ es Max, para cada $i \in I$.*

***Demostración***. Supongamos que $B$ es Max. Como $B_i \leq B$ para cada $i \in I$, si $A \leq B_i$ con $A \neq 0$, entonces $A \leq B$ y por tanto $A$ tiene un submódulo máximo. Por tanto, para cada $i \in I$ se tiene que $B_i$ es Max. Ahora, si $\{B_i \mid i \in I\}$ es una familia de módulos Max, veamos que $B$ es Max. Sea $N \leq B$ con $N \neq 0$, entonces existe $0 \neq \Sigma_{i \in J} m_i \in N$ con $J \subseteq I$ finito. Para $i_o \in J$ y $m_{i_o} \neq 0$ consideremos

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i \in I} B_i \arrow[r, two heads, "\pi_{i_o}"] & B_{i_o}, \\ N \arrow[u, hook, "\iota"] & \end{tikzcd}$$

donde $\iota$ es la inclusión y $\pi_{i_o}$ la $i_o-$ésima proyección. Entonces

$$\pi_{i_o}\iota(m_{i_o}) = \pi_{i_o}(\iota(m_{i_o})) = \pi_{i_o}(m_{i_o}) = m_{i_o} \neq 0.$$

Con lo que $\pi_{i_o}\iota \neq 0$. Sea $f = \pi_{i_o}\iota \mid^{\pi_{i_o}\iota(N)} : N \to \pi_{i_o}\iota(N)$, $f$ es epimorfismo y $0 \neq \pi_{i_o}\iota(N) \leq B_{i_o}$ que es Max, por tanto $\pi_{i_o}\iota(N)$ tiene un cociente simple $h : \pi_{i_o}\iota(N) \to S$, luego

$$N \xrightarrow[f]{} \pi_{i_o}\iota(N) \xrightarrow[h]{} S$$

y por tanto $N$ tiene un cociente simple. ∎

**Teorema 2.1.2.** *Un anillo $R$ es un anillo MAX izquierdo si y sólo si $R$ tiene un $R-$módulo izquierdo $C$ que es cogenerador Max.*

***Demostración***. Supongamos que $R$ es un anillo MAX izquierdo. Sea $C = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$, donde $\{S_i \mid i \in I\}$ es un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos simples y $E(S_i)$ sus respectivas cápsulas inyectivas. Entonces por el Teorema 1.11.11 $C$ es un cogenerador, veamos que $C$ es Max.
Sea $M \leq C$ con $M \neq 0$, como $R$ es un anillo izquierdo max, $M$ tiene un submódulo máximo, y por tanto $C$ es Max.
Verifiquemos que se cumple el recíproco. Sea $M \neq 0$ un $R-$módulo izquierdo, por hipótesis existe $C$ cogenerador de $R-$Mód que es Max, por el Teorema 1.11.4 existe $h \colon M \to C$ tal que $h \neq 0$, luego $Im(h) \neq 0$ y $Im(h) \leq C$, como $C$ es Max $Im(h)$ tiene un submódulo máximo.
Por el Primer Teorema de Isomorfismos existe un isomorfismo $\varphi \colon Im(h) \to \frac{M}{Ker(h)}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "h|_{Im(h)}"] \arrow[d, "\nu"'] & Im(h) \\
\frac{M}{Ker(h)} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\nu$ es el epimorfismo canónico.
Entonces $Im(h) \cong \frac{M}{Ker(h)}$. Si $Im(h)$ tiene un submódulo máximo, $\frac{M}{Ker(h)}$ también lo tiene y por el cuarto teorema de isomorfismos, si hay un módulo máximo en $\frac{M}{Ker(h)}$, lo hay en $M$. Por lo tanto $R$ es un anillo MAX izquierdo. ■

**Definición 2.1.3.** Sea $R$ un anillo. $R$ es **co-artiniano izquierdo** si y sólo si para cada $R-$módulo izquierdo simple $S$ la cápsula inyectiva de $S$, $E(S)$, es noetheriano.

**Corolario 2.1.4.** *Si $R$ co-artiniano izquierdo entonces $R$ es un anillo MAX izquierdo.*

***Demostración***. Sea $S$ un $R-$módulo izquierdo simple, afirmamos que $E(S)$ es Max. Sea $M \leq E(S)$, $M \neq 0$. Consideremos $\Gamma = \{B \mid B \lneq M\}$, $\Gamma$ es un subconjunto de submódulos de $E(S)$ y por hipótesis $E(S)$ es noetheriano. Así $\Gamma$ tiene un elemento máximo y en consecuencia $M$ tiene un submódulo máximo. Tenemos así que para cada $R-$módulo simple $S$, $E(S)$ es Max.
Sea $C = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$, donde $\{S_i \mid i \in I\}$ es un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples. $E(S_i)$ es Max para cada $i \in I$, entonces por el Teorema 2.1.1, $C$ es Max y por tanto $C$ es cogenerador Max. Por el Teorema 2.1.2, $R$ es MAX izquierdo. ■

**Ejemplo:** Consideremos a $\mathbb{Z}_p$ con $p$ primo. $\mathbb{Z}_p$ es simple, pero $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ que no es noetheriano.

Para ilustrar cuando $E(S)$ no sólo es neteriano, también simple, citaremos un teorema de Kaplansky, pero primero introduciremos la siguiente terminología.

**Teorema 2.1.5.** *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) *Cada $R-$módulo izquierdo simple $S$ es inyectivo, es decir, $E(S)$ es simple.*

2) $rad(M) = 0$ *para cada $R-$módulo izquierdo $M$.*

3) *Cada ideal izquierdo $I \neq R$ es la intersección de ideales izquierdos máximos, esto es, $rad_R(R/I) = 0$.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples. Por hipótesis los elementos de $\{S_i \mid i \in I\}$ son inyectivos, entonces $S_i = E(S_i)$ para cada $i \in I$. De ahí que $\bigoplus_{i\in I} S_i$ es un cogenerador de $R-$Mód y es semisimple. Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo, entonces

$$rad(M) = \bigcap_{\substack{\varphi\in Hom_R(M,N)\\ N \text{ semisimple}}} Ker(\varphi) \subseteq \bigcap_{\varphi\in Hom_R(M,\bigoplus_{i\in I} S_i)} Ker(\varphi) = 0,$$

donde la última igualdad se da por la definición de cogenerador.
2) $\Rightarrow$ 3) Sea $I$ un ideal izquierdo de $R$, entonces $_R(R/I)$ es un $R-$módulo izquierdo y por hipótesis $rad(_R(R/I)) = 0$. Entonces

$$0 = rad(_R(R/I)) = \bigcap_{I\leq B \text{ máximo en } R} {}_R(B/I) = \left(\bigcap_{I\leq B \text{ máximo en } R} B\right)/I.$$

Por lo tanto

$$I = \bigcap_{I\leq B \text{ máximo en } R} B,$$

que era lo que se deseaba.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $S$ un $R-$módulo simple, entonces $S$ es cíclico y existe $x \in S$ tal que $S = Rx$, sea $\varphi\colon R \to S$ tal que $\varphi(r) = rx$ y $\nu\colon R \to R/Ker(\varphi)$ el epimorfismo canónico, entonces por el Primer Teorema de Ismorfismos existe un isomorfismo

$\psi\colon R/Ker(\varphi) \to S$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & S . \\ \frac{R}{Ker(\varphi)} \arrow[ur, dashed, two heads, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Como $Ker(\varphi)$ es máximo en $R$, entonces cada $R-$módulo izquierdo simple $S$ se puede escribir como $R/I$ donde $I$ es máximo en $R$.
Usaremos el criterio de Baer para vérificar que $S$ es inyectivo. Por lo anterior, $S \cong R/M$ donde $M$ es un ideal máximo en $R$.
Sea $I$ un ideal de $R$ y $\varphi\colon I \to R/M$ con $\varphi \neq 0$. Como $Ker(\varphi)$ es submódulo máximo en $I$, entonces existe $a \in I \setminus Ker(\varphi)$ tal que $Ra + Ker(\varphi) = I$ y por el inciso 3) existe $M_1$ ideal máximo en $R$ tal que $Ker(\varphi) \leq M_1$ y $M_1 + I = R$. Pues si cada ideal máximo $M$ que es intersectando de $ker(\varphi)$ cumpliera que $I \subseteq M$, entonces $I \subseteq ker(\varphi) \subseteq I$ y por tanto $\varphi$ sería el morfismo 0, lo que es una contradicción y por tanto $I + M_1 = R$. De ahí que $Ra \cap M_1 \subseteq ker(\varphi)$ ya que si $M_1$ tuviera un elemento $b \in Ra$ que no está en $ker(\varphi)$, entonces $I = Rb + ker(\varphi) \subseteq M_1$, pero $M_1$ no contiene a $I$. Ahora, usando la ley modular

$$M_1 \cap I = M_1 \cap (Ra + Ker(\varphi)) = (Ra \cap M_1) + Ker(\varphi) = \ker(\varphi).$$

Sea $\hat{\varphi}\colon R \to R/M$ tal que $\hat{\varphi}(M_1) = 0$ y $\hat{\varphi}(I) = \varphi(I)$. Como $M_1 \cap I = \ker(\varphi)$ entonces $\hat{\varphi}$ está bien definida y es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\hat{\varphi}"] & \frac{R}{M} \\ I \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Como esto se cumple para cada ideal $I$ de $R$, por el criterio de Baer $R/M \cong S$ es inyectivo. ■

**Definición 2.1.6.** $R$ es un $V-$**anillo izquierdo** en caso de que $R$ cumpla alguna de las proposiciones del Teorema 2.1.5.

**Nota:**

i) Un $V-$anillo izquierdo es un anillo MAX izquierdo. En efecto, dado $M \neq 0$, si $M$ no tuviera algún submódulo máximo, $rad(M) = M$, pero por hipótesis $rad(M) = 0 \neq M$, por tanto $M$ debe tener algún submódulo máximo.

ii) Los $V-$anillos con co-artinianos.

**Teorema 2.1.7.** *Para cualquier anillo conmutativo $R$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *$R$ es Von Neumann regular.*

2) *$R$ es un anillo reducido de dimensión de Krull 0.*

3) *Para cualquier ideal máximo $M \leq R$, la localización $R_{(M)}$ es un campo.*

***Demostración.*** 1) $\Rightarrow$ 2) Para $a \in R$, existe $x \in R$ tal que $a = axa = a^2x$. Entonces $a^2 = 0$ implica $a = 0$, por tanto $R$ es reducido. Para demostrar el resto de 2) mostraremos que cualquier ideal primo $P$ es máximo. Para eso, veamos que $R/P$ es un campo. Para $a \notin P$, $a = a^2x$ para algún $x \in R$. Notemos que $\overline{ab} = \overline{0}$ implica que $ab \in P$, como $P$ es primo y $a \notin P$ se sigue que $b \in P$ y por tanto $\overline{b} = \overline{0}$. Luego $\overline{a}$ no es un divisor de cero y cancelando a $\overline{a}$ de $\overline{a} = \overline{aax}$ tenemos que $\overline{ax} = \overline{1}$ y por tanto $R/P$ es un campo.
2) $\Rightarrow$ 3) Sea $M$ un ideal máximo de $R$. Si $R$ es reducido, sea $(r, a) \in R_{(M)}$ tal que $(r, a)^n = 0$, entonces $(r^n, a^n) = 0$ y por tanto $r^n = 0$ y $a^n = 1$. Como $R$ es reducido, se sigue que $r = 0$ y por tanto $(r, a) = 0$ con lo cual $R_{(M)}$ es reducido, es decir, $Nil(R_{(M)}) = 0$. Si $R$ tiene dimensión de Krull 0, entonces también $R_{(M)}$ tiene dimensión de Krull 0. Pero $M_{(M)}$ es el único ideal primo de $R_{(M)}$, entonces $M_M = Nil_*R = Nil(R_{(M)}) = 0$. Por tanto $(R_{(M)}, M_{(M)})$ es local y por el Teorema 1.10.10 se cumple que $R_{(M)}/rad(R_{(M)})$ es un anillo con división y como $R_{(M)}$ es conmutativo, es un campo. Además $rad(R_{(M)}) = M_M = 0$. Por lo tanto $R_{(M)}$ es un campo.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $a \in R$. Dado $M$ ideal máximo de $R$, tenemos:

$$(aR/a^2R)_{(M)} \cong (aR)_{(M)}/(a^2R)_{(M)} \cong aR_{(M)}/a^2R_{(M)}.$$

Como $R_{(M)}$ es un campo, $aR_{(M)} = a^2R_{(M)}$, entonces

$$(aR/a^2R)_{(M)} = 0$$

para cada ideal máximo $M$, por tanto $aR/a^2R = 0$, de donde $a = a^2x$ para algún $x \in R$ y por lo tanto $R$ es Von Neumann Regular. ■

**Teorema 2.1.8.** *Sea $R$ un anillo conmitativo y $M = R/A$ con $A$ un ideal máximo en $R$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*1) $M$ como $R-$módulo izquierdo es inyectivo.*

*3) $M$ como $R-$módulo izquierdo es divisible.*

*2) La localización $R_{(A)}$ es un campo.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) Se sigue del corolario anterior.
2) $\Rightarrow$ 3) Primero notemos lo siguiente: para $r \in A$, la ecuación $\overline{1} = r\overline{v}$ no tiene solución para $\overline{v} \in M$, pues $\overline{1} = r\overline{v}$ implica $1 - rv \in A$. Como $r \in A$ entonces $rv \in A$, de ahí que $1 = 1 - rv + rv \in A$ lo que es una contradicción. Si $ann_R(r) \subseteq ann_R(\overline{1})$, por ser $M$ divisible, la escuación $\overline{1} = r\overline{v}$ tendría solución para algún $\overline{v} \in M$ lo que no ocurre, de ahí que $ann_R(r) \nsubseteq ann_R(\overline{1})$, por tanto existe $x \in ann_R(r)$ tal que $x \notin ann_R(\overline{1})$. Luego $xr = 0$, pero $0 \neq x\overline{1} = \overline{x}$, por tanto $x \notin A$. Es decir, cada $r \in A$ es anulado por algún elemento que no está en $A$.
Sea $\frac{r}{a} \in R_{(A)}$

i) Si $r \in A$, entonces existe $x \in R \setminus A$ tal que $r1x = rx = 0 = 0ax$, es decir $(r, a) \sim (0, 1)$.

ii) Si $r \notin A$, entonces $\frac{a}{r} \in R_{(A)}$, y $\frac{a}{r}\frac{r}{a} = \frac{1}{1}$ (pues $R$ es conmutativo, $1 \notin A$ y $ar1 = ra1$)

Por tanto, $R_{(A)}$ es un campo.
3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $R_{(A)}$ es un campo y veamos que $M$ es inyectivo via el criterio de Baer. Sea $U \leq R$ ideal de $R$ y $\varphi\colon {}_RU \longrightarrow {}_RR$ un morfismo de $R-$módulos izquierdos. Notemos que

$$M = \frac{R}{A} \simeq \frac{R_{(A)}}{A_{(A)}}.$$

Sea $\pi_1 : U \longrightarrow U_{(A)}$ tal que $\pi_1(u) = \frac{u}{1}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M \\ U_{(A)} & \end{tikzcd}$$

Sea

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon U_{(A)} & \longrightarrow & \dfrac{R_{(A)}}{A_{(A)}} \\ \dfrac{u}{r} & \longmapsto & \dfrac{1}{r}\varphi(u) \end{array}$$

Veamos que $\psi$ está bien definida. Sean $\frac{u'}{r'} = \frac{u}{r} \in U_{(A)}$, entonces existe $x \in R \setminus A$ tal que $u'rx = ur'x$, por tanto $\varphi(u'rx) = \varphi(ur'x)$, de donde $rx\varphi(u') = r'x\varphi(u)$. Además notemos que $rr'x \notin A$, entonces $\frac{1}{rr'x} \in R_{(A)}$ y por tanto

$$\frac{1}{rr'x} rx\varphi(u') = \frac{1}{rr'x} r'x\varphi(u).$$

De donde $\frac{1}{r'}\varphi(u') = \frac{1}{r}\varphi(u)$ y por tanto $\psi$ está bien definida. Además

$$\psi\pi_1(u) = \psi\left(\frac{u}{1}\right) = \frac{1}{1}\varphi(u) = \varphi(u).$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ U_{(A)} & \end{tikzcd}$$

Además, como $R_{(A)}$ es un campo entonces $U_{(A)} = 0$ o $U_{(A)} = R_{(A)}$:

i) Si $U_{(A)} = R_{(A)}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con $\kappa = Id_{U_{(A)}}$

$$\begin{tikzcd} U_{(A)} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\psi"'] & R_{(A)} \arrow[dl, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

ii) Si $U_{(A)} = 0$, entonces para cualquier morfismo $\kappa\colon R_{(A)} \to M$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U_{(A)} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\psi"'] & R_{(A)} \arrow[dl, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Sea $\pi_2\colon R \to R_{(A)}$ tal que $\pi_2(r) = \frac{r}{1}$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_{(A)} \arrow[rr, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"] & & R_{(A)} \arrow[dl, "\kappa"'] \\ & M & \\ U \arrow[uu, "\pi_1"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\iota"] & & R \arrow[uu, "\pi_2"'] \end{tikzcd}$$

Sea

$$\begin{aligned} \lambda\colon R &\to M \\ r &\mapsto \kappa\left(\frac{r}{1}\right) \end{aligned}$$

Entonces para $u \in U$

$$\lambda\iota(u) = \lambda(u) = \kappa\left(\frac{u}{1}\right) = \kappa\iota\left(\frac{u}{1}\right) = \psi\left(\frac{u}{1}\right) = \psi(\pi_1(u)) = \varphi(u).$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ M & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por el criterio de Baer $M$ es inyectivo. ■

**Teorema 2.1.9.** ***(Teorema de Kaplansky)*** *Un anillo conmutativo $R$ es un $V-$anillo si y sólo si $R$ es un Von Neuman regular.*

***Demostración***. Se sigue del Teorema 2.1.7 y del Teorema 2.1.8. ■

**Definición 2.1.10.** Sea $R$ un anillo y $L$ un ideal izquierdo de $R$. $L$ es $T-$**nipotente derecho** si y sólo si para cada sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $L$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 r_2 \cdots r_k = 0$.

**Teorema 2.1.11.** *Sea $R$ un anillo e $I$ un ideal izquierdo de $R$. Entonces $M$ es un $R/I-$módulo izquierdo si y sólo si $M$ es un $R-$módulo izquierdo y $IM = 0$.*

***Demostración***. Se sigue del ejemplo 9 de la sección 1.4 de [2]. ■

**Teorema 2.1.12.** *Sea $R$ un anillo. $R$ es MAX izquierdo si y sólo si $rad(R)$ es $T-$nilpotente derecho y $(R/rad(R))$ es MAX izquierdo.*

***Demostración***. Denotemos $K = R/rad(R)$.
($\Rightarrow$) Por el Cuarto Teorema de Isomorfismos, si cada $R-$módulo izquierdo diferente de cero tiene un submódulo máximo, entonces cada $K-$módulo diferente de cero tiene un submódulo máximo.
Suponga que $B$ es un $R-$módulo izquierdo diferente de cero y $A$ un submódulo de $B$ con $A + rad(B) = B$. Si $A \neq B$ entonces por hipótesis $B/A$ tiene un submódulo máximo, esto es, existe un submodulo máximo $\hat{A}$ de $B$ que contiene a $A$. Como por definición $rad(B) \leq \hat{A}$, se tiene que $A + rad(B) \leq \hat{A}$, lo que es una contradicción pues $A + rad(B) = B$ y $\hat{A} \lneq B$. Por lo tanto $A = B$, y en consecuencia para cada $R-$módulo izquierdo $B$, $rad(B)$ es superfluo en $B$. Ahora sea $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $Rad(R)$. Si $F$ es un módulo libre con base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $F'$ un submódulo de $F$ generado por $\{x_i - j_i x_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ entonces por el Corolario 1.10.12

se tiene que $rad(F) = (rad(R))F$ y tenemos además que $F' + (rad(R))F = F$, así $F' + rad(F) = F$, pero $rad(F)$ es superfluo en $F$, por tanto $F' = F$, luego existen $r_1, \ldots, r_n \in R$ tal que

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - j_i x_{i+1}) \\ &= r_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} (r_i - r_{i-1} j_{i-1}) x_i - r_n j_n x_{n+1}. \end{aligned}$$

Por la independencia de la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $r_1 = 1$, $r_i = r_{i-1} j_i$ para $i \in \{2, \ldots, n\}$ y $r_n j_n = 0$. Ahora $r_2 = r_1 j_1 = j_1$. En general si $r_k = j_1 \cdots j_{k-1}$, donde $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, entonces $r_{k+1} = r_k j_k = j_1 \cdots j_k$. Con este proceso encontramos que $r_n = j_1 \cdots j_{n-1}$ y $J_1 \cdots J_n = r_n j_n = 0$, por lo tanto $Rad(R)$ es $T-$nilpotente.
($\Leftarrow$) Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo diferente de cero. Afirmamos que $(Rad(R))M \neq M$ y lo demostraremos por contradicción, es decir, supongamos que $(rad(R))M = M$.
Como $M$ es diferente de cero, $(rad(R))M$ es diferente de cero y por consiguiente existen $j_1 \in Rad(R)$ y $m_1 \in M$ tal que $j_1 m_1 \neq 0$, además como $m \in M = (rad(R))M$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i n_i \text{ donde } r_i \in Rad(R) \text{ y } n_i \in M \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\},$$

como $j_1 m_1 \neq 0$ entonces existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $j_1 r_k n_k \neq 0$. Denotemos a $r_k = j_2$ y $n_k = m_2$, entonces $j_1 j_2 m_2 \neq 0$. Por inducción existe una sucesión $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $rad(R)$ y una sucesión $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $M$ con $j_1 \cdots J_k m_k \neq 0$ para $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Esto contradice que $rad(R)$ sea $T-$nilpotente, entonces para un $R-$módulo $M$ diferente de cero se tiene que $(rad(R))M \neq M$, luego $\frac{M}{(rad(R))M} \neq 0$ y por hipótesis tiene un submódulo máximo y por tanto $M$ lo tiene, lo que demuestra el resultado. ∎

**Lema 2.1.13.** *Sea R un anillo conmutativo. Si R es MAX izquierdo, entonces cada elemento de R que no sea divisor de cero es una unidad.*

***Demostración***. Sea $x \in R$ tal que $x$ no es divisor de cero. Sea $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ry_i$, donde $Ry_i = \frac{R}{Rx^i}$, es decir, $Rx^i = {}_R(0 : y_i)$. Si $B = \sum_{i=1}^{\infty} R(xy_{i+1} - y_i)$, entonces $\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{\infty} R\overline{y_i}$, donde $\overline{y_i} = y_i + B$. Supongamos que $A \neq B$, entonces por hipótesis $A/B$ tiene un submódulo máximo $M$. Si $\overline{y_n} \notin M$, entonces $R\overline{y_n} + M = A/B$ y existe $m \in M$ y $r \in R$ tal que $\overline{y_{2n}} = r\overline{y_n} + m$. Notemos que $x^n r\overline{y_n} = \bar{0}$ pues $Rx^i = {}_R(0 : y_i)$

y notemos también que $x^n\overline{y_{2n}} = \overline{y_n}$ pues

$$\begin{array}{rcl} x^n y_{2n} - y_n & = & x^{n-1}(xy_{2n} - y_{2n-1}) + x^{n-2}(xy_{2n-1} - y_{2n-2}) + \\ & + & x^{n-3}(xy_{2n-2} - y_{2n-3}) + x^{n-4}(xy_{2n-3} - y_{2n-4}) + \\ & + & \cdots\cdots \\ & + & x(xy_{2n-(n-2)} - y_{2n-(n-1)}) + x^{o}(xy_{2n-(n-1)} - y_{2n-n}) = \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}(xy_{2n-(i-1)} - y_{2n-i}) \in B. \end{array}$$

Por tanto

$$\overline{y_n} = x^n\overline{y_{2n}} = x^n(r\overline{y_n} + m) = x^n r\overline{y_n} + x^n m = x^n m \in M,$$

lo que es una contradicción.

Entonces $\overline{y_n} \in M$ para $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $M = A/B$, pero eso no es posible pues $M$ es máximo en $A/B$. Por lo tanto $A/B = 0$, es decir, $A = B$. Entonces existen $r_1, \ldots, r_n \in R$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i(xy_{i+1} - y_i) \\ & = & -r_1 y_1 + \left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(r_{i-1}x - r_i)y_i\right) + r_n x y_{n+1}. \end{array}$$

Como los $y_i's$ son independientes, $y_1 = -r_1 y_1$,$r_n x \in {}_R(0; y_{i+1}) = Rx^{n+1}$ y $r_{i-1}x - r_i \in {}_R(0; y_i) = Rx^i$ para $i \in \{2, 3, \ldots\}$. Como $r_n x \in Rx^{n+1}$ y $x$ no es divisor de cero, tenemos que $r_n x = rx^{n+1}$ para algún $r \in R$, entonces $r_n x = rx^n x$, luego $r_n = rx^n$ y por tanto $r_n \in Rx^n$. Supongamos que $r_k \in Rx^k$ cuando $k \in \{2, \ldots, n\}$. Como $r_{k-1}x - r_k \in Rx^k$, $r_{k-1}x \in Rx^x$ y como $x$ no es divisor de cero ocurre que $r_{k-1} \in Rx^{k-1}$. Esta inducción finita muestra que $r_1 \in Rx$, entonces $y_1 = -r_1 y_1 = 0$. Por tanto $\frac{R}{Rx} \cong Ry_1 = 0$ y $R = Rx$. Como $1 \in R$, existe $r \in R$ tal que $1 = rx = xr$. Así, $x$ es unidad. ■

**Teorema 2.1.14.** *Sea $R$ un anillo conmutativo. $R$ es MAX izquierdo si y sólo si $rad(R)$ es $T-$nilpotente derecho y $\frac{R}{rad(R)}$ es un anillo Von Neumann regular.*

***Demostración***. Denotemos $K = R/rad(R)$.

Por el Teorema 2.1.12 se cumple que $Rad(R)$ es $T-$nilpotente y cada $K-$módulo distinto de cero tiene un submódulo máximo. Verifiquemos que $K$ es Von Neumann regular.

Sea $a \in K$ tal que $a \neq 0$, como $Ka$ es conmutativo y no tiene ideales nilpotentes (pues

$rad(R)$ contiene a todos los ideales nilpotentes de $R$), entonces $Ka \cap {}_k(0; a) = 0$ pues si $w \in Ka \cap {}_k(0; a)$ con $w \neq 0$, se cumple que $w = ra$ y $wa = 0$ para algún $r \in K$, entonces $raa = 0$ y por consiguiente $rraa = 0$, es decir, $w^2 = 0$, luego $Kw$ es un ideal nilpotente de $Ka$ lo que es una contradicción.
Sea $\overline{K} = K/{}_k(0; a)$ y para $k \in K$ sea $\overline{k} = k + {}_k(0; a)$. Si $\overline{k}\overline{a} = \overline{0}$, entonces $ka \in Ka \cap {}_k(0; a) = 0$, luego $k \in {}_K(0; a)$ y $\overline{k} = \overline{0}$, por tanto $\overline{a}$ no es un divisor de cero y por el Lema 2.1.13 $\overline{K}\overline{a} = \overline{K}$ y $Ka \oplus {}_k(0; a) = K$. Esto muestra que cada ideal principal de $K$ es un sumando directo de $K$, por tanto $K$ es Von Neumann regular.
($\Rightarrow$) Basta verificar que todo $K-$módulo distinto de cero tiene algún submódulo máximo.
Como $K$ es Von Neumann regular y conmutativo, por el Teorema 2.1.9, cada $K-$módulo simple es inyectivo. Sea $M$ un $K-$módulo distinto de cero y tomemos $m \in M$ tal que $m \neq 0$.
$Km$ es ciclico si $Km$ no tiene submódulos propios distintos a 0, entonces $Km$ es simple, y si los tiene, por el Teorema 1.3.15, existe $B \leq Sm$ máximo distinto de cero y $Km/B$ es simple. De cualquier forma existe un epimorfismo

$$\varphi \colon Km \to A$$

con $A$ simple y por tanto inyectivo. Si $\iota \colon Km \to M$ es la inclusión entonces existe $\phi \colon M \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Km \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Y $Ker\phi$ es submódulo máximo de $M$. Por el Teorema 2.1.12 se cumple el resultado.
$\blacksquare$

**Definición 2.1.15. (Serie radical)** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Si $\alpha$ un ordinal sucesor tal que $\alpha = \gamma + 1$, entonces se define $rad^{\alpha}(M)$ como:

$$rad^{\alpha}(M) = rad^{\gamma+1}(M) = rad(rad^{\gamma}(M)).$$

Si $\alpha$ es un ordinal límite, se define $rad^{\alpha}(M)$ como:

$$rad^{\alpha}(M) = \bigcap_{\beta \in \alpha} rad^{\beta}(M).$$

**Teorema 2.1.16.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

*1) $M$ es Max.*

*2) Para cada ordinal $\beta$, $rad^{\beta}(M)$ tiene un submódulo máximo o es cero.*

*3) Para algún ordinal $\alpha$, $rad^{\alpha}(M) = 0$.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) Basta notar que $rad^{\beta}(M) \leq M$ para cada ordinal $\beta$ y como $M$ es Max, $rad^{\beta}(M)$ tiene un submódulo máximo o es cero.
2) $\Rightarrow$ 3) Notemos que si $\gamma < \beta$, entonces $rad^{\beta}(M) \leq rad^{\gamma}(M)$.
Si $rad^{\alpha}(M) \neq 0$, entonces por hipótesis existe $M_{\alpha} \leq rad^{\alpha}(M)$ máximo en $rad^{\alpha}(M)$, luego $S_{\alpha} = rad^{\alpha}(M)/M_{\alpha}$ es simple. De la Observación de la sección 1.11 hay a lo más tantos simples como ideales de $R$. Sea $\beta$ un número cardinal más grande que la cardinalidad del conjunto potencia de $R$, se sigue que $rad^{\beta}(M) = 0$.
3) $\Rightarrow$ 1) Consideremos $K \neq 0$ submódulo de $M$ y sea $\lambda < \alpha$ el menor ordinal tal que $K \nsubseteq rad^{\lambda}(M)$, si $\lambda$ no es un ordinal sucesor, entonces como $K \subseteq rad^{\beta}(M)$ para cada $\beta < \lambda$ se sigue que $K \subseteq \bigcap_{\beta<\lambda} rad^{\beta}(M) = rad^{\lambda}(M)$ lo que es una contradicción, por tanto $\lambda$ es un ordinal sucesor y en consecuencia $K \subseteq rad^{\lambda-1}(M)$.
Si $K = rad^{\lambda-1}(M)$, entonces $K$ tiene un sumódulo máximo pues $rad(K) = rad^{\lambda}(M) \neq K$.
Si $K \neq rad^{\lambda-1}(M)$, entonces $K$ no está contenido en algún submódulo máximo $M'$ de $rad^{\lambda-1}(M)$ pues de lo contrario, si para cada $M'$ máximo en $rad^{\lambda-1}(M)$ $K \subseteq M'$ entonces

$$K \subseteq \bigcap_{\substack{A \leq rad^{\lambda-1}(M) \\ A \text{ máximo}}} A.$$

Es decir, $K \subseteq rad(rad^{\lambda-1}(M)) = rad^{\lambda}(M)$ lo que es una contradicción. Luego, $K$ no está contenido en algún $M'$ máximo en $rad^{\lambda-1}(M)$. Afirmamos que $K \cap M'$ es máximo en $K$.
Primero notemos que como $K$ no está contenido en $M'$ existe $a \in K$ tal que $a \notin M'$, como $M'$ es máximo se sigue que $M' + Ra = rad^{\lambda-1}(M)$ y se cumple que $M' + Ra \leq M' + K$, entonces $M' + K = rad^{\lambda-1}(M)$.
Ahora, si $K \cap M' \leq C \leq K$, se sigue que

$$M' = M' + K \cap M' \leq C + M' \leq K + M' = rad^{\lambda-1}(M)$$

Como $M'$ es máximo en $rad^{\lambda-1}(M)$ se sigue que $C + M' = M'$ o $C + M' = rad^{\lambda-1}(M)$. Si $C + M' = M'$, entonces $C \leq M' \cap K$ y por lo tanto $C = M' \cap K$.
Si $C + M' = rad^{\lambda-1}(M) = M' + K$, entonces

$$K = K \cap rad^{\lambda-1}(M) = K \cap (C + M') = C + (K \cap M') = C$$

Por tanto $M$ es Max. ■

**Corolario 2.1.17.** *Sea $C$ un cogenerador en $R-$Mód. $R$ es MAX izquierdo si y sólo si $C$ tiene un radical transfinito nilpotente.*

***Demostración***. Si $R$ es MAX izquierdo, entonces $C$ es Max y por el Teorema 2.1.16 $C$ tiene un radical transfinito nilpotente. Ahora si $C$ tiene un radical transfinito nilpotente, por el Teorema 2.1.16 $C$ es Max y por el Teorema 2.1.2, $R$ es MAX izquierdo. ■

**Lema 2.1.18.** *Sea $Q$ un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo, entonces cada $A \leq Q$ fuertemente invariante en $Q$ es casi-inyectivo, en particular, $rad^{\alpha}(M)$ es casi-inyectivo para cada ordinal $\alpha$.*

***Demostración***. Sea $A \leq Q$ un submódulo fuertemente invariante en $Q$. Como $E(A) \leq E(Q)$ y $E(Q)$ es inyectivo, sea $\lambda\colon E(A) \to E(A)$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E(A) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\lambda"'] & E(Q) \\ E(A) \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ E(Q) & \end{tikzcd}$$

Como $E(Q)$ es inyectivo existe $\kappa\colon E(Q) \to E(Q)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E(A) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\lambda"'] & E(Q) \arrow[ddl, dashed, "\kappa"] \\ E(A) \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ E(Q) & \end{tikzcd}$$

y por tanto $\lambda = \iota\lambda = \kappa\iota$, es decir, $\lambda$ es la restricción del morfismo $\kappa\colon E(Q) \to E(Q)$ y como $Q$ es casi-inyectivo por el Teorema 1.6.17 $Q$ es fuertemente invariante en $E(Q)$ y por tanto $\kappa$ induce un morfismo $\hat{\kappa}$ en $End(Q)$, $\hat{\kappa} = \kappa\mid_Q$. Por hipótesis $A$ es fuertemente invariante en $Q$, entonces $\hat{\kappa}(A) \leq A$ y siempre pasa que $A \leq E(A)$, luego $\lambda(A) = (\iota\lambda)(A) = (\kappa\iota)(A) = \kappa(A) = \hat{\kappa}(A) \leq A$, es decir, $\lambda(A) \leq A$, por tanto $A$ es fuertemente invariante en $E(A)$ y por el Teorema 1.6.17, $A$ es casi-inyectivo.

Verifiquemos que para cada ordinal $\alpha$, $rad^{\alpha}(Q)$ es fuertemente invariante en $Q$. La demostración se hará por inducción transfinita.

Si $\varphi \in Hom(Q, Q)$ entonces por el Teorema 1.10.3, $\varphi(rad(Q)) \leq rad(Q)$ y por tanto $rad(Q)$ es fuertemente invariante en $Q$ y por el Teorema 1.6.17, $rad(Q)$ es casi-inyectivo. Ahora sea $\alpha$ un ordinal tal que $rad^{\alpha}(Q)$ es casi-inyectivo y verifiquemos que $rad^{\alpha+1}(Q)$ es fuertemente invariante en $rad^{\alpha}(Q)$. Sea $\varphi \in Hom(rad^{\alpha}(Q), rad^{\alpha}(Q))$, entonces por el Teorema 1.10.3

$$\varphi(rad^{\alpha+1}(Q)) = \varphi(rad(rad^{\alpha}(Q))) \leq rad(rad^{\alpha}(Q)) = rad^{\alpha+1}(Q).$$

Es decir, $rad^{\alpha+1}(Q)$ es fuertemente invariante en $rad^{\alpha}(Q)$ y por hipótesis inductiva y el Teorema 1.6.17, $rad^{\alpha+1}(Q)$ es casi-inyectivo.

Sea $\alpha$ un ordinal límite tal que $rad^{\beta}(Q)$ es casi-inyectivo para cada $\beta < \alpha$. Sea $\varphi \in Hom(Q, Q)$, entonces $\varphi(rad^{\beta}(Q)) \leq rad^{\beta}(Q)$ para cada $\beta < \alpha$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\varphi(rad^{\alpha}(Q)) &= \varphi\left(\bigcap_{\beta<\alpha} rad^{\beta}(Q)\right) \\
&\leq \bigcap_{\beta<\alpha} \varphi(rad^{\beta}(Q)) \\
&\leq \bigcap_{\beta<\alpha} rad^{\beta}(Q) \\
&= rad^{\alpha}(Q).
\end{aligned}$$

Luego $rad^{\alpha}(Q)$ es fuertemente invariante en $Q$ y por el Teorema 1.6.17 $rad^{\alpha}(Q)$ es casi-inyectivo. Con lo que queda demostrado que para cada ordinal $\alpha$, $rad^{\alpha}(Q)$ es casi-inyectivo. ■

**Definición 2.1.19.** Un $R-$módulo izquierdo $N$ es llamado **co-cíclico** si y sólo si $N$ tiene un submódulo simple $K$ el cual está contenido en cada submódulo de $N$ diferente de cero.

**Teorema 2.1.20.** *Sea $R$ un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *$R$ es MAX izquierdo.*

2) *Cada $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$ casi- inyectivo tiene al menos un submódulo máximo.*

3) *Cada $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$ casi-inyectivo co-cíclico tiene al menos un submódulo máximo.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 3) Son claros.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples y $E(S_i)$ sus respectivas cápsulas inyectivas. Veamos que $rad(E(S_i))$ es co-cíclico para cada $i \in I$. $S_i \leq_{es} E(S_i)$ para cada $i \in I$. Si $rad(E(S_i)) \neq 0$ , entonces $rad(E(S_i)) \cap S_i \neq 0$ y por tanto $S_i = S_i \cap rad(E(S_i))$ pues $S_i$ es simple, luego $S_i \leq rad(E(S_i))$.
Afirmamos que para cualquier submódulo de $rad(E(S_i))$, diferente de cero, $S_i$ está contenido en él. Sea $B \leq rad(E(S_i))$ tal que $B \neq 0$, entonces como $rad(E(S_i)) \leq E(S_i)$ y $S_i \leq_{es} E(S_i)$, se sigue que $S_i \cap B \neq 0$ y como $S_i$ es simple, se tiene que $S_i \cap B = S_i$ y por tanto $S_i \leq B$, es decir, para cada $B \leq rad(E(S_i))$ tal que $B \neq 0$ se cumple que $S_i \leq B$ y $S_i$ es simple, por lo tanto $rad(E(S_i))$ es co-cíclico. De manera análoga se verifica que para cada ordinal $\alpha$, tal que $rad^{\alpha}(E(S_i)) \neq 0$ se cumple que $rad^{\alpha}(E(S_i))$ es co-cíclico. De 3) y por el Teorema 2.1.16 $E(S_i)$ es Max para cada $i \in I$ además por el Teorema 2.1.1 $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ es Max y finalmente por el Teorema 2.1.2 $R$ es MAX izquierdo. ■

**Definición 2.1.21.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. $M$ es **fiel** si y sólo si para cada $r \in R$ tal que $r \neq 0$, existe $m \in M$ de forma que $rm \neq 0$.

**Proposición 2.1.22.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo fiel. Si $I$ es un ideal de $R$ tal que $IM = 0$, entonces $I = 0$.*

***Demostración***. Supongamos que $I \neq 0$, entonces existe $r \in I$ tal que $r \neq 0$. Como $M$ es fiel existe $m \in M$ con $rm \neq 0$, pero eso contradice el hecho de que $IM = 0$. Por lo tanto $I = 0$. ■

**Corolario 2.1.23.** *Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Si $M$ es fiel y tiene un radical transfinito nilpotente, entonces $R$ tiene radical transfinito nilpotente.*

***Demostración***. Sea $J = rad(R)$, veamos que $J^{\alpha}M \leq rad^{\alpha}(M)$ para cada ordinal $\alpha$. La prueba se hará por inducción transfinita.
Por el Teorema 1.10.4, $JM \leq rad(M)$.
Sea un ordinal $\alpha$ tal que $J^{\alpha}M \leq rad^{\alpha}(M)$. Sea $a \in M\backslash\{0\}$ y $\varphi_a\colon J^{\alpha} \to rad^{\alpha}(M)$ tal que $\varphi_a(r) = ra$. $\varphi_a$ está bien definida pues por hipótesis inductiva $J^{\alpha}M \leq rad^{\alpha}(M)$. Luego por el Teorema 1.10.3

$$rad^{\alpha+1}(R)a = \varphi_a(rad(rad^{\alpha}(R))) \leq rad(rad^{\alpha}(M)) = rad^{\alpha+1}(M),$$

entonces
$$\sum_{a\in M} rad^{\alpha+1}(R)a = rad^{\alpha+1}(R)M \leq rad^{\alpha+1}(M).$$
Por lo tanto $rad^{\alpha+1}(R)M \leq rad^{\alpha+1}(M)$.
Ahora, sea $\alpha$ ordinal límite tal que $rad^{\beta}(R)M \leq rad^{\beta}(M)$ para cada $\beta < \alpha$, entonces
$$J^{\alpha}M = \left(\bigcap_{\beta<\alpha} J^{\beta}\right) M \leq \bigcap_{\beta<\alpha} \left(J^{\beta}M\right) \leq \bigcap_{\beta<\alpha} rad^{\beta}(M) = rad^{\alpha}(M).$$
Por tanto, para cada ordinal $\alpha$ se cumple que $J^{\alpha}M \leq rad^{\alpha}(M)$.
Si $M$ tiene un radical transfinito nilpotente, entonces para un ordinal $\alpha$ ocurre que $rad^{\alpha}(M) = 0$, como $J^{\alpha}M \leq rad^{\alpha}(M)$ se sigue que $J^{\alpha}M = 0$ y como $M$ es fiel de la Proposición 2.1.22 se sigue que $J^{\alpha} = 0$, es decir, $R$ tiene radical transfinito nilpotente. ■

## 2.2 Series Loewy y módulos semisimples transfinitos

**Definición 2.2.1.** Una **serie Loewy descendente o dual** para un $R-$módulo izquierdo $M$ es una cadena descendente $\{M_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ de submódulos indexados por un ordinal $\Lambda$ tal que $M_o = M$, $\frac{M_{\alpha}}{M_{\alpha+1}}$ es semisimple y
$$M_{\beta} = \bigcap_{\alpha\in\beta} M_{\alpha}$$
para cualquier ordinal límite $\beta \in \Lambda$.

**Definición 2.2.2.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. Decimos que $M$ es **semisimple transfinito** si y sólo si existe una serie Loewy descendente $\{M_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ con $M_{\alpha} = 0$ para algún $\alpha \in \Lambda$.

**Teorema 2.2.3.** *Cualquier $R-$módulo izquierdo $M$ semisimple transfinito es un módulo Max.*

***Demostración***. Como $M$ es semisimple transfinito existe una serie Loewy descendente $\{M_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $M_{\alpha} = 0$ para algún $\alpha \in \Lambda$.
Veamos por inducción transfinita que
$$rad^{\alpha}(M) \subseteq M_{\alpha}.$$
Para $M_o$ tenemos que $M_o = M \supseteq rad^{o}(M)$. Supongamos que $rad^{\alpha}(M) \subseteq M_{\alpha}$. Como $\frac{M_{\alpha}}{M_{\alpha+1}}$ es semisimple, por el Teorema 1.10.6,
$$rad\left(\frac{M_{\alpha}}{M_{\alpha+1}}\right) = 0$$

y por el Teorema 1.10.5 $rad(M_\alpha) \subseteq M_{\alpha+1}$. Entonces por hipótesis inductiva $rad^\alpha(M) \subseteq M_\alpha$ y por tanto

$$rad^{\alpha+1}(M) = rad(rad^\alpha(M)) \subseteq rad(M_\alpha) \subseteq M_{\alpha+1},$$

es decir, $rad^{\alpha+1}(M) \subseteq M_{\alpha+1}$.
Si $\beta \in \Lambda$ es un ordinal límite tal que para cada $\gamma \in \beta$

$$rad^\gamma(M) \subseteq M_\gamma,$$

entonces

$$rad^\beta(M) = \bigcap_{\gamma\in\beta} rad^\gamma(M) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\beta} M_\gamma = M_\beta.$$

Concluimos por inducción transfinita que para cada $\alpha \in \Lambda$ se cumple que $rad^\alpha(M) \subseteq M_\alpha$. Para $\alpha \in \Lambda$ tal que $M_\alpha = 0$ se sigue que $rad^\alpha(M) = 0$ y por el Teorema 2.1.16 $M$ es Max. ■

**Corolario 2.2.4.** *Si para cada $R-$módulo izquierdo simple $S$, $E(S)$ es semisimple transfinito, entonces $R$ es MAX izquierdo.*

***Demostración***. Por el Teorema 2.2.3 para cada $R-$módulo izquierdo simple $S$, $E(S)$ es Max. Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples, entonces $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ es un cogenerador de $R-$Mód. Por el Teorema 2.1.1 $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ es Max y del Teorema 2.1.2 $R$ es MAX izquierdo. ■

## 2.3 Módulos Bass

**Definición 2.3.1.** Sea $M$ un $R-$módulo izquierdo. $M$ es un módulo **Bass** si y sólo si cada submódulo $M' \leq M$ tal que $M' \neq M$ está contenido en un submódulo máximo de $M$.

Los siguientes teoremas (Teorema 2.3.2 y Teorema 2.3.3) nos proporcionan una condición de doble anulador para ideales finitamente generados de $\Lambda$, el anillo de endomorfismos de un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo.

**Teorema 2.3.2.** *Sea $Q$ un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo y $I$ ideal izquierdo de $\Lambda = End_R(Q)$ tal que $ann_\Lambda ann_Q(I) = I$. Entonces para cada $x \in \Lambda$*

$$ann_\Lambda ann_Q(I + \Lambda x) = I + \Lambda x.$$

***Demostración***. Sea $x \in \Lambda$. Si $\psi + \lambda x \in I + \Lambda x$, para $a \in ann_Q(I + \Lambda x)$, entonces $(\psi + \lambda x)(a) = 0$, de ahí que $\psi + \lambda x \in ann_\Lambda ann_Q(I + \Lambda x)$. Por tanto

$$I + \Lambda x \subseteq ann_\Lambda ann_Q(I + \Lambda x).$$

Para la otra contención veamos primero que

$$ann_Q(I + \Lambda x) = ann_Q(I) \cap ann_Q(x).$$

Notemos que $ann_Q(I) \cap ann_Q(x) \subseteq ann_Q(I + \Lambda x)$ es inmediato.
Si $a \in ann_Q(I + \Lambda x)$ para cada $\psi + \lambda x \in I + \Lambda x$ se cumple que $(\psi + \lambda x)(a) = 0$, en particular para $\psi \in I$ y para $x$ se tiene que $\psi, x \in I + \Lambda x$ y por tanto $\psi(a) = 0$ y $x(a) = 0$ de ahí que $a \in ann_Q(I) \cap ann_Q(x)$.
Ahora, sea $y \in ann_\Lambda ann_Q(I + \Lambda x) = ann_\Lambda(ann_Q(I) \cap ann_Q(x))$, entonces

$$ann_Q(I) \cap ann_Q(x) \subseteq ann_Q(y)$$

y por tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
ann_Q(I) \cap ann_Q(x) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook, "\iota"] & ann_Q(I) \arrow[r, two heads, "x|_{ann_Q(I)}"] \arrow[d, hook, "\iota"] & x(ann_Q(I)) \\
ann_Q(y) \arrow[r, hook, "\iota"] & Q \arrow[r, two heads, "y"] & Im(y)
\end{tikzcd}$$

Sea

$$\begin{aligned} \kappa\colon x(ann_Q(I)) &\to Im(y) \\ x(a) &\mapsto y(a) \end{aligned}$$

y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
x(ann_Q(I)) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\kappa"'] & Q \\
Im(y) \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Como $Q$ es casi-inyectivo, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
x(ann_Q(I)) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\kappa"'] & Q \arrow[ddl, dashed, "\lambda"] \\
Im(y) \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\lambda x(ann_Q(I)) = \lambda(\iota(x(ann_{(}I)))) = \kappa(x(ann_Q(I))) = y(ann_Q(I))$, entonces

$$(y - \lambda x)(ann_Q(I)) = y(ann_Q(I)) - \lambda(x(ann_Q(I))) = y(ann_Q(I)) - y(ann_Q(I)) = 0.$$

De esto se sigue que $y - \lambda x \in ann_\Lambda ann_Q(I) = I$ y en consecuencia $y \in I + \Lambda x$. Por tanto

$$ann_\Lambda ann_Q(I + \Lambda x) = I + \Lambda x.$$

■

**Teorema 2.3.3.** *Sea $Q$ un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo. Si $\Lambda = End_R(Q)$ entonces para $I$ ideal izquierdo de $\Lambda$ finitamente generado se cumple:*

$$ann_\Lambda ann_Q(I) = I.$$

***Demostración***. Veamos que para cada $x \in \Lambda$ se cumple que $ann_\Lambda ann_Q(\Lambda x) = \Lambda x$ y usando una cantidad finita de veces el Teorema 2.3.2 se obtiene lo deseado. Para eso basta ver que $ann_\Lambda ann_Q(\{\overline{o}\}) = \{\overline{o}\}$, donde $\overline{o} \colon Q \to Q$ es el morfismo que manda a todos los elementos de $Q$ al elemento $0 \in Q$.
Si $x \in ann_\Lambda ann_Q(\{\overline{o}\})$, entonces $x(ann_Q(\{\overline{o}\})) = 0$, pero

$$ann_Q(\{\overline{o}\}) = \{a \in Q \mid \overline{o}(a) = 0\} = Q.$$

Entonces $x \in \Lambda$ es tal que para $a \in Q$, $x(a) = 0 \in Q$, por tanto $x = \overline{o}$. En consecuencia

$$ann_\Lambda ann_Q(\{\overline{o}\}) = \{\overline{o}\}.$$

Se tiene que $\{\overline{o}\}$ es un ideal finitamente generado de $\Lambda$ que cumple las hipótesis del Teorema 2.3.2, entonces para cada $x \in \Lambda$ se cumple que

$$ann_\Lambda ann_Q(\Lambda x) = ann_\Lambda ann_Q(\{\overline{o}\} + \Lambda x) = \{\overline{o}\} + \Lambda x = \Lambda x$$

que era lo deseado. ■

**Teorema 2.3.4.** *Sea $Q$ un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo que contiene una copia de cada imagen simple de $Q$ y $\Lambda = End_R(Q)$. Si $Q$ es un módulo Bass entonces $\Lambda$ tiene un zoclo esencial izquierdo.*

***Demostración***. Sea $J \leq \Lambda$ un ideal izquierdo de $\Lambda$ tal que $J \neq 0$, entonces existe $a \in J$ tal que $a \neq 0$. Sea $I = \Lambda a$, $I \neq 0$, $I \leq J$ con $I$ finitamente generado, entonces por el Teorema 2.3.3

$$ann_\Lambda ann_Q(I) = I.$$

Por hipótesis $Q$ es Bass y $ann_Q(I) \leq Q$, se sigue que existe $Q' \leq Q$ máximo tal que $ann_Q(I) \leq Q'$. $\frac{Q}{Q'}$ es simple, entonces por hipótesis existe

$$\psi\colon \frac{Q}{Q'} \to Q$$

monomorfismo. Consideremos la siguiente composición:

$$Q \xrightarrow{\nu} \frac{Q}{Q'} \xrightarrow{\psi} Q$$

Donde $\nu$ es el epimorfismo canónico. Sea $\lambda = \psi\nu$, entonces $\lambda \in \Lambda$. Afirmamos que $L = \Lambda\lambda$ es un ideal izquierdo contenido en $I$. Notemos que $Q' = Ker(\psi\nu) \subseteq Ker(\lambda)$, Como $ann_Q(I) \leq Q'$, $ann_Q(I) \subseteq Ker(\lambda)$, luego $\lambda(ann_Q(I)) = 0$ y por tanto

$$\lambda \in ann_\Lambda ann_Q(I) = I.$$

De esto se sigue que $\Lambda\lambda \leq I$. Afirmamos que $\Lambda\lambda$ es mínimo.
Si $\Lambda\alpha \leq \Lambda\lambda$, entonces $\alpha = \beta\lambda$ para algún $\beta \in \Lambda$ y por tanto

$$Q' \leq Ker(\lambda) \leq Ker(\alpha),$$

de donde $Q' \leq Ker(\alpha) \leq Q$ y $Q'$ es máximo en $Q$, por tanto $Q' = Ker(\alpha)$ o $Ker(\alpha) = Q$. Si $Ker(\alpha) = Q$, entonces $\alpha$ es el morfismo cero. Si $Ker(\alpha) = Q'$, entonces tenemos

$$Ker(\alpha) = Q' \leq Ker(\lambda).$$

Notemos que $Ker(\alpha) = ann_Q(\Lambda\alpha)$, entonces $\lambda(ann_Q(\Lambda\alpha)) = 0$ y como $\Lambda\alpha$ es finitamente generado,

$$\lambda \in ann_\Lambda ann_Q(\Lambda\alpha) = \Lambda\alpha,$$

es decir, $\Lambda\lambda \leq \Lambda\alpha$ y por tanto $\Lambda\lambda = \Lambda\alpha$. Se concluye que $\Lambda\lambda$ es mínimo contenido en $I$.
Luego, $\Lambda\lambda \leq zoc(\Lambda)$ por lo que $0 \neq zoc(\Lambda) \cap I \subseteq zoc(\Lambda) \cap J$. Así

$$J \cap zoc(\Lambda) \neq 0$$

y por lo tanto $zoc(\Lambda) \leq_{es} \Lambda$. ■

## 2.4 Condiciones de doble anulador para cogeneradores

**Teorema 2.4.1.** ***(Teorema DAC)*** *Sea $C$ un $R-$módulo izquierdo. Si $C$ es cogenerador de $R-$Mód, $I \leq {}_R R$, $M \leq C$, y $\Lambda = End_R(C)$, entonces se satisface:*

*a)* $I = ann_R ann_C(I)$.

*b)* $M = ann_C ann_\Lambda(M)$.

***Demostración***. $a$) Por el Teorema 1.11.6 existe un monomorfismo $\psi : {}_R(R/I) \longrightarrow C^\alpha$ para algún cardinal $\alpha$. Si $(x_i)$ es la imagen en $C$ de $1+I \in R/I$, entoces $\psi(1+I) = (x_i)$. Afirmamos que

$$ann_R(\{x_i\}) = I.$$

Para $r \in R$, si $r(x_i) = 0$ se tiene que:

$$0 = r(x_i) = r\psi(1 + I) = \psi(r + I).$$

Como $\psi$ es monomorfismo, $r + I = 0$ y por tanto $r \in I$. De esto se sigue que $ann_R(x_i) \subseteq I$.
Ahora, dado $r \in I$,

$$r(x_i) = r\psi(1 + I) = \psi(r + I) = \psi(I) = 0.$$

Por tanto $ann_R(\{x_i\}) = I$ y del inciso $c$) del Lema 1.8.1,

$$I = ann_R(\{x_i\}) = ann_R ann_C ann_R(\{x_i\}) = ann_R ann_C(I),$$

es decir,

$$I = ann_R ann_C(I).$$

$b$) Por el inciso 4) del Teorema 1.11.6 existe un monomorfismo de $h \colon C/M \longrightarrow C^\alpha$ para algún cardinal $\alpha$. Sea $\lambda$ la siguiente conposición

$$C \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \frac{C}{M} \overset{h}{\rightarrowtail} C^\alpha .$$

Notemos que $Ker(\lambda) = M$. Si $p_\alpha \colon C^\alpha \longrightarrow C$ es la $\alpha-$ésima proyección, $\varphi_\alpha = p_\alpha \circ \lambda \in \Lambda$.
Afirmamos que

$$M = \bigcap Ker(\varphi_\alpha).$$

En efecto, sea $a \in \bigcap Ker(\varphi_\alpha)$, entonces para cada $\alpha$ ocurre que $\varphi_\alpha(a) = 0$. De ahí que para cada $\alpha$ tenemos que $p_\alpha \circ \lambda(a) = 0$, con esto $\lambda(a) = (0)$, luego

$a \in Ker(\lambda) = M$.
Ahora si $m \in M$, $\lambda(m) = 0$, y para cada $\alpha$ se satisface que $\varphi_\alpha = p_\alpha(\lambda(m)) = 0$ por lo que $m \in \bigcap_\alpha Ker(\varphi_\alpha)$, demostrando la afirmación.
Luego

$$M = \bigcap_\alpha Ker\varphi_\alpha = ann_C\left(\sum_\alpha \Lambda\varphi_\alpha\right)$$

y por el inciso $c$) del Lema1.8.1,

$$M = ann_C\left(\sum_\alpha \Lambda\varphi_\alpha\right) = ann_C ann_\Lambda ann_C\left(\sum_\alpha \Lambda\varphi_\alpha\right) = ann_C ann_\Lambda(M),$$

es decir,

$$M = ann_C ann_\Lambda(M).$$

■

## 2.5 Cogeneradores inyectivos

Si algún cogenerador de $R-$Mód es un módulo Max, entonces $R$ es un anillo MAX izquierdo. En esta sección veremos dos condiciones sobre un cogenerador $C$ mínimo inyectivo que son necesarias y suficientes para que $R$ sea un $V-$anillo: (1) $rad(C) = 0$ y (2) $C$ es un módulo Bass y $\Lambda = End_R(C)$ tiene radical de Jacobson igual a cero.

Del Teorema 1.11.11, $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ donde $\{S_i \mid i \in\}$ es un sistema de representantes de $R-$módulos izquierdos simples, entonces $C$ es **cogenerador mínimo**.

**Teorema 2.5.1.** *Sea $C$ cogenerador mínimo inyectivo de $R-$Mód, y $W$ la suma directa de un conjunto completo de $R-$módulos izquierdos simples no isomorfos (Por tanto $C$ es la cápsula inyectiva de $W$, y $W$ es el zoclo de $C$). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*1) $R$ es un $V-$anillo izquierdo.*

*2) $rad(C) = 0$.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) Por definición cada $R-$módulo izquierdo $M$ cumple que $rad(M) = 0$, en particular $rad(C) = 0$.
2) $\Rightarrow$ 1) Sea $S$ un $R-$módulo simple, $S \leq C$, de 2) existe un submódulo máximo $M$ de $C$ que no contiene a $S$. Luego $S \cap M = 0$ pues de lo contrario $0 \neq S \cap M \lneq S$

lo que contradice el hecho de que $S$ es simple. Además $M \lneq S + M \leq C$. Como $M$ es máximo, $S + M = C$, por tanto $C = S \oplus M$. Además, por hipótesis $C$ es inyectivo y por el Teorema 1.6.10 cada sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo, entonces $S$ es inyectivo. Como la propiedad de ser inyectivo se preserva bajo isomorfismo y por hipótesis $W \leq C$, se sigue que cada $R-$módulo izquierdo simple es inyectivo, por tanto $R$ es un $V-$anillo. ■

**Teorema 2.5.2.** *Sean $M$ un $R-$módulo izquierdo casi-inyectivo y $\Lambda = End_R(M)$, entonces*

$$rad(\Lambda) = \{\lambda \in \Lambda \mid ker(\lambda) \leq_{es} M\}.$$

***Demostración***. Sea $I = \{\lambda \in \Lambda \mid ker(\lambda) \leq_{es} M\}$. Veamos que $I$ es un ideal izquierdo de $\Lambda$. Si $\lambda \in \Lambda$ y $u, v \in I$, entonces

$$Ker(u) \cap Ker(v) \subseteq Ker(u + v), Ker(u) \subseteq Ker(\lambda u).$$

Como $ker(u) \cap Ker(v)$ y $Ker(u)$ son esenciales en $M$ se sigue que $Ker(u + v)$ y $Ker(\lambda u)$ son esenciales en $M$ y por tanto $I$ es un ideal izquierdo de $\Lambda$.
Para $s \in I$, $Ker(s) \cap Ker(1 + s) = 0$ pues para $u \in M$, $s(u) = 0 = u + s(u)$ implica que $u = 0$, además como $Ker(s) \leq_{es} M$ entonces $Ker(1 + s) = 0$. Es decir, para cada $s \in I$, $1 + s$ tiene inverso, por el Teorema 1.10.8 se sigue que $I \subseteq rad(\Lambda)$.
Sea $s \in rad(\Lambda)$, $K = Ker(s)$ y $L$ el seudocomplemento de $K$ y sea

$$\begin{aligned} \psi : Ims(L) &\rightarrow L \\ s(x) &\mapsto x \end{aligned}$$

Entonces $\psi$ es un epimorfismo. Además $\psi$ es monomorfismo pues si $s(x) = s(y)$ para $x, y \in L$, entonces $x - y \in Ker(s) \cap L = K \cap L = 0$ con lo que $x = y$.
Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} s(L) \arrow[r, two heads, tail, "\psi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & L \arrow[r, hook, "\iota"] & M \\ M & & \end{tikzcd}$$

donde $\iota$ son las respectivas inclusiones. Como $M$ es casi-inyectivo, existe $t \in \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} s(L) \arrow[r, two heads, tail, "\psi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & L \arrow[r, hook, "\iota"] & M \arrow[dll, dashed, "t"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

Si $u = x + y \in L + K$ con $x \in L$ y $y \in K$, entonces:

$$(s - sts)(u) = s(x) - sts(x) = s(x) - s\psi(s(x)) = s(x) - s(x) = 0.$$

Además, del Teorema 1.6.6, $L + K$ es esencial en $M$ y como $L + K \leq Ker(s - sts)$ se sigue que $Ker(s - sts)$ es esencial en $M$ y por tanto $s - sts \in I$. $-st \in rad(\Lambda)$ pues es un ideal y $s \in rad(\Lambda)$. Por el Teorema 1.10.8 existe $(1 - st)^{-1}$ inverso de $1 - st$, luego $(1 - st)^{-1}(s - sts) = s$, $s - sts \in I$, además $I$ es un ideal. De esto se sigue que $s \in I$ con lo cual queda demostrado el teorema. ■

**Teorema 2.5.3.** *Si el cogenerador mínimo inyectivo $C$ de $R-$Mód es un módulo Bass, y si $\Lambda = End_R(C)$ tiene radical de Jacobson igual a cero, entonces $R$ es $V-$anillo izquierdo (y $C$ es semisimple).*

***Demostración***. Consideremos a $W$ como en el Teorema 2.5.1, $W = zoc(C)$. Si $W = C$, entonces cada submódulo de $C$ es un sumando directo, y como por hipótesis $C$ es inyectivo cada submódulo de $C$ es inyectivo. Si $S$ es un $R-$módulo simple, podemos encontrar una copia de $S$ que es submódulo de $C$ y por tanto inyectivo, luego $S$ es inyectivo, Por tanto $R$ es $V-$anillo.
Si $W \neq C$, por hipótesis $C$ es Bass y por tanto existe $M \leq C$ máximo tal que $W \leq M$. $C/M$ es simple y $W$ es la suma directa de un conjunto completo de $R-$módulos izquierdos simples no isomorfos, entonces $C/M \leq W$ y $W \leq C$. Así que existe un monomorfismo $\varphi\colon C/M \to C$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, two heads, "1_C"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & C \\
\frac{C}{M} \arrow[d, tail, "\varphi"'] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

Como $C$ es inyectivo, entonces existe $\psi\colon C \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, two heads, "1_C"] \arrow[d, "\nu"', two heads] & C \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\
\frac{C}{M} \arrow[d, "\varphi"', tail] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

Así que $\psi \in End_R(C)$, $\psi \neq 0$, $M \subset Ker(\psi) \lneq C$ y $M$ es máximo, por tanto $Ker(\psi) = M$. Como $M \leq_{es} C$, pues $W$ es escencial en su cápsula inyectiva por definición, $E(W) = C$ y $W \leq M \leq C$, luego por el Teorema 2.5.2 $\psi \in rad(\Lambda)$ lo cual contradice que $rad(\Lambda) = 0$, por tanto $W = C$ y $R$ es un $V-$anillo. ■

**Teorema 2.5.4.** *Si $S$ es un $R-$módulo izquierdo semisimple, entonces el anillo de endomorfismos de $E(S)$, $\Lambda = End_R(E(S))$, satisface:*

*1)* $rad(\Lambda) = \{\lambda \in \Lambda \mid S \subseteq Ker(\lambda)\}$.

*2)* $rad(\Lambda) = ann_\Lambda(S)$.

*3)* $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad(\Lambda) = End_R(S)$.

***Demostración***. 1) Por el Teorema 2.5.2

$$rad(\Lambda) = \{\lambda \in \Lambda \mid Ker(\lambda) \leq_{es} E(S)\}.$$

Como $S$ es esencial en su cápsula inyectiva $E(S)$, entonces

$$\{\lambda \in \Lambda \mid S \subseteq Ker(\lambda)\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda \mid Ker(\lambda) \leq_{es} E(S)\}.$$

Sea $\lambda \in \Lambda$ tal que $Ker(\lambda) \leq_{es} E(S)$, entonces $Ker(\lambda) \cap S \leq_{es} E(S)$, en particular, $Ker(\lambda) \cap S \leq_{es} S$. Por el Teorema 1.7.6 $Ker(\lambda) \cap S = S$ y por tanto $S \subseteq Ker(\lambda)$, con lo que

$$\{\lambda \in \Lambda \mid S \subseteq Ker(\lambda)\} = \{\lambda \in \Lambda \mid Ker(\lambda) \leq_{es} E(S)\}.$$

2) Se sigue de que

$$ann_\Lambda(S) = \{\lambda \in \Lambda \mid S \subseteq Ker(\lambda)\}.$$

3) Para cada $\psi \in End_R(S)$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\psi"'] & E(S) \\
S \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
E(S) &
\end{tikzcd}$$

Como $E(S)$ es inyectivo, existe $\lambda_\psi \in \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\psi"'] & E(S) \arrow[ddl, dashed, "\lambda_\psi"] \\
S \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
E(S) &
\end{tikzcd}$$

Sea

$$\begin{array}{rcl}
\Phi\colon End_R(S) & \to & \dfrac{\Lambda}{ann_\Lambda(S)} \\
\psi & \mapsto & \lambda_\psi + ann_\Lambda(S)
\end{array}$$

Veamos que $\Phi$ está bien definida.
Si para $\psi \in End_R(S)$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \Lambda$ son tales que $\iota\psi = \lambda_1\iota$ y $\iota\psi = \lambda_2\iota$, entonces $\lambda_1\iota(S) = \lambda_2\iota(S)$, luego $\lambda_1(S) = \lambda_2(S)$ y $(\lambda_1 - \lambda_2)(S) = 0$. De esto se sigue que $\lambda_1 - \lambda_2 \in ann_\Lambda(S)$, por tanto $\lambda_1 + ann_\Lambda(S) = \lambda_2 + ann_\Lambda(S)$. Se concluye que $\Phi$ está bien definida.
Veamos que $\Phi$ es un morfismo de anillos.
Sean $\psi_1, \psi_2 \in End_R(S)$ y $\lambda_{\psi_1}, \lambda_{\psi_2} \in \Lambda$ tales que $\iota\psi_1 = \lambda_{\psi_1}\iota$ y $\iota\psi_2 = \lambda_{\psi_2}\iota$. Entonces

$$\iota(\psi_1 + \psi_2) = \iota\psi_1 + \iota\psi_2 = \lambda_{\psi_1}\iota + \lambda_{\psi_2}\iota = (\lambda_{\psi_1} + \lambda_{\psi_2})\iota,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\psi_1+\psi_2"'] & E(S) \arrow[ddl, dashed, "\lambda_{\psi_1}+\lambda_{\psi_2}"] \\
S \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
E(S) &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $\Phi(\psi_1 + \psi_2) = \lambda_{\psi_1} + \lambda_{\psi_2} = \Phi(\psi_1) + \Phi(\psi_2)$.
Además

$$\iota(\psi_1\psi_2) = (\iota\psi_1)\psi_2 = (\lambda_{\psi_1}\iota)\psi_2 = \lambda_{\psi_1}(\iota\psi_2) = \lambda_{\psi_1}(\lambda_{\psi_2}\iota) = (\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2})\iota.$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\psi_1\psi_2"'] & E(S) \arrow[ddl, dashed, "\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}"] \\ S \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ E(S) & \end{tikzcd}$$

y por tanto $\Phi(\psi_1\psi_2) = \lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2} = \Phi(\psi_1)\Phi(\psi_2)$, así que $\Phi$ es un morfismo.

Afirmamos que $\Phi$ es monomorfismo. En efecto, sean $\psi_1, \psi_2 \in End_R(S)$ tales que $\Phi(\psi_1) = \Phi(\psi_2)$, por tanto

$$\lambda_{\psi_1} + ann_\Lambda(S) = \lambda_{\psi_2} + ann_\Lambda(S),$$

entonces $\lambda_{\psi_1} - \lambda_{\psi_2} \in ann_\Lambda(S)$, de ahí que $\lambda_{\psi_1}(S) = \lambda_{\psi_2}(S)$ y por consiguiente

$$\iota\psi_1 = \lambda_{\psi_1}\iota = \lambda_{\psi_2}\iota = \iota\psi_2.$$

Como $\iota$ es monomorfismo, $\psi_1 = \psi_2$. Luego, $\Phi$ es monomorfismo.
Finalmente, veamos que $\Phi$ es epimorfismo, sea $\lambda + ann_\Lambda(S) \in \Lambda/ann_\Lambda(S)$ y sea $\psi : S \longrightarrow S$ tal que $\psi(s) = \lambda(s)$, entonces $\psi \in End_R(S)$ y $\iota\psi = \lambda\iota$, por lo que $\Phi(\psi) = \lambda + ann_\Lambda(S)$. Por lo tanto

$$End_R(S) \cong \frac{\Lambda}{rad(\Lambda)}$$

■

**Corolario 2.5.5.** *Sea $C$ cogenerador inyectivo mínimo de $R-$Mód y $\Lambda = End_R(C)$, entonces $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad(\Lambda)$ es un producto $\prod_{i\in A} D_i$ de anillos con división $D_i = End_R(S_i)$ uno por cada clase de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples $S_i$. Por lo tanto, $\overline{\Lambda}$ es un $V-$anillo.*

***Demostración***. $C = \bigoplus_{i\in A} E(S_i)$, donde $\{S_i \mid i \in A\}$ es un sistema de representantes de $R-$módulos iquierdos simples. $C$ es inyectivo por hipótesis, entonces $C =$

$E(\bigoplus_{i\in A} S_i)$, además $\bigoplus_{i\in A} S_i$ es semisimple y por el Lema 1.4.14

$$End_R\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right) = \frac{End_R\left(E\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right)\right)}{rad\left(End_R\left(E\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right)\right)\right)} = \frac{End_R(C)}{rad(End_R(C))} = \overline{\Lambda}.$$

Veamos que

$$End_R\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right) \cong \prod_{i\in A} End_R(S_i).$$

Notemos que $S_i$ es completamente invariante en $\bigoplus_{i\in A} S_i$ para cada $i \in A$. En efecto, sea $\psi \in End_R\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right)$, si $\psi(S_i) = 0$, entonces ya se cumple lo deseado. Si $\psi(S_i) \neq 0$, sea

$$\begin{aligned} \varphi\colon S_i &\to \psi(S_i) \\ s_i &\mapsto \psi(s_i) \end{aligned}$$

Es claro que $\varphi$ es un epimorfismo. Además $Ker(\varphi) \leq S_i$ y si $Ker(\varphi) = S_i$, de esto se sigue que $\psi(S_i) = 0$ pero estamos suponiendo que no. Entonces dado que $S_i$ es simple se sigue que $Ker(\varphi) = 0$ y por tanto $\varphi$ es un isomorfismo. Como $\{S_i \mid i \in A\}$ es un sistema de representantes de clases de isomorfismos de $R-$módulos izquierdos simples, se sigue que si $j \in A$ con $i \neq j$, entonces $S_j \cap \psi(S_i) = 0$, por tanto $S_i$ es completamente invariante en $\bigoplus_{i\in A} S_i$.
Sea

$$\begin{aligned} \Phi\colon End_R\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right) &\to \prod_{i\in A} End_R(S_i) \\ \psi &\mapsto \alpha_\psi \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_\psi\colon A &\to \bigcup_{i\in A} End_R(S_i) \\ i &\mapsto \psi\mid_{S_i} \end{aligned}$$

$\Phi$ está bien definida pues para cada $i \in A$, $S_i$ es completamente invariante en $\bigoplus_{i\in A} S_i$. Claramente es un morfismo, resta ver que es un isomorfismo.
Si $\alpha_\psi = \alpha_\varphi$, con $\psi, \varphi \in End_R\left(\bigoplus_{i\in A} S_i\right)$, entonces para cada $i \in A$, $\varphi(S_i) = \psi(S_i)$ y por tanto $\varphi = \psi$.
Sea $\alpha\colon A \to \bigcup_{i\in A} End_R(S_i)$ y sea $\varphi\colon \bigoplus_{i\in A} S_i \to \bigoplus_{i\in A} S_i$ tal que

$$\varphi\left(\sum_{i\in J} s_i\right) = \sum_{i\in J} \alpha(i)(s_i).$$

Entonces $\Phi(\varphi) = \alpha$, por lo tanto, $\Phi$ es un isomorfismo.
Por el Lema 1.4.15, para cada $i \in A$, $End_R(S_i)$ es un anillo con división, luego $\overline{\Lambda}$ es un producto de anillos con división $\prod_{i \in A} End_R(S_i)$, con $\{S_i \mid i \in A\}$ un sistema de representantes de clases de isomorfismo de $R-$módulos izquierdos simples. ■

Dado un $R-$módulo izquierdo $M$, decimos que $M$ satisface la **condición de cadena ascendente** ($CCA$) si para cualquier cadena de submódulos de $M$, $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $n_o \leq m$ se cumple que: $M_m = M_{n_o}$.

**Corolario 2.5.6.** *Si $C$ es un cogenerador mínimo inyectivo de $R-$Mód y $\Lambda = End_R(C)$ entonces*

$$\overline{\Lambda} = \frac{\Lambda}{rad(\Lambda)} = \prod_{i \in A} End_R(S_i).$$

*Además $\Lambda$ es un anillo MAX izquierdo (derecho) si y sólo si $rad(\Lambda)$ es $T-$nilpotente derecho (izquierdo). Finalmente, $\Lambda$ es MAX derecho si y sólo si $C$ satisface la $CCA$ en núcleos de productos $\{j_n \cdots j_2 j_1\}$ de elementos de $rad(\Lambda)$.*

***Demostración***. La primera parte se sigue de la demostración del Corolario 2.5.5.
Como $\overline{\Lambda}$ es $V-$anillo entonces es MAX. $\overline{\Lambda} = \Lambda / J(\Lambda)$, entonces por el Teorema 2.1.12, $\Lambda$ es MAX si y sólo si $J(\Lambda)$ es $T-$nilpotente.
Falta ver que $J(\Lambda)$ es $T-$nilpotente izquierdo si y sólo si $C$ satisface la condición de cadenas ascendentes para profuctos de núcleos $\{j_n \cdots j_1\}$. Si $J(\Lambda)$ es $T-$nilpotente izquierdo, para $\{j_n \cdots j_1\}_n$ con $j_i \in J(\Lambda)$, entonces $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $J(\Lambda)$ y por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $j_m \cdots j_1 = 0$. Esto implica que la cadena

$$ker(j_1) \leq Ker(j_2 j_1) \leq \cdots \leq Ker(j_k \cdots j_1) \leq \cdots$$

se estaciona y por tanto se cumple lo deseado.
Supongamos el recíproco. Sea $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elements de $J(\Lambda)$, entonces tenemos la siguiente cadena

$$Ker(j_1) \leq Ker(j_2 J_1) \leq Ker(j_3 j_2 j_1) \leq \cdots \leq Ker(j_n \cdots j_1) \leq \cdots$$

Sea $k_n = j_n \cdots j_i$ entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $Ker(k_{n_o}) = Ker(k_m)$ para cada $m$ mayor o igual a $n_o$. En particular

$$j_{n_o+1} \in ann_\Lambda Ker(k_{n_o}) = ann_\Lambda ann_C(\Lambda k_{n_o})$$

y $0 = k_{n_o}(Ker(k_{n_o+1})) = k_{n_o}(ann_C(\Lambda k_{n_o+1}))$. Por tanto

$$k_{n_o} \in ann_\Lambda ann_C(\Lambda k_{n_o+1}) = \Lambda k_{n_o+1}$$

pues se cumplen las hipótesis del Teorema 2.3.3. De ahí que

$$\Lambda k_{n_o} \leq \Lambda k_{n_o+1} \leq \Lambda k_{n_o},$$

luego existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $k_{n_o} = \alpha k_{n_o+1}$. Es decir,

$$j_{n_o} j_{n_o-1} \cdots j_1 = \alpha j_{n_o+1} j_{n_o} j_{n_o-1} \cdots j_1.$$

De ahí que para cada $a \in ImK_{n_o}$ se cumple que $\alpha j_{n_o+1}(a) = a$, por lo que $Ker(j_{n_o+1}) \cap ImK_{n_o} = 0$ y del Teorema 2.5.2, $Ker(j_{n_o+1})$ es esencial en $C$ por tanto $ImK_{n_o} = 0$ con lo que $j_{n_o} \cdots j_1 = 0$ y $J(\Lambda)$ es $T-$nilpotente derecho. ■

**Corolario 2.5.7.** *Si $C$ es cogenerador inyectivo mínimo de $R-$Mód que satisface la $CCA$ en submódulos esenciales entonces $\Lambda = End(C)$ es un anillo MAX derecho.*

***Demostración***. Del Corolario 2.5.6, $\Lambda$ es MAX derecho si y sólo si satisface la $CCA$ en núcleos de productos finitos de elementos de $rad(\Lambda)$.
Sea $\{j_n \cdots j_i\}_n$ tal que $j_i \in rad(\Lambda)$. Tenemos la siguiente cadena

$$Ker(j_1) \leq Ker(j_2 j_1) \leq \cdots \leq Ker(j_n \cdots j_1) \leq \cdots$$

Como $rad(\Lambda)$ es un ideal de $\Lambda$, entonces $j_k \cdots j_1 \in rad(\Lambda)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. y del Teorema 2.5.2 los núcleos son escenciales en $C$ y por tanto la cadena

$$Ker(j_1) \leq Ker(j_2 j_1) \leq \cdots \leq Ker(j_n \cdots j_1) \leq \cdots$$

se estaciona, de ahí que $\Lambda$ es MAX derecho. ■

**Teorema 2.5.8.** *Sea $C$ es cogenerador inyectivo de $R-$Mód y $\Lambda = End(C)$ tiene zoclo esencial izquierdo entonces $C$ es un módulo Bass.*

***Demostración***. Sea $M$ un submódulo propio de $C$, entonces $C/M$ es distinto de cero. Como $C$ es cogenerador, por el Teorema 1.11.4, existe $h\colon C/M \to C$ tal que $h \neq 0$. Por tanto, si $\nu\colon C \to C/M$ es el epimorfismo canónico, entonces $\lambda = h\nu$

$$C \xrightarrow{\nu} \frac{C}{M} \xrightarrow{h} C$$

es tal que $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$ y $M \subseteq Ker(\lambda)$.
Como $\Lambda$ tiene zoclo esencial, por el Teorema 1.10.15, existe $\Lambda\lambda_o$ ideal mínimo en

$\Lambda$ contenido en $\Lambda\lambda$. Veamos que $Ker(\lambda_o) = C_o$ es un submódulo máximo de $C$ que contiene a $M$.

Si $Ker(\lambda_o) \leq B \lneq C$, se sigue que

$$ann_\Lambda(C) \lneq ann_\Lambda(B) \leq ann_\Lambda(Ker(\lambda_o)).$$

Notemos que

$$Ker(\lambda_o) = ann_C(\Lambda\lambda_o),$$

entonces por el Teorema 2.3.3,

$$ann_\Lambda ann_C(\Lambda\lambda_o) = \Lambda\lambda_o,$$

de ahí que

$$\{\bar{0}\} = ann_\Lambda(C) \lneq ann_\Lambda(B) \leq ann_\Lambda ann_C(\Lambda\lambda_o) = \Lambda\lambda_o$$

y $\Lambda\lambda_o$ es mínimo. De esto se sigue que $ann_\Lambda(B) = \Lambda\lambda_o$. Además

$$\Lambda\lambda_o = ann_\Lambda ann_C(\Lambda\lambda_o) = ann_\Lambda(Ker(\lambda_o)).$$

Por tanto

$$ann_C ann_\Lambda(B) = ann_C(\Lambda\lambda_o) = ann_C ann_\Lambda ker(\lambda_o).$$

Por el Teorema 2.4.1 se sigue que $B = Ker(\lambda_o)$ y por tanto, $Ker(\lambda_o)$ es máximo en $C$. Además $\Lambda\lambda_o \subseteq \Lambda\lambda$, de ahí que $\lambda_o = \alpha\lambda$ para algún $\alpha \in \Lambda$ y por tanto $M \subseteq Ker(\lambda_o)$. ∎

**Teorema 2.5.9.** *Para un anillo $R$, un $C$ cogenerador inyectivo de $R-$Mód y $\Lambda = End(C)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

*1) $R$ es MAX izquierdo.*

*2) $C$ es un módulo Max.*

*3) $\Lambda/L$ tiene zoclo distinto de cero, para $L = ann_\Lambda M$, donde $M$ es un submódulo distinto de cero de $C$.*

***Demostración***. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Por el Teorema 2.1.2.
2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $C$ es Max y sea $M \leq C$ distinto de cero. Entonces existe $M_o \leq M$ máximo en $M$, $M/M_o$ es distinto de cero y $C$ es cogenerador, luego por

el Teorema 1.11.4 existe $h\colon M/M_o \to C$ tal que $h \neq 0$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"'] & C \\
M/M_o \arrow[d, "h"'] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

como $C$ es inyectivo existe $\lambda_o \in \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"'] & C \arrow[ddl, dashed, "\lambda_o"] \\
M/M_o \arrow[d, "h"'] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\lambda_o(M_o) = h(\nu(M_o)) = 0$ y que $\lambda_o(M) \neq 0$.
Consideremos $L = ann_\Lambda M$, entonces por el Teorema 2.4.1,

$$M = ann_C ann_\Lambda M = ann_C(L)$$

y consideremos también $L_o = ann_\Lambda(M_o)$, por el Teorema 2.4.1, se cumple que:

$$ann_C(L_o) = ann_C ann_\Lambda(M_o) = M_o.$$

Luego

$$ann_C(L + \Lambda\lambda_o) = ann_C(L) \cap ann_C(\lambda_o) = M \cap Ker(\lambda_o) = M_o.$$

La última igualdad se cumple porque $M_o \leq Ker(\lambda_o) \cap M \lneq M$ y $M_o$ es máximo en $M$.
Por otra parte, como $L = ann_\Lambda(M)$, del Teorema 2.4.1, se sigue que

$$ann_C(L) = ann_C ann_\Lambda(M) = M$$

y por ende

$$ann_\Lambda ann_C(L) = ann_\Lambda(M) = L.$$

Por el Teorema 2.2.4 se cumple que

$$L + \Lambda\lambda_o = ann_\Lambda ann_C(L + \Lambda\lambda_o) = ann_\Lambda(M_o) = L_o.$$

Por el mismo argumento, para cada $\lambda' \in L \setminus L_o$ se cumple que $L_o = L + \Lambda\lambda'$, pues necesariamente $ann_C(L + \Lambda\lambda') = M_o$ y de ahí

$$L + \Lambda\lambda' = ann_\Lambda(M_o) = L_o.$$

Por lo tanto, $L$ es máximo en $L_o$ y $L_o/L$ es mínimo en $\Lambda/L$ de ahí que $zoc(\Lambda/L) \neq 0$.
3) $\Rightarrow$ 2) Sea $M \leq C$ distinto de cero, y sea $L = ann_\Lambda(M)$. Por el Teorema 2.4.1,

$$ann_C(L) = ann_C(ann_\Lambda(M)) = M.$$

Por hipótesis existe $L_o/L$ submódulo mínimo en $\Lambda/L$. Sea $M_o = ann_C(L_o)$. Notemos primero que como $L \leq L_o$, se cumple que $ann_C(L_o) \leq ann_C(L)$, es decir, $M_o \leq M$. Además notemos que

$$L = ann_\Lambda(M) = ann_\Lambda ann_C(L).$$

Entonces por el Teorema 2.3.2, para cada $\lambda \in L_o \setminus L$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
L + \Lambda\lambda &= ann_\Lambda ann_C(L + \Lambda\lambda) \\
&= ann_\Lambda\left(ann_C(L) \cap ann_C(\lambda)\right) \\
&= ann_\Lambda\left(ann_C(L) \cap Ker(\lambda)\right) \\
&= ann_\Lambda\left(M \cap Ker(\lambda)\right) \\
&= ann_\Lambda\left(M \cap M_o\right) = ann_\Lambda(M_o).
\end{aligned}$$

Como $L_o/L$ es mínimo, $L$ es máximo en $L_o$, por tanto para $\lambda \in L_o \setminus L$ se cumple que

$$L + \Lambda\lambda = L_o.$$

De ahí que, $ann_\Lambda(M_o) = L_o$. Veamos que $M_o$ es máximo en $M$. Si ocurre que $M_o \leq M' \lneq M$, entonces

$$ann_\Lambda(M) \lneq ann_\Lambda(M') \leq ann_\Lambda(M_o),$$

es decir,

$$L \lneq ann_\Lambda(M') \leq L_o.$$

Pero $L$ es máximo en $L_o$, entonces $ann_\Lambda(M') = L_o$ y por el Teorema 2.4.1

$$M' = ann_C ann_\Lambda(M') = ann_C(L_o) = M_o.$$

Por tanto, $M_o$ es un submódulo máximo de $M$. ■

**Corolario 2.5.10.** *Si $R$ es un anillo MAX izquierdo, $C$ cogenerador inyectivo y $\Lambda = End(E)$, entonces $\Lambda/I$ tiene zoclo distinto de cero para los siguientes tres tipos de ideales izquierdos $I$.*

*0) $L_o$ ideal izquierdo finitamente generado de $\Lambda$.*

*1) $L_1$ un ideal anulador izquierdo de $\Lambda$.*

*2) $L_2 = L + L_o$ donde $L_o$ es finitamente generado y $L = ann_\lambda M$ para un submódulo $M$ de $C$.*

***Demostración***. 0) Si $L_o$ es un ideal propio finitamente generado de $\Lambda$, por el Teorema 2.3.3,

$$ann_\Lambda ann_C(L_o) = L_o.$$

Si $ann_C(L_o) = 0$, entonces $L_o = ann_\Lambda ann_C(L_o) = \Lambda$, pero $L_o$ es propio en $\Lambda$, por tanto $ann_C(L_o) \neq 0$. Además $ann_C(L_o) \leq C$, por el Teorema 2.5.9 para $ann_\Lambda ann_C(L_o) = L_o$, $\Lambda/L_o$ tiene zoclo distinto de cero.
1) Si $L_1$ es un anulador en $\Lambda$, entonces $L_1 = {}^\perp X$, para algún subconjunto $X$ de $\Lambda$. Sabemos que

$${}^\perp X = {}^\perp(({}^\perp X)^\perp),$$

de ahí que $L_1 = {}^\perp((L_1)^\perp)$.
Sea

$$L_1^\perp C = \sum_{\beta \in L_1^\perp} Im\beta.$$

Veamos que $ann_\Lambda(L_1^\perp C) = {}^\perp(L_1^\perp)$.
Si $\lambda \in ann_\Lambda(L_1^\perp C)$ y $\alpha \in L_1^\perp$, entonces $\lambda\alpha(C) = 0$. Como $\lambda\alpha \in \Lambda$, se sigue que $\lambda\alpha = 0$ y por tanto $\lambda \in {}^\perp(L_1^\perp)$.
Ahora sea $\alpha \in {}^\perp(L_1^\perp)$. Si $\lambda \in L_1^\perp$, entonces $\alpha\lambda = 0$, por tanto $\alpha(\lambda(C)) = 0$, de donde $\alpha \in ann_\Lambda(L_1^\perp C)$.
Tenemos que

$$ann_\Lambda(L_1^\perp C) = {}^\perp(L_1^\perp) = L_1$$

y $L_1^\perp C \leq C$, por el Teorema 2.5.9 se cumple lo deseado.
2) Si $L_2 = L + L_o$ con $L_o$ finitamente generado y $L = ann_\Lambda(M)$ para $M \leq C$, por el Teorema 2.4.1

$$ann_C(L) = ann_C ann_\Lambda(M) = M,$$

de ahí que

$$ann_{\Lambda}ann_C(L) = ann_{\Lambda}(M) = L.$$

Entoces por el Teorema 2.3.2 se cumple que $L_2 = ann_{\Lambda}ann_C(L_2)$, por tanto

$$L_2 = ann_{\Lambda}(M_2)$$

con $M_2 = ann_C(L_2) \leq C$. Entonces del Teorema 2.5.9, $\Lambda/L_2$ tiene zoclo distinto de cero. ■

**Teorema 2.5.11.** *Para un anillo $R$ las siguientes condiciones son equivalentes*

*1) Para todo $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$, $Zoc(M) \neq 0$.*

*2) Todos los cocientes de $R$, distintos de cero, tienen submódulos mínimos.*

*3) Para cada $R-$módulo izquierdo $M \neq 0$, $Zoc(M) \leq_{es} M$.*

***Demostración***. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro.
2) $\Rightarrow$ 3) Sean $M \neq 0$ un $R-$módulo izquierdo y $B \leq M$ con $B \neq 0$. Existe $a \in B$ tal que $a \neq 0$, si consideramos el morfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a\colon & R & \rightarrow & Ra \\ & r & \mapsto & ra \end{array}$$

entonces $\varphi_a \neq \overline{o}$ es un epimorfismo y por el Primer Teorema de Isomorfismos, existe $\kappa\colon \frac{R}{Ker(\varphi_a)} \rightarrow Ra$ isomorfismo. Por hipótesis $\frac{R}{Ker(\varphi_a)}$ tiene al menos un submódulo mínimo, pues $Ker(\varphi_a) \lneqq R$ ya que $\varphi_a(1) = a \neq 0$, y por tanto $\frac{R}{Ker(\varphi_a)}$ es un cociente de $R$ distinto de cero. De ahí que $Ra$ tiene al menos un sumódulo mínimo y por tanto $Zoc(M) \cap Ra \neq 0$. Además

$$0 \neq Zoc(M) \cap Ra \leq Zoc(M) \cap B.$$

Por lo tanto $Zoc(M) \leq_{es} M$.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $M \neq 0$ un $R-$módulo izquierdo. Si $Zoc(M) = 0$, entonces $Zoc(M) \cap M \neq 0$ lo cual es una contradicción. ■

**Definición 2.5.12.** Sea $R$ un anillo. Decimos que $R$ es **semi-artiniano izquierdo** si y sólo si satisface alguna de las condiciones del Teorema 2.5.11.

**Corolario 2.5.13.** *Si $C$ es un cogenerador inyectivo de $R-$Mód con anillo de endomorfismos $\Lambda$ semi-artiniano izquierdo, entonces $R$ es Max izquierdo.*

***Demostración***. Si $\Lambda = End(C)$ es semi-artiniano izquierdo, entonces $\Lambda/L$ tiene zoclo distinto de cero para cada $L \lneqq \Lambda$ y por el Teorema 2.5.9, $R$ es MAX izquierdo. ∎

**Teorema 2.5.14.** *Sea R un anillo, entonces*

$$rad(R) = \bigcap\{ann_R(S) \mid S \text{ es un } R\text{−módulo izquierdo simple }\}.$$

***Demostración***. Sea $S$ un $R-$módulo izquierdo simple, entonces $S \cong R/K$ con $K$ ideal máximo de $R$. Luego

$$ann_R(S) = ann_R(R/K) \subset K$$

y

$$rad(R) = \bigcap_{B \leq R \text{ máximo}} B,$$

de ahí que

$$\bigcap\{ann_R(S) \mid S \text{ es un } R\text{−módulo izquierdo simple }\} \subset rad(R).$$

Para la otra contención, sea $S$ un $R-$módulo izquierdo simple y notemos que

$$ann_R(S) = \bigcap\{ann_R(a) \mid a \in S\},$$

donde $S \cong R/K$ con $K$ ideal máximo de $R$. Notemos que si $b \in S$, entonces para cada $k \in K$, $ka = 0$, y por tanto $K \subset ann_R(b)$.
Para $a \in S$ con $a \neq 0$ sea $c \in R \setminus ann_R(a)$, entonces $ca \neq 0$ y por tanto $c \notin K$ y $K$ es máximo, entonces

$$R = K + Rc \subset ann_R(a) + Rc \subset R,$$

de ahí que $R = ann_R(a) + Rc$ y por tanto $ann_R(a)$ es máximo con lo cual se concluye la otra contención. ∎

**Corolario 2.5.15.** *Si $C$ es un cogenerador inyectivo de $R-$Mód, y $\Lambda = End(C)$, entonces $R$ es MAX izquierdo si y sólo si $J = rad(R)$ es $T-$nilpotente y $\Lambda/L$ tiene zoclo distinto de cero para cada ideal $L = ann_\Lambda M$ donde $M \leq C$ distinto de cero es anulado por $J$.*

***Demostración***. Sea $F = ann_C(J)$. Afirmamos que $F$ es cogenerador inyectivo de $R/J-$Mód. Sean $A$, $B$ $R-$módulos izquierdos anulados por $J$, $\alpha\colon A \to B$ monomorfismo y $\beta\colon A \to F$ morfismo, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \\
F \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

Como $C$ es inyectivo existe $\lambda\colon B \to C$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[ddl, dashed, "\lambda"] \\
F \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
C &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\lambda(B) \leq F$, pues dado $r \in J$ y $b \in B$

$$r\lambda(b) = \lambda(rb) = \lambda(0) = 0,$$

entonces $\lambda(b) \in ann_C(J)$. Por tanto $\gamma = \lambda \mid^{Im(\lambda)}$ hace que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\
F &
\end{tikzcd}$$

y por tanto $F$ es inyectivo. Además del Teorema 2.5.14 y de que $C$ tenga una copia de cada simple se sigue que $F$ contiene una copia de cada $R-$módulo simple y como $F$ es inyectivo, entonces $F$ tiene una copia de cada cápsula inyectiva de los $R-$módulos izquierdos simples. Por tanto $F$ es cogenerador inyectivo de $R/J-$Mód. Ahora, supongamos que $R$ es MAX izquierdo, entonces del Teorema 2.1.12, $R/J$ es MAX izquierdo y $J$ es $T-$nilpotente derecho. Como $R/J$ es MAX izquierdo y $F$ es cogenerador inyectivo, por el Teorema 2.5.9, $End(F)/L$ tiene zoclo diferente de cero, donde $L = ann_{End(F)}(M)$ y $M$ es un submódulo diferente de cero de $F$, es decir, un submódulo de $C$ anulado por $J$.

El recíproco se sigue de que $F$ es cogenerador inyectivo de $R/J-$Mód y por el

Teorema 2.5.9 se cumple que $R/J$ es MAX izquierdo. Luego $R/J$ es MAX izquierdo y por hipótesis $J$ es $T-$nilpotente derecho, entonces por el Teorema 2.1.12, $R$ es MAX izquierdo. ■

[8] [9] [4]

# BIBLIOGRAFÍA

[1] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer, 1992.

[2] Paul E. Bland. *Rings and their modules*. De Gruyter, 2011.

[3] C. Faith. "Rings whose modules have maximal submodules". In: *Publicacions Matemàtiques* 39 (Jan. 1995), pp. 201–214. DOI: 10.5565/publmat_39195_12.

[4] Carl Clifton Faith. *Algebra II: ring theory*. Springer, 1976.

[5] Ross M. Hamsher. "Commutative Rings Over which Every Module has a Maximal Submodule". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 18.6 (1967), p. 1133. DOI: 10.2307/2035815.

[6] M. Harada and Y. Ishii. "On endomorphism rings of Noetherian quasi-injectives modules". In: *Osaka Journal Math* (1972), pp. 217–223.

[7] Friedrich Kasch and David Alexander Ross. Wallace. *Modules and rings: a translation of Moduln und Ringe*. Academic Press, 1982.

[8] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on modules and rings*. Springer, 2012.

[9] Robert Wisbauer. *Foundations of module and ring theory: a handbook for study and research*. Gordon and Breach Science Publ., 1991.