Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FUNCIONES LIPSCHITZ SOBRE ESPACIOS MÉTRICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
BRENDA LIZBETH CUEVAS JUÁREZ

DIRECTORES DE TESIS
DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA
MC. Mª. GUADALUPE RAGGI CÁRDENAS

PUEBLA, PUE. Julio 2016

A mis padres Violeta y Miguel...

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Miguel y Violeta por todo su apoyo y cariño, a mi hermano Geovanni por su apoyo.

A mis asesores de tesis, Dr. Juan AlbertoEscamilla Reyna y M.C Mª. Guadalupe Raggi Cárdenas, por haber dedicado su tiempo para la realización de este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dra. María Araceli Juárez Ramírez y Dr. Iván Hernández Orzuna , que aceptaron la revisión de este trabajo y que con sus observaciones enriquecieron mi trabajo.

Al Dr. Slavisa Djordjevic y a la Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Posgrados por el apoyo otorgado durante la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

Este trabajo de tesis tiene como propósito dar una intoducción al tema de las funciones Lipschitz y sobre funciones Hölder . Enunciamos y demostramos algunos resultados sobre funciones Lipschitz y Hölder: reales de variable real, sobre espacios métricos y sobre espacios normados.

En [6] se menciona que: los espacios de Lipschitz han sido estudiados por décadas, pero que su progreso ha sido lento y algunos de sus resultados básicos son de tiempos recientes. No existe una "razón matemática" del porqué muchos de los teoremas recientemente probados, no lo fueron desde hace 40 o 50 años. Parte de la explicación es, probablemente, que los espacios de Lipschitz no habían despertado mucho interés y han sido vistos como construcciones matemáticas con poca aplicación.

La condición Lipschitz apareció por primera vez en el trabajo de R. Lipschitz sobre series trigonométricas, y en ecuaciones diferenciales ordinarias, así como, en un trabajo de Hölder sobre Teoría de Potencial, (veáse [5]).

Enseguida damos una breve descripción de los capítulos que componen esta tesis.

En el Capítulo 1, enunciamos algunos teoremas básicos sobre funciones Lipschitz real-valuadas de variable real definidas en un intervalo. Enunciaremos teoremas sobre la relación de las funciones Lipschitz con los conceptos de función acotada, continua, uniformemente continua y diferenciable, teoremas sobre el "comportamiento" de las funciones Lipschitz con respecto a las operaciones de suma, multiplicación y composición de funciones, teoremas de convergencia, teoremas de extensión y la definición de algunas normas sobre el espacio de todas las funciones Lipschitz. No demostraremos los teoremas de este capítulo, ya que estos teoremas los demostraremos en el contexto de los espacios métricos, espacios normados y álgebras. Sin embargo, sí presentamos un conjunto de ejemplos, con la finalidad de ilustrar los conceptos involurados y determinar el alcance de los teoremas. Para las demostraciones de estos teoremas, remitimos al lector al libro [1]

En el Capítulo 2, enunciamos los teoremas presentados en el Capítulo1, pero en el contexto de los espacios métricos, espacios normados y álgebras normadas. en este capítulo demostramos la mayoría de los teoremas y veremos los alcances y limitaciones de estos teoremas. El propósito de este capítulo, además de presentar las demostraciones, es ilustrar el uso de la analogía para plantear problemas con base en resultados conocidos.

En el Capítulo 3 realizamos un estudio del concepto de función Hölder, éste es una generalización del concepto de función Lipschitz. El estudio lo realizamos basados en el realizado en lo dos capítulos anteriores. Finalmente, en el Capítulo 4 introducimos el concepto de función g-Lipschitz, éste generaliza el de Hölder, realizamos un estudio breve, basados en lo estudiado anteriormente. Todos los resultados que presentamos son conocidos; nuestra contribución es haber demostrado con detalle algunas de las demostraciones.

Capítulo 1

Funciones Lipschitz real-valuadas de variable real

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos resultados básicos sobre funciones Lipschitz real-valuadas definidas sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, los que nos servirán de guía para los siguientes capítulos. Presentamos los conceptos de función acotada, continua, uniformemente continua, diferenciable, y Lipschitz; para después establecer las relaciones que tienen este tipo de funciones con las funciones Lipschitz. Estudiaremos el "comportamiento" de las funciones Lipschitz con respecto a las operaciones algebraicas de suma, producto, composición de funciones, con respecto al límite puntual(uniforme) de sucesiones de funciones. También, veremos algunos teoremas de extensión y tres normas que se definen en el espacio de todas las funciones Lipschitz, acotadas real-valuadas de variable real. Como comentamos en la intoducción no demostramos estos teoremas, ya que muchas de ellas las presentaremos en el contexto de los espacios métricos, cuando tenga sentido, o en el contexto de espacios normados o de algebras normadas. Lo que sí presentaremos son contraejemplos, en el caso de que algún resultado no sea verdadero.

En ete capítulo, I representa un intervalo en $\mathbb{R}$.

1.2. Funciones acotadas, continuas y uniformemente continuas

Definición 1.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que la función f es acotada sobre I, si existe $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad para\ cada\ x \in I.$$

Definición 1.2. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in I$. Decimos que la función f es continua en x_0, si para cada ε, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$para\ cada\ x \in I, \ si\ \ |x - x_0| < \delta, \quad entonces\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Decimos que f es continua en $A \subset I$, si es continua en cada punto de A. Denotamos

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ continua en } I\}$$

y

$$\mathcal{C}_b(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) : f \text{ es acotada en } I\}.$$

Sabemos que ambos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar real por una función. Más aún, son álgebras, si también consideramos el producto usual de funciones. También, sabemos que, en general, $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{R})$ es un subconjunto propio de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. En el caso de que I sea un intervalo cerrado finito, coinciden. Cuando consideremos a $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{R})$ como espacio normado (o álgebra normada, ya qué también tiene un producto) será con la norma uniforme, $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$. Con esta norma $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Definición 1.3. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que la función f es uniformemente continua en I, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$para\ cada\ x, y \in I, \ si\ \ |x - y| < \delta, \quad entonces\ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Denotamos

$$\mathcal{C}_u(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ uniformemente continua en I}\}.$$

Sabemos que $\mathcal{C}_u(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ y que en general la contención es propia. En el caso de que I sea un intervalo cerrado finito, coinciden. $\mathcal{C}_u(I, \mathbb{R})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar real por una función, si también consideramos el producto usual de funciones no es un álgebra, ya que el producto de dos funciones uniformemente continuas no necesariamente es uniformemente continua. Sin embargo, el espacio

$$\mathcal{C}_{ub}(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}_b(I,\mathbb{R}) : f \text{ es uniformemente continua y acotada en } I\}$$

es una subálgebra de $\mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$. También se tiene que, en general, la contención es propia. Sin embargo si, I sea un intervalo cerrado finito, coinciden.

Definición 1.4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una función Lipschitz o que satisface una condición de Lipschitz, si existe una constante $k > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \textit{para cada} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Es claro que la condición (1.1) es equivalente a para cada $x, y \in I$, con $x \neq y$, se tiene

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k \tag{1.2}$$

Observación. Algunos autores la llaman función Lipschitz continua, Lipschitz con constante de Lipschitz k o k-Lipschitz, si la constante es importante y k se le llama una constante de Lipschitz para la función f.

La constante de Lipschitz de la función f, denotada por $L(f)$, se define como

$$L(f) = \text{ínf}\{k \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \text{ para cada } x, y \in I\}.$$

Esta expresión se escribe también como

$$L(f) = \sup\left\{L \geq 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L \text{ para toda } x, y \in I\right\}.$$

Es claro que $L(f) \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.5. *Si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces es uniformemente continua y por lo tanto, también continua en I.*

El recíproco no necesariamente es verdadero, un ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 1.6. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, 1]$, como lo demostramos a continuación . Sea $\varepsilon > 0$, Tomemos $\delta = \varepsilon^2$ y Sean $x, y \in I$ con

$$|x - y| < \delta, \text{ entonces } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \varepsilon.$$

Notemos, sin embargo, que f no es Lipschitz en $[0, 1]$. Supongamos que sí lo es, entonces existe una constante $k > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y| \text{ para cada } x, y \in [0, 1].$$

Tomemos $y = 0$, entonces $\sqrt{x} \leq kx$, entonces $\sqrt{x}/x \leq k$ para cada $x \in (0, 1]$, Lo que es una contradicción, ya que $(1/\sqrt{x}) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$

Observemos que una función Lipschitz no necesariamente es acotada, por ejemplo la función identidad definida en $\mathbb{R}$ es Lipschitz pero no es acotada. El conjunto $X = \{f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es Lipschitz}\}$ es cerrado bajo la suma, producto por un escalar de funciones, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.7. *Sean $f, g \in X$ y α un número real, entonces*

1. *$f + g$ es Lipschitz en I,*
2. *αf es Lipschitz en I.*

X no es un álgebra de funciones, ya que el producto de dos funciones Lipschitz no es necesariamente Lipschitz, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x$. Esta función es Lipschitz. Sin embargo, el producto $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$, no es Lipschitz en $\mathbb{R}$.

En efecto, por contradicción, supongamos que existe $L \geq 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|h(x_2) - h(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad

$$\frac{|h(x_2) - h(x_1)|}{x_2 - x_1} \leq L.$$

En particular, si $x_1 = 0$ y $x_2 = n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{n^2 - 0}{n - 0} \leq L$$

o sea $n \leq L$, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción ya que $\mathbb{N}$ no es un conjunto acotado.

Sin embargo, el conjunto $\{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es Lipschitz y acotada}\}$, el que denotaremos por $Lip(I, \mathbb{R})$ o $Lip(I)$, es un álgebra con las operaciones usuales de suma, producto por un escalar y producto de funciones. Como ya sabemos que es un espacio vectorial real, basta el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sean $f, g \in Lip(I)$, entonces fg es Lipschitz.*

Con respecto a la composición de funciones se tiene que

Teorema 1.10. *Sean I, J intervalos y $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ funciones Lipschitz tales que $f(I) \subset J \subset \mathbb{R}$. Entonces $g \circ f$ es Lipschitz.*

1.3. Funciones diferenciables

El concepto de función Lipschitz es un concepto muy cercano al concepto de función diferenciable, como se muestran en los teoremas que veremos en esta sección. Como mencionamos en la introducción, la condición Lipschitz se publicó, por primera vez, en el trabajo de R. Lipschitz sobre series trigonométricas, y en ecuaciones diferenciales ordinarias, así como en un trabajo de Hölder sobre Teoría de Potencial, (veáse [5]). Iniciaremos esta sección, enunciando el concepto de función diferenciable, para posteriormente presentar los teoremas que relacionan este concepto con el de Lipschitz. Dos resultados muy importante son: una función Lipschitz real-valuada definida en un intervalo, es diferenciable casi dondequiera (con respecto a la medida de Lebesgue) y una función diferenciable en I es Lipschitz, si y sólo si, tiene derivada acotada en I. El tema de la diferenciabilidad de una función Lipschitz es díficil, actualmente se estudia en el contexto de los espacios normados. Nosotros no lo tocaremos más en esta tesis, ya que requiere conceptos que no están a nuetro alcance. Consideramos pertinente mencionarlo por su importancia y sus orígenes históricos.

Definición 1.11. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in I$. Decimos que la función f es diferenciable en x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\text{para cada } x \in I, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon.$$

Decimos que f es diferenciable en $A \subset I$, si es diferenciable en cada punto de A.

Los dos teoremas siguientes se pueden demostrar usando el Teorema del Valor Medio.

Teorema 1.12. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I. Entonces f es Lipschitz en I, si y sólo si, f' es acotada en I.*

Teorema 1.13. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Entonces f es diferenciable casi dondequiera (con respecto a la medida de Lebesgue).*

1.4. Convergencia puntual y Convergencia uniforme

Si una sucesión de funciones Lipschitz reales de variable real converge puntualmente a una función ¿Es ésta, Lipschitz? La respuesta es no, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14. Definamos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sqrt{x}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n^2}], \\ \sqrt{x}, & \text{si } x \in [\frac{1}{n^2}, 1]. \end{cases}$$

Cada función f_n es Lipschitz en $[0,1]$. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a la función f definida como $f(x) = \sqrt{x}$, sabemos que f no es una función Lipschitz.

¿Qué pasa, si en lugar de convergencia puntual, consideramos convergencia uniforme? El resultado tampoco es verdadero. El mismo ejemplo funciona, ya que la sucesión de funciones es creciente, son funciones continuas en un compacto, converge a una función continua, así que por el Teorema de Dini, se concluye que la sucesión converge uniformemente a f,en $[0,1]$ y la función límite no es Lipschitz. Sin embargo, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones. Supongamos que f_n es Lipschitz para cada $n \in \mathbb{N}$ y que el conjunto $\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Supongamos además que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en I a la función f, entonces f es una función Lipschitz y $L(f) \leq \sup\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$.*

1.5. Teoremas de Extensión

El siguiente teorema es un teorema de extensión para funciones uniformemente continuas.

Teorema 1.16. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en I. Entonces existe una única función uniformemente continua $F : \overline{I} \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_I = f$.*

Teorema 1.17. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función k-Lipschitz. Entonces existe una función k-Lipschitz $F : \overline{I} \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_I = f$.*

¿Pero, la función f se puede extender a todo $\mathbb{R}$? La respuesta es si, pero a diferencia del Teorema 1.17, la extensión de la función Lipschitz f a todo $\mathbb{R}$, no necesariamente es única. Como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.18. Definamos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x$. Es claro que la función f es Lipschitz en $[0,1]$. Dos extensiones Lipschitz a $\mathbb{R}$ son

1. $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F_1(x) = x$. La función F_1 es una extensión de f y, además, es Lipschitz en $\mathbb{R}$.

2. $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x \in (-\infty, 0], \\ x, & \text{si } \ x \in [0, 1], \\ 1, & \text{si } \ x \in [0, \infty). \end{cases}$$

La función F_2 es una extensión de f a todo $\mathbb{R}$ y, además, es Lipschitz en $\mathbb{R}$

Teorema 1.19. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, una función k-Lipschitz. Entonces existe una función k-Lipschitz $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_I = f$.*

1.6. Normas en $Lip(I, \mathbb{R})$

El conjunto $Lip(I, \mathbb{R})$ es un subespacio vectorial (subálgebra , ya que también tiene un producto) de $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{R})$ y por lo tanto hereda la norma uniforme; $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$, para $f \in Lip(I, \mathbb{R})$. Con esta norma presentaremos dos resultados. el primero se refiere a que toda función uniformemente continua y acotada en I se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones Lipschitz.

Teorema 1.20.
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Entonces $\overline{Lip(I, \mathbb{R})} = \mathcal{C}_{ub}(I, \mathbb{R})$

En el caso de que el intervalo I sea un intervalo cerrado finito, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.21.
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado finito. Entonces $\overline{Lip(I, \mathbb{R})} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Es decir, toda función continua en un intervalo cerrado finito se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones Lipschitz. De aquí se deduce que $Lip(I, \mathbb{R})$, con la norma uniforme, no es un espacio de Banach. Antes de definir la siguiente norma, recordemos el concepto de constante de Lipschitz. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, la constante de Lipschitz de f, denotada por $L(f)$, se define como

$$L(f) = \text{ínf}\{k \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \ \text{ para toda } \ x, y \in I\}.$$

Teorema 1.22.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. La función $||\cdot|| : Lip(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como

$$||f|| = L(f)$$

es una seminorma en $Lip(I, \mathbb{R})$.

No es norma, ya que $L(f)$ puede ser 0 sin ser f la función 0; por ejemplo una función constante distinta de 0. Para definir una norma en $Lip(I, \mathbb{R})$, tomamos $a \in I$.

Teorema 1.23.

La función $||\cdot|| : Lip(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $||f|| = |f(a)| + L(f)$, es una norma en $Lip(I, \mathbb{R})$. Con esta norma $Lip(I, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Capítulo 2

Funciones Lipschitz con dominio y codominio espacios métricos

2.1. Introducción

El concepto de función de Lipschitz se define, de manera análoga que en el caso real, para funciones con valores en un espacio métrico y con dominio otro espacio métrico. En este capítulo presentamos y demostramos un conjunto de resultados básicos sobre funciones Lipschitz, con dominio un espacio métrico y codominio otro espacio métrico. Nuestra guía serán los resultados planteados en el capítulo anterior. Veremos cuales siguen siendo válidos y cuales no. Como en el capítulo 1, presentaremos los conceptos de función acotada, continua y uniformemente continua. También veremos el comportamiento de las funciones Lipschitz, con respecto al límite puntual(uniforme) de sucesiones de funciones; algunos teoremas de extensión.

2.2. Funciones acotadas, continuas y uniformemente continuas

Definición 2.1. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que la función f es acotada sobre X, si existe $M > 0$*

tal que

$$\rho(f(x), f(y) \leq M \quad \textit{para cada } x, y \in I.$$

Definición 2.2. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y sean $f : X \to Y$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que la función f es continua en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que*

$$\textit{para cada } x \in X, \ \textit{si} \ d(x, x_0) < \delta, \quad \textit{entonces} \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Decimos que f es continua en $A \subset X$, si es continua en cada punto de A. Denotamos

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ continua en } X\}.$$

y

$$\mathcal{C}_b(X, Y) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f \text{ es acotada en } X\}.$$

Es claro que, salvo que se tenga una estructura vectorial (o de álgebra), no tiene sentido plantear si estos espacios son espacios vectoriales o álgebras. Sabemos que, en general, $\mathcal{C}_b(X, Y)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{C}(X, Y)$. En el caso de que X sea un espacio métrico compacto, coinciden. Lo que si se tiene es que la función

$$d_\infty : X \times Y, \to \mathbb{R}, \ \text{ definida como } \ d_\infty(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

es una métrica en $\mathcal{C}_b(X, Y)$, con la que $\mathcal{C}_b(X, Y)$ es un espacio métrico completo.

Definición 2.3. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que la función f es uniformemente continua en X si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$\textit{para cada } x, y \in X, \ \textit{si} \, d(x, y) < \delta, \quad \textit{entonces} \ \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Denotamos

$$\mathcal{C}_u(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ uniformemente continua en } X\}$$

.

Sabemos que $\mathcal{C}_u(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ y que en general, la contención es propia. En el caso de que X sea un espacio métrico compacto, coinciden. También, denotamos

$\mathcal{C}_{ub}(X,Y) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f$ es acotada y uniformemente continua en $X\}$.

En general, $\mathcal{C}_{ub}(X,Y)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{C}_b(X,Y)$. En el caso de que X sea un espacio métrico compacto, coinciden.

Definición 2.4. *Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios métricos. Una función $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ es Lipschitz, si existe una constante $k\geq 0$ tal que*

$$\rho(f(x),f(y)) \leq kd(x,y) \qquad \textit{para cada} \;\; x,y\in X \tag{2.1}$$

Es claro que la condición (2.1) es equivalente a que para cada x y y elementos de X, con $x\neq y$, se tiene

$$\frac{\rho(f(x),f(y))}{d(x,y)} \leq k \tag{2.2}$$

Observación. Algunos autores la llaman función Lipschitz continua, Lipschitz con constante de Lipschitz k o k Lipschitz, si la constante es importante y a k se le llama una constante de Lipschitz para la función f. La constante de Lipschitz de la función f, denotada por $L(f)$, se define como

$$L(f) = \inf\{k\geq 0 : \rho(f(x),f(y)) \leq kd(x,y) \;\text{ para toda }\; x,y\in X\}.$$

Esta constante se puede escribir

$$L(f) = \sup\left\{L\geq 0 : \frac{\rho(f(x),f(y))}{kd(x,y)} \leq L \;\text{ para toda }\; x,y\in X\right\}.$$

Es claro que $L(f)\in\mathbb{R}$. Con el símbolo, $Lip(X,Y)$ denotaremos al conjunto

$$\{f : X\to Y : f \text{ es Lipschitz y acotada}\}.$$

Es obvio que toda función constante es Lipschitz. Dados dos espacios métricos (X,d) y (Y,ρ) ¿existen funciones de X a Y, no constantes, que sean Lipschitz? En el caso de que $Y=\mathbb{R}$. La respuesta es sí. Como lo muestra el siguiente ejemplo. Pero antes recordemos que dado (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$ no vacío y $x\in X$, se define la distancia de x al conjunto A, denotada por $d(x,A)$, como $d(x,A)=\inf\{d(x,y) : y\in A\}$. Es conocido que $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)|$ para cada $x,y\in X$.

Ejemplo 2.5. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d), entonces la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x, A)$ es 1-Lipschitz.

Sin embargo, hay espacios métricos (X, d) y (Y, ρ), donde las únicas funciones Lipschitz de un espacio métrico X a otro espacio métrico Y, son las constantes.

Ejemplo 2.6. Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y $\mathbb{Q}$ con la métrica usual, es conocido que toda función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ es constante; por lo tanto como toda función Lipschitz es continua, se tiene que las únicas funciones Lipschitz de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ son las constantes.

Como en el caso de funciones real valuadas de variable real se tiene que:

Teorema 2.7. *Si una función $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es Lipschitz, entonces es uniformemente continua y por lo tanto continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, donde $k > 0$ es una constante tal que

$$\text{para cada } \; x, y \in X \text{ se tiene que } \; \rho(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Sean $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{k}$, entonces $\rho(f(x), f(y)) \leq k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. Por lo tanto, f es uniformemente continua.

□

Observación. El recíproco no necesariamente es cierto, veáse el ejemplo 1.6.

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, en el contexto general de los espacios métricos, no tiene sentido plantearse , salvo que se tenga estructura algebraica en el codominio, si el conjunto de todas las funciones Lipschitz de un espacio métrico a otro es un espacio vectorial o un álgebra. Este punto lo abordaremos más adelante, en el contexto de los espacios normados. Sin embargo, si podemos plantearnos que es lo que ocurre con respecto a la composición de funciones, y entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Sean* $(X,d), (Y,\eta)$ *y* (Z,ρ) *espacios métricos y sea* $f : (X,d) \to (Y,\eta)$ *y* $g : (Y,\eta) \to (Z,\rho)$ *funciones Lipschitz. Entonces* $g \circ f : (X,d) \to (Z,\rho)$ *es Lipschitz, además* $L(g \circ f) \leq L(f)L(g)$

Demostración. Como f y g son funciones Lipschitz, entonces para cada $x, y \in X$ y $u, v \in Y$ se tiene que

$$\eta(f(x), f(y)) \leq L(f)d(x,y) \text{ y } \rho(g(u), g(v)) \leq L(g)\eta(u,v).$$

Sean $x, y \in X$, entonces

$$\rho(g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = \rho(g(f(x)), g(f(y))) \leq L(g)\eta(f(x), f(y) \leq L(g)L(f)d(x,y).$$

□

2.3. Convergencia puntual, convergencia uniforme

Como vimos en el ejemplo 1.14, el límite puntual (ni el uniforme) de una sucesión de funciones Lipschitz es Lipschitz. Sin embargo, en el contexto de los espacios métricos se tiene un resultado análogo al teorema 1.15

Teorema 2.9. *Sean* (X,d) *y* (Y,ρ) *espacios métricos, sean* f *y* f_n $(n \in \mathbb{N})$ *funciones de* X *a* Y*,* f_n *Lipschitz para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *es acotado superiormente en* $\mathbb{R}$*. Supongamos además que la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente a* f*, entonces* f *es una función Lipschitz y* $L(f) \leq \sup\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$

Demostración. Sean $x, y \in X$, como la métrica ρ e una función continua en $Y \times Y$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$, entonces

$$\rho(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} \rho(f_n(x), f_n(y)) \tag{2.3}$$

Además, se tiene

$$\rho(f_n(x), f_n(y)) \leq L(f_n)d(x,y)). \tag{2.4}$$

Entonces, de (2.3) y (2.4) se tiene que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L(f_n)d(x,y) \leq \sup\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}d(x,y)$$

Por lo tanto, f es Lipschitz y $L(f) \leq \sup\{L(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

□

2.4. Teoremas de Extensión

Antes de iniciar el tema de Teoremas de extensión para funciones Lipschitz, presentamos un Teorema de Extensión para funciones uniformemente continuas.

Teorema 2.10. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos, con (Y, ρ) completo y $A \subset X$. Si $f : A \to Y$, es una función uniformemente continua en A, entonces existe una única función uniformemente continua $F : \overline{A} \to Y$ tal que $F\big|_A = f$.*

Con este teorema podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos, con (Y, ρ) completo y $A \subset X$. Si $f : A \to Y$ es una función k-Lipschitz en A, entonces existe una única función k-Lipschitz $F : \overline{A} \to Y$ tal que $F\big|_A = f$.*

Demostración. Por el Teorema 2.10 existe una única función uniformemente continua $F : \overline{A} \to Y$, tal que $F\big|_A = f$. Así que basta demostrar que la función F es k-Lipschitz. Sean $x, y \in \overline{A}$, entonces existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que convergen a x y y, respectivamente. Como f es k-Lipschitz y F es una extensión de f se tiene

$$\rho(F(x_n), F(y_n)) \leq kd(x_n, y_n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Como las métricas d y ρ son continuas de (2.5), la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a x y de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a y se tiene

$$\rho(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

Por lo tanto, la función F es k-Lipschitz. La unicidad se sigue del hecho de que toda función Lipschitz es uniformemente continua.

□

¿Pero, la función f se puede extender a todo X? La respuesta es no como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $X = [a, b]$ con la métrica usual, $A = \{a, b\}$ y sea $Y = \{1, 2\}$ con la métrica usual. Definamos $f : \{a, b\} \to Y$ como

$$f(a) = 1 \text{ y } f(b) = 2.$$

Esta función es 2-Lipschitz, sin embargo, no existe una función $F : [a, b] \to Y$ Lipschitz, tal que $F\big|_A = f$. Supongamos que sí existe una función F, pero esto nos lleva a una contadicción, ya que $[a, b]$ es conexo, F es continua y por lo tanto su imagen, Y es conexo; lo cual es una contradicción.

Un problema importante es determinar las condiciones que deben cumplir dos espacios métricos, X y Y, tal que para cada $A \subset X$ y cada función, $f : A \to Y$ k-Lipschitz exista $F : X \to Y$ k-Lipschitz tal $F\big|_A = f$. Una solución parcial la dió McShane en 1934, en el caso de que el codominio sea $\mathbb{R}$, (veáse [4]). Pero a diferencia del Teorema 2.11, la extensión de la función Lipschitz f a todo $\mathbb{R}$ no es necesariamente única.

Presentaremos dos construcciones de la extensión de la función f una, conocida como la extensión de McShane. Esta extensión es minimal en el sentido de que si G es otra función k-Lipschitz que extiende a f, entonces la función G es mayor o igual que la extensión de McShane; y otra conocida como la extensión de Whitney, (veáse [7]), y ésta es maximal, en el sentido de que si H es una función k-Lipschitz que extiende a la de Whitney, entonces la función H es menor o igual que la de Whitney. Estas construcciones las presentaremos en la siguiente sección.

2.5. Funciones Lipschitz con Valores Reales

En esta sección estudiamos las funciones Lipschitz definidas en un espacio métrico X y codominio $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ tiene, a parte de la estructura métrica, estructura algebraica (se puede sumar, multiplicar,...), estructura de orden (se pueden comparar dos números reales) y además tiene buenas propiedades métricas,algebraicas..., el estudio de este tipo de funciones se enriquece, por ejemplo veremos $Lip(X, \mathbb{R})$ es un álgebra con las operaciones de suma usual de funciones, producto de un escalar real por una función y producto de funciones; tabmbién se puede estudiar las propiedades del orden, aunque por razones de tiempo no lo haremos.

Empezaremos con el siguiente resultado referente a las operacione algebraicas.

Teorema 2.13. *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Entonces*

a) $L(af) = |a|L(f)$ *para toda* $a \in \mathbb{R}$

b) $L(f+g) \leq L(f) + L(g)$*; y*

Demostración.

a) Tenemos que:

$$\begin{aligned} L(af) &= \inf\{k \geq 0 : |af(x) - af(y)| \leq kd(x,y) \ \text{ para toda } \ x,y \in X\} \\ &= \inf\{k \geq 0 : |a||f(x) - f(y)| \leq kd(x,y) \ \text{ para toda } \ x,y \in X\} \\ &= |a|L(f). \end{aligned}$$

b) Sabemos que:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq [L(f) + L(g)]d(x,y). \end{aligned}$$

Así, $L(f+g) \leq L(f) + L(g)$.

□

Es decir, el conjunto de todas las funciones Lipschitz real-valuadas con dominio un espacio métrico es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de un número real por una función. ¿ Qué ocurre con el producto de funciones? El producto de Lipschitz no necesariamente es Lipschitz, ver ejemplo (1.8). Sin embargo, si se adiciona la hipótesis de que las dos funciones sean acotadas se tiene

Proposición 2.14. *Sean* $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $g : X \to \mathbb{R}$ *funciones Lipschitz acotadas, entonces* fg *es Lipschitz.*

Demostración.
Sean $x, y \in X$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &\leq |g(y)||f(x) - f(y)| + |f(x)||g(x) - g(y)| \\ &\leq [\|g\|_\infty L(f) + \|f\|_\infty L(g)]d(x,y). \end{aligned}$$

Así, $L(fg) \leq \|g\|_\infty L(f) + \|f\|_\infty L(g)$.

□

De los Teoremas 2.13 y 2.14 se sigue que $Lip(X, \mathbb{R})$ es un álgebra de funciones.

Teorema 2.15. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones real-valuadas definidas en X, k-Lipschitz. Supongamos que existe un $x_0 \in X$ tal que el conjunto $\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado inferiormente. Entonces para cada $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado inferiormente y la función $F : X \to \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \text{ínf}\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

es k- Lipschitz en X.

Demostración. Sea $x \in X$. Como el conjunto $\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado inferiormente, existe $M > 0$, tal que para cada

$$f \in \mathcal{F},\ M \leq f(x_0) \tag{2.6}$$

y como cada $f \in \mathcal{F}$ es k-Lipschitz se tiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq kd(x, x_0) \tag{2.7}$$

Entonces, de (2.6) y (2.7) se tiene

$$M - kd(x, x_0)| \leq f(x_0) - kd(x, x_0) \leq f(x).$$

Así, tenemos que el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado inferiormente. Ahora, veamos que la función F es Lipschitz. Sean $x, y \in X$ y $f \in \mathcal{F}$. Como f es k-Lipschitz tenemos que

$$-kd(x, y) \leq f(x) - f(y) \leq kd(x, y).$$

Entonces

$$-kd(x, y) + f(y) \leq f(x) \leq f(y) + kd(x, y). \tag{2.8}$$

Entonces, de la definición de la función F y la desigualdad del lado derecho de (2.8) se tiene

$$F(x) \leq f(x) \leq f(y) + kd(x, y).$$

Entonces

$$F(x) \leq F(y) + kd(x, y).$$

Entonces

$$F(x) - F(y) \leq kd(x, y). \tag{2.9}$$

De la definición de la función F y la desigualdad del lado izquierdo de (2.8) se tiene

$$F(x) - F(y) \geq -kd(x, y). \tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10) se concluye

$$|F(x) - F(y)| \leq kd(x, y).$$

Por lo tanto, la función F es k-Lipschitz. □

Teorema 2.16. *Sean (X, d) y $A \subset X$ $f : A \to \mathbb{R}$ una función k-Lipschitz. Entonces existe una función k-Lipschitz $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_A = f$.*

Demostración. Definamos la función $F : X \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \text{ínf}\{f(y) + kd(x, y) : y \in A\}.$$

De la desigualdad del triángulo, se sigue que para cada $y \in A$ la función $h_y : X \to \mathbb{R}$ definida como $h_y(x) = f(y) + kd(x, y)$ es k-Lipschitz. Del Teorema 2.15, se sigue que la función F es k-Lipschitz y además para cada $x \in A$ se tiene que $F(x) = f(x)$. Así que F es la función deseada.

□

Para la construcción de McShane necesitamos el siguiente teorema:

Teorema 2.17. *Sean (X, d) y $\mathcal{F}$ es una familia de funciones real-valuadas definidas en X k-Lipschitz. Supongamos que existe un $x_0 \in X$ tal que el conjunto $\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado superiormente . Entonces para cada $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado superiormente y la función $F : X \to \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

es k- Lipschitz en X.

Demostración. Sea $x \in X$.Como el conjunto $\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado superiormente, existe $M > 0$ tal que para cada

$$f \in \mathcal{F},\ f(x_0) \leq M \tag{2.11}$$

y como cada $f \in \mathcal{F}$ es k-Lipschitz se tiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq kd(x, x_0). \tag{2.12}$$

Entonces, de (2.11) y (2.12) se tiene

$$f(x) \leq f(x_0) + d(x, x_0) \leq M + kd(x, x_0).$$

Así, tenemos que el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado superiormente. Ahora, veamos que la función F es Lipschitz. Sean x y y números reales y $f \in \mathcal{F}$. Como f es k-Lipschitz tenemos que

$$-kd(x, x_0) \leq f(x) - f(y) \leq kd(x, x_0).$$

Entonces

$$-kd(x, y) + f(y) \leq f(x) \leq f(y) + kd(x, y). \tag{2.13}$$

Entonces, de la definición de la función F y la desigualdad del lado izquierdo de (2.13) se tiene

$$-kd(x, y) + f(y) \leq f(x) \leq F(x).$$

Entonces

$$F(y) \leq F(x) + kd(x, y).$$

Entonces

$$F(y) - F(x) \leq kd(x, y). \tag{2.14}$$

De la definición de la función F y la desigualdad del lado derecho de (2.13) se tiene

$$F(x) - F(y) \geq -kd(x, y). \tag{2.15}$$

De (2.14) y (2.15) se tiene

$$|F(x) - F(y)| \leq kd(x, y).$$

Por lo tanto, la función F es k-Lipschitz. □

Teorema 2.18. *Sean (X, d) y $A \subset X$ $f : A \to \mathbb{R}$ una función k-Lipschitz. Entonces existe una función k-Lipschitz $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_A = f$.*

Demostración. Definamos la función $F : X \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \sup\{f(y) - kd(x, y) : y \in A\}.$$

De la desigualdad del triángulo, se sigue que para cada $y \in A$ la función $h_y : X \to \mathbb{R}$ definida como $h_y(x) = f(y) - kd(x, y)$ es k-Lipschitz. Del teorema 2.17 se sigue que la función F es k-Lipschitz y además para cada $x \in A$ se tiene que $F(x) = f(x)$. Así que F es la función deseada.

□

2.6. Normas en $Lip(X,\mathbb{R})$

En $Lip(X,\mathbb{R})$ se pueden definir al menos tres normas, análogas a las que se definieron en el caso de el espacio $Lip(X,\mathbb{R})$; la primera es la norma uniforme que "hereda" como subespacio vectorial (o como álgebra, ya que en este caso también se tiene el producto de funciones) de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, con la norma, $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, la segunda, usando la constante de Lipschitz y la tercera tomando la suma de la norma uniforme y dela constante de Lipschitz.

Teorema 2.19. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces*

1. $\overline{Lip(X,\mathbb{R})} = \mathcal{C}_{ub}(X,\mathbb{R})$.
2. *Si X es compacto, entonces* $\overline{Lip(X,\mathbb{R})} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

El punto *1* del teorema anterior dice que toda función uniformemente continua y acotada se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones Lipschitz. y e punto *2.* dice que toda función continua en un espacio métrico compacto se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones Lipschitz. De aquí se deduce que $Lip(X,\mathbb{R})$ con la norma uniforme no es un espacio de Banach. Antes de definir la siguiente norma, recordemos el concepto de constante de Lipschitz. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, la constante de Lipschitz de f, denotada por $L(f)$, se define como

$$L(f) = \inf\{k \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq kd(x,y) \text{ para toda } x,y \in X\}.$$

Primero, demostraremos un resultado que es verdadero para espacios métricos.

Lema 2.20. *Sean (X,d) y (Y,ρ), dos espacios métricos y $f : X \to Y$ función Lipschitz. Entonces, para cada $x,y \in X$, se tiene $\rho(f(x),f(y)) \leq L(f)d(x,y)$.*

Demostración. Sean $x,y \in X$. Por la definición de $L(f)$, existe una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\text{para cada } x,y \in X, \quad \text{se tiene } \rho(f(x),f(y)) \leq k_n d(x,y), \tag{2.16}$$

y que converge a $L(f)$. Por la continuidad de las métricas, y (2.16) se concluye $\rho(f(x),f(y)) \leq L(f)d(x,y)$. □

Teorema 2.21.

Sea (X,d) un espacio métrico. La función $||\cdot|| : Lip(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como

$$||f|| = L(f)$$

es una seminorma en $Lip(X,\mathbb{R})$.

Demostración. Es claro que para cada $f \in Lip(X,\mathbb{R})$, se tiene $||f|| = L(f) \geq 0$. Además, La constante de Lipschitz de la función 0 es 0. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in Lip(X,\mathbb{R})$. Para $\lambda = 0$, se tiene que $||\lambda f|| = |\lambda|||f||$. Sea $\lambda \neq 0$. Entonces, de la definición de $L(\lambda f)$ se tiene que para cada $x, y \in X$

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq L(\lambda f) d(x,y), \tag{2.17}$$

entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{L(\lambda f)}{|\lambda|.} \tag{2.18}$$

De la definición de $L(f)$ y de (2.18) se tiene

$$L(f) \leq \frac{L(\lambda f)}{|\lambda|}. \tag{2.19}$$

También, por (2.20), se tiene que para cada $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq L(f) d(x,y), \tag{2.20}$$

Entonces

$$|\lambda(f(x) - f(y))| \leq |\lambda| L(f) d(x,y). \tag{2.21}$$

De la definición de $L(\lambda f)$ y de (2.21) se tiene

$$L(\lambda f) \leq |\lambda| L(f). \tag{2.22}$$

De (2.19) y (2.22), tenemos $|\lambda|||f|| = ||\lambda f||$.

Sea $f, g \in Lip(X,\mathbb{R})$. Entonces, para cada $x, y \in X$, se cumple

$$|f(x)| + |g(x)| \leq (L(f) + L(g)) d(x,y), \tag{2.23}$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo y la definición de $L(f+g)$, se tiene

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

Por lo tanto,

$$||f|| = L(f)$$

es una seminorma.

$\square$

Observación Esta seminorma no es norma, ya que $L(f)$ puede ser 0 sin ser f la función 0. Por ejemplo una función constante distinta de 0. Para definir una norma en $Lip(X, \mathbb{R})$, tomamos $a \in X$. Con esta norma $Lip(X, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.22.
Sea (X, d) un espacio métrico. La función $||\cdot||_L : Lip(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como

$$||f||_L = |f(a)| + L(f),$$

es una norma en $Lip(X, \mathbb{R})$.

Demostración. Es inmediato que $||f||_L = |f(a)| + L(f) \geq 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in Lip(X, \mathbb{R})$. Entonces

$$||\lambda f||_L = |\lambda f(a)| + L(\lambda f) = |\lambda||f(a)| + |\lambda|L(f) = |\lambda|||f||_L$$

Para la desigualdad del triángulo; sean $f, g \in Lip(X, \mathbb{R})$. Entonces

$$||f+g||_L = |f(a)+g(a)|+L(f+g) \leq |f(a)|+|g(a)|+L(f)+L(g) = ||f||_L+||g||_L.$$

Por último, si $||f||_L = |f(a)| + L(f) = 0$, entonces $|f(a)| = 0$ y $L(f) = 0$, entonces $f(a) = 0$ y f es una función constante. De estos dos últimos hechos se cumple que f es la función 0.

$\square$

Lema 2.23. *Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Lip(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y $f \in Lip(X, \mathbb{R})$. Entonces*

1. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f con la norma $||\cdot||_L$, si y sólo si, $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$ y $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L(f)$.*

2. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy con la norma $||\cdot||_L$, si y sólo si $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.*

Demostración. *1.* Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f con la norma $||\cdot||_L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, entonces $||f_n - f|| < \varepsilon$, entonces, si $n \geq N$ se tiene

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon \ \text{ y } \ L(f_n - f) < \varepsilon,$$

por lo tanto, $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$ y $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L(f)$. Supongamos que las sucesiones $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a $f(a)$ y$L(f)$, respectivamente. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $N_1 = N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ y $N_2 = N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\text{si } \ n \geq N_1, \ \text{ entonces } |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.24}$$

y

$$\text{si } \ n \geq N_2, \ \text{ entonces } |L(f_n - f)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.25}$$

Entonces, Sea $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces de (2.24) y (2.25), se sigue $||f_n - f||_L = |f_n(a) - f(a)| + L(f_n - f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, con la norma $||\cdot||_L$, a la función f.

2. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy con la norma $||\cdot||_L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces $||f_n - f_m||_L < \varepsilon$, entonces, si $n, m \geq N$ se tiene

$$|f_n(a) - f_m(a))| < \varepsilon \ \text{ y } \ L(f_n - f_m) < \varepsilon,$$

de esto último, se concluye que la sucesión $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, también $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

$\square$

Teorema 2.24.
$Lip(X, \mathbb{R})$ con la norma $||\cdot||_L$, es un espacio de Banach.

Demostración.
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $Lip(X, \mathbb{R})$. De *2.* del Lema 2.23, se tiene que la sucesión $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto, converge en $\mathbb{R}$, digamos a $f(a)$ y $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto, converge en $\mathbb{R}$, digamos a L. Ahora, de la definición de $L(f_n - f_m)$ se tiene que para cada $x \in X$, $x \neq a$ se cumple

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(a) - f_m(a)| \leq L(f_n - f_m)d(x, a). \tag{2.26}$$

De (2.26) y que $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy, por lo tanto, existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función f en X. De (2.9) se tiene que la función f es Lipschitz, es decir $f \in Lip(X, \mathbb{R})$. Ahora, demostraremos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función f, con la norma $||\cdot||_L$. Como la sucesión $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $f(a)$; Por *1.* del Lema (2.23), basta probar que $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a $L(f)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces

$$L(f_n - f_m) < \varepsilon, \tag{2.27}$$

Sea $n \geq N$. Entonces para cada $m \geq N$ se tiene, de la definición de $L(f_n - f_m)$ se tiene que para cada $x \in X$, $y \neq x$ se cumple

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) - f_m(y)| \leq L(f_n - f_m)d(x, y). \tag{2.28}$$

Entonces, de (2.27) y se concluye

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) - f_m(y)| \leq d(x, y)\epsilon. \tag{2.29}$$

entonces, tomando el límite, cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)| \leq d(x, y)\varepsilon.$$

Entonces,

$$L(f_n - f) \leq d(x, y)\varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{L(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a $L(f)$. Así, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función f, con la norma $||\cdot||_L$.

□

2.7. Funciones Lipschitz en Espacios Normados

Esta sección realizaremos un estudio breve de las funciones Lipschitz entre espacios normados o de un espacio métrico a un espacio normado. El estudio será esquematico, en la sección anterior lo hicimos para el caso particular del espacio normado $\mathbb{R}$. Un resultado importante que mencionamos es que un operador lineal de un espacio normado a otro espacio normado es acotado, si y sólo si es Lipshitz y que la norma uniforme del operador es justamente la constante de Lipschitz del operador. Otro que presentamos es que $Lip(X,Y)$ es un espacio de Banach, si el espacio normado Y es Banach, si Y es un álgebra normada, entonces $Lip(X,Y)$ también lo es.

Sea $(X, ||.||)$ un espacio normado, es conocido que la función $d(x,y) = ||x-y||$, donde $x \in X$ y $y \in X$ es una métrica en X. Cuando consideremos a $(X, ||.||)$ como espacio métrico es con esta métrica. En el caso de funciones de un espacio normado a otro espacio normado la definición de función Lipschitz en términos de las normas es

Definición 2.25. *Sean* $(X, \|.\|_X)$ *y* $(Y, \|.\|_Y)$ *espacios normados y una función* $f : (X, \|.\|_X)) \to (Y, \|.\|_Y))$ *es Lipschitz, si existe una constante* $k \geq 0$ *tal que*

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq k\|x-y\|_X \quad \textit{para todos} \quad x, y \in X.$$

En el caso de espacios métricos una función Lipschitz es uniformemente continua pero no necesariamente el recíproco es verdadero. Un problema interesante es que condiciones deben cumplir los espacios métricos o la función, para que una función uniformemente continua sea Lipschitz, en el caso de los espacios normados, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.26. *Sean* $(X, \|.\|_X)$ *y* $(Y, \|.\|_Y)$ *espacios normados y sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es Lipschitz,*
2. *T es uniformemente continua,*
3. *T es continua en $0 \in X$,*
4. *Existe una constante c tal que $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

1 ⇒ 2 Como T es Lipschitz existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X \quad \text{para todos} \quad x, y \in X.$$

Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, entonces para cada $x, y \in X$ tenemos que si $\|x-y\|_X < \frac{\varepsilon}{M}$, se tiene que

$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Por lo tanto, T es uniformemente continua.

2 $\Rightarrow$ 3 Como T es uniformemente continua, entonces T es continua en particular es continua en el 0.

3 $\Rightarrow$ 4 Supongamos que T es continua en 0. Entonces existe $\delta > 0$ de tal manera que si $\|x - 0\|_X < \delta$ entonces

$$\|T(x)\|_Y = \|T(x) - T(0)\|_Y \leq 1.$$

Dado $0 \neq x \in X$, tenemos que $\delta = \|\delta x/\|x\|_X\|_X$, entonces $\|T(\delta x/\|x\|_x)\|_Y \leq 1$ y como T es lineal tenemos que

$$T\left(\frac{\delta x}{\|x\|_X}\right) = \frac{\delta}{\|x\|_X} T(x) \text{ entonces } \|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$$

Así, solo basta tomar $c = \dfrac{1}{\delta}$ para obtener lo que se quiere.

4 $\Rightarrow$ 1 Como T es un operador lineal y se mantiene (4), entonces T es Lipschitz ya que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq C\|x-y\|_X \text{ para cualesquiera } x, y \in X.$$

$\square$

Observación El inciso (4) del Teorema 2.26 es la definición de operador lineal acotado T. Un operador lineal es acotado si y sólo si, es Lipschitz. Además,

$$||T|| = \text{ínf}\{k \geq 0 : \|T(x) - T(y)\|_Y \leq k\|x-y\|_X \text{ para cada } x, y \in X\} = L(T).$$

Teorema 2.27. *Sea (X, d) un espacio métrico y sean f, g Lipschitz. Entonces*

a) $L(af) = |a|L(f)$ *para toda* $a \in \mathbb{R}$

b) $L(f + g) \leq L(f) + L(g)$*; y*

Demostración.

a) Tenemos que:

$$\begin{aligned} L(af) &= \text{ínf}\{k \geq 0 : ||af(x) - af(y)||_Y \leq kd(x,y) \text{ para toda } x, y \in X\} \\ &= \text{ínf}\{k \geq 0 : |a|||f(x) - f(y)||_Y \leq kd(x,y) \text{ para toda } x, y \in X\} \\ &= |a|L(f). \end{aligned}$$

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}||(f+g)(x)-(f+g)(y)||_Y &\leq ||f(x)-f(y)||_Y + ||g(x)-g(y)||_Y \\ &\leq [L(f)+L(g)]d(x,y).\end{aligned}$$

Así, $L(f+g) \leq L(f)+L(g)$.

□

Es decir, el conjunto de todas las funciones Lipschitz vectoriales con dominio un espacio métrico es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de un número real por una función. Si Y es un espacio normado, no tiene sentido la siguient pregunta: ¿Qué ocurre con el producto de funciones?. Sin embargo, si Y es un álgebra normada, la pregunta si tiene sentido. Ya vimos que el producto de funciones Lipschitz no necesariamente es Lipschitz, ver ejemplo (1.8), sin embargo, si se adiciona la hipótesis de que las dos funciones sean acotadas se tiene

Teorema 2.28. *Sean (X,d) un espacio métrico y $(Y,\|.\|_Y)$ un álgebra normada y sean $f: X \to Y$ y $g: X \to Y$ funciones Lipschitz acotadas, entonces fg es Lipschitz.*

Demostración.
Fijemos $x, y \in X$. Tenemos que

$$\begin{aligned}||(fg)(x)-(fg)(y)||_Y &\leq ||g(y)||_Y||f(x)-f(y)||_Y + ||f(x)||_y||g(x)-g(y)||_Y \\ &\leq [\|g\|_\infty L(f)d(x,y) + \|f\|_\infty L(g)d(x,y)\end{aligned}$$

Así $L(fg) \leq \|g\|_\infty L(f) + \|f\|_\infty L(g)$

□

De los teoremas 2.27 y 2.28, se sigue que $Lip(X,Y)$ es un álgebra de funciones. Los teoremas 2.15 y 2.17 no se pueden plantear en un espacio normado, salvo que se introduzca un orden en el espacio. Eso lo dejaremos para un estudio posterior. También los teoremas de extensión para funciones Lipschitz de un espacio normado a otro son díficiles y no los abordaremos en esta tesis.

Capítulo 3

Funciones Hölder

En este capítulo presentamos el concepto de función Hölder, éste es una generalización del concepto de función Lipschitz, fue introducido por Holder en sus trabajos sobre Teoría de Potencial ver ([5]).El estudio que hemos hecho sobre las funciones Lipschitz en los dos capítulos anteriores se puede replicar punto por punto para las funciones Hölder; salvo una caso: No es cierto que toda función Hölder sea diferenciable casi dondequiera.

3.1. Funciones Hölder Reales

Definición 3.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f satisface la condición Hölder, si existe una constante $k > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$*

Las funciones que cumplen con está condición se llamam funciones Hölder.

Teorema 3.2. *Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Hölder, entonces es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \sqrt[\alpha]{\dfrac{\varepsilon}{k}}$, donde k y $0 < \alpha \leq 1$ son números tales que

$$\text{para cada } \ x, y \in I \ \text{ se tiene } \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha.$$

Sean $x, y \in I$ con $|x-y| < \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}$. Entonces,

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^{\alpha} < k\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}\right)^{\alpha} = k\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua. El recíproco no necesariamente verdadero. Para $\alpha = 1$ veáse el ejemplo 1.6.

□

También, como en el caso de las funciones Lipschitz, el conjunto de las funciones Hölder acotadas en un intervalo forman un álgebra, es decir, la suma de funciones Hölder es Hölder, el producto de una función Hölder con un escalar es Hölder, y el producto de funciones Hölder es Hölder. Veamos que en efecto pasa esto.

Teorema 3.3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ y sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}$ funciones Hölder acotadas, $\sigma \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. *$f + g$ es una función Hölder en I,*
2. *σf es una función Hölder en I,*
3. *gf es una función Hölder en I.*

Demostración.

1. Sabemos por hipótesis que, existen $k, p > 0$ tales que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^{\alpha}$ y $|g(x)-g(y)| \leq p|x-y|^{\alpha}$, así

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)+g(x)-f(x)-g(y)| \\ &\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &\leq k|x-y|^{\alpha}+p|x-y|^{\alpha} \\ &= (k+p)|x-y|^{\alpha} \\ &= h|x-y|^{\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f+g$ es Hölder.

2. Sabemos por hipótesis que, existe $k > 0$ tal que
   $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha$

$$\begin{aligned} |(\sigma f)(x) - (\sigma f)(y)| &= |\sigma[f(x) - f(y)]| \\ &= |\sigma||f(x) - f(y)| \\ &\leq |\sigma|k|x-y|^\alpha \\ &= h|x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, σf es Hölder.

3. Como f y g son Hölder, existen $k, m > 0$ tales que
   $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha$ y $|g(x) - g(y)| \leq m|x-y|^\alpha$.Así

$$\begin{aligned} &|(gf)(x) - (gf)(y)| = |g(x)f(x) - g(y)f(y)| \\ &\leq |f(x)||[g(x) - g(y)]| + |g(y)||[f(x) - f(y)]| \\ &\leq |f(x)|[m|x-y|^\alpha] + |g(y)|[k|x-y|^\alpha] \\ &\leq [m||f||_\infty + k||g||_\infty]|x-y|^\alpha \\ &= h|x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, gf es Hölder.

$\square$

Observación. En general el producto de funciones Hölder no necesariamente es Hölder.

Para el caso $\alpha = 1$, veáse el ejemplo 1.8 .

El siguiente teorema nos sirve, entre otras cosas, para justificar porqué se toma $0 < \alpha \leq 1$.

Teorema 3.4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función Hölder. Si $\alpha > 1$, entonces f es constante.*

Demostración. Como f es Hölder, se satisface $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^\alpha$. Sean $y \in I$ y $x \neq y$. Entonces,

$$|(f)(x) - (f)(y)| \leq k|x-y|^\alpha.$$

Entonces

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k|x - y|^{\alpha - 1}.$$

Como $\alpha > 1$, se tiene que

$$\lim_{x \to y} 0 \leq \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \to y} k|x - y|^{\alpha - 1} = 0.$$

De esto último se concluye que f es diferenciable en y y que $f'(y) = 0$. Por lo tanto, f es una función constante, ya que su derivada es 0 en I.

□

3.2. Funciones Hölder en Espacios Métricos

Definición 3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $0 < \alpha \leq 1$, se denota por $X^\alpha = (X, d^\alpha)$ al mismo conjunto X con la métrica d^α. Se le denomina, a X^α, un espacio métrico de Hölder.*

Definición 3.6. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos y $0 < \alpha \leq 1$. Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es Hölder en X si existe una constante $k > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k[\rho(x, y)]^\alpha.$$

La constante de Hölder de la función f, denotada por $L^\alpha(f)$, se define como:

$$L^\alpha(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho(f(x), f(y)) \leq k d^\alpha(x, y) \;\text{ para toda }\; x, y \in X\}.$$

Esta constante se puede escribir

$$L^\alpha(f) = \sup\left\{L \geq 0 : \frac{\rho(f(x), f(y))}{k d^\alpha(x, y)} \leq L \;\text{ para toda }\; x, y \in X\right\}.$$

Es claro que $L^\alpha(f) \in \mathbb{R}$. Como en el caso de las funciones Lipschitz:

Teorema 3.7. *Si una función $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es Hölder, entonces es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \sqrt[\alpha]{\dfrac{\varepsilon}{k}}$, donde k y $0 < \alpha \leq 1$ son números tales que ,

$$\text{para cada } \ x, y \in X \ \text{ se tiene que } \ \rho(f(x), f(y)) \leq kd^{\alpha}(x, y).$$

Sean $x, y \in X$ con $d(x, y) < \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}$. Entonces,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq kd^{\alpha}(x, y)leqk \left[\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}\right]^{\alpha} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformememte continua.

□

Observación. El recíproco no necesariamente es cierto. Para $\alpha = 1$ veáse el ejemplo 1.6.

3.3. Funciones Hölder en Espacios Normados

En el caso de los espacios normados también se pueden definir los espacios normados Hölder.

Definición 3.8. *Sea $(X, || \cdot ||_x)$ un espacio normado. Sea $0 < \alpha \leq 1$, se denota por $X^{\alpha} = (X, \|.\|_x^{\alpha})$ al mismo conjunto X con la norma $\|.\|_x^{\alpha}$. Se le denomina, a X^{α}, un espacio normado de Hölder.*

Definición 3.9. *Sean $(X, \|.\|_x^{\alpha})$ y $(Y, \|.\|_y^{\alpha})$ espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. T es Hölder si existe una constante $M > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$ tal que $\|T(x) - T(y)\|_y \leq M\|x - y\|_x^{\alpha}$ para todos $x, y \in X$.*

Se tiene un teorema análogo al Teorema 2.26

Teorema 3.10. *Sean $(X, \|.\|_x^{\alpha})$ y $(Y, \|.\|_y^{\alpha})$ espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es Hölder,*

2. *T es uniformmente continua,*

3. *T es continua en* $0 \in X$*,*

4. *Existe una constante c tal que* $\|T(x)\|_y \leq c\|x\|_x^\alpha$ *para todo* $x \in X$*.*

Demostración.

1 ⇒ 2 Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Entonces para cada $x, y \in X$ tenemos que si $\|x - y\|_x^\alpha < \dfrac{\varepsilon}{M}$, entonces

$$\|T(x) - T(y)\|_y^\alpha \leq M\|x - y\|_x^\alpha = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Por lo tanto, T es uniformemente continua.

2 ⇒ 3 Como T es uniformemente continua, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\|_x^\alpha < \delta$, entonces $\|T(x) - T(y)\|_y^\alpha < \varepsilon$.

En particular, si $y = 0$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - 0\|_x^\alpha < \delta$ entonces $\|T(x) - T(0)\|_y^\alpha < \varepsilon$.

Por lo tanto T es continua en 0.

3 ⇒ 4 Suponagmos que T es continua en 0. Entonces podemos elegir $\delta > 0$ de tal manera que si $\|x - 0\|_x^\alpha < \delta$, entonces

$$\|T(x)\|_y = \|T(x) - T(0)\|_y^\alpha \leq 1.$$

Sea $0 \neq x \in X$. Como $\left\|\dfrac{\delta x}{2\|x\|_x^\alpha}\right\|_x^\alpha = \frac{\delta}{2}$, entonces se tiene

$$\left\|T\left(\frac{\delta x}{\|x\|_x^\alpha}\right)\right\|_y^\alpha \leq 1.$$

Pero $T\left(\dfrac{\delta x}{\|x\|_x^\alpha}\right) = \dfrac{\delta}{\|x\|_x^\alpha}T(x)$, porque T es lineal, y así obtenemos $\|T(x)\|_y^\alpha \leq \dfrac{1}{\delta}\|x\|_x^\alpha$. Basta tomar $c = \dfrac{1}{\delta}$ para obtener la condición 4.

4 ⇒ 1 Como T es un operador lineal se tiene

$\|T(x){-}T(y)\|_y^\alpha = \|T(x{-}y)\|_y^\alpha \leq C\|x{-}y\|_x^\alpha$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Por lo tanto, T es es Hölder.

$\square$

Capítulo 4

Funciones g-Lipschitz

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta una generalización del concepto de función Lipschitz y del concepto de función Hölder, lo llamaremos función g-Lipschitz, donde g es una función dada. El concepto lo presentamos en un marco bastante general. Los resultados que vimos en los capítulos anteriores serán nuestra guía para el estudio de las funciones g-Lipschitz. Sólo presentaremos algunos resultados básicos, los referentes a la relación de las funciones g- Lipschitz con las funciones uniformemente continuas y el "comportamiento" de estas funciones con respecto a las operaciones de funciones. Los demás resultados quedarán para futuros estudios.

4.2. Propiedades elementales de las funciones g-Lipschitz

Definición 4.1. *Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos. Sea $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ y $f:X\to Y$ una función. Decimos que f es g-Lipschitz en X si existe $k>0$ tal que*

$$\textit{para cada } x,y\in X \textit{ se tiene que } \rho(f(x),f(y))\leq kg(d(x,y)). \tag{4.1}$$

Denotemos por $Lip_g(X,Y)=\{f:X\to Y : f \text{ es } g\text{-Lipschitz y acotada}\}$.

Observaciones

1. Si $g(x) = x$, entonces $Lip_g(X, Y) = Lip(X, Y)$.
2. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Si $g(x) = x^\alpha$, entonces $Lip_g(X, Y) = Lip^\alpha(X, Y)$.
3. Si $g(x) = 0$, entonces $Lip_g(X, Y) = \mathbb{R}$.
4. Sea $c \in \mathbb{R}^+$. Si $g(x) = c$, entonces $Lip_g(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$, donde

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ } es \text{ } acotada \text{ } en \text{ } X.\}$$

Como en el caso de las funciones Lipschitz podemos definir la constante de Lipschitz de una función g-Lipschitz, la denotaremos por $L_g(f)$, como

$$L(f) = \text{ínf}\{k \geq 0 : \rho(f(x), f(y)) \leq kg(d(x, y)) \text{ para toda } x, y \in X\}.$$

Si $g(x) > 0$ para cada $x \in [0, \infty)$, esta constante se puede escribir

$$L(f) = \sup \left\{ L \geq 0 : \frac{\rho(f(x), f(y))}{kg(d(x, y))} \leq L \text{ para toda } x, y \in X \right\}.$$

Es claro que $L(f) \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Sea $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua en 0 y $g(0) = 0$. Sea $f : X \to Y$ g-Lipschitz. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como la función g es continua en 0 existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{si } 0 \leq x < \delta, \text{ entonces } |g(x)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Tomemos $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$. Entonces, de (4.2) y el hecho de que f es g-Lipschitz se tiene que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq kg(d(x, y)) < k\varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua.

□

Para facilitar el trabajo y lograr mejores resultados, trabajaremos con espacios normados, en este caso, nuestra definición toma la forma

Definición 4.3. *Sean* $(X, ||\cdot||_x)$ *y* $(Y, ||\cdot||_y)$ *espacios normados. Sea* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *y* $f : X \to Y$ *una función. Decimos que* f *es* g*-Lipschitz en* X *si existe* $k > 0$ *tal que*

$$\text{para cada } x, y \in X \text{ se tiene que } ||f(x) - f(y))||_y \leq kg(||x-y||_x). \quad (4.3)$$

En el contexto de los espacios normados tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.4. *Sean* $(X, ||\cdot||_x)$ *y* $(Y, ||\cdot||_y)$ *espacios normados y* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$. *Sean* $f, h \in Lip_g(X,Y)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces,*

1. $f + h \in Lip_g(X,Y)$ *y* $Lip_g(f+h) \leq (L_g(f) + L_g(h))$.
2. $\lambda f \in Lip_g(X,Y)$ *y* $L_g(\lambda f) = |\lambda| L_g(f)$.

Demostración.

1. Sean $x, y \in X$. Entonces,

$$\begin{aligned} ||(f+h)(x) - (f+h)(y)||_Y &= ||f(x) + h(x) - f(y) - h(y)||_Y \\ &\leq ||f(x) - f(y)||_Y + ||h(x) - h(y)||_Y \\ &\leq (L_g(f) + L_g(h))||x-y||_X. \end{aligned}$$

Entonces, $f + h \in Lip_g(X,Y)$ y $Lip_g(f+h) \leq (L_g(f) + L_g(h))$

2. Sean $x, y \in X$. Entonces,

$$||(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)||_Y = |\lambda| ||f(x) - f(y)||_Y \leq |\lambda| L_g(f) ||x-y||_X.$$

Entonces, $\lambda f \in Lip_g(X,Y)$ y $L_g(\lambda f) \leq |\lambda| L_g(f)$. La otra desigualdad, $|\lambda| L_g(f) \leq L_g(\lambda f)$, se prueba de manera similar. Asi, tenemos que $L_g(\lambda f) = |\lambda| L_g(f)$.

□

Es decir, el conjunto de todas las funciones g-Lipschitz de un espacio normado a otro es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de un número real por una función. Si Y es un espacio normado, no tiene sentido la siguient pregunta: ¿Qué ocurre con el producto de funciones?. Sin embargo si Y es un álgebra normada, la pregunta si tiene sentido. Ya vimos que el producto de funciones Lipschitz no necesariamente es Lipschitz, ver ejemplo (1.8), sin embargo, si se adiciona la hipótesis de que las dos funciones sean acotadas se tiene

Teorema 4.5. *Sean* $(X, || \cdot ||_X$ *espacio normado y* $(Y, || \cdot ||_Y)$ *un álgebra normada y sean* $f : X \to Y$ *y* $h : X \to Y$ *funciones g-Lipschitz acotadas, entonces* fh *es g-Lipschitz.*

Demostración.
Sean $x, y \in X$. Tenemos que

$$\begin{aligned} ||(fh)(x) - (fh)(y)||_Y &\leq ||h(y)||_Y ||f(x) - f(y)||_Y + ||f(x)||_Y ||g(x) - g(y)||_Y \\ &\leq [\|h\|_\infty L(f) g(||x - y||_X) + \|f\|_\infty L(h) g(||x - y||_X) \end{aligned}$$

Así, $L_g(fh) \leq \|h\|_\infty L(f) + \|f\|_\infty L_g(h)$.

$\square$

De los Teoremas 4.4 y 4.5, se sigue que $Lip_g(X, Y)$ es un álgebra de funciones.

Obviamente las propiedades de $Lip_g(X, Y)$ dependen de las propiedades de la función g; en el contexto tan general que escogimos puede ocurrir que

el espacio $Lip_g(X, Y)$ tenga funciones que no son continuas aunque g sea continua. Un ejemplo es:

Ejemplo 4.6. Sea $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, definida por $g(x) = 1$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Podemos observar que f no es continua en 1. Además f es g-Lipschitz ya que

$$|f(x) - f(y)| = \begin{cases} 0, & \text{si } x, y \in [0, 1), \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1), y = 1. \end{cases}$$

Basta tomar $k = 1$

Bibliografía

[1] Carothers N.L. , *Real Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2000.

[2] Fraser, R. B. , *Banach spaces of funtions satisfacing a modulus of continuity condition*, STUDIA MATHEMATICA, T. XXXII (1969), 277-283

[3] Luukkainen, J and Väisälä,J , *Elements of Lipschitz Topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 3 (1997), 85-122

[4] McShane E. J., *Extension of range of functions.* Bull. Amer. Math. Soc., 40:837-842, 1934.

[5] Pietsch , *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2007

[6] Weaver Nik , *Lipschitz Algebras*, World Scientific Co. Lte. Ltd, 1999.

[7] Whitney H., *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc., 36(1):63-89, 1934.