



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRUEBAS VISUALES Y SU USO DIDÁCTICO

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

AYERIM PATRIA HERRERA CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS:

LIC. PABLO RODRIGO ZELENY VAZQUEZ

Puebla Pue.
12 de diciembre de 2011

Agradecimientos.

Quiero agradecer a Dios por darme el entendimiento necesario para el desarrollo de este trabajo.

A mis padres por su apoyo y amor incondicional que día a día me brindan y que sin ello no sería nada, por tenerme paciencia pero sobretodo por ser buenos padres. Los AMO y esta tesis está dedicada a ustedes.

A mi asesor por su empeño y paciencia que puso para la realización del trabajo y por todo el tiempo que me dedico.

A mis profesores que aceptaron ser parte del jurado, y por todas las observaciones hechas para la mejora del trabajo.

Índice.

Introducción.	5
Capítulo 1. Pruebas visuales con Números Naturales.	9
1.1 Números figurados.	9
1.2 Suma de los enteros impares.	11
1.3 Suma de enteros.	15
1.4 Suma de cuadrados de enteros.	17
1.5 Suma de números triangulares.	19
1.6 Suma alternante de cuadrados.	21
1.7 Suma de cubos.	22
1.8 Cuidado con los dibujos!!!.	24
Capítulo 2. Pruebas visuales en geometría.	29
2.1 La demostración Chou Pei Suan Ching del teorema de Pitágoras.	29
2.2 Prueba de Leonardo da Vinci del teorema de Pitágoras.	29
2.3 El teorema de Pitágoras.	30
2.4 Pappus y Pitágoras.	30
2.5 Mosaicos Pitagóricos.	33
2.6 De Pitágoras a la trigonometría.	38
2.7 Las áreas del Arbelos y del Salinón.	40
2.8 Un teorema de Tales.	47
2.9 El teorema de Viviani.	47
2.10 Teorema de Tolomeo.	48
2.11 Un teorema de Gaspard Monge.	49
2.12 El punto de Fermat de un triángulo.	51
2.13 La razón dorada en el pentágono regular.	52
2.14 El área entre los lados y cevianas de un triángulo.	52
Capítulo 3. Desigualdades	55
3.1 Desigualdades entre la media aritmética y la media geométrica.	55
3.2 La media aritmética de la suma de los cuadrados es mayor que el cuadrado de la media aritmética.	57
3.3 La desigualdad de tres números de la media aritmética y de la media geométrica.	58
3.4 La propiedad mediante.	60
3.5 Una desigualdad Pitagórica.	61
3.6 Algunas desigualdades.	62
3.7 Números como valores de la función.	64
3.8 Desigualdad de Cauchy- Schwarz.	64
3.9 Desigualdad del triángulo.	65

3.10	Desigualdad de Tolomeo.	66
3.11	Funciones trigonométricas.	67
3.12	Suma de los términos de una progresión aritmética.	70
3.13	De dos a tres dimensiones.	71
3.14	Acerca de las bisectrices de ángulos de un cuadrilátero convexo.	72
3.15	Cuadriláteros cíclicos con diagonales perpendiculares.	73
3.16	Una característica de la hipérbola rectangular.	74
Capítulo 4. Mosaicos y series.		77
4.1	Cuadratura de polígonos.	77
4.2	Áreas iguales en la partición de un paralelogramo.	79
4.3	Mosaicos cartesianos.	79
4.4	Mosaicos cuadriláteros.	81
4.5	Mosaicos triangulares.	82
4.6	Mosaicos con cuadrados y paralelogramos.	82
4.7	El volumen de una pirámide cuadrada.	83
4.8	Series geométricas.	84
4.9	El crecimiento de una figura iterativamente.	87
4.10	Fórmula de Herón.	89
4.11	La ley del paralelogramo.	91
4.12	La ley del cuadrilátero.	93
Capítulo 5. Uso didáctico		95
Conclusiones		103
Bibliografía		104

Introducción

¿Qué son las "pruebas visuales"? la pregunta no tiene una respuesta simple y concisa. Las pruebas visuales son dibujos o esquemas que ayudan al lector a ver por qué un enunciado matemático en particular puede ser verdadero, y también "ver" cómo se podría comenzar a trabajar para dar una demostración de que ésta es verdadera. Yuri Ivanovich comenta: *"Una buena prueba es la que nos hace sabios"*, un sentimiento compartido por Andrew Gleason quién afirma: *"Las pruebas en realidad no están ahí para convencerte de que algo es cierto, están ahí para mostrarte por qué es verdad"*. O simplemente podemos decir que las pruebas visuales pueden ser divertidas e interesantes didácticamente. Las pruebas visuales han sido publicadas en Mathematics Magazine y The College Mathematics Journal, desde hace varios años.

Sin embargo las pruebas visuales no son innovaciones recientes - han existido por mucho tiempo, tal vez su primera aparición fue en la antigua Grecia y China, y más tarde en el siglo X en Arabia y en el renacimiento de Italia. Hoy las pruebas sin palabras aparecen regularmente en revistas de todo el mundo y en la World Wide Web por ejemplo en Wolfram Demonstrations Project.

Algunos argumentan que las pruebas visuales no son realmente "pruebas", sin embargo Martin Gardner, en su popular columna "Juegos Matemáticos" de Scientific American (Octubre de 1973), discutió como "mirar - ver" diagramas. Dijo que: *"en muchos casos una prueba aburrida puede ser complementada por una analogía geométrica tan simple y hermosa que la verdad de un teorema se comprende casi de un vistazo."*

En algunos casos, una prueba visual puede incluir ecuaciones para guiar al lector, pero el énfasis está principalmente en los indicios visuales que ayudan a relacionar las condiciones y las ideas llegan más fácilmente. Hay muchas pruebas visuales relacionadas con varios tópicos de las matemáticas: geometría, teoría de números, trigonometría, cálculo, desigualdades etc.

Lo que se hará en este trabajo es una breve recopilación de varias demostraciones que incluyen problemas de áreas, desigualdades, identidades trigonométricas, series geométricas, propiedades de la integral, entre otros usando "visualización geométrica". En el capítulo 1 hablaremos principalmente de los números figurados y algunas de sus propiedades. En el Capítulo 2 veremos diferentes pruebas del Teorema de Pitágoras. En el Capítulo 3 presentaremos algunas desigualdades. En el Capítulo 4 veremos algunas pruebas utilizando teselados. Por último en el Capítulo 5 veremos algunas sugerencias didácticas. A diferencia de otros trabajos en geometría nosotros seleccionamos teoremas cuya demostración puede comprenderse con un "golpe de vista". Por ejemplo usando áreas veremos una demostración del teorema de Pitágoras (de hecho hay varias) y también daremos una demostración usando teselados. Como en la mayoría de las demostraciones solo necesitamos conocimientos básicos. Este trabajo puede ser comprendido por jóvenes de secundaria y Bachillerato. Desde la secundaria son conocidas por los estudiantes las identidades:

$$a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ y } a + b \quad a - b = a^2 - b^2$$

que son ilustradas geoméricamente y se remontan a los Elementos de Euclides.

A continuación se presenta un par de explicaciones que dan dos autores mexicanos de la importancia de la *visualización en matemáticas*. Por un lado, Hitt (2002), destaca que:

“La visualización matemática tiene que ver con una imagen que ayuda al entendimiento de un enunciado o un problema y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará automáticamente a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a comprender la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado”.

Mientras que Cantoral y colaboradores (2000), explican que:

“... Se entiende por visualización la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar y reflejar la información visual (imagen). En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico”.

Conviene hacer una distinción entre ver y visualizar, ver se reduce a la capacidad del ojo de captar la imagen lo cual es un proceso fisiológico, mientras que la visualización es un proceso cognoscitivo, que está vinculado con la cultura del sujeto: experiencia, costumbres y valores.

El recurso tradicional en la enseñanza geométrica ha sido el dibujo. No dibujar en Geometría sería renunciar a la esencia de esta disciplina. Según Alsina [11], el dibujo en Geometría tiene interés como lenguaje para ejemplificar o representar conceptos y propiedades.

La representación gráfica es una forma de comunicación, un lenguaje para expresar, construir los conocimientos geoméricos. La comunicación gráfica debe ser una habilidad aprendida y practicada ya que es una herramienta muy útil en la resolución de problemas. En muchas ocasiones la representación gráfica de los datos de un problema puede sugerirnos las estrategias para encontrar la solución, hay dos clases de representación: la representación de objetos reales o concretos y la representación de ideas abstractas [15].

Es importante que, en el transcurso de sus actividades académicas, los alumnos desarrollen su capacidad para comunicar su pensamiento y se acostumbren gradualmente a los diversos medios de expresión matemática: lenguaje natural, simbólico, así como el uso de tablas, diagramas y dibujos.

Los estudiantes tienen distintas opiniones acerca del dibujo y su importancia para la resolución de problemas geoméricos [12]. Unos creen que el dibujo es innecesario por eso lo trazan sin mucho cuidado y tratan de fundamentar sus

razonamientos sin referirlos al dibujo. Otros, al contrario, consideran al dibujo como el elemento decisivo en la resolución e incluso piensan que no es necesario argumentar de uno u otro modo lo que "es evidente en el dibujo". Ambos puntos de vista son erróneos, pues ningún dibujo por hermoso, ilustrativo y exacto que sea, puede sustituir la demostración lógica de un problema geométrico, ya que el dibujo no es más que una guía para los razonamientos. Sin embargo, el papel del dibujo no se reduce solamente a la ilustración de los razonamientos durante la resolución de un problema, en muchas ocasiones resulta que el dibujo hecho acertadamente es lo que puede dar la idea sobre el empleo de un concepto o proposición matemática, o sobre la necesidad de trazar líneas auxiliares o de realizar una construcción adicional, es decir, el dibujo juega un papel importantísimo en la resolución de la mayoría de los problemas pues permite sugerir la idea de la solución.

Hay problemas geométricos que no solo requieren de una determinada fórmula, o el uso de cierto concepto, sino además dibujar bien las figuras geométricas para tratar de cumplir correctamente con las condiciones del problema, pero debemos señalar que aunque se vea clara la configuración espacial, dada la precisión y nitidez con que está hecho el dibujo, es necesario demostrar todas las afirmaciones, incluso las que parecen evidentes. Cuando no se utilizan evidencias del dibujo, sino que se trata de una argumentación estricta, entonces el alumno se convence de sus posibles errores en su dibujo. Esto es importante porque si se visualiza mal una figura, los cálculos y argumentos desde el inicio serán incorrectos y por lo tanto el resto es trabajo inútil.

Sin embargo debemos tener cuidado con la visualización al trabajar con alumnos que tienen poca experiencia, por ejemplo si se les presenta un rectángulo de 10 por 8 y luego se dibuja adentro otro rectángulo de 4 por 6 casi todos dicen que son semejantes. Los alumnos interpretan la semejanza como sinónimo de "parecidos" y no en su significado técnico: "tener lados proporcionales", por eso caen en el error. Se presenta un par de ejemplos de "falacias geométricas" por confiar en casos particulares del dibujo en el capítulo 1.

En cálculo integral hay dos problemas que se dejan a los alumnos relacionados con el cálculo del volumen de sólidos de revolución: volumen del toro y volumen de la intersección de dos cilindros. A muchos alumnos se les dificulta, pero la principal razón es no poder visualizar la figura para poder hallar el intervalo de integración, por ello es importante que los alumnos aprendan a visualizar.

"Las personas recuerdan los aspectos visuales de un concepto mejor que los aspectos analíticos."
S. Vinner

Capítulo 1. Pruebas visuales con Números Naturales.

En este capítulo veremos algunos temas relacionados con los números figurados, desigualdades, representación de números a través de volúmenes de objetos. Antes de comenzar veremos algunas definiciones.

1.1 Números figurados

La idea de representar un número por un conjunto de objetos se remonta al menos a los antiguos griegos [8]. Cuando la representación toma la forma de un polígono como un triángulo o un cuadrado, el número se llama a menudo número figurado.

Los **números triangulares** T_n

(1, 3, 6, 10, 15, ...) son enteros del tipo $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Los **números cuadrados** C_n

(1, 4, 9, 16, 25, ...) son enteros del tipo $C_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

Los **números pentagonales** P_n

(1, 5, 12, 22, ...) son enteros del tipo $P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$

Los **números hexagonales** H_n

(1, 6, 15, 28, ...) son enteros del tipo $H_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$

Y así sucesivamente eran conocidos por los pitagóricos.

Algunas propiedades de los números figurados son:

- Todo número cuadrado (de cualquier orden) es la suma de un número triangular del mismo orden y otro de orden inmediatamente anterior (ver figura 1.1.1), es decir:

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

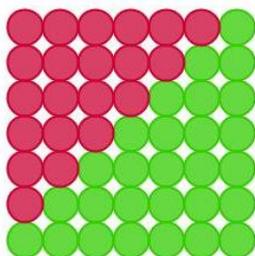
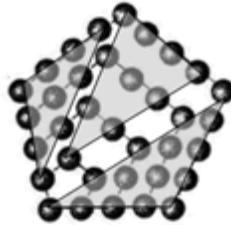


Fig. 1.1.1

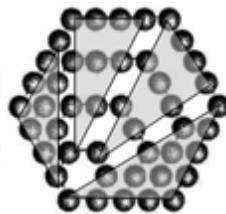
- b) Un número pentagonal se puede obtener como la suma de un triangular del mismo orden más dos veces otro de orden inmediatamente anterior, es decir:

$$P_n = T_n + 2T_{n-1}$$



- c) Un número hexagonal se puede obtener como la suma de un triangular del mismo orden más tres veces otro de orden inmediatamente anterior, es decir:

$$H_n = T_n + 3T_{n-1}$$



La fórmula general para un número figurado K_n de k lados es:

$$K_n = T_n + (k-3)T_{n-1} \quad (k > 2)$$

Cuando $k = 3$ tenemos, como era de esperarse a los triangulares, los casos $k = 4, 5, 6$ se pueden verificar fácilmente.

En los problemas que consideraremos acerca de los números naturales $1, 2, \dots$ la idea para hallar la solución puede ser obtenida por la representación de números mediante conjuntos de objetos. Dado que la elección de objetos no es importante, por lo general se pueden utilizar puntos, cuadrados, esferas, cubos y otros objetos comunes fáciles de dibujar.

Cuando nos enfrentamos a la tarea de verificar un enunciado acerca de los números naturales (por ejemplo, mostrando que la suma de los n primeros números impares es n^2) un enfoque común es utilizar la inducción matemática, sin embargo con este enfoque algebraico rara vez resulta claro para los alumnos de por qué la afirmación es cierta. Un enfoque geométrico, en donde se puede visualizar la relación de número como una relación entre objetos, a menudo puede proporcionar una mejor comprensión.

Enunciaremos dos principios simples de conteo:

1. Si Usted cuenta los objetos de dos formas diferentes, obtendrá el mismo resultado y,
2. Si dos conjuntos tienen una correspondencia uno a uno, entonces tienen el mismo número de elementos.

El primer principio ha sido llamado el principio de Fubini (conocido por el teorema sobre el intercambio de orden de integración en las integrales dobles). Llamamos a la segunda, el principio de Cantor. George Cantor (1845 - 1918), lo utilizó ampliamente en sus investigaciones sobre la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Ahora ilustraremos los dos principios. [NOTA: los dos principios son realmente equivalentes.]

1.2 Suma de los enteros impares

Teorema: Para todo $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Prueba:

En la Fig. 1.2.1, podemos contar los puntos de dos maneras, multiplicando el número de filas por el número de columnas ($n \times n$), o por el número de puntos en cada región en forma de L. Por el principio de Fubini, los dos deben ser lo mismo.

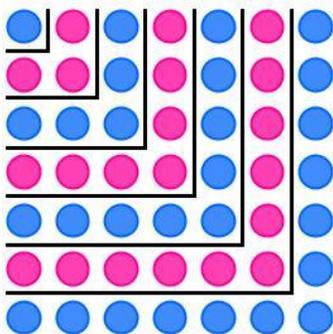


Fig. 1.2.1

A pesar de que sólo se muestra la identidad para el caso $n = 7$, el patrón es claramente válido para cualquier número natural n .

En la Fig. 1.2.2, vemos a dos conjuntos de puntos, el de la derecha es simplemente una reordenación de los puntos del de la izquierda. Es fácil ver una correspondencia uno a uno entre los elementos de los dos conjuntos (Puntos similarmente sombreados corresponden). Contando por filas en el conjunto de la izquierda, tenemos $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ puntos, n^2 en el conjunto de la derecha, y el principio de Cantor establece el resultado.

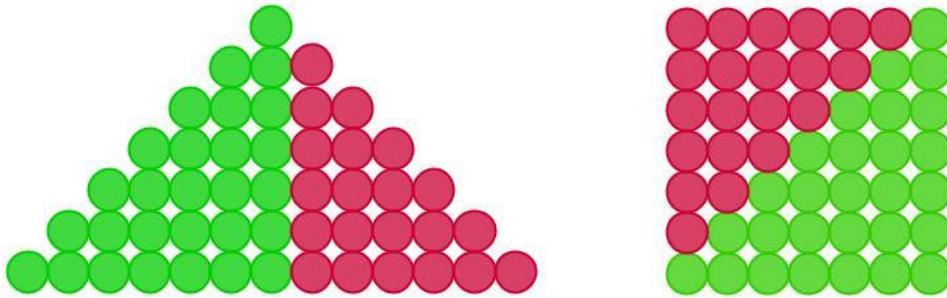


Fig. 1.2.2

Como vimos anteriormente, la suma de los n primeros números impares es n^2 . Si representamos $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ por un “triángulo” de cuadrados unitarios, como se muestra a continuación en la Fig. 1.2.3(a), entonces cuatro copias de estos “triángulos” forman un cuadrado con lados de longitud $2n$ Fig. 1.2.3 (b).

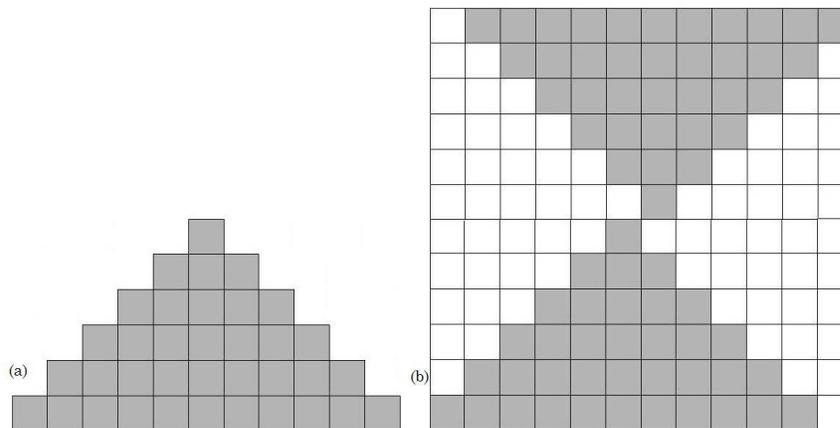


Fig. 1.2.3

Por lo tanto $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = \frac{2n^2}{4} = n^2$

La misma idea (usando cubos) se puede emplear en tres dimensiones para establecer la siguiente secuencia de identidades:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

⋮

Note que cada fila comienza con un número cuadrado. El patrón general $n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \dots + (n^2 + 2n)$ se puede probar por inducción, pero la siguiente prueba visual es mucho más agradable.

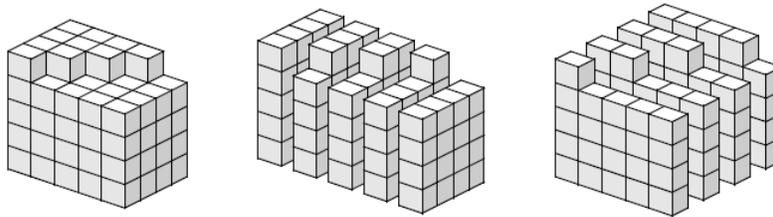


Fig. 1.2.4

En la Fig. 1.2.4 vemos el caso $n = 4$ contamos el número de cubos pequeños en la pila en dos formas diferentes (reacomodando) obtenemos

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24.$$

Si hubiera más capas en la figura 1.2.5 observe que se empieza con un cuadrado $n \times n$, la siguiente capa es $(n \times n) + 1$ y así sucesivamente.

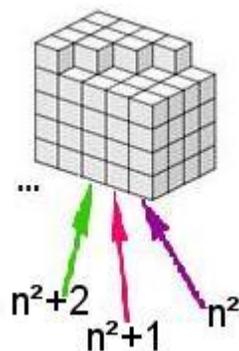


Fig. 1.2.5

Hay muchas relaciones agradables entre los números triangulares y cuadrados. La más simple es tal vez la que se ilustra en el lado derecho de la Fig. 1.2.2 es:

$$T_{n-1} + T_n = C_n = n^2.$$

Se dan dos propiedades más de los triángulos (ajustando $T_0 = 0$ para mayor comodidad):

Mas propiedades de T_n : Para todo $n \geq 0$ se tiene:

$$(a) 8T_n + 1 = (2n + 1)^2$$

$$(b) 9T_n + 1 = T_{3n+1}$$

Prueba:

La siguiente figura ilustra las dos propiedades (aquí hemos usado cuadrados).

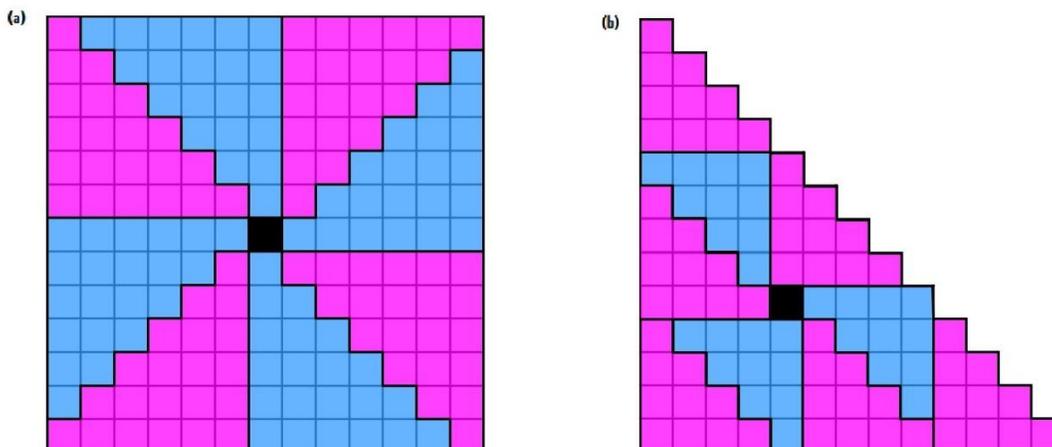


Fig. 1.2.6

En la Fig. 1.2.6 (a) se tienen 8 números triangulares que se van acomodando de tal manera que se forma el cuadrado y el uno es el cuadrado (en negro) de en medio. En la Fig. 1.2.6 (b) se tienen 9 números triangulares que se reagrupan para formar el número triangular deseado y al igual que (a) el uno es el cuadrado (en negro). La figura 1.2.6 a) aparece en el libro de Pickover [6].
Un comentario de tipo histórico: Gauss demuestra que

"Todo número entero es suma de, a lo sumo, tres números triangulares".

En su obra "Disquisiciones Aritméticas" publicada en 1801 y que fue anotado en su cuaderno de notas en 1796 como **Eureka: $N = \Delta + \Delta + \Delta$**

Teorema. Para todo $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Prueba:

La identidad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

será establecida al mostrar que $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ es igual en el área de un rectángulo cuyas dimensiones son $2n + 1$ por $1 + 2 + \dots + n$ (Ver Fig. 1.2.7)

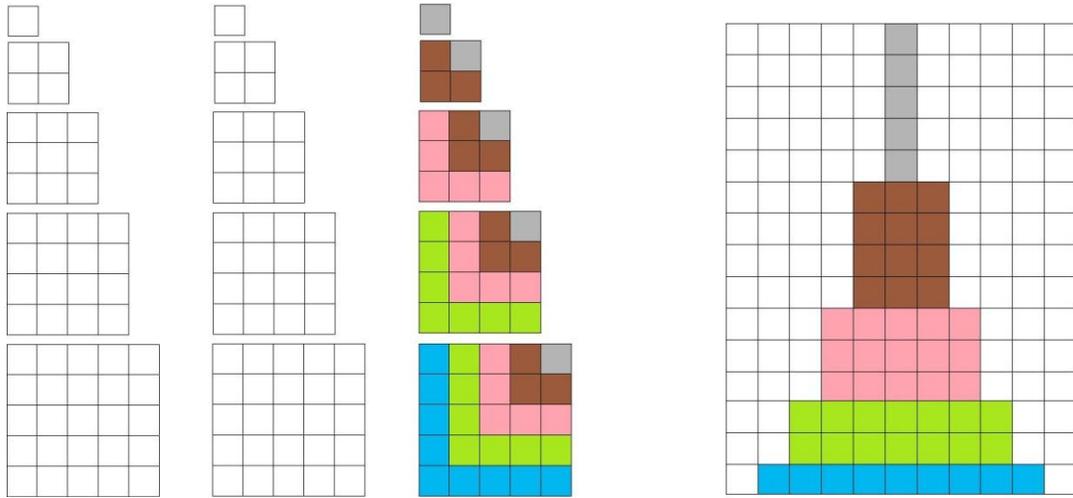


Fig. 1.2.7

1.3 Suma de enteros consecutivos

Aunque es muy conocida la suma de Gauss aquí damos otra demostración visual menos conocida.

Teorema: Para todo $n \geq 1$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Prueba:

También podemos utilizar los dos principios para establecer la fórmula clásica de la suma de los primeros n números naturales:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si añadimos una columna de n puntos hacia el lado izquierdo del arreglo de la Fig. 1.2.1, obtenemos el arreglo de la Fig. 1.3.1. Contando los puntos de la región en forma de L obtenemos $2 + 4 + \dots + 2n$, mientras que multiplicar el número de filas por el número de columnas obtenemos $n(n + 1)$, por el principio Fubini se obtiene el resultado deseado (después dividir por 2).

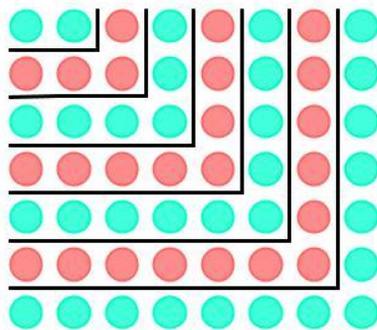


Fig. 1.3.1

Alternativamente, podemos hacer dos copias de $1 + 2 + \dots + n$ y reordenar los puntos, como se muestra en la Fig. 1.3.2. El conjunto de la izquierda tiene $2(1 + 2 + \dots + n)$ puntos, mientras que la de la derecha tiene $n^2 + n$ puntos. El principio de Cantor (y la división por 2 otra vez) produce el resultado deseado.

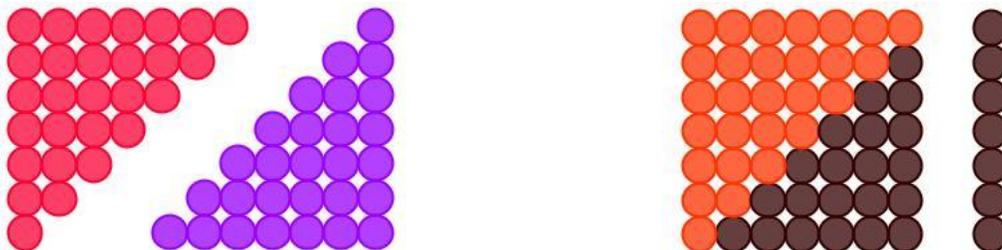


Fig. 1.3.2

El arreglo de $1 + 2 + \dots + n$ puntos en la forma de triángulo del lado izquierdo de la Fig. 1.3.2 explica porque la suma $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es llamada el n ésimo número triangular.

NOTA: En el Triángulo de Pascal podemos encontrar números naturales, números triangulares y números tetraédricos que no se trata aquí por cuestiones de espacio, pero es una buena alternativa didáctica que se comente en clase.

Otra forma muy práctica para representar un número (positivo) es por el área de una región en el plano. Las formas más sencillas de estas regiones son cuadrados y rectángulos, un problema de conteo se convierte ahora en cálculo de áreas, y las desigualdades entre los números se pueden establecer al mostrar que una región tiene un área mayor o menor que otra.

Anteriormente nos encontramos con varias representaciones visuales para el n ésimo número triangular $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Si utilizamos un cuadrado de área 1 para representar el número 1, dos cuadrados para representar a 2, y así sucesivamente, entonces el área de la Fig. 1.3.3 (a) representa T_n . Para calcular el área, trazamos la diagonal del cuadrado más a la derecha en cada fila como se muestra en la Fig. 1.3.3 (b), y calculamos las áreas del triángulo resultante sin sombrear y los n pequeños triángulos sombreados



Fig. 1.3.3

Por lo tanto

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Otra forma de evaluar T_n es tomar dos copias de la región de la Fig. 1.3.3 (a) y luego calculamos el área. Aquí $2T_n = n(n+1)$, y por lo tanto $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. (Ver Fig. 1.3.4).

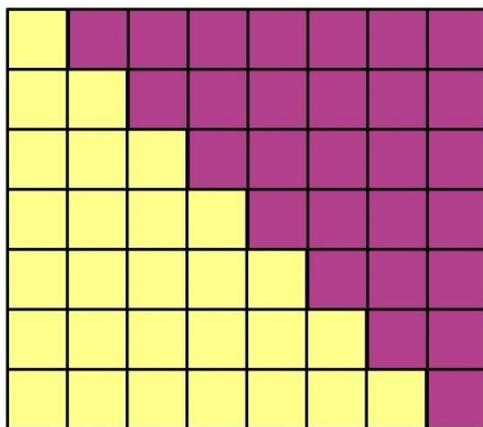


Fig. 1.3.4

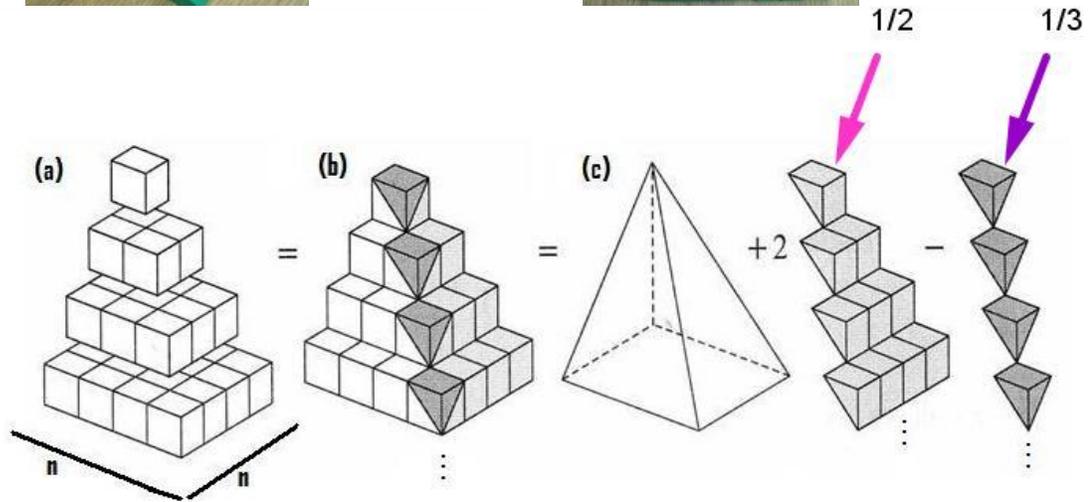
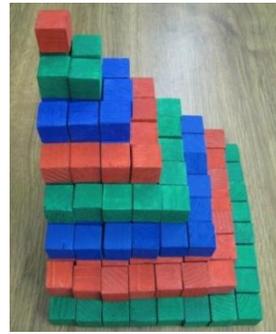
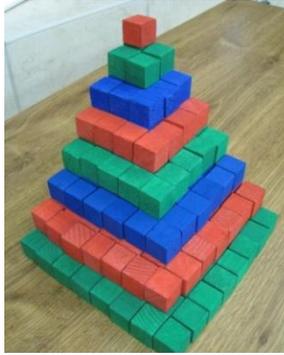
1.4 Suma de cuadrados de enteros

Representaremos un número positivo por los correspondientes cubos unitarios. En los casos más simples podemos representar un producto de tres enteros positivos por el volumen de un sólido rectangular. También podemos representar un entero por una colección de cubos unitarios, y establecer las identidades mediante el cálculo del volumen. En muchos casos podemos necesitar modificar o reacomodar las partes de un objeto antes de calcular el volumen.

Teorema: Para todo $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Prueba:

Con anterioridad vimos una representación visual para el enésimo número triangular $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ como el área de una región compuesta por una colección de cuadrados unitarios, y usando áreas de triángulos para establecer la fórmula para T_n (Fig. 1.3.3). Análogamente podemos representar un cuadrado con lado k (entero) como una colección de k^2 cubos unitarios, y calcular la suma $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ a través de volúmenes como se ilustra en la Fig. 1.4.1:



La última capa es un cuadrado de $n \times n$ cubos

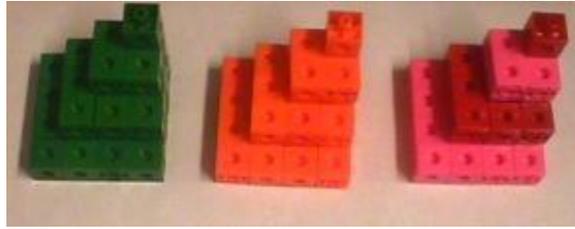
Fig. 1.4.1

$$\text{Por lo tanto } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^2n + 2\left[\frac{n}{2} \frac{n+1}{2} \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{3}n = \frac{n}{6}n(n+1)(2n+1).$$

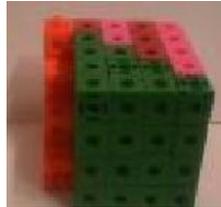
En el cálculo se utilizó la fórmula para el volumen de la pirámide ($1/3$ del área de la base por la altura) y $\frac{n(n+1)}{2}$ por la suma $1 + 2 + \dots + n$.

Veamos otra forma para demostrar este teorema. En la Fig. 1.4.2 (a) vemos como tres copias de $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ puede ensamblarse para formar un sólido con una base rectangular, y cuando los cubos en la capa superior se cortan a la mitad y se mueven, el resultado es una caja rectangular de dimensiones n por $n + 1$ por $n + (1/2)$.

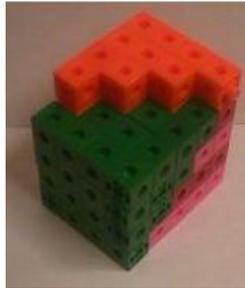
Para mayor claridad tenemos las siguientes fotografías



Se ensamblan



Se observa que en la parte superior "sobra" un número triangular, la cual se corta a la mitad y se completa un paralelepípedo de dimensiones: n , $(n + 1)$ y $(n + \frac{1}{2})$, para hallar su volumen simplemente multiplicamos.



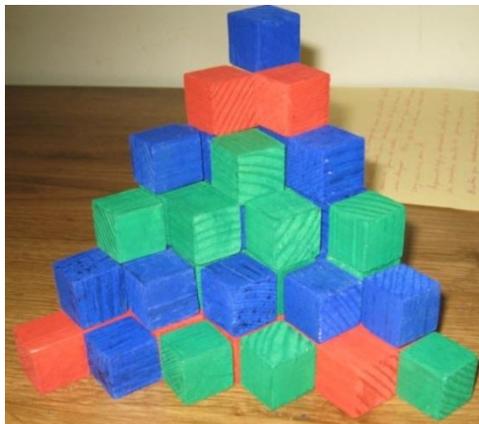
Como unimos tres copias tenemos

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = n(n + 1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Otra idea es pegar esta figura (arriba) dos veces y se divide entre 6.

1.5 Suma de números triangulares

De manera similar podemos encontrar una fórmula para la suma de los n primeros números triangulares:



Teorema: Para todo $n \geq 1$, $T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, es decir

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Prueba:

Después de poner "capas" de cubos unitarios que representan los números triangulares, "cortamos" pequeñas pirámides (en gris en la Fig. 1.5.1) y colocamos cada pequeña pirámide en la parte superior del cubo de la cual se obtuvo, en la base llenamos algunos huecos con "piezas extras". El resultado es una pirámide mayor. Para no alterar el volumen inicial debemos quitar $(n-1)$ pirámides más pequeñas a lo largo del borde de la base. A continuación se muestra cómo se hacen los cortes:

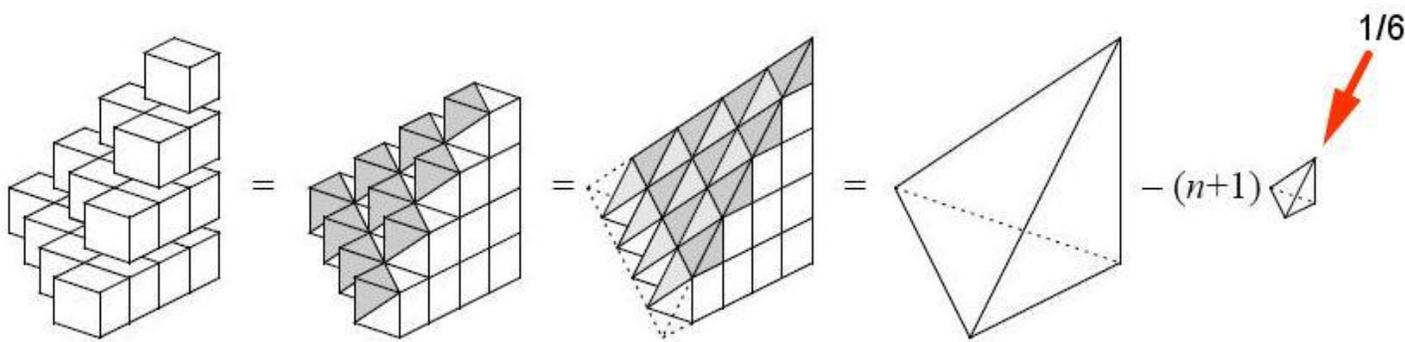


Fig. 1.5.1

Para darnos una mejor idea de los cortes que se realizan para llegar a la pirámide veamos las siguientes fotografías.



Por lo tanto

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{1}{6} n + 1^3 - \frac{1}{6} n + 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

NOTA: Aplicando inducción o propiedades de la sumatoria es fácil demostrar esta igualdad pero el alumno no comprende de "donde sale" dicha fórmula. Lo que se visualiza no se olvida.

1.6 Suma alternante de cuadrados

Hay muchas relaciones bonitas entre los números figurados, una de las cuales es la siguiente. Considere sumas alternantes de cuadrados:

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 &= -3 = -(1+2); \\ 1^2 - 2^2 + 3^2 &= +6 = +(1+2+3); \\ 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 &= -10 = -(1+2+3+4); \\ &\vdots \end{aligned}$$

El resultado de las sumas son números triangulares, y parece que el patrón general es

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} T_n$$

Podemos ilustrar este patrón con puntos, usando color morado para distinguir los puntos que desaparecen en estas operaciones Fig. 1.6.1:

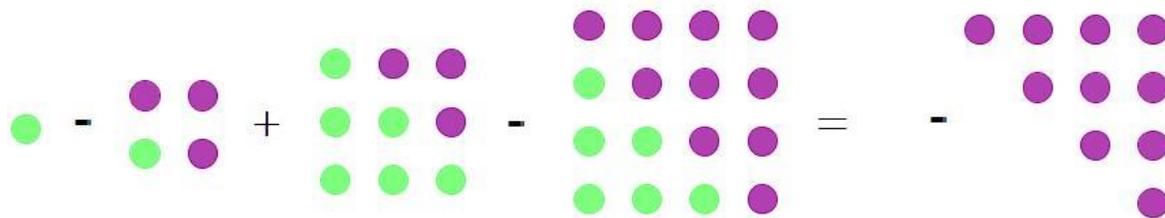


Fig. 1.6.1

1.7 Sumas de cubos.

Teorema: Para todo $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = T_n^2$

Prueba:

Podemos utilizar las áreas planas para ilustrar una identidad para los cubos de los números enteros mediante la representación de un cubo como n copias de n^2 para un entero n . Por ejemplo, la Fig. 1.7.1 ilustra la identidad

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

En la figura, en la que dos cuadrados se superponen en un cuadrado más pequeño. Siempre hay un cuadrado adyacente vacío más pequeño de la misma área.

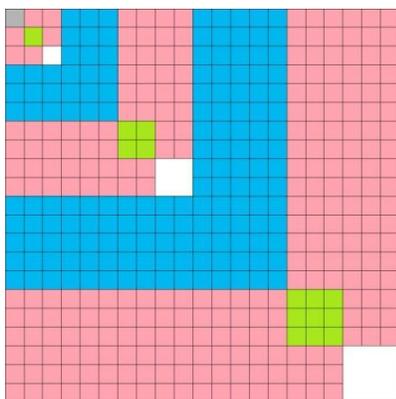


Fig. 1.7.1

Teorema: Para todo $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + j - 1 = n^3$

Prueba:

Representamos la suma doble como una colección de cubos unitarios y calculamos el volumen de una caja rectangular formado por dos copias de la colección. Vea la Fig. 1.7.2.

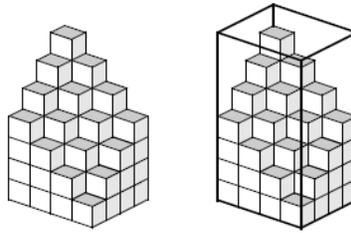


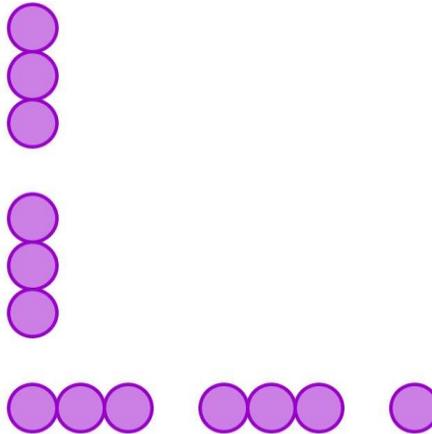
Fig. 1.7.2

Observe que las dos copias de la suma $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + j - 1$ caben en una caja rectangular con base n^2 y altura $2n$, por lo tanto, calculando el volumen de la caja en dos formas obtenemos $2S = 2n^3$, o $S = n^3$.
 A continuación veremos algunos ejercicios resueltos utilizando números figurados pero sobre todo utilizando pruebas visuales.

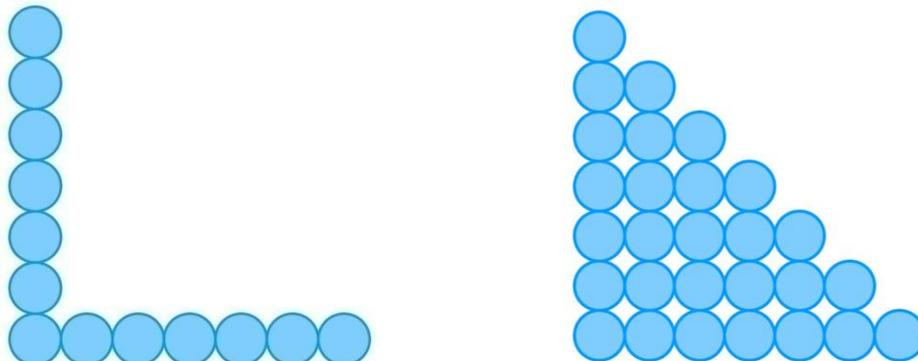
Problema: dar una prueba visual de

$$T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}$$

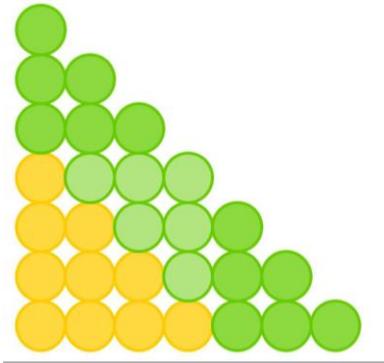
Para poder resolver este problema nos basamos en las siguientes figuras. Supongamos que "n" son 3 círculos entonces como del lado izquierdo de la igualdad nos indica $2n + 1$ tenemos lo siguiente:



En seguida completamos el número triangular generado de la siguiente manera:



Y por último la solución del problema



Es decir, tenemos $3T_n + T_{n+1}$ por lo tanto, $T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}$

Pero tenga mucho cuidado cómo interpreta las figuras ya que una figura mal hecha nos va arrojar un mal resultado. A continuación tenemos algunos ejemplos:

1.8 ¡Cuidado con los dibujos!

Ejemplo 1:

Dibujamos una semicircunferencia de radio 1, y luego se dibujan dos semicircunferencias de radio $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... y así sucesivamente (ver dibujo 1.8.1). Se observa que los radios tienden a cero y el área de los semicírculos también tiende a cero pero ¡Cuidado con los dibujos!

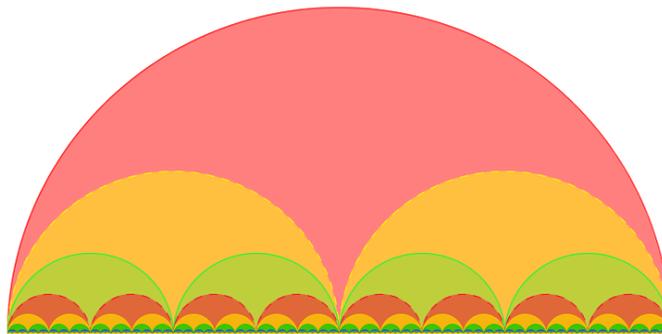


Fig. 1.8.1

Porque se “podría afirmar con base en el dibujo que el perímetro de los semicírculos tienden al diámetro del semicírculo inicial”, pero no se fie de las apariencias ¡Haga los cálculos!

$A_0 = \text{área del primer semicírculo.}$

$A_1 = \text{área de dos semicírculos con } r = \frac{1}{2}.$

$A_2 = \text{área de cuatro semicírculos con } r = \frac{1}{4}, \dots, \text{ etc.}$

Algo semejante podemos preguntar sobre el perímetro de los semicírculos.

$P_0 =$ *perímetro del primer semicírculo.*

$P_1 =$ *perímetro de dos semicírculos con $r = \frac{1}{2}$.*

$P_2 =$ *perímetro de cuatro semicírculos con $r = \frac{1}{4}$, ..., etc.*

Observar que: A_n tiende a cero mientras que P_n permanece constante.

Ejemplo 2:

Demostrar que todo triángulo es isósceles

Sea ABC (Fig. 1.8.2 (a)) un triángulo cualquiera. Tracemos la bisectriz del $\angle C$ y la perpendicular al lado AB en su punto medio. Desde su punto de intersección G , tracemos las perpendiculares GD y GF a AC y BC respectivamente, y unamos A y B con G . Los triángulos CGD y CGF son iguales o congruentes por tener el lado CG común, $\angle 1 = \angle 2$ por construcción, y $\angle 3 = \angle 4$ por ser ángulos rectos. (Dos triángulos que tienen iguales dos ángulos y un lado son congruentes.) Por consiguiente, $DG = GF$. (Los elementos homólogos de triángulos iguales, son iguales). En los triángulos GDA y GFB , $\angle 5$ y $\angle 6$ son rectos y por estar G en la perpendicular al punto medio de AB , ha de ser $AG = GB$. (Todo punto situado en la perpendicular al punto medio de un segmento, es equidistante de sus extremos). Por tanto, los triángulos GDA y GFB son congruentes. (Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen iguales la hipotenusa y un cateto.)

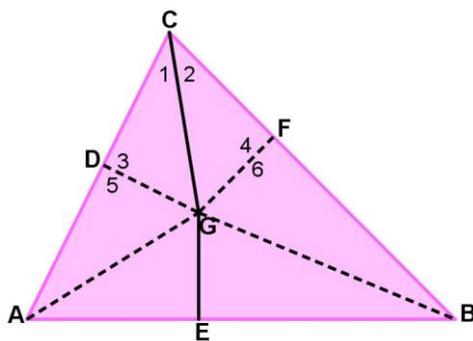


Fig. 1.8.2 (a)

De estos dos pares de triángulos congruentes (CGD y CGF) y (GDA y GFB) deducimos respectivamente,

$$CD = CF \quad (1)$$

$$DA = FB \quad (2)$$

Sumando las igualdades (1) y (2) se obtiene la nueva igualdad $CA = CB$, de modo que el triángulo ABC es isósceles como se quería demostrar.

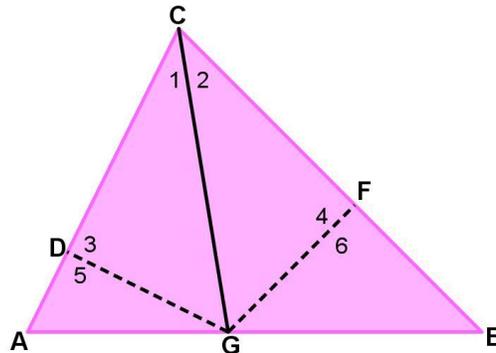


Fig. 1.8.2 (b)

Se puede decir que no sabemos si EG y CG se cortan dentro del triángulo. Muy bien, examinaremos todas las posibilidades. La demostración anterior es válida letra por letra en los casos en que G coincida con E , o G esté fuera del triángulo, pero lo suficientemente cerca de AB para que D y F caigan sobre CA y CB , y no sobre sus prolongaciones. Las Fig. 1.8.2 (b) y Fig. 1.8.2 (c) ilustran estos casos.

Queda la posibilidad (Fig. 1.8.2 (d)) de que G quede tan fuera del triángulo que D y F estén en las prolongaciones de CA y CB . También, como en el primer caso, los triángulos CGD y CGF son congruentes, como también lo son los triángulos GDA y GFB . En consecuencia se verifican las igualdades $CD = CF$ y $DA = FB$. Y restando estas dos igualdades se obtiene $CA = CB$.

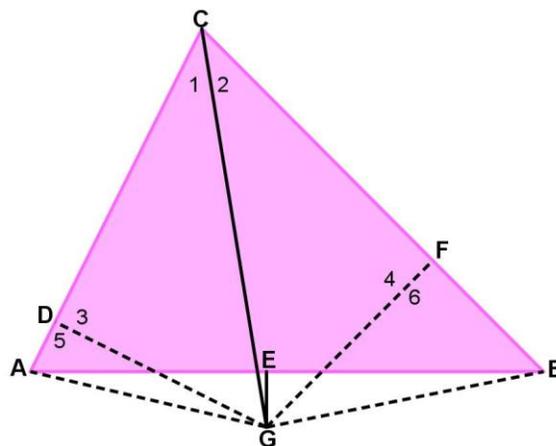


Fig. 1.8.2 (c)

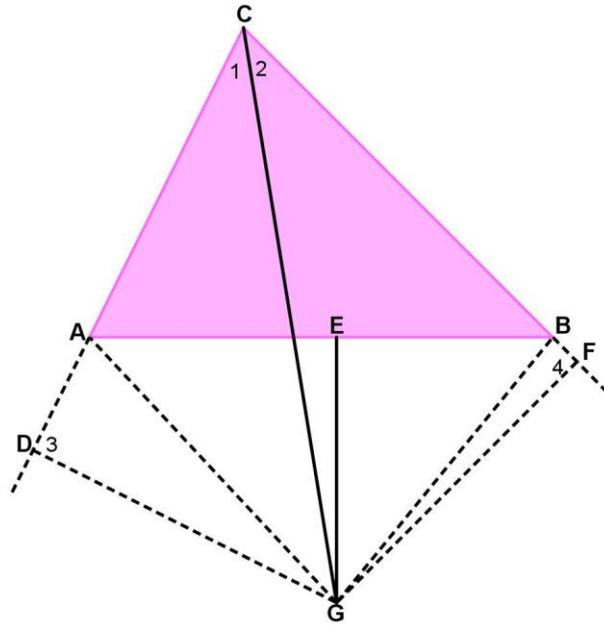


Fig. 1.8.2 (d)

Finalmente, puede ocurrir que CG y EG no se corten en un punto, G , sino que o coincidan o sean paralelas. En cualquiera de estos casos, (Fig. 1.8.2 (e)) la bisectriz CP del ángulo C será perpendicular a AB de modo que $\angle 7 = \angle 8$; y como $\angle 1 = \angle 2$, y CP es común, el triángulo APC es igual al triángulo BPC , y por tanto también $CA = CB$.

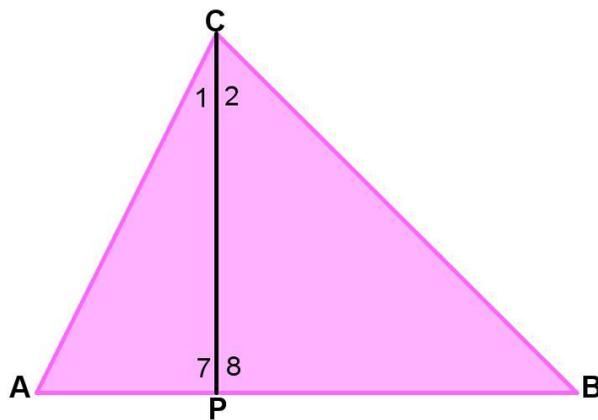


Fig. 1.8.2 (e)

Parece, que hemos agotado todas las posibilidades, y que hemos de aceptar la conclusión evidentemente absurda de que todos los triángulos son isósceles. Sin embargo, queda todavía otro caso que vale la pena investigar. ¿No es posible que uno de los puntos D y F , caigan dentro del triángulo, y que el otro caiga

fuera? Una figura correctamente dibujada, indicará que ésta es en realidad la única posibilidad. Además podemos demostrarlo como sigue:

Circunscribamos un círculo al triángulo ABC , (Fig. 1.8.2 (f)). Puesto que $\angle 1 = \angle 2$, CG debe bisecar al arco AB . ($\angle 1$ y $\angle 2$, son triángulos inscritos, y por ser iguales deben comprender arcos iguales.) Pero también EG biseca al arco AB . (La perpendicular al punto medio de una cuerda, biseca al arco de la cuerda.) Por consiguiente G está en el círculo circunscrito y $CAGB$ es un cuadrilátero inscrito. Pero $\angle CAG - \angle CBG$ es un ángulo llano (Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.) Pero si $\angle CAG$ y $\angle CBG$ fueran los dos rectos, D y F coincidirían con A y B respectivamente; por lo tanto la conclusión de que $CD = CF$, (a la que llegamos en el primer caso), nos llevaría a que $CA = CB$, lo cual es contrario a nuestra hipótesis de que ABC es un triángulo cualquiera. Por consiguiente, uno de los ángulos CAG o CBG ha de ser agudo y el otro obtuso, lo cual significa que o D o F (en la figura el punto D) debe caer fuera del triángulo, y el otro por dentro. Las relaciones $CD = CF$ y $DA = FB$, son ciertas aquí, como también lo eran en los otros casos. Pero puesto que $CB = CF + FB$, tenemos ahora que $CA = CD - DA$ en vez de $CD + DA$.

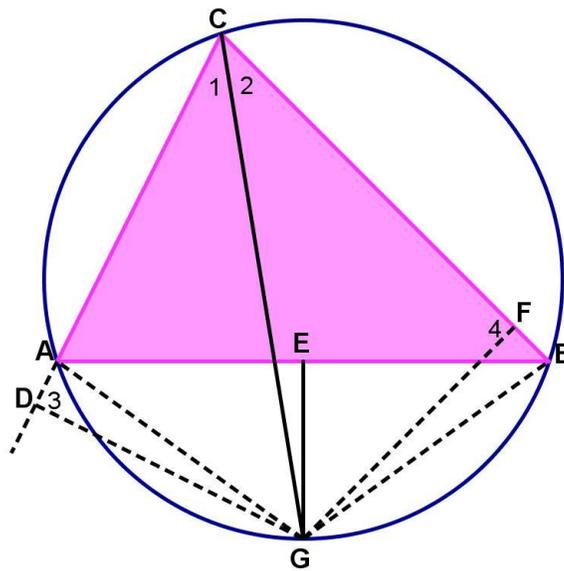


Fig. 1.8.2 (f)

Esta discusión ha sido larga, pero instructiva. Muestra con cuánta facilidad se puede extraviar el razonamiento por lo que los ojos ven en la figura, y pone de manifiesto, la importancia de dibujar correctamente, señalando con cuidado las posiciones relativas de los puntos esenciales para la demostración. Si hubiéramos empezado por construir con regla y compás las bisectrices y las diversas perpendiculares, nos habríamos ahorrado mucho trabajo.

Capítulo 2. Pruebas visuales en geometría.

En este capítulo veremos algunas aplicaciones del Teorema de Pitágoras, Teoremas de famosos matemáticos como Arquímedes, Tales, Tolomeo, Fermat entre otros.

2.1 La demostración Chou Pei Suan Ching del teorema de Pitágoras

Quizás la más simple (y más elegante) prueba visual del teorema de Pitágoras es la siguiente del Chou Pei Suan Ching, un documento chino que data aproximadamente del 200 a.C. Utiliza sólo el movimiento de triángulos dentro de un cuadrado Fig. 2.1.1:

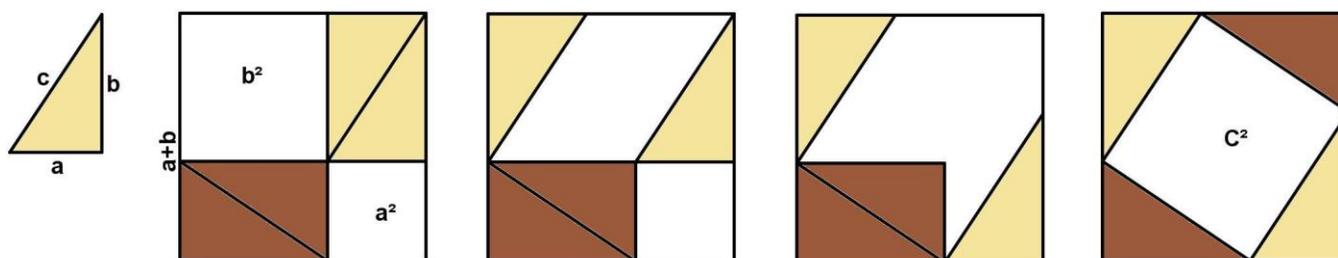


Fig. 2.1.1

El área total de las porciones blancas dentro del gran cuadrado se mantiene sin cambios ya que tres de los cuatro triángulos sombreados son movidos a nuevas posiciones.

El lector debe percibir, con base en los dibujos (cuadrados) izquierdo y derecho, que estos representan la misma área $(a + b)^2$, de donde se desprende el resultado.

2.2 Prueba de Leonardo da Vinci del teorema de Pitágoras.

En la Fig. 2.2.1 tenemos una prueba visual del teorema de Pitágoras atribuido al notable Leonardo da Vinci (1542 - 1619). A la imagen "estándar" de un triángulo rectángulo con cuadrados en los catetos y la hipotenusa, Leonardo estratégicamente agregó dos copias de un triángulo rectángulo, y las dos líneas discontinuas CC' y DD' . Por reflexión, $DEFD'$ es congruente con $DBAD'$, y por rotación, $CBA'C'$ es congruente con $CAB'C'$. Observe que una rotación de 90° a la derecha de $DBAD'$ con respecto al punto B muestra que $DBAD'$ y $CBA'C'$ también son congruentes. De ahí que los hexágonos $DEFD'AB$ y $CAB'C'A'B$ tienen partes congruentes y por lo tanto la misma área, de la que sigue el teorema de Pitágoras.

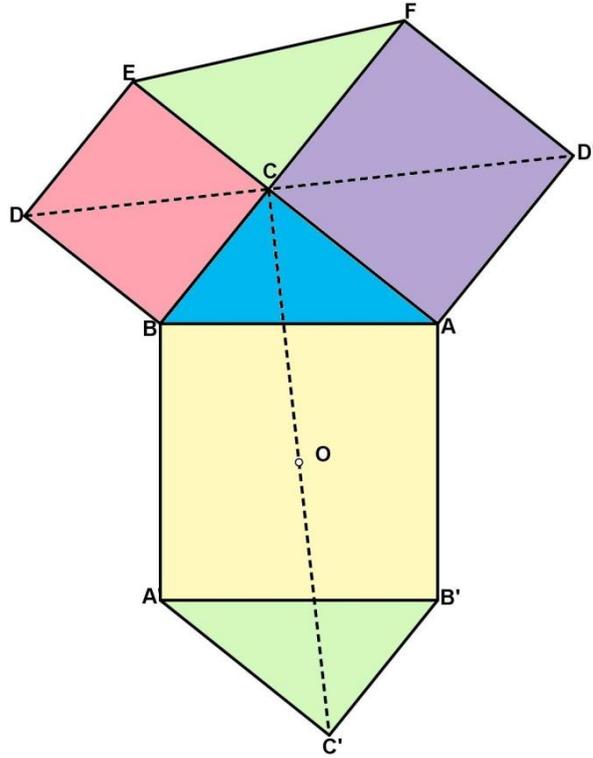
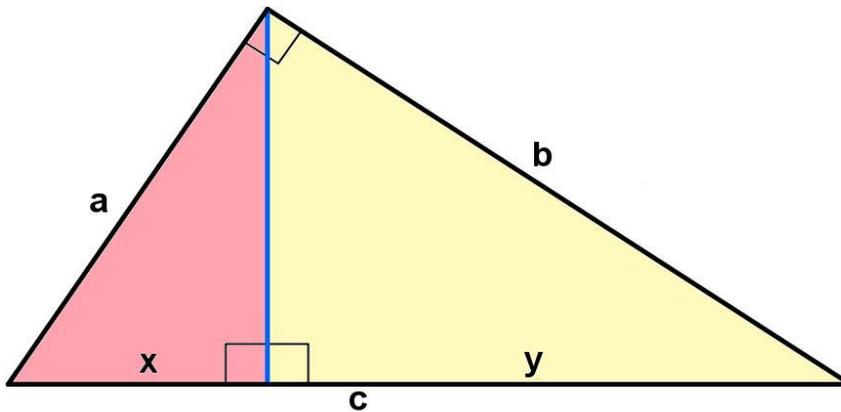


Fig. 2.2.1

2.3 El teorema de Pitágoras

Sabemos que, la altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos más pequeños, cada uno semejante al original. Esto proporciona la siguiente prueba del teorema de Pitágoras (Ver Fig. 2.3.1):



$$x = a \cdot \frac{a}{c}, \quad y = b \cdot \frac{b}{c},$$

$$c = x + y = \frac{a^2 + b^2}{c}$$

Fig. 2.3.1

2.4 Pappus y Pitágoras.

En el libro IV de esta Colección Matemática, Pappus de Alejandría (circa 320 d.C.) declaró la siguiente generalización del Teorema de Pitágoras.

Teorema: Sea ABC cualquier triángulo, y $ABDE, ACFG$ cualesquiera dos paralelogramos descritos externamente sobre AB y AC . Prolongue DE y FG para reunirse en H , y dibuje BL y CM iguales y paralelos a HA . Luego, el área, $BCML = ABDE + ACFG$. Véase la Fig. 2.4.1.

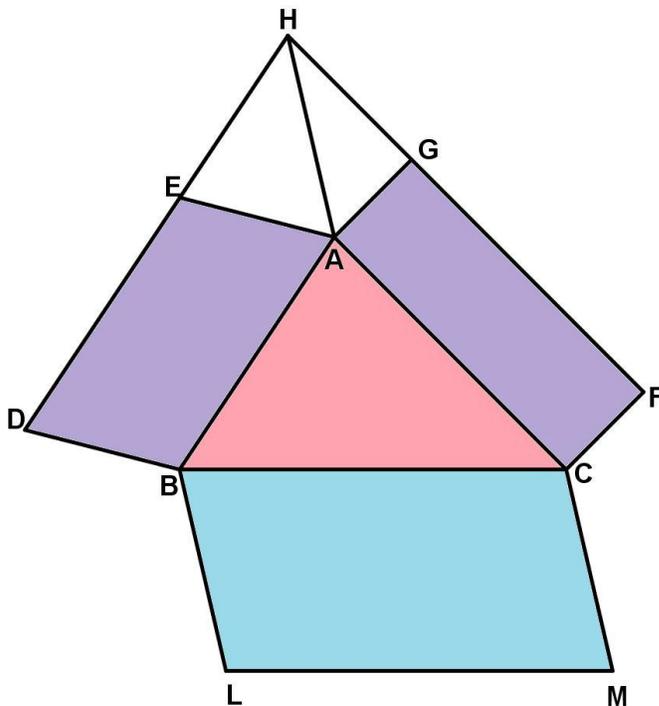
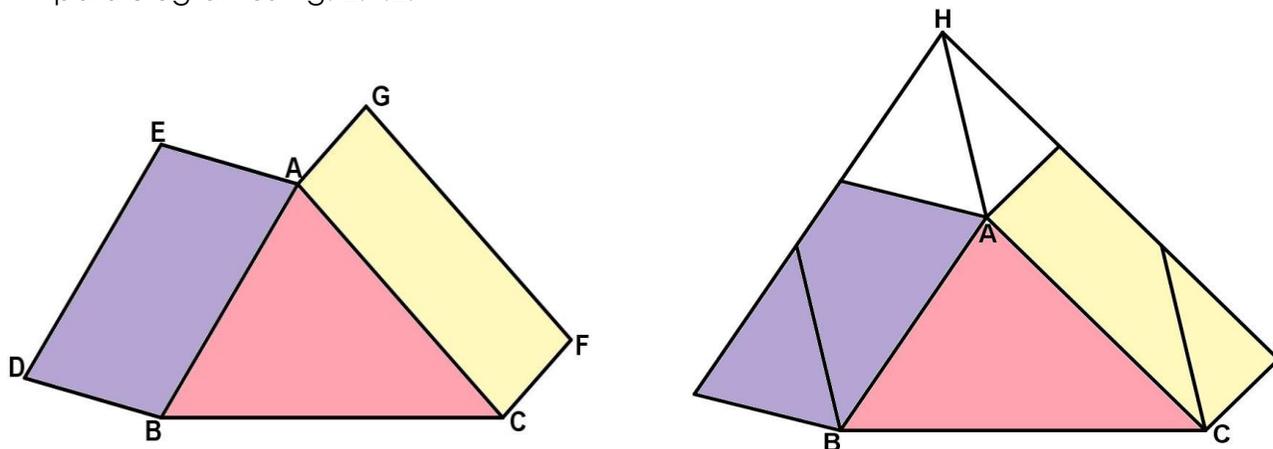


Fig. 2.4.1

Prueba:

La siguiente prueba utiliza áreas sucesivas, preservando transformaciones de los paralelogramos Fig. 2.4.2:



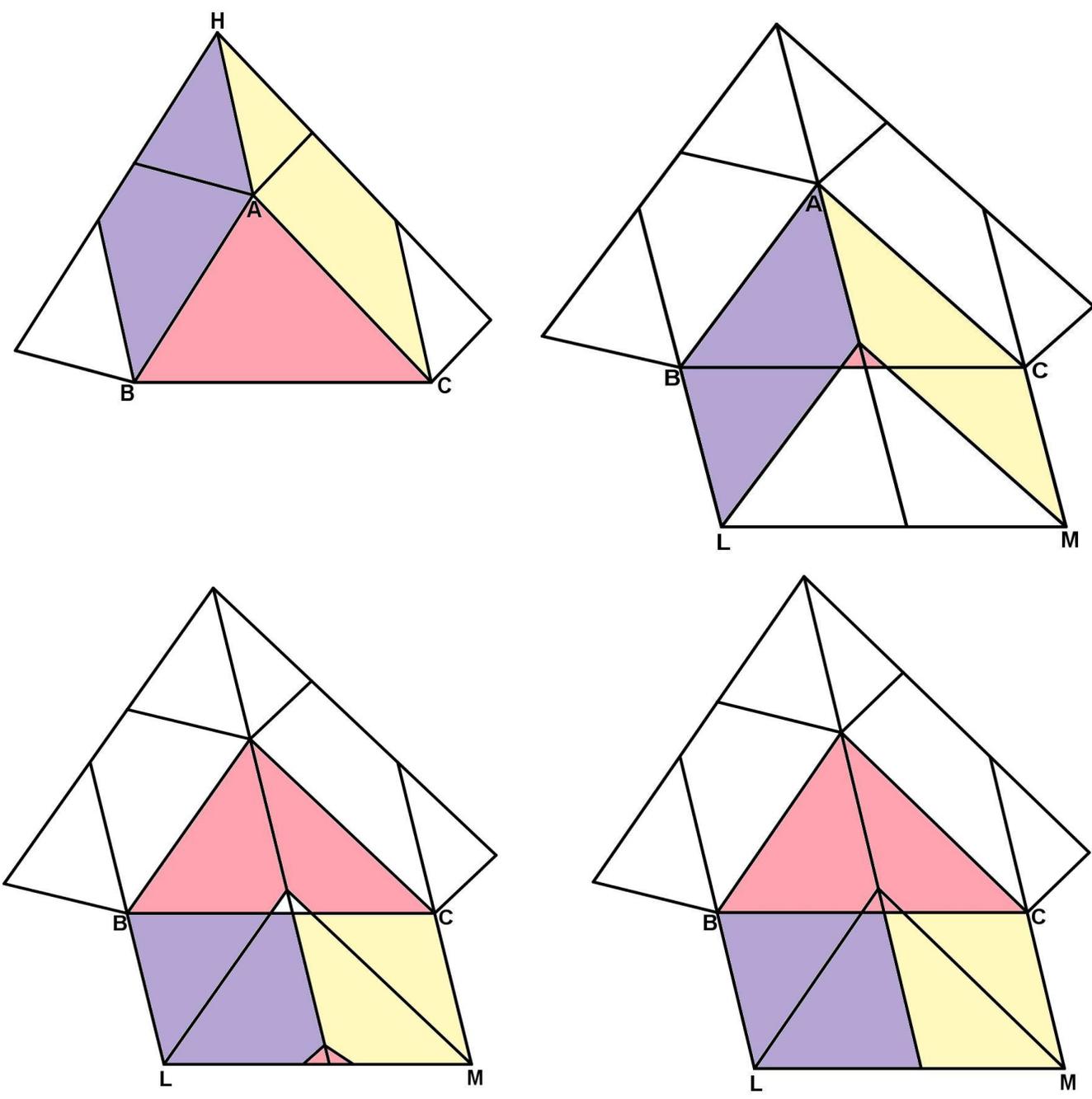


Fig. 2.4.2

Si el triángulo es un triángulo rectángulo, y los paralelogramos cuadrados, tenemos la siguiente prueba del teorema de Pitágoras Fig. 2.4.3:

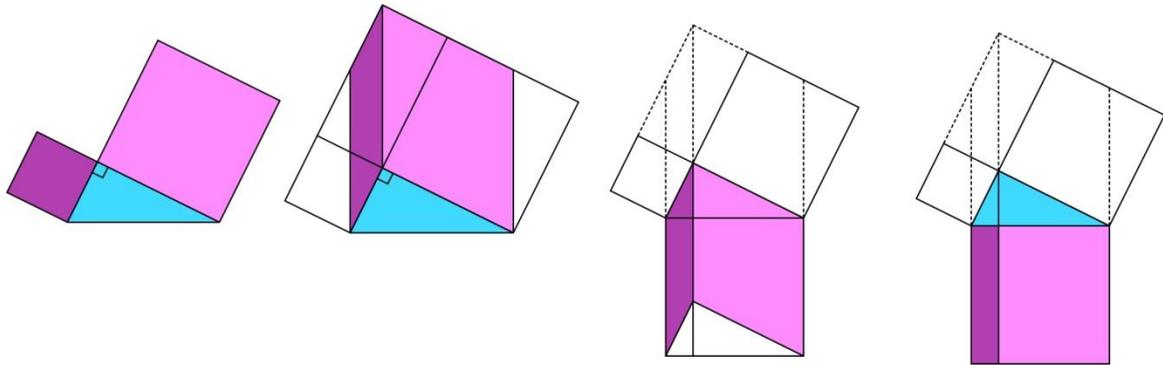


Fig. 2.4.3

2.5 Mosaicos pitagóricos.

Antes de comenzar con este tema veamos qué son los Teselados que también más adelante los vamos a retomar.

Un **teselado** es una regularidad o patrón de figuras que cubre o pavimenta completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos:

1. que no queden huecos
2. que no se superpongan las figuras

Los teselados se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial.

Distintas culturas en el tiempo han utilizado esta técnica para formar pavimentos o muros de mosaicos en catedrales y palacios.

Es un error común referirse al teselado como "**teselación**" lo cual es una traducción equivocada de la palabra en inglés "**tesellation**". El único término correcto en español es "**teselado**".

Antecedentes históricos

- Algunos mosaicos sumerios con varios miles de años de antigüedad contienen regularidades geométricas.
- Arquímedes en el siglo III a. C. hizo un estudio acerca de los polígonos regulares que pueden cubrir el plano
- Johannes Kepler, astrónomo alemán, estudió los polígonos regulares que pueden cubrir el plano, en su obra "*Harmonice mundi*" de 1619. Además realizó estudios en tres dimensiones de los llamados sólidos platónicos.
- Entre 1869 y 1891, el matemático Camille Jordan y el cristalógrafo Evgenii Konstantinovitch Fiodorov estudiaron completamente las simetrías del

plano, iniciando así el estudio sistemático y profundo de los llamados **teselados**.

- Hugo Steinhaus en su libro "Instantáneas matemáticas" explica que hay 17 formas diferentes de cubrir el plano con movimientos geométricos que se repiten regularmente, sólo tres de ellos constan de una misma figura: triángulo equilátero, cuadrado y hexágono, las restantes utilizan más de una figura geométrica.
- Un personaje clave en este tema es el artista holandés M. C. Escher (1898-1972) quien, por sugerencia de su amigo el matemático H. S. M. Coxeter, aprendió los teselados hiperbólicos, lo que motivó su interés. Legó un sinnúmero de bellas, curiosas y misteriosas obras de arte.

Conceptos previos

- En un teselado plano la suma de todos los ángulos que concurren a un vértice es 360° .
- Un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales.
- Un polígono es convexo si todas sus diagonales están en el interior del polígono.

Un polígono es cóncavo si no es convexo.

Así pegar mosaicos en el plano es una familia numerable de conjuntos cerrados (los azulejos) que cubren el plano sin dejar huecos ni superposiciones. En la Fig. 2.5.1 vemos las porciones de dos ejemplos, compuesto por azulejos que son cuadrados de dos tamaños diferentes en (a) y rectángulos y cuadrados en (b).

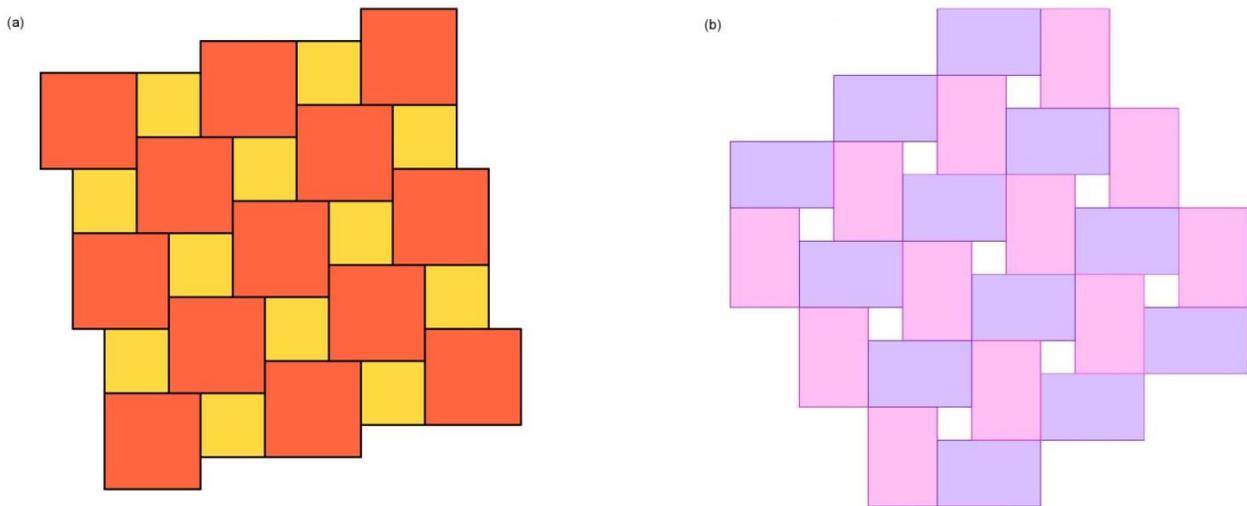


Fig. 2.5.1

De hecho, mosaicos como los de la Fig. 2.5.1 se han utilizado durante muchos siglos en los hogares, iglesias, palacios, etc. Si superponemos una segunda rejilla de azulejos "transparentes", podemos construir demostraciones visuales de una serie de teoremas matemáticos. Comenzamos con los azulejos de la Fig. 2.5.1, que produce varias pruebas visuales del teorema de Pitágoras.

Ahora veamos cómo se pueden construir los mosaicos pitagóricos. Comenzamos con el mosaico de la Fig. 2.5.1 (a), y la superposición de una rejilla transparente de azulejos cuadrados, como se muestra en la Fig. 2.5.2 (a). Note que el lado del cuadrado en la superposición es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de los dos cuadrados más pequeños en el mosaico original. Como se observa en la Fig. 2.5.2 (b), el mosaico y la superposición generan una prueba por "disección" del teorema de Pitágoras, en donde uno ve cómo los cuadrados de los catetos del triángulo debe ser "cortado" y reacomodado (rearmado, ensamblado nuevamente) para formar el cuadrado de la hipotenusa. Esta prueba es usualmente atribuida a Annairizi de Arabia (circa 900 d.C.).

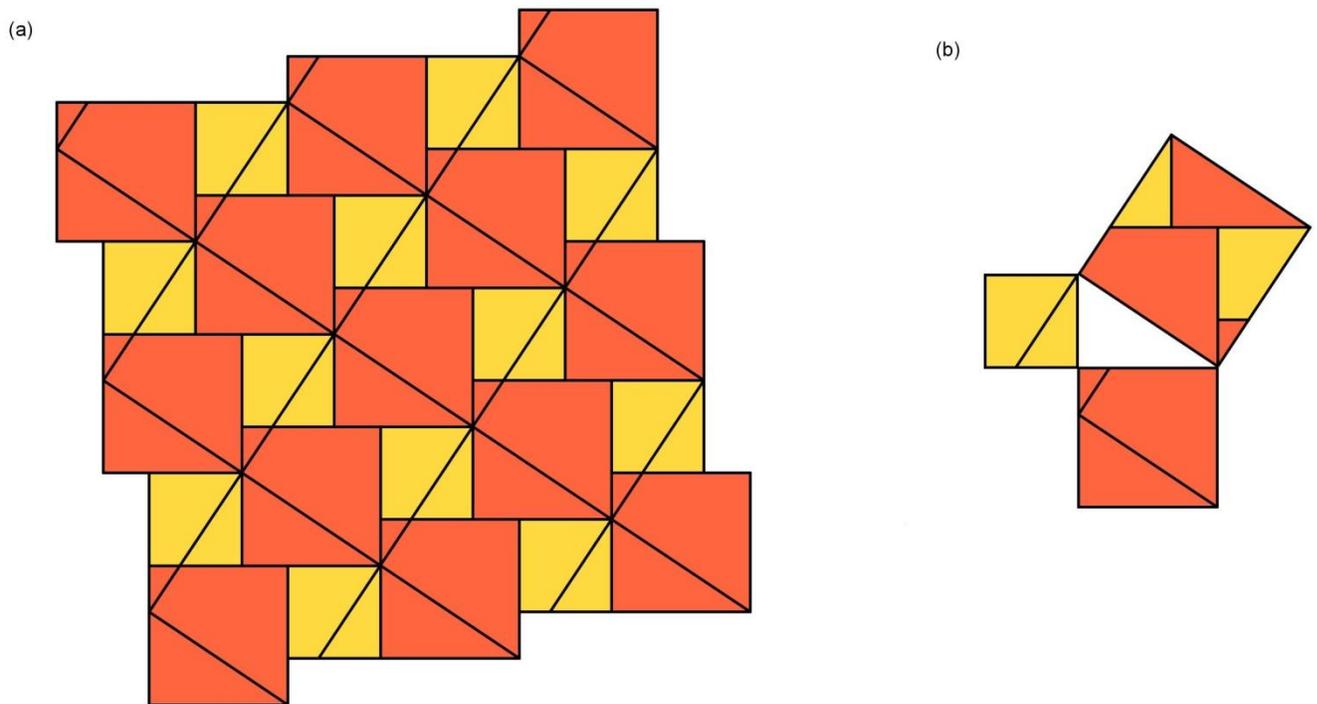


Fig. 2.5.2

Si trasladamos la rejilla sobrepuesta de cuadrados tal que los vértices de los cuadrados superpuestos coincidan con los centros de los cuadrados más grandes en el mosaico original, obtenemos una segunda disección de la prueba del teorema de Pitágoras. Esta prueba, en la Fig. 2.5.3, a menudo se le atribuye a Henri Perigal (1801 - 1899). Cualquier otra posición trasladada por la rejilla sobrepuesta produce otra prueba -de hecho, hay incontables y diferentes disecciones que prueban el Teorema de Pitágoras construido a partir del mosaico en la Fig. 2.5.1 (a).

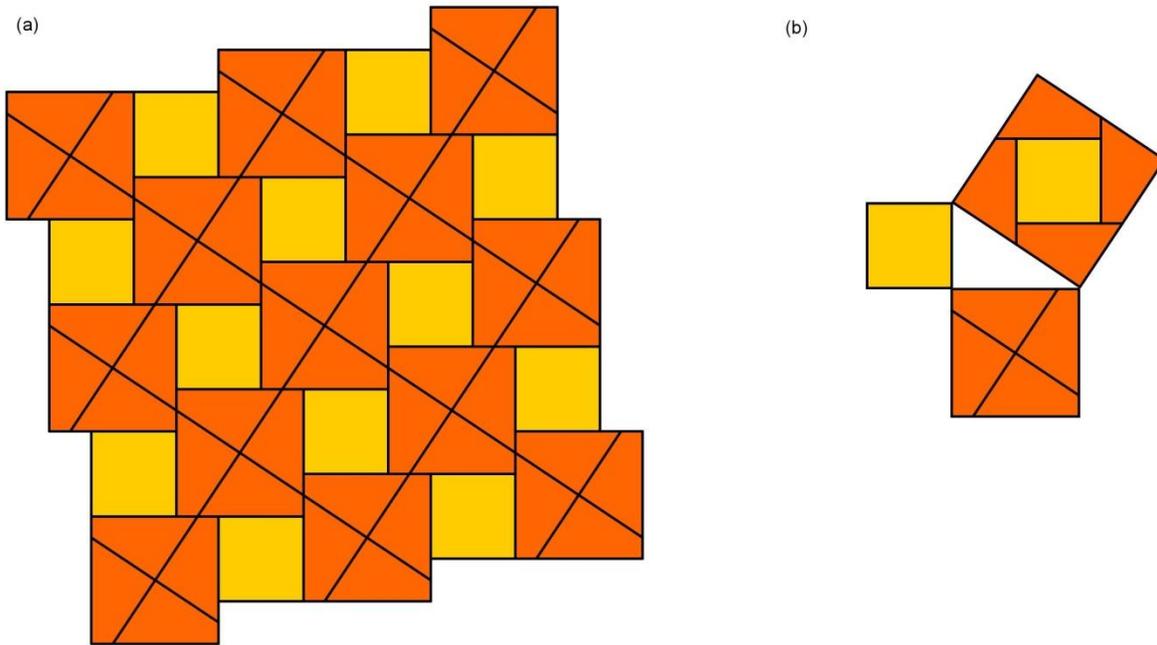


Fig. 2.5.3

El piso con azulejo en la Fig. 2.5.1 (b), con una superposición de azulejos cuadrados cuyos lados son diagonales a los rectángulos en el mosaico original, es la base de la conocida expresión. "¡He aquí!" la prueba del teorema de Pitágoras atribuida a Bhaskara (siglo 12 a.C.), como se ilustra en la Fig. 2.5.4

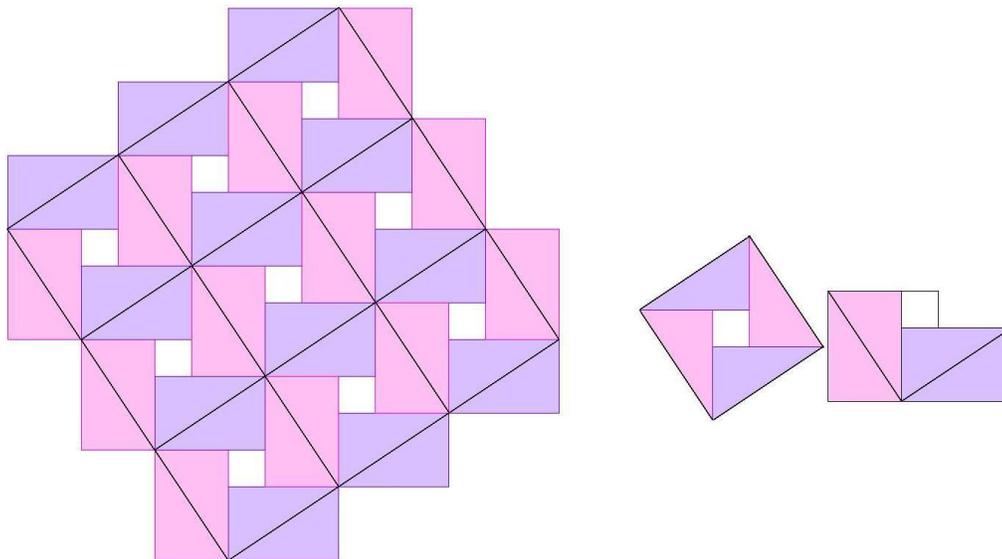


Fig. 2.5.4

Si el azulejo en el patrón general (viene de que son tres diferentes), ilustrado en la Fig. 2.5.1 (b), usando tres rectángulos diferentes de los cuales dos tienen

diagonales de longitud 1, y la superposición de una rejilla de rombos, obtenemos una prueba de la identidad trigonométrica "seno de la suma". Ver Fig. 2.5.5.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

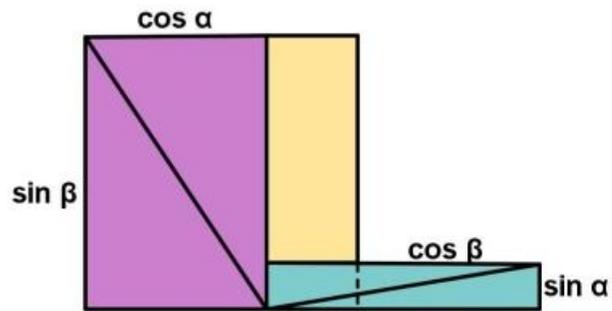
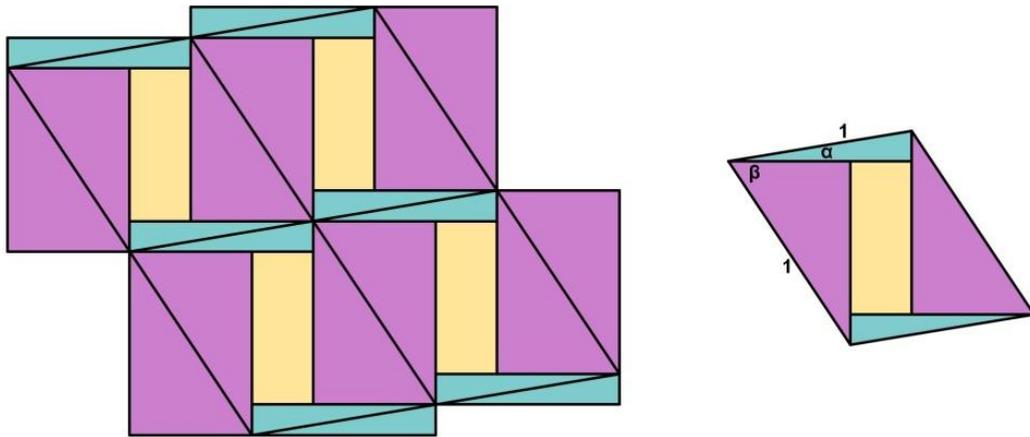
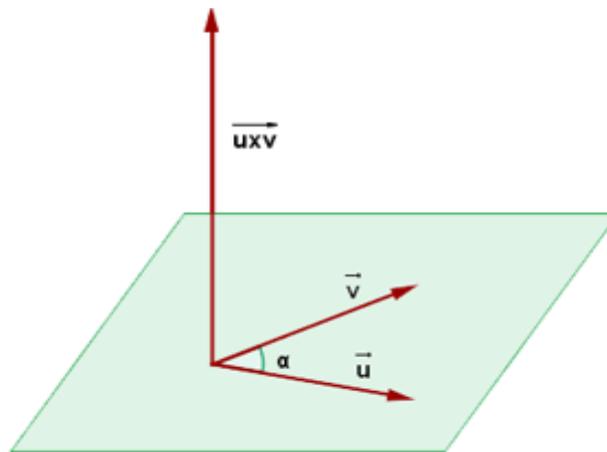


Fig. 2.5.5

Nota: Para poder determinar qué es $\sin \alpha + \beta$ en la figura anterior, nos apoyamos de la ley del producto cruz de dos vectores.



$$u \times v = u v \sin \alpha$$

Las barras indican la norma del vector. Y geoméricamente $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ representa el área del paralelogramo y por como está construido el paralelogramo \mathbf{u} y \mathbf{v} por hipótesis son iguales a 1.

2.6 De Pitágoras a la trigonometría.

Anteriormente vimos la elegante prueba de Chou Pei Suan Ching del teorema de Pitágoras, que empleaba cuatro copias de un triángulo rectángulo. Esa prueba se puede modificar fácilmente, usando múltiples copias de dos triángulos diferentes, para dar una prueba de la fórmula de adición para el seno. En esta prueba calculamos las áreas de las regiones sombreadas de dos formas diferentes Fig. 2.6.1.

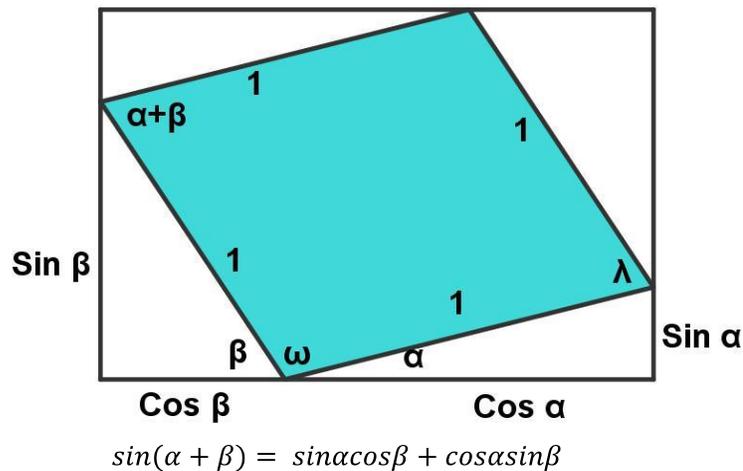


Fig. 2.6.1

Prueba:

A partir de nuestra figura inicial lo que haremos es trazar algunas perpendiculares como podemos ver en la Fig. 2.6.2 a la derecha

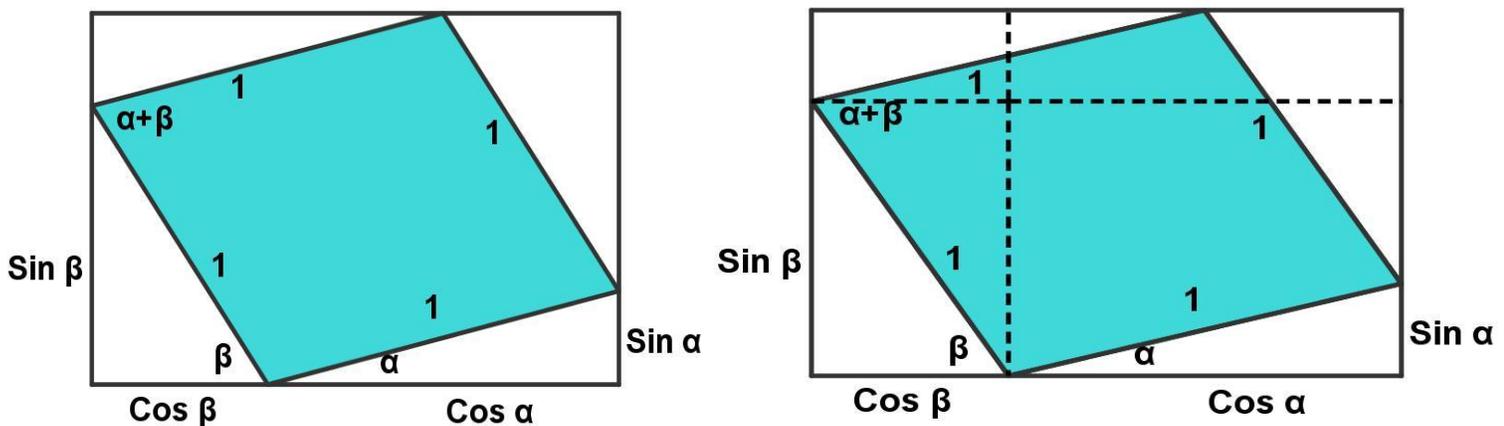


Fig. 2.6.2

En seguida lo que hacemos es cortar y pegar áreas trasladándolas como se muestra en la Fig. 2.6.3.

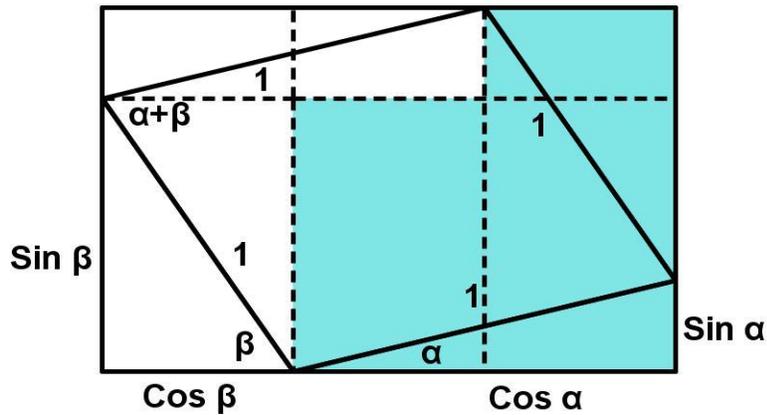


Fig. 2.6.3

Y por último trasladamos el área superior derecha hacia el lado superior izquierdo como podemos ver en la Fig. 2.6.4, para así obtener el resultado deseado.

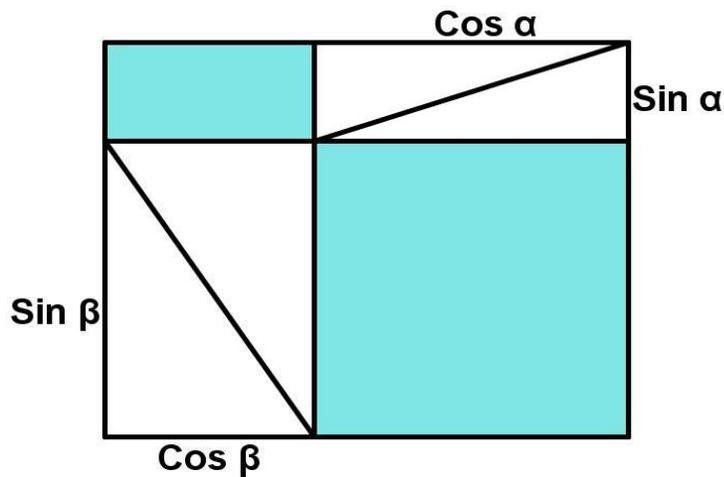


Fig. 2.6.4.

NOTA: Para poder ver que está correctamente colocado $\alpha + \beta$ usamos propiedades del paralelogramo

- 1.- Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.
- 2.- Todo paralelogramo tiene iguales sus ángulos opuestos.

Basándonos en la Fig. 2.6.5. α y β son dados, así que ahora supongamos que entre α y β está un ángulo ω y el ángulo adyacente a ω es λ , así que: $\alpha + \beta + \omega = 180^\circ$

Lo que nosotros queremos determinar es que: $\lambda = \alpha + \beta$

Entonces, $2\omega + 2\lambda = 360^\circ$

$$\omega + \lambda = 180^\circ$$

Sustituyendo en $\alpha + \beta + \omega = 180^\circ$ tenemos:

$$\alpha + \beta + \omega = \omega + \lambda \text{ es decir } \alpha + \beta = \lambda$$

Y para determinar quién es $\sin \alpha + \beta$ nos apoyamos nuevamente del producto cruz de vectores.

2.7. Las áreas del Arbelos y del Salinón.

En esta sección consideraremos dos resultados que se le atribuyen a Arquímedes (ca. 287 a. C. – ca. 212 a. C.) quien es considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad. La mayor parte de los trabajos arquimedianos incluyen una matemática decididamente avanzada y creativa para su época, pero el gran matemático de Siracusa no dejó de proponer también problemas elementales. En su *Libro de los Lemas*, por ejemplo, en la proposición 4 nos encontramos con un estudio de la figura llamada arbelos o “cuchillo de zapatero”. El libro de los lemas contiene también un teorema (la proposición 14) acerca de lo que llama Arquímedes el salinón o “bodega para sal”. Ahora veamos más a detalle cada uno de estos teoremas, comencemos con el área de Arbelos.

El arbelos es la figura que se obtiene quitando a un semicírculo de diámetro PR los semicírculos de diámetros PQ y QR, siendo Q un punto entre P y R; o también se dice que es el triángulo curvilíneo formado por tres semicircunferencias mutuamente tangentes, cuyos centros están alineados sobre la misma recta. Para construirlo consideremos un segmento PR y un punto Q en éste, se traza en un mismo semiplano los semicírculos de diámetros PR, PQ y QR, como se muestra en la Fig. 2.7.1.

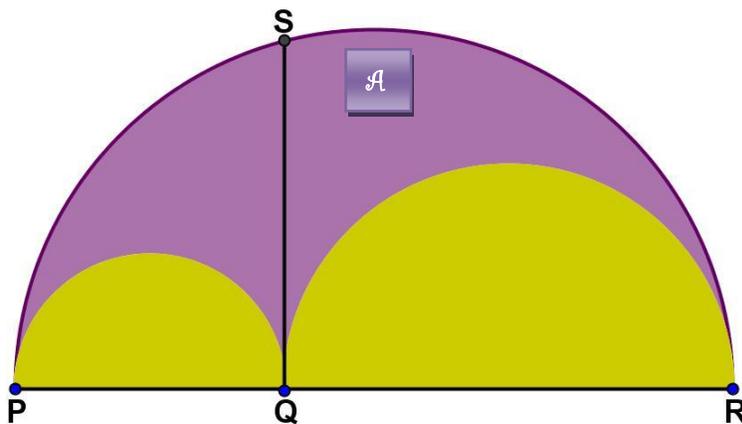


Fig. 2.7.1

TEOREMA: Sean P, Q y R tres puntos sobre una recta, con Q entre P y R. Se dibujan semicírculos en el mismo lado de la recta con diámetro PQ, QR, y PR. Dibujamos la perpendicular a PR que pase por Q, que encuentra al semicírculo más grande en S. Entonces el área \mathcal{A} del Arbelos es igual al área \mathcal{C} del círculo con diámetro QS. (Ver Fig. 2.7.2)

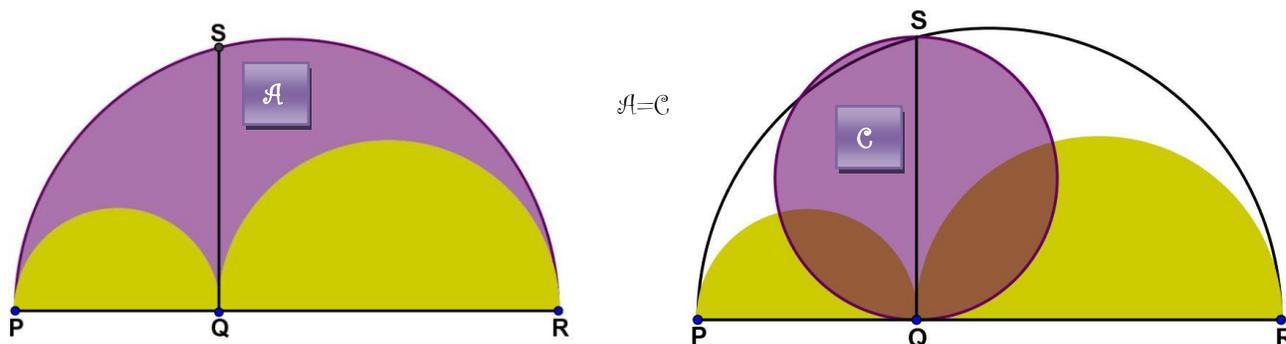


Fig. 2.7.2

Comencemos recordando el teorema de Pitágoras que nos dice:

“En todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa”.

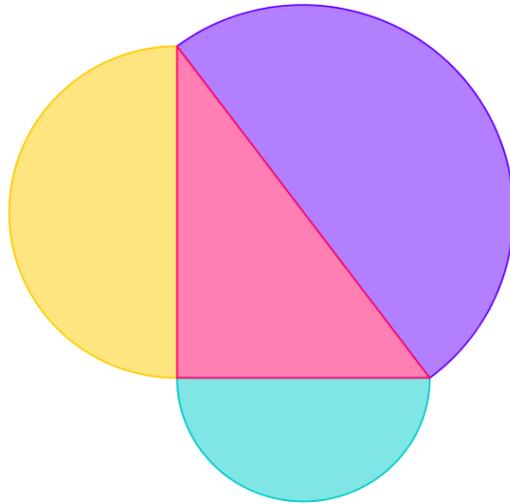
Pero este teorema no sólo se cumple para los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo sino para cualquier polígono regular construido sobre dichos catetos y su hipotenusa,

Recordemos que:

- 1) Un polígono regular de n lados siempre se puede descomponer en n **triángulos isósceles**.
- 2) **Cada triángulo isósceles se divide con la altura en dos triángulos rectángulos.**

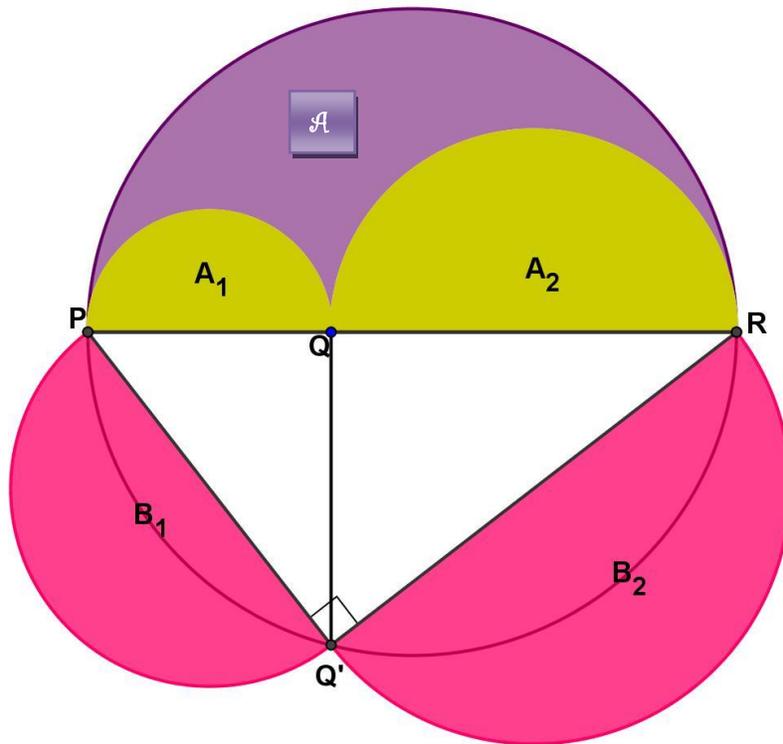
Así que para este problema nosotros ocuparemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi}{2} \frac{a}{2}^2 + \frac{\pi}{2} \frac{b}{2}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{c}{2}^2$$



Prueba:

Dada la perpendicular QS la prolongamos hacia el lado inferior del arbelos obteniendo un punto de intersección con la circunferencia Q', para después generar un triángulo rectángulo como se muestra en la Fig. 2.7.3



$$A + A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$

Fig. 2.7.3

Nuevamente por el teorema de Pitágoras, ver Fig. 2.7.4

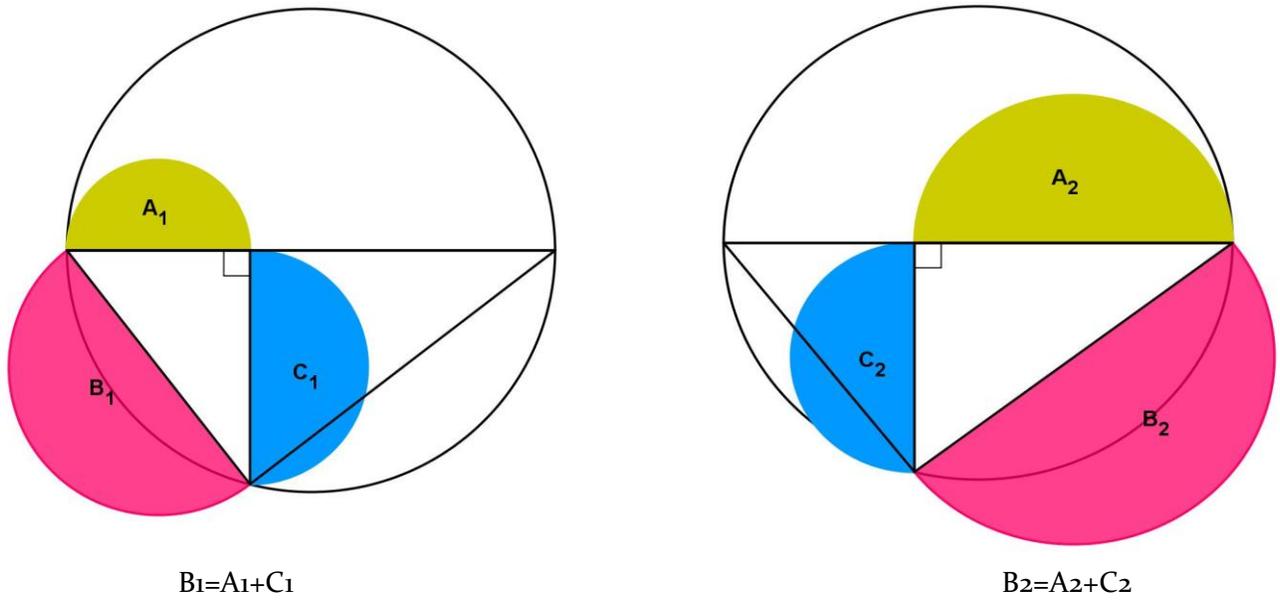


Fig. 2.7.4

Y con un poco de álgebra obtenemos. (Fig. 2.7.5)

$$\mathcal{A} + A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$

$$\mathcal{A} + A_1 + A_2 = A_1 + C_1 + A_2 + C_2$$

$$\mathcal{A} = C_1 + C_2 = \mathcal{C}$$

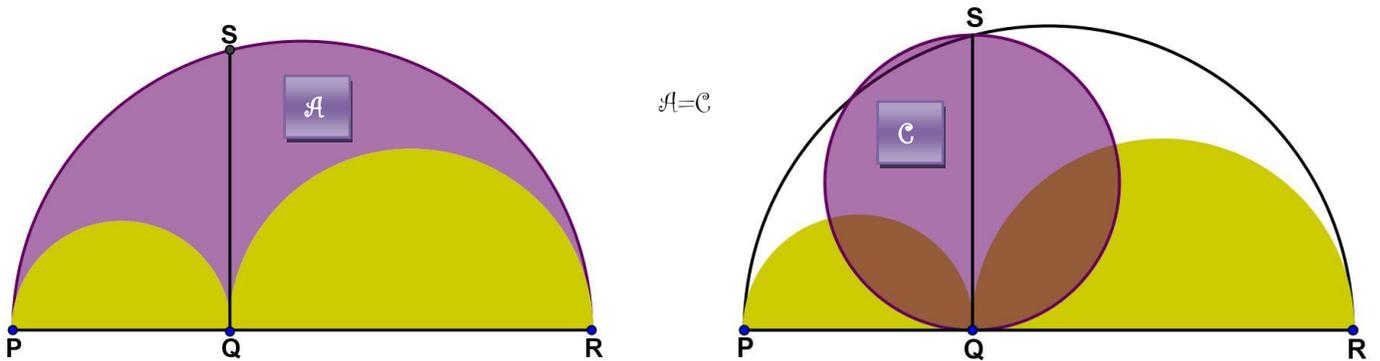


Fig. 2.7.5

Ahora veamos el Salinón, **¿Cómo se construye?**

Sean P, Q, R, S , cuatro puntos sobre una recta (en ese orden) tal que $PQ=RS$. Son dibujados semicírculos sobre la recta con diámetros PQ, RS y PS , otro semicírculo es dibujado debajo de la recta con diámetro QR . Un Salinón es la figura acotada por esos cuatro semicírculos. Sean M y N las intersecciones del eje de simetría del Salinón con sus fronteras. Entonces el área del Salinón \mathcal{A} es igual al área del círculo \mathcal{C} con diámetro MN Fig. 2.7.6.

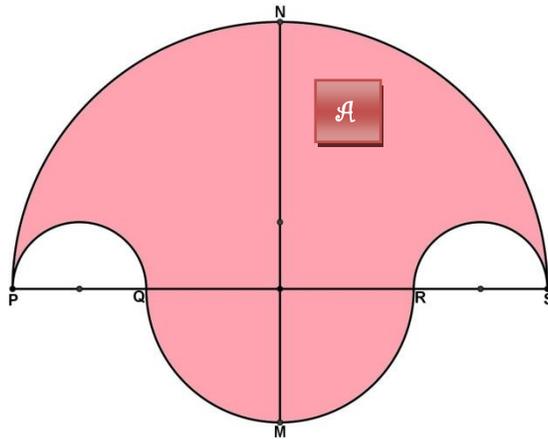


Fig. 2.7.6

Teorema: Sean M y N las intersecciones del eje de simetría del Salinón con sus fronteras. Entonces el área del Salinón \mathcal{A} es igual al área del círculo \mathcal{C} con diámetro MN Fig. 2.7.7.

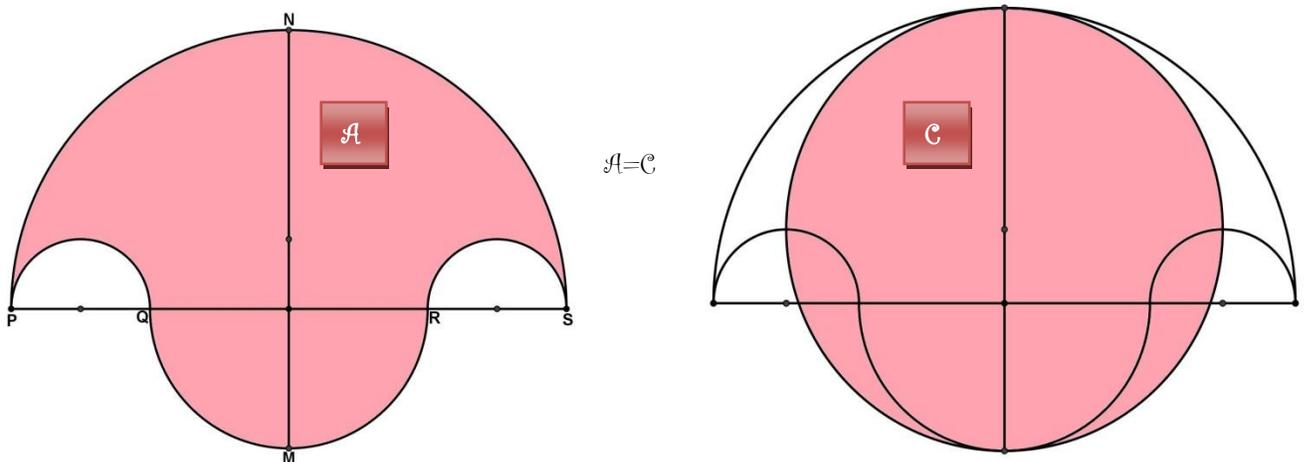


Fig. 2.7.7

Prueba:

Primero partimos que en general el área de un semicírculo de radio r es $\frac{\pi}{2}r^2$, y el área de un triángulo inscrito en un semicírculo de radio r y cuya base es el diámetro de dicho semicírculo es $2\frac{r^2}{2} = r^2$, por lo tanto obtenemos la Fig. 2.7.8:

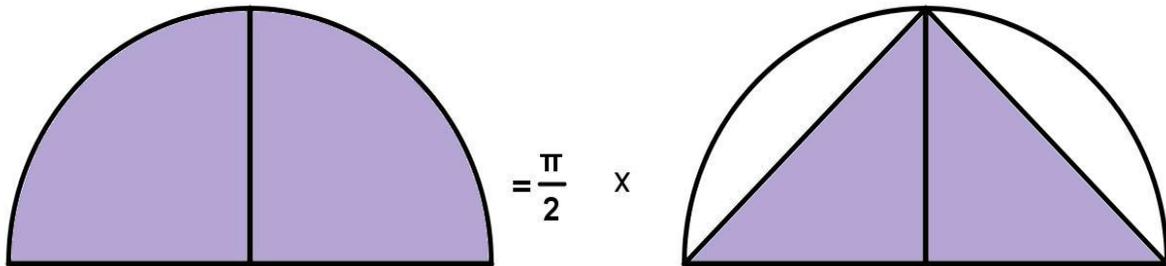
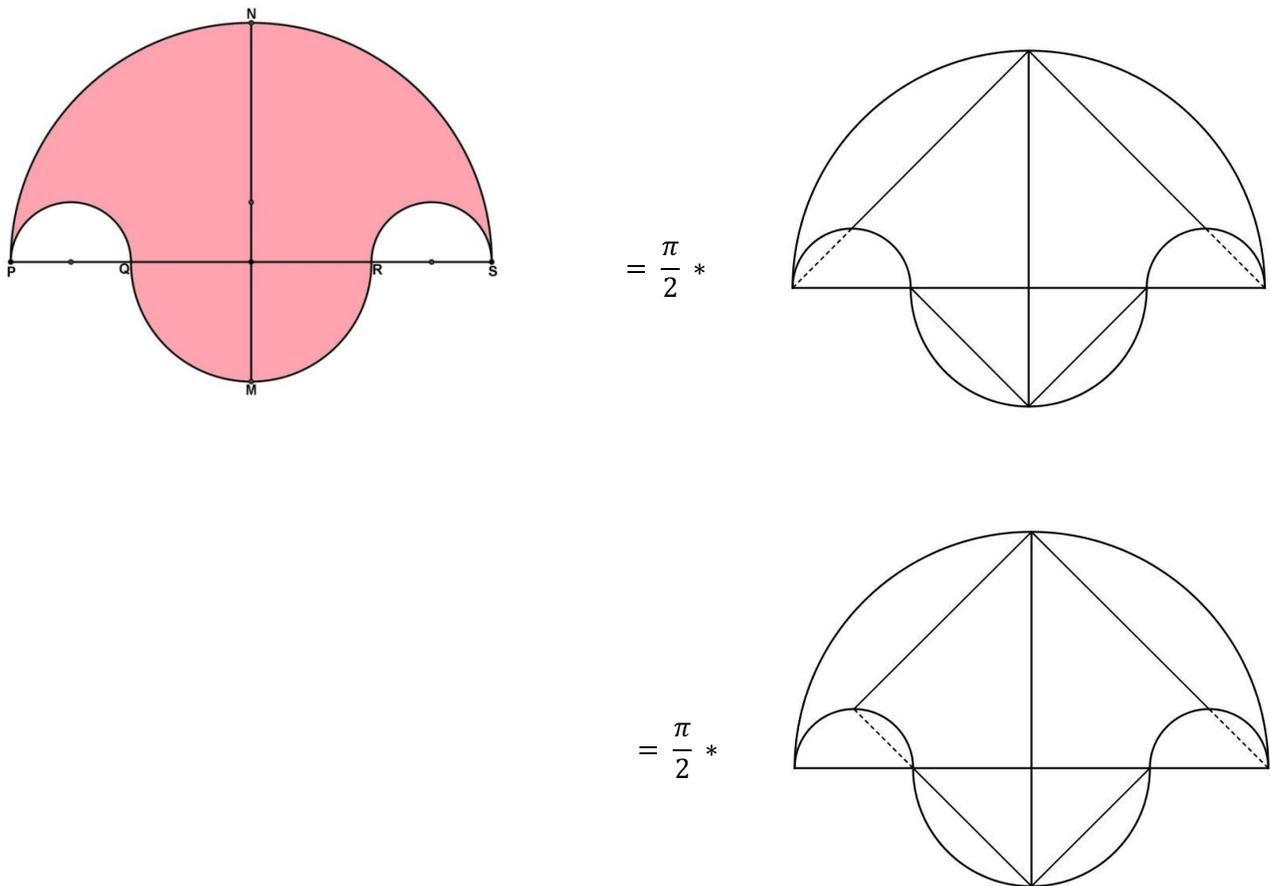


Fig. 2.7.8

Ahora partiendo de nuestra hipótesis tenemos (Ver secuencia de figuras Fig.2.7.9):



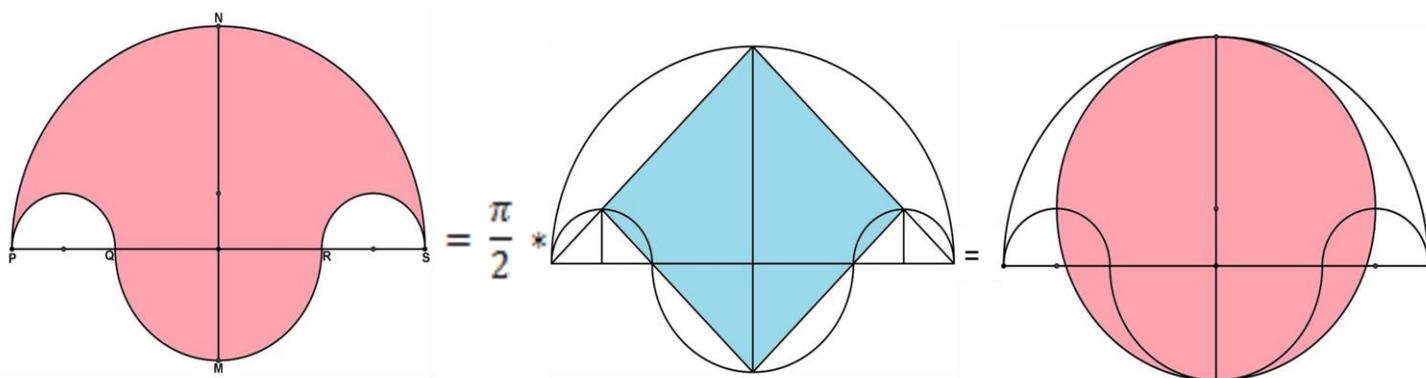
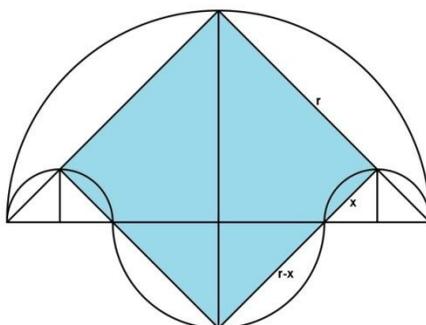


Fig. 2.7.9

NOTA: Para determinar que en verdad la figura en azul es un cuadrado hacemos un poquito de álgebra.

El Teorema de Pitágoras nos dice que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Ahora bien la hipotenusa mayor de longitud r es igual a:

$$H_g = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2} r$$

La hipotenusa pequeña de longitud x es igual a:

$$H_p = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2} x$$

Y la hipotenusa mediana de longitud $r-x$ es igual a:

$$H_m = \sqrt{(r-x)^2 + (r-x)^2} = \sqrt{2(r-x)^2} = \sqrt{2} (r-x) = \sqrt{2} r - \sqrt{2} x$$

$$\rightarrow H_g - H_p = \sqrt{2} r - \sqrt{2} x$$

$$= H_m$$

2.8 Un teorema de Tales

Uno de los muchos teoremas geométricos atribuidos a Tales de Mileto (640 - 546 a.C.) – Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales – es clave en estudio de las figuras semejantes y las bases para definir las funciones trigonométricas. Vamos a utilizar isometría para probar este teorema de triángulos rectángulos.

En la Fig. 2.8.1 (a) hemos superpuesto el más pequeño de un par de triángulos semejantes en el más grande, y queremos demostrar que $a / a' = b / b'$. Primero rotaremos el triángulo más pequeño 180° sobre el vértice O , a continuación, dibuje un rectángulo alrededor de los dos triángulos, según lo indicado por las líneas discontinuas en la Fig. 2.8.1 (b). Los triángulos por encima y por debajo de la diagonal del rectángulo son congruentes y por lo tanto tienen la misma área, del que se desprende que los dos rectángulos grises tienen la misma área, es decir, $a'b = ab'$. Por lo tanto $a / a' = b / b'$. Nota: si c y c' denotan las hipotenusas de los triángulos, $c / c' = a / a' = b / b'$ sigue por el álgebra simple.

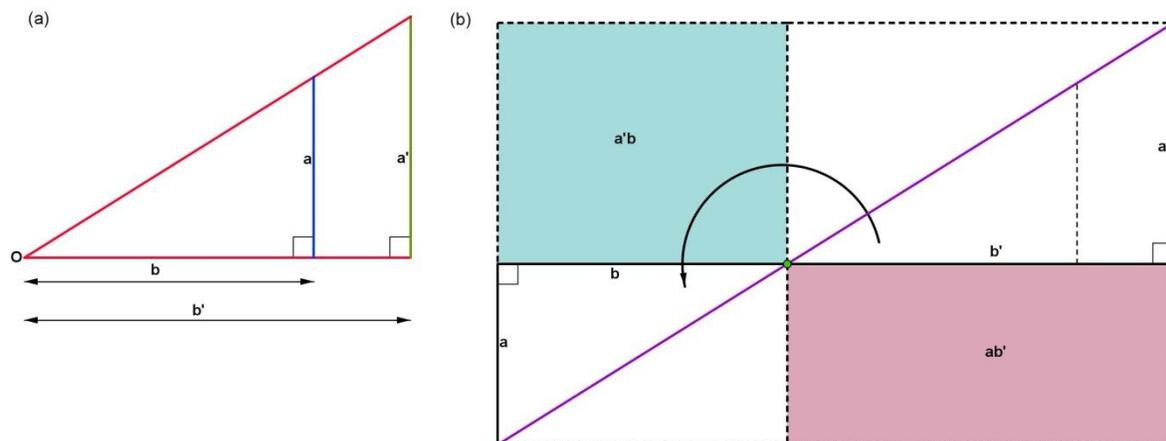


Fig. 2.8.1

2.9 El teorema de Viviani

El siguiente teorema, atribuido a Vincenzo Viviani (1622- 1703), da una notable propiedad de los triángulos equiláteros.

Teorema: Las perpendiculares a los lados de un punto P sobre la frontera o dentro de un triángulo equilátero suma la altura del triángulo.

Prueba:

La siguiente prueba usa sólo rotación para establecer el teorema (Fig. 2.9.1).

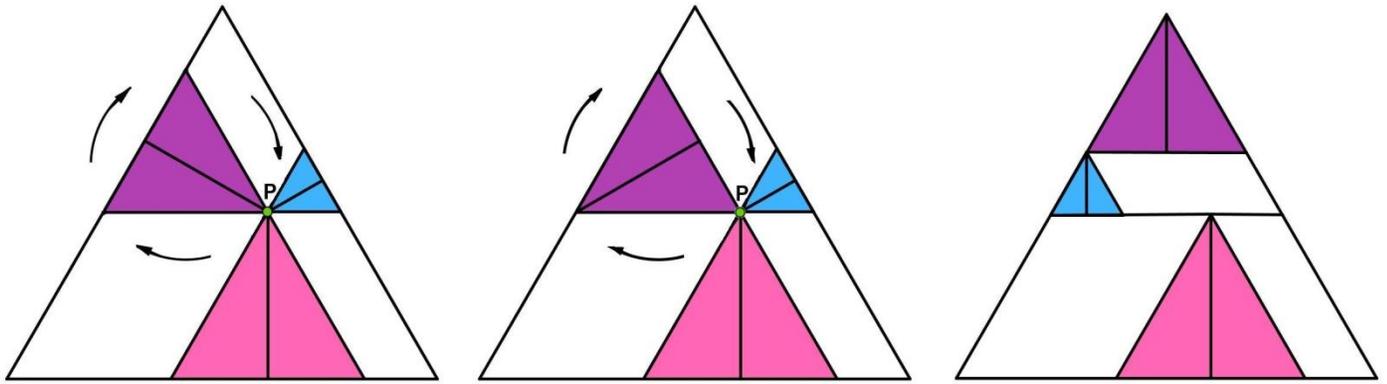


Fig. 2.9.1

Si el punto se encuentra en la frontera entonces la Fig. 2.9.2 nos da una prueba visual del Teorema.

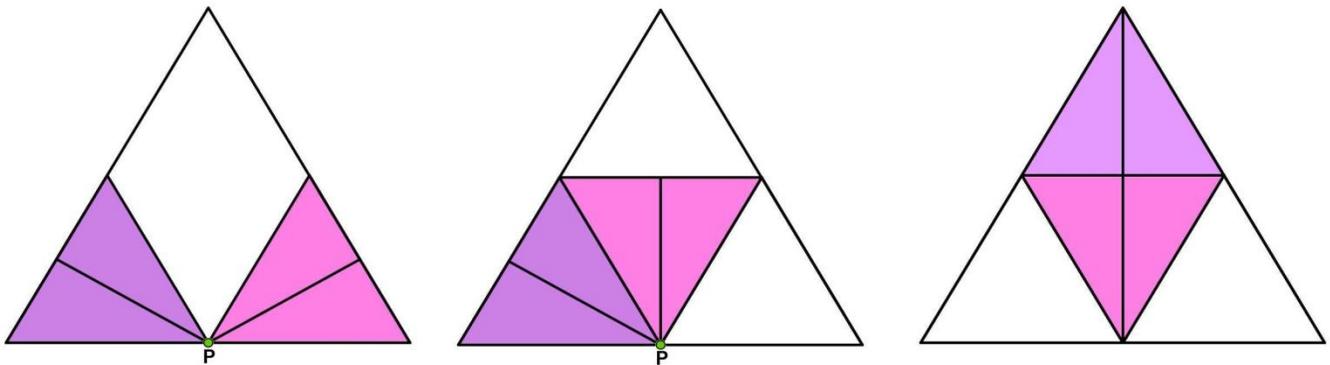


Fig. 2.9.2

2.10 Teorema de Tolomeo

El siguiente teorema -y prueba, utiliza solamente triángulos semejantes- se debe a Tolomeo de Alejandría (circa 150 d.C.).

Teorema: En un cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos.

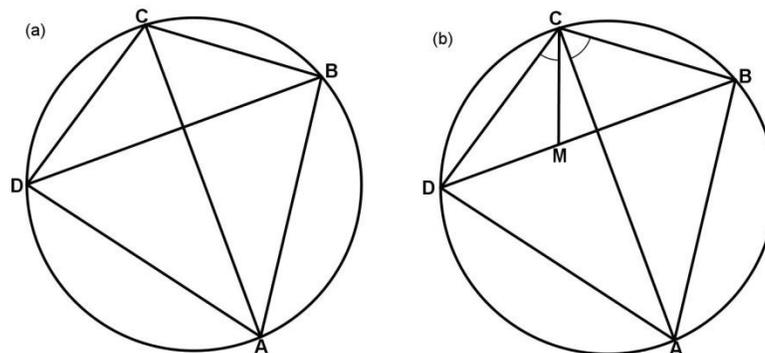


Fig. 2.10.1

Prueba:

La Fig. 2.10.1 (a) ilustra en general un cuadrilátero inscrito en un círculo, y en la Fig. 2.10.1 (b) dibujamos el segmento de recta CM para que $\angle DCM$ sea igual a $\angle ACB$. Los ángulos $\angle CDB$ y $\angle CAB$ subtienen al mismo arco CB , por lo tanto, son iguales, y por lo tanto los triángulos $\triangle DCM$ y $\triangle ACB$ son similares (véase la Fig. 2.10.2 (a)). Por consiguiente $CD/MD = AC/AB$, así que $AB \cdot CD = AC \cdot MD$

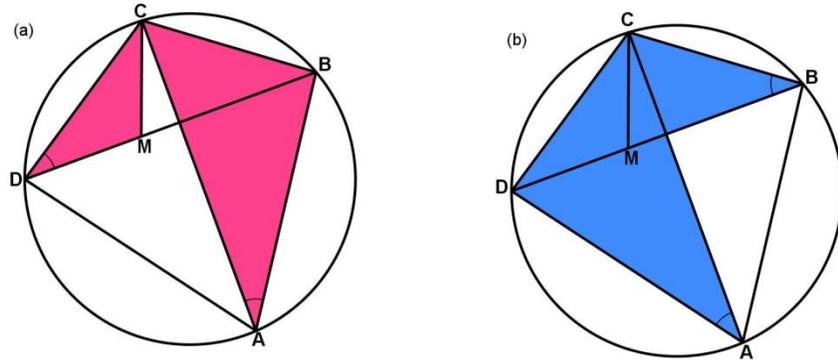


Fig. 2.10.2

Del mismo modo, los ángulos $\angle DAC$ y $\angle DBC$ subtienen el mismo arco de DC , por lo tanto son iguales, y por lo tanto los triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle CBM$ son similares (véase la figura 7.2 (b)). Por lo tanto $BC/BM = AC/AD$, así que $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Sumando tenemos $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(MD + BM) = AC \cdot BD$

2.11 Un teorema de Gaspard Monge

El geómetra francés Gaspard Monge (1746 - 1818) observó una curiosa propiedad sobre algunos triángulos asociadas con una recta de pendiente positiva en el primer cuadrante. Para ser precisos, sea AB un segmento de la recta, y M su punto medio. Construimos triángulos con vértice M como se muestra en la Fig. 2.11.1 (a), y denotamos sus áreas por S_x y S_y . También la construcción del $\triangle OAB$, como se muestra en la Fig. 2.11.1 (b), y sea S su área, entonces $S = |S_x - S_y|$.

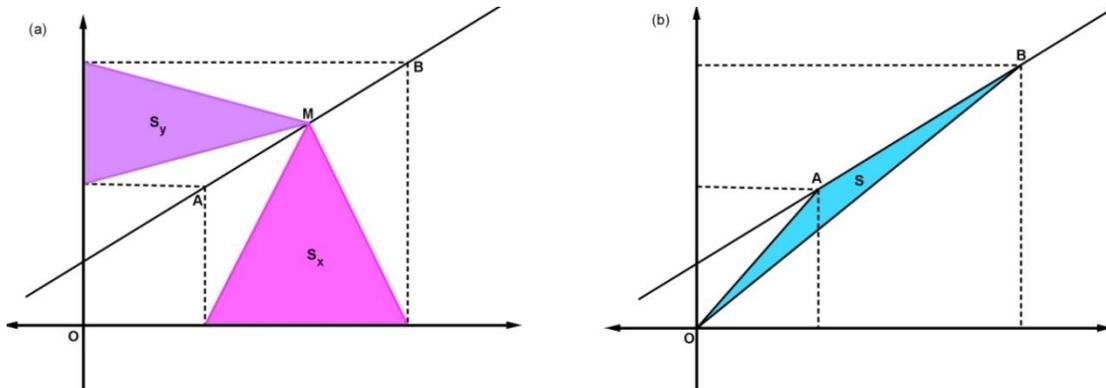


Fig. 2.11.1

NOTA: cuando la y -intersección de la recta es positiva, $|S_x - S_y| = S_x - S_y$, y cuando la x -intersección es positiva, $|S_x - S_y| = S_y - S_x$. Consideramos el primer caso, el segundo es similar.] La secuencia de transformaciones preservando áreas en la Fig. 2.11.2 demuestra el teorema. La diferencia sombreada para S_x y S_y indica que S_y se restará de S_x .

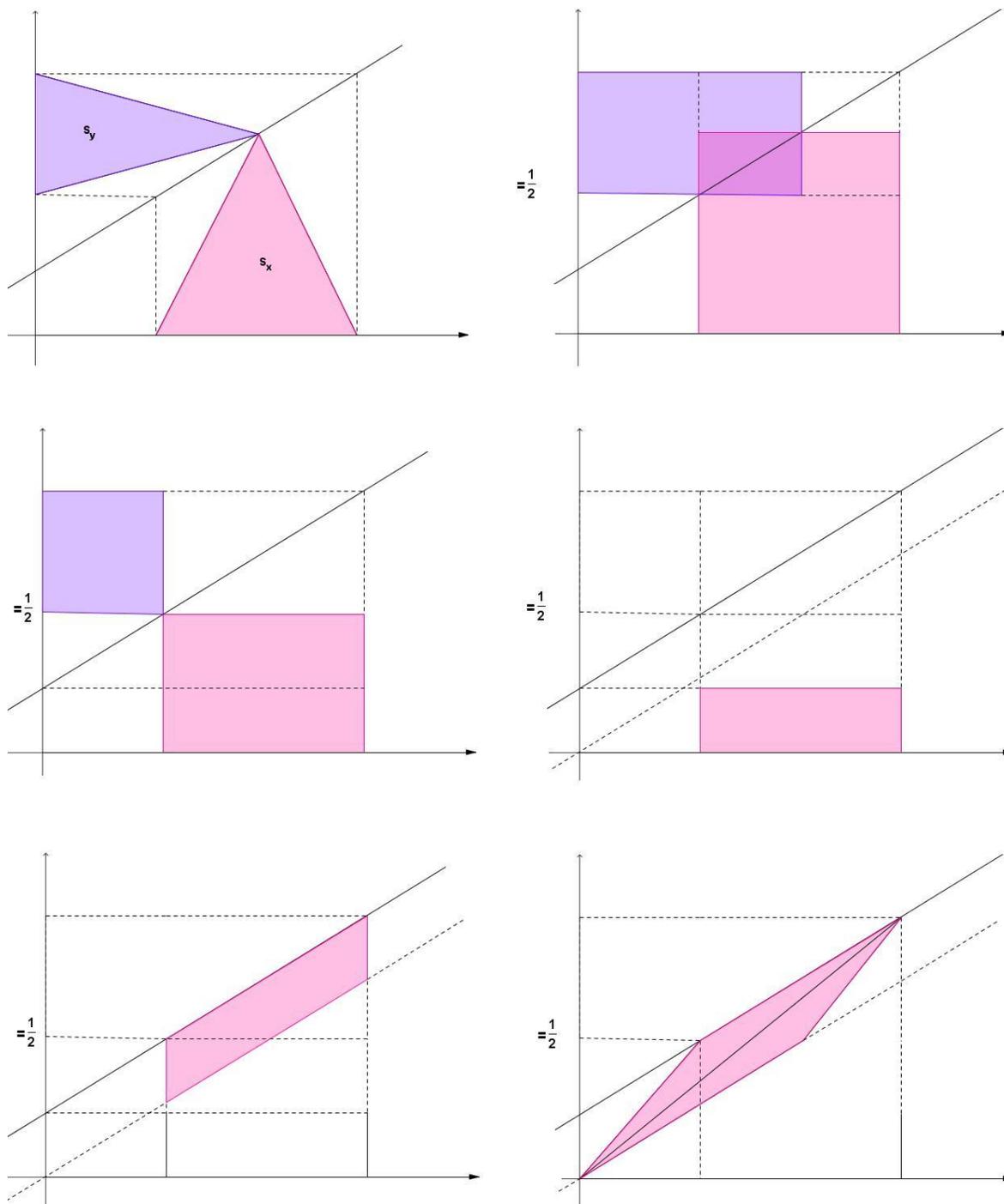


Fig. 2.11.2

2.12 El punto de Fermat de un triángulo.

El punto de Fermat de un triángulo agudo se define de la siguiente manera: Sea F el punto en el interior del ΔABC tal que $FA + FB + FC$ sea mínimo (véase la Fig. 2.12.1 (a)). Sorprendentemente, el punto de Fermat se puede encontrar de la siguiente manera: Construir triángulos equiláteros sobre los lados de ΔABC , como se ilustra en la Fig. 2.12.1 (b), y unir cada vértice del ΔABC al vértice exterior del triángulo equilátero opuesto. Estas tres líneas se cruzan en el punto de Fermat del ΔABC .

La siguiente prueba utiliza una rotación. En el ΔABC , seleccionamos cualquier punto P y conectamos P a los vértices A, B y C . Ahora rote el ΔAPB 60° a la izquierda para formar $\Delta C'P'B$, y dibujar las líneas $C'A$ y $P'P$ [véase la Fig. 2.12.1 (c)].

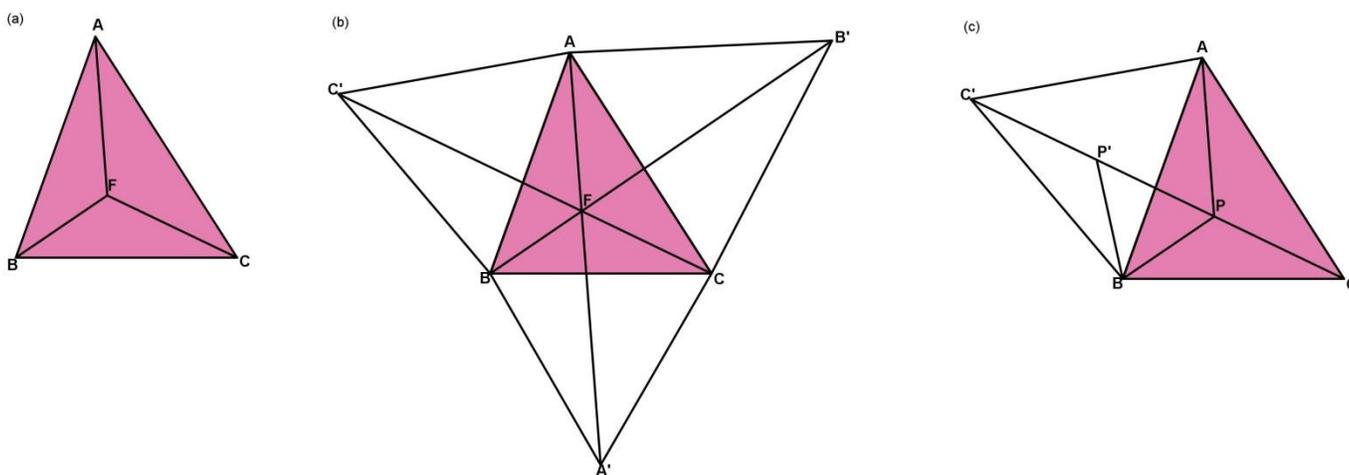


Fig. 2.12.1

Ahora $\Delta ABC'$ es equilátero, $PA = P'C'$, $PB = P'B$, y por lo tanto $\Delta BPP'$ es equilátero, así que $PB = P'P$. Por lo tanto

$$PA + PB + PC = C'P' + P'P + PC$$

Esta última suma será un mínimo cuando P y P' se encuentran sobre la recta CC' (note que, como la imagen de A bajo la rotación es C' , la posición de C' no depende de P). Por lo tanto, $PA + PB + PC$ es un mínimo si y sólo si P está en $C'C$, y para P , $\angle BPC' = 60^\circ$. Donde la elección de cada lado del triángulo para rotar fue arbitraria, P también debe estar en $B'B$ y $A'A$.

2.13 La razón dorada en el pentágono regular

La razón dorada $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \cong 1.618$ aparece en muchos contextos sorprendentes en geometría. Una ocurrencia tal es el siguiente: Sea x la longitud de una diagonal en un pentágono regular cuyos lados tienen longitud 1, como se ilustra en la Fig. 2.13.1 (a).

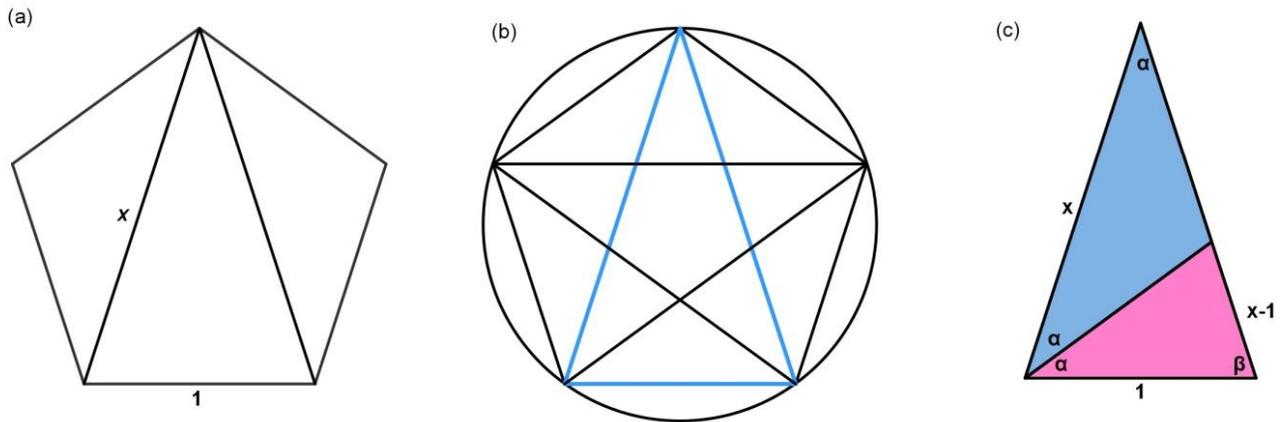


Fig. 2.13.1

Dos diagonales tales que de un vértice común forman un triángulo isósceles, que puede ser dividido por un segmento de otra diagonal en dos triángulos más pequeños, como se ilustra en la Fig. 2.13.1 (b) y (c). Los ángulos marcados por α en la Fig. 2.13.1 (c) son iguales ya que cada uno subtiende a un arco igual a $1/5$ de la circunferencia del círculo que circunscribe. Por lo tanto el triángulo azul es también isósceles, $\beta = 2\alpha$, y así $\alpha = 36^\circ$, ya que la suma de los ángulos produce el triángulo original $5\alpha = 180^\circ$. Ahora resulta que el ángulo sin marcar en el triángulo rosa es $\beta = 72^\circ$, y por lo tanto también es isósceles y semejante al triángulo original. Por lo tanto $x/1 = 1/(x-1)$ y, por lo que x es la raíz (positivo) de $x^2 - x - 1 = 0$, es decir, $x = (1 + \sqrt{5})/2$ como se afirma.

2.14 El área entre los lados y cevianas de un triángulo.

Una ceviana es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo con un punto en el lado opuesto (o su ampliación). En un triángulo equilátero, dibuja dos cevianas de los vértices de la base a los puntos $1/3$ del camino hacia el vértice superior, como se muestra en la Fig. 2.14.1. ¿Cuál es la relación entre las áreas del triángulo original y el triángulo sombreado delimitado por los cevianas y la base?

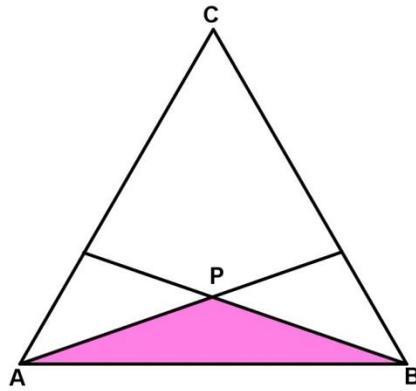


Fig. 2.14.1

Sea $[ABC]$ que denota el área del triángulo ΔABC . En la Fig. 2.14.2, utilizamos cinco copias del ΔABC , y observe que ΔAPQ es semejante al ΔADE , y que $[APQ] = (1/25)[ADE]$. Por otra parte, $[ADE] = (5/2)[ABC]$. Por lo tanto

$$[APQ] = (1/25)[ADE] = (1/25)(5/2)[ABC] = (1/10)[ABC],$$

y por lo tanto $[APB] = (1/5)[ABC]$.

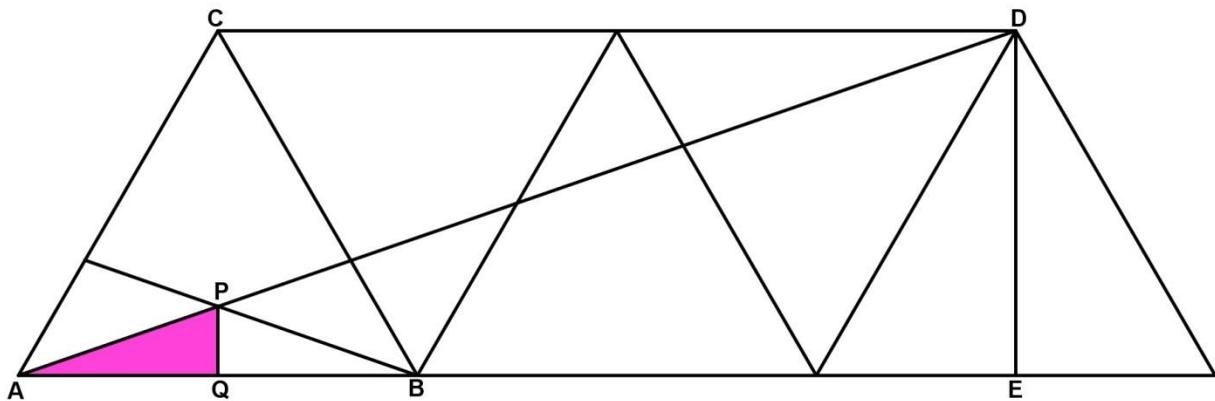


Fig. 2.14.2

Capítulo 3. Desigualdades

En este capítulo veremos la media aritmética y la geométrica, desigualdades, algunas funciones trigonométricas, etc.

Media aritmética y media geométrica

La media aritmética (también llamada promedio o simplemente media) de un conjunto finito de números es igual a la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

La media geométrica de una cantidad arbitraria de números (digamos n números) es la raíz n -ésima del producto de todos los números.

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

3.1 Desigualdades entre la media aritmética y la media geométrica.

La forma más conocida y más común del "promedio" de dos números a y b es la media aritmética $(a + b) / 2$ que siempre se encuentra entre a y b . Pero hay otras medias. La media geométrica de dos números positivos a y b es \sqrt{ab} , que de nuevo se encuentra entre a y b . Por ejemplo, la ley de Weber-Fechner en la psicología de la percepción que varía como el logaritmo de los estímulos. Por lo tanto, es la media geométrica de dos estímulos que se percibe como la media aritmética de sus respectivas percepciones.

¿Cómo comparar a la media aritmética y media geométrica? En la Fig. 3.1.1 se muestra que para $0 < a < b$, tenemos $a < \sqrt{ab} < (a + b) / 2 < b$. Note que (i) un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo, (ii) la altura h a la hipotenusa divide al triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos más pequeños semejantes a la original, y (iii) la relación de los correspondientes lados de los triángulos semejantes son iguales, por lo tanto $a / h = h / b$, o $h = \sqrt{ab}$.

Nótese que la perpendicular más larga de un semicírculo a su diámetro es el radio (véase la Fig. 3.1.1 (b)) establece la desigualdad.

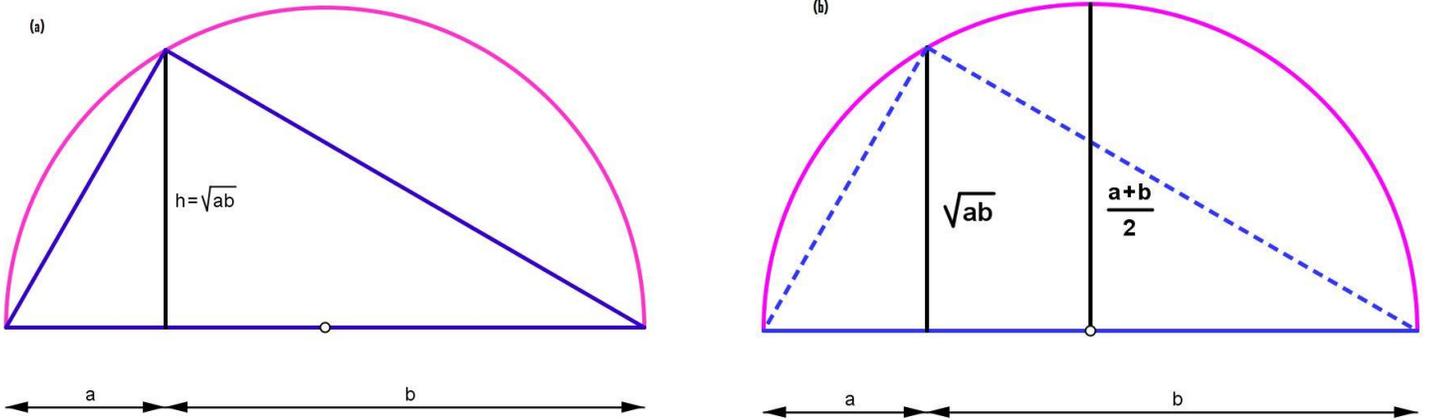
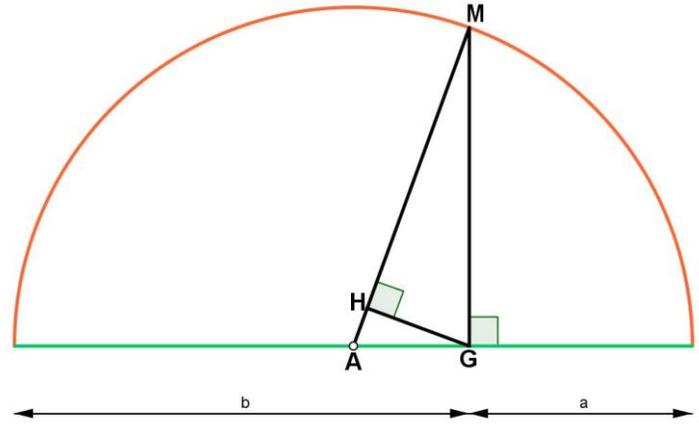


Fig. 3.1.1

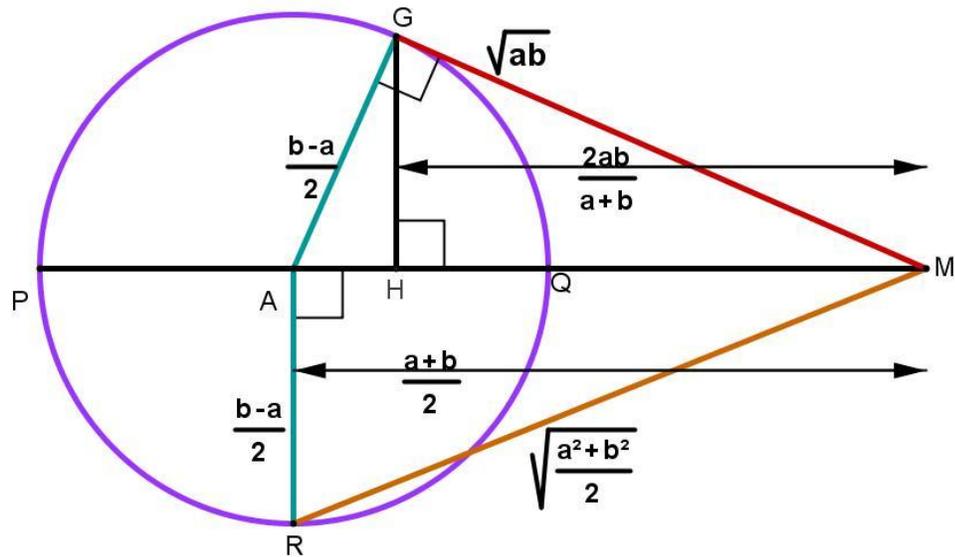
Otra "mediana" de interés es la media armónica: para los números positivos a y b es dada por $2ab/(a + b)$ y de nuevo se encuentra entre a y b . Por ejemplo, si uno conduce D km a una velocidad de a km /h, y regresa D km a una velocidad de b km /h, la velocidad media para el viaje redondo es $2ab/(a + b)$ km /h. La media armónica es más pequeño que la media geométrica y la media aritmética para $0 < a < b$, como se muestra en la Fig. 3.1.2, una demostración se debe a Pappus de Alejandría (alrededor de AD 320). Una vez más, la desigualdad resulta de la comparación de las longitudes de los lados de triángulos semejantes.



$$AM = \frac{a + b}{2}, \quad GM = \sqrt{ab}, \quad HM = \frac{2ab}{a + b}, \quad AM \geq GM \geq HM$$

Fig. 3.1.2

Finalmente consideramos la raíz cuadrada de la media, que para los números positivos a y b está dada por $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Por ejemplo dados dos cuadrados con lados de longitud a y b , el lado de un cuadrado cuya área es la media aritmética de a^2 y b^2 es la raíz cuadrada de la media de a y b . La raíz cuadrada de la media es mayor que las tres medias que se consideraron,



$$0 < a < b, \quad QM = a, \quad PM = b, \quad HM < GM < AM < RM$$

Fig. 3.1.3

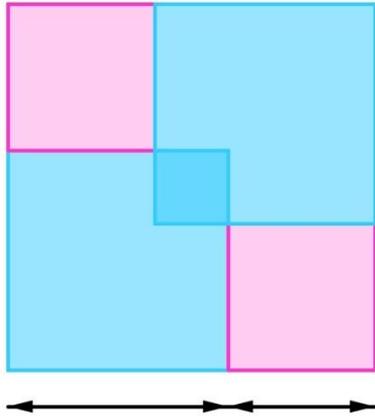
Así que tenemos

$$0 < a < b \text{ implica } a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{ab}{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b,$$

Como se muestra en la figura 3.1.3 y de las comparaciones de longitudes de los lados de triángulos semejantes y el teorema de Pitágoras.

3.2 la media aritmética de la suma de los cuadrados es mayor que el cuadrado de la media aritmética.

Dado un par de números positivos, ¿Cómo es la media de los cuadrados en comparación al cuadrado de las medias? La respuesta se revela en la Fig. 3.2.1 y un cálculo simple.

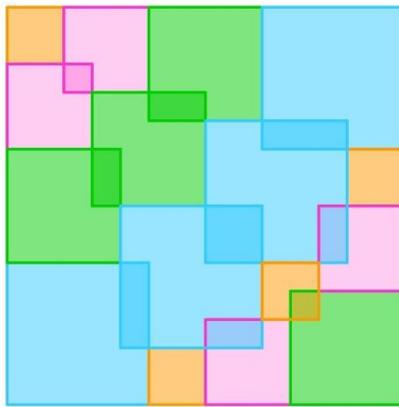


$$2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a + b}{2}^2$$

Fig. 3.2.1

De hecho, el resultado puede extenderse a cualquier número finito n de números positivos, como se muestra en la Fig. 3.2.2 a continuación para $n = 4$.



$$n a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n^2$$

$$\therefore \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}^2$$

Fig. 3.2.2

3.3 La desigualdad de tres números de la media aritmética y de la media geométrica.

Vamos a establecer la desigualdad de la media aritmética y de la media geométrica para tres números, es decir, $\sqrt[3]{xyz} \leq (x + y + z)/3$ para $x, y, z > 0$. Para ello, primero introduciremos un cambio de variables, $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$, y mostrar que $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$. Lo haremos en dos pasos, primero se probará un lema.

Lema: $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.

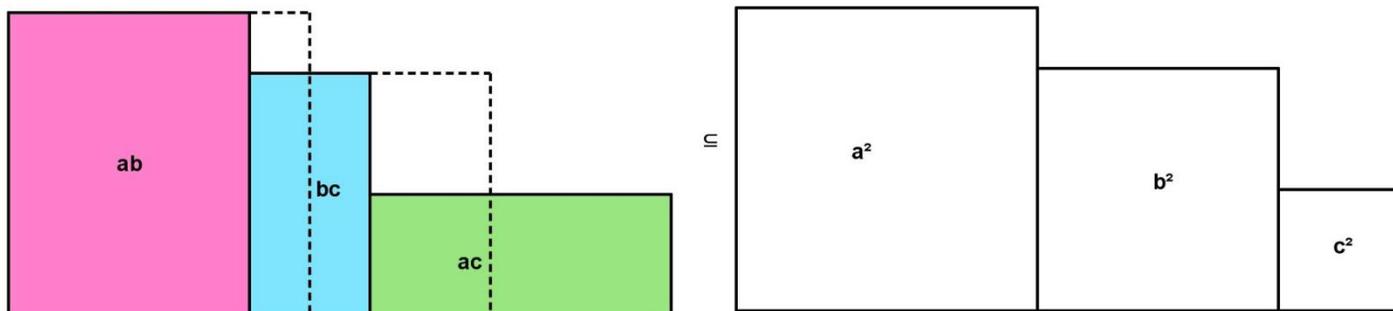


Fig. 3.3.1

La imagen de la Fig. 3.3.1 ilustra un caso típico de inclusión, ya que para $a > b > c$, los rectángulos con las áreas ab, bc y ac están contenidos en la unión de los cuadrados (áreas) a^2, b^2 y c^2 .

Teorema: Sean a, b, c números positivos entonces $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$.

Prueba:

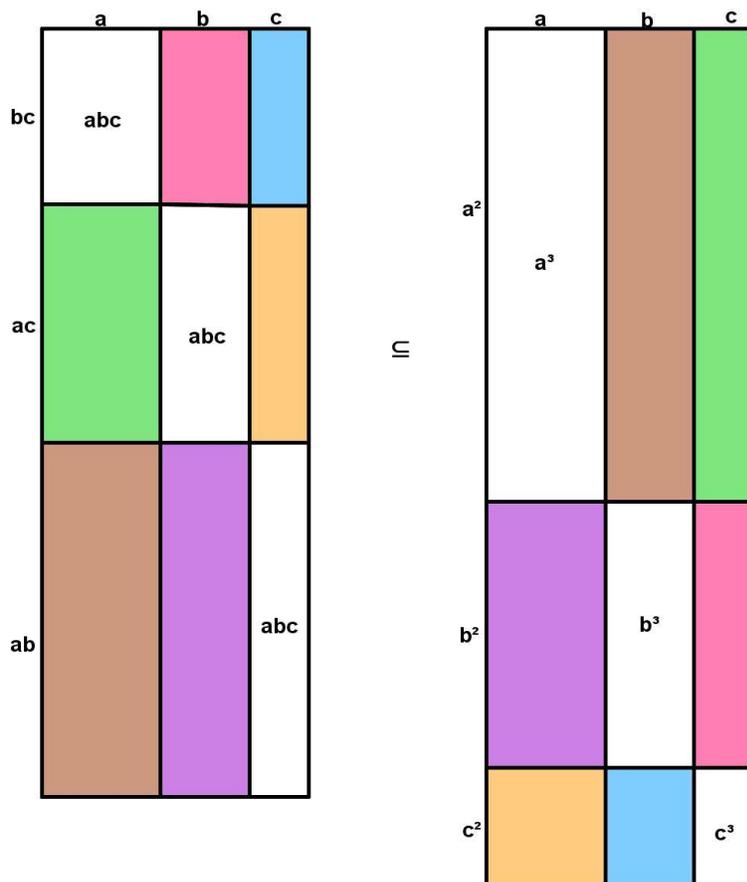


Fig. 3.3.2

Por el lema, el rectángulo de la izquierda Fig. 3.3.2 está contenido en el de la derecha (nótese que ambos tienen la misma base $a + b + c$). En el rectángulo de la izquierda Fig. 3.3.2 vemos tres rectángulos, cada uno con área abc más seis regiones rectangulares a color. A la derecha de la Fig. 3.3.2 vemos seis rectángulos a color con las mismas áreas que los de la izquierda a lo largo de los tres rectángulos sobre la diagonal con áreas a^3 , b^3 y c^3 . En esta imagen (en contraposición a la Fig. 3.3.1) a^2 , b^2 , c^2 , ab , bc , y ac representan longitudes en lugar de áreas.

La Fig. 3.3.3 muestra la misma desigualdad $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ pero en la forma

$$abc \leq \frac{1}{3}a^2 \cdot a + \frac{1}{3}b^2 \cdot b + \frac{1}{3}c^2 \cdot c.$$

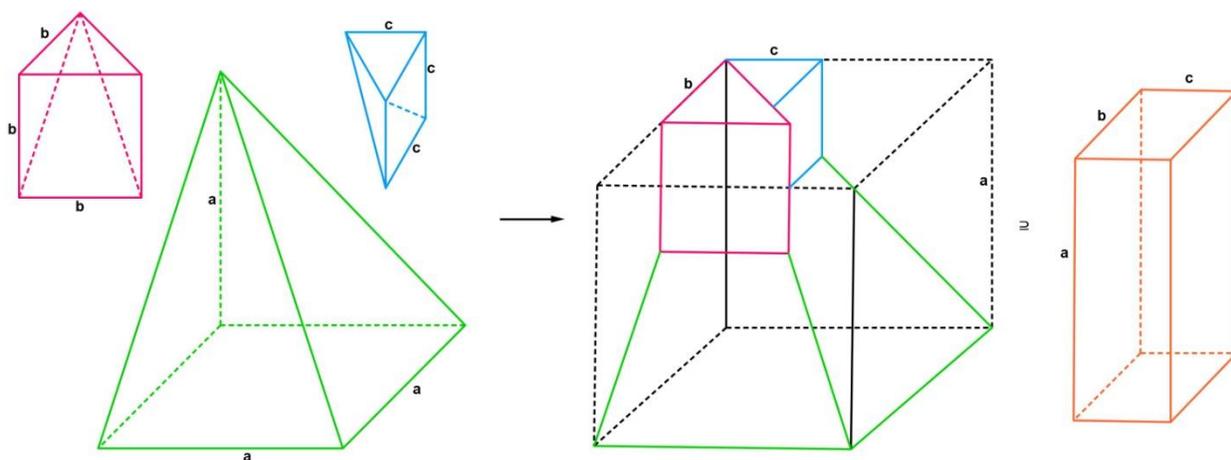


Fig. 3.3.3

Aquí abc representa el volumen de la caja con lados de longitud $a \geq b \geq c$. Pero esta caja está claramente contenida en la unión de las tres pirámides de la derecha cuyas bases son cuadrados (áreas) a^2 , b^2 , y c^2 , y con alturas a , b , y c , respectivamente.

3.4 La propiedad mediante.

En el numero de marzo de 1973 de "The mathematics teacher" apareció un artículo de Laurence Sherzer, un maestro de octavo grado, que inmortalizó a uno de sus estudiantes, Robert McKay. La historia es la siguiente: el grupo estaba estudiando la densidad de \mathbb{Q} , y Sherzer explicaba cómo encontrar un número racional mediante la búsqueda del promedio. McKay hizo notar que no era necesario trabajar tanto para resolver el problema. Para encontrar un número (no necesariamente su promedio), afirmó que bastaba con "sumar los numeradores

y sumar los denominadores". Para gran sorpresa de Sherzer, este método realmente funcionaba. En el artículo, Sherzer proporciono la prueba de este método.

Si a, b, c, d son números positivos tales que $a/b < c/d$, entonces la fracción $(a + c)/(b + d)$, formada por la adición de numeradores y denominadores es llamado la mediana de a/b y c/d , y siempre se encuentra entre a/b y c/d , es decir,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ implica } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Representando a, b, c, d como segmentos de recta e interpretando las fracciones como las pendientes de los segmentos de recta conduce a la siguiente demostración (Ver Fig. 3.4.1).

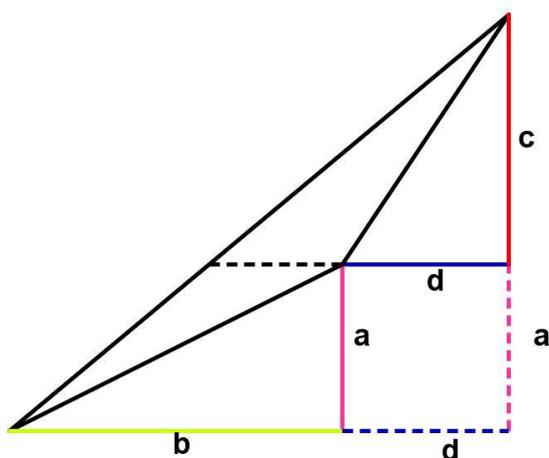


Fig. 3.4.1

3.5 Una desigualdad pitagórica

En esta sección presentaremos una prueba visual de una doble desigualdad: Para todo $a, b > 0$,

$$\sqrt{a^2 + b^2} < a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

En la Fig. 3.5.1 (a) representamos a y b como los catetos de un triángulo rectángulo con hipotenusa $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por la desigualdad del triángulo (Dado cualquier triángulo la suma de cualesquiera dos de sus longitudes es mayor que la tercera), $c < a + b$ que prueba la primera desigualdad. Para la segunda, note que el lado de longitud $a + b$ del cuadrado es menor o igual a la longitud

de la diagonal $c\sqrt{2}$ del cuadrado con lado c . La Fig. 3.5.1 (b) muestra que si $a = b$, entonces $a + b = c\sqrt{2}$

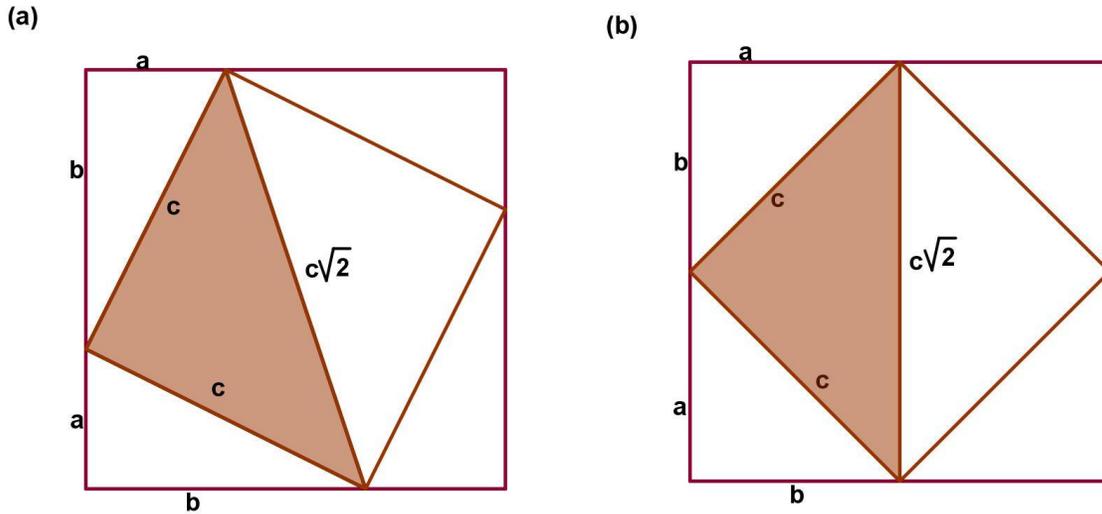
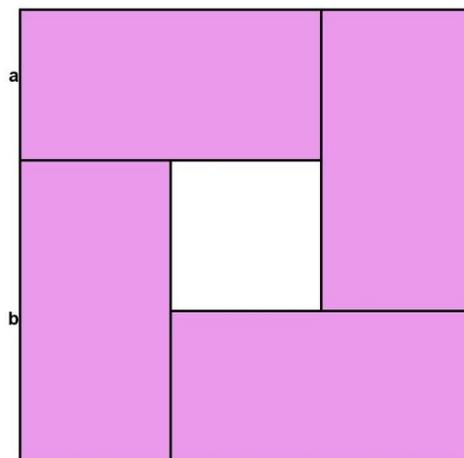


Fig. 3.5.1

3.6 Algunas desigualdades

La Fig. 3.6.1 puede ser empleada para demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es siempre por lo menos 2, es decir, para cualquier positivo $x, x + (1/x) \geq 2$. Dado que el producto de x y $1/x$ es 1, ordenar cuatro rectángulos de estas dimensiones en un cuadrado, como se muestra en la Fig. 3.6.1. Donde el área de cada rectángulo es 1, el área del cuadrado resultante es por lo menos 4, y por lo tanto la longitud $x + (1/x)$ de un lado del cuadrado debe ser por lo menos 2.

Esta idea se puede generalizar para dar una prueba más de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, dejando a y b que denotan las dimensiones de cada uno de los cuatro rectángulos:



$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Fig. 3.6.1

En cálculo, una aplicación de la integral definida es el área bajo la gráfica de una función. Interpretar el logaritmo natural de un número positivo como el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ en un intervalo conduce a la demostración de la desigualdad de Napier,

$$\text{Si } b > a > 0, \text{ entonces } \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a},$$

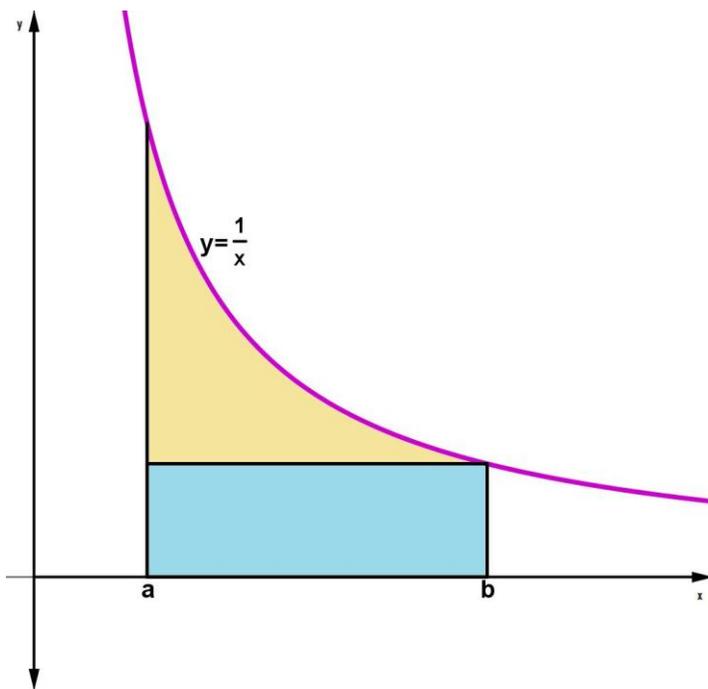
como se muestra en la Fig. 3.6.2. La desigualdad de Napier se puede utilizar para derivar una expresión de límite familiar para el número e . Sea $a = 1$ y $b = 1 + 1/n$, y tomamos el límite cuando n tiende a infinito:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1 \cdot \frac{1}{n},$$

$$\frac{n}{n+1} < n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$



$$\frac{1}{b} (b - a) < \int_a^b \frac{1}{x} dx < \frac{1}{a} (b - a)$$

$$\therefore \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

Nota: $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ representan las alturas y $b - a$ la base.

Fig. 3.6.2

3.7 Números como valores de la función.

Dada la gráfica $y = f(x)$ de una función no negativa, el segmento de recta vertical que conecta los puntos $(a, 0)$ y $(a, f(a))$ representa el número $f(a)$. Como una ilustración, mostramos que para $e \leq a < b$, $a^b > b^a$. En la Fig. 3.7.1, vemos que la pendiente de la recta L_a (es decir, $\ln a / a$) es mayor que la pendiente de la recta L_b (es decir, $\ln b / b$), que a su vez conduce al resultado deseado.

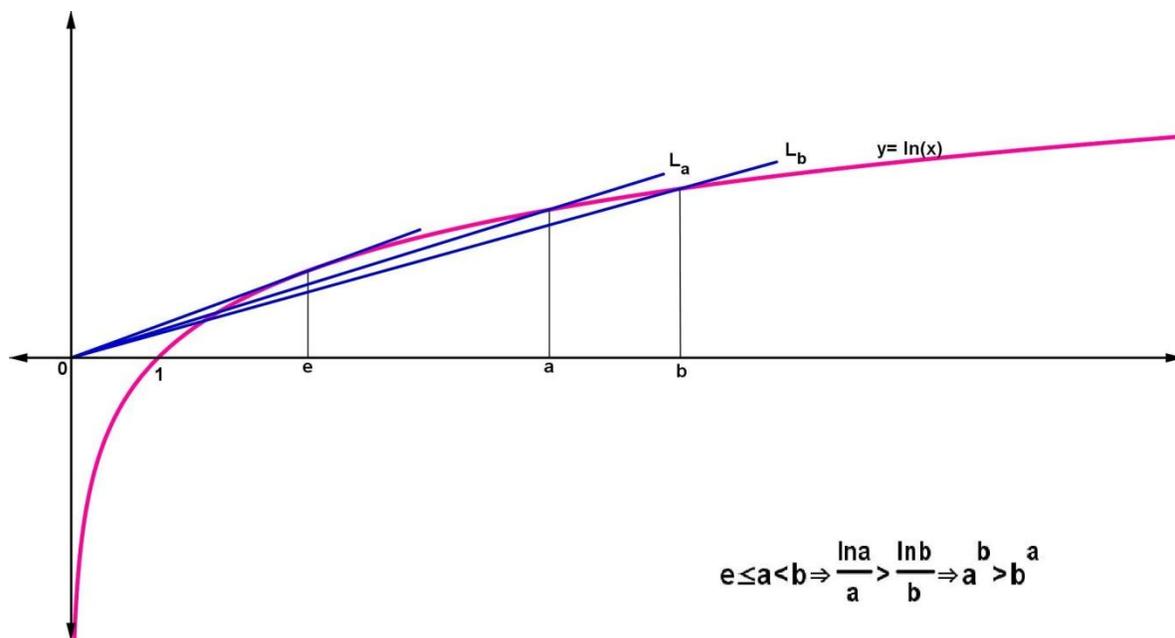


Fig. 3.7.1

En particular, cuando $a = e$ y $b = \pi$ tenemos que $e^\pi > \pi^e$

3.8 Desigualdad de Cauchy- Schwarz.

Para cualesquiera números reales a, b, x, y , la desigualdad de Cauchy-Schwarz, establece que

$$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Usando la propiedad de valor absoluto tenemos $|ax + by| \leq |a| |x| + |b| |y|$, así establece la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto es suficiente para demostrar que

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En la Fig. 3.8.1, volvemos a utilizar el resultado de Pappus, a partir de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen una longitud a y b , y dos rectángulos de dimensiones a por x y b por y . Se obtiene un paralelogramo cuyos lados tienen longitudes $\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\sqrt{x^2 + y^2}$, y con área menor o igual a la del rectángulo con lados de la misma longitud.

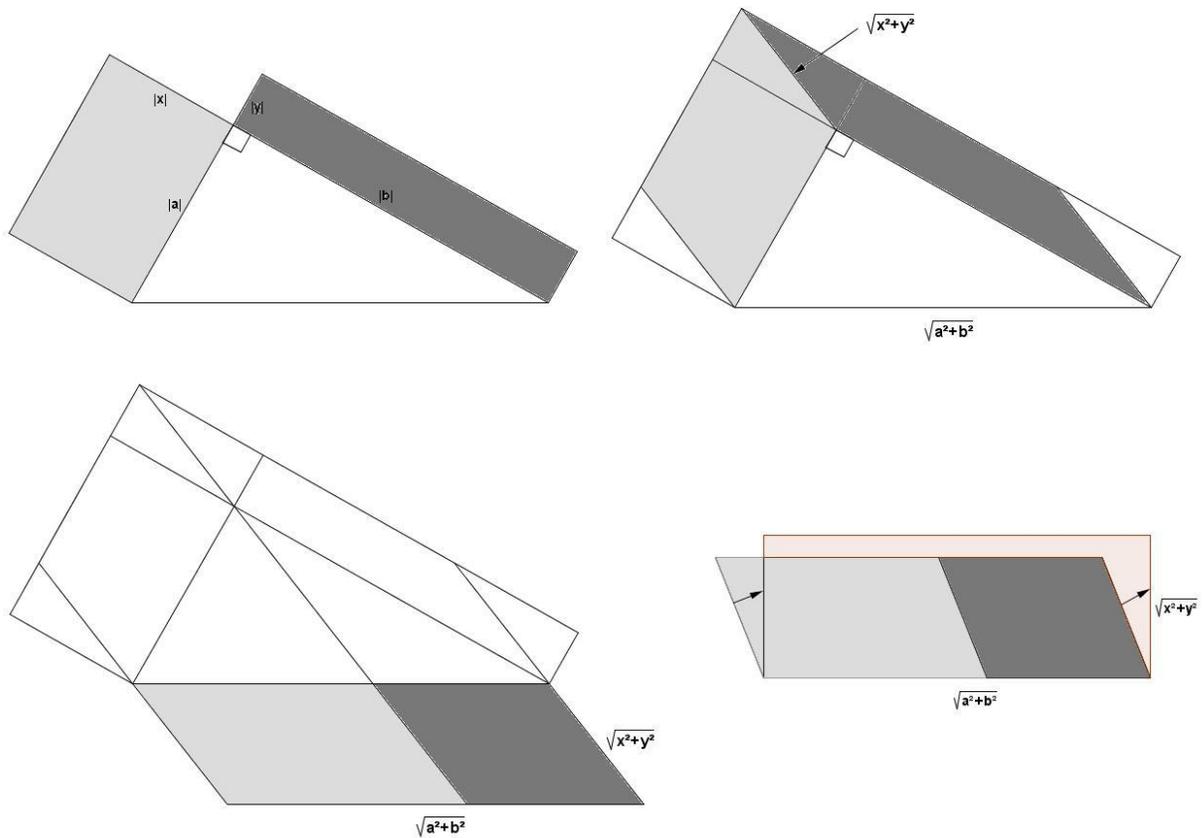


Fig. 3.8.1

3.9 Desigualdad del triángulo

Dados cualesquiera tres números positivos a, b, c , existe un triángulo con lados de longitudes a, b y c si y sólo si $a + b > c$, $b + c > a$ y $c + a > b$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b \leq c$. Entonces sólo la primera desigualdad ya mencionada ($a + b > c$) no es trivial.

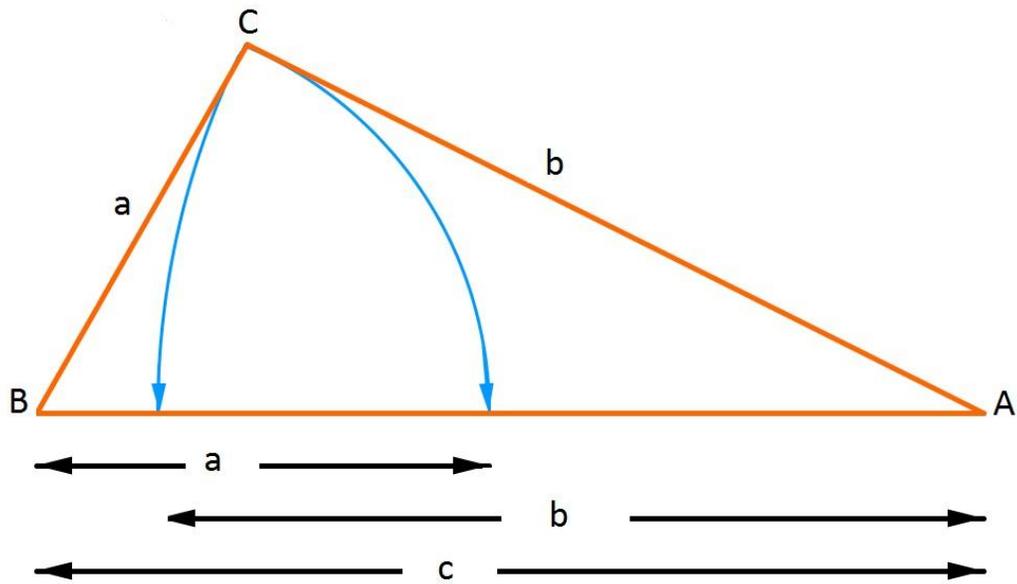


Fig. 3.9.1

La Fig. 3.9.1 muestra un triángulo con lados de longitud a, b, c , rotando los lados BC y AC , coincidiendo con AB , vemos que el lado AB está contenido en la unión de los lados BC y AC , por lo que $c < a + b$. Lo contrario es inmediato.

Una consecuencia interesante es que la función raíz cuadrada es subaditiva. Dados los números positivos a y b , construir un triángulo rectángulo con catetos \sqrt{a} y \sqrt{b} , y la hipotenusa $\sqrt{a+b}$ (puede confirmar esto con el teorema de Pitágoras). Entonces la desigualdad del triángulo anterior produce que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

3.10 Desigualdad de Tolomeo.

En el Capítulo anterior nos encontramos con el teorema de Tolomeo: En un cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de la longitud de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos. Pero ¿qué ocurre con un cuadrilátero en general? En el caso de un cuadrilátero convexo en general, el producto de la longitud de las diagonales es menor o igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos, como se ilustra en la secuencia de figuras en la Fig. 3.10.1.

La primera imagen muestra el cuadrilátero. En la segunda imagen, el lado de longitud b se ha rotado para que coincida con la diagonal de longitud e , y un segmento dibujado paralelo al lado de longitud d . Esto crea un triángulo (en gris) semejante al triángulo con lados de longitud c, d, e .

En la tercera imagen rotamos el triángulo gris a la posición que se muestra, y se dibuja el segmento de longitud x . Note que $bd / e + x \geq f$. El triángulo en color es similar al triángulo de lados a, b, e (note que los lados adyacentes al ángulo marcado común son proporcionales), y por lo tanto puede ser trasladado a la posición que se muestra en la cuarta imagen. Ahora resulta que $x = ac / e$, de modo que $bd / e + ac / e \geq f$, o equivalentemente, $ef \leq ac + bd$.

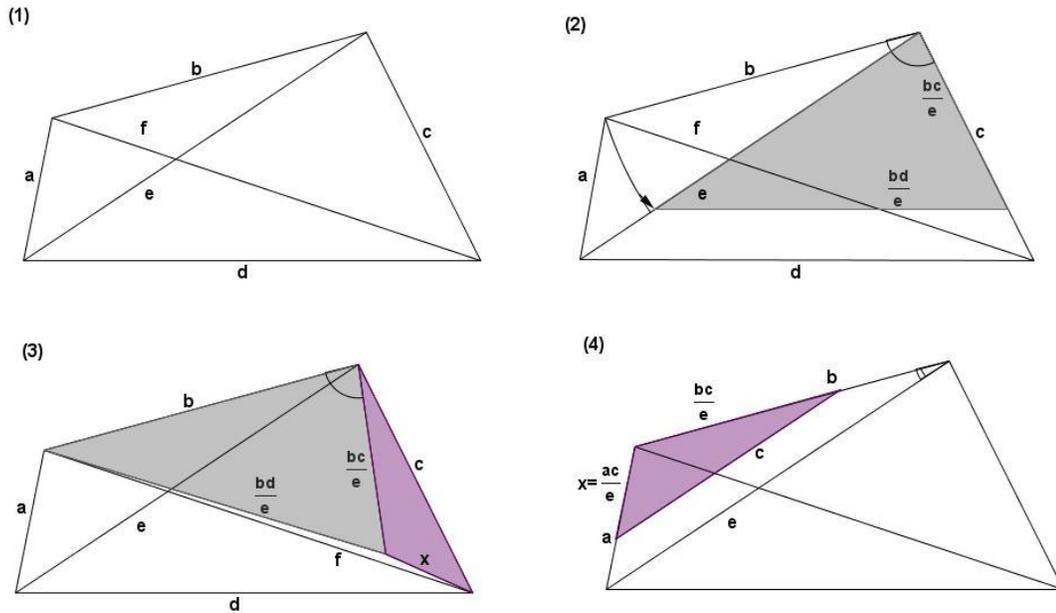


Fig. 3.10.1

3.11 Funciones trigonométricas

Es tradición escolar ilustrar las funciones trigonométricas en el círculo unitario. Como se muestra en la siguiente Fig. 3.11.1:

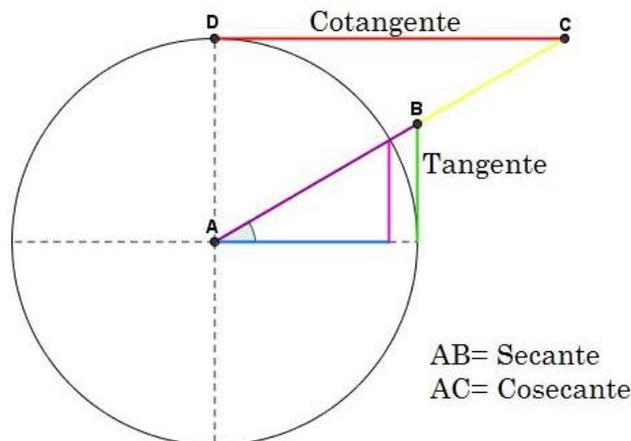


Fig. 3.11.1

En los libros de Trigonometría nos demuestran la siguiente identidad

$$\cos A - B = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$$

Utilizando geometría analítica y álgebra, parten de la siguiente igualdad apoyándonos desde luego en nuestro círculo unitario Fig. 3.11.2:

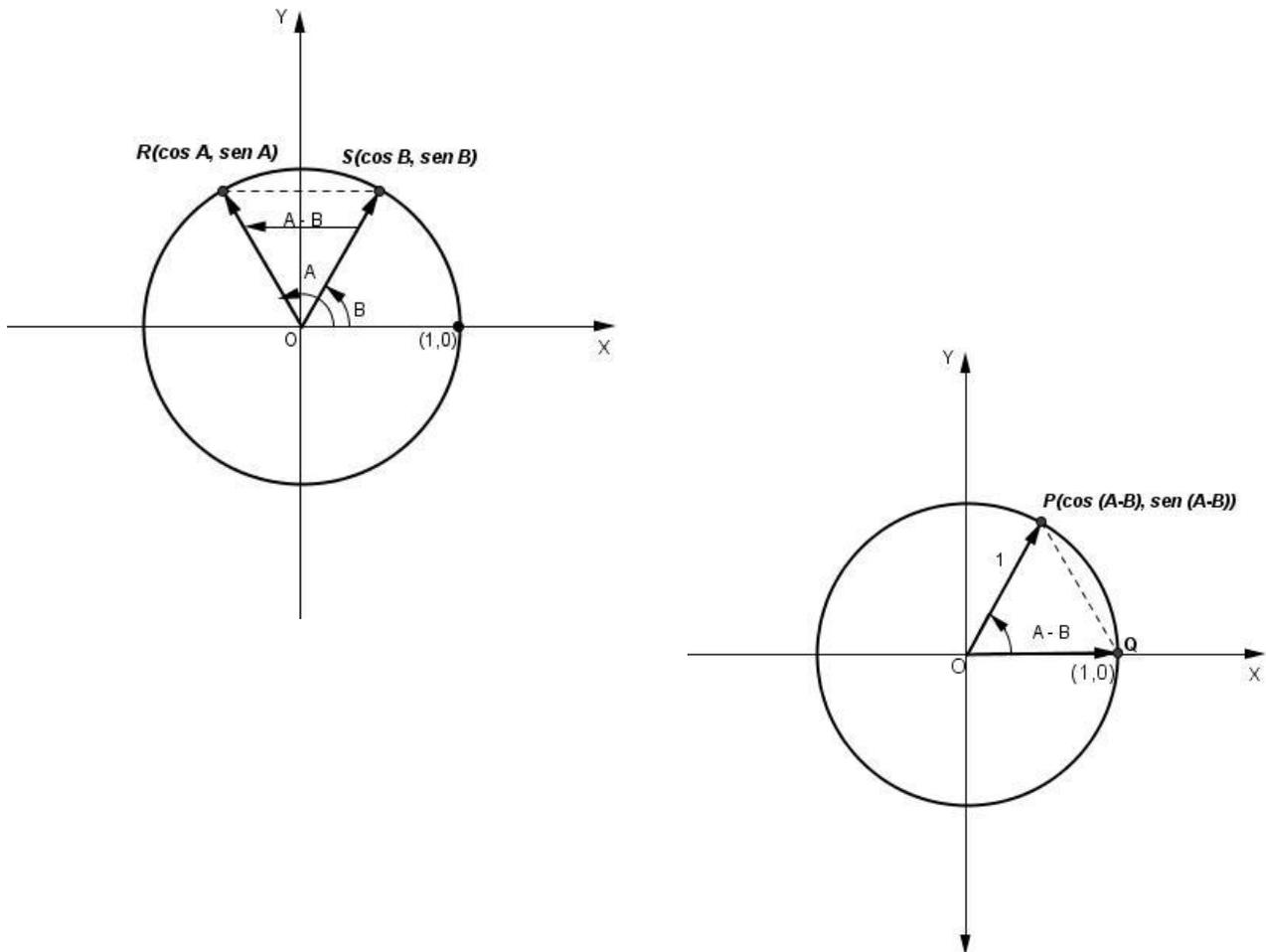


Fig. 3.11.2

$$\overbrace{\cos A - B - 1}^2 + \overbrace{\text{sen } A - B - 0}^2 = \overbrace{(\cos A - \cos B)^2 + (\text{sen } A - \text{sen } B)^2}$$

Desarrollando el álgebra nos queda la siguiente identidad:

$$\cos A - B = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$$

Los valores de las seis funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ pueden ser representados por las longitudes de los segmentos de recta en tres triángulos, como se ve en la Fig. 3.11.3:

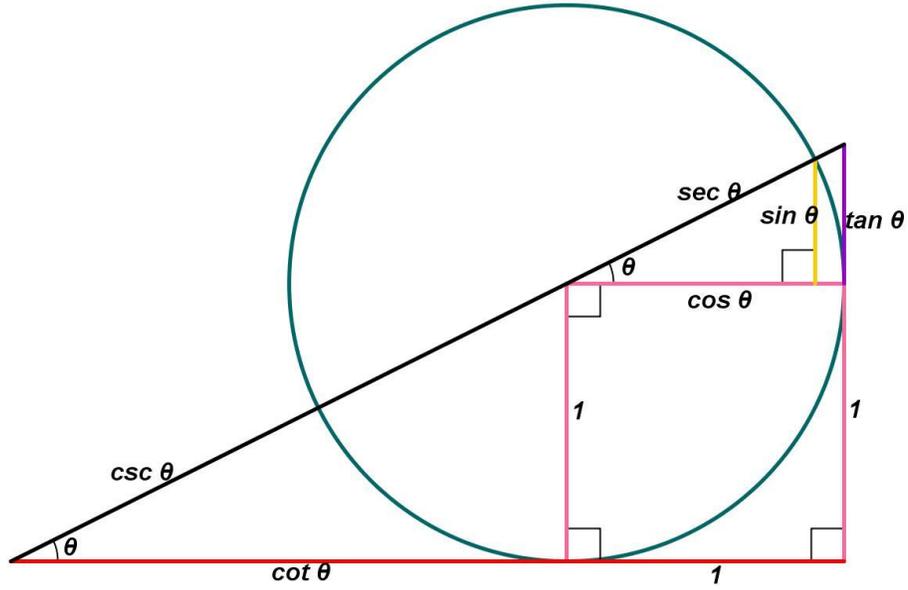


Fig. 3.11.3

Note que la figura 3.11.3 también establece la identidad

$$(\tan \theta + 1)^2 + (\cot \theta + 1)^2 = (\sec \theta + \csc \theta)^2$$

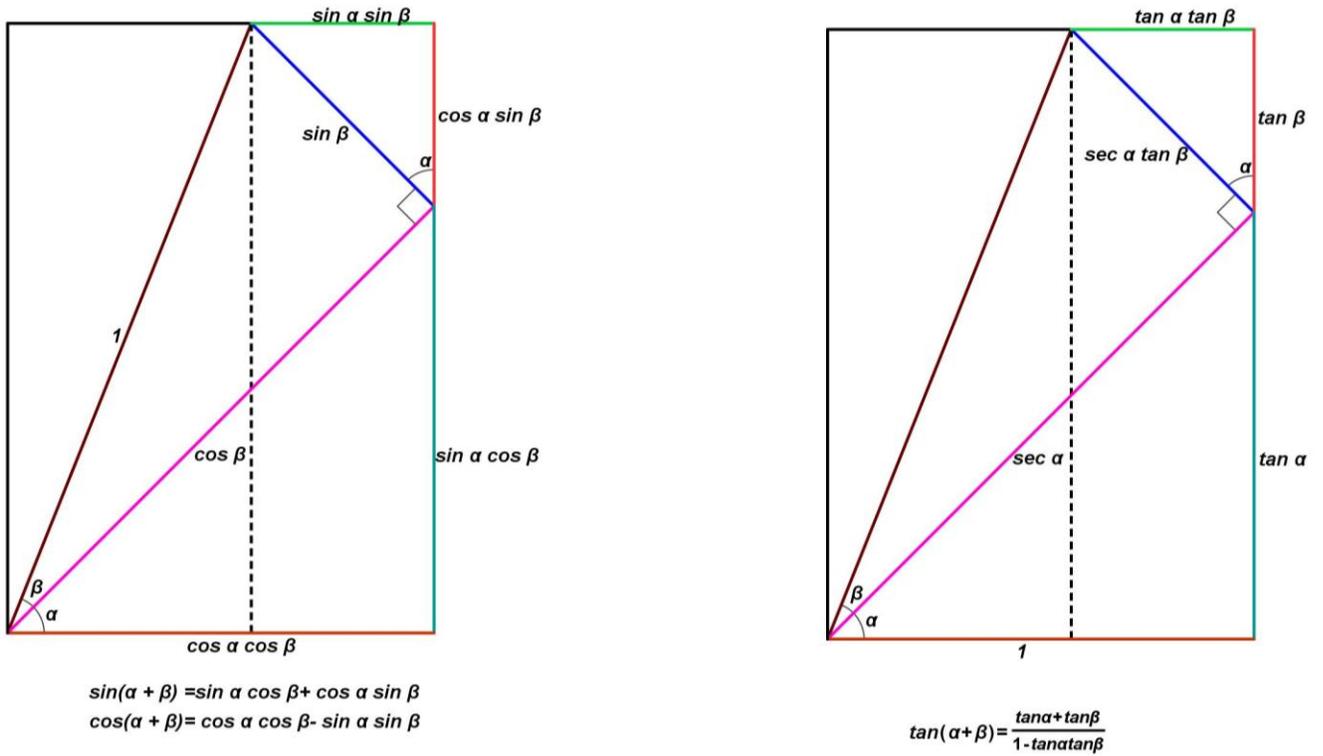


Fig. 3.11.4

Varias identidades trigonométricas básicas se pueden representar de manera similar por la identificación de segmentos de recta en ciertos triángulos con las funciones trigonométricas de los ángulos apropiados. La Fig. 3.11.4 ilustra las fórmulas de adición para el seno, coseno y tangente de ángulos agudos:

3.12 Suma de los términos de una progresión aritmética

Desde el $1 + 2 + 3 + \dots + n$ es la suma de n términos en progresión aritmética, tal vez las mismas ideas nos permitirá ilustrar y evaluar la suma S de n números en una progresión aritmética general con el primer término a y una diferencia común d :

$$S = a + a + d + a + 2d + \dots + a + (n-1)d.$$

Generalizando la Fig. 1.2.4 de la sección 1.2 tenemos lo siguiente, que se ha llamado el "órgano-pipe" método para sumar números en una progresión aritmética Fig. 3.12.1:

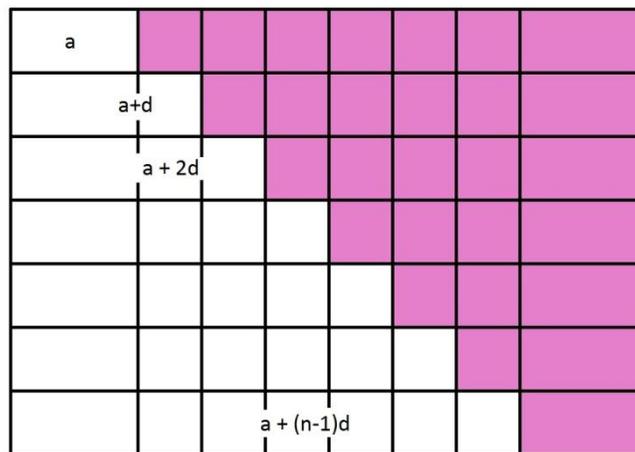


Fig. 3.12.1

Por lo tanto $2S = n[a + a + (n-1)d]$, de modo que $S = (n/2)[2a + (n-1)d]$. La cifra es, sin duda familiar para cualquiera que haya trabajado con regletas.

NOTA:

Algebraicamente

$$\begin{aligned} S &= a + a + d + a + 2d + \dots + a + (n-1)d \\ &= na + d + 2d + 3d + \dots + (n-1)d \\ &= na + d(1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= \frac{2na}{2} + \frac{d(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a + d(n-1)]. \end{aligned}$$

3.13 De dos a tres dimensiones.

El lector probablemente está bien informado con la siguiente representación de área de la fórmula familiar para descomponer en factores la diferencia de dos cuadrados Fig. 3.13.1:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ con } a > b$$

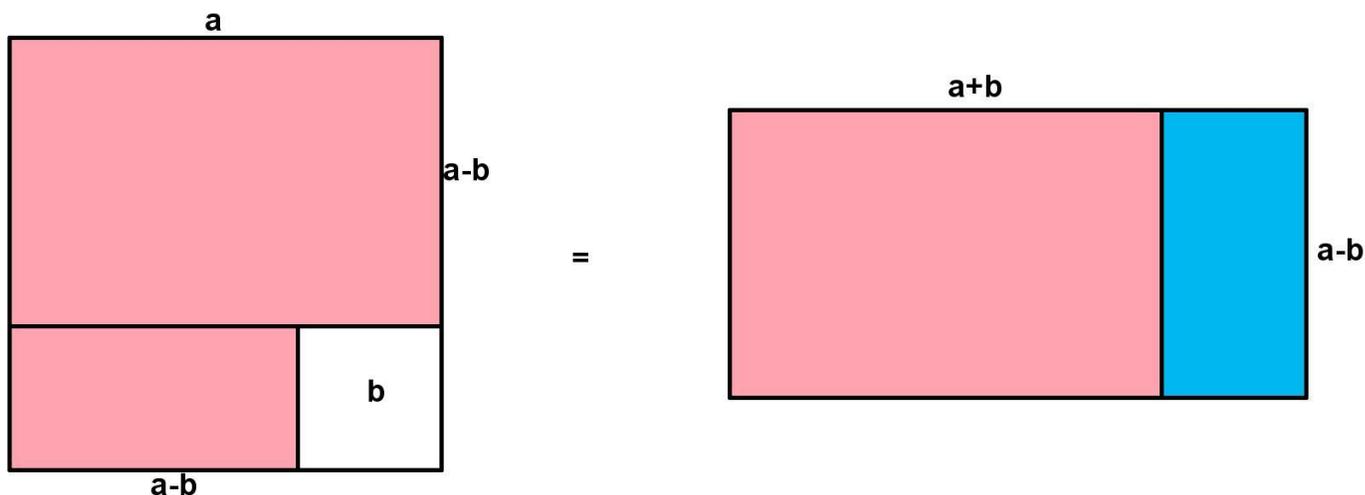
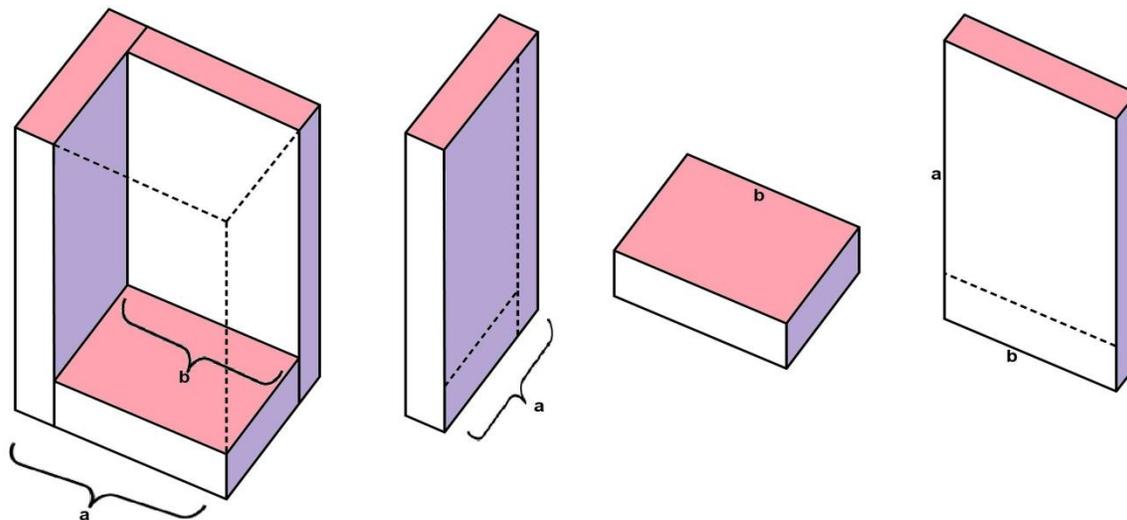


Fig. 3.13.1

Usando volúmenes, tenemos una representación análoga para descomponer en factores la diferencia de dos cubos Fig. 3.13.2:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



$$a^3 - b^3 = a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b)$$

Fig. 3.13.2

Identificando los elementos claves.

Las imágenes Matemáticas son algo más que una representación artística, ya que a menudo contienen una gran cantidad de información. Hay hechos sofisticados que contienen símbolos, así como líneas, ángulos, proyecciones, medidas, etc. En este capítulo se expone la técnica de introducir especial "marcas" en las imágenes para identificar las partes relevantes: la igualdad de segmentos, la igualdad de los ángulos, repeticiones, subconjuntos similares o congruentes, etc. En muchos casos con la identificación adecuada de los elementos clave fácilmente se obtiene una prueba del resultado deseado. Este es también el caso de la geometría euclidiana, donde, utilizando regla y compás, hay que construir figuras con una colección de elementos relacionados (lados, ángulos, bisectrices,...). El procedimiento se convierte en un proceso de identificación de cómo los datos determinan las partes desconocidas. Al hacer dibujos matemáticos... ¡importan los detalles!

3.14 Acerca de las bisectrices de ángulos de un cuadrilátero convexo.

En un triángulo las tres bisectrices de los ángulos se encuentran en el centro. ¿Qué pasa con un cuadrilátero convexo? El siguiente resultado nos da la respuesta completa, y la prueba se basa en una simple imagen en la que todos los ángulos relevantes se identifican.

Dado cualquier cuadrilátero convexo, si sus cuatro bisectrices determinan un nuevo cuadrilátero, entonces el nuevo cuadrilátero es cíclico (es decir, puede ser inscrito en un círculo).

Podemos hacer un dibujo sencillo con los elementos básicos descritos en el enunciado anterior, y marcar en él los ángulos clave (véase la Fig. 3.14.1). Sin embargo, los ángulos a, b, x, y, z, t deben satisfacer

$$a + x + y = \pi, \quad b + z + t = \pi, \quad 2x + 2y + 2z + 2t = 2\pi$$

Por consiguiente

$$a + b = \pi - x - y + \pi - z - t = 2\pi - x + y + z + t = \pi$$

Es decir, el nuevo cuadrilátero debe estar inscrito en un círculo.

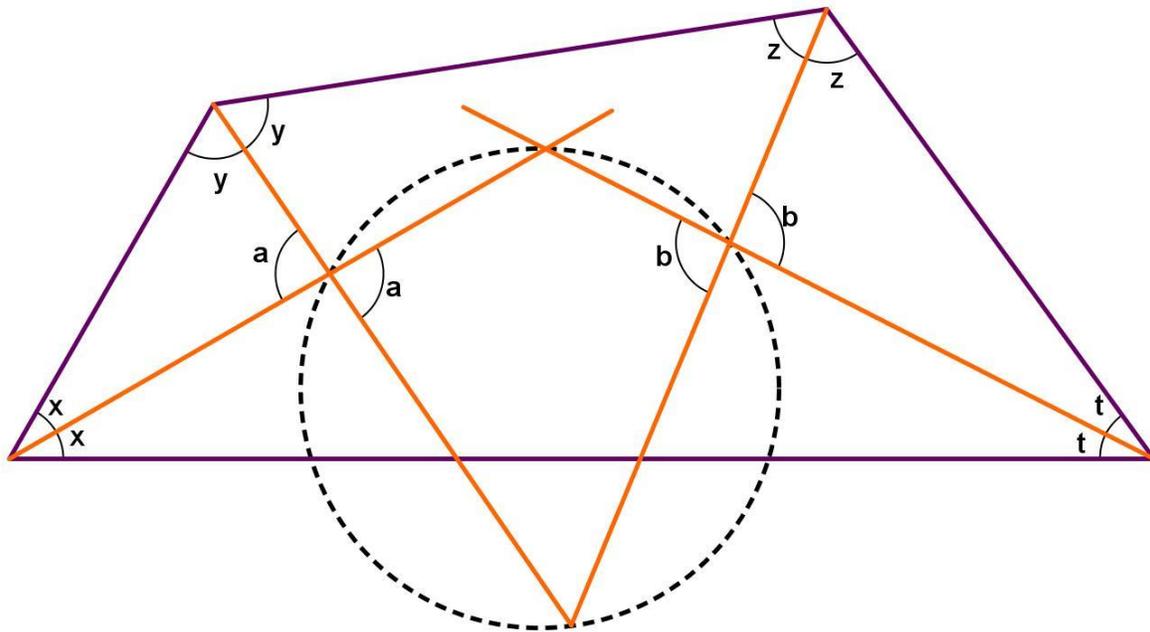


Fig. 3.14.1

3.15 Cuadriláteros cíclicos con diagonales perpendiculares

El siguiente ejemplo muestra cómo la identificación de ángulos puede ayudar a descubrir triángulos isósceles, que a su vez conduce a la igualdad de ciertos segmentos.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo cuyas diagonales son perpendiculares (Fig. 3.15.1). Muchos de esos cuadriláteros existen, por ejemplo, dado un sistema de coordenadas cartesianas, todos los cuadriláteros obtenidos a partir de las intersecciones de los ejes x e y con un círculo que contiene el origen será en esta clase. Sea P la intersección de las diagonales. Ahora vamos a demostrar visualmente que si una línea que pasa por P es perpendicular a un lado del cuadrilátero, el lado opuesto está dividido en dos.

En una imagen que describe el cuadrilátero dado marcamos ángulos complementarios x e y en P y donde estos ángulos aparecen en el resto de la imagen:

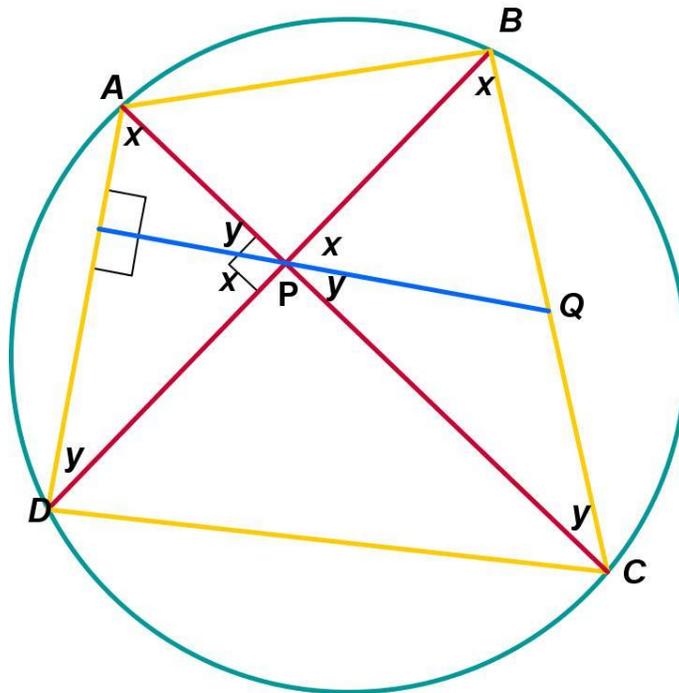


Fig. 3.15.1

Note que $\angle DAC$ y $\angle DBC$ ambos subtienen al arco DC , y $\angle ADB$ y $\angle ACB$ ambos subtienen al arco AB . Por lo tanto $\triangle PBQ$ es isósceles, así $BQ = PQ$, y $\triangle PQC$ es también isósceles, así $QC = PQ$, donde $BQ = QC$.

3.16 Una característica de la hipérbola rectangular

Aquí hay una propiedad poco conocida y notable de la hipérbola rectangular.

Teorema: Cualquier línea que corte una rama de la hipérbola $y = 1/x$ en dos puntos A y B interseca los ejes en los puntos A' y B' de tal manera que los segmentos de recta AA' y BB' tienen la misma longitud, es decir, $AA' = BB'$ (Ver Fig. 3.16.1)

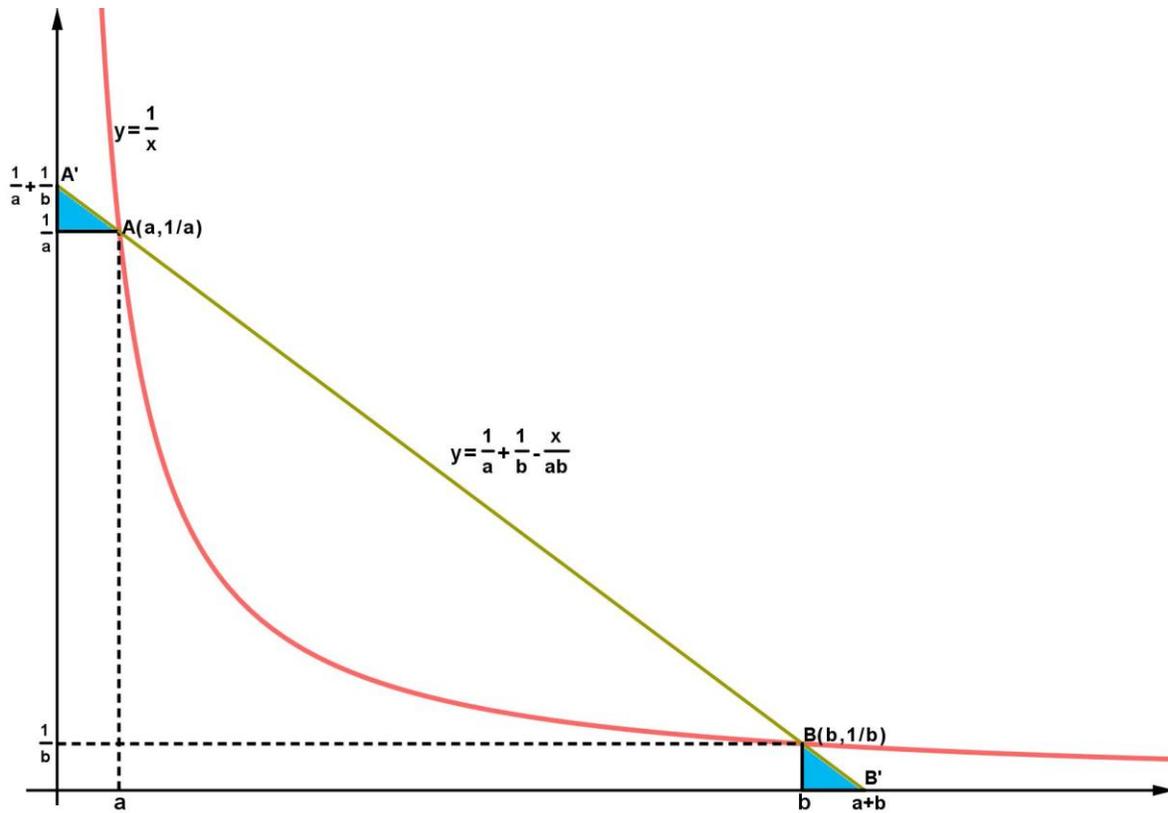


Fig. 3.16.1

La siguiente prueba, debido J. L. García Roig, es un cálculo simple de las longitudes de los segmentos de recta correspondientes.

Prueba:

La ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $A(a, 1/a)$ y $B(b, 1/b)$ es $y = 1/a + 1/b - x/ab$, que intercepta los ejes en $(0, 1/a + 1/b)$ y $(a + b, 0)$. Ahora se sigue que los triángulos en color azul son congruentes, y por lo tanto sus hipotenusas AA' y BB' tienen la misma longitud.

Capítulo 4. Mosaicos y series.

En la resolución de problemas matemáticos, a menudo es ventajoso combinar varias técnicas de resolución de problemas. Lo mismo es cierto para la creación de pruebas visuales de los teoremas matemáticos. En este capítulo se presenta una variedad de ejemplos de la combinación de muchas de las técnicas que se encuentran en capítulos anteriores, como algunas transformaciones, cuadraturas de polígonos, algunos mosaicos, procedimientos iterativos, etc.

Transformaciones que preservan áreas.

Las transformaciones básicas que preservan longitudes en el plano son las rotaciones, traslaciones y reflexiones, que hemos examinado con anterioridad. Ya que si preservan longitudes, necesariamente conservan los ángulos, áreas, volúmenes, etc. Ahora vamos a considerar las transformaciones en el plano que no pueden preservar longitudes y ángulos, pero preservan áreas.

Primero considere los triángulos y paralelogramos. Si dos triángulos tienen una base común y si sus vértices se encuentran en una línea paralela a la base, deben tener áreas iguales, como se ilustra en la Fig. 4.1 (a). Del mismo modo, dos paralelogramos con una base común y la misma altura también tienen la misma área, como se ilustra en la Fig. 4.1 (b). Utilizamos estas transformaciones sencillas para demostrar dos teoremas importantes en la siguiente sección.

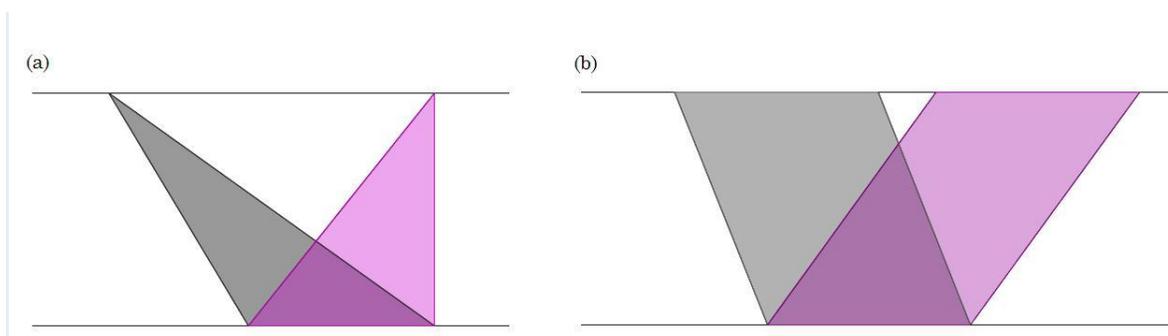


Fig. 4.1

4.1 Cuadratura de polígonos

Uno de los problemas clásicos de la geometría griega en cuestión es "cuadrar" una figura: dada una figura, construir un cuadrado con la misma área en un número finito de pasos usando sólo un compás y una regla sin marcar. Como sabemos, es imposible la cuadratura del círculo, pero vamos a mostrar cómo cuadrar un convexo de n lados.

Hay varias aproximaciones visuales a la cuadratura de un convexo de n -lados. La primera es inductiva, por lo que comenzamos con triángulos.

Lema: Cualquier triángulo puede ser cuadrado con regla y compás.

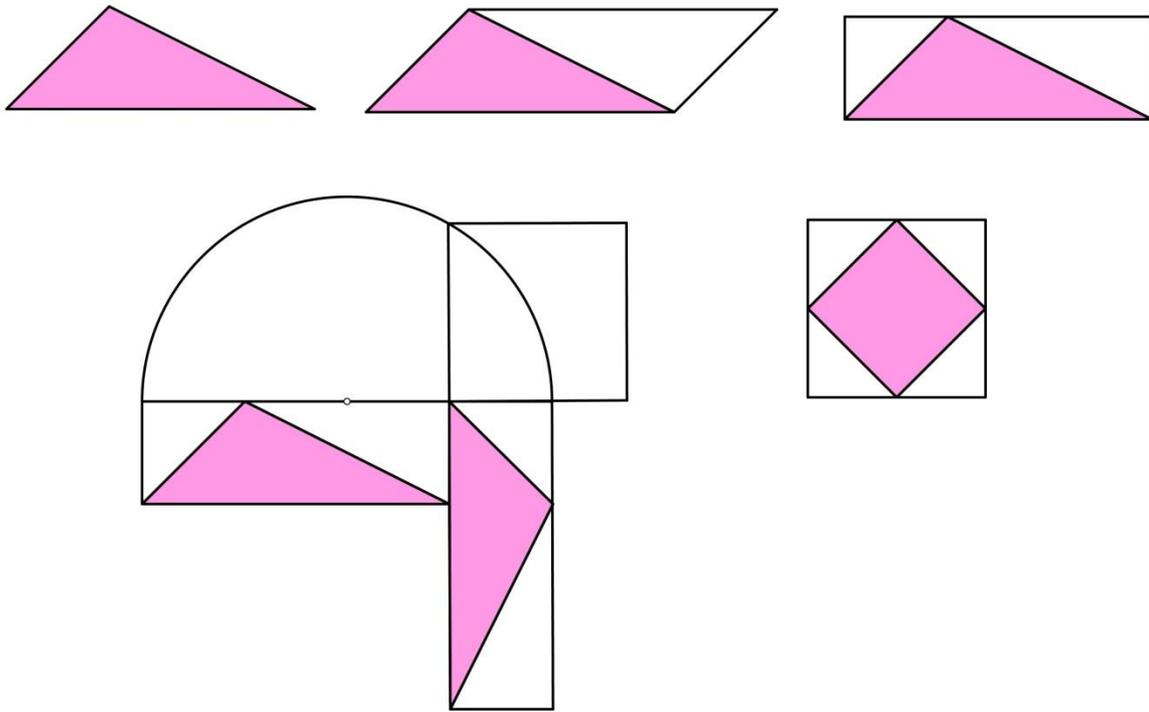


Fig. 4.1.1

Se pasa del triángulo al paralelogramo formado por dos copias del triángulo, entonces el rectángulo es de igual área, luego del rectángulo a un cuadrado cuyo lado es la media geométrica de las dimensiones del rectángulo, y por lo tanto tiene la misma área (véase la Fig. 3.1.1 (a) de la sección 3.1), y finalmente a un cuadrado con la mitad del área del triángulo inicial mostrado en esta secuencia de imágenes.

Teorema: Dado un convexo de n -lados P_n , $n \geq 4$, se puede construir con regla y compás un convexo de $(n-1)$ -lados P_{n-1} con la misma área que P_n .

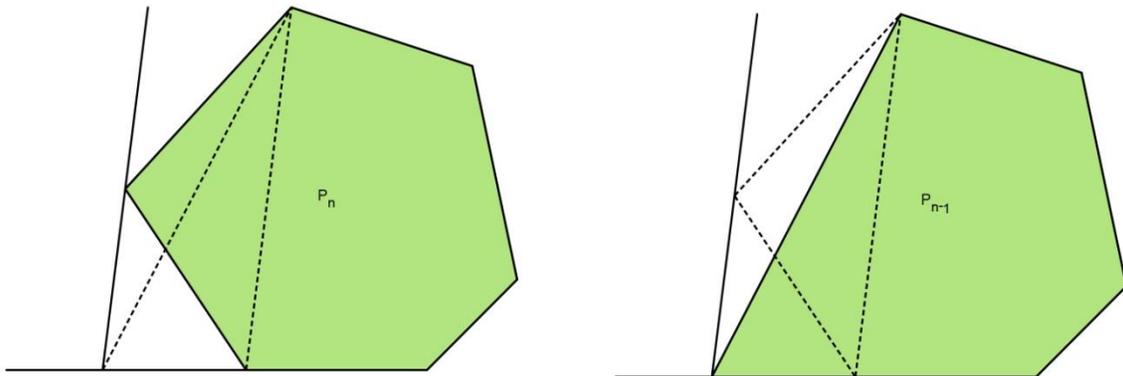


Fig. 4.1.2

Prueba:

La construcción en la Fig. 4.1.2 se explica por sí misma, salvo para destacar que la línea por la izquierda- del vértice de P_n está dibujada paralela a la diagonal discontinua.

4.2 Áreas iguales en la partición de un paralelogramo.

Tome un paralelogramo, y de forma arbitraria coloque puntos en dos lados adyacentes, dibuja líneas a los vértices en los lados opuestos, como se muestra en la Fig. 4.2.1 (a). Esto divide el paralelogramo en ocho regiones con áreas a, b, \dots, h , como se indica. La siguiente secuencia de área- preservando transformaciones (Fig. 4.2.1 (b)) muestra que

$$a + b + c = d.$$

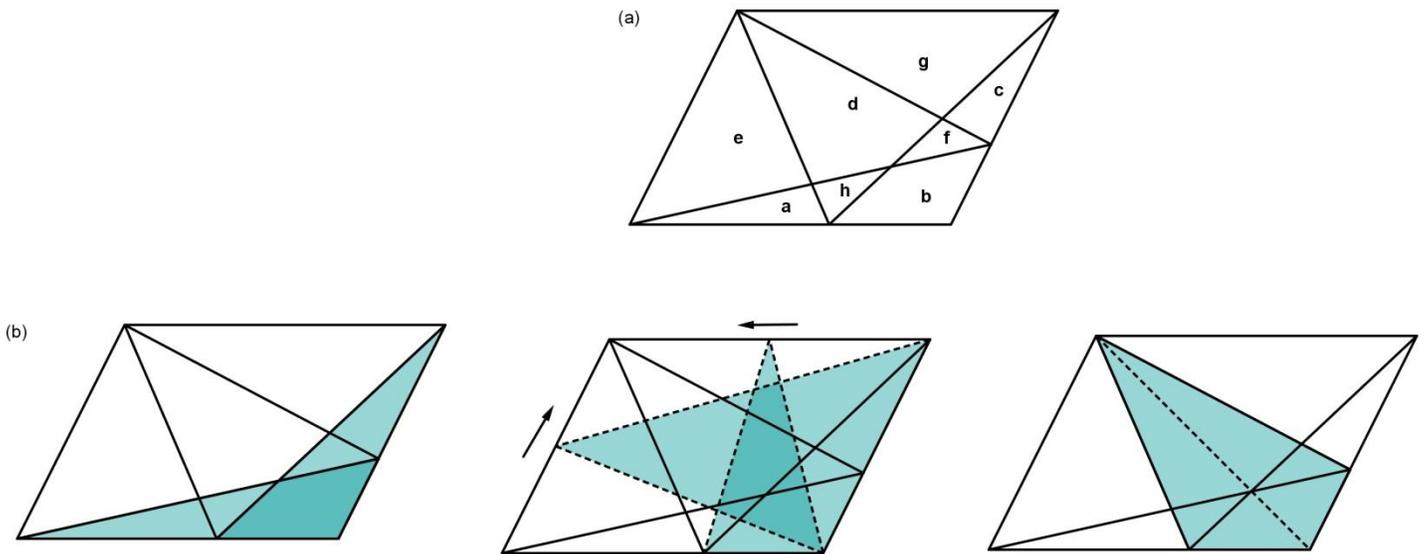


Fig. 4.2.1

Igualando las áreas de los triángulos se obtiene $a + h + 2b + f + c = b + h + f + d$, que es equivalente al resultado deseado.

4.3 Mosaicos cartesianos.

El mosaico con todos los cuadrados del mismo tamaño se asemeja a un papel cuadrulado ordinario, por lo que llaman un mosaico cartesiano (en general, cuando todos los azulejos en un mosaico tienen el mismo tamaño y forma, se le llama un mosaico monohedral). Cuando superponemos la misma rejilla transparente utilizada en las figuras 2.5.2, 2.5.3, y 2.5.4 de la sección 2.5, se obtiene una prueba del siguiente teorema, como se ve en la Fig. 4.3.1.

Teorema: Si las líneas de los vértices de un cuadrado son dibujados por los puntos medios de los lados adyacentes, entonces el área del cuadrado más pequeño así producido es una quinta parte del cuadrado dado.

Prueba:

Con una superposición diferente (no un mosaico), el mismo mosaico Cartesiano produce una prueba (en la Fig. 4.3.2) del siguiente teorema.

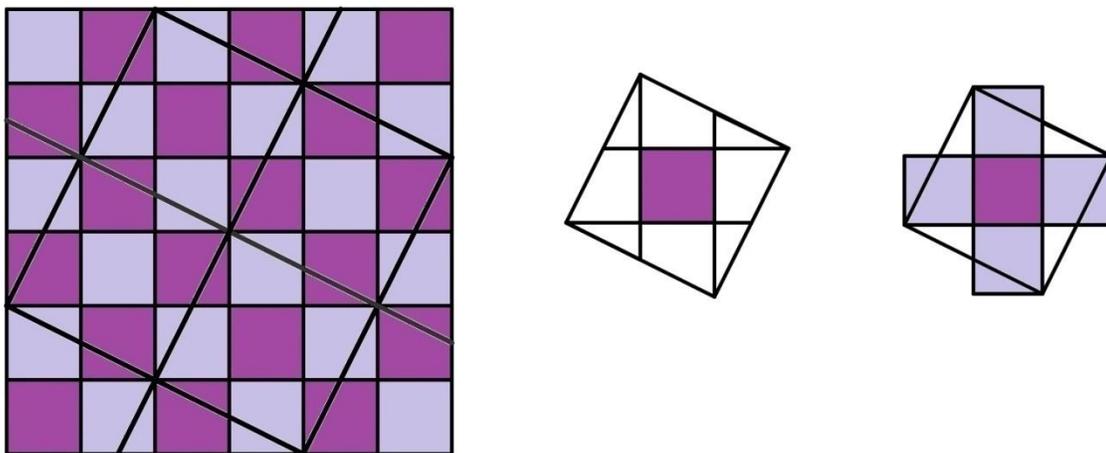


Fig. 4.3.1

Teorema: Un cuadrado inscrito en un semicírculo tiene dos quintas partes del área de un cuadrado inscrito en un círculo del mismo radio.

Prueba:

Ver Fig. 4.3.2

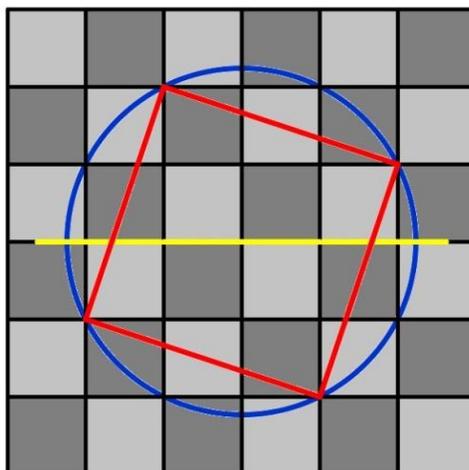


Fig. 4.3.2

4.4 Mosaicos cuadriláteros.

Hasta ahora, los mosaicos que hemos considerado han utilizado cuadrados y rectángulos. Sin embargo, las copias de cualquier cuadrilátero cóncavo o convexo, también producirá un mosaico monohedral del plano, como se ilustra en la Fig. 4.4.1.

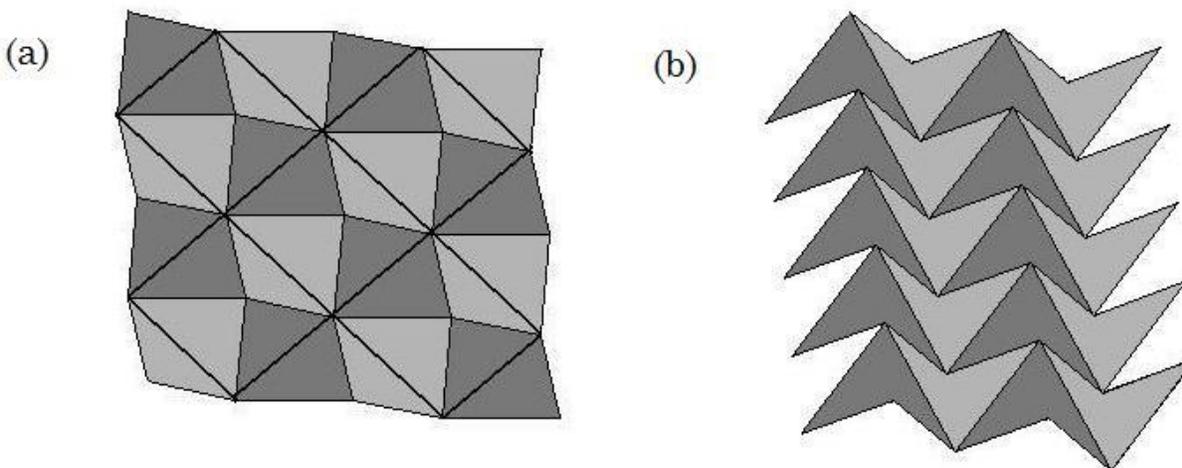


Fig. 4.4.1

Con una superposición de azulejos de paralelogramos transparentes, el mosaico en la Fig. 4.4.1 (a) se utiliza en la Fig. 4.4.2 para probar el siguiente teorema.

Teorema: El área de cualquier cuadrilátero convexo Q es igual a la mitad del área de un paralelogramo P cuyos lados son paralelos e iguales en longitud a las diagonales de Q .

Prueba:

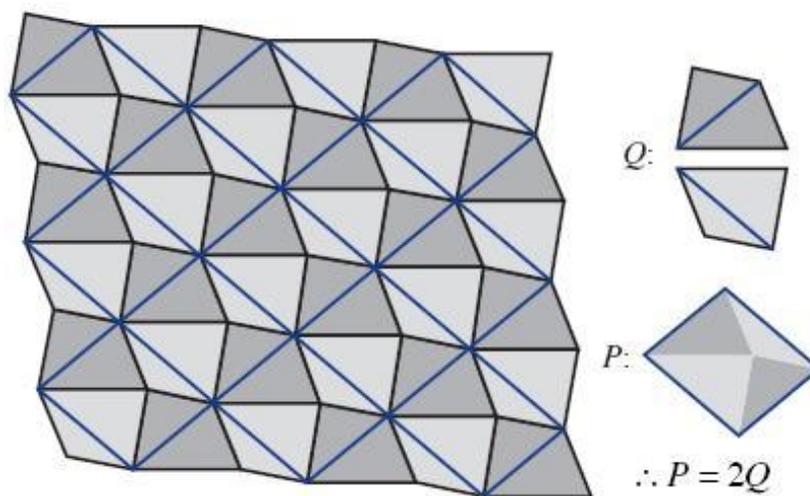


Fig. 4.4.2

Este teorema proporciona quizás la forma más sencilla para calcular el área de un cuadrilátero en general. De hecho, el teorema es también cierto para los cuadriláteros cóncavos a pesar de que una de las diagonales es exterior al cuadrilátero

4.5 Mosaicos triangulares.

Al igual que en los cuadriláteros, las copias de un triángulo arbitrario también formará un mosaico monohedral del plano. El siguiente teorema es un análogo del primer teorema de la sección 4.3, y esta prueba se ilustra en la Fig. 4.5.1 con un mosaico triangular y una superposición triangular.

Teorema: Si los puntos de un tercio a cada lado de un triángulo se unen a los vértices opuestos, el triángulo resultante es igual en área a una séptima parte del triángulo original.

Prueba:

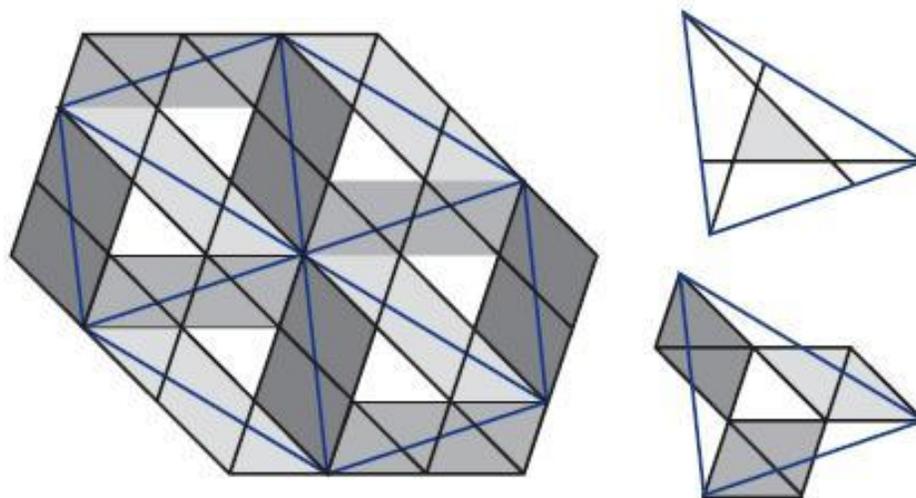


Fig. 4.5.1

4.6 Mosaicos con cuadrados y paralelogramos.

Tome un paralelogramo arbitrariamente y la construcción de cuadrados en el exterior de cada uno de los lados. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir los centros de los cuadrados? Para responder a la pregunta, ampliamos la construcción de un mosaico, como se muestra en la figura 4.6.1.

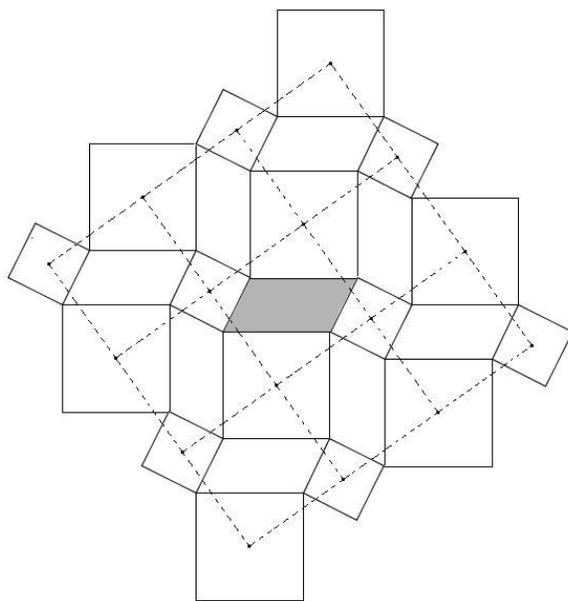


Fig. 4.6.1

4.7 El volumen de una pirámide cuadrada

Prácticamente la misma idea presentada antes dicha para sumar cuadrados puede ser empleada para encontrar el volumen de una pirámide cuadrada. Sea P_0 una pirámide con una base cuadrada de lado de longitud b y altura h , como se ilustra en la Fig. 4.7.1. Por Principio de Cavalieri, P_0 tiene el mismo volumen que la pirámide P_1 , en la cual dos de los lados triangulares son perpendiculares a la base. La Pirámide P_2 tiene la misma propiedad que la pirámide P_1 , sin embargo, su altura es también la base de lado de longitud b . Por último, tres copias de P_2 encajan entre sí para formar un cubo (donde un cubo de lado de longitud b puede ser fácilmente cortado para formar tres copias de P_2).

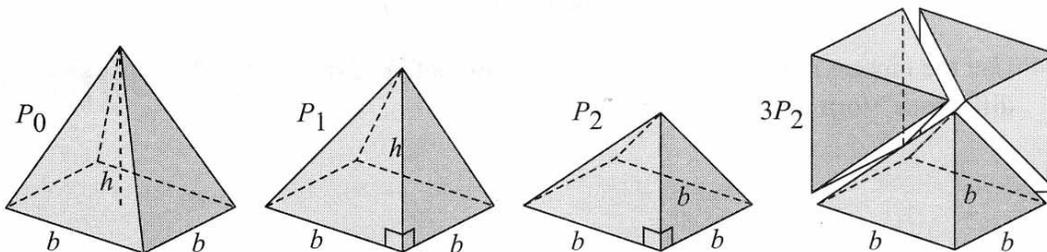


Fig. 4.7.1

Por lo tanto tenemos $V_{P_0} = V_{P_1} = \frac{h}{b} V_{P_2} = \frac{h}{b} \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} b^2 h$.

Procedimientos iterativos

En estrecha relación a la idea de utilizar varias copias de algunas imágenes es el siguiente procedimiento en donde empleamos varias copias de una imagen (de hecho, a veces un número infinito), pero de tal forma que la parte de la imagen es una versión a escala de toda la imagen. Por ejemplo, el lado superior derecho de la Fig. 4.7.2 (a) es la cuarta parte del cuadrado, es una versión a escala de todo el cuadrado. Si ahora permitimos que la longitud del cuadrado mayor sea 1 y etiquetamos los rectángulos y cuadrados interiores con sus respectivas áreas, tenemos en la Fig. 4.7.2 (b) una prueba visual de la serie geométrica con razón $1/2$: $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$.

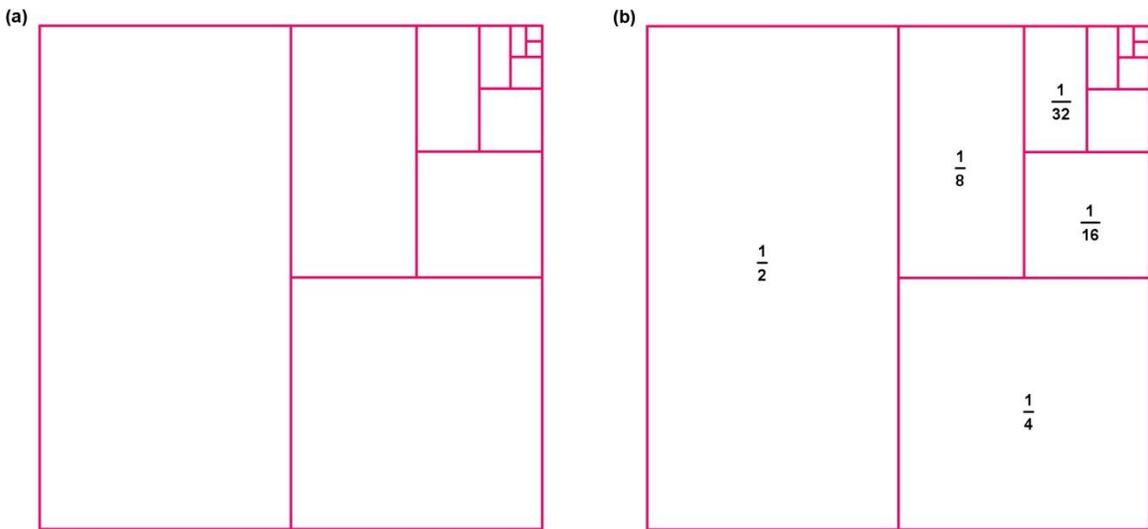
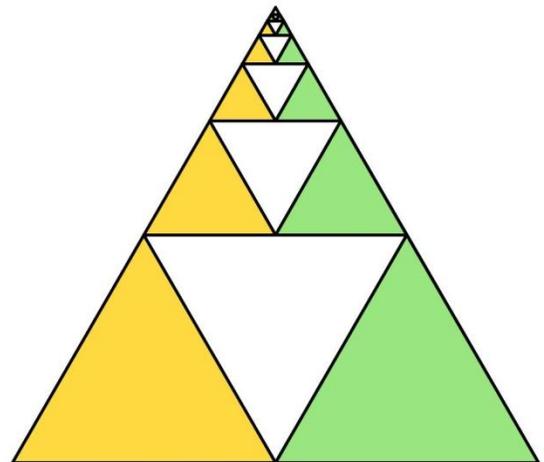
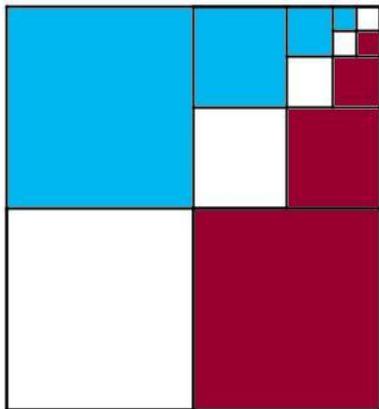


Fig. 4.7.2

4.8 Series geométricas

Aquí hay dos imágenes que “muestran visualmente” que la suma de la serie

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^3 + \dots = \frac{1}{3}.$$



Prueba:

Veamos la construcción de una de ellas para llegar a la “demostración visual”, en la otra figura se utiliza la misma idea.

En la Fig. 4.8.1 (a), note que el cuadrado más grande de color café es $1/4$ del cuadrado original, la Fig. 4.8.1 (b) es $1/4$ de $1/4$ del cuadrado original, y así sucesivamente, y que juntos los cuadrados de color café hacen $1/3$ del cuadrado original (al igual que los blancos y los cuadrados de color azul). Ver secuencia de figuras.

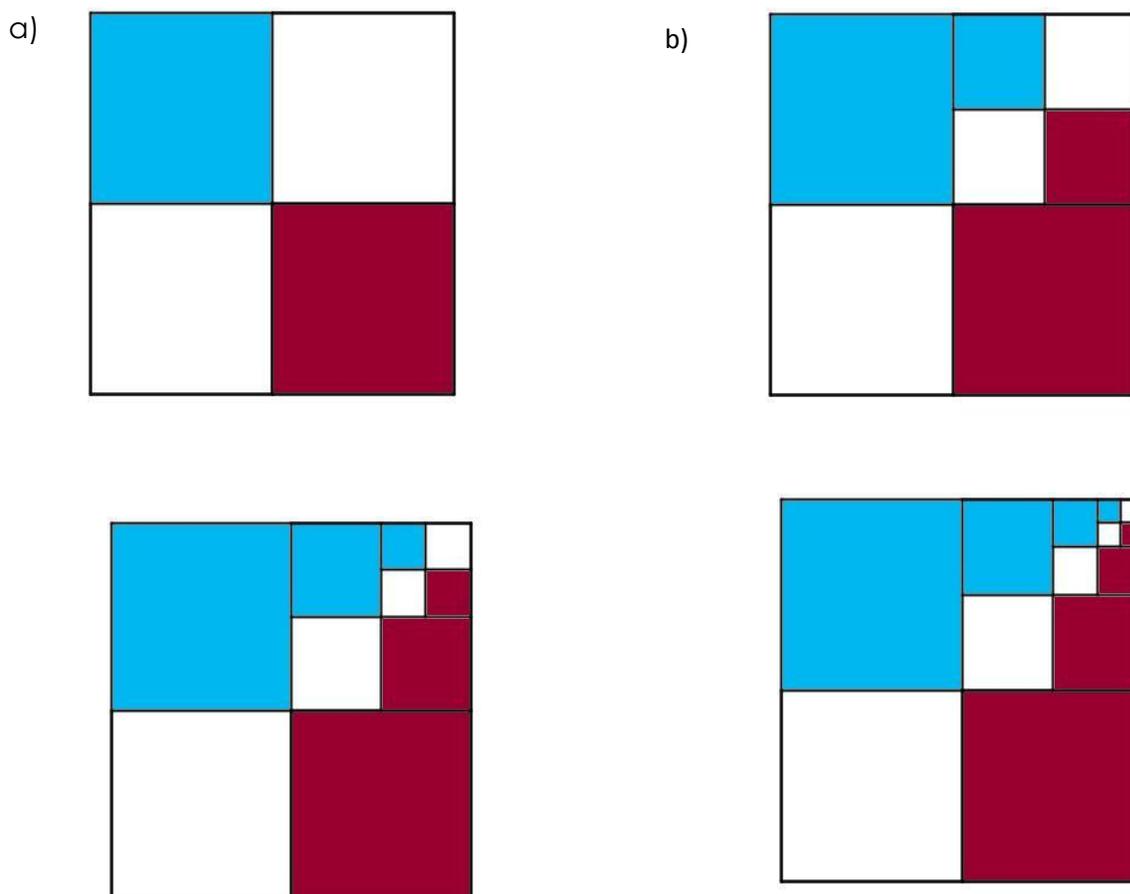
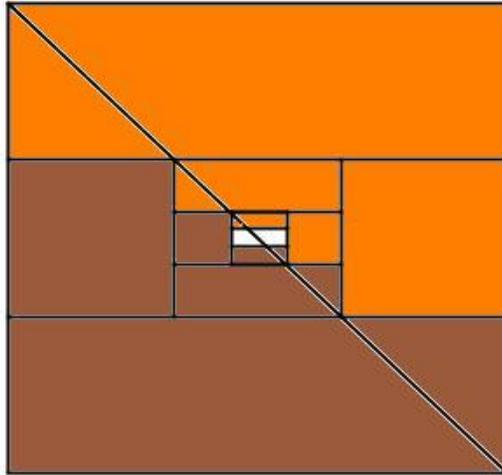


Fig. 4.8.1

Ahora veamos la suma de las fracciones que tienen como denominador potencias de 3 que da como resultado $1/2$.

$$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \dots = 1/2$$



Prueba:

Veamos cómo podemos llegar a nuestra figura que demuestra visualmente la serie, para esto construyamos la siguiente secuencia de figuras (Ver Fig. 4.8.2):

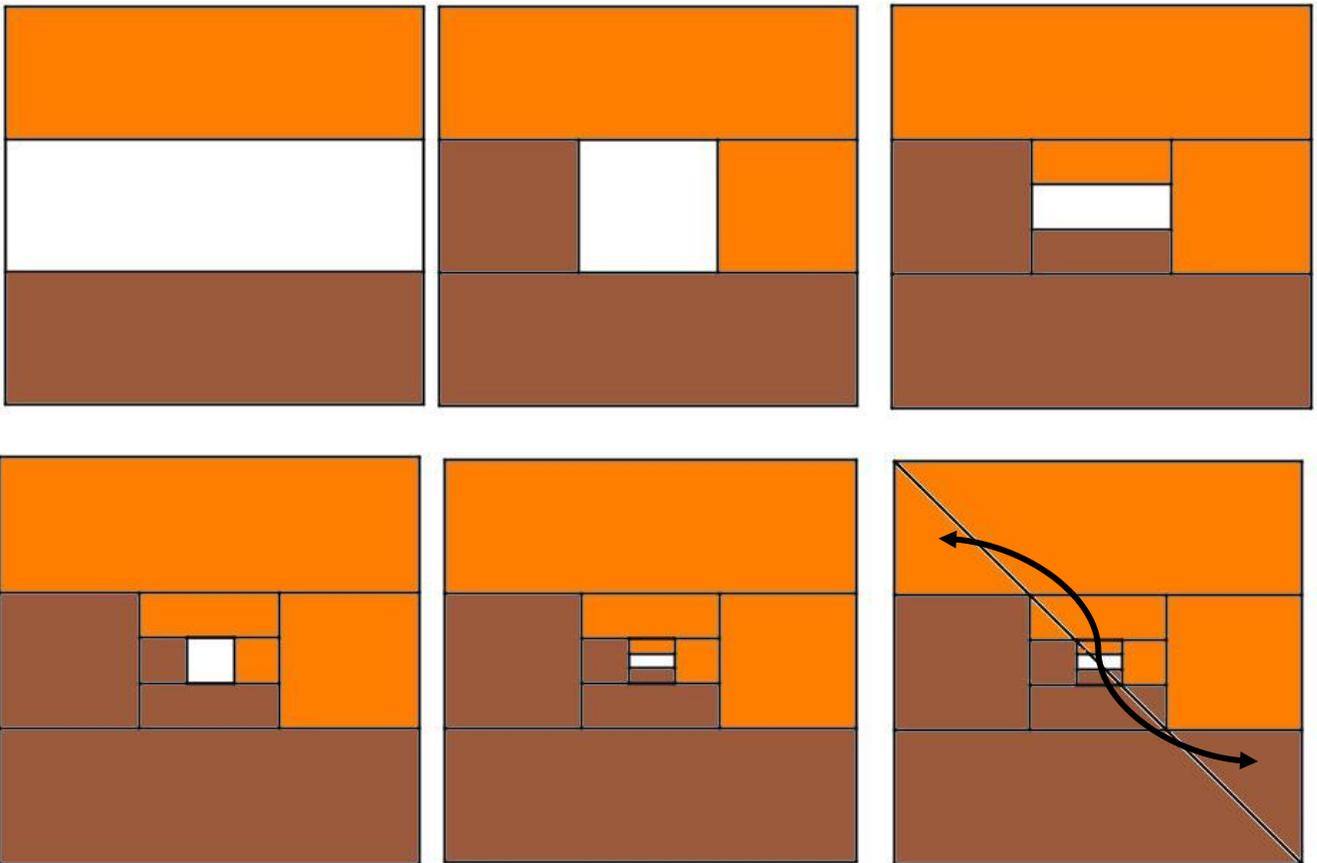


Fig. 4.8.2

Como podemos ver el truco de la prueba visual consiste en trazar la diagonal de nuestro cuadrado original y como en la última figura trasladamos las áreas de los triángulos que se forman por encima de la diagonal trazada, por debajo de dicha diagonal.

Esta idea puede extenderse a encontrar la fórmula para la suma de una serie geométrica general (con un primer término positivo a y razón r). En la Fig. 4.8.3, el procedimiento iterativo consiste en dividir el gran triángulo blanco en trapezoides similares. El triángulo azul y el gran triángulo blanco son similares, por lo que la proporción de horizontal a vertical en cada lado es el mismo, que conduce

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1 - r}$$

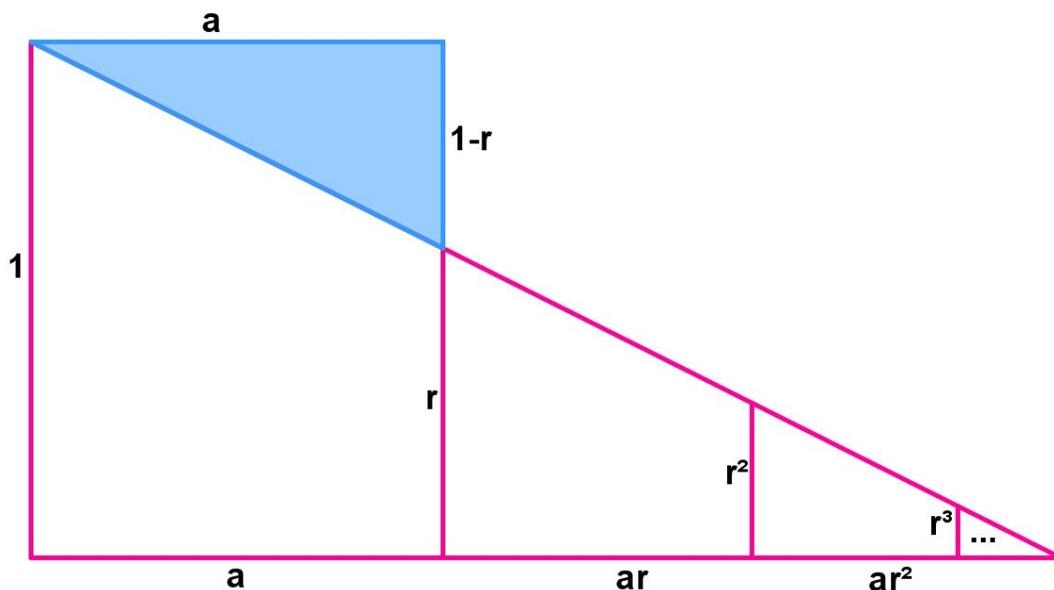


Fig. 4.8.3

4.9 El crecimiento de una figura iterativamente

En lugar de dividir una cifra dada en copias sucesivamente más y más pequeñas de sí mismo, podemos ampliar una figura en forma iterativa. En la Fig. 4.9.1 (a) tenemos un arreglo cuadrado de $4^2 = 16$ puntos, que "crece" a un arreglo de $4^3 = 64$ puntos en la Fig. 4.9.1 (b) mediante la adición de tres copias de sí mismo a lo largo de la parte superior y derecha del la figura. A su vez, la Fig. 4.9.1 (b) "crece" a un arreglo de $4^4 = 256$ puntos de la misma manera en la Fig. 4.9.1 (c).

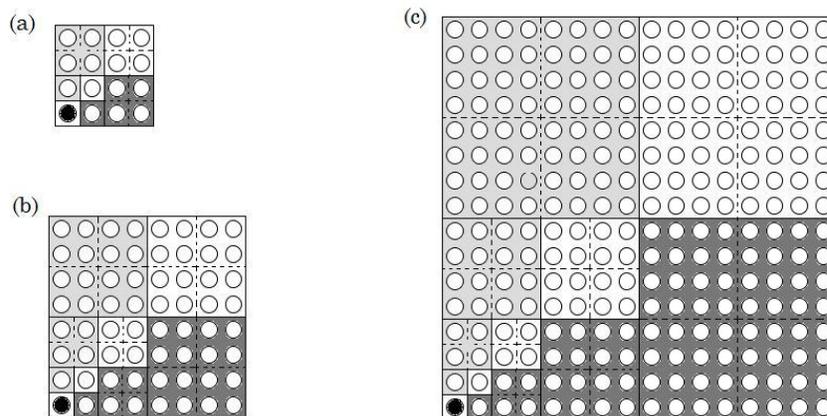


Fig. 4.9.1

Después de n pasos, el lado del cuadrado tiene una longitud de $1 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$, y calculando el número de puntos en el cuadrado de dos formas conduce a

$$1 + 3 + 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = 2^{n+1} \cdot 2 = 4^{n+1}$$

Por lo tanto

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Un patrón similar de crecimiento iterativo puede ser empleado para examinar las sumas de los números triangulares $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Cuando n es una potencia de 2. Por ejemplo, la parte más a la derecha de la Fig. 4.9.2 muestra que

$$3 T_1 + T_2 + T_4 + T_8 + 3 = T_{17} \quad \text{o} \quad T_1 + T_2 + T_4 + T_8 = \frac{1}{3} T_{17} - 1$$

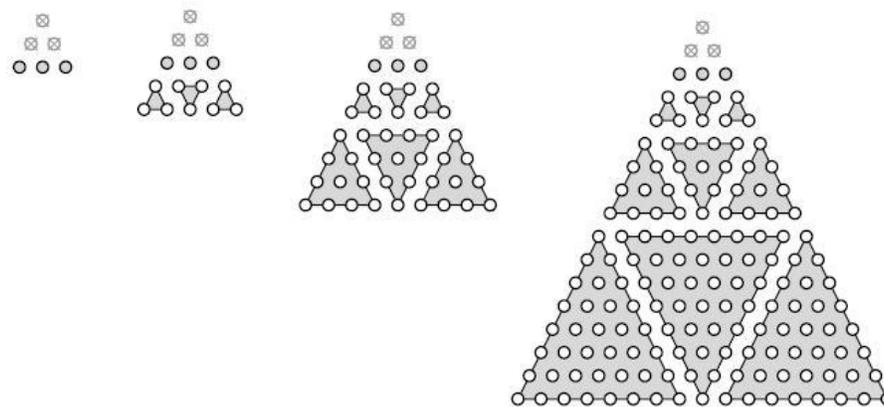


Fig. 4.9.2

Continuando de esta manera, tenemos

$$\sum_{k=0}^n T_{2^k} = T_1 + T_2 + T_4 + \dots + T_{2^n} = \frac{1}{3} T_{2^{n+1}} - 1$$

4.10 Fórmula de Herón.

La notable fórmula de Herón $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ para el área K de un triángulo con lados de longitud a, b, c , y *semiperímetro* $s = (a + b + c)/2$ se puede probar por una variedad de métodos. En esta sección presentamos las pruebas visuales de los dos lemas que reducen la prueba de la fórmula de Herón a usar álgebra elemental. Sea $\triangle ABC$ un triángulo de lados a, b, c , como en la Fig. 4.10.1 (a), y bisecar cada ángulo para localizar el centro de la circunferencia inscrita (como lo hizo Herón). Extender un inradio (radio del círculo inscrito) (longitud r) a cada lado del triángulo ahora el triángulo original queda particionado en seis triángulos rectángulos más pequeños, con longitudes de los lados como se indica en la Fig. 4.10.1 (b).

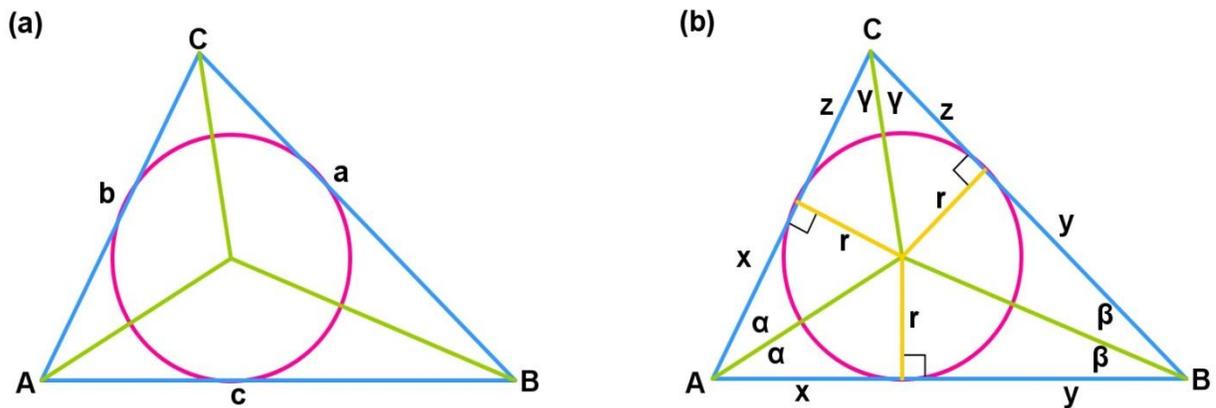


Fig. 4.10.1

Lema 1: El área K de un triángulo es igual al producto de su inradio (radio del círculo inscrito) y semiperímetro.

Prueba:

Como los seis triángulos interiores son todos triángulos rectángulos, se pueden organizar en un rectángulo cuyas dimensiones son r por $x + y + z = s$, como se muestra en la Fig. 4.10.2.

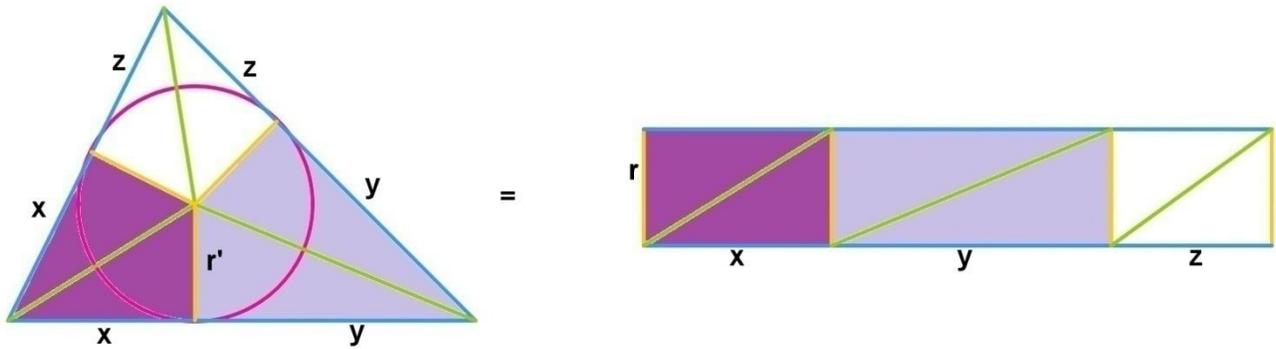


Fig. 4.10.2

Lema 2: Si α, β y γ son cualesquiera ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ entonces $\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1$.

Prueba:

Primero construimos un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y catetos de longitud 1 y $\tan \alpha$ como se muestra en la Fig. 4.10.3. Después construimos el triángulo rectángulo con ángulo agudo β , con catetos como se muestra en la Fig. 4.10.3; y luego el triángulo rectángulo más pequeño con ángulo agudo α y catetos de longitud $\tan \beta$ y $\tan \alpha \tan \beta$. Por último añadir el triángulo rectángulo con ángulo agudo γ . Puesto que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, la figura resultante es un rectángulo, y los lados verticales tienen las mismas longitudes, obteniendo el resultado deseado.

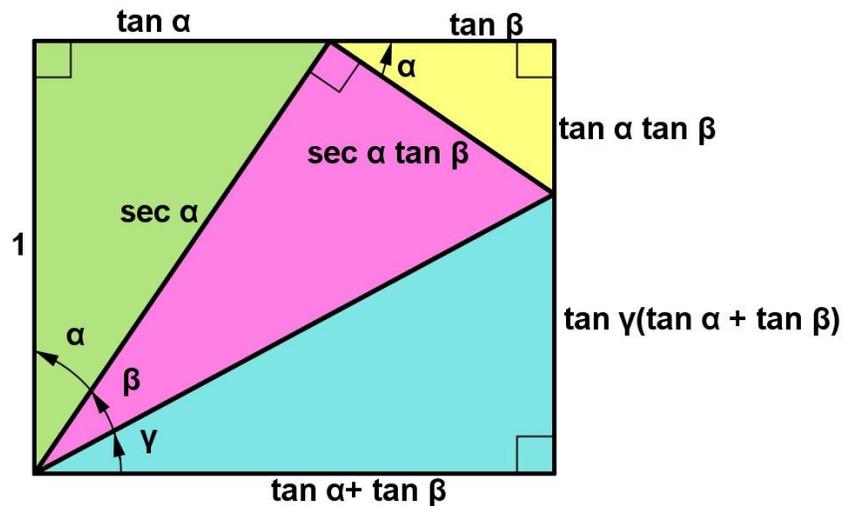


Fig. 4.10.3

Teorema (Fórmula de Herón): El área K de un triángulo con lados de longitud a, b, c y semiperímetro $s = (a + b + c)/2$ está dada por

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Prueba:

Aplicando el Lema 2 a los ángulos α, β , y γ en la Fig. 4.10.1 (b) obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\alpha \tan\beta + \tan\beta \tan\gamma + \tan\gamma \tan\alpha \\ &= \frac{r}{x} \frac{r}{y} + \frac{r}{y} \frac{r}{z} + \frac{r}{z} \frac{r}{x} \\ &= \frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = \frac{r^2s}{xyz} = \frac{K^2}{sxyz} \end{aligned}$$

En el último paso se sigue del Lema 1. Donde el semiperímetro s satisface $s = x + y + z = x + a = y + b = z + c$ de ello se deduce que

$$K^2 = sxyz = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Que completa la prueba.

4.11 La ley del paralelogramo.

¿Sabía usted que en cualquier paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados? Véase la Fig. 4.11.1:

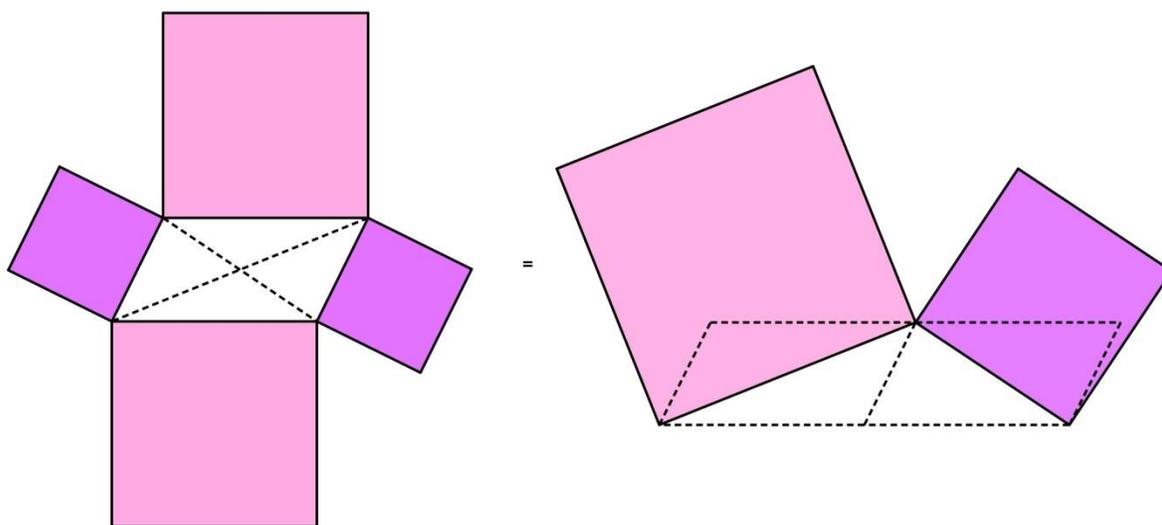


Fig. 4.11.1

En las próximas cuatro figuras mostramos con una secuencia de imágenes cómo los cuatro cuadrados de los lados pueden ser transformados, usando rotaciones, traslaciones y el teorema de Pitágoras, en un cuadrado sobre cada una de las diagonales.

Tenga en cuenta que en el movimiento de la Fig. 4.11.3 a la Fig. 4.11.4, movimos dos rectángulos de color gris claro y un cuadrado de color gris más oscuro en el lado izquierdo de la figura a la derecha.

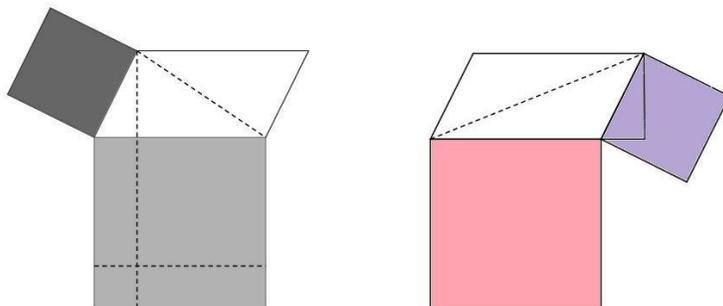


Fig. 4.11.2

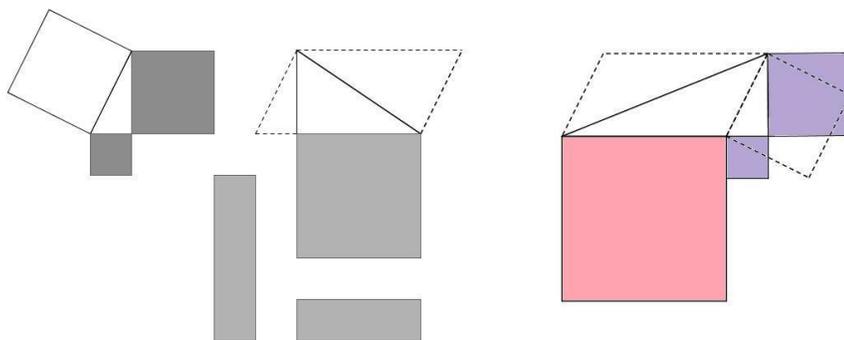


Fig. 4.11.3

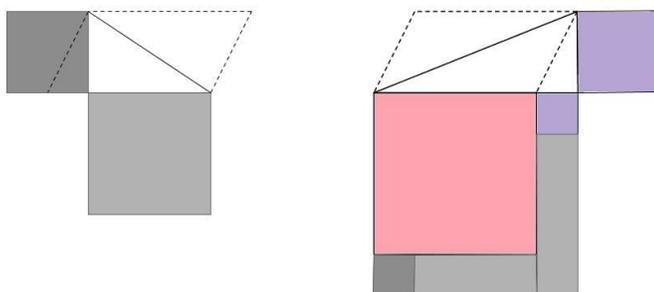


Fig. 4.11.4

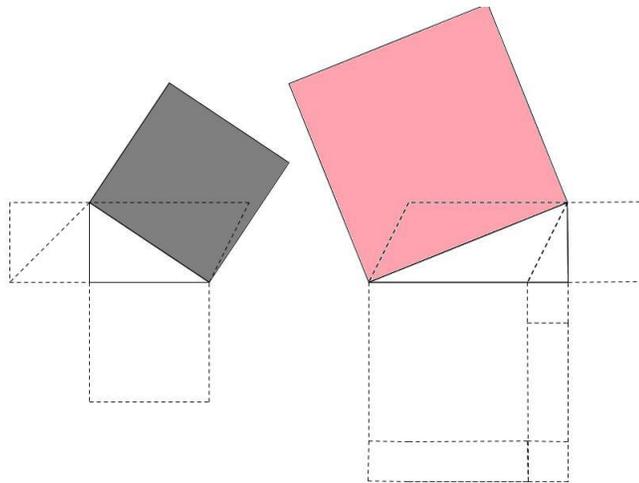


Fig. 4.11.5

4.12 La ley del cuadrilátero.

En la sección anterior, vimos que para cualquier paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados, un resultado que llamamos la ley del paralelogramo. Ahora generalizamos el resultado a los cuadriláteros convexos arbitrarios.

Teorema: En cualquier cuadrilátero convexo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales. Véase la Fig. 4.12.1

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2$$

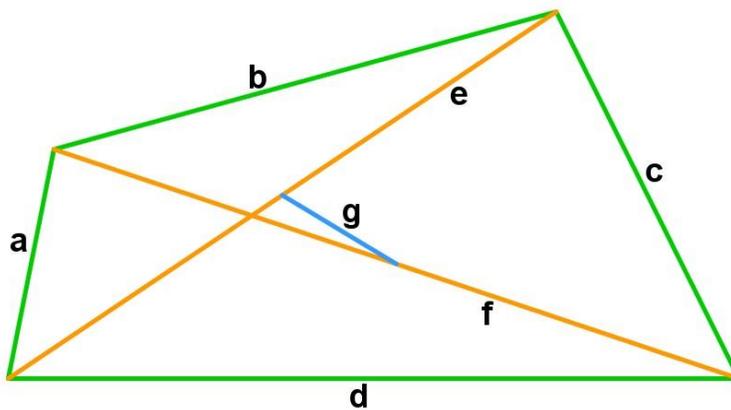


Fig. 4.12.1

Prueba:

Uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero a los puntos medios de las diagonales, como se muestra en la Fig. 4.12.2 (a), se crean dos paralelogramos con lados de longitud según la etiqueta (recordemos que un segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad).

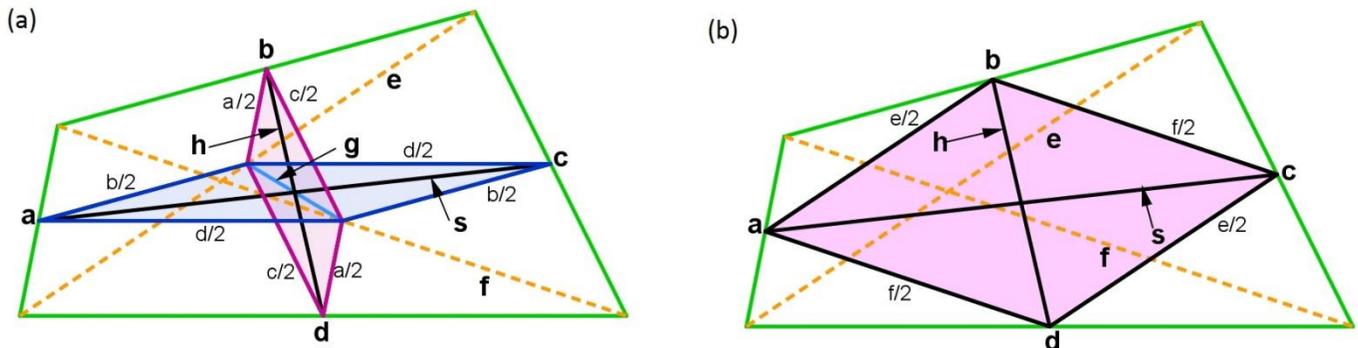


Fig. 4.12.2

Aplicando la ley del paralelogramo a los paralelogramos sombreados en la Fig. 4.12.2 (a) obtenemos

$$g^2 + h^2 = 2 \frac{a}{2}^2 + 2 \frac{c}{2}^2 \quad \text{y} \quad g^2 + s^2 = 2 \frac{b}{2}^2 + 2 \frac{d}{2}^2$$

Sumando, tenemos

$$2g^2 + s^2 + h^2 = 2 \frac{a}{2}^2 + 2 \frac{b}{2}^2 + 2 \frac{c}{2}^2 + 2 \frac{d}{2}^2$$

Uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero como se muestra en la Fig. 4.12.2 (b) obtenemos otro paralelogramo, de modo que

$$s^2 + h^2 = 2 \frac{e}{2}^2 + 2 \frac{f}{2}^2$$

Combinando las dos demostraciones pasadas (y eliminando fracciones) obtenemos el resultado deseado.

Capítulo 5. Uso didáctico

En este capítulo mostraremos algunos ejemplos en donde podemos apoyarnos de las figuras para encontrar la solución de ciertos problemas. Para dar continuidad al tema principal se decidió dejar al final las sugerencias didácticas.

Para el capítulo 1.

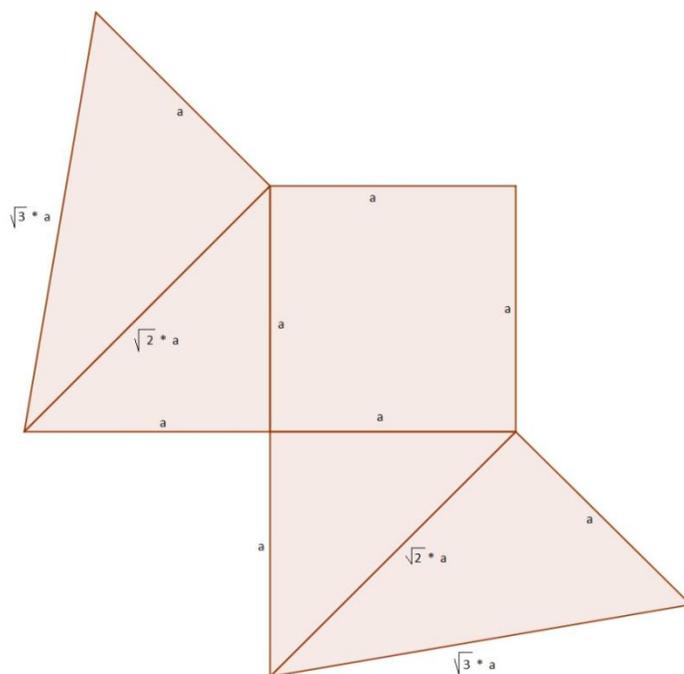
Es recomendable desarrollar con más tiempo el tema de los números figurados, el programa oficial de secundaria 2006 (vigente) marca ver sucesiones de números mediante patrones geométricos, como una de las vías para que los alumnos inicien la manipulación de símbolos algebraicos. El objetivo es que los alumnos obtengan el término "n-esimo" usando n para representar cualquier número entero.

Se pueden desarrollar en clase la demostración algebraica de los números triangulares, pentagonales y hexagonales.

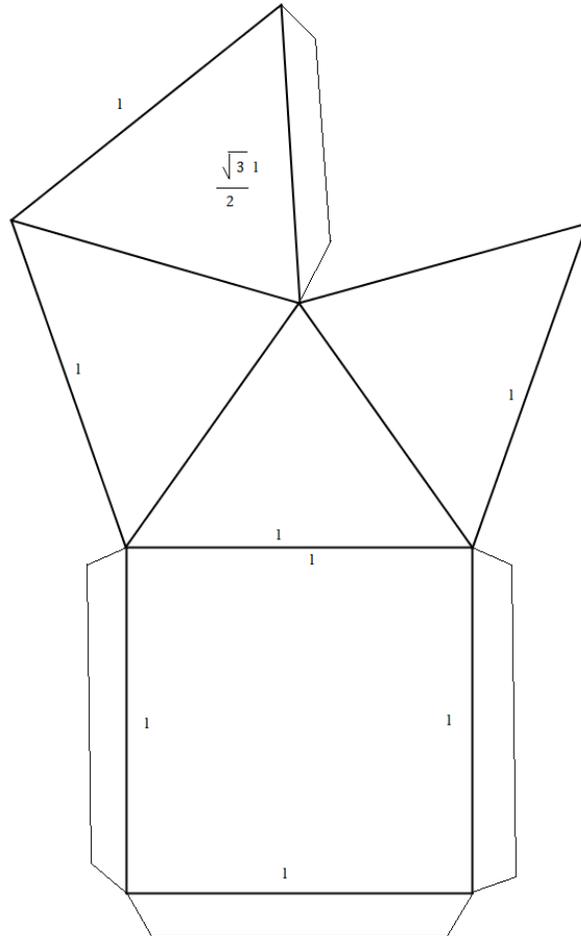
En bachillerato se pueden usar las propiedades de la sumatoria para probar las igualdades que se estudian en el capítulo 1 por inducción matemática. En particular en la demostración de la suma de números triangulares (ver 1.4 y 1.5) se sugiere pedir a los alumnos que hagan el desarrollo de los cortes del cubo.

Las plantillas sugeridas se muestran a continuación (Las siguientes imágenes fueron hechas por la alumna Elizabeth Gante Coronel a la cual agradezco su aportación):

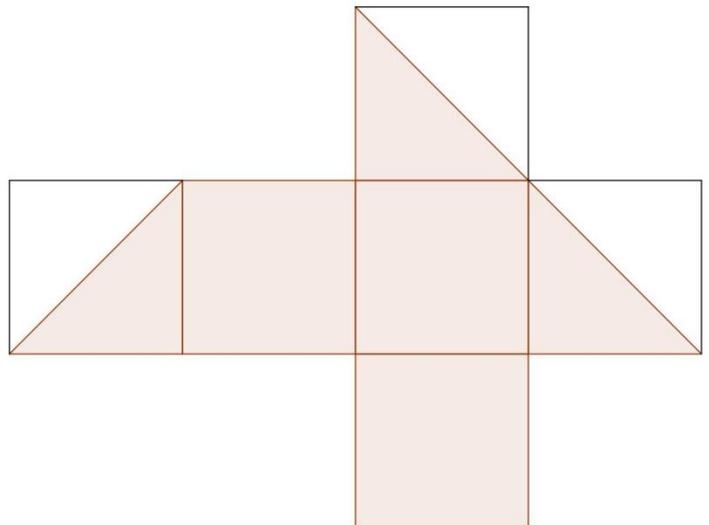
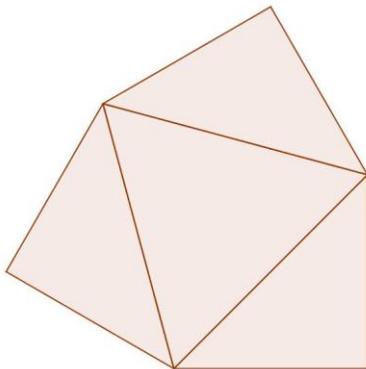
Al armar tres figuras como la siguiente podemos formar un cubo. Se usó para la suma de cuadrados, que visualizamos como una pirámide cuadrangular (ver 1.4). La necesidad de explicar más claramente como se formaba la pirámide nos llevó a resolver el problema desarrollando la plantilla en cartulina.



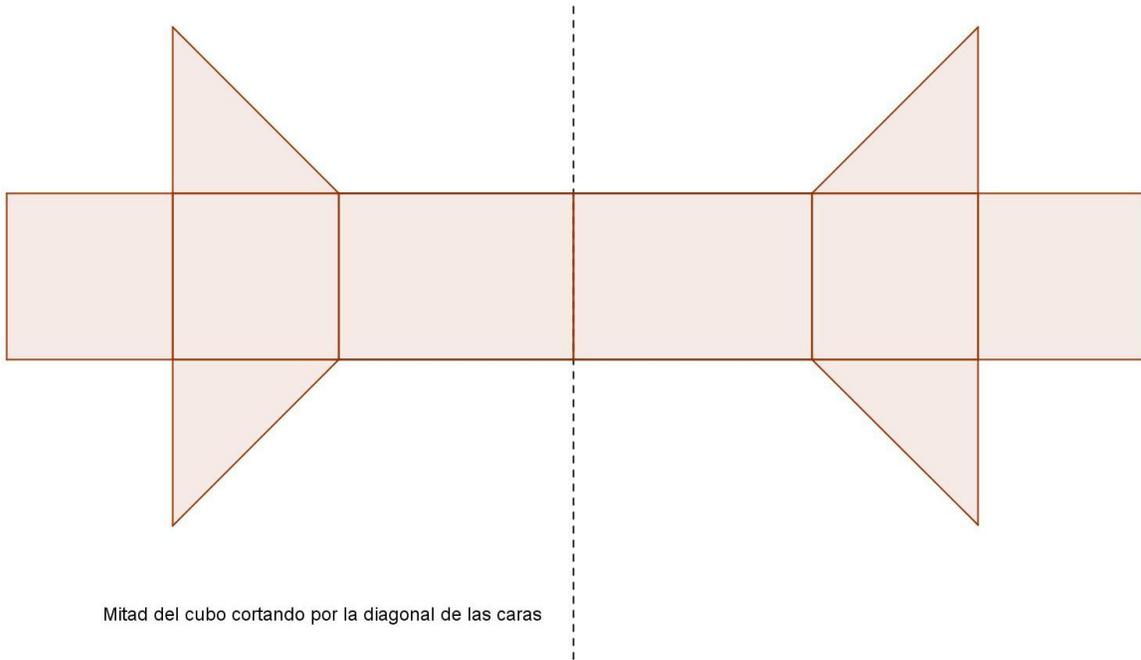
Con seis figuras armables como ésta formaremos otro cubo.



Dos figuras armables como el de la izquierda y uno como el de la derecha forman un cubo. Estas plantillas nos ayudaron a entender mejor los cortes que se hacen en la prueba visual de la suma de los números triangulares (ver 1.5).



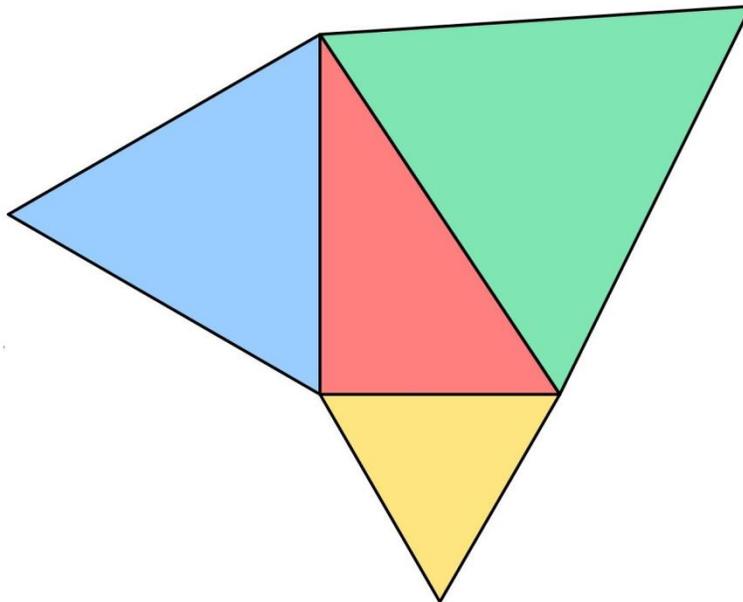
Una figura como la que se muestra a continuación forma otro cubo.

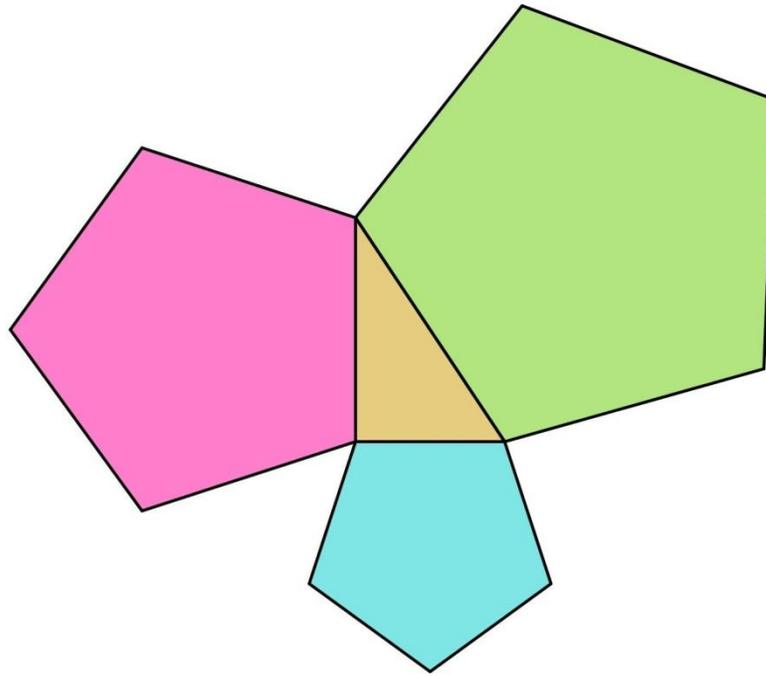


Para el capítulo 2

En el apartado 2.1 se sugiere resaltar que se parte de la conocida ilustración geométrica de la fórmula para el binomio al cuadrado.

Ilustramos el Teorema de Pitágoras dibujando sobre cada uno de los lados polígonos regulares (ver página 42). Mostramos dos ejemplo uno con triángulo equilátero y otro con pentágono regular.





Para el 2.2 se sugiere usar geogebra u otro software para explicar lo que son los giros de una figura en torno a un punto fijo, lo que nos lleva al tema de simetría.

Para el 2.4 se usa la propiedad en donde el área de un paralelogramo entre paralelas se conserva si dejamos fijo uno de los lados y deslizamos el otro. Es la esencia de la demostración de Pitágoras atribuido a Pappus.

En la sección 2.5 nos muestra una forma bonita de trabajar Teorema de Pitágoras con teselados. En los libros de texto de matemáticas para secundaria por ejemplo "El hombre y las matemáticas 2", ahí se ven los teselados como algo novedoso sin embargo no desarrollan ningún resultado y los alumnos lo ven como simple pasatiempo.

Para el tema de áreas, se usa la técnica de "cortar y pegar" que los alumnos suelen usar de manera natural en problemas sencillos de cálculo de áreas.

También con el Arbelos y Salinon de Arquímedes apartado 2.7, se puede motivar el tratamiento de problemas de áreas desde un punto de vista diferente a la clase tradicional que puede motivar a los alumnos.

Para el capítulo 3

Podemos explicar más a detalle las desigualdades y usar las desigualdades del trabajo como ampliación.

El apartado 3.1 es una bonita forma de ver también semejanza de triángulos y podría ser más atractivo para los alumnos que explicándolo de forma tradicional.

El ejemplo 3.4 se introduciría en el tema de pendientes de rectas, para que el alumno comprenda mejor su definición.

La sección 3.6 nos muestra una forma más sencilla de ver una aplicación de la integral.

El ejemplo 3.11 sería una forma más interesante de enseñar las fórmulas de las funciones trigonométricas (suma de ángulos) para salir de la rutina de los libros de texto de trigonometría.

Para el capítulo 4

Utilizamos varias técnicas de resolución de problemas, es decir, reflexiones, traslaciones, rotaciones para preservar área y mediante alguno de los ejemplos presentados aquí será más fácil y menos aburrido para los alumnos introducirles estos temas.

En el apartado 4.1 apoyándonos del programa Geogebra podemos enseñarles a los alumnos como hacer figuras como si utilizáramos regla y compás, que sería mucho más divertido.

En la sección 4.3 nuevamente hacemos uso del programa Geogebra para la realización de los teselados y hacer más agradable las actividades geométricas.

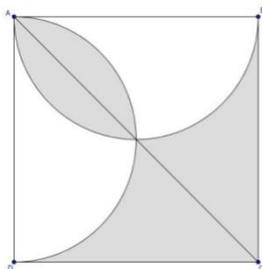
Podemos iniciar con un tratamiento más elemental de las series geométricas y más adelante ilustrarlas como en el trabajo.

Para el 4.3 usamos el programa Geogebra para hacer los mosaicos y explicar de forma más sencilla sus Teoremas.

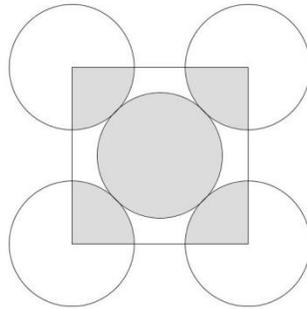
Para el 4.8 mediante procedimientos iterativos podemos introducir el tema de series.

A continuación veremos algunos ejercicios en donde se emplean las traslaciones y rotaciones de áreas para su resolución y la "técnica de cortar y pegar" para resolver problemas de cálculo de áreas es natural para los jóvenes.

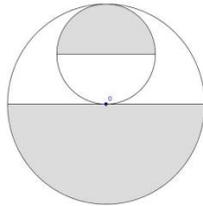
1.-El lado del cuadrado es igual a 10cm. se trazan dos semicírculos con diámetro en uno de los lados. Hallar el área sombreada.



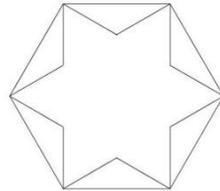
2.-En el diagrama, los cinco círculos tienen el mismo radio, y se tocan como se muestra. El cuadrado pequeño se une a los centros de los cuatro círculos exteriores. La razón del área sombreada de todos los círculos al área no sombreada es:



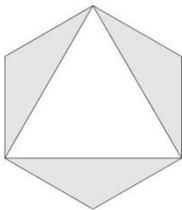
3.-En el diagrama, cada círculo es dividido en dos áreas iguales y O es el centro del círculo mayor. El área del círculo más grande es 64π . El área total de la región sombreada es:



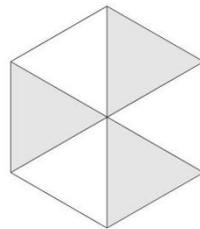
4.-La estrella hexagonal de la figura tiene 12 cm^2 de área. ¿Cuál es, en cm^2 , el área del hexágono regular circunscrito?



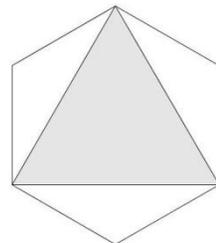
5.-Estos tres hexágonos regulares son del mismo tamaño. X, Y, Z representan las áreas de las zonas sombreadas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



X



Y



Z

A) X es igual a Y pero no a Z
igual a Z pero no a X

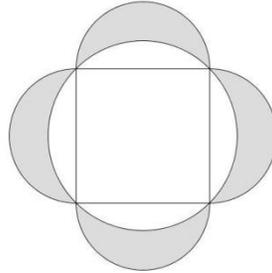
B) X es igual a Z pero no a Y

C) Y es

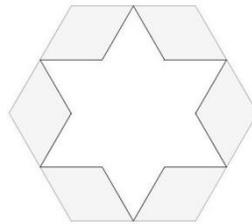
D) X, Y y Z son las tres iguales

E) X, Y y Z son las tres distintas.

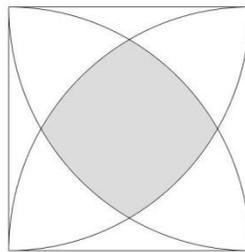
6.-En una circunferencia hay inscrito un cuadrado de lado "a" y sobre sus lados hemos dibujado semicircunferencias como indica la figura. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



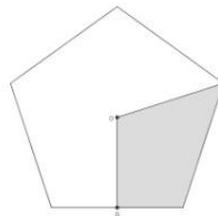
7.-Si el área del hexágono exterior de la figura es 3 cm^2 , el área de la estrella interior en mm^2 , es:



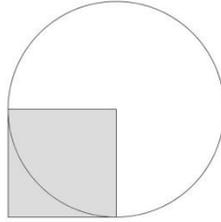
8.- Cuatro cuartos de círculo son dibujados de cada vértice en un cuadrado unitario. Encuentra el área de la región sombreada.



9.- El punto O es el centro del pentágono regular y el punto G es punto medio de uno de los lados. ¿Qué porcentaje del total del pentágono es la región sombreada?

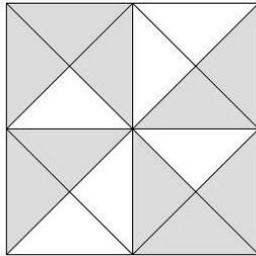


10.- El área del cuadrado es 36cm^2 hallar el área del círculo.

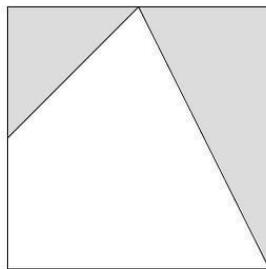


11.- Hallar la razón del área sombreada al área blanca.

a)



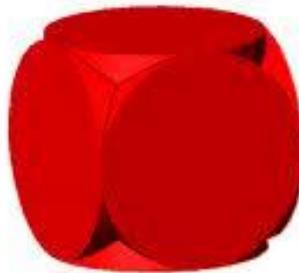
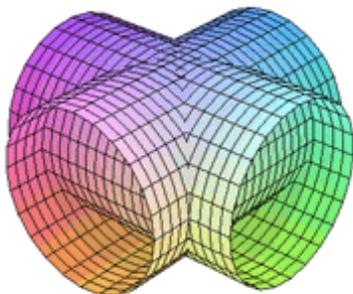
b)



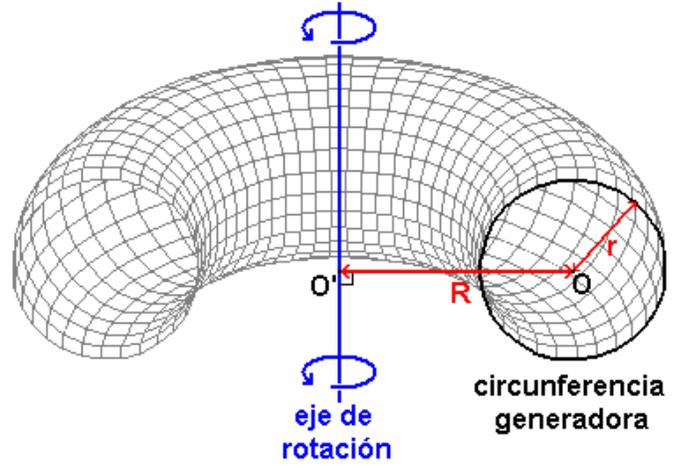
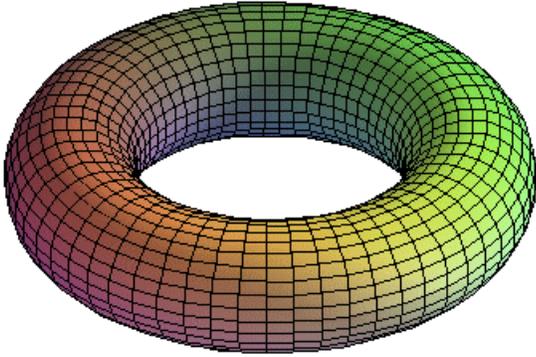
Ejemplos Avanzados

Como mencionamos con anterioridad un ejemplo puede ser que los alumnos en muchas ocasiones no pueden visualizar la figura para determinar el volumen de la intersección de dos cilindros o el volumen del toro (que vienen propuestos en las páginas 463 y 464 del libro de cálculo de James Stewart), únicamente mostraremos las figuras.

Intersección de dos cilindros.



Toro



Conclusiones.

“La visualización es un catalizador básico para el entendimiento y la memoria, sin ella nuestro cerebro debe trabajar más duro para entender conceptos y habilidades, tendríamos una tendencia a rechazar los contenidos de entendimiento presentados sin ellos. La visualización usada antes de la discusión simbólica incrementa la probabilidad de que los estudiantes recuerden los conceptos matemáticos que están siendo enseñados.

No hay nada como una demostración visual para que un resultado matemático quede suficientemente claro. Las demostraciones analíticas son necesarias, tienen sus ventajas, pero si mediante un dibujo podemos ver el resultado, podemos admirar mucho más su belleza y dicho resultado se nos acaba quedando mucho mejor”. E. D. LAUGHBAUM

Por desgracia no podemos demostrar de manera visual todo resultado matemático (o sí, quién sabe). Además, aunque tengamos un gráfico explicativo del mismo siempre nos hará falta una demostración formal que nos asegure que dicho resultado es cierto. De todas formas, eso no resta ni un ápice de belleza a las demostraciones visuales.

Medina [9] explica 12 principios en relación con el aprendizaje, entre otros comentamos rápidamente el Principio 4: “No prestamos atención a las cosas aburridas”. Principio 9: “Estimule más sentidos”. Principio 10: “La vista domina todos los sentidos”. Esto resalta la importancia de la visualización.

Para el principio 9 propone además las siguientes reglas para elaborar buenas presentaciones.

1. Los estudiantes aprenden mejor de las palabras y las imágenes que de las palabras solas.
2. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les presenta simultáneamente palabras e imágenes que se corresponden, que cuando se les presenta sucesivamente.
3. Los estudiantes aprenden mejor cuando se excluye material superfluo en lugar de incluirlo.
4. Los estudiantes aprenden mejor de la animación y la narración que de la animación con texto en pantalla.

El Principio 10. Cuanto más visual sea la información recibida, mayores serán las probabilidades de que sea reconocida y recordada. Este fenómeno es tan dominante que ha recibido un nombre propio: efecto de superioridad pictórica.

Los maestros deberían aprender por qué las imágenes captan la atención de los alumnos.

“Cuando se requiere explicar un concepto, es más fácil hacerlo si se dispone de una imagen, a cuando se carece de ella”.

Bibliografía.

[1] ALSINA, Claudi, et. al. Math made visual: Creating images for understanding mathematics. 1º Ed. United State of America: Editorial The Mathematical Association of America, 2006. 173 p.

[2] BALDOR, Aurelio. Geometría y Trigonometría. 1º Ed. México: Editorial Publicaciones Culturales, 1983. 405 p.

[3] NORTHROP, Eugene. Paradojas Matemáticas. México: Editorial Uthea, 1981. 355 p.

[4] FETISOV, A.I. La demostración en Geometría. 2ª. Ed. México: Editorial LIMUSA, 1973. 72 p.

[5] STEWART, James. Cálculo: Conceptos y contextos. 3ª. Ed. México: Editorial Thomson, 2006. 1160 p.

[6] PICKOVER, Clifford A. Wonders of numbers. 1º Ed. United State of America: Editorial Oxford University, 2001. 392 p.

[7] STEINHAUS, Hugo. Instantáneas matemáticas. Barcelona: Editorial Biblioteca Científica Salvat, 1987. 316 p.

[8] BOYER, Carl B. Historia de las matemáticas. España: Editorial Alianza, 1986. 808 p.

[9] MEDINA, John. Los 12 principios del cerebro. 1ª ed. Colombia: Grupo Editorial norma, 2010. 332 p.

[10] GARDNER, Martin. Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas. España: Editorial Labor, 1994. 332 p.

[11] ALSINA, Claudi; et al. Materiales para construir la Geometría. 1º Ed. Madrid: Editorial Síntesis S.A, 1991. 168 p.

[12] DOROFÉIEV, G; et al. Temas selectos de matemáticas elementales. 1º Ed. Moscú: Editorial MIR, 1973. 509 p.

[13] ALVAREZ, María de la Paz. El sorprendente teorema de Pitágoras. Página consultada 18 de octubre de 2011:

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/TemasGeometria/V5n1Jun2004/index.htm>

[14] SMULLYAN, R. Pythagorean Theorem

Página consultada 18 de octubre de 2011:

www.cut-the-knot.org/phythagoreas/index.shtml.

[15] BRAVO, María de Lourdes; et al. El dibujo geométrico en la resolución de problemas.

Página consultada el 22 de Enero de 2010.

www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0503.pdf

[16] NELSEN, Roger. (2002). Proof Without Words: The Area of a Salinon. Mathematics Magazine, 75, 130-130.

legacy.lclark.edu/~mathsci/salinon.pdf

[17] NELSEN, Roger. (2009). Proof Without Words: Squares in Circles and Semicircles. Mathematics Magazine, 82 (5), 359-359.

legacy.lclark.edu/~mathsci/twosquares.pdf

[18] NELSEN, Roger. (2005). Proof Without Words: Sums of Triangular Numbers. Mathematics Magazine, 78 (3), 231-231.

legacy.lclark.edu/~mathsci/sums-of-tri.pdf

academic.sun.ac.za/mathed/amesa/amesap_n65_a8.pdf

[19] NELSEN, Roger. (2007). Proof Without Words: The Area of Right Triangle. Mathematics Magazine, 80 (1), 45-45.

legacy.lclark.edu/~mathsci/area-rt-tri.pdf

[20] NELSEN, Roger. (2002). Proof Without Words: The Area of Arbelos. Mathematics Magazine, 75(2), 144-144.

legacy.lclark.edu/~mathsci/arbelos.pdf

www.cut-the-knot.org/curriculum/Geometry/Arbelospww.shtml

Las siguientes páginas nos dan una prueba visual del teorema de Pitágoras por Pappus

<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/pitagoras4.html>.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/pappus/actividad.html