Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

c-compacidad en grupos topológicos

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Arturo Sánchez González

Directores de tesis

Dr. Hugo Juárez Anguiano
Dr. Agustín Contreras Carreto

Puebla Pue.
Junio 2014

In memoriam
Lilia Romero Rivera

Descansa en paz abue,
Todo irá bien...
Gracias por tus consejos

Agradecimientos

A mis padres Macaria y Guillermo por su apoyo, paciencia, esfuerzos, desvelos, fatigas y todo lo que han hecho para continuar en cada momento, ustedes son mi ejemplo a seguir, es un orgullo ser su hijo.
A mis hermanos Martín y María Guillermina que siempre me dieron su ayuda cuando fue necesario y me motivaron a avanzar cada vez más en mis estudios.
A mis amigos (en orden alfabético): Alfredo, Ángel, Carlos, Cecilia, Gonzalo, Evelyn, Francisco, Jessica, Jorge, Julio, Ruth y Thalía, por el apoyo en varias etapas de mi vida y los inolvidables momentos que hemos pasado juntos. Si no he nombrado a alguno, pido excusen dicha omisión, los buenos recuerdos se enciman unos sobre otros.
A Ibeth por ser mi inspiración y felicidad durante los últimos años, pues ello me ha permitido crecer en todos los aspectos.
A todos mis profesores a lo largo de mi formación educativa por sus enseñanzas, consejos y llamadas de atención, pues ello me ha permitido pulir varios aspectos de mi persona a nivel profesional y personal.
A mis asesores de tesis, Dr. Hugo Juárez y Dr. Agustín Contreras, por sus directrices, sugerencias y correcciones, así como por la confianza para llevar a cabo este trabajo.
A mis sinodales, Dr. Alexander Bykov, Dr. Iván Sánchez y Dr. Juan Angoa por sus finas atenciones, sus sugerencias y sus consejos para mejorar esta tesis.
Finalmente, a quienes directa o indirectamente me han apoyado durante mi vida.
A todos, ¡muchas gracias!

Arturo
Junio 2014

LII
La elección del maestro[1]

1.¿Qué es esto, Lucilio, que cuando nosotros nos inclinamos hacia un sitio, nos atrae a otro y nos empuja hacia allí de donde deseamos apartarnos? ¿Qué es lo que lucha contra nuestra alma y no nos permite que queramos nada una vez para siempre? Fluctuamos entre varios propósitos; no queremos nada libremente, nada absoluto, nada perpetuo. – 2. <<Es – dices – la estulticia, que no permanece firme en nada, nada le agrada durante mucho tiempo.>> Pero, ¿cómo o cuándo desprendernos de ella? Ninguno por sí mismo se basta para desprenderse de ella; es necesario que alguno eche la mano, que alguno eduque. – 3. Epicuro dice que algunos llegaron a la verdad sin ayuda de nadie, que ellos mismos se hicieron el camino; a éstos los halaga en gran manera, a estos que tuvieron la decisión por ellos mismos, que se entregaron a ellos mismos; [sigue diciendo] que algunos necessitaron ayuda ajena; no hubiesen ido si nadie les hubiese precedido, pero siguieron bien; de entre éstos, dice que estaba Metrodoro; ingenio éste noble, pero de segunda línea. Nosotros no somos de aquella primera línea, pero bien nos trata si somos admitidos en la segunda. Ni siquiera desprecies a ese hombre que puede salvarse por el favor de otro; y el querer salvarse [ya] es mucho esto. – 4. Además de estas [dos categorías de hombres] encontrarás otra clase de hombres que no han de desdeñar la de aquellos que pueden ser obligados e impelidos al bien, quienes no sólo necesitan un guía, sino de uno que los ayude y, por así decirlo, que los obligue; ésta es la tercera categoría. Si buscas un ejemplo de ésta, Epicuro dice que Hermaco fue de esa clase. Así, pues, felicita al primero, [pero] admira más al segundo; pues aunque uno y otro llegaron al mismo fin, sin embargo, es mayor la alabanza al haber llevado a término lo mismo en una materia, [esto es, en un hombre], más difícil [de manejar]. – 5. Pues piensa que han sido levantados dos edificios, dispares desde sus cimientos, igualmente elevados y magníficos. El uno recibió unos cimientos sólidos; allí creció en seguida la obra; al otro fatigaron los cimientos sobre tierra húmeda y blanda y quedó agotado por mucho esfuerzo mientras se llega a suelo firme. La parte grande y más difícil del segundo queda oculta para el que contempla lo que hicieron el uno y el otro[2]. – 6. Algunos tempe-

[1] Séneca, *Cartas a Lucilio*, prólogo y traducción literal del latín por Vicente López Soto, Juventud, 3a. ed., España, 2006, Col. "Libro de bolsillo Z".

[2] Texto dudoso, pero no si argumentamos así: << A la vista, los dos han realizado su obra, pero se ignora el esfuerzo del segundo.>> [Nota del traductor]

ramentos [son] fáciles y dispuestos; otros, como dicen, deben manejarse con esfuerzo y preocupación por sus cimientos. Así, pues, yo llamaré más feliz al que no tuvo dificultad consigo mismo, [pero] ha merecido más por sí mismo el que ha vencido la malignidad de su naturaleza y no se ha encaminado, sino que ha ido arrastrado hacia la sabiduría. – 7. Conviene que sepas que este temperamento duro y penoso se nos ha dado a nosotros; caminamos a través de obstáculos. Así, pues, luchemos y reclamemos la ayuda de algunos. <<¿A quién reclamaré?>>, dices. A uno u otro. Pero tú dirígete a los primitivos, que están desocupados; [pues] no pueden ayudar solamente los que existen, sino también los que existieron. – 8. Pero dentro de esos que existen elijamos a los que no atropellan con gran celeridad las palabras y quieren manejar los lugares comunes y son rodeados por gente vulgar, sino a los que enseñan [con la ejemplaridad de] su vida, a los que cuando dijeron qué debe hacerse lo prueban con [la conducta de] su vida; qué debe evitarse y no son sorprendidos nunca en lo que dijeron que debe evitarse. Elige como ayuda al que más admires, cuando lo veas que cuando lo oigas. – 9. Y no por eso te prohibiré que también oigas a los que tienen la costumbre de admitir y disertar con el pueblo, con tal que con este propósito acudan al pueblo, el de que lleguen a ser mejores y los hagan, si no hacen esto por ambición. Pues, ¿qué cosa es más vergonzosa que la filosofía tratando de obtener aclamaciones? ¿Acaso el enfermo alaba al médico que corta [un miembro]? – 10. Callad, acoged favorablemente y prestaos a la curación; aunque me aclamarais, no lo escucharé de otra forma que si gimierais al poner el dedo [en la llaga] de nuestros vicios. ¿Queréis atestiguar que atendéis y os conmovéis por la grandeza de las cosas? Sea pues. ¿Por qué no lo he de permitir que jusguéis y aportéis el sufragio de lo [que es] mejor? En la escuela de Pitágoras, los discípulos debían guardar silencio cinco años. Por tanto, ¿crees que se les permitió a ellos hablar y alabar en seguida? – 11. Mas, ¡cuán grande es la demencia de aquel al que despiden sonriente del auditorio las aclamaciones de los ignorantes! ¿Por qué te alegras de haber sido alabado por estos hombres, a los que tú mismo no puedes alabar? Fabiano, hablaba al pueblo, pero era escuchado con discreción; de vez en cuando surgía una gran aclamación de los que alaban no el tono del discurso pronunciado de modo inofensivo y flojo, sino el que había evocado la grandeza de las ideas. – 12. Hay una diferencia entre la aclamación de un teatro y [la] de una escuela; pues existe también alguna licencia en la alabanza. Todas las cosas, si se observan, tienen sus indicios, y es posible tomar argumento, [para conocimiento] de las costumbres, de las cosas más insignificantes: al impúdico lo descubre el modo de andar, un movimiento de la mano, a veces una respuesta, un dedo llevado a la cabeza, un [cierto] movimiento de los ojos; la risa delata al malvado; el rostro y su porte al demente. Esas cosas, pues, se ponen de manifiesto por sus síntomas. Sabrás cuál es cada uno si observas de qué modo alaba, de qué modo es alabado. – 13. Por aquí y por allá un auditorio multimillonario amenaza al filósofo, y sobre su cabeza posa una muchedumbre de admiradores; no es alabado él entonces, si lo comprendes bien, sino que es aclamado. Déjese ese griterío para aquellas profesiones que tienen como fin agradar al pueblo, adórese a la filosofía. – 14. Se habrá de permitir a los jóvenes seguir alguna vez los impulsos del corazón, mas entonces cuando hagan esto por impulso, cuando no puedan imponerse a sí mismos silencio; tal alabanza es como un estímulo para el auditorio y obra de manera estimulante para los jóvenes. Conmuévanse por las ideas, no por las palabras altisonantes; por otra parte, la elocuencia perjudica, si no les facilita el deseo de la verdad, sino el de sí misma [la elocuencia]. – 15. Ahora aplazaré esa cuestión, pues exige un propio y extenso planteamiento de cómo debe hablarse al pueblo, qué debe permitírsele a él ante el pueblo y qué al pueblo delante de él. No habrá duda de que la filosofía ha sufrido daño después de que se la ha prostituido; pero puede mostrarse en su santuario, con tal que la lleve no un vendedor ambulante, sino un maestro.

Introducción

El estudio formal de los grupos topológicos se remonta al artículo de Leja, *Sur la notion du groupe abstrait topologique* [10], presentado en 1927, en el cual se establece por primera vez la definición de grupo topológico, aunque los problemas relacionados a esta estructura aparacen dentro del análisis con el desarrollo de los grupos de Lie y varias de sus propiedades. Como es de esperar, la combinación de la estructura algebraica de grupo con la estructura de espacio topológico ha dado lugar al crecimiento de una rama de la Matemática en la cual convergen al menos tres áreas: Álgebra, Topología y Análisis, lo que muestra, *per se*, la riqueza del concepto de grupo topológico.

Uno de los propósitos de esta tesis es explorar algunas de las propiedades básicas de grupos topológicos, pues se obtienen resultados sorprendentes con muy poca herramienta matemática, por ejemplo, es muy fácil demostrar que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, lo cual no ocurre con cualquier espacio topológico, además, se pueden construir subgrupos con propiedades fuertes con poco esfuerzo (relativamente). También, respecto a las propiedades de separación se tienen hechos maravillosos, por ejemplo, si un grupo es T_0 entonces es un espacio de Tychonoff, lo cual permite estudiar, de manera más o menos sencilla, cualquier grupo topológico.

Otro de los propósitos es estudiar cómo algunas propiedades de finitud sobre grupos topológicos se relacionan con la compacidad. Por ello se vuelve pertinente la revisión de los $\overline{FC}$-grupos, cuyo origen se debe a Usăkov a partir del estudio, en la década de los 60's, de grupos conexos, grupos con un subgrupo abierto y compacto, y el grupo cociente G/G_0, donde G_0 es la componente conexa del elemento identidad. Es importante mencionar que Grosser y Moskowitz generalizaron el concepto en su artículo *Compactness conditions in topological groups* [6] con el fin de obtener resultados menos restrictivos acerca de compacidad en grupos topológicos.

Ya que uno de nuestros intereses es la Teoría de Categorías, una manera

de relacionarlo con la Teoría de Grupos Topológicos y, en particular, con la compacidad en grupos topológicos es mediante el estudio de la compacidad categórica. El Teorema de Kuratowski-Mrówka (ver Teorema 1.23) caracteriza la compacidad en el caso de espacios topológicos de Hausdorff, a la vez que sugiere una manera de definir la compacidad categórica en grupos topológicos: Un grupo G de Hausdorff es *categóricamente compacto*, abreviado *c-compacto*, si para cualquier grupo H se cumple que la proyección canónica $\pi_H : G \times H \longrightarrow H$ manda subgrupos cerrados de $G \times H$ en subgrupos cerrados de H. A primera vista no aparece ningún concepto categórico, pero al observar en detalle notamos que en la definición dada antes requiere, al menos, de las siguientes condiciones dentro de una categoría arbitraria: *a*) productos finitos, *b*) subobjetos, *c*) imágenes de subobjetos bajo morfismos, y *d*) una noción de subobjeto cerrado. Manes dio una definición de c-compacidad en los siguientes términos: Un objeto X es c-compacto si la proyección $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ es un morfismo c-cerrado para cada Y. Sin embargo, esta definición resultó incompleta en el sentido de la existencia de espacios compactos no c-compactos. Lo anterior motivó a Dikranjan y Giuli a proponer una formulación distinta que ha resuelto el problema anterior y algunos otros: Un objeto X es c-compacto si la proyección $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ es un morfismo c-preservador para cada Y. Para más detalles remitimos al lector al **Appendix** de [12] y al libro de Dikranjan y Tholen [3].
Justamente el problema de definir correctamente la c-compacidad para recuperar el sentido topológico de compacidad (con la idea de hacer topología en una categoría), lleva de la mano a un problema interesante: **En la categoría de los Grupos Topológicos, ¿la c-compacidad coincide con compacidad?** Dikranjan y Uspenskij en [4, **Question 5.2**] se preguntaban acerca de la existencia de un grupo discreto infinito y c-compacto, ya que ello daría una respuesta negativa a la pregunta planteada. Fue en 2013, cuando Klyachko, Yu y Osin respondieron afirmativamente a Dikranjan y Uspenskij en [9], con lo cual el problema que persiste es el siguiente: **¿En qué clases de grupos topológicos la compacidad coincide con compacidad?**. En [4] se exhiben varios ejemplos de clases de grupos en las cuales c-compacidad coincide con compacidad, a la vez que se desarrollan conceptos más laxos, los cuales son estudiados a profundidad en **Chapter 4** de [12].
En consideración a este preámbulo la presente tesis se estructura de cuatro capítulos. El primer capítulo es de preliminares, donde se aprovecha para establecer convenciones acerca de notación y conceptos algebraicos y topológicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo. También, se presentan

algunas propiedades de los espacios compactos de Hausdorff. Este capítulo es pertinente debido a la polisemia existente en la literatura, principalmente en lo que respecta a los axiomas de separación.

El Capítulo 2 es una introducción a la Teoría de Grupos Topológicos; esto se hace con dos objetivos: *1*) mostrar algunos de los resultados elementales de la teoría, y *2*) exhibir algunas de las técnicas de trabajo con grupos topológicos. Para el desarrollo de este capítulo se siguió el orden dado en [18] en vez del dado en [7], y se combinó con la presentación dada en [12]. También se revisó el excelente texto [1], el cual se recomienda al lector interesado en estructuras más laxas (semigrupos topológicos, grupos casitopológicos, grupos semitopológicos, etc.) o en estructuras más restrictivas (anillos topológicos, campos topológicos, etc.).

El primer acercamiento al problema que nos interesa se presenta en el Capítulo 3, donde se estudian los $\overline{FC}$-grupos y algunas de sus propiedades principales. Asimismo, se aprovecha este capítulo para introducir la noción algebraica de *extensión* y se le relaciona con la estructura de grupo topológico.

En el Capítulo 4 se tratan los conceptos necesarios para atacar el problema de la c-compacidad. Al principio se define el concepto de c-compacidad y se estudian algunas de sus propiedades elementales, para luego dar un salto conceptual que permita observar las similitudes con la compacidad, como lo es la caracterización con filtros especiales de la c-compacidad y su relación con el Teorema de Tychonoff (respecto a productos). La segunda parte del capítulo se dedica a revisar algunas clases de grupos en las cuales la c-compacidad coincide con la compacidad usual; esta sección se concluye con la presentación de una clase más en la cual se verifica esta equivalencia: la clase de los $\overline{FC}$-grupos localmente compactos.

Se incluyen tres apéndices con la finalidad de hacer autocontenido este trabajo. En el Apéndice A se da una revisión a la topología compacto-abierta para lograr que el grupo de automorfismos de un grupo topológico. También se introducen acciones de grupo sobre espacios topológicos con la finalidad de simplificar la construcción del producto semidirecto de grupos topológicos. Aquí se sigue la construcción realizada en [16, **Chapter C**].

El Apéndice B versa sobre compleciones de grupos topológicos, y en él se demuestra que cualquier grupo topológico admite una compleción en el sentido de Raĭkov y además se prueba que cualquier grupo localmente compacto es completo. En la escritura de este apéndice se siguió el desarrollo de [12] por su concisión, aunque para un estudio profundo de estructuras uniformes y compleciones remitimos al lector a [15].

El último apéndice difiere de todo el contenido anterior por su temática puramente algebraica. La primera parte se dedica a revisar la condición de finitud local en un grupo, ya que en los grupos infinitos localmente finitos tiene lugar la existencia de subgrupos abelianos infinitos. En la segunda parte se estudia la contraparte algebraica de los $\overline{FC}$-grupos, los FC-grupos, con la finalidad de permitir una prueba del Teorema principal de esta tesis. Es de notar, que los $\overline{FC}$-grupos finitos son, salvo por la estructura topológica, FC-grupos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer convenciones acerca de los conceptos que serán utilizados. En principio, consideraremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de Teoría de Conjuntos, Teoría de Grupos y Topología.

Usaremos los símbolos usuales de la Teoría de Conjuntos, en particular, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales sin el cero y ω al conjunto de números naturales con cero. Como es habitual $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denota a los números enteros, los números racionales y los números reales, respectivamente. También, si X es un conjunto, $1_X : X \longrightarrow X$ denota a la función identidad y en caso de conjuntos con estructura donde el conjunto subyacente sea el mismo pero no la misma estructura usaremos id_X para referir la función identidad. Para una revisión intuitiva y rápida referimos al lector al capítulo de preliminares de [2].

Respecto a Teoría de Grupos usaremos $(G, \cdot)$ para denotar un grupo y, en general, emplearemos las definiciones y teoremas dados en [14], con la salvedad de que el *producto directo* de grupos será entendido como el producto cartesiano con las operaciones coordenada a coordenada, y al subgrupo formado por los elementos cuyas entradas son casi todas identidad salvo una cantidad finita le llamaremos *suma directa*. Asimismo, cambiamos la notación algebraica de dicha referencia por la notación presentada aquí.

Para la parte de Topología usaremos principalmente [17] y la complementaremos con [5]. Con $\mathcal{V}_X^\circ(x)$ denotaremos a la familia de vecindades abiertas de x en el espacio topológico X y cuando no haya lugar a confusión se empleará solamente $\mathcal{V}^\circ(x)$, también, $int_X(A)$ y $cl_X(A)$ denotan el interior y la cerradura de un conjunto A en un espacio X, respectivamente, y si no hay

ambigüedad se omite el subíndice. Cuando no se especifique la topología de un espacio X se usará τ_X para referirse a ella.
En la siguiente sección se presentan algunas definiciones con la finalidad de aclarar en qué sentido se usa cada concepto en consideración a la variedad de significados que aparecen en la literatura. También se establecen algunos teoremas que serán empleados en algunas pruebas, los cuales son bien conocidos y por ello se omite su prueba y se invita al lector a consultar las pruebas respectivas en las referencias indicadas al inicio de este párrafo.

1.1. Algunas propiedades de espacios compactos de Hausdorff

En primer lugar, y con la finalidad de hacer uniforme establecemos el vocabulario que emplearemos acerca de los axiomas de separación.

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico.*

(1) *X es un espacio $\mathbf{T_0}$ si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ se cumple que existe $U \in \tau_X$ tal que contiene a uno de los puntos x o y pero no al otro.*

(2) *X es un espacio $\mathbf{T_1}$ si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ se cumple que existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.*

(3) *X es un espacio $\mathbf{T_2}$ o espacio de **Hausdorff** si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.*

(4) *X es un espacio **regular** si para cualesquiera $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

(5) *X es un espacio $\mathbf{T_3}$ si X es regular y T_1.*

(6) *X es un espacio **completamente regular** si para cualesquiera $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$.*

(7) *X es un espacio $\mathbf{T_{3.5}}$ o espacio de **Tychonoff** si X es completamente regular y T_1.*

*(8) X es un espacio **normal** si para cualesquiera dos cerrados ajenos F_1 y F_2 en X existen dos abiertos ajenos U y V tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.*

(9) X es un espacio $\mathbf{T_4}$ si X es un espacio normal y T_1.

Tenemos una caracterización de espacios de Hausdorff en términos de filtros.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio topológico. X es de Hausdorff si y sólo si todo filtro en X tiene a lo más un punto límite.*

El siguiente teorema muestra una importante relación entre axiomas de separación, axiomas de numerabilidad y espacios métricos.

Teorema 1.3. *[de metrización de Urysohn] Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es T_3 y es segundo numerable.

(2) Existe una inmersión de X en $[0,1]^\omega$ (donde $[0,1]$ tiene la topología heredada de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$).

(3) X es metrizable y separable.

A continuación se presenta uno de los conceptos más importantes en Topología general, en torno al cual gira el presente trabajo.

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. X es **compacto** si cualquier cubierta abierta de X posee una subcubierta finita.*

Ahora revisemos algunas de las propiedades elementales de la compacidad.

Teorema 1.5. *Sea X un espacio topológico compacto.*

(1) Si $F \subseteq X$ es cerrado en X, entonces F es compacto.

(2) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es compacto.

El siguiente resultado muestra que los subespacios compactos se comportan como puntos.

Teorema 1.6. *Sea X un espacio topológico.*

(1) Si X es T_2 y K_1 y K_2 son subespacios compactos ajenos, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos A y B de X tales que $K_1 \subseteq A$ y $K_2 \subseteq B$.

(2) Si X es T_3, K es subespacio compacto y F es un subconjunto cerrado de X tales que $K \cap F = \varnothing$, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos A y B de X tales que $K \subseteq A$ y $F \subseteq B$.

(3) Si X es compacto y T_2, entonces X es T_4.

Teorema 1.7. *Sean X y Y espacios topológicos.*

(1) Si X es T_2 y $K \subseteq X$ es compacto, entonces K es cerrado.

(2) Si X es compacto, Y es T_2 y $f : X \longrightarrow Y$ es una función biyectiva y continua, entonces f es homeomorfismo.

Una familia $\mathcal{F}$ de X tiene la propiedad de intersección finita si cualquier subfamilia finita $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Con esto también se puede caracterizar a la compacidad.

Teorema 1.8. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si para cualquier familia $\mathcal{F}$ de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita se cumple que $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$.*

Como es de esperar, la compacidad es una propiedad que "se comporta bien" con respecto a productos.

Teorema 1.9. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. El espacio $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si para cualquier $\alpha \in I$ se cumple que X_α es compacto.*

Ahora daremos una caracterización de la compacidad en términos de filtros.

Teorema 1.10. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es compacto.

(2) Cualquier filtro en X tiene un punto de acumulación.

(3) Cualquier ultrafiltro en X converge.

Un concepto relacionado con la compacidad es el siguiente.

Definición 1.11. *Un espacio topológico X es **localmente compacto** si para cualquier $x \in X$ existen $U \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$ y $K \subseteq X$ compacto tales que $U \subseteq K$.*

Ahora enunciamos algunas de sus propiedades importantes.

Teorema 1.12. *Sea X un espacio topológico T_2.*

(1) X es localmente compacto si y sólo si para cualquier $x \in X$ existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$ tal que $cl_X(U)$ es compacto.

(2) X es localmente compacto si y sólo si cualquier $x \in X$ posee una base local de vecindades compactas.

(3) Si X es localmente compacto y $A \subseteq X$ es abierto en X, entonces A es localmente compacto.

(4) Si $A \subseteq X$ es localmente compacto y denso en X, con X localmente compacto, entonces A es abierto en X.

Teorema 1.13. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios topológicos continua, abierta y sobreyectiva. Si X es localmente compacto, entonces Y es localmente compacto.*

Observemos que la compacidad local "se porta bien" con respecto a los productos.

Teorema 1.14. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. El espacio $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si para cualquier $\alpha \in I$ se cumple que X_α es localmente compacto y casi todos los $X'_\alpha s$ son compactos salvo una cantidad finita de ellos.*

Los siguientes dos resultados muestran propiedades adicionales de espacios compactos y localmente compactos. Se incluyen sus pruebas porque muestran algunas técnicas de construcción.

Teorema 1.15. *Sea X un espacio topológico compacto. Si $\mathfrak{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, $F = \cap\mathfrak{F}$ y O es un conjunto abierto en X tal que F está contenido en O, entonces existe una subfamilia finita $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\cap\mathfrak{H}$ está contenido en O. Si además la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathfrak{F}$ contiene a un tercer elementos de $\mathfrak{F}$, entonces existe un elemento de $\mathfrak{F}$ contenido en $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}' = \{(X \setminus O) \cap A |\, A \in \mathfrak{F}\}$. Como O es un subconjunto abierto de X, entonces $X \setminus O$ es cerrado en X, luego, $\mathfrak{F}'$ es una familia de cerrados de X. Ya que

$$\cap\mathfrak{F}' = (X \setminus O) \cap \cap\mathfrak{F} = (X \setminus O) \cap F = \varnothing$$

y X es compacto, se sigue que $\mathfrak{F}'$ no tiene la propiedad de intersección finita. Así, existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ tales que $\cap_{i=1}^{n} ((X \setminus O) \cap A_i) = \varnothing$, es decir, $(X \setminus O) \cap \cap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$. Luego, si $\mathfrak{H} = \{A_i |\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$, se tiene que $\cap\mathfrak{H} \subseteq O$.
Para la segunda parte notemos que podemos considerar

$$(A_1 \cap A_2) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n) \subseteq O,$$

y como por hipótesis para cada par existe $F_{(i,i+1)} \in \mathfrak{F}$ tal que $F_{(i,i+1)} \subseteq A_i \cap A_{i+1}$, para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Luego consideramos la intersección de los $F_{(i,i+1)}$'s por parejas y repetimos el proceso una cantidad finita de veces para obtener $G \in \mathfrak{F}$ tal que $G \subseteq O$. $\square$

Teorema 1.16. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff.*

(1) Si X es compacto entonces para cada $x \in X$ la componente conexa de x coincide con la intersección de los conjuntos cerrados y abiertos (al mismo tiempo) que contienen a x, es decir,

$$C_x = \cap\{A \subseteq X | A \in \mathcal{V}^{\circ}(x) \text{ y } A \text{ es cerrado}\}.$$

(2) Si X es localmente compacto y totalmente disconexo, entonces la familia de subconjuntos compactos y abiertos es una base para X.

Demostración. (1) Sean $x \in X$, $\mathcal{A} = \{A \subseteq X | A \in \mathcal{V}^{\circ}(x) \text{ y } A \text{ es cerrado}\}$ y $D = \cap\mathcal{A}$. Como D es intersección de cerrados, se sigue que D es cerrado en X. Además, como C_x es cerrado, se tiene que para cada $A \in \mathcal{A}$ se cumple

$C_x = A \cap C_x \subseteq A$ porque C_x es conexo, es decir, $C_x \subseteq A$. De lo anterior se obtiene que $C_x \subseteq D$.
Mostraremos que D es conexo y por la maximalidad de C_x se obtendrá que $D = C_x$. Sea B un subconjunto cerrado y abierto de (D, τ_D) tal que $x \in B$, se probará que $B = D$.
Como B es cerrado en D y D es cerrado en X, entonces B es cerrado en X, análogamente, $D \setminus B$ es cerrado en X. Como X es compacto y T_2, entonces X es T_4 (Teorema 1.6(3)), por lo cual existe $U \in \tau_X$ tal que $B \subseteq U$ y $cl_X(U) \cap (D \setminus B) = \varnothing$.
Ya que $B \subseteq U$, entonces $D \setminus U \subseteq D \setminus B$, de donde

$$\begin{aligned} D \cap (cl_X(U) \setminus U) &= D \cap cl_X(U) \cap (X \setminus U) \\ &= cl_X(U) \cap (D \setminus U) \\ &\subseteq cl_X(U) \cap (D \setminus B), \end{aligned}$$

es decir, $D \cap (cl_X(U) \setminus U) \subseteq cl_X(U) \cap (D \setminus B)$. Puesto que $cl_X(U) \cap (D \setminus B) = \varnothing$, se sigue $D \cap (cl_X(U) \setminus U) = \varnothing$.
También se cumple que

$$\cap\{A \cap (cl_X(U) \setminus U) \mid A \in \mathfrak{A}\} = (\cap\mathfrak{A}) \cap (cl_X(U) \setminus U) = D \cap (cl_X(U) \setminus U) = \varnothing,$$

y como $cl_X(U) \setminus U$ es cerrado en X, entonces $\{A \cap (cl_X(U)) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ es una familia de cerrados de X, y ya que X es compacto, se obtiene que dicha familia no posee la propiedad de intersección finita, lo cual implica la existencia de $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ tales que $\cap_{i=1}^n (A_i \cap (cl_X(U) \setminus U)) = \varnothing$.
Claramente $C = \cap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}$. Se afirma que $C \cap cl_X(U) = C \cap U$. Ya que trivialmente se cumple $C \cap U \subseteq C \cap cl_X(U)$, resta probar la otra contención. Supongamos que existe $x \in C \cap cl_X(U)$ con $x \notin C \cap U$, esto implica que $x \in C \cap (cl_X(U) \setminus U) = \varnothing$, esto es una contradicción. Por lo tanto se tiene la igualdad afirmada. De lo anterior se tiene que $C \cap U \in \mathfrak{A}$ porque es intersección finita abiertos, intersección de cerrados en virtud de la igualdad anterior y contienen a x.
Por lo dicho antes, $D \subseteq C \cap U \subseteq U$, es decir, $D \setminus B \subseteq U$. Ahora, si $D \setminus B \neq \varnothing$ se obtiene una contradicción con $cl_X(U) \cap (D \setminus B) = \varnothing$, en consecuencia, $D \setminus B = \varnothing$, esto es, $D = B$. Por lo tanto, D es conexo.
(2) Supongamos que (X, τ_X) es localmente compacto y totalmente disconexo. Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}^\circ(x)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $cl_X(U)$ es compacto. Por (1), para cada $y \in cl_X(U) \setminus \{x\}$ existe un subconjunto

cerrado y abierto V_y tal que $V_y \subseteq cl_x(U)$, $y \notin V_y$ y $x \in V_y$. Notemos que $\bigcap_{y \in cl_X(U)\setminus U} V_y \setminus U \subseteq U \setminus U = \varnothing$ y también $V_y \setminus U$ es cerrado en el espacio compacto $cl_X(U) \setminus U$. Por esto, existe un subconjunto finito F de X tal que $\bigcap_{y \in F} V_y \setminus U = \varnothing$. Así, $V = \bigcap_{y \in F} V_y$ es cerrado porque es intersección de cerrados, es abierto porque es intersección finita de abierto y $x \in V \subseteq U$. $\square$

Ahora presentamos una clase de funciones entre espacios topológicos con propiedades muy especiales y que relacionan compacidad con preimágenes.

Definición 1.17. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. f es una* ***función perfecta*** *si f es una función cerrada y para cualquier elemento y de Y se cumple que $f^{-1}(y)$ es compacto en X.*

Teorema 1.18. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos. Si f es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio L de Y se cumple que la restricción $f|_{f^{-1}(L)} : f^{-1}(L) \longrightarrow L$ es cerrada.*

Teorema 1.19. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta. Se cumple:*

(1) Para cualquier subespacio cerrado A de X, la función $f|_A : A \longrightarrow Y$ es perfecta.

(2) Para cualquier subespacio B de Y, la función $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ es perfecta.

Teorema 1.20. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta y sobreyectiva. Si Y es compacto, entonces X es compacto.*

Corolario 1.21. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios topológicos. Si f es perfecta, entonces para cualquier subespacio compacto Z de Y se cumple que $f^{-1}(Z)$ es compacto en X.*

El siguiente resultado es útil al trabajar productos finitos de compactos con cualquier espacio.

Lema 1.22. *Sean X y Y espacios topológicos, A subconjunto de X y y un punto de Y. Si A es compacto, entonces para cualquier subconjunto W abierto en $X \times Y$ tal que $A \times \{y\} \subseteq W$ existen U abierto en X y V abierto en Y tales que $A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W$.*

Concluimos este capítulo con el Teorema de Kuratowski-Mrówka, el cual es una caracterización de compacidad en términos de funciones.

Teorema 1.23. *[de Kuratowski-Mrówka] Sea X un espacio topológico de Hausdorff. X es compacto si y sólo si para cualquier espacio topológico Y la segunda proyección $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada.*

Demostración. (a) Supongamos que X es compacto. Sea $F \subseteq X \times Y$ cerrado. Sea $y \in Y \setminus \pi_2(F)$. Como $X \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus F$, en virtud del Lema 1.22 se tiene que existen U abierto en X y V abierto en Y tales que $X \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq (X \times Y) \setminus F$, lo cual implica que $X \times V \cap F = \varnothing$, de donde se sigue que $\pi_2(F) \cap V = \varnothing$, esto es, $y \in V \subseteq Y \setminus \pi_2(F)$. Así, $Y \setminus \pi_2(F)$ es abierto, de donde se sigue que $\pi_2(F)$ es cerrado. Por lo tanto, π_2 es cerrada.
(b) Probaremos el recíproco. La demostración se hará por contradicción. Supongamos que X no es compacto. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita tal que $\cap_{\alpha\in I} F_\alpha = \varnothing$. Consideremos $y_0 \notin X$ y definamos sobre $Y = X \cup \{y_0\}$ la siguiente topología

$$\begin{aligned}\tau_Y = &\{A \subset Y | \text{ existen } \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq I \text{ y } K \subseteq X \text{ tales que} \\ & A = \{y_0\} \cup K \cup \cap_{i=1}^n F_{\alpha_i}\} \cup \mathbb{P}(X).\end{aligned}$$

Como todo subconjunto de X que no contiene a y_0 es abierto y $\cap_{\alpha\in I} F_\alpha = \varnothing$, se tiene que Y es T_4.
Ahora, $F = cl_{X\times Y}(\{(x,x) \,|\, x \in X\})$ es cerrado en $X \times Y$, entonces $\pi_2(F)$ es cerrado en Y y $X \subseteq \pi_2(F)$. Como $y_0 \in \pi_2(F) = cl_Y(X) = Y$, existe $x_0 \in X$ tal que $(x_0, y_0) \in F$. De aquí, para cualesquiera $U \in \mathcal{V}_X^\circ(x_0)$ y $\alpha \in I$ se cumple que $[U \times (\{y_0\} \cup F_\alpha)] \cap \{(x,x) \,|\, x \in X\} \neq \varnothing$. Así, para cualquier $\alpha \in I$ se tiene que $U \cap F_\alpha \neq \varnothing$, lo cual implica que $x_0 \in F_\alpha$ para cualquier $\alpha \in I$, esto es, $x_0 \in \cap_{\alpha\in I} F_\alpha$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, X es compacto. $\square$

Capítulo 2

Conceptos básicos acerca de grupos topológicos

En este capítulo se presentan algunas propiedades básicas de grupos topológicos. La mayoría de los resultados fueron ordenados de acuerdo a como aparecen en [18], aunque también pueden encontrarse en [7] en un orden diferente y algunos de ellos en versiones más generales, con un enfoque ligado a grupos con estructura topológica más laxa, como en el caso de grupos semitopológicos o grupos paratopológicos, en [1].

2.1. Definiciones y teoremas elementales

Iniciaremos esta sección con la definición del concepto principal a tratar a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1. *Una terna $(G, \cdot, \tau)$, donde G es un conjunto no vacío, $\cdot$ es una operación binaria sobre G y τ es una familia de subconjuntos de G, es un* ***grupo topológico*** *si*

(1) $(G, \cdot)$ *es un grupo (abstracto),*

(2) (G, τ) *es un espacio topológico,*

(3) las funciones $\mathfrak{m} : (G\,\tau) \times (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *y* $In : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *definidas por* $\mathfrak{m}(x, y) = x \cdot y$ *y* $In(x) = x^{-1}$*, donde* x^{-1} *es el elemento inverso de* x *en el grupo* $(G, \cdot)$*, son continuas.*

Si $(G, \cdot, \tau)$ *es un grupo topológico, la topología* τ *es una* **topología de grupo**.

Notemos que la condición (3) la Definición 2.1 formula de manera natural la relación que existe entre la topología y la operación de un grupo dado, pues exige que la operación en el grupo, vista como función, sea continua y que la inversión de elementos también sea una función continua.
Ahora, para simplificar la escritura en lo sucesivo daremos la siguiente

Notación 2.2. Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico.

(1) Cuando no haya lugar a confusión se usará G en lugar de $(G, \cdot, \tau)$. También, para $x, y \in G$ se escribirá xy en lugar de $x \cdot y$, y se usará τ_G para denotar la topología de G cuando sea necesario.

(2) Sea $x \in G$. Denotaremos con $\mathcal{V}_G^\circ(x)$ a la familia de vecindades abiertas de x. En caso de que no haya confusión, simplificaremos la notación a $\mathcal{V}^\circ(x)$.

(3) Sean $V, W \subseteq G$. Tenemos que

   (i) el producto de los elementos de V y W se denota por $VW = \{vw | v \in V, w \in W\}$, en caso de que $V = W$ se usa $VV = V^2$ y esta última se generaliza de manera natural para cada $n \in \mathbb{N}$, también, si $V = \{v\}$, escribiremos vW y similarmente el otro caso;

   (ii) el conjunto de los elementos inversos de V es $V^{-1} = \{v^{-1} | v \in V\}$.

(4) El elemento identidad de G se denotará por e_G, y en caso de que no haya lugar a confusión solamente por e.

Ahora, tenemos el siguiente

Lema 2.3. *La condición* (3) *de la Definición 2.1 se puede expresar como*
(3′) *Dados* $x, y \in G$ *se cumple que*

(i) para cada $U \in \mathcal{V}^\circ(xy)$ *existen* $V \in \mathcal{V}^\circ(x)$ *y* $W \in \mathcal{V}^\circ(y)$ *tales que* $VW \subset U$, *y*

(ii) para cada $U \in \mathcal{V}^\circ(x^{-1})$ *existe* $V \in \mathcal{V}^\circ(x)$ *tal que* $V^{-1} \subset U$.

Demostración. Debemos que ver que ambas condiciones son equivalentes. Primero notemos que (ii) ocurre sí y sólo si In es continua, por lo cual resta ver que (i) sucede sí y sólo si $\mathfrak{m}$ es continua.
Supongamos que se satisface (i). Sea $(x,y) \in G \times G$ y consideremos $U \in \mathcal{V}^\circ(xy)$; por (i) se cumple que existen $V \in \mathcal{V}^\circ(x)$ y $W \in \mathcal{V}^\circ(y)$ tales que $VW \subset U$. Notemos que $V \times W \in \tau_{G\times G}$ y $\mathfrak{m}(V \times W) = VW$, luego, $\mathfrak{m}(V \times W) \subset U$, de donde se sigue que $\mathfrak{m}$ es continua.
Ahora, supongamos que $\mathfrak{m}$ es continua. Sean $x, y \in G$ y tomemos $U \in \mathcal{V}^\circ(xy)$, como $\mathfrak{m}$ es continua, existe un abierto Z en $G\times G$ tal que $(x,y) \in Z$ y $\mathfrak{m}(Z) \subset U$. Como estamos considerando la topología producto en $G \times G$, existen $V \in \mathcal{V}^\circ(x)$ y $W \in \mathcal{V}^\circ(y)$ tales que $V \times W \subset Z$. Tenemos que $\mathfrak{m}(V \times W) = VW$, entonces $VW \subset \mathfrak{m}(Z) \subset U$, lo cual concluye la prueba. $\square$

A continuación presentamos una definición alternativa de grupo topológico.

Teorema 2.4. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topología sobre G. La terna $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico sí y sólo si*

$$g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$$
$$g_3(x,y) = xy^{-1}$$

es una función continua.

Demostración. (i) Supongamos que $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico.
Consideremos las funciones $\mathfrak{m}$ y In de la Definición 2.1.
Tenemos que la función diagonal de la función identidad 1_G y de In es continua, esto es, la función $\Delta_{\{1_G,In\}} : (G, \cdot, \tau)\times(G, \cdot, \tau) \longrightarrow (G, \cdot, \tau)\times(G, \cdot, \tau)$ definida por

$$\Delta_{\{1_G,In\}}(x, y) = (1_G(x), In(y)) = \left(x, y^{-1}\right)$$

es continua.
Ahora, vemos que para cualesquiera $x, y \in G$ se cumple que

$$\mathfrak{m} \circ \Delta_{\{1_G,In\}}(x, y) = \mathfrak{m}\left(x, y^{-1}\right) = xy^{-1} = g_3(x, y),$$

por tanto, $g_3 = \mathfrak{m} \circ \Delta_{\{1_G,In\}}$.
Como $\Delta_{\{1_G,In\}}$ y $\mathfrak{m}$ son funciones continuas, la composición de funciones continuas es una función continua y $g_3 = \mathfrak{m}\circ\Delta_{\{1_G,In\}}$, se sigue que g_3 es una función continua.

(ii) Supongamos que la función

$$g_3 : (G,\, \tau) \times (G,\, \tau) \longrightarrow (G,\, \tau)$$
$$g_3(x, y) = xy^{-1}$$

es continua.
Para ver que $(G,\, \cdot,\, \tau)$ es un grupo topológico resta mostrar que las funciones $\mathfrak{m}$ y In de la definición de grupo topológico son continuas.
Primero demostremos que In es una función continua. Consideremos la función

$$f : (G,\, \tau) \longrightarrow (G,\, \tau) \times (G,\, \tau)$$
$$f\,(x) = (e,\, x)$$

que es continua porque es una inclusión.
Notemos que para cada $x \in G$ se cumple que

$$g_3 \circ f\,(x) = g_3\,(e,\, x) = ex^{-1} = x^{-1} = In(x),$$

esto es, $In = g_3 \circ f$. Como g_3 y f son funciones continuas, la composición de funciones continuas es una función continua y $In = g_3 \circ f$, se tiene que In es una función continua.
Observemos que la función diagonal de 1_G y In es

$$\Delta_{\{1_G, In\}} : (G,\, \tau) \times (G,\, \tau) \longrightarrow (G,\, \tau) \times (G,\, \tau)$$
$$\Delta_{\{1_G, In\}}\,(x, y) = (1_G\,(x)\,,\, In\,(y)) = \left(x,\, y^{-1}\right).$$

Sabemos que $\Delta_{\{1_G, In\}}$ es una función continua.
Para cada $(x,\, y) \in G \times G$ se cumple que

$$g_3 \circ \Delta_{\{1_G, In\}}\,(x,\, y) = g_3\left(x,\, y^{-1}\right) = x\left(y^{-1}\right)^{-1} = xy = \mathfrak{m}\,(x, y)\,,$$

por lo tanto, $\mathfrak{m} = g_3 \circ \Delta_{\{1_G, In\}}$. Por un argumento similar al usado para ver la continuidad de In se sigue que $\mathfrak{m}$ es una función continua. □

Ejemplos 2.5. (1) Si $(G,\, *)$ es un grupo abstracto y consideramos la topología indiscreta τ_{ind} sobre G, entonces $(G,\, *,\, \tau_{ind})$ es un grupo topológico que se llama **grupo indiscreto**.
(2) Si $(G,\, *)$ es un grupo abstracto y consideramos la topología discreta τ_{dis} sobre G, entonces $(G,\, *,\, \tau_{dis})$ es un grupo topológico que se llama **grupo discreto**.

(3) El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual es un grupo topológico. Para mostrarlo, consideremos la base $\{B(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0\}$, donde $B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \varepsilon\}$. En este caso, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathfrak{m}(x,y) = x+y$ y $In(x) = -x$, veamos que $\mathfrak{m}$ y In son funciones continuas.
Sean $x \in \mathbb{R}$ y $V \in \mathcal{V}^{\circ}(-x)$. Tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(-x,\varepsilon) \subseteq V$. Vemos que $x \in B(x,\varepsilon)$ y $In(B(x,\varepsilon)) = B(-x,\varepsilon) \subseteq V$. Por esto, In es una función continua.
Ahora, si $x, y \in \mathbb{R}$ fijos y $V \in \mathcal{V}^{\circ}(x+y)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x+y,\varepsilon) \subseteq V$. Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos que $x \in B(x,\delta)$ y $y \in B(y,\delta)$, luego

$$\mathfrak{m}(B(x,\delta) \times B(y,\delta)) \subseteq B(x+y,\varepsilon)$$

ya que por la desigualdad del triángulo para el valor absoluto

$$|z+w-(x+y)| \leq |z-y| + |w-x| < \varepsilon.$$

Por tanto, $+$ es continua.

Definición 2.6. *Sean G un grupo topológico y g un elemento de G fijo.*

*(1) La **traslación derecha** con respecto a g es la función $\phi_g : G \longrightarrow G$ definida por $\phi_g(x) = xg$.*

*(2) La **traslación izquierda** con respecto a g es la función $\sigma_g : G \longrightarrow G$ definida por $\sigma_g(x) = gx$.*

Como es de esperarse, las traslaciones en grupos topológicos tienen propiedades interesantes que las hacen útiles en el estudio de estos espacios, como lo indica el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Sean G un grupo topológico y g un elemento fijo de G. Se cumple que:*

(1) la traslación derecha ϕ_g es un homeomorfismo,

(2) la traslación izquierda σ_g es un homeomorfismo, y

(3) la función In que manda un elemento en su inverso es un homeomorfismo.

Demostración. (1) Probaremos que ϕ_g es homeomorfismo.
(a) Mostraremos que ϕ_g es una función continua. Notemos que $f : (G,\, \tau_G) \longrightarrow (G,\, \tau_G)\times(G,\, \tau_G)$ definida por $f\,(x) = (x,\, g)$ es una función continua. Además para cada $x \in G$ se cumple que

$$\mathfrak{m} \circ f\,(x) = \mathfrak{m}\,(x,\, g) = xg = \phi_g\,(x)\,.$$

Como $\mathfrak{m}$ es una función continua y la composición de funciones continuas es una función continua, se sigue que ϕ_g es una función continua.
(b) Resta ver que ϕ_g tiene inversa continua. Afirmamos que $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$, para mostrarlo notemos que para cada $x \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned}\phi_g \circ \phi_{g^{-1}}\,(x) &= \phi_g\,(\phi_{g^{-1}}\,(x)) = \phi_g\left(xg^{-1}\right) = \left(xg^{-1}\right)g = x\left(g^{-1}g\right) = xe = x\\ \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g\,(x) &= \phi_{g^{-1}}\,(\phi_g\,(x)) = \phi_{g^{-1}}\,(xg) = (xg)\,g^{-1} = x\left(gg^{-1}\right) = xe = x,\end{aligned}$$

es decir, $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = 1_G = \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g$, por lo cual $\phi_{g^{-1}}$ es la función inversa de ϕ_g. La continuidad de $\phi_{g^{-1}}$ se sigue del inciso (a).
(2) La prueba de que σ_g es homeomorfismo es análoga a (1).
(3) Como In es una función continua porque G es grupo topológico, resta probar que In es una función biyectiva con inversa continua. Tenemos que In es su propia inversa porque

$$In \circ In\,(x) = In\,(In\,(x)) = In\left(x^{-1}\right) = \left(x^{-1}\right)^{-1} = x,$$

así $In \circ In = 1_G$. □

A partir del Teorema anterior se obtienen los siguientes resultados que permiten caracterizar el comportamiento de la topología de un grupo topológico. Como se verá más adelante, al contrario de lo que ocurre en los espacios topológicos en general, donde caracterizar los conjuntos abiertos puede ser muy complicado, en el caso de los grupos topológicos hay maneras muy sencillas de hacerlo.

Teorema 2.8. *Sean G un grupo topológico y τ su topología. Si $\mathcal{B}\,(e)$ es una base local del elemento identidad e, entonces las familias $\{xU|\, x \in G$ y $U \in \mathcal{B}\,(e)\}$ y $\{Ux|\, x \in G$ y $U \in \mathcal{B}\,(e)\}$ son bases para τ.*

Demostración. Sea W un conjunto abierto de G no vacío. Consideremos $a \in W$. Por el Teorema 2.7(2), $\sigma_{a^{-1}}\,(W) = a^{-1}W$. Como $a \in W$, se sigue que $e = a^{-1}a \in a^{-1}W$.

Como $a^{-1}W$ es un conjunto abierto porque $\sigma_{a^{-1}}$ es una función abierta, existe $V \in \mathcal{B}(e)$ tal que $V \subseteq a^{-1}W$. Luego, $aV \subseteq aa^{-1}W = eW = W$, esto es, $aV \subseteq W$.
Por lo tanto, $\{xU|x \in G,\ \text{y } U \in \mathcal{B}(e)\}$ es una base para τ.
Una prueba análoga muestra que $\{Ux|x \in G,\ \text{y } U \in \mathcal{B}(e)\}$. $\square$

En adelante usaremos indistintamente cualquiera de las dos bases dadas en el Teorema anterior.
Antes de continuar, requerimos un concepto auxiliar.

Definición 2.9. *Sea A subconjunto de un grupo topológico G. Diremos que A es **simétrico** si $A^{-1} = A$. En particular, si V es una vecindad abierta, diremos que V es una **vecindad simétrica** si $V^{-1} = V$.*

Teorema 2.10. *Si G es un grupo topológico y U es una vecindad abierta del elemento identidad e, entonces existe una vecindad simétrica V de e tal que $V \subseteq U$. Esto equivale a que la familia de vecindades simétricas de la identidad forman una base local de la identidad.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}^\circ(e)$. Como In es homeomorfismo, $In(U) = U^{-1}$ es abierto y $e \in U^{-1}$, por lo cual $U^{-1} \in \mathcal{V}^\circ(e)$. Sea $V = U \cap U^{-1}$. Claramente se satisface que $V^{-1} = V$ y $V \in \mathcal{V}^\circ(e)$ y, por definición, $V \subseteq U$. $\square$

Notación 2.11. En adelante, la base local de e formada por las vecindades simétricas de e se denotará por $\mathcal{V}^*(e)$.

Así como se tiene una base local de la identidad formada por vecindades simétricas, en el caso de los grupos topológicos también se tiene una base local de la identidad formada por subconjuntos cerrados.

Teorema 2.12. *Sea G un grupo topológico.*

(1) Si U es una vecindad abierta de e, entonces para cada número natural n existe una vecindad abierta de e tal que $V^n \subseteq U$.

(2) Si U es una vecindad abierta de e, entonces existe una vecindad abierta V de e tal que $cl\ (V) \subseteq U$. Esto es, las vecindades cerradas de e forman una base local de e.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$.
(1) La prueba se hará por inducción sobre n. Para $n = 1$ basta tomar $V = U$. Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ existe $W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $W^n \subseteq U$, se probará que para $n+1$ existe $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $V^{n+1} \subseteq U$.
Como la función $\mathfrak{m}$ es continua y $\mathfrak{m}(e, e) = e$, para $W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tales que $V_1V_2 \subseteq W$. Si $V = V_1 \cap V_2$, entonces $V^2 \subseteq W$, de donde se sigue que

$$V^{n+1} = V^2V^{n-1} \subseteq WW^{n-1} = W^n \subseteq U.$$

(2) Sea $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $V^2 \subset U$. Por el Teorema 2.10 existe $W \in \mathcal{V}^{*}(e)$ tal que $W \subseteq V$. De esto se sigue que $W^2 \subseteq U$.
Sea $x \in cl\,(W)$. Entonces $Wx \cap W \neq \varnothing$, así, existen $x_1, x_2 \in W$ tales que $x_1x = x_2$. Luego, $x = x_1^{-1}x_2 \in W^{-1}W = W^2 \subseteq U$. Por lo tanto, $cl\,(W) \subseteq U$.
□
Antes de caracterizar completamente a las bases de grupos topológicos, estudiemos el comportamiento de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados respecto a las operaciones de grupo.

Teorema 2.13. *Sea G un grupo topológico. Consideremos a un elemento de G, A, B, O y M subconjuntos de G.*

(1) Si O es un conjunto abierto, entonces aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son conjuntos abiertos.

(2) Si A es un conjunto cerrado, entonces aA, Aa y A^{-1} son conjuntos cerrados.

(3) Si A y B son conjuntos compactos, entonces AB y A^{-1} son conjuntos compactos.

(4) La cerradura de A se puede expresar como la intersección de todos los productos de A por las vecindades abiertas de la identidad, tanto a izquierda como a derecha, esto es

$$cl\,(A) = \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} WA.$$

Demostración. (1) Supongamos que O es un conjunto abierto. Como por el Teorema 2.7 se tiene que la traslación izquierda σ_a es homeomorfismo, entonces σ_a es una función abierta, por lo tanto $\sigma_a(O) = aO$ es un conjunto abierto. Análogamente, si consideramos la traslación derecha ϕ_a obtenemos que $\phi_a(O) = Oa$ es un conjunto abierto. Además, como la función In también es homeomorfismo, se tiene que $In(O) = O^{-1}$ es un conjunto abierto. Notemos que

$$MO = \bigcup_{m \in M} mO \text{ y } OM = \bigcup_{m \in M} Om,$$

así que, por lo ya demostrado, se tiene que para cada $m \in M$ los conjuntos mO y Om son abiertos, por lo cual MO y OM son uniones de conjuntos abiertos y, por tanto, son conjuntos abiertos.
(2) Supongamos que A es un conjunto cerrado. Como por el Teorema 2.7 se tiene que las traslaciones ϕ_a y σ_a, así como la función In son homeomorfismos, se sigue que dichas funciones son cerradas, por tanto $\phi_a(A) = Aa$, $\sigma_a(A) = aA$ y $In(A) = A^{-1}$ son conjuntos cerrados.
(3) Supongamos que A y B son compactos, entonces $A \times B$ es compacto en el espacio $G \times G$ (con la topología producto). Por la definición de grupo topológico se tiene que la función $\mathfrak{m} : G \times G \longrightarrow G$ definida por $\mathfrak{m}(x, y) = xy$ es continua, y como $\mathfrak{m}(A \times B) = AB$ y la compacidad se preserva bajo imágenes continuas, tenemos que AB es compacto. Además, como In es continua y $In(A) = A^{-1}$, se sigue que A^{-1} es compacto.
(4) Probaremos que $cl(A) = \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} AW$.
(a) Sea $W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$. Por el Teorema 2.10 existe $V \in \mathcal{V}^{*}(e)$ tal que $V \subseteq W$ y por (1) se tiene que AV es un conjunto abierto. Como $e \in V$, se tiene que $A \subseteq AV$. Mostremos que $cl(A) \subseteq AW$. Sea $x \in cl(A)$, como V es abierto y $x \in xV$, se tiene que $xV \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$, luego, $xV \cap A \neq \varnothing$, esto implica que existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $xv = a$, de donde se obtiene que $x = av^{-1} \in AV^{-1} = AV \subseteq AW$. Por lo tanto, $cl(A) \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} AW$.
(b) Sea $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} AW$. Se mostrará que si $V \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$, entonces $V \cap A \neq \varnothing$. Sea $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$. Tenemos que $V^{-1}x$ es abierto por (1), como $x \in V$ se sigue que $x^{-1} \in V^{-1}$, luego, $e = x^{-1}x \in V^{-1}x$, así que $V^{-1}x \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$. Entonces $x \in AV^{-1}x$, por lo cual existen $a \in A$ y $v \in V$ tales que $x = av^{-1}x$, de donde se obtiene que $e = xx^{-1} = av^{-1}xx^{-1} = av^{-1}$, lo cual implica que $v = a$. Por lo tanto $A \cap V \neq \varnothing$, esto es, $x \in cl(A)$.
De (a) y (b) se obtiene la igualdad deseada. Una prueba análoga muestra que $cl(A) = \bigcap_{W \in \mathcal{V}^{\circ}(e)} WA$. $\square$

Notemos que el producto de dos subconjuntos cerrados de un grupo topológico no necesariamente es cerrado: consideremos $A = \{m + \frac{1}{m+1}\}$ y $B = \mathbb{Z}$ en el grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual. Tenemos que $A + B$ no es un subconjunto cerrado porque para cada $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que m es un punto de acumulación de $A+B$ y $m \notin A+B$. Sin embargo, es posible dar condiciones para que dicho producto sí lo sea. Para facilitar lo anterior, primero veremos una propiedad muy importante de los grupos topológicos que no cumplen todos los espacios topológicos.

Teorema 2.14. *Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.*

Demostración. Sea G un grupo topológico. Sean x, $y \in G$, se probará que existe un homeomorfismo $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = y$. Consideremos $f = \phi_{x^{-1}y}$. Tenemos, por el Teorema 2.7, que f es homeomorfismo y además $f(x) = \phi_{x^{-1}y}(x) = x(x^{-1}y) = (xx^{-1})y = ey = y$. □

A partir del Teorema anterior es inmediato el siguiente

Corolario 2.15. *Sean G un grupo topológico y g un elemento de G. Se cumple que*

(1) las familias $\{gU|\, U \in \mathcal{V}^{\circ}(e)\}$ y $\{Ug|\, U \in \mathcal{V}^{\circ}(e)\}$ son bases locales de g,

(2) las familias $\{gU|\, U \in \mathcal{V}^{*}(e)\}$ y $\{Ug|\, U \in \mathcal{V}^{*}(e)\}$ son bases locales de g, y

(3) si $\mathcal{F}(e)$ es una base local de la identidad formada por vecindades cerradas, entonces las familias $\{gF|F \in \mathcal{F}(e)\}$ y $\{Fg|F \in \mathcal{F}(e)\}$ son bases locales de g.

Ahora, como se prometió, daremos una condición suficiente para que el producto de un cerrado y un subconjunto sea cerrado y, además, mostraremos que los grupos topológicos tienen propiedades de separación muy buenas.

Teorema 2.16. *Sea G un grupo topológico.*

(1) G es un espacio topológico regular.

(2) Si A es un subconjunto compacto de G y B es un subconjunto cerrado en G, entonces AB y BA son subconjuntos cerrados en G.

Demostración. (1) Por el Teorema 2.12(2) se tiene que dada $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ existe $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $V \subseteq cl\,(V) \subseteq U$. Como G es un espacio homogéneo, se tiene que para cada $x \in G$ y cada $W \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$ existe $Z \in \mathcal{V}^{\circ}(x)$ tal que $Z \subseteq cl\,(Z) \subseteq W$. Por lo tanto, G es un espacio regular.
(2) Se demostrará que $G \backslash BA$ es un subconjunto abierto en G. Sea $a \in G \backslash BA$. Por el Teorema 2.13(2) se tiene que para cada $x \in A$ el conjunto Bx es cerrado. Como para cada $x \in A$ se cumple que $a \notin Bx$ y Bx es cerrado, existe $V \in \mathcal{V}^{*}(a)$ tal que $V \cap Bx = \varnothing$. Ya que $\{aU | U \in \mathcal{V}^{*}(e)\}$ es una base local de a (por el Corolario 2.15(2)), para cada $x \in A$ existe $U_x \in \mathcal{V}^{*}(e)$ tal que $aU_x \cap Bx = \varnothing$. Ahora, como para cada U_x existe $W_x \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $W_x^2 \subseteq U_x$ (por (1) del Teorema 2.12) y para ese W existe $V_x \in \mathcal{V}^{*}(e)$ tal que $V_x \subseteq W_x$ (por el Teorema 2.10), se tiene que para cada $x \in A$ existe $V_x \in \mathcal{V}^{*}(e)$ tal que $V_x^2 \subseteq U_x$.
Afirmación: Para cada $x \in A$ se cumple que $aV_x \cap BxV_x = \varnothing$.
La prueba de la Afirmación se hará por contradicción. Supongamos que para algún $x_0 \in A$ se tiene que $aV_{x_0} \cap Bx_0V_{x_0} \neq \varnothing$. Entonces existen $v_1,\, v_2 \in V_{x_0}$ y $b \in B$ tales que $av_1 = bx_0v_2$, de aquí se tiene que $av_1v_2^{-1} = bx_0$. Como $V_{x_0}^2 \subseteq U_x$, se tiene que $av_1v_2^{-1} \in aV_{x_0}V_{x_0}^{-1} = aV_{x_0}^2 \subseteq U_x$. Por tanto, ya que $av_1v_2^{-1} \in U_x$ y $bx_0 \in Bx_0$, se tiene que $U_{x_0} \cap Bx_0 \neq \varnothing$, lo cual contradice que $U_{x_0} \cap Bx_0 = \varnothing$.
Tenemos que $\{xV_x | \, x \in A\}$ es una cubierta abierta de A porque cada xV_x es abierto (por (1) del Teorema 2.13), y como A es compacto por hipótesis, se tiene que existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^{n} x_iV_{x_i}$.
Sea $W = \cap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $e \in V_{x_i}$, se sigue que $W \neq \varnothing$ y, por construcción, $W \in \mathcal{V}^{*}(e)$. Además, por la Afirmación, se cumple que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se satisface que $aW \cap Bx_iV_{x_i} = \varnothing$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} aW \cap BA &= aW \cap (B\,(\cup_{i=1}^{n} x_iV_{x_i})) \\ &= aW \cap (\cup_{i=1}^{n} Bx_iV_{x_i}) \\ &= \cup_{i=1}^{n} (aW \cap Bx_iV_{x_i}) \\ &= \cup_{i=1}^{n} \varnothing \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $aW \in \mathcal{V}^{\circ}(a)$ satisface que $aW \subseteq G \setminus BA$. Por lo tanto, $G \setminus BA$ es un subconjunto abierto de G.
Una prueba análoga muestra que AB es un conjunto cerrado. $\square$

Notemos que a partir del Teorema anterior se obtiene que si el grupo topológico G es T_1, entonces también es T_3 y, por lo tanto, T_2. El siguiente teorema muestra que se puede pedir una propiedad de separación más débil para obtener propiedades de separación fuertes.

Teorema 2.17. *Sea G un grupo topológico. Si G es T_0, entonces G es T_1.*

Demostración. Supongamos que G es T_0. Si $x,\, y \in G$, entonces, sin pérdida de generalidad, existe una vecindad abierta de x que no contiene a y. Por el Teorema 2.8, existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que $y \notin Ux$, esto implica que $yx^{-1} \notin U$, de donde se sigue que $xy^{-1} \notin U^{-1}$, es decir, $x \notin U^{-1}y$. Por lo tanto, G es T_1.
$\square$

Del Teorema anterior es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.18. *Si G es un grupo topológico, entonces son equivalentes:*

(a) G es un espacio topológico T_3,

(b) G es un espacio topológico de Hausdorff,

(c) G es un espacio topológico T_1, y

(d) G es un espacio topológico T_0.

Demostración. Ya tenemos que $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d)$. Resta ver que $(d) \implies (a)$. Por el Teorema 2.17, se tiene que si G es T_0, entonces G es T_1, y por el Teorema 2.16 se tiene que G es un espacio regular, así que G es T_3. $\square$

De hecho, en el caso de los grupos topológicos, se tiene que si G es un grupo topológico T_0, entonces G es de Tychonoff, sin embargo por ahora carecemos de la herramienta necesaria para mostrarlo.

Ejemplos 2.19. (1) Si G es un grupo topológico indiscreto, entonces G es un grupo topológico que no es T_0 ni T_1.
(2) Si G es un grupo topológico discreto, entonces G es T_3.
(3) El grupo topológico $(\mathbb{R},\, +,\, \tau_{\mathbb{R}})$ es T_3.

Ahora veremos que en el caso de los grupos topológicos, los subconjuntos compactos se comportan como puntos.

Teorema 2.20. *Sea G un grupo topológico. Si U es un conjunto abierto y $K \subseteq U$ es compacto, entonces existe una vecindad abierta W de e_G tal que $K \subseteq KW \subseteq U$.*

Demostración. Como U es abierto, para cada $k \in K$ existen $V_k \in \mathcal{V}^\circ(e)$ y $W_k \in \mathcal{V}^\circ(e)$ tales que $kV_k \subseteq U$ y $W_k^2 \subseteq V_k$. Tenemos que por (1) del Teorema 2.13 se cumple que para cada $k \in K$ el conjunto kW_k es abierto y, por ello, $\{kW_k | \, k \in K\}$ es una cubierta abierta de K y, como K es compacto, existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} k_i W_{k_i}$.
Sea $W = \cap_{i=1}^{n} W_{k_i}$. Como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumpple que $e \in W_{k_i}$, se obtiene que $W \neq \varnothing$ y, como W es una intersección finita de abiertos, se tiene que W es abierto, esto es, $W \in \mathcal{V}^\circ(e)$. Como $e \in W$, $K = Ke \subseteq KW$. Ahora, si $k \in K$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $k \in k_j W_{k_j}$. Así, se cumple que

$$kW \subseteq k_j W_{k_j} W \subseteq k_j W_j W_j \subseteq k_j V_j \subseteq U.$$

Por lo tanto, $K \subseteq KW \subseteq U$. $\square$

A continuación daremos dos maneras de construir topologías sobre grupos abstractos de manera que se obtengan grupos topológicos y ejemplos de grupos topológicos construidos con dichas técnicas.

Teorema 2.21. *Sean G un grupo algebraico y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de G los cuales contienen al elemento identidad e y satisfacen*

(S1) para cada $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $C^{-1} = C$,

(S2) para cada $C \in \mathcal{C}$ existe $C' \in \mathcal{C}$ tal que $\left(C'\right)^2 \subseteq C$, y

(S3) para cualesquiera $C \in \mathcal{C}$ y $g \in G$ existe $C'' \in \mathcal{C}$ tal que $g^{-1}C''g \subseteq C$.

Sea $\mathcal{D} = \{\cap \mathcal{C}' \,|\, \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \text{ finito }\}$ la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Entonces

$$\tau = \{O \subseteq G \,|\, \textit{para cualquier } x \in O \textit{ existe } D \in \mathcal{D} \textit{ tal que } Dx \subseteq O\}$$

es una topología de grupo sobre G y e pertenece al interior de cada elemento D de $\mathcal{D}$. Además, se cumple que $N = \cap \mathcal{C}$ es un subgrupo normal de G y si $N = \{e\}$ entonces τ es de Hausdorff.

Demostración. (i) Mostraremos que τ es una topología sobre G. Tenemos que por vacuidad $\varnothing \in \tau$, y como para cada $x \in G$ y cualquier $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $Dx \subseteq G$, entonces $G \in \tau$. También, si $\mathcal{A} \subseteq \tau$ y $x \in \cup\mathcal{A}$, entonces existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_0$, luego, existe $D_0 \in \mathcal{D}$ tal que $D_0 x \subseteq A_0$, y por tanto, $D_0 x \subseteq \cup\mathcal{A}$, esto es, $\cup\mathcal{A} \in \tau$. Finalmente, si $A_1,\, A_2 \in \tau$, como $A_1,\, A_2 \in \tau$, para $x \in A_1 \cap A_2$ existen $D_1,\, D_2 \in \mathcal{D}$ tales que $D_1 x \subseteq A_1$ y $D_2 x \subseteq A_2$, y por la forma de los elementos de $\mathcal{D}$ se cumple que $D = D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$, de aquí se sigue que $Dx \subseteq D_1 x \subseteq A_1$ y $Dx \subseteq D_2 x \subseteq A_2$, y por tanto, $Dx \subseteq A_1 \cap A_2$, es decir, $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(ii) Se probará que con la topología τ la operación en el grupo es G es una función continua, es decir, que la función $\mathfrak{m} : (G,\, \tau) \times (G,\, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ definida por $\mathfrak{m}\,(x,\, y) = xy$ es continua. Sea $(x,\, y) \in G \times G$ y consideremos $U \in \mathcal{V}_G^{\circ}\,(xy)$. Ya que $xy \in U$, por la definición de τ, existe $D = \cap_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{D}$ tal que $Dxy \subseteq U$. Por $(S2)$, para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ existe $C_i^{'} \in \mathcal{C}$ tal que $\left(C_i^{'}\right)^2 \subseteq C_i$, y por $(S3)$ existe $C_i^{''} \in \mathcal{C}$ tal que $xC_i^{''}x^{-1} \subseteq C_i^{'}$. A partir de esto obtenemos que

$$\left(C_i^{'}x\right)\left(C_i^{''}y\right) = C_i^{'}\left(xC_i^{''}x^{-1}\right)xy \subseteq C_i^{'}C_i^{'}xy \subseteq C_i xy. \tag{2.1.1}$$

Sean $D_1 = \cap_{i=1}^{n} C_i^{'}$ y $D_2 = \cap_{i=1}^{n} C_i^{''}$. Por definición se tiene que $D_1,\, D_2 \in \mathcal{D}$. Afirmamos que $D_1 x \times D_2 y \subseteq \mathfrak{m}^{-1}\,(U)$, para mostrarlo es suficiente notar que si $(d_1 x,\, d_2 y) \in D_1 x \times D_2 y$, entonces

$$d_1 x d_2 y = \mathfrak{m}\,(d_1 x,\, d_2 y) \in \mathfrak{m}\,(D_1 x \times D_2 y) = D_1 x D_2 y.$$

Por la cadena (2.1.1) es inmediato que $D_1 x D_2 y \subseteq Dxy$, así que $d_1 x d_2 y \in Dxy$, esto es $d_1 x d_2 y \in U$. Por lo tanto, la función $\mathfrak{m}$ es continua.
(iii) Mostremos que la función $In : (G,\, \tau) \longrightarrow (G,\, \tau)$ definida por $In\,(x) = x^{-1}$ es continua. Sea $V \in \tau$. Se probará que $V^{-1} \in \tau$. Si $x \in V$, entonces $x^{-1} \in V^{-1}$. Como $V \in \tau$, existe $D = \cap_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{D}$ tal que $Dx \subseteq V$. Por $(S1)$, para cada $i \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ se cumple que $C_i^{-1} = C_i$, de donde es inmediato que $D^{-1} = D$. Así que $x^{-1}D^{-1} = x^{-1}D \subseteq V^{-1}$. Por $(S3)$, para cada $i \in \{1, \ldots,\, n\}$ existe $C_i^{''} \in \mathcal{C}$ tal que $xC_i^{''}x^{-1} \subseteq C_i$, esto implica que $C_i^{''}x^{-1} \subseteq x^{-1}C_i$. Luego, $D = \cap_{i=1}^{n} C_i^{''} \in \mathcal{D}$ cumple que $Dx^{-1} \subseteq x^{-1}D \subseteq V^{1}$. Por lo tanto In es una función continua.
De (ii) y (iii) se obtiene que τ es una topología de grupo para G.
(iv) Sea $A \subseteq G$. Por definición de τ se tiene que

$$int\ (A) = \{x \in A \,|\, \text{existe } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } Dx \subseteq A\}$$

Ahora, por $(S2)$, para cada $C \in \mathcal{C}$ existe $C' \in \mathcal{C}$ tal que $\left(C'\right)^2 \subseteq C$, y ya que $e \in C' \subseteq \left(C'\right)^2$, se sigue que $e \in int\ (C)$. De lo anterior es inmediato que para cada $D \in \mathcal{D}$ existe $D' \in \mathcal{D}$ tal que $e \in D' \subseteq int\ (D)$ (basta tomar los C's respectivos y considerar su intersección). Por lo tanto, para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $e \in int\, D$.

(v) Veamos que $N = \cap\mathcal{C}$ es subgrupo de G. Si $C \in \mathcal{C}$, por $(S2)$ existe $C' \in \mathcal{C}$ tal que $\left(C'\right)^2 \subseteq C$, además, por $(S1)$ se cumple que $\left(C'\right)^{-1} = C'$, estos hechos implican que

$$NN^{-1} \subseteq C'\left(C'\right)^{-1} \subseteq C,$$

de donde se sigue que

$$NN^{-1} = \cap_{C\in\mathcal{C}}\left(NN^{-1}\right) \subseteq \cap_{C\in\mathcal{C}}C = N,$$

es decir, N es un subgrupo de G. Ahora, para ver que N es normal en G probaremos que si $g \in G$, entonces $g^{-1}Ng = N$. Si $g \in G$ y $C \in \mathcal{C}$, por $(S3)$ se tiene que existe $C'' \in \mathcal{C}$ tal que $g^{-1}C''g \subseteq C$. De lo anterior se sigue que $g^{-1}Ng \subseteq g^{-1}C''g \subseteq C$, lo cual implica que

$$g^{-1}Ng = \cap_{C\in\mathcal{C}}\left(g^{-1}Ng\right) \subseteq \cap_{C\in\mathcal{C}}C = N.$$

Por lo tanto, N es subgrupo normal de G.

(vi) Notemos que $e \in \cap_{C\in\mathcal{C}} int\ (C) \subseteq \cap\mathcal{C} = N$, por lo cual si $N = \{e\}$, entonces se tiene que τ es T_1, y por el Corolario 2.18 se sigue que τ es de Hausdorff. □

Observación 2.22. En el Teorema 2.21 no se afirma que la familia $\mathcal{C}$ es una sub-base de τ, ya que lo más que se puede asegurar es que para cada $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $e \in int_\tau\ (C)$.

Teorema 2.23. *Sean G un grupo (abstracto) y $\mathcal{B}_0$ una colección de subconjuntos de G que contienen al elemento identidad tal que*

(B1) para cada $B \in \mathcal{B}_0$ se cumple que $B^{-1} = B$,

(B2) para cada $B \in \mathcal{B}_0$ existe $B' \in \mathcal{B}_0$ tal que $\left(B'\right)^2 \subseteq B$,

(B3) para cualesquiera $B \in \mathcal{B}_0$ y $g \in G$ existe $B' \in \mathcal{B}_0$ tal que $g^{-1}B'g \subseteq B$,

(B4) para cualesquiera $B \in \mathcal{B}_0$ y $x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}_0$ tal que $B'x \subseteq B$, y

(B5) para cualesquiera B_1, $B_2 \in \mathcal{B}_0$ existe $B_3 \in \mathcal{B}_0$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{Bg | B \in \mathcal{B}_0 \ y \ g \in G\}$$

es base para una topología de grupo sobre G. Además, si $\cap\mathcal{B} = \{e\}$, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es de Hausdorff.

Demostración. Como la familia $\mathcal{B}_0$ satisface las condiciones del Teorema 2.21, sea τ la topología generada por ella. Por $(B4)$ se tiene que cada elemento de $\mathcal{B}_0$ pertenece a τ. Sea $O \in \tau$ y consideremos $x \in O$. Por la definición de la topología τ, existen $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_0$ tales que $(B_1 \cap \cdots \cap B_k)\, x \subseteq O$. Por $(B5)$ existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$, y por ello $B'x \subseteq O$ y $B'x \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para τ. □

Concluiremos esta sección con algunos ejemplos adicionales de grupos topológicos.

Ejemplo 2.24. Definiremos una infinidad de topologías sobre el grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$. Para ello, sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k = p^k\mathbb{Z}$. Consideremos la familia $\mathcal{B}_0 = \{U_k | \, k \in \mathbb{N}\}$. Notemos que $\mathcal{B}$ cumple $(B1) - (B5)$ del Teorema 2.23: $(B1)$ se satisface porque si $p^k x \in U_k$, entonces $p^k(-x) \in U_k$; $(B2)$ se cumple porque $2U_k \subseteq U_k$; $(B3)$ se tiene porque $\mathbb{Z}$ es abeliano y $U_k = -x + U_k + x$; $(B4)$ se sigue del hecho de que si $p^k x \in U_k$, basta considerar $U_k' = U_k$ para tener que $U_k + p^k x \subseteq U_k$, y para $(B5)$ si consideramos U_r y U_s, entonces basta considerar U_m con $m = max\{r, s\}$ para tener que $U_m \subseteq U_r \cap U_s$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es base para una topología de grupo en $\mathbb{Z}$ que se llama **topología p-ádica**. Para ver que en efecto hemos definido una infinidad de topologías basta mostrar que para cualesquiera dos números primos distintos p y q se tiene que la topología p-ádica τ_p es diferente de la topología q-ádica τ_q, para ello consideremos el conjunto $M = \{p, p^2, \ldots, p^n, \ldots\}$ y observemos que $0 \in cl_{\tau_p}(M)$ y $0 \notin cl_{\tau_q}(M)$, por lo tanto, las topologías son distintas.

Ejemplo 2.25. El grupo de las matrices invertibles (no singulares) de orden n con entradas en $\mathbb{R}$ y operación el producto de matrices se llama **grupo general lineal** de orden n sobre $\mathbb{R}$ y se denota por $GL(n, \mathbb{R})$. Si consideramos en $GL(n, \mathbb{R})$ la topología generada por la métrica

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j} - B_{i,j}|^2}$$

para $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j}) \in GL(n, \mathbb{R})$, tenemos que la función definida por $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua. Por lo tanto, $GL(A, B)$ con la topología τ_d es un grupo topológico.

2.2. Relaciones entre grupos topológicos

El análisis de algunas propiedades intrínsecas de un grupo topológico ya fue realizado en la sección anterior. En la presente sección estudiaremos el comportamiento de un grupo topológico con respecto a otros y para ello, tal como ocurre en el caso de los grupos o de los espacios topológicos, estudiaremos cuales son los morfismos que relacionan a los grupos topológicos así como las subestructuras que surgen naturalmente a partir de la definición de grupo topológico. Es de destacar que la construcción de los grupos producto y grupos cociente fue tomada del desarrollo hecho por Gábor Lukács en [12], mientras que las versiones de los teoremas de isomorfismo fueron desarrolladas de acuerdo a [1].
En primer lugar, definiremos a las funciones que serán interesantes en el estudio de los grupos topológicos.

Definición 2.26. *Sean G y H grupos topológicos, y $f : G \longrightarrow H$ una función. f es un* **homomorfismo de grupos topológicos** *si f es un homomorfismo de grupos abstractos y además*

(1) f es un **homomorfismo abierto** *si f es una función abierta,*

(2) f es un **homomorfismo cerrado** *si f es una función cerrada,*

(3) f es un **homomorfismo continuo** *si f es una función continua.*

En lo sucesivo, por brevedad utilizaremos *homomorfismo* en lugar de homomorfismo de grupos topológicos. Cuando sea necesario se usará *homomorfismo de grupos* para referirnos a un homomorfismo de grupos abstractos.
Ahora, aprovecharemos la homogeneidad los grupos topológicos para probar propiedades acerca de homomorfismo.

Teorema 2.27. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo. Se cumple que*

(1) f es homomorfismo abierto sí y sólo si f es abierta en e_G, y

(2) f es homomorfismo continuo sí y sólo si f es continua en e_G.

Demostración. Notemos que si f es abierto o continuo, entonces f es abierto o continuo en e, respectivamente, por lo cual basta probar las implicaciones recíprocas.
(1) Supongamos que $f : G \longrightarrow H$ es abierto en e. Sea $A \in \tau_G$ y consideremos $h \in f(A)$. Entonces existe $g_0 \in A$ tal que $f(g_0) = h$. Como $e_G \in g_0^{-1}A$ y $g_0^{-1}A$ es abierto en G (ver Teorema 2.13(1)), se sigue que $g_0^{-1}A \in \mathcal{V}_G^{\circ}(e_G)$, y como f es abierta en e_G, se tiene que $f\left(g_0^{-1}A\right)$ es abierto en H.
Ya que f es un homomorfismo de grupos, obtenemos que

$$f\left(g_0^{-1}A\right) = f\left(g_0^{-1}\right) f(A),$$

de donde

$$\begin{aligned} hf\left(g_0^{-1}A\right) &= f(g_0)\, f\left(g_0^{-1}A\right) \\ &= f(g_0)\, f\left(g_0^{-1}\right) f(A) \\ &= f\left(g_0 g_0^{-1}\right) f(A) \\ &= f(e_G)\, f(A) \\ &= e_H f(A) = f(A), \end{aligned}$$

y por (1) del Teorema 2.13 se tiene que $hf\left(g_0^{-1}A\right)$ es abierto en H, luego $f(A)$ es abierto en H. Por lo tanto, f es homomorfismo abierto.
(2) Supongamos que f es continua en e. Sea $g \in G$ y consideremos $W \in \mathcal{V}_H^{\circ}(f(g))$. Se probará que existe $U \in \mathcal{V}_G^{\circ}(g)$ tal que $f(U) \subseteq W$.
Por el Teorema 2.8, existe $W' \in \mathcal{V}_H^{\circ}(e_H)$ tal que $f(g)\, W' \subseteq W$. Como f es continua en e_G, existe $U' \in \mathcal{V}_G^{\circ}(e_G)$ tal que $f\left(U'\right) \subseteq W'$. Por (1) del Teorema 2.13 se tiene que gU' es abierto en G, y como $g \in gU'$, entonces $gU' \in \mathcal{V}_G^{\circ}(g)$. Entonces

$$f\left(gU'\right) = f(g)\, f\left(U'\right) \subseteq f(g)\, W' \subseteq W.$$

Si $U = gU'$ se cumple lo deseado. Por lo tanto f es continua. $\square$

Observación 2.28. Existen homomorfismos continuos que no son abiertos. Sea G un grupo abstracto y consideremos G_{dis} el grupo topológico discreto y G_{ind} el grupo topológico indiscreto. Claramente la función identidad $id : G_{dis} \longrightarrow G_{ind}$ es un homomorfismo continuo que no es abierto.

Ahora presentaremos el concepto que relaciona los homomorfismos topológicos con los isomorfismos algebraicos.

Definición 2.29. *(1) Un homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ es un* **isomorfismo topológico** *si f es un isomorfismo de grupos y homeomorfismo de espacios topológicos.*

(2) Un homomorfismo $g : G \longrightarrow G$ es un **automorfismo topológico** *si g es un isomorfismo topológico.*

(3) Dos grupos topológicos G y H son **topológicamente isomorfos** *si existe un isomorfismo topológico $f : G \longrightarrow H$.*

Es inmediato de la Definición 2.29 el siguiente resultado.

Lema 2.30. *Si $f : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo topológico, entonces f y f^{-1} son homomorfismos abiertos.*

Ahora daremos ejemplos de automorfismos topológicos.

Teorema 2.31. *Si G es un grupo topológico y $g \in G$ es un elemento fijo, entonces la función $I_g : G \longrightarrow G$ definida por $I_g(x) = gxg^{-1}$ es un automorfismo topológico. Tales automorfismos se llaman* ***automorfismos internos*** *de G.*

Demostración. Ya sabemos por el Teorema 2.7 que las traslaciones $\phi_{a^{-1}}, \sigma_a : G \longrightarrow G$ son homeomorfismos, como para cada $x \in G$ se tiene que

$$\phi_{a^{-1}} \circ \sigma_a(x) = \phi_{a^{-1}}(\sigma_a(x)) = \phi_{a^{-1}}(ax) = (ax)\, a^{-1} = axa^1 = I_g(x)$$

se sigue que $I_g = \phi_{a^{-1}} \circ \sigma_a$, es decir, I_g es un homeomorfismo, por tanto, I_g y $(I_g)^{-1}$ son funciones continuas.
Resta ver que I_g y $(I_g)^{-1}$ son homomorfismos. Si x, $y \in G$, entonces

$$\begin{aligned} I_g(xy) &= g(xy)\, g^{-1} = g(xey)\, g^{-1} \\ &= g\left(xg^{-1}gy\right) g^{-1} = \left(gxg^{-1}\right)\left(gyg^{-1}\right) \\ &= I_g(x)\, I_g(y), \end{aligned}$$

por lo cual I_g es homomorfismo.
Ahora, como $(I_g)^{-1} = (\phi_{g^{-1}} \circ \sigma_g)^{-1} = (\sigma_g)^{-1}(\phi_{g^{-1}})^{-1} = \sigma_{g^{-1}} \circ \phi_g$, es decir, para cada $x \in G$ se tiene que $\sigma_{g^{-1}} \circ \phi_g = g^{-1}xg$, se sigue que $(I_g)^{-1}$ es un homomorfismo. $\square$
A partir del Teorema anterior se tienen lo siguiente.

Observaciones 2.32. Para cada elemento $g \in G$ consideremos el automorfismo interno I_g.

(a) Si G es un grupo abeliano, entonces para cada $g \in G$ se tiene que $I_g = 1_G$.

(b) Si G no es un grupo abeliano, entonces G admite "muchos" automorfismos internos.

En Matemáticas, una vez que se define una estructura (conjunto, grupo, espacio topológico, categoría, etcétera) surge de manera natural el concepto de subestructura, lo cual motiva el estudio de los sugbrupos topológicos de un grupo topológico.

Definición 2.33. *Sea G un grupo topológico y H un subconjunto de G. H es un* **subgrupo topológico** *si cumple que*

(1) H es subgrupo (algebraico) de G y

(2) H es subespacio topológico con la topología inducida por la topología de G.

Como es de esperarse, los subgrupos topológicos son grupos topológicos.

Teorema 2.34. *Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo topológico de G, entonces $(H, *|_H, \tau_G|_H)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Como G es un grupo topológico, la función $g_3 : G \times G \longrightarrow G$ dada por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es continua (ver Teorema 2.4). Luego, si consideramos la función $g_3' : H \times H \longrightarrow H$ tal que $g_3'(x, y) = g_3(x, y)$, tenemos que es la restricción de g_3 a $H \times H$, y como H es subgrupo (algebraico) de G, entonces $g_3'(H \times H) = H$, y como se trata de una restricción, g_3' es continua. Por el Teorema 2.4 se sigue que H es grupo topológico. □

En adelante usaremos el Teorema 2.34 sin referencia explícita a él. También, usaremos *subgrupo* para referirnos a un subgrupo topológico, en caso necesario emplearemos subgrupo algebraico para hablar de subgrupos sin considerar su topología.
Para estudiar los subgrupos y su comportamiento con respecto a la cerradura en el grupo topológico usaremos el siguiente resultado auxiliar.

Teorema 2.35. *Si G es un grupo topológico, A y B son subconjuntos de G, entonces*

(1) $cl\,(A)\,cl\,(B) \subseteq cl\,(AB)$,

(2) $(cl\,(A))^{-1} = cl\,(A^{-1})$,

(3) para cualesquiera x, y elementos de G se cumple que $x\,(cl\,(A))\,y = cl\,(xAy)$, *y*

(4) si además G es T_0 y para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $ab = ba$, entonces para cualesquiera $a \in cl\,(A)$ y $b \in cl\,(B)$ se tiene que $ab = ba$.

Demostración. (1) Sean $x \in cl\,(A)$ y $y \in cl\,(B)$. Consideremos $W \in \mathcal{V}^{\circ}\,(xy)$. Como la función $(x,\, y) \mapsto xy$ es continua (ver Definición 2.1), existen $V_1 \in \mathcal{V}^{\circ}\,(x)$ y $V_2 \in \mathcal{V}^{\circ}\,(y)$ tales que $V_1V_2 \subseteq W$. Ya que $x \in cl\,(A)$, existe $a \in G$ tal que $a \in A \cap V_1$; análogamente, existe $b \in G$ tal que $b \in B \cap V_2$. Entonces $ab \in AB$ y $ab \in V_1V_2 \subseteq W$, esto es, $AB \cap W \neq \varnothing$. De lo anterior se tiene que $xy \in cl\,(AB)$. Por lo tanto, $cl\,(A)\,cl\,(B) \subseteq cl\,(AB)$.
(2) Como por el Teorema 2.7(3) se tiene que la función inversión In es homeomorfismo, tenemos que $In\,(cl\,(A)) = cl\,(A^{-1})$.
(3) Como por (1) y (2) del Teorema 2.7 las traslaciones son homeomorfismos, se tiene que, para $x,\, y \in G$ fijos, $\sigma_x \circ \phi_y$ es un homeomorfismo. Ya que $\sigma_x \circ \phi_y\,(A) = xAy$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x\,(cl\,(A))\,y &= \sigma_x \circ \phi_y\,(cl\,(A)) \\ &= cl\,(\sigma_x \circ \phi_y\,(A)) \\ &= cl\,(xAy)\,. \end{aligned}$$

(4) Notemos que la función $h : G \times G \longrightarrow G$ definida por $h\,(a,\, b) = aba^{-1}b^{-1}$ es continua porque las operaciones producto e inversión son continuas porque G es grupo topológico. Como G es T_0, se tiene que G es T_1 (ver Teorema 2.17), luego $\{e\}$ es cerrado y dado que h es continua se obtiene que $h^{-1}\,(e) = \{(a,\, b) \in G \times G |\, aba^{-1}b^{-1} = e\}$ es cerrado. Claramente $A \times B \subseteq h^{-1}\,(e)$. Además, se cumple que $cl\,(A \times B) = cl\,(A) \times cl\,(B)$ por la forma de la topología en $G \times G$, así que $cl\,(A) \times cl\,(B) = cl\,(A \times B) \subseteq h^{-1}\,(e)$. Por lo tanto, para cualesquiera $a \in cl\,(A)$ y $b \in cl\,(B)$ se tiene que $ab = ba$. $\square$

Ahora tenemos la herramienta para analizar el comportamiento de los subgrupos con respecto a la cerradura.

Teorema 2.36. *Sean G es un grupo topológico y H y N subgrupos de G. Se cumple que*

(1) $cl\,(H)$ es subgrupo de G,

(2) si N es subgrupo normal de G, entonces $cl\,(N)$ es subgrupo normal de G,

(3) H es un conjunto abierto sí y sólo si $int\, H \neq \varnothing$, y

(4) si H es un conjunto abierto, entonces $cl\,(H) = H$.

Demostración. (1) Como H es subgrupo de G, $H^2 \subseteq H$ y por (1) del Teorema 2.35 se sigue que $(cl\,(H))^2 \subseteq cl\,(H^2) \subseteq cl\,(H)$. Además, como $H^{-1} \subseteq H$ porque H es subgrupo, por (2) del Teorema 2.35 tenemos que $(cl\,(H))^{-1} = cl\,(H^{-1}) \subseteq cl\,(H)$. Por lo tanto, $cl\,(H)$ es un subgrupo.
(2) Como N es normal, se cumple que para cualquier $a \in G$ se tiene que $a^{-1}Na \subseteq N$. Luego, por (3), para cualquier $a \in G$ se verifica que

$$a^{-1}\,(cl\,(N))\,a = cl\left(a^{-1}Na\right) \subseteq cl\,(N)\,.$$

Por lo tanto, $cl\,(N)$ es subgrupo normal de G.
(3) Si H es conjunto abierto, como $e \in H$, se cumple que $int\, H = H \neq \varnothing$.
Si $int\, H \neq \varnothing$, entonces existe $x \in int\, H$. Luego, existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e)$ tal que $xU \subseteq H$. Entonces para cualquier $y \in H$ se tiene que

$$yU = yx^{-1}xU \subseteq yx^{-1}H = H.$$

Como yU es abierto porque U es abierto (ver Teorema 2.13(1)), tenemos que H es abierto.
(4) Sea H un subgrupo abierto de G. Entonces $G \setminus H = \cup\{Hx |\, x \notin H\}$. Como H es abierto, entonces cada Hx es abierto, por lo tanto, $G \setminus H$ es abierto. Por consiguiente, H es cerrado. □

A continuación usaremos el Teorema 2.36 para estudiar el comportamiento de algunos subgrupos particulares.

Teorema 2.37. *Si G es un grupo topológico y U es una vecindad simétrica de e, entonces $L = \cup_{i=1}^{\infty} U^n$ es subgrupo abierto y cerrado de G.*

Demostración. Es claro que $e \in L$. Sean $x,\ y \in L$. Entonces existen $k,\ l \in \mathbb{N}$ tales que $x \in U^k$ y $y \in U^l$, por lo que $xy \in U^{k+l} \subseteq L$, también, $x^{-1} \in \left(U^{-1}\right)^k = U^k \subseteq L$. Por lo tanto, L es subgrupo de G. Como L es una unión de conjuntos abiertos (ver Teorema 2.13(1)), se tiene que L es abierto y por (4) del Teorema 2.36 se tiene que L es cerrado. $\square$

Teorema 2.38. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G. H es un espacio discreto sí y sólo si H tiene un punto aislado.*

Demostración. Por un lado, si H es un espacio discreto todos sus puntos son aislados. Por otro lado, si $x \in H$ es un punto aislado, entonces existe $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que $Ux \cap H = \{x\}$. Ahora, si $y \in H$, entonces

$$Uy \cap H = Uxx^{-1}y \cap Hx^{-1}y = (Ux \cap H)\, x^{-1}y = \{x\}x^{-1}y = \{y\}.$$

Por lo tanto, todos los puntos de H son aislados, es decir, H es un espacio discreto. $\square$

Teorema 2.39. *Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo tal que existe una vecindad abierta U de e tal que $cl_G(U) \cap H$ es cerrado en G, entonces H es cerrado en G.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in cl_G(H)$, se probará que $x \in H$.
Por el Teorema 2.36(1) se tiene que $cl_G(H)$ es subgrupo de G, luego $x^{-1} \in cl_G(H)$. Como $x^{-1}V \in \mathcal{V}_G^\circ(x^{-1})$ (ver Teorema 2.13(1)), tenemos que existe $y \in x^{-1}V \cap H$.
Afirmamos que $xy \in cl_G(U) \cap H$. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que $xy \notin cl_G(U) \cap H$, como $cl_G(U) \cap H$ es cerrado por hipótesis, existe $W \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tal que $Wxy \cap (cl_G(U) \cap H) = \varnothing$. Como $(W \cap V)\, x \in \mathcal{V}_G^\circ(x)$ y $x \in cl_G(H)$, entonces existe $z \in (W \cap V)\, x \cap H = Wx \cap Vx \cap H$. Notemos que se cumple que $zy \in (Vx)\,(x^{-1})\, V = V\,(x^{-1}x)\, V = V^2 \subseteq U$, también $zy \in HH = H$ y $zy \in (Wx)\, y = Wxy$. Esto contradice la elección de W. Luego, $xy \in cl_G(U) \cap H$. Por lo tanto

$$x = xe_G = x\left(yy^{-1}\right) = (xy)\, y^{-1} \in H,$$

pues $y^{-1} \in H$ porque $y \in H$ y H es un grupo. $\square$

Se sabe que en los espacios topológicos no cualquier subespacio discreto es cerrado en el espacio, es más, ni en el caso de los grupos topológicos esto es cierto: Consideremos el grupo aditivo de números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene que A es un subespacio discreto de $\mathbb{R}$ y no es cerrado en $\mathbb{R}$. Como se observa, a pesar de las excelentes propiedades de separación de $\mathbb{R}$, ello no fue suficiente para obtener que cualquier subespacio discreto es cerrado (en el espacio subyacente). Una manera de obtener este hecho es considerar subgrupos discretos de grupos de Hausdorff.

Teorema 2.40. *Todo subgrupo discreto de un grupo topológico T_0 es cerrado.*

Demostración. Sea G un grupo topológico T_0 y H un subgrupo discreto de G. Consideremos $U \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tal que $U \cap H = \{e_G\}$. Por el Teorema 2.12(2), existe $V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tal que $cl_G(V) \subseteq U$. Entonces, $cl_G(V) \cap H = \{e_G\}$. Como G es T_0, por el Teorema 2.17, se tiene que G es T_1 y, por ello, $\{e_G\}$ es cerrado. Por el Teorema 2.39 se tiene que H es cerrado. $\square$

La siguiente estructura derivada de la definición de grupo topológico es la originada de la estructura algebraica de grupo cociente.

Definición 2.41. *Sea G un grupo topológico y N un subgrupo normal de G. El* **grupo cociente** *G/N se obtiene al equipar al grupo cociente algebraico de G por N con la topología final con respecto a la proyección natural $p : G \longrightarrow G/N$.*

Como se ha visto en la Definición 2.41, cuando sea necesario a G/N se le llamará grupo cociente algebraico para distinguirlo del grupo topológico G/N. El siguiente teorema sintetiza la información básica acerca de los grupos cociente.

Teorema 2.42. *Sean G un grupo topológico y N un subgrupo normal de G.*

(1) La proyección natural $p : G \longrightarrow G/N$ es función abierta.

(2) El grupo cociente G/N es un grupo topológico.

(3) El grupo cociente G/N es de Hausdorff sí y sólo si N es cerrado en G.

(4) Si $f : G \longrightarrow L$ es un homomorfismo continuo y $N \subseteq Ker\, f$, entonces f induce un único homomorfismo continuo $\overline{f} : G/N \longrightarrow L$ tal que

$f = \overline{f} \circ p$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & G/N \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

(5) Si H es un subgrupo de G que contiene a N, entonces H/N es un subgrupo de G/N.

(6) Si H es un subgrupo cerrado de G que contiene a N, entonces H/N es un subgrupo cerrado de G/N.

(7) El grupo cociente G/N es discreto si y sólo si N es abierto en G.

Demostración. (1) Sea $A \subseteq G$ un subconjunto abierto. Ya que

$$p^{-1}(p(A)) = NA = \cup_{n \in N} nA,$$

por (1) del Teorema 2.13 se tiene que NA es abierto, esto es, $p(A)$ es abierto en G/N.
(2) La familia

$$\mathcal{B}_0 = \{p(U) \,|U \in \mathcal{V}^*(e_G)\}$$

cumple las condiciones del Teorema 2.23 porque, salvo $(B1)$, $\mathcal{V}^*(e_G)$ las satisface, y por tanto, $\mathcal{B}_0$ genera una topología de grupo $\mathcal{T}$ sobre G/N. Ya que p es una función abierta (por (1)), cada elemento de $\mathcal{B}_0$ es abierto en la topología cociente de G/N. Por otro lado, si W es abierto en la topología cociente y $Nx \in W$, entonces $p^{-1}(W)$ es abierto y contiene a x en G. Luego, existe $V \in \mathcal{V}^*(e_G)$ tal que $Vx \subseteq p^{-1}(W)$, de donde se sigue que $p(V)\,Nx \subseteq W$ y, así, $p(V)(Nx) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ coincide con la topología cociente sobre G/N.
(3) Por el Teorema 2.13(4) se cumple que

$$cl_G(N) = \cap_{U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)} NU = \cap_{U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)} p^{-1}(p(U)) = p^{-1}\left(\cap_{U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)} p(U)\right).$$

Así, si N es cerrado, entonces $\cap_{U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)} p(U) = \{N\}$ en G/N, y por tanto G/N es T_1. Por el Corolario 2.18 se obtiene que G/N es de Hausdorff.

Recíprocamente, si G/N es de Hausdorff, entonces $\{N\}$ es subconjunto cerrado de G/N, y por tanto, $N = p^{-1}(\{N\})$ es cerrado en G porque p es continua.
(4) La existencia y unicidad del homomorfismo $\overline{f}$ se tiene de Teoría de Grupos, por lo cual resta probar su continuidad. Si $U \in \mathcal{V}^\circ(L)$, entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}^\circ(G)$ por la continuidad de f. Como p es una función cociente y $p^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U)$, se sigue que $\overline{f}^{-1}(U) \in \mathcal{V}^\circ\left(e_{G/N}\right)$. Esto muestra que $\overline{f}$ es continua en la identidad y, por el Teorema 2.27(2), se implica que $\overline{f}$ es continua en G/N.
(5) Como la función p es cociente, entonces su restricción $p|_H : H \longrightarrow G/N$ también es continua. Además, como $N \subseteq H$, entonces $Ker\,(p|_H) = N$. Por (4), $p|_H$ induce un homomorfismo continuo inyectivo $\overline{p}|_H : H/N \longrightarrow G/N$. Para mostrar que $\overline{p}|_H$ es un encaje, es decir, que la topología cociente de H/N coincide con la topología heredada por G/N, sea $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ y $x \in H \cap NU$. Entonces $x \in H$ y $x = nu$ para algunos $n \in N$ y $u \in U$. Luego, $u = n^{-1}x \in N^{-1}H = H$ (porque $N \subseteq H$ y H es subgrupo), de donde $u \in U \cap H$. Ahora, por el hecho de ser H un subgrupo y $N \subseteq H$ se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{p}|_H(H) \cap NU &= NH \cap NU = H \cap NU \\ &\subseteq H \cap N(U \cap H) = N(U \cap H) = \overline{p}|_H(U \cap H). \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 2.27(1) se sigue que $\overline{p}|_H$ es abierta en su imagen, es decir, $\overline{p}|_H$ es un encaje.
(6) Sea $Nx \in cl_{G/N}(H/N)$. Entonces $NUx \cap H \neq \varnothing$ para cualquir $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$, lo cual implica que $nux = h$ para algunos $n \in N$, $u \in U$ y $h \in H$. Luego

$$ux = n^{-1}h \in N^{-1}H = H,$$

porque $N \subseteq H$, y así, $Ux \cap H \neq \varnothing$ para cada $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$. Por tanto $x \in cl_G(H) = H$. Esto muestra que H/N es cerrado en G/N.
(7) Si G/N es discreto, entonces $\{N\} = \{Ne_G\}$ es abierto en G/N. Ya que la proyección natural p es continua, se sigue que $p^{-1}(\{N\}) = N$ es abierto en G.
Ahora, si N es abierto en G, entonces para cualquier $g \in G$ se cumpe que Ng es abierto en G (ver Teorema 2.13(1)). Luego, como la proyección natural es una función abierta p se sigue que para cualquier $g \in G$ se satisface $p(Hg) = \{Hg\}$ es abierto en G/N. Por lo tanto, G/N es discreto. $\square$

Nuevamente, nuestro interés está en estudiar las relaciones entre un grupo y sus grupos cociente así como las relaciones entre los propios grupos cociente de uno o más grupos topológicos.

Teorema 2.43. *Sean G y H grupos topológicos y $f : G \longrightarrow H$ un isomorfismo topológico. Si G_0 es un subgrupo normal cerrado de G y $H_0 = f(G_0)$, entonces los grupos cociente G/G_0 y H/H_0 son topológicamente isomorfos bajo el isomorfismo topológico $\Phi : G/G_0 \longrightarrow H/H_0$ está dado por la fórmula $\Phi(G_0x) = H_0y$ donde $f(x) = y$.*

Demostración. Sean $\phi : G \longrightarrow G/G_0$ y $\psi : H \longrightarrow H/H_0$ las proyecciones naturales. Es claro que Ψ es un homomorfismo por definición y por la operación de clases laterales. También, por definición de Ψ se cumple que $\psi \circ f = \Psi \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & H \arrow[d, "\psi"] \\ G/G_0 \arrow[r, "\Phi"] & H/H_0 \end{tikzcd}$$

Como f, ϕ y ψ son homomorfismos continuos y abiertos, se sigue que Φ es homomorfismo continuo y abierto. Para ver que Φ es isomorfismo topológico, resta mostrar que Φ es biyectiva y como Φ es sobreyectiva, sólo que Φ es inyectiva. Sean $G_0x \in G/G_0$ y $y = f(x)$ fijos. Si $\Phi(G_0x) = H_0$, entonces $\psi(y) = H_0$, por lo cual $y \in H_0$ y $x \in G_0$, de donde se obtiene que $Ker(\Phi) = \{e_{G/G_0}\}$, esto es, Φ es inyectiva. $\square$

A continuación recuperemos los teoremas de isomorfismo. Como se verá, en el caso de los grupos topológicos, no es suficiente con agregar la palabra "topológico" para tener los teoremas ya que se deben tener en cuenta las condiciones que permiten establecer los isomorfismos topológicos.

Teorema 2.44. *[Primer Teorema de Isomorfismo de Grupos Topológicos] Sean G y H grupos topológicos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo sobreyectivo, continuo y abierto. Si $N = Ker(f)$, entonces N es un subgrupo normal de G, y el homomorfismo $h : G/N \longrightarrow H$ dado por $h(Nx) = f(x)$ es un isomorfismo topológico. Si H es T_1, entonces N es cerrado en G.*

Demostración. Tenemos de la parte de Teoría de Grupos que N es subgrupo normal de G y que $h : G/N \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos.
Consideremos $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección natural. Notemos que por definición se cumple que $f = h \circ p$. Ahora, si $V \in \tau_H$, entonces $f^{-1}(V) = (h \circ p)^{-1}(V) = p^{-1}(h^{-1}(V))$, de donde se sigue que $h^{-1}(V) = p(f^{-1}(V))$. Ya que p es abierta (Teorema 2.42(1)) y $f^{-1}(V)$ es abierto porque f es continua, se obtiene que $h^{-1}(V) = p(f^{-1}(V))$ es abierto en G/N y por tanto h es una función continua.
Ahora, si U abierto en G/N, entonces existe un abierto W en G tal que $p(W) = U$. Luego, $h(U) = h(p(W)) = f(W)$, y como f es abierta, entonces $h(U)$ es abierto en H. Así, como h es isomorfismo de grupos y homeomorfismo de espacios topológicos, se tiene que h es isomorfismo topológico.
Si H es T_1, entonces $\{e_H\}$ es cerrado en H y como f es continua, entonces $N = f^{-1}(\{e_H\})$ es cerrado en G. $\square$

Notemos que el hecho de ser f continua, abierta y sobreyectiva implica que f es una función cociente.

Teorema 2.45. *Sean G y H grupos topológicos y $f : H \longrightarrow G$ y $g : G \longrightarrow H$ homomorfismos continuos. Si $g \circ f = 1_H$, entonces H es topológicamente isomorfo a $G/Ker(g)$, f es un encaje y g es una función cociente.*

Demostración. Sean $p : G \longrightarrow G/Ker(g)$ la proyección natural y $h : G/Ker(g) \longrightarrow H$ la única función tal que $h \circ p = g$. Luego, h es un homomorfismo continuo biyectivo y, además, $h \circ p \circ f = g \circ f = 1_H$. Por otro lado,

$$h \circ p = 1_H \circ (h \circ p) = h \circ (p \circ f) \circ h \circ p,$$

y como h es inyectiva y p es sobreyectiva, entonces $1_{G/Ker(g)} = p \circ f \circ h$.
Como h es un homeomorfismo, obtenemos que $g = h \circ p$ es una función cociente. Como $f' : H \longrightarrow f(H)$ es una biyección cuya inversa f'^{-1} es la restricción de g a $f(H)$, por lo cual es continua. Esto muestra que f es un encaje. $\square$

Teorema 2.46. *[Segundo Teorema de Isomorfismo de Grupos Topológicos] Sea G un grupo topológico. Si N es un subgrupo normal cerrado de G, M es un subgrupo topológico de G y $p : G \longrightarrow G/N$ es la proyección natural, entonces el grupo cociente MN/N es topológicamente isomorfo a $p(M)$.*

Demostración. Notemos que $MN = p^{-1}(p(M))$. Como p es una función abierta y continua (Teorema 2.42(1)), la restrición ψ de p a MN es abierta, continua y sobreyectiva de MN en $p(M)$. Ya que M es subgrupo de G y p es homomorfismo, entonces $p(M)$ y MN son subgrupos de G/N y G, respectivamente. Notemos que $\psi^{-1}(\psi(e_G)) = p^{-1}(p(e_G)) = N$, por lo cual, $Ker(\psi) \subseteq N$.
Por el Primer Teorema de Isomorfismo de Grupos Topológicos se cumple que MN/N y $p(M)$ son topológicamente isomorfos. $\square$

Teorema 2.47. *[Tercer Teorema de Isomorfismo de Grupos Topológicos] Sean G y H grupos topológicos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo. Si H_0 es un subgrupo normal cerrado de H, $G_0 = f^{-1}(H_0)$ y $N = Ker(f)$, entonces G/G_0, H/H_0 y $(G/N)/(G_0/N)$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sean $p : G \longrightarrow G/G_0$ y $q : H \longrightarrow H/H_0$ las proyecciones naturales respectivas. Tenemos que $q \circ f : G \longrightarrow H/H_0$ es un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo con núcleo G_0. Por el Primer Teorema de Isomorfismo de Grupos Topológicos se cumple que G/G_0 es topológicamente isomorfo a H/H_0.
Como G_0 es normal y cerrado en G, la función $\Phi : G/N \longrightarrow H$ definida por $\Phi(Nx) = f(x)$ es isomorfismo topológico por el Primer Teorema de Isomorfismo. Además, $\Phi(G_0/N) = H_0$. Por el Teorema 2.43 se concluye que $(G/N)/(G_0/N)$ es topológicamente isomorfo a H/H_0. $\square$

Ahora revisaremos otros espacio que también surge de manera natural, el producto de grupos topológicos.

Definición 2.48. *Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \, \alpha \in I\}$ una familia no vacía de grupos topológicos. El grupo* ***producto*** *de la familia es el grupo $G = \prod \mathcal{G} = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ con el producto directo algebraico y dotado de la topología producto.*

A continuación mostraremos que la Definición anterior es correcta: consideremos la función $h : G \times G \longrightarrow G$ definida por $h\left((x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I}\right) = (x_\alpha y_\alpha^{-1})_{\alpha\in I}$. Si $f : G \times G \longrightarrow \prod_{\alpha\in I}(G_\alpha \times G_\alpha)$ está definida por

$$f\left((x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I}\right) = (x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in I},$$

entonces f es una función continua. Además, si $g : \prod_{\alpha\in G}(G_\alpha \times G_\alpha) \longrightarrow G$ está dada por $g\left((x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in I}\right) = (x_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in I}$, entonces g es una función continua. Ya que $h = g \circ f$, se tiene que h es una función continua, y por el Teorema 2.4 se tiene que G es un grupo topológico.

Teorema 2.49. *[Propiedad asociativa del producto] Sean $G = \prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ un producto de grupos topológicos y $\{J_\beta\}_{\beta\in K}$ una partición de I. Se cumple que G es topológicamente isomorfo a $H = \prod_{\beta\in K}\left(\prod_{\alpha\in J_\beta} G_i\right)$.*

Demostración. Para cada $\beta \in K$ sean $H_\beta = \prod_{\alpha\in J_\beta} G_\alpha$ y $\pi_{J_\beta} = \Delta\{\pi_i : G \longrightarrow G_i | i \in J_\beta\}$. Tenemos que por la propiedad universal del producto topológico (cf. topología inicial) la función el producto diagonal $P = \Delta_{\beta\in K}\pi_{I_\beta}$ es la única función continua que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{\beta\in K} H_\beta \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\pi_\beta"'] & & \prod_{\alpha\in I} G_\alpha \arrow[dl, "\pi_{J_\beta}"] \\ & H_\beta & \end{tikzcd}$$

Además, es claro que P es un homomorfismo de grupos. También se tiene que el producto diagonal $Q = \Delta_{\beta\in K}\pi_\beta$ de las proyecciones β-ésimas de H es la única función continua que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{\alpha\in I} G_\alpha \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi_{J_\beta}"'] & & \prod_{\beta\in K} H_\beta \arrow[dl, "\pi_\beta"] \\ & H_\beta & \end{tikzcd}$$

También se tiene que Q es un homomorfismo. Como

$$\pi_\beta \circ Q \circ P = \pi_{J_\beta} \circ P = \pi_\beta,$$

y $\pi_\beta \circ 1_H = \pi_\beta$, por la unicidad del morfismo que preserva esta composición, se tiene que $Q \circ P = 1_H$. Análogamente se obtiene que $P \circ Q = 1_G$. Por lo tanto, G es topológicamente a H. $\square$

Los siguientes resultados son inmediatos de la Definición de producto de grupos topológicos.

Lema 2.50. *Sea $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ un producto de grupos topológicos. Para cada $\beta \in I$ se cumple que la β-ésima proyección $\pi_\beta : G \longrightarrow G_\beta$ es un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo.*

Lema 2.51. *Sea $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ un producto de grupos topológicos. Si para cada $\beta \in I$ se considera la inclusón $j_\beta : G_\beta \longrightarrow G$ definida por $j_\beta (x) = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$ con $y_\alpha = x$ si $\alpha = \beta$ y e_α en otro caso, entonces j_β es un isomorfismo topológico entre G_β y $j_\beta (G_\beta)$.*

El siguiente teorema exhibe una propiedad importante del producto débil o suma directa de grupos topológicos.

Teorema 2.52. *Si $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es un producto de grupos topológicos y H es el producto débil de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$, entonces H es un subgrupo normal y denso de G.*

Demostración. Si U es un básico canónico, entonces existe $J \subseteq I$ finito donde para cada $\beta \in J$ se tiene que $\pi_\beta (G) \neq G_\beta$. Para cada $\beta \in J$ sea $y_\beta \in \pi_\beta (G)$. Si consideremos $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \in G$ definido por $y_\alpha = e_{G_\alpha}$ si $\alpha \notin J$ y $y_\alpha = y_\beta$ si $\alpha \in J$, entonces $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \in H$. Por esto, H es denso en G.
Es claro que H es subgrupo de G. Finalmente, si $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in G$ y$h = (h_\alpha)_{\alpha \in I} \in H$, entonces existe $J \subseteq I$ finito donde para cada $\beta \in J$ se tiene que $h_\beta \neq e_{G_\beta}$, luego, si $\alpha \in I \setminus J$ se sigue que $x_\alpha h_\alpha x_\alpha^{-1} = e_{G_\alpha}$, por lo tanto, $xhx^{-1} \in H$. $\square$

Ahora, revisemos el producto directo interno de grupos topológicos.

Definición 2.53. *Sean G un grupo topológico y $\{N_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subgrupos normales y cerrados de G. G se **descompone topológicamente** en el producto directo de los subgrupos $N_1, \ldots, N_n$ si G es el producto directo interno de la familia $\{N_i\}_{i=1}^n$ y para cualquier colección $U_1, \ldots, U_n$ de vecindades abiertas de e_G, relativas a $N_1, \ldots, N_n$, respectivamente, existe una vecindad U (relativa a G) de e_G tal que U es subconjunto de $U_1 \cdots U_n$.*

Teorema 2.54. *Sea G un grupo topológico. Si G se descompone topológicamente en el producto directo de $N_1, \ldots N_n$ y $H = \prod_{i=1}^n N_i$, entonces la función $\psi : H \longrightarrow G$ dada por $\psi (x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ es un isomorfismo topológico y $\psi \circ \pi_j = 1_{N_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. El isomorfismo algebraico se tiene y también $\psi \circ \pi_j = 1_{N_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Resta ver que ψ es continua y abierta.
Sean $U, V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tales que $V^n \subseteq U$. Si $V_i = V \cap N_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $V' = \prod_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$. Luego, $\psi(V') \subseteq U$ y por tanto ψ es continua (Teorema 2.27(2)).
Ahora, si $W = \prod_{i=1}^n W_i$ es un básico de H tal que $e_H \in W$, entonces, como G se descompone topológicamente en el producto de los $N_i's$, existe $Z \in \mathcal{V}_{e_G}^\circ(e_G)$ tal que $Z \subseteq W_1 \cdots W_n = \psi\left(\prod_{i=1}^n W_i\right)$. Por el Teorema 2.27(1) se sigue que ψ es abierta. □

2.3. Grupos compactos

A continuación estudiaremos el comportamiento de los subespacios compactos de un grupo topológico. Ya que el presente trabajo de tesis versa sobre compacidad categórica en grupos topológicos, esta sección será muy importante para entender cómo es el comportamiento de los compactos con respecto a las operaciones de grupo.

Teorema 2.55. *Sea G un grupo topológico. Si U es una vecindad abierta de e_G y K un subespacio compacto de G, entonces existe una vecindad abierta V de e_G tal que para cualquier elemento x de K se satisface la contención $xVx^{-1} \subseteq U$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{V}^*(e_G)$ tal que $W^3 \subseteq U$. Tenemos que $\{Wx\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de K, y como K es compacto, se sigue que existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^n W x_i$.
Consideremos $V = \cap_{i=1}^n x_i^{-1} W x_i$. Por construcción, $V \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ y $x_i V x_i^{-1} \subseteq W$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, si $x \in K$, entonces existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in W x_k$, esto es, $x = w x_k$ para algún $w \in W$, luego

$$xVx^{-1} = w x_k V x_k^{-1} w^{-1} \subseteq wWw^{-1} \subseteq W^3 \subseteq U.$$

□

Sabemos que las proyecciones naturales no siempre son funciones cerradas, pero en el caso de subespacios compactos, esto si ocurre.

Teorema 2.56. *Sea G un grupo topológico. Si N es un subgrupo normal compacto de G, entonces $p : G \longrightarrow G/N$ es una función cerrada.*

Demostración. Sea $A \subseteq G$ cerrado. Se probará que $(G/N) \setminus (p(A))$ es abierto en G/N. Sea $x \in G$ tal que $p(x) \notin p(A)$, entonces $x \notin NA$. Por el Teorema 2.16(2) se tiene que NA es cerrado, por lo cual existe una vecindad abierta U de x tal que $U \cap NA = \varnothing$. Como p es una función abierta, se cumple que $p(U)$ es un abierto en G/N, el cual satisface $p(x) \in p(U)$ y $p(U) \cap p(A) = \varnothing$. Si esto último no ocurre, entonces existe $z \in p(U) \cap p(A)$, esto es, existen $a \in A$ y $u \in U$ tales que $p(a) = p(u) = z$, es decir, $ua^{-1} \in N$, de donde se sigue que $u \in NA$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(G/N) \setminus (p(A))$ es abierto en G/N. □

El siguiente resultado muestra que la compacidad se hereda a subgrupos cerrados y espacios cociente.

Teorema 2.57. *Sean G un grupo topológico y N un subgrupo cerrado y normal de G. Si G es compacto , entonces N y G/N son compactos; si G es localmente compacto, entonces N es localmente compacto y, si además, G es de Hausdorff, se tiene que G/N es localmente compacto.*

Demostración. Tenemos que la compacidad y la compacidad local son hereditarias a subespacios cerrados, por tanto, si G es compacto o localmente compacto, entonces N es compacto o localmente compacto, respectivamente. Además, como la proyección natural $p : G \longrightarrow G/N$ es continua y sobreyectiva y la compacidad se preserva bajo funciones continuas, si G es compacto, se implica que G/N es compacto.
Supongamos que G es localmente compacto y de Hausdorff. Sea $p(a) \in G/N$. Como G es localmente compacto, existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(a)$ tal que $cl_G(U)$ es compacto en G, luego, $p(cl_G(U))$ es compacto en G/N. Como $U \subseteq cl_G(U)$, se tiene que $p(U) \subseteq p(cl_G(U))$. Además, como G es T_2, se tiene que G/N es T_2, y ya que $p(cl_G(U))$ es compacto en G/N, entonces $p(cl_G(U))$ es cerrado, así que $cl_{G/N}(p(U)) \subseteq p(cl_G(U))$, por tanto, $cl_{G/N}(p(U))$ es compacto en G/N. De lo anterior se obtiene que $cl_{G/N}(U)$ es una vecindad compacta de $p(a)$. De esto se concluye que G/N es localmente compacto. □

Para finalizar esta sección mostraremos que en el caso de compacidad, existe un recíproco al Teorema anterior. El recíproco de este teorema establecerá que si N y G/N son compactos, entonces G es compacto. Antes de probar dicha afirmación, el siguiente resultado establece otro hecho importante sobre la proyección natural.

Teorema 2.58. *Sea G un grupo topológico y N un subgrupo normal compacto de G. La proyección natural $p : G \longrightarrow G/N$ es una función perfecta.*

Demostración. Por el Teorema 2.56 se tiene que p es una función cerrada. Notemos que si $x \in G$, entonces $p^{-1}(p(x)) = Nx$ es compacto. Esto concluye la prueba. $\square$

Finalmente, como consecuencia inmediata del Teorema anterior, establecemos el resultado anunciado.

Teorema 2.59. *Sean G un grupo topológico, N un subgrupo normal compacto de G y $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección natural. Si Q es un subespacio compacto de G/N, entonces $p^{-1}(Q)$ es compacto en G. En particular, si G/N es compacto, entonces G es compacto.*

2.4. Pseudonormas en grupos topológicos

En esta sección estudiaremos la topología de un grupo topológico mediante pseudonormas con la finalidad de probar que todo grupo topológico es completamente regular, lo cual nos da muy buenas propiedades de separación y simplifica la descripción de la topología. Es importante considerar que los resultados aquí presentados se pueden obtener mediante pseudométricas (como en [12]), pero se ha preferido hacer de acuerdo a [18].
Primero daremos algunas propiedades de pseudonormas y posteriormente las emplearemos para caracterizar topologías.

Definición 2.60. *Sean G un grupo topológico y $N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función. N es una **pseudonorma** en G si cumple que $N(e_G) = 0$ y para cualesquiera elementos x y y de G se cumple que $N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y)$.*

Lema 2.61. *Sea N una pseudonorma en G. Se cumple que*

(1) $N(x) \geq 0$ y $N(x^{-1}) = N(x)$ para cualquier elemento x de G,

(2) para cualesquiera $x, y \in G$ se cumple $N(xy) \leq N(x) + N(y)$, y

(3) para cualesquiera $x, y \in G$ se cumple que $|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y)$.

Demostración. (1) La primera desigualdad se tiene por Definición. Para la segunda desigualdad tenemos que

$$N\left(x^{-1}\right) = N\left(e_G x^{-1}\right) \leq N\left(e_G\right) + N\left(x\right) = N\left(x\right), \text{ y}$$
$$N\left(x\right) = N\left(\left(x^{-1}\right)^{-1}\right) = N\left(e_G\left(x^{-1}\right)^{-1}\right) \leq N\left(e_G\right) + N\left(x^{-1}\right) = N\left(x^{-1}\right).$$

Por lo tanto, $N(x) = N(x^{-1})$.
(2) Si $x, y \in G$, entonces, por (1), $N(xy) \leq N(x) + N(y^{-1}) = N(x) + N(y)$.
(3) Tenemos que

$$N\left(y\right) = N\left(y^{-1}\right) = N\left(y^{-1}xx^{-1}\right) = N\left(\left(y^{-1}x\right)x^{-1}\right) \leq N\left(y^{-1}x\right) + N\left(x\right),$$

y como $N(y^{-1}x) = N\left(\left(y^{-1}x\right)^{-1}\right) = N(x^{-1}y)$, se sigue que

$$N\left(y\right) \leq N\left(x^{-1}y\right) + N\left(x\right),$$

lo cual implica que $-N(x^{-1}y) \leq N(x) - N(y)$.
Por otro lado, se satisface

$$N\left(x\right) = N\left(yy^{-1}x\right) = N\left(x^{-1}yy^{-1}\right) \leq N\left(x^{-1}y\right) + N\left(y\right),$$

de donde $N(x) - N(y) \leq N(x^{-1}y)$.
Luego

$$-N\left(x^{-1}y\right) \leq N\left(x\right) - N\left(y\right) \leq N\left(x^{-1}y\right)$$

es decir

$$\left|N\left(x\right) - N\left(y\right)\right| \leq N\left(x^{-1}y\right).$$

□

En adelante, se usarán las propiedades anteriores sin referencia explícita al Teorema 2.61.
Los siguientes resultados muestran algunas maneras de obtener pseudonormas a partir de pseudonormas dadas.

Teorema 2.62. *Sean G un grupo topológico, k un número real no negativo y M y N pseudonormas en G.*

(1) $kN : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada por $x \mapsto kN(x)$, es una pseudonorma en G.

(2) $M+N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$*, dada por* $x \mapsto M(x)+N(x)$*, es una pseudonorma en* G*.*

Demostración. (1) Notemos que $kN(e_G) = k(0) = 0$ y $kN(xy^{-1}) \leq k(N(x)+N(y)) = kN(x)+kN(y)$. Por lo tanto, kN es una pseudonorma en G.
(2) Tenemos que $M+N(e_G) = M(e_G)+N(e_G) = 0+0 = 0$ y

$$\begin{aligned} M+N\left(xy^{-1}\right) &= M\left(xy^{-1}\right)+N\left(xy^{-1}\right) \\ &\leq (M(x)+M(y))+(N(x)+N(y)) \\ &= (M(x)+N(x))+(M(y)+N(y)) \\ &= M+N(x)+M+N(y), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $M+N$ es una pseudonorma en G. □

Teorema 2.63. *Sea* $f : G \longrightarrow H$ *un homomorfismo de grupos topológicos. Si* M *es una pseudonorma en* H*, entonces* $N = M \circ f$ *es una pseudonorma en* G*.*

Demostración. Como f es homomorfismo de grupos, entonces $f(e_G) = e_H$, luego $N(e_G) = M(f(e_G)) = M(e_H) = 0$. Ahora, si $x, y \in G$ entonces

$$\begin{aligned} N\left(xy^{-1}\right) &= M\left(f\left(xy^{-1}\right)\right) = M\left(f(x)f\left(y^{-1}\right)\right) = M\left(f(x)(f(y))^{-1}\right) \\ &\leq N(f(x))+N(f(y)) = M(x)+M(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, M es una pseudonorma. □

Ya que nos interesa definir pseudonormas sobre grupos topológicos, es conveniente tener un método que no dependa de otras pseudonormas.

Teorema 2.64. *Sea* G *un grupo topológico. Si* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función acotada, entonces la función* $N : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$N(x) = sup\{|f(yx)-f(y)| \mid y \in G\}$$

es una pseudonorma en G*.*

Demostración. Observemos que para cualquier $y \in G$ se cumple que

$$|f(ye_G)-f(y)| = |f(y)-f(y)| = 0,$$

por lo que $N(e_G) = 0$. Sean $x, y \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
N\left(xy^{-1}\right) &= sup\{\left|f\left(zxy^{-1}\right) - f(z)\right| \mid z \in G\} \\
&\leq sup\{\left|f\left(zxy^{-1}\right) - f(zx)\right| + |f(zx) - f(z)| \mid z \in G\} \\
&\leq sup\{\left|f\left(zxy^{-1}\right)\right| \mid z \in G\} + sup\{|f(zx) + f(x)| \mid z \in G\} \\
&\leq sup\{\left|f\left(ty^{-1}\right) - f(t)\right| \mid t \in G\} + N(x) \\
&= N\left(y^{-1}\right) + N(x).
\end{aligned}$$

Notemos que para $x \in G$ se cumple

$$\begin{aligned}
N\left(x^{-1}\right) &= sup\{\left|f\left(yx^{-1}\right) - f(y)\right| \mid y \in G\} \\
&= sup\{|f(z) - f(zx)| \mid z \in G\} \text{ con } z = yx^{-1} \\
&= N(x).
\end{aligned}$$

Luego, $N(xy^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x) = N(x) + N(y)$. Por lo tanto, N es una norma en G. $\square$

Ahora estudiaremos algunas pseudonormas con propiedades adicionales.

Definición 2.65. *Sean G un grupo topológico y N una pseudonorma en G. N es una* ***pseudonorma invariante*** *si para cualesquiera elementos x, y de G se cumple que $N(x) = N(y^{-1}xy)$.*

Observación 2.66. Notemos que si sustituimos x por yx en la Definición anterior (y podemos hacerlo porque la traslación izquierda es un automorfismo topológico), obtenemos la siguiente formulación equivalente $N(xy) = N(yx)$, para cualesquiera $x, y \in G$.

Definición 2.67. *Sea $N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una pseudonorma. N es una pseudonorma* ***continua*** *si es continua como función de G a $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.68. *Sean G un grupo topológico, a un elemento de G y N una pseudonorma en G. Si N es una pseudonorma continua, entonces la pseudonorma $N_a : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $N_a(x) = N(a^{-1}xa)$ es una pseudonorma continua.*

Demostración. Veamos que N_a es un pseudonorma. Notemos que $N_a(x) = N(a^1xa) = N(I_{a^{-1}}x)$, donde $I_{a^{-1}}$ es el automorfismo interno respectivo, luego, en virtud del Teorema 2.63 se tiene que N_a es una pseudonorma.

Como $I_{a^{-1}}$ es un automorfismo topológico (cf. Teorema 2.31) y N es continua, entonces N_a es continua. □

La siguiente caracterización de pseudonormas continuas es similar al Teorema (2.27).

Teorema 2.69. *Sean G un grupo topológico y N una pseudonorma en G. N es continua si y sólo si para cualquier número real positivo ε existe una vecindad U de e_G tal que para cualquier elemento x de U se cumple $N(x) < \varepsilon$, es decir, N es continua si y sólo si N es continua en e_G.*

Demostración. (1) Si N es continua, entonces N es continua en e_G, es decir, si $\varepsilon > 0$ entonces existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que para cualquier $x \in U$ se tiene $|N(x) - N(e_G)| < \varepsilon$. Como

$$|N(x) - N(e_G)| = |N(x)| = N(x),$$

se tiene el resultado deseado.
(2) Supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que para cualquier $x \in U$ se cumple $N(x) < \varepsilon$.
Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $U_{\varepsilon} \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que para cualquier $x \in U_{\varepsilon}$ se verifica $N(x) < \varepsilon$. Sea $z \in G$, entonces $zU_{\varepsilon} \in \mathcal{V}^{\circ}(z)$. Luego, si $y \in zU_{\varepsilon}$ se sigue $z^{-1}y \in U$, y por hipótesis, $N(z^{-1}y) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.61(3) se obtiene que $|N(z) - N(y)| < N(z^{-1}y) < \varepsilon$. Por lo tanto, N es continua en z. □

Notación 2.70. Si G es un grupo topológico y N es una pseudonorma, entonces para cada número real positivo ε se usará

$$B_N(\varepsilon) = \{x \in G | \, N(x) < \varepsilon\},$$

que podríamos llamar bola abierta de radio ε y centro en e_G.

Como ya había dicho, nos interesa definir pseudonormas que no dependan de otras pseudnormas y el Teorema 2.64 nos permite hacerlo a partir de una función acotada. A continuación, se estableceotra forma de obtener una pseudnorma que depende de la topología del grupo topológico.

Teorema 2.71. *Sea G un grupo topológico. Si $\{U_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión decreciente de vecindades simétricas de e_G, tal que*

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i, \tag{2.4.1}$$

entonces se puede definir una pseudonorma continua $N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para cualquier $i \in \omega$ se cumple que

$$B_N\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq B_N\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right). \tag{2.4.2}$$

Además, si para cualesquiera $i \in \omega$ y $y \in G$ se cumple que

$$y^{-1}U_i y \subseteq U_i, \tag{2.4.3}$$

entonces se puede definir N de manera que también sea pseudonorma invariante.

Demostración. Primero se construirá por inducción una familia de vecindades de e_G como sigue: Para $n = 1$ sea $U(1) = U_0$. Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $m \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$ se define

$$U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+1} \tag{2.4.4}$$

y

$$U\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = U\left(\frac{m}{2^n}\right) U_{n+1} \tag{2.4.5}$$

La condición impuesta en (2.4.5) garantiza que no se repiten fracciones. Con esto, hemos definido un sistema de vecindades $U(r)$ de e_G, donde r recorre todas las fracciones diádicas positivas. Además, si $m > 2^n$ definimos

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right) = G. \tag{2.4.6}$$

Ahora probaremos por inducción sobre n que

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq U\left(\frac{m+1}{2^n}\right). \tag{2.4.7}$$

Notemos que si $m \geq 2^n$, la contención se deduce directamente de (2.4.6), así, resta analizar los casos cuando $m < 2^n$. Para $n = 1$ se tiene que

$$U\left(\frac{1}{2}\right) U\left(\frac{1}{2}\right) = U_1 U_1 \subseteq U_0 = U_1.$$

Supongamos que es cierta la relación (2.4.7) para $p < n$. Probaremos que vale para n. Consideremos dos casos:
Caso 1: $m = 2k$ con k un entero positivo.
En virtud de las relaciones (2.4.1), (2.4.4) y (2.4.5) se tiene que

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right)U\left(\frac{1}{2^n}\right) = U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)U_n = U\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = U\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Caso 2: $m = 2k+1$ con k un entero positivo.
Tenemos que

$$\begin{aligned} U\left(\frac{m}{2^n}\right)U\left(\frac{1}{2^n}\right) &= U\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)U_n = U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)U_nU_n \\ &\subseteq U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)U_{n-1} = U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)U\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = U\left(\frac{m+1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Con esto se concluye que (2.4.7) es válida.
Para continuar, observemos que si r y s son dos fracciones diádicas, con $0 < r < s$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r = \frac{k}{2^n}$ y $s = \frac{l}{2^n}$, para algunos enteros positivos k, l con $k < l$, y por (2.4.7) y (2.4.4) se obtiene que $U(r) \subseteq U(s)$.
Si $x \in G$, definimos $f(x) = \acute{\imath}nf\{r \in \mathbb{Q} | \, x \in U(r)\}$. Como $U(r) = G$ si $r > 1$, entonces para cualquier $x \in G$ se cumple $f(x) \leq 1$. De la definición de f vemos que si $f(x) < r$, entonces $x \in U(r)$. Luego, como para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $e_G \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$, entonces $f(e_G) = 0$.
Como $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, por el Teorema 2.64 se tiene que $N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$N(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| \, | \, y \in G\}$$

es una pseudonorma en G. Se probará que N satisface (2.4.2).
Notemos que si $N(x) < \frac{1}{2^i}$ para algún $x \in G$, entonces se sigue de la definición de N y de $f(e_G) = 0$ que

$$f(x) = |f(e_Gx)\, f(e_G)| \leq N(x) < \frac{1}{2^i}.$$

Por una observación realizada anteriormente se deduce que $x \in U\left(\frac{1}{2^i}\right) = U_i$, por lo tanto, $B_N\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i$. Por otro lado, si $x \in U_i$ y $y \in G$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k-1}{2^i} \leq f(y) < \frac{k}{2^i}.$$

Así, por la observación anterior se obtiene que $y \in U\left(\frac{k}{2^i}\right)$, de donde se deduce que $yx \in U\left(\frac{k}{2^i}\right) U_i$ y $yx^{-1} \in U\left(\frac{k}{2^i}\right) U_i^{-1}$. Como U_i es una vecindad simétrica y se seatisfacen (2.4.4) y (2.4.7), entonces $yx, yx^{-1} \in U\left(\frac{k+1}{2^i}\right)$.
Luego,

$$f(yx) \leq \frac{k+1}{2^i}$$
$$f\left(yx^{-1}\right) \leq \frac{k+1}{2^i}.$$

También se cumple

$$f(yx) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}$$
$$f\left(yx^{-1}\right) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Puesto que las relaciones anteriores son válidas para cualquier $y \in G$, si sustituimos y por yx, obtenemos en particular que

$$f(y) - f(yx) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

de donde

$$|f(yx) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

para $y \in G$, es decir,

$$N(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

por lo cual

$$U_i \subseteq B_N\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right).$$

Lo anterior prueba que (2.4.2) es válida para la pseudonorma N. La misma condición (2.4.2) implica que N es continua en e_G y, por el Teorema (2.69), N es continua en G.

Finalmente, notemos que si para cada $i \in \omega$, U_i cumple (2.4.3), entonces cada $U(r)$ definido mediante (2.4.4),(2.4.5) y (2.4.6) lo cumple. También, de la definición de f y por la condición (2.4.3) se tiene que para cualesquiera $x, y \in G$ se satisface $f(y^{-1}xy) = f(x)$, de donde se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} N\left(y^{-1}xy\right) &= sup\{\left|f\left(zy^{-1}xy\right) - f(z)\right| \mid z \in G\} \\ &= sup\{\left|f\left(yzy^{-1}x\right) - f\left(yzy^{-1}\right)\right| \mid z \in G\} \\ &= N(x) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da porque las traslaciones derechas e izquierdas son automorfismos topológicos y la tercera se cumple por definición de N. Por lo tanto, N es una pseudonorma invariante. □

El siguiente Teorema muestra que en cualquier grupo topológico se puede definir una pseudonorma continua con en el Teorema 2.71.

Teorema 2.72. *Sea G un grupo topológico. Si U es una vecindad abierta de e_G, entonces existe una pseudonorma continua N en G tal que $B_N(1)$ está contenida en U.*

Demostración. Sea $U_0 = U \cap U^{-1}$. Construimos inductivamente una sucesión $\{U_i\}_{i\in\omega}$ de vecindades simétricas de e_G con la propiedad $U_{i+1}^2 \subseteq U_i$ como sigue: U_0 ya está definida y si U_i está definida, entonces existe $V_i \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que $V_i^2 \subseteq U_i$ (cf. Teorema 2.10), y definimos $U_{i+1} = V_i \cap V_i^{-1}$. Claramente $U_{i+1}^2 \subseteq V_i^2 \subseteq U_i$. Esto concluye la construcción.
Por el Teorema 2.71 existe una pseudonorma continua N en G tal que para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se cumple

$$B_N\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq B_N\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right),$$

en particular, para $i = 0$ se tiene

$$B_N\left(\frac{1}{2^0}\right) = B_N(1) \subseteq U_0 \subseteq U.$$

Esto concluye la prueba. □

Corolario 2.73. *La topología de cualquier grupo topológico se pude generar mediante una familia de pseudonormas continuas.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$, se hace la contrucción del Teorema 2.72. $\square$

Concluiremos esa sección con el resultado anunciado.

Teorema 2.74. *Todo grupo topológico es completamente regular.*

Demostración. Sea G un grupo topológico. Consideremos $x \in G$ y $U \in \mathcal{V}^\circ(x)$. Se probará que existe una función continua $f : G \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $\{y \in G |\, f(y) < 1\} \subseteq U$.
Tenemos que $x^{-1}U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$, entonces por el Teorema 2.72 existe una pseudonorma continua N en G tal que $B_N(1) \subseteq x^{-1}U$. Notemos que la función $f : G \longrightarrow [0,1]$ definida por $f(y) = N(x^{-1}y)$ es continua en G, $f(x) = N(x^{-1}x) = N(e_G) = 0$ y si $f(y) < 1$, entonces $x^{-1}y \in x^{-1}U$, es decir, $y \in U$, y por tanto, $\{y \in G |\, f(y) < 1\} \subseteq U$. $\square$

De acuerdo al Teorema anterior y al Teorema 2.18, es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.75. *Sea G un grupo topológico. Son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) G es T_0.

(2) G es T_1.

(3) G es de Hausdorff.

(4) G es T_3.

(5) G es de Tychonoff.

Capítulo 3

$\overline{FC}$-grupos

En este capítulo estudiaremos una estructura adicional acerca de los grupos topológicos. Como se verá más adelante, los $\overline{FC}$-grupos se comportan como grupos topológicos abelianos y en varios sentidos se parecen a los FC-grupos (ver Apéndice C). La parte algebraica acerca de extensiones fue tomada de [16] y los teoremas posteriores al teorema de Usǎkov se pueden encontrar en [19].

3.1. Definición y ejemplos

Antes introducir la definición de $\overline{FC}$-grupo, requerimos otro concepto adicional.

Definición 3.1. *Sean G un grupo (abstracto) y x un elemento fijo de G. La **clase de conjugación** de x es*

$$C_G\left(x\right) = \{g^{-1}xg|\, g \in G\}.$$

En caso de que no haya lugar a confusión sólo se usará $C\left(x\right)$.

A continuación introducimos el concepto que da título a este capítulo.

Definición 3.2. *Sea G un grupo topológico.*

(1) *Un elemento g de G es un $\overline{FC}$-**elemento** o* elemento acotado *si $cl_G\left(C\left(g\right)\right)$ es compacto.*

*(2) La **parte acotada** de G es*

$$B(G) = \{g \in G|\, g \;\, es \; \overline{FC} - elemento\}.$$

*(3) G es un $\overline{FC}$-**grupo** si $B(G) = G$.*

Para los fines de la presente tesis establecemos lo siguiente.

Convención 3.3. Todos los grupos topológicos considerados serán de Tychonoff.

Si G es un grupo (abstracto) y H es un subgrupo de G, se dice que H es un subgrupo **característico** si para cualquier automorfismo α de G se cumple que $\alpha(H) \leq H$. De hecho, se satisface $\alpha(H) = H$ porque también se tiene que $\alpha^{-1}(H) \leq H$. Veamos que la parte acotada de G es un subgrupo característico de G.

Teorema 3.4. *Sea G un grupo topológico. La parte acotada $B(G)$ es un subgrupo característico de G.*

Demostración. Primero veamos que $B(G)$ es un subgrupo de G. Si $x, y \in B(e_G)$, entonces

$$\begin{aligned}
C\left(xy^{-1}\right) &= \{z^{-1}\left(xy^{-1}\right)z|\, z \in G\} \\
&= \{\left(z^{-1}xz\right)\left(z^{-1}y^{-1}z\right) |\, z \in G\} \\
&\subseteq \{z^{-1}xz|\, z \in G\}\{z^{-1}y^{-1}z|\, z \in G\} \\
&= \{z^{-1}xz|\, z \in G\}\, In\left(\{zyz^{-1}|z \in G\}\right) \\
&= C(x)\, In(C(y)) \\
&\subseteq cl_G(C(x))\, cl_G(In(C(y))) \\
&= cl_G(C(x))\, In(cl_G(C(y)))
\end{aligned}$$

Como $x, y \in B(G)$, $cl_G(C(x))$ y $cl_G((y))$ son compactos, luego, $In(cl_G(C(y)))$ es compacto. Por tanto, $cl_G(C(x))\, In(cl_G(C(y)))$ es compacto. Por las contenciones anteriores se obtiene que

$$cl_G\left(C\left(xy^{-1}\right)\right) \subseteq cl_G(C(x))\, In(cl_G(C(y)))\, ,$$

lo cual implica que $cl_G(C(xy^{-1}))$ es compacto, es decir, $xy^{-1} \in B(G)$. Por esto, $B(G)$ es subgrupo de G.

Ahora, sea α un automorfismo topológico. Vemos que si $x \in B(G)$, entonces

$$\begin{aligned} C(\alpha(x)) &= \{y^{-1}\alpha(x)y \mid y \in G\} \\ &= \{\alpha(z)^{-1}\alpha(x)\alpha(z) \mid z \in G\} \\ &= \{\alpha\left(z^{-1}\right)\alpha(x)\alpha(z) \mid z \in G\} \\ &= \{\alpha\left(z^{-1}xz\right) \mid z \in G\} \\ &= \alpha\left(\{z^{-1}xz \mid z \in G\}\right) \\ &= \alpha(C(x)) \end{aligned}$$

Por lo cual

$$cl_G(C(\alpha(x))) = cl_G(\alpha(C(x))) = \alpha(cl_G(C(x))),$$

y como $C(x)$ es compacto y α es continua, entonces $cl_G(C(\alpha(x)))$ es compacto. Por lo tanto, $B(G)$ es un subgrupo característico de G. $\square$

Ejemplos 3.5. (1) Si G es un grupo topológico abeliano, entonces G es $\overline{FC}$-grupo porque para cualquier $x \in G$ se cumple que $C(x) = \{x\}$.

(2) Si G es un grupo compacto, entonces G es $\overline{FC}$-grupo.

Resulta que no es inmediato pensar en la existencia de $\overline{FC}$-grupos que no sean compactos ni abelianos, por ello, a continuación se exhibe un ejemplo.

Ejemplo 3.6. Consideremos el grupo $K = \prod_{i\in\mathbb{Z}} K_i$ donde para cada $i \in \mathbb{Z}$ se considera el grupo multiplicativo $K_i = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y el grupo aditivo de los enteros $\mathbb{Z}$ con la topología discreta.
Observemos que K es compacto porque es el producto de espacios compactos, y por ello es localmente compacto. Por la Proposición A.14 se tiene que $Aut(K)$ es un grupo topológico con la topología compacto abierta modificada. Definamos $\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(K)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ como el automorfismo $\eta(n) = \eta_n : K \longrightarrow K$ dado por $\eta_n\left((\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = (\varepsilon_{i+n})_{i\in\mathbb{Z}}$. Claramente η en 1 porque $\mathbb{Z}$ está dotado de la topología discreta, luego η es continua. Si $G = K \rtimes_\eta \mathbb{Z}$, entonces G es un grupo topológico en virtud de la Proposición A.21(2).
Observemos que para cualquier $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in K$ se cumple que $(\varepsilon_i)^{-1}_{i\in\mathbb{Z}} = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ por la forma de sus elementos.

Como $\mathbb{Z}$ no es compacto, se tiene que G no es compacto. A continuación mostraremos que G no es abeliano. Sean $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in K$ dados por

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ -1 & \text{si} \quad i = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \ \ \xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in \mathbb{Z}\setminus\{0,2,4\} \\ -1 & \text{si} \quad i \in \{0,2,4\} \end{cases}$$

y consideremos $(\varepsilon, 2), (\xi, 0) \in G$. Al operar obtenemos por un lado

$$\begin{aligned} (\varepsilon, 2)(\xi, 0) &= (\varepsilon\eta_2(\xi), 2+0) \\ &= \left((\varepsilon_i\xi_{i+2})_{i\in\mathbb{Z}}, 0\right) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_{-2}\xi_0 = -1$, y por otro lado

$$\begin{aligned} (\xi, 0)(\varepsilon, 2) &= (\xi\eta_0(\varepsilon), 0+2) \\ &= \left((\xi_i\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}, 2\right) \end{aligned}$$

donde $\xi_{-2}\varepsilon_{-2} = 1$. Como estos productos difieren en la coordenada -2 del producto en K, se tiene que el producto no es conmutativo en G.
Para concluir este ejemplo, se mostrará que G es $\overline{FC}$-grupo. Como ya se vio, G no es compacto, pero si es localmente compacto porque $\mathbb{Z}$ es localmente compacto y K es compacto. Sea $(k, n) \in G$, si consideramos $(h, m) \in G$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} (h,m)(k,n)(h,m)^{-1} &= (h\eta_m(k), m+n)\left(\eta_{-m}\left(h^{-1}\right), -m\right) \\ &= (h\eta_m(k)\,\eta_{m+n}(\eta_{-m}(h)), (m+n)-m) \\ &= (h\eta_m(k)\,\eta_n(h), n) \end{aligned}$$

de donde se deduce que $C_G((k,n)) \subseteq K \times \{n\}$. Como $K \times \{n\}$ es compacto y G es de Hausdorff por ser el producto de espacios de Hausdorff, se tiene que $K \times \{n\}$ es cerrado en G, de donde $cl_G(C_G((k,n))) \subseteq K \times \{n\}$, lo cual implica que $cl_G(C_G((k,n)))$ es compacto. Esto muestra lo deseado.

3.2. Propiedades

El siguiente resultado muestra que la clase de los $\overline{FC}$-grupos es cerrada bajo subgrupos cerrados, imágenes homomórficas y productos arbitrarios.

Teorema 3.7. *Sean G un $\overline{FC}$-grupo y $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos.*

(1) Si M es un subgrupo cerrado de G, entonces M es un $\overline{FC}$-grupo.

(2) Si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo continuo, entonces $f(G)$ es un $\overline{FC}$-grupo.

(3) $\prod_{i\in I} G_i$ es un $\overline{FC}$-grupo si y sólo si para cada $i \in I$ se cumple que G_i es $\overline{FC}$-grupo.

Demostración. (1) Supongamos que M es un subgrupo cerrado de G. Si $y \in M$, entonces

$$cl_G(C_M(y)) \subseteq cl_G(C_G(y)).$$

Como M es cerrado y $C_M(y) \subseteq M$, entonces $cl_M(C_M(y)) = cl_G(C_M(y))$. Como $cl_G(C_G(y))$ es compacto, se tiene que $cl_M(C_M(y))$ es compacto porque es subconjunto cerrado de un compacto. Por lo tanto, $B(M) = M$.
(2) Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo. Sabemos que $f(G)$ es un subgrupo de H, resta ver que $f(G)$ es $\overline{FC}$-grupo. Sin pérdida de generalidad supongamos que f es sobreyectiva (Teorema 2.44). Si $h \in H$, entonces existe $g \in G$ tal que $f(g) = h$. Además, se cumple que

$$f\left(x^1 g x\right) = f\left(x^{-1}\right) f(g) f(x) = (f(x))^{-1} f(g) f(x) = k^{-1} h k,$$

donde $f(x) = k$, esto es, $k^{-1}hk \in f(cl_G(C_G(g)))$.
Como $cl_G(C_G(g))$ es compacto, se sigue que $f(cl_G(C_G(g)))$ es compacto. Como H es T_2, se tiene que $f(cl_G(C_G(g)))$ es cerrado en H (Teorema 1.7(1)). Ya que para cualquier $k \in H$ se satisface $k^{-1}hk \in f(cl_G(C_G(g)))$, entonces

$$C_{f(G)}(h) \subseteq f(cl_G(C_G(g)))$$

implica que

$$cl_H\left(C_{f(G)}(h)\right) \subseteq f(cl_G(C_G(g))),$$

esto es, $cl_H\left(C_{f(G)}(h)\right)$ es compacto en H. Por lo tanto, la imagen continua de un $\overline{FC}$-grupo es un $\overline{FC}$-grupo.
(3) (a) Si $\prod_{i\in I} G_i$ es un $\overline{FC}$-grupo, como las j-ésimas proyecciones canónicas son funciones continuas sobreyectivas, se verifica que G_j es $\overline{FC}$-grupo para cada $j \in I$.

(b) Supongamos que para cada $i \in I$ se cumple que G_i es un $\overline{FC}$-grupo. Sea $y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$. Puesto que

$$C_{\prod G_i}(y) = \{x^{-1}yx |\, x \in \prod_{i\in I} G_i\} \subseteq \prod_{i\in I}\{x_i^{-1}y_i x_i |\, x_i \in G_i\},$$

se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} cl_{\prod G_i}\left(C_{\prod G_i}(y)\right) &\subseteq cl_{\prod G_i}\left(\prod_{i\in I}\{x_i^{-1}y_i x_i |\, x_i \in G_i\}\right) \\ &= \prod_{i\in I} cl_{G_i}\left(\{x_i^{-1}y_i x_i |\, x_i \in G_i\}\right) \\ &= \prod_{i\in I} cl_{G_i}\left(C_{G_i}(y_i)\right) \end{aligned}$$

Como cada G_i es $\overline{FC}$-grupo, se tiene que $cl_{G_i}(C_{G_i}(y_i))$ es compacto, como la compacidad es productiva, $\prod_{i\in I} cl_{G_i}(C_{G_i}(y_i))$ es compacto, y dado que $cl_{\prod G_i}\left(C_{\prod G_i}(y)\right)$ es cerrado en un compacto, entonces $cl_{\prod G_i}\left(C_{\prod G_i}(y)\right)$ es compacto. □

El siguiente resultado establece una relación entre los grupos cociente, los grupos compactos y los $\overline{FC}$-grupos.

Teorema 3.8. *Sean G un grupo topológico, N un subgrupo normal y cerrado de G. Si N es compacto y G/N es un $\overline{FC}$-grupo, entonces G es $\overline{FC}$-grupo.*

Demostración. Sea $y \in G$ y consideremos $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección natural. Notemos que $cl_{G/N}\left(C_{G/N}(p(y))\right)$ es compacto en G/N porque G/N es $\overline{FC}$-grupo. Como p es una función perfecta (Teorema 2.58), entonces $p^{-1}\left(cl_{G/N}\left(C_{G/N}(p(y))\right)\right)$ es compacto en G. Ya que $p^{-1}\left(C_{G/N}(p(y))\right) \subseteq p^{-1}\left(cl_{G/N}\left(C_{G/N}(p(y))\right)\right)$ y para cualquier $x \in G$ se cumple

$$x^{-1}yx \in p^{-1}\left(C_{G/N}(p(y))\right),$$

se obtiene que $C_G(y) \subseteq p^{-1}\left(C_{G/N}(p(y))\right)$, de donde

$$\begin{aligned} cl_G(C_G(y)) &\subseteq cl_G\left(p^{-1}\left(C_{G/N}(p(y))\right)\right) \\ &\subseteq p^{-1}\left(cl_{G/N}\left(C_{G/N}(p(y))\right)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $cl_G(C_G(y))$ es compacto. □

A continuación daremos algunas definiciones que nos permitirán simplificar el lenguaje.

Definición 3.9. *Una sucesión*

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} A_n \xrightarrow{\gamma_n} A_{n+1} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de grupos es ***exacta en*** n *si* $Im\,(\gamma_{n-1}) = Ker\,(\gamma_n)$*. La sucesión es* ***exacta*** *si es exacta en cada* n*. Una* ***sucesión exacta corta*** *es una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_3 \longrightarrow 0.$$

De la Definición de sucesión exacta corta tenemos que el homomorfismo γ_1 es inyectivo y el homomorfismo γ_2 es sobreyectivo. Esto motiva la siguiente

Definición 3.10. *Una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_3 \longrightarrow 0.$$

se parte *si existe un homomorfismo* $\delta : A_3 \longrightarrow A_2$ *tal que* $\gamma_2 \circ \delta = 1_{A_3}$*.*

En la Definición anterior se puede sustituir la condición por la existencia de un homomorfismo $\theta : A_2 \longrightarrow A_1$ tal que $\theta \circ \gamma_1 = A_1$.

Definición 3.11. *Sean* G, N *y* Q *grupos.* G *es una* ***extensión*** *de* N *por* Q *(o de* N *bajo* Q*) si existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Para el caso de grupos topológicos, las Definiciones 3.9, 3.10 y 3.11 se modifican cambiando "grupos" por "grupo topológico" y "homomorfismo de grupos" por "homomorfismo continuo".

Definición 3.12. *Una clase* $\mathcal{H}$ *de grupos topológicos tiene la* ***propiedad de los tres espacios*** *si se cumple lo siguiente: si* H *es un subgrupo normal y cerrado de* G *y tanto* H *como* G/H *son elementos de* $\mathcal{H}$*, entonces* G *está en* H*.*

La definición anterior se puede expresar si dada la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/N \longrightarrow 0$$

donde N es un subgrupo normal y cerrado de G, i es la inclusión y p la proyección natural, con N y G/N con una propiedad $\mathfrak{P}$, entonces G tiene la propiedad $\mathfrak{P}$. Por ejemplo, del Teorema 2.59 se obtiene lo siguiente.

Teorema 3.13. *La clase de los grupos topológicos compactos tiene la propiedad de los tres espacios.*

A pesar del Teorema 3.7, la propiedad de ser $\overline{FC}$-grupo no es una propiedad de los tres espacios.

Observación 3.14. La clase de los $\overline{FC}$-grupos no es cerrada bajo extensiones. Para mostrarlo, consideremos $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ y definamos $\eta : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Aut\,(\mathbb{R})$ como $\eta\,(n) = \eta_n$ donde $\eta_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está determinado por $\eta_n\,(r) = nr$. Sea $G = \mathbb{R} \rtimes_\eta \mathbb{Z}_2$.
Sea $y = (r, n) \in G$ y consideremos $x = (s, m) \in G$ arbitrario. Tenemos que

$$\begin{aligned} xyx^{-1} &= (s, m)\,(r, n)\,(s, m)^{-1} \\ &= (s + \eta_m\,(r)\,, mn)\left(\eta_{m^{-1}}\,(-s)\,, m^{-1}\right) \\ &= (s + \eta_m\,(r)\,, mn)\,(-ms, m) \\ &= (s + mr + \eta_{mn}\,(-ms)\,, mnm) \\ &= (s + mr + mn\,(-ms)\,, n) \\ &= (s + mr - ns, n) \end{aligned}$$

Tenemos dos casos. Si $n = 1$, entonces $xyx^{-1} = (mr, 1)$, de donde $C_G\,(y) = \{(r, 1)\,, (-r, 1)\}$, esto es, $cl_G\,(C_G\,(y))$ es compacto en G. Ahora, si $n = -1$, notemos que $xyx^{-1} = (2s + mr, 1)$. Supongamos que $m = 1$, luego para $t \in \mathbb{R}$ fijo se obtiene la ecuación lineal $2s + r = t$ que tiene solución. De lo anterior se tiene que

$$\{xyx^{-1}|\, x \in G\} = \{(t, -1)\,|\, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{-1\}.$$

Como $\mathbb{R}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y $\{-1\}$ es cerrado en $\mathbb{Z}_2$, entonces $\mathbb{R} \times \{-1\}$ es cerrado en G, luego $cl_G\,(C_G\,(y)) = \mathbb{R} \times \{-1\}$ y $\mathbb{R} \times \{-1\}$ no es compacto en G. Por lo tanto, G no es un $\overline{FC}$-grupo.
Por otro lado, por la Proposición A.24 existe una sucesión exacta que se parte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{p}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

en la cual, como $\mathbb{R}$ es abeliano, $\mathbb{R}$ es un $\overline{FC}$-grupo y como $\mathbb{Z}_2$ es compacto, $\mathbb{Z}_2$ es $\overline{FC}$-grupo, pero G no es $\overline{FC}$-grupo.

A partir de ahora nos centraremos en el estudio de los grupos localmente compactos.

Teorema 3.15. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y totalmente disconexo. Si U es una vecindad abierta de e_G, entonces existe un subgrupo H abierto y compacto de G tal que H está contenido en U.*

Demostración. Por el Teorema 1.16(2) existe una vecindad K de x la cual es abierta y compacta tal que $K \subseteq U$. Sea $Q = \{q \in G |\, Kq \subseteq K\}$, se mostrará que $H = Q \cap Q^{-1}$ es un subgrupo compacto y abierto de G tal que $H \subseteq U$.
Como $e_G \in Q$, entonces $Q \neq \varnothing$. Sean $q \in Q$ un elemento fijo y $k \in K$ arbitrario. Como $kq \in K$ y K es abierto, por la continuidad de $\mathfrak{m}$ existen vecindades U_k y V_x de k y q, respectivamente, tales que $U_k V_k \subseteq K$. Notemos que $\{U_k |\, k \in K\}$ es una cubierta abierta de K, y como K es compacto, entonces existe una subcubierta finita $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ de K. Sea $V = \cap_{i=1}^{n} V_{k_i}$. Se cumple que $KV \subseteq K$ y por tanto $V \subseteq Q$. Como V es intersección finita de abiertos se tiene que es abierto y como $q \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}^{\circ}(q)$. Por tanto, Q es abierto. Así, H es abierto.
A continuación mostraremos que H es un subgrupo de G. Si $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 \in Q$ y $h_2^{-1} \in Q$, luego

$$K\left(h_1 h_2^{-1}\right) = (Kh_1)\, h_2^{-1} \subseteq K h_2^{-1} \subseteq K,$$

de donde se implica que $h_1 h_2^{-1} \in Q$. Análogamente se muestra que $h_2 h_1^{-1} \in Q$, es decir, $h_1 h_2^{-1} \in Q^{-1}$. Así, $h_1 h_2^{-1} \in H$. Esto prueba que H es subgrupo de G.
Como H es subgrupo abierto, por el Teorema 2.36(4) se tiene que H es un subgrupo cerrado, y ya que $H \subseteq K$, entonces H es compacto. □

Antes de enunciar y probar el siguiente resultado, presentamos algunos conceptos auxiliares.

Definición 3.16. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es **relativamente compacto** si A está contenido en un subconjunto compacto de X.*

En seguida presentamos una caracterización de los subconjuntos relativamente compactos de un espacio de Hausdorff.

Proposición 3.17. *Sean X un espacio topológico T_2 y A un subconjunto de X. A es relativamente compacto si y sólo si $cl_X(A)$ es compacto.*

Demostración. (a) Si A es relativamente compacto, entonces existe $B \subseteq X$ compacto tal que $A \subseteq B$. Como X es T_2 se sigue que B es cerrado (Teorema 1.7(1)), luego, $cl_X(A) \subseteq B$, lo cual implica que $cl_X(A)$ es compacto.
(b) Si $cl_X(A)$ es compacto, como $A \subseteq cl_X(A)$, se tiene que A es relativamente compacto. □

Definición 3.18. *Sea G un grupo topológico (no necesariamente T_2).*

(1) Un subconjunto A de G es ***invariante bajo los automorfismos internos*** *de G si para cualquier elemento g de G se cumple que $I_g(A)$ está contenido en A.*

(2) Un elemento g de G es un ***elemento periódico*** *de G si g pertenece a un subgrupo compacto de G. También, un subconjunto A de G es* ***periódico*** *si todos sus elementos son periódicos.*

(3) La ***parte periódica*** *de G, denotada por $P(G)$, es el conjunto de elementos periódicos de G. En particular, G es* ***puro*** *si $P(G) = \{e_G\}$.*

El siguiente teorema fue establecido por V. I. Usăkov en 1962, aunque existe una versión más general debida a Grosser y Moskowitz en [6]. La prueba aquí presentada está basada en la construcción realizada en el artículo referido.

Teorema 3.19. *[Usăkov] Sea G un grupo topológico totalmente disconexo y localmente compacto. Si A es un subconjunto de G relativamente compacto, periódico e invariante bajo los automorfismos internos de G, entonces el subgrupo cerrado generado por A es un subgrupo normal y compacto de G.*

Demostración. Sea $[B]$ el subgrupo cerrado generado por un subconjunto B, y si $B = \{b\}$, usamos únicamente $[b]$. Vemos que $\langle A \rangle$ es normal en G porque los elementos de $\langle A \rangle$ son productos finitos de elementos de A y por la invariancia de A bajo los automorfismos internos de G se tiene que también lo es $\langle A \rangle$, es decir, $\langle A \rangle$ es normal en G. Luego, por el Teorema 2.36(2) se obtiene que $[A]$ es normal en G.
Como A es invariante bajo los automorfismos internos de G y relativamente compacto, se tiene que cada elemento de A es un $\overline{FC}$-elemento. Ya que G es localmente compacto y totalmente disconexo, por el Teorema 3.15, existe un subgrupo K abierto y compacto.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que A es simétrico y contiene a e_G. Como K es abierto y contiene a la identidad, existe una cubierta abierta de A de la forma $\{aK\}_{a\in cl_G(A)}$. Como $cl_G(A)$ es compacto, existe una subcubierta finita $\{a_iK\}_{i=1}^n$, esto es $cl_G(A) \subseteq \cup_{i=1}^n a_iK$. Como en realidad estamos considerando una cubierta abierta formada por las clases laterales izquierdas, podemos suponer que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $a_i \in A$.
Como cada a_i es periódico por hipótesis, se tiene que $[a_i]$ es compacto. Así, como nos interesa que $[A]$ sea compacto, basta probar que

$$\langle A\rangle \subseteq [a_1]\cdots[a_n]K.$$

Como $A = A^{-1}$ y $e_G \in A$, podemos escribir cada elemento x de $\langle A\rangle$ como un producto finito de elementos de la forma a_ik_i, con $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $k \in K$. Ahora, por la invariancia de A se deduce que x puede ser escrito de la forma $a_{i_1}\cdots a_{i_p}k$ donde $i_f \in \{1, \ldots, n\}$ y $k \in K$, para ello basta considerar lo siguiente

$$\begin{aligned} x &= a_{s_1}k_1a_{s_2}k_2\cdots a_{s_p}k_p \\ &= a_{s_1}k_1a_{s_2}k_1^{-1}k_1k_2\cdots a_{s_p}k_p \\ &= a_{s_1}\left(k_1a_{s_2}k_1^{-1}\right)k_1k_2\cdots a_{s_p}k_p \\ &= a_{s_1}a_{g_2}k_1k_2\cdots a_{s_p}k_p \end{aligned}$$

y si repetimos el procedimiento una cantidad finita de veces obtenemos la descomposición anunciada. Sea p la *longitud* de x. Ahora, para p fijo se define la *altura* de p como

$$n^{p-1}i_1 + n^{p-2}i_2 + \cdots + i_p.$$

Sea p fijo. Supongamos que para algún $r < p$ se cumple que $i_{r+1} < i_r$. Como $a_{i_{r+1}}^{-1}a_{i_r}a_{i_{r+1}} \in A$, entonces $a_{i_{r+1}}^{-1}a_{i_r}a_{i_{r+1}} = a_jk'$, con $a_j \in A$ y $k' \in K$, esto implica que $a_{i_r}a_{i_{r+1}} = a_{i_{r+1}}a_jk'$. Nuevamente, si usamos la invariancia de A repetidamente (como arriba), es posible "mover" k' hacia la derecha para obtener

$$x = a_{i_1}\cdots a_{i_{r-1}}a_{i_{r+1}}a_{j_{r+1}}\cdots a_{j_p}\widetilde{k}$$

con $j_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\widetilde{k} \in K$.
Ya que el r-ésimo índice decrece en 1 y la altura de los índices aumenta en a lo más $n-1$, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{decremento total de la altura} &\geq n^{p-r} - (n-1)\left(1 + n + \cdots + n^{p-(r+1)}\right) \\ &= n^{p-r} - \left(n^{p-r} - 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Así, el cambio realizado deja fija la longitud de x, pero hace estrictamente menor la altura de p. Por lo tanto, si x está escrito en una forma de mínima altura, entonces se debe tener que $i_1 \leq \cdots \leq i_p$. Esto prueba que $\langle A \rangle \subseteq [a_1] \cdots [a_n]K$. Como $[a_1] \cdots [a_n]K$ es compacto (y cerrado), se tiene que $[A]$ es compacto. Esto concluye la prueba. $\square$

A continuación caracterizamos una propiedad muy importante de la parte acotada de un grupo topológico.

Teorema 3.20. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. $B(G)$ es abierto si y sólo si G tiene una vecindad abierta, invariante bajo los automorfismos internos de G y compacta de e_G.*

Demostración. (a) Supongamos que $B(G)$ es abierto y que G no tiene vecindades abiertas, invariantes bajo los automorfismos internos de G y compactas de e_G. Sea N una vecindad compacta de e_G tal que $N \subseteq B(e_G)$, y consideremos $V \in \mathcal{V}^*(e_G)$ tal que $cl_G(V)^2 \subseteq N$.
Construiremos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

(i) para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene $y_n = x_1 \cdots x_n \in V$,

(ii) $a_n x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_m a_n^{-1} \in V$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, y

(iii) los conjuntos N, $a_1 x_1 a_1^{-1} N$, $a_2 x_1 x_2 a_2^{-1} N$, $\ldots$, $a_k x_1 x_2 \cdots x_k a_k^{-1} N$, $\ldots$ son disjuntos.

Primero, se afirma que existen $a_1 \in G$ y $x_1 \in V$ tales que $N \cap a_1 x_1 a_1^{-1} N = \varnothing$. Si por lo contrario, N intersecta a cualquier conjunto de la forma axa^{-1}, con $a \in G$ y $x \in V$, entonces existen $y, z \in N$ tales que $axa^{-1}y = z$, de donde $axa^{-1} \in NN^{-1}$. Así, $A_o = \cup_{a\in G} aVa^{-1} \subseteq NN^{-1}$, por lo cual $cl_G(A)$ es una vecindad compacta e invariante bajo los automorfismos internos de G del elemento identidad e_G, lo cual contradice la hipótesis inicial.
Supongamos que se han construido los conjuntos $\{x_1, \ldots, x_k\}$ y $\{a_1, \ldots, a_k\}$, con $k > 1$, cuyos elementos satisfacen las condiciones

(1) para cualquier $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $y_i = x_1 x_2 \cdots x_i \in V$,

(2) para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $j > 1$ se cumple que

$$a_i x_{i+1} \cdots x_j a_i^{-1} \in V, \text{y}$$

(3) los conjuntos N, $a_1x_1a_1^{-1}N$, ..., $a_kx_1\cdots x_ka_k^{-1}N$ son disjuntos.

Consideremos la traslación izquierda σ_{y_k}, los homomorfismos $f_i : G \longrightarrow G$ definidos por $f_i(x) = a_ix_{i+1}\cdots x_ka_i^{-1}$ con $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, y el automorfismo interno I_{a_k}. Ya que todas las funciones mencionadas mandan e_G en V, por la continuidad de ellas, existe $W \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que su imagen está contenida en V (basta considerar la intersección de las vecindades W_j que existen para cada cada función). Sea

$$R_k = N \cup \left(a_1x_1a_1^{-1}N\right) \cup \left(a_2x_1x_2a_2^{-1}N\right) \cup \cdots \cup \left(a_kx_1\cdots x_ka_k^{-1}N\right).$$

Si para cualesquiera $x \in W$ y $a \in G$ se satisface que $R_k \cap ax_1x_2\cdots x_ka^{-1}N \neq \varnothing$, entonces

$$A_k = \cup_{a\in G}a\left(x_1\cdots x_kW\right)a^{-1} \subseteq R_kR_k^{-1},$$

y $cl_G(A_k)\left(cl_G(A_k)\right)^{-1}$ es una vecindad invariante bajo los automorfismos internos de G y compacta del elemento identidad e_G, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existen $x_{k+1} \in W$ y $a_{k+1} \in G$ tales que $R_k \cap \left(a_{k+1}x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}a_{k+1}^{-1}N\right) = \varnothing$. Esto concluye la construcción de las sucesiones.
Ahora, como $y_n \in V \subseteq N$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y N es compacto, existe un punto de aglomeración $y \in N$ de la red $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo cual existe una subred $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ que converge a y. Si denotamos por $l\acute{\imath}m_nz_n$ al punto límite de la red $\{z_n\}$, entonces

$$\begin{aligned} a_nya_n^{-1} &= l\acute{\imath}m_\lambda\left(a_nx_1x_2\cdots x_{n_\lambda}a_n^{-1}\right) \\ &= l\acute{\imath}m_\lambda\left(a_nx_1\cdots x_na_n^{-1}\right)\left(a_nx_{n+1}\cdots x_{n_\lambda}a_n^{-1}\right), \end{aligned}$$

puesto que $a_nx_{n+1}\cdots x_{n_\lambda}a_n^{-1} \in cl_G(V)$, se obtiene

$$a_nya_n^{-1} \in a_nx_1x_2\cdots x_na_n^{-1}cl_G(V).$$

Ahora, si suponemos que la red $\{a_{n_\lambda}ya_{n_\lambda}^{-1}\}$ converge a $x \in G$, entonces existe $v_\lambda \in V$ tal que $a_{n_\lambda}ya_{n_\lambda}^{-1} = xv_\lambda$ (a partir de algún momento). De lo anterior se sigue

$$x = a_{n_\lambda}ya_{n_\lambda}^{-1}v_\lambda^{-1} \in a_{n_\lambda}x_1x_2\cdots x_{n_\lambda}a_{n_\lambda}^{-1}\left(cl_G(V)\right) \subseteq a_{n_\lambda}x_1\cdots x_{n_\lambda}a_{n_\lambda}^{-1}N,$$

lo cual contradice la condición (iii) y por ello la red $\{a_{n_\lambda}ya_{n_\lambda}^{-1}\}$ no es convergente. Un argumento similar muestra que $\{a_{n_\lambda}ya_{n_\lambda}^{-1}\}$ no tiene subredes

convergentes. En consecuencia, $cl_G(C(y))$ no es compacto, pero $y \in N \subseteq N$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, G tiene una vecindad invariante bajo los automorfismos internos compacta de la identidad e_G.
(b) Supongamos que existe $N \in \mathcal{V}_G^{\circ}(e_G)$ compacta e invariante bajo los automorfismos internos de G. Si $g \in N$, entonces $C_G(g) \subseteq N$, y como N es compacto, se sigue que $cl_G(C_G(g))$ es compacto, esto es, $g \in B(G)$. Luego, $N \subseteq B(G)$. Como $B(G)$ es un subgrupo de G (Teorema 3.4) con interior no vacío, se obtiene que $B(G)$ es abierto en virtud del Teorema 2.36(3). $\square$

Los siguientes resultados son inmediatos del Teorema anterior.

Corolario 3.21. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si G es un $\overline{FC}$-grupo, entonces G tiene una vecindad de e_G compacta e invariante bajo los automorfismos internos de G.*

Corolario 3.22. *Sea G un grupo topológico localmente compacto tal que $B(G)$ es denso en G. G es un $\overline{FC}$-grupo si y sólo si G tiene una vecindad de e_G compacta e invariante bajo los automorfismos internos de G.*

Demostración. El Corolario 3.21 nos da la primera implicación. Para la segunda implicación notemos que por el Teorema 3.19 se obtiene que $B(G)$ es abierto. Como $B(G)$ es un subgrupo de G (Teorema 3.4), por el Teorema 2.36(4) se tiene que $B(G)$ es cerrado en G, esto es, $cl_G(B(G)) = B(G)$. Por lo tanto, G es $\overline{FC}$-grupo. $\square$

Corolario 3.23 (D. H. Lee y T. S. Wu)**.** *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si G es totalmente disconexo, entonces $B(G)$ es abierto si y sólo si G tiene un subgrupo normal, abierto y compacto.*

Demostración. Por el Teorema 3.19, si G tiene un subgrupo normal, abierto y compacto, entonces $B(G)$ es abierto.
Supongamos que $B(G)$ es abierto. Nuevamente por el Teorema 3.19, se tiene que existe una vecindad N de e_G compacta e invariante bajo los automorfismos internos de G. Por el Teorema 3.15 existe un subgrupo K abierto y compacto contenido en N. Notemos que $A = \cup_{x \in G} xKx^{-1}$ satisface A es invariante bajo los automorfismos internos de G, es periódico y relativamente compacto. Por el Teorema 3.19, A genera un subgrupo H compacto y normal de G. Como $A \subseteq H$ y A es abierto, por la homogeneidad de H (Teorema 2.14), se tiene que H es abierto. Esto concluye la prueba. $\square$

Corolario 3.24. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si G es un $\overline{FC}$-grupo totalmente disconexo y K es un subgrupo compacto de G, entonces K está contenido en un subgrupo compacto, abierto y normal de G.*

Demostración. Sea $k \in K$. Por hipótesis se tiene que $C(k)$ es relativamente compacto, invariante bajo los automorfismos internos y periódico. Luego, por el Teorema 3.19, $C(k)$ genera un subgrpo N_k compacto y normal de G. Ya que G es un $\overline{FC}$-grupo, por el Corolario 3.23, existe un subgrupo N de G con la propiedad de ser compacto, abierto y normal. Luego, como $\{NN_k\}_{k\in K}$ es una cubierta abierta de K, existe una subcubierta finita $\mathcal{N} = \{NN_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ de N. Claramente $A = \cup\mathcal{N}$ es compacto, invariante bajo los automorfismos internos de G y periódico. Así, nuevamente por el Teorema 3.19, se cumple que A genera un subgrupo H normal compacto y abierto de G. Es evidente que $K \subseteq H$. Esto concluye la prueba. $\square$

Capítulo 4

Compacidad categórica en grupos topológicos

Uno de los resultados más importantes acerca de compacidad es la caracterización en términos de objetos y funciones establecida en el Teorema de Kuratowski-Mrówka (Teorema 1.23). Éste resulta ser la base para una formulación categórica de compacidad como se puede ver en [12].
En este capítulo se introduce la noción de compacidad categórica en grupos topológicos como fue definida por Dikranjan y Uspenskij en [4]. En la primera sección se hace un desarrollo de varios de los resultados mencionados en dicho artículo combinándolos con algunos resultados establecidos en [12] para tener un panorama completo de dichos hechos, mientras que en la segunda sección se presentan *teoremas de compacidad* (en términos de G. Lúkács), esto es, teoremas que establecen equivalencia entre compacidad categórica y compacidad usual en ciertas clases de grupos topológicos.

Nuevamente usaremos la Convención 3.3, porque estamos interesados en trabajar con grupos topológicos de Hausdorff.

4.1. c-compacidad y h-completez

En esta sección desarrollaremos dos conceptos acerca de grupos topológicos los cuales se comportan de forma similar a los espacios compactos.
El primero de ellos está motivado en el Teorema de Kuratowski-Mrówka.

Definición 4.1. *Sea G un grupo topológico. G es **categóricamente compacto**, o por brevedad **c-compacto**, si para cualquier grupo topológico H se cumple que la proyección $\pi_2 : G \times H \longrightarrow H$ manda subgrupos cerrados en subgrupos cerrados.*

Es importante mencionar que el uso de c-compacto no debe confundirse con C-compacto mencionado en [1, 346,395,402-406,666].
El segundo concepto está relacionado con la compleción de Raĭkov de un grupo topológico y su comportamiento respecto a homomorfismos continuos.

Definición 4.2. *Sea G un grupo topológico. G es **h-completo** si para cualquier homomorfismo continuo y sobreyectivo $f : G \longrightarrow H$ se cumple que H es completo (en el sentido de Raĭkov).*

Es de notar que, por la Proposición B.11, la Definición anterior es equivalente a pedir que para cualquier homomorfismo continuo $f : G \longrightarrow H$ se satisface $f(G)$ es cerrado en H.
Para nuestros intereses únicamente usaremos la compleción de Raĭkov, por lo cual siempre se considerarán grupos completos o compleciones de un grupo en el sentido de Raĭkov. Para mayores detalles consultar el Apéndice B.
Ahora, mostraremos que la c-compacidad y la h-completez se comportan como la compacidad respecto a los homomorfismos continuos, es decir, la clase de grupos c-compactos es cerrada bajo imágenes homomórficas sobreyectivas.

Teorema 4.3. *Sean G y H grupos topológicos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo y sobreyectivo.*

(1) Si G es h-completo, entonces H es h-completo.

(2) Si G es c-compacto, entonces H es c-compacto.

Demostración. (1) Sea $h : H \longrightarrow L$ un homomorfismo continuo. Notemos que $h(H) = h(f(G)) = h \circ f(G)$, y como G es h-completo, entonces $h \circ f(G)$ es cerrado en L. Por lo tanto, H es h-completo.
(2) Sea L un grupo topológico, S un subgrupo cerrado de $H \times L$ y consideremos $\pi_L : G \times L \longrightarrow L$ y $\pi'_L : H \times L \longrightarrow L$ las proyecciones canónicas.

Notemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times L \arrow[r, "\Delta\{f, 1_L\}"] \arrow[dr, "\pi_L"'] & H \times L \arrow[d, "\pi'_L"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Así, $S' = (\Delta\{f, 1_L\})^{-1}(S)$ es cerrado en $G \times L$ porque $\Delta\{f, 1_L\}$ es continua. Luego, $\pi_L(S')$ es cerrado en L porque G es c-compacto. Tenemos que

$$\pi'_L(S) = \pi_L(\Delta\{f, 1_L\}(S')) = \pi_L(S').$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Veamos que la c-compacidad es hereditaria a subgrupos cerrados.

Teorema 4.4. *Sean G un grupo topológico y S un subgrupo cerrado de G. Si G es c-compacto, entonces S es c-compacto.*

Demostración. Si H es un grupo topológico, entonces $S \times H$ es un subgrupo cerrado de $G \times H$, por lo cual si M es un subgrupo cerrado de $S \times H$, entonces M es un subgrupo cerrado de $G \times H$, por lo cual $\pi_H(M)$ es cerrado en H. Esto concluye la prueba. $\square$

Ahora veamos que la condición de c-compacidad implica la h-completez.

Teorema 4.5. *Sea G un grupo topológico. Si G es c-compacto, entonces G es h-completo.*

Demostración. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo. Como G es de Hausdorff, entonces $\{(x, f(x)) \mid x \in G\}$ es cerrado en $G \times H$. Por lo tanto, $f(G)$ es subgrupo cerrado de H. $\square$

En lo que sigue el objetivo será mostrar que la c-compacidad y la h-completez son propiedades productivas. Para ello introduciremos algunos filtros especiales que nos permitirán caracterizar dichos conceptos y también demostrar la propiedad mencionada.

Definición 4.6. *Sea G un grupo topológico y $\mathfrak{F}$ un filtro sobre G. $\mathfrak{F}$ es un **g-filtro** si existen un homomorfismo (no necesariamente continuo) $h : G \longrightarrow L$ sobre un grupo topológico L y un punto y de L tal que $\mathfrak{F}$ es generado por*

$$\mathcal{B}_{h,y} = \{h^{-1}(Uy) \mid U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)\}.$$

*Si además el interior de cada elemento de $\mathfrak{F}$ es no vacío, entonces $\mathfrak{F}$ es un **og-filtro**.*

A continuación caracterizamos a estos filtros.

Teorema 4.7. *Sean G y L grupos topológicos, $h : G \longrightarrow L$ un homomorfismo (no necesariamente continuo) y y un elemento de L.*

(1) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *(a) $\mathcal{B}_{h,y}$ es una base-filtro.*
- *(b) $\varnothing \notin \mathcal{B}_{h,y}$.*
- *(c) $y \in cl_L(h(G))$.*

(2) Si $y \in cl_L(h(G))$, entonces h es continua si y sólo si cada elemento de $\mathcal{B}_{h,y}$ tiene interior no vacío.

Demostración. (1) $[(a) \iff (b)]$ Si $h^{-1}(U_1y), h^{-1}(U_2y) \in \mathcal{B}_{h,y}$, donde $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$ y por lo tanto, $h^{-1}(U_1y) \cap h^{-1}(U_2y) = h^{-1}((U_1 \cap U_2)y) \in \mathcal{B}_{h,y}$. Luego, la familia $\mathcal{B}_{h,y}$ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas. Así, $\mathcal{B}_{h,y}$ es base filtro si y sólo si $\varnothing \notin \mathcal{B}_{h,y}$.
$[(b) \iff (c)]$ Tenemos que $\varnothing \notin \mathcal{B}_{h,y}$ si y sólo si para cada $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$ se cumple que $h^{-1}(Uy) \neq \varnothing$, lo cual equivale a que $h(G) \cap Uy \neq \varnothing$ para cada $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$. Esto último es equivalente a que $y \in cl_L(h(G))$.
(2) Si h es continua, entonces $h^{-1}(Uy)$ es abierto en G porque Uy es abierto en L. Por (1) se tiene que $y \in cl_L(h(G))$ implica que $h^{-1}(Uy) \neq \varnothing$ para cada $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$. En partiular, cada elemento de $\mathcal{B}_{h,y}$ tiene interior no vacío. Recíprocamente, si $int_G(h^{-1}(Uy)) \neq \varnothing$ para cada $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$, por el Teorema 2.27(2) basta probar que h es continua en e_G. Sea $V \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$ y consideremos $U \in \mathcal{V}^*(e_L)$ tal que $U^2 \subseteq V$. Por hipótesis se tiene que

$int_G\left(h^{-1}\left(Uy\right)\right)\neq\varnothing$, por lo cual existen $x\in h^{-1}\left(Uy\right)$ y $W\in\mathcal{V}_G^{\circ}\left(e_G\right)$ tales que $Wx\subseteq h^{-1}\left(Uy\right)$. Además,

$$\begin{aligned}W&\subseteq WW^{-1}=Wxx^{-1}W^{-1}=Wx\left(Wx\right)^{-1}\\&\subseteq h^{-1}\left(Uy\right)\left(h^{-1}\left(Uy\right)\right)^{-1}\subseteq h^{-1}\left(\left(Uy\right)\left(Uy\right)^{-1}\right)\\&=h^{-1}\left(Uyy^{-1}U^{-1}\right)=h^{-1}\left(UU^{-1}\right)\\&\subseteq h^{-1}\left(V\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, h es continua en e_G. □

Del Teorema anterior es inmediata la siguiente caracterización de los og-filtros.

Corolario 4.8. *Sea G un grupo topológico. Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre G es un og-filtro si y sólo si existen un homomorfismo continuo $h:G\longrightarrow L$ y $y\in L$ tales que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$.*

Demostración. Si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro, entonces por definición existen un homomorfismo $h:G\longrightarrow L$ y $y\in L$ tales que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$ y cada elemento de $\mathfrak{F}$ tiene interior no vacío, en particular, cada elemento de $\mathcal{B}_{h,y}$ tiene interior no vacío y por el Teorema 4.7 se sigue que h es continua.
Por el otro lado, supongmamos que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$ con $h:G\longrightarrow L$ continua y $y\in L$. Si $F\in\mathfrak{F}$, entonces existe $U\in\mathcal{V}_L^{\circ}\left(e_L\right)$ tal que $h^{-1}\left(Uy\right)\subseteq F$. Ya que $h^{-1}\left(Uy\right)\in\mathcal{B}_{h,y}\subseteq\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ es un filtro, se obtiene que $h^{-1}\left(Uy\right)\neq\varnothing$. Además, $h^{-1}\left(Uy\right)$ es abierto en G porque h es continua. Por lo tanto, $\varnothing\neq h^{-1}\left(Uy\right)\subseteq int_G\left(F\right)$. □

Ahora mostraremos que así como existen los filtros maximales que contienen a los filtros, también existen g-filtros maximales y og-filtros maximales. Primero establezcamos un concepto relacionado con familias de filtros.

Definición 4.9. *Sea X un conjunto. Una familia $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de filtros sobre X es* ***compatible*** *si la colección*

$$\mathcal{B}=\{\cap_{i=1}^{k}F_{\alpha_i}|\,k\in\mathbb{N},F_{\alpha_i}\in\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}\}$$

de intersecciones finitas arbitrarias no contiene al conjunto vacío.

Es conveniente observar que en particular cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es cerrado bajo intersecciones finitas, lo cual implica que $\mathcal{B}$ también lo es, lo cual permite afirmar que $\mathcal{B}$ es una base filtro si y sólo si la familia $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es compatible. También, si $\mathfrak{F}'$ es un filtro sobre X el cual contiene a cada $\mathfrak{F}_\alpha$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{F}'$ y, por lo tanto, $\varnothing \notin \mathcal{B}$; por otro lado, si $\varnothing \notin \mathcal{B}$, entonces el filtro $\mathfrak{F}$ generado por la base filtro $\mathcal{B}$ contiene a cada $\mathfrak{F}_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, y en este caso, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ para cada filtro $\mathfrak{F}'$ que contenga a cada $\mathfrak{F}_\alpha$, lo cual significa que $\mathfrak{F}$ es la menor cota superior de $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ordenada por la inclusión usual. Por lo tanto, la familia $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tiene supremo si y sólo si es compatible.

Teorema 4.10. *Sean G un grupo topológico y $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia compatible de filtros sobre G.*

(1) Si cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es un g-filtro, entonces sup$\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un g-filtro.

(2) Si cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es un og-filtro, entonces sup$\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un og-filtro.

Demostración. Ya que $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es compatible, entonces

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} | \, k \in \mathbb{N}, F_{\alpha_i} \in \{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}\}$$

no contiene al vacío. Así, $\mathcal{B}$ genera a $\mathfrak{F} = sup\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$.
(1) Para cada $\alpha \in I$ existen un grupo topológico L_α, un homomorfismo $h_\alpha : G \longrightarrow L_\alpha$ y $y_\alpha \in L_\alpha$ tales que $\mathfrak{F}_\alpha$ es generado por $\mathcal{B}_{h_\alpha, y_\alpha}$. Sean $L = \prod_{\alpha\in I} L_\alpha$ y $h : G \longrightarrow L$ el homomorfismo diagonal definido por $h(g) = (h_\alpha(g))_{\alpha\in I}$. Sea $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$ y consideremos un básico $V = \prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ que contiene a e_L tal que $V \subseteq U$, donde existe un conjunto finito $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ tal que si $\beta \in A$, entonces $V_\beta \neq L_\beta$ y $V_\beta = L_\beta$ si $\beta \in I \setminus A$. Se tiene que

$$\cap_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i} y_{\alpha_i}) = h^{-1}(Vy) \subseteq h^{-1}(Uy)$$

y $\cap_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i} y_{\alpha_i}) \in \mathcal{B}$, lo cual implica que $h^{-1}(Uy) \in \mathfrak{F}$. Así, $\mathcal{B}_{h,y} \subseteq \mathfrak{F}$. Luego, si $\mathfrak{F}'$ es el filtro generado por $\mathcal{B}_{h,y}$ se cumple que $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$.
Ahora, si $F \in \mathfrak{F}$ existe $\cap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \in \mathcal{B}$ tal que $\cap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \subseteq F$ puesto que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}$. Ya que cada $\mathfrak{F}_{\alpha_i}$ es generado por $\mathcal{B}_{h_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}}$, existen $V_{\alpha_i} \in \mathcal{V}_{L_{\alpha_i}}^\circ\left(e_{L_{\alpha_i}}\right)$ tal que $h^{-1}(V_{\alpha_i} y_{\alpha_i}) \subseteq F_{\alpha_i}$ y por ello

$$h^{-1}(Vy) = \cap_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i} y_{\alpha_i}) \subseteq \cap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \subseteq F,$$

donde V es una vecindad básica de e_L. Luego, $F \in \mathfrak{F}'$ porque $h^{-1}(Vy) \in \mathcal{B}_{h,y}$ y $\mathfrak{F}'$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$. Esto muestra que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$. Por lo tanto, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$. En conclusión, $\mathfrak{F}$ es un g-filtro.

(2) Si cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es un og-filtro, entonces por el Teorema 4.7(2) se tiene que cada h_α es continua y por lo tanto h (como se definió arriba) es continua. Por el Corolario 4.8 se tiene que $\mathfrak{F}$ es un og-filtro. $\square$

A continuación presentamos los conceptos maximales de g-filtro y og-filtro.

Definición 4.11. *Sea $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_\alpha \in I$ una familia de filtros sobre un grupo topológico.*

(1) Supongamos que cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es un g-filtro. $\mathfrak{F}$ es un ***g-filtro maximal*** *si $\mathfrak{F}$ es un g-filtro maximal en $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$.*

(2) Supongamos que cada $\mathfrak{F}_\alpha$ es un og-filtro. $\mathfrak{F}$ es un ***og-filtro maximal*** *si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro maximal en $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$.*

Como se había dicho antes, siempre existen los g-filtros maximales y los og-filtros maximales.

Teorema 4.12. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en G.*

(1) Si $\mathfrak{F}$ es un g-filtro, entonces existe un g-filtro maximal que lo contiene.

(2) Si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro, entonces existe un og-filtro maximal que lo contiene.

Demostración. Ya que cada cadena ascendente de filtros es compatible, por el Teorema 4.10 se tiene que cada cadena ascendente de g-filtros u og-filtros tiene una cota superior que es nuevamente un g-filtro o un og-filtro, respectivamente. Por el Lema de Zorn se obtiene el resultado deseado. $\square$

Pasamos a analizar el comportamiento de los g-filtros y og-filtros respecto a los grupos cociente, pra ello requerimos el siguiente lema acerca de grupos.

Lema 4.13. *Si $h : G \longrightarrow L$ es un homomorfismo de grupos, entonces para cualesquiera A subconjunto de L y B subconjunto de G se cumple*

$$h^{-1}(h(B)A) = Bh^{-1}(A).$$

Demostración. Notemos que

$$h\left(Bh^{-1}(A)\right) = h(B)\,h\left(h^{-1}(A)\right) \subseteq h(B)\,A$$

implica que $Bh^{-1}(A) \subseteq h^{-1}(h(B)\,A)$.

Por otro lado, si $g \in h^{-1}(h(B)A)$, entonces $h(g) \in h(B)A$, por lo cual existen $b \in B$ y $a \in A$ tales que $h(g) = h(b)a$, de donde se obtiene que

$$h(b)^{-1} h(g) = h\left(b^{-1}\right) h(g) = h\left(b^{-1}g\right) = a,$$

es decir, $b^{-1}g \in h^{-1}(A)$. Así, $g \in bh^{-1}(A) \subseteq Bh^{-1}(A)$. Por lo tanto, $h^{-1}(B)A \subseteq Bh^{-1}(A)$. □

Teorema 4.14. *Sean G un grupo topológico, N un subgrupo normal de G (no necesariamente cerrado) y $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección natural.*

(1) Si $\mathfrak{F}$ es un g-filtro sobre G, entonces $p(\mathfrak{F})$ es un g-filtro sobre G/N.

(2) Si $\mathfrak{F}$ es un g-filtro maximal sobre G, entoncs $p(\mathfrak{F})$ es un g-filtro maximal sobre G/N.

Si además, N es cerrado en G.

(3) Si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro sobre G, entoncs $p(\mathfrak{F})$ es un og-filtro sobre G/N.

(4) Si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro maximal sobre G, entoncs $p(\mathfrak{F})$ es un og-filtro maximal sobre G/N.

Demostración. (1) Por Definición existen un grupo topológico L, un homomorfismo $h : G \longrightarrow L$ y $y \in L$ tal que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h(G)$ es denso en L (en caso necesario cambiamos L por $cl_L(h(G))$). Por el Teorema 4.7(1) se tiene que $y \in cl_L(h(G))$. Como N es normal en G, $h(N)$ es normal en $h(G)$, y por el Teorema 2.36(2) se obtiene que $\overline{N} = cl_L(h(N))$ es un subgrupo normal cerrado de L.
Sea $q : L \longrightarrow L/\overline{N}$ la proyección canónica respectiva. Como $N \subseteq h^{-1}\left(\overline{N}\right) = Ker(q \circ h)$, entonces $q \circ h$ induce un homomorfismo de grupos $\overline{h} : G/N \longrightarrow L/\overline{N}$ tal que $q \circ h = \overline{h} \circ p$.
A continuación mostraremos que $\mathcal{B}_{\overline{h},\overline{N}y}$ genera a $p(\mathfrak{F})$. Si $F' \in p(\mathfrak{F})$, entonces existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $p(F) \subseteq F'$, por lo cual existe $U \in \mathcal{V}_L^{\circ}(e_L)$ para el cual se cumple $h^{-1}(Uy) \subseteq F$. Sea $V \in \mathcal{V}^*(L)e_L$ tal que $V^2 \subseteq U$. Por el Teorema 2.13(4) se cumple que $\overline{N} \subseteq h(N)V$, de donde se sigue que

$$\overline{N}V \subseteq h(N)VV \subseteq h(N)U.$$

Además, por el Lema 4.13 se tiene

$$h^{-1}\left(\overline{N}Vy\right) \subseteq h^{-1}(h(N)Uy) = Nh^{-1}(Uy) = p^{-1}\left(p\left(h^{-1}(Uy)\right)\right).$$

Ya que $q \circ h = \overline{h} \circ p$, entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}\left(\overline{h}^{-1}\left(q\left(Vy\right)\right)\right) &= h^{-1}\left(q^{-1}\left(q\left(Vy\right)\right)\right) \\ &= h^{-1}\left(\overline{N}Vy\right) \\ &\subseteq p^{-1}\left(p\left(h^{-1}\left(Uy\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\overline{h}^{-1}\left(q\left(V\right)\overline{N}y\right) = \overline{h}^{-1}\left(q\left(Vy\right)\right) \subseteq p\left(h^{-1}\left(Uy\right)\right) \subseteq p\left(F\right) \subseteq F'.$$

Ya que $\overline{h}^{-1}\left(q\left(V\right)\overline{N}y\right) \in \mathcal{B}_{\overline{h},\overline{N}y}$, las contenciones anteriorems muestran que $p\left(\mathfrak{F}\right)$ está contenido en el filtro generado por $\mathcal{B}_{\overline{h},\overline{N}y}$. Por otro lado, a partir de la igualdad $q \circ h = \overline{h} \circ p$ se sigue que para cada $U \in \mathcal{V}_L^{\circ}\left(e_L\right)$ se verifica

$$h^{-1}\left(h\left(N\right)Uy\right) \subseteq h^{-1}\left(\overline{N}Uy\right) = h^{-1}\left(q^{-1}\left(q\left(Uy\right)\right)\right) = p^{-1}\left(\overline{h}^{-1}\left(\overline{N}Uy\right)\right).$$

Así, $p\left(h^{-1}\left(h\left(N\right)Uy\right)\right) \subseteq \overline{h}^{-1}\left(\overline{N}Uy\right)$. Como $h^{-1}\left(h\left(N\right)Uy\right) \in \mathcal{B}_{h,y} \subseteq \mathfrak{F}$, se obtiene que $\overline{h}^{-1}\left(\overline{N}Uy\right) \in p\left(\mathfrak{F}\right)$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\overline{h},\overline{N}y} \subseteq p\left(\mathfrak{F}\right)$. En conclusión, $p\left(\mathfrak{F}\right)$ es generado por $\mathcal{B}_{\overline{h},\overline{N}y}$.
(2) Por el Corolario 4.12 existe un g-filtro maximal $\mathfrak{H}$ sobre G/N tal que $p\left(\mathfrak{F}\right) \subseteq \mathfrak{H}$. En particular, para cualesquiera $F \in \mathfrak{F}$ y $H \in \mathfrak{H}$ se cumple $p\left(F\right) \cap H \neq emptyset$, así que $NF \cap p^{-1}\left(H\right) \neq \varnothing$ y, como $Np^{-1}\left(H\right) = p^{-1}\left(H\right)$, $F \cap p^{-1}\left(H\right) \neq \varnothing$. Por lo anterior, $\mathfrak{F}$ y $p^{-1}\left(\mathfrak{H}\right)$ son g-filtros compatibles.
Por el Teorema 4.10(1) existe un g-filtro $\mathfrak{F}'$ sobre G que contiene a $\mathfrak{F}$ y $p^{-1}\left(\mathfrak{H}\right)$. Ya que $\mathfrak{F}$ es un g-filtro maximal se tiene que $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$ y $p^{-1}\left(\mathfrak{H}\right) \subseteq \mathfrak{F}$. Por lo tanto $\mathfrak{H} \subseteq p\left(\mathfrak{F}\right)$. Por la maximalidad de $\mathfrak{H}$ se sigue que $p\left(\mathfrak{F}\right) = \mathfrak{H}$, esto es, $p\left(\mathfrak{F}\right)$ es un g-filtro maximal.
(3) Si $\mathfrak{F}$ es un og-filtro sobre G, entonces $\mathfrak{F}$ es un g-filtro sobre G y, por (1), $p\left(\mathfrak{F}\right)$ es un g-filtro sobre G/N. Ahora, si $F' \in p\left(\mathfrak{F}\right)$, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $p\left(F\right) \subseteq F'$. Como $\mathfrak{F}$ es un og-filtro se cumple que $int_G\left(F\right) \neq \varnothing$, y como p es una función abierta, $p\left(int_G\left(F\right)\right)$ es abierto en G/N. Además,

$$p\left(int_G\left(F\right)\right) \subseteq p\left(F\right) \subseteq F'.$$

De lo anterior se sigue que $int_{G/N}\left(F'\right) \neq \varnothing$. Por lo tanto, $p\left(\mathfrak{F}\right)$ es un og-filtro.
(4) Por el Corolario 4.10(2), existe un og-filtro maximal $\mathfrak{H}$ sobre G/N tal que $p\left(\mathfrak{F}\right) \subseteq \mathfrak{H}$. En particular, para cualesquiera $F \in \mathfrak{F}$ y $H \in \mathfrak{H}$ se cumple que

$p(F) \cap H \neq \varnothing$, luego, $NF \cap p^{-1}(H) \neq \varnothing$, y por consiguiente $F \cap p^{-1}(H) \neq \varnothing$ porque $Np^{-1}(H) = p^{-1}(H)$. De esto, $\mathfrak{F}$ y $p^{-1}(\mathfrak{H})$ son og-filtros compatibles. Por el Teorema 4.10(2) existe un og-filtro maximal $\mathfrak{F}'$ que contiene a $\mathfrak{F}$ y $p^{-1}(\mathfrak{H})$. Como $\mathfrak{F}$ es og-filtro maximal se tiene que $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, así $p^{-1}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{F}$. De lo anterior se implica que $\mathfrak{H} \subseteq p(\mathfrak{F})$. De la maximalidad de $\mathfrak{H}$ se deduce que $\mathfrak{H} = p(\mathfrak{F})$. Por lo tanto, $p(\mathfrak{F})$ es og-filtro maximal. □

Ahora usemos el Teorema anterior para caracterizar la c-compacidad y la h-completez en términos de filtros, lo cual reafirma el comportamiento similar al de la compacidad usual. Primero revisemos la c-compacidad.

Teorema 4.15. *Sea G un grupo topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) G es c-compacto.

(2) Para cualquier subgrupo K de G se cumple que cualquier g-filtro maximal en K converge en G.

(3) Para cualquier subgrupo K de G se satisface que cualquier g-filtro sobre K tiene un punto de acumulación en G.

Demostración. $[(1) \Longrightarrow (2)]$ Sea K un subgrupo de G y $\mathfrak{F}$ un g-filtro maximal en K. Por definición existen un grupo topológico H, un homomorfismo de grupos $h : K \longrightarrow H$ y $y \in H$ tal que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$. Sea $Graf(h) = \{(x,z) \in G \times H \mid x \in K,\ z = h(x)\}$ la gráfica de h y consideremos $S = cl_{G \times H}(Graf(h))$. Así obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\Delta\{i_K,h\}"] \arrow[dr] & S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_H|_S"] & G \times H \arrow[d, "\pi_H"] \\
 & \pi_H(S) \arrow[r, hook] & H
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_H : G \times H \longrightarrow H$ es la proyección canónica y $i_K : K \longrightarrow G$ es la función inclusión. Ya que $Graf(h) \subseteq S$, se cumple $h(K) = \pi_H(Graf(h)) \subseteq \pi_H(S)$. Como G es c-compacto y S es subgrupo cerrado de $G \times H$, entonces $\pi_H(S)$ es subgrupo cerrado de H. Luego, $cl_H(h(K)) \subseteq \pi_H(S)$.

Por el Teorema 4.7(1), $y \in cl_H(h(K))$, por lo cual existe $x_0 \in G$ tal que $(x_0, y) \in S$. Sea $\mathfrak{H}$ el g-filtro generado por $\mathcal{B}_{i_K, x_0}$ en K. A continuación mostraremos que $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{F}$ son compatibles. Si $F \in \mathfrak{F}$ y $H \in \mathfrak{H}$, entonces existen $U \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$ y $V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ tales que $h^{-1}(Uy) \subseteq F$ y $Vx_0 \cap K \subseteq H$. Como $Vx_0 \times Uy$ es una vecindad abierta de (x_0, y) en $G \times H$, se tiene que $W \cap Graf(h) \neq \varnothing$. De lo anterior se implica que

$$\varnothing \neq Vx_0 \cap h^{-1}(Uy) \subseteq Vx_0 \cap F,$$

y en particular, como $F \subseteq K$,

$$\varnothing \neq (Vx_0 \cap K) \cap F \subseteq H \cap F.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{H}$ son g-filtros compatibles. Por el Teorema 4.10(1) existe un g-filtro $\mathfrak{F}'$ en K que contiene tanto a $\mathfrak{F}$ como a $\mathfrak{H}$. Por la maximalidad de $\mathfrak{F}$ se tiene que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Así, $Vx_0 \cap K \in \mathfrak{F}$ para cada $V \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ y por tanto $i_K(\mathfrak{F})$ converge a x_0 en G.

[(2) $\implies$ (3)] Sea K un subgrupo de G y $\mathfrak{F}$ un g-filtro en K. Por el Teorema 4.12(1) existe un g-filtro maximal $\mathfrak{F}'$ en K que contiene a $\mathfrak{F}$. Por (2), el filtro $\mathfrak{F}'$ converge a algún $x \in G$. Por lo tanto, x es un punto de acumulación de $\mathfrak{F}$ en G.

[(3) $\implies$ (1)] Sean H un grupo topológico, S un subgrupo cerrado de $G \times H$ y $y \in cl_H(\pi_H(S))$.

Por el Teorema 4.7(1), $\mathcal{B}_{\pi_H|_S, y}$ es una base filtro en S y por ello genera un g-filtro $\mathfrak{F}$ en S. Sean $K = \pi_G(S)$ y $N = Ker(\pi_G|_S) = S \cap (\{e_G\} \times H)$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo de grupos, se tiene que K es algebraicamente isomorfo a S/N. Por el Teorema 4.14(1), se tiene que $\pi_G|_S(\mathfrak{F})$ es un g-filtro en K y por (3), $\pi_G|_S(\mathfrak{F})$ tiene un punto de acumulación x en G. Si $U \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$, entonces

$$S \cap (G \times Uy) = (\pi_H|_S)^{-1}(Uy) \in \mathcal{B}_{\pi_H|_S, y} \subseteq \mathfrak{F},$$

de modo que $\pi_G|_S(S \cap (G \times Uy)) \in \pi_G|_S(\mathfrak{F})$. Por consiguiente, para cada $V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ se cumple

$$Vx \cap \pi_G|_S(S \cap (G \times Uy)) \neq \varnothing.$$

De lo anterior se obtiene que $(Vx \times Uy) \cap S \neq \varnothing$ para cualesquiera $V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$ y $U \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$. Luego, $(x, y) \in cl_{G \times H}(S) = S$. Por lo tanto, $y = \pi_H(x, y) \in \pi_H(S)$. Esto prueba que $\pi_H(S)$ es cerrado en H. $\square$

Ahora revisemos la h-completez.

Teorema 4.16. *Sea G un grupo topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) G es h-completo.

(2) Cada og-filtro maximal en G converge.

(3) Cada og-filtro en G tiene un punto de acumulación.

Demostración. $[(1) \Longrightarrow (2)]$ Sea $\mathfrak{F}$ un og-filtro maximal en G. Por el Corolario (4.8) existen un homomorfismo continuo $h : G \longrightarrow L$ y $y \in L$ tales que $\mathfrak{F}$ es generado por $\mathcal{B}_{h,y}$. Como G es h-completo, $h(G)$ es completo, de donde se sigue que $h(G)$ es cerrado en L. Por el Teorema 4.7(1) se tiene que $y \in cl_L(h(G)) = h(G)$, por lo cual existe $x \in G$ tal que $h(x) = y$. Como h es continua, $h^{-1}(Uy)$ es una vecindad abierta de x para cada $U \in \mathcal{V}_L^\circ(e_L)$. Luego

$$\mathcal{B}_{h,y} \subseteq \{Vx |\, V \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)\} = \mathcal{B}_{1_G,x}.$$

Ya que el filtro $\mathfrak{F}'$ generado por $\mathcal{B}_{1_G,x}$ es un og-filtro, por la maximalidad de $\mathfrak{F}$ se consigue $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ converge a x.
$[(2) \Longrightarrow (3)]$ Sea $\mathfrak{F}$ un og-filtro en G. Por el Teorema 4.12(2), existe un og-filtro maximal $\mathfrak{F}'$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$. Por (2), $\mathfrak{F}' \longrightarrow x$ para algún $x \in G$. Luego, x es un punto de acumulación de $\mathfrak{F}$.
$[(3) \Longrightarrow (1)]$ Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que H es completo (en caso necesario, cambiamos H por $\widetilde{H}$). Para probar que $f(G)$ es completo basta demostrar que $f(G)$ es cerrado en H.
Sea $y \in cl_H(f(G))$. Por el Teorema 4.7 se sigue que $\mathcal{B}_{f,y}$ es una base filtro y genera un og-filtro $\mathfrak{F}$. Si $y \notin f(G)$, entonces para cada $x \in G$ existen $U_x, V_x \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$ tales que $U_x y \cap V_x f(x) = \varnothing$, de donde se obtiene que $f^{-1}(U_x y) \cap f^{-1}(V_x f(x)) = \varnothing$. Como f es continua, $f^{-1}(V_x f(x)) = f^{-1}(V_x)\, x$ es una vecindad de x en G. Así, x no es un punto de acumulación de $\mathfrak{F}$ para cada $x \in G$, esto es, $\mathfrak{F}$ es un og-filtro en G que no tiene puntos de acumulación, lo cual contradice (3). Esto muestra que $y \in f(G)$, por lo tanto, $f(G)$ es cerrado en H. $\square$

Uasaremos los resultados anteriores para mostrar que la c-compacidad y la h-completez son propiedades productivas.

Teorema 4.17. *Sean $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ un grupo producto y $\pi_\alpha : G \longrightarrow G_\alpha$ la proyección canónica para cada $\alpha \in I$.*

(1) G es c-compacto si y sólo si G_α es c-compacto para cada $\alpha \in I$.

(2) G es h-completo si y sólo si G_α es h-completo para cada $\alpha \in I$.

Demostración. En ambos casos, la prueba de que el produto c-compacto o h-completo implica que cada factor es c-compacto o h-completo se sigue del Teorema 4.3 al considerar las proyecciones canónicas respectivas..
(1) Supongamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de grupos c-compactos. Para mostrar que G es c-compacto, sea K un subgrupo de G y $\mathfrak{F}$ un g-filtro maximal en K. Además, para cada $\alpha \in I$ sea $K_\alpha = \pi_\alpha(K)$.
Por el Primer Teorema de Isomorfismo, K_α es isomorfo algebraicamente a $K/Ker\,(\pi_\alpha|_K)$ para cada $\alpha \in I$. Por el Teorema 4.14(2), $\pi_\alpha|_K(\mathfrak{F})$ es g-filtro maximal en K_α. Como cada g_α es c-compacto, el Teorema 4.15 permite afirma que $\pi_\alpha|_K(\mathfrak{F})$ converge en G_α, es decir, para cada $\alpha \in I$ existe $g_\alpha \in G_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(\mathfrak{F}) \longrightarrow g_\alpha$. Esto implica que $\mathfrak{F} \longrightarrow (g_\alpha)_{\alpha\in I} \longrightarrow (g_\alpha)_{\alpha\in I}$ en G. Esto muestra que todo g-filtro maximal en cualquier subgrupo de G converge en G. Por el Teorema 4.15 se obtiene que G es c-compacto.
(2) Supongamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de grupos topológicos h-completos. Sea $\mathfrak{F}$ un og-filtro maximal en G. Como para cada $\alpha \in I$ se cumple que π_α es una función abierta, se tiene obtiene un isomorfismo topológico entre G_α y $G/Ker\,(\pi_\alpha)$. Luego, por el Teorema 4.14(4), $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ es un og-filtro maximal en G_α. Como G_α es h-completo, se tiene que $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ converge en G_α (Teorema 4.16), esto es, para cada $\alpha \in I$ existe $g_\alpha \in G_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(\mathfrak{F}) \longrightarrow g_\alpha$. Por lo anterior, $\mathfrak{F} \longrightarrow (g_\alpha)_{\alpha\in I}$ en G. Esto prueba que cualquier og-filtro maximal en G converge. Por el Teorema 4.16 se sigue que G es h-completo. $\square$

El desarrollo siguiente permitirá mostrar que en la clase de los grupos topológicos abelianos la h-completez coincide con compacidad.

Teorema 4.18. *Sea H un subgrupo central cerrado de un grupo topológico G. Si $f : H \longrightarrow H'$ es un homomorfismo continuo sobreyectivo, entonces existen un grupo topológico G', un subgrupo cerrado H_1 de G', un isomorfismo topológico $i : H' \longrightarrow H_1$ y un homomorfismo continuo sobreyectivo $F : G \longrightarrow G'$ tal que $i \circ f = F|_H$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{f^{-1}(U)\,V \,|\, U \in \mathcal{V}^*_{H'} e_{H'}, V \in \mathcal{V}^*_G(e_G)\}$. Notemos que $\mathcal{B}$ es invariante bajo los automorfismos internos de G por la forma de sus elementos, es decir, si I_g es un automorfismo interno de G, entonces $I_g(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$. También, para cada $W_1 \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W^2 \subseteq W_1$. Si

$W = f^{-1}(U)V$, existen $U' \in \mathcal{V}^*_{H'}(e_{H'})$ y $V' \in \mathcal{V}^*_G(e_G)$ tales que $(U')^2 \subseteq U$ y $(V')^2 \subseteq V$, luego

$$\begin{aligned} f^{-1}(U')\left(V' f^{-1}(U')\right)V' &\subseteq f^{-1}(U')\left(f^{-1}(U')V'\right)V' \text{ (H es central)} \\ &\subseteq f^{-1}\left((U')^2\right)(V')^2 \\ &\subseteq f^{-1}(U)V, \end{aligned}$$

así, $W = f^{-1}(U')V'$ cumple que $W \subseteq W_1$. Además, para cualesquiera $U \in \mathcal{V}^*_{H'}(e_{H'})$ y $V \in \mathcal{V}^*_G(e_G)$ existen $U_1 \in \mathcal{V}^*_{e_{H'}}$ y $V_1 \in \mathcal{V}^*_G(e_G)$, respectivamente, tales que $U_1^{-1} \subseteq U$ y $V_1^{-1} \subseteq V$, y como $f^{-1}\left(U_1^{-1}\right) = \left(f^{-1}(U_1)\right)^{-1}$, se sigue

$$\left(V_1 f^{-1}(U_1)\right)^{-1} = f^{-1}\left(U_1^{-1}\right)V_1^{-1} \subseteq f^{-1}(U)V.$$

De manera análoga, para cualquier $P = f^{-1}(U)V, Q = f^{-1}(W)Z \in \mathcal{B}$ construimos $R \in f^{-1}(A)B \in \mathcal{B}$ tal que $R \subseteq P \cap Q$. Adicionalmente, por el hecho de ser U y V básicos en sus respectivas topologías, para cualquier $g \in G$, existen U' y V', en las bases respectivas, tales que $U'g \subseteq U$ y $V'g \subseteq V$, por lo cual para $P \in \mathcal{B}$ y $g \in G$ siempre existe $S \in \mathcal{B}$ tal que $Sg \subseteq P$. Por el Teorema 2.23, $\mathcal{B}' = \{Bg|\, B \in \mathcal{B},\, g \in G\}$ es una base para una topología τ' sobre G (no necesariamente de Hausdorff), en particular, $\mathcal{B}$ es una base local para e_G en (G, τ').

Por el Teorema 2.13(4), la cerradura en (G, τ') de H es

$$\cap\{H \cdot \left(f^{-1}(U)V\right) | \, U \in \mathcal{V}^*_{H'} e_{H'}, V \in \mathcal{V}^*_G(e_G)\} = \cap\{HV|\, V \in \mathcal{V}^*_G(e_G)\} = H.$$

Por lo tanto, H es cerrado en (G, τ'), luego H contiene a $K = cl_{\tau'}(\{e_G\})$. Además, K es subgrupo normal de G por el Teorema 2.36(2). Sean $G' = G/K$ el grupo cociente y $F : G \longrightarrow G'$ la función dada por $F = p_K \circ id_G$, donde $p_K : (G, \tau') \longrightarrow G'$ es la proyección canónica y $id_G : (G, \tau_G) \longrightarrow (G, \tau')$ es una función identidad (que es continua porque $\tau' \leq \tau_G$). Como $K \subseteq H$, se tiene que $H_1 = F(H)$ es cerrado en G' (Teorema 2.42(6)).

Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(H,\tau_H) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F|_H"] \arrow[ddr, "l\circ F|_H"'] & H' \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "m"] \\
& (H,\tau'|_H)/K \arrow[d, leftrightarrow, "l"] \\
& H_1
\end{tikzcd}
$$

Notemos que el triángulo inferior es conmutativo (con l un isomorfismo topológico) por la forma en que se eligió H_1. Para el triángulo superior usamos el Teorema 2.42(4), así existe el isomorfismo topológico m. Basta tomar $i = l \circ m$. $\square$

Teorema 4.19. *Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo central cerrado de G, entonces H es h-completo.*

Demostración. Consideremos $f : H \longrightarrow H'$ un homomorfismo continuo sobreyectivo. Por el Teorema 4.18, H' es isomorfo topológicamente a un subgrupo cerrado de G', el cual es una imagen de G bajo un homomorfismo continuo. Como G es h-completo, entonces G' es h-completo (Teorema 4.3(1)). Por tanto, H' es completo. Esto concluye la prueba. $\square$

El Teorema 4.19 significa que la h-completez es hereditaria a subgrupos centrales cerrados.

4.2. Clases de grupos en las cuales c-compacidad es equivalente a compacidad

Con lo desarrollado hasta ahora, surge de manera natural la pregunta: ¿Todo grupo topológico c-compacto es compacto? El primero ejemplo es el de los grupos compactos, y los que se han obtenido después parecen reafirmar ese hecho, sin embargo, en [4] se propone una respuesta negativa, alegando la

posible existencia de un grupo discreto infinito c-compacto. En [9], publicado en 2013, se mostró que en efecto existe un grupo discreto c-compacto infinito por medio del uso de la noción de *grupo no topologizable* y de grupos conocidos como *monstruos de Tarski*. Por ello, el problema que permenece es describir todas las clases de grupos topológicos en los cuales dichos conceptos sean equivalentes, puesto que ya se sabe que en general no lo son.
En esta sección presentamos algunas clases de grupos en los cuales la propiedad de ser c-compacto implica el ser compacto, en particular, presentamos un resultado nuevo acerca de $\overline{FC}$-grupos. Primero revisamos algunos conceptos auxiliares que nos permitirán mostrar que las clases de los grupos abelianos, de la serie central de un grupo fijo, de los grupos topológicamente hiperabelianos y de los grupos solubles, el concepto de c-compacidad coincide con el de compacidad. Nuevamente, por la Convención 3.3, todos los grupos considerados serán de Hausdorff a menos que se diga lo contrario.

Definición 4.20. *Sea G un grupo topológico.*

(1) G es ***precompacto*** *si para cualquier vecindad U de e_G existe un subconjunto finito F de G tal que $FU = G$.*

(2) Sea τ un cardinal infinito. G es ***τ-precompacto*** *si para cualquier vecindad U de e_G existe un subconjunto A con $card(A) \leq \tau$ tal que $AU = G$.*

Definición 4.21. *Sea G un grupo topológico. G es* ***minimal*** *si cualquier homomorfismo inyectivo continuo $f : G \longrightarrow L$ es un encaje (homeomorfismo en su imagen).*

Notemos la similaridad entre la h-completez y la minimalidad en grupo topológico. Por otro lado, el siguiente resultado muestra una caracterización de la minimalidad, la cual a veces es usada como definición de minimalidad (cf. [4]).

Teorema 4.22. *Sea G un grupo topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) G es minimal.

(2) No existe una topología de grupo sobre G que sea de Hausdorff y estrictamente más gruesa que τ_G.

Demostración. [(1) $\Longrightarrow$ (2)] Supongamos que τ' es una topología de grupo sobre G tal que $\tau' \leq \tau_G$. La función identidad $id_G : (G, \tau_G) \longrightarrow (G, \tau')$ es un homomorfismo continuo e inyectivo, por (1) se tiene que es un encaje, por lo tanto, $\tau' = \tau_G$.
[(2) $\Longrightarrow$ (1)] Sean $f : G \longrightarrow L$ un homomorfismo continuo e inyectivo y τ' la topología inicial inducida por f sobre G, es decir, $\tau' = \{f^{-1}(A) \mid A \in \tau_L\}$. Tenemos que $\tau' \leq \tau_G$ porque f es continua. Como f es inyectiva y L es T_1

$$\cap \mathcal{V}^{\circ}_{\tau'}(e_G) = f^{-1}(\cap \mathcal{V}^{\circ}_{\tau'}(e_L)) = \{e_G\}.$$

Así que τ' es T_1. Las operaciones de grupo de G son continuas con respecto a τ' porque f es homomorfismo de grupos. Luego, τ' es de Hausdorff (Corolario 2.18) y $\tau' \leq \tau_G$ es una topología de grupo más gruesa sobre G. Por (2), $\tau' = \tau$ y f es un encaje. $\square$

Ahora presentamos un concepto relacionado con la minimalidad.

Definición 4.23. *Sea G un grupo topológico. G es **totalmente minimal** si cada homomorfismo continuo $f : G \longrightarrow L$ es abierto en su imagen.*

Al igual que ocurre con la minimalidad, la minimalidad total tiene una caracterización que a veces es utilizada como definición del concepto (cf. [4]).

Teorema 4.24. *Sea G un grupo topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) G es totalmente minimal.

(2) Cada homomorfismo continuo y sobreyectivo $f : G \longrightarrow L$ es abierto.

(3) Si N es subgrupo normal cerrado, entonces $(G/N, \tau')$ es minimal.

Demostración. [(1) $\Longrightarrow$ (2)] Es obvio.
[(2) $\Longrightarrow$ (3)] Sea τ_1 una topología más débil que τ' sobre G/N. Notemos que la proyección canónica $p : G \longrightarrow (G, \tau_1)$ es continua y sobreyectiva, y por (2), p es abierta. Luego, $\tau_1 = \tau'$ (Teorema 4.22).
[(3) $\Longrightarrow$ (1)] Sea $f : G \longrightarrow L$ un homomorfismo continuo y $p : G \longrightarrow (G/N, \tau')$ la proyección canónica con $N = Ker(f)$. Ya tenemos que p es una función abierta y, por lo tanto, f induce un homomorfismo inyectivo continuo $\overline{f} : (G/N, \tau') \longrightarrow L$ tal que $f = \overline{f} \circ p$ (Teorema 2.42(1) y (4)). Como $(G/N, \tau')$ es minimal, $\overline{f}$ es un encaje. Luego, $f = \overline{f} \circ p$ es abierta en su imagen. $\square$

Corolario 4.25. *Si G es un grupo topológico totalmente minimal, entonces G es minimal.*

A continuación damos algunos ejemplos de estos conceptos.

Ejemplos 4.26. (1) Si G es un grupo topológico compacto, entonces G es minimal. En efecto, si N es subgrupo normal cerrado de G, entonces G/N es compacto, luego G/N es minimal porque cualquier función inyectiva y continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un encaje.

(2) El grupo espacial lineal $SL_n(\mathbb{R})$ es totalmente minimal para cada $n \geq 2$. De hecho, $SL_n(\mathbb{R})$ es conexo, localmente compacto, totalmente minimal y no es compacto (la prueba de este hecho escapa al interés del presente trabajo y por ello se omite).

El siguiente resultado pertene a los llamados *teoremas de funciones abiertas* en relación a homomorfismos continuos sobreyectivos entre elementos de ciertas clases de grupos topológicos. Se omite su prueba por su complejidad, aunque de acuerdo a Dikranjan y Uspenskij [4] se puede consultar en el artículo *Über metrische Gruppen* de S. Banach publicado en 1931.

Proposición 4.27 (Teorema de funciones abiertas de Banach)**.** *Cualquier homomorfismo continuo sobreyectivo entre grupos completos segundo numerables es abierto.*

Teorema 4.28. *Si G es un grupo topológico ω-precompacto y h-completo, entonces cualquier homomorfismo continuo y sobreyectivo $f : G \longrightarrow H$ con H un grupo metrizable es abierto.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$. Notemos que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo M de un grupo topológico $K = \prod_{\alpha \in I} G_i$ segundo numerable, y como para cada $\alpha \in I$ se cumple que G_α es T_2, entonces cada G_i es T_3 (Corolario 2.18), y como T_3 es una propiedad productiva, se obtiene que K es T_3 y segundo numerable, de donde por el Teorema de Metrización de Urysohn se sigue que K es metrizable y separable. Por lo anterior, podemos suponer que existen un homomorfismo continuo $g : H \longrightarrow K$ y $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e_K)$ tal que $U = g^{-1}(V)$.

Consideremos $h = \Delta(f, g) : G \longrightarrow H \times K$ y $L = h(G)$. Si $m : L \longrightarrow H$ y $n : L \longrightarrow K$ son las restricciones de las proyecciones canónicas π_H y π_K a L, respectivamente, entonces $f = m \circ h$ y $g = n \circ h$.
Sea $W = n^{-1}(V) \in \mathcal{V}^\circ(e_L)$. Tenemos que

$$h(U) = h\left(g^{-1}(V)\right) = h\left(h^{-1}\left(n^{-1}(V)\right)\right) = h\left(h^{-1}(W)\right) = W,$$

de donde $f(U) = m(h(U)) = m(W)$.
Como G es h-completo y H y L son imágenes homomórficas continuas de G, se tiene que H y L son completos. Ya que $H = f(G)$ y $L = h(G)$, también H y L son metrizables y ω-precompactos, de donde, H y L son separables, es decir, segundo numerables. Puesto que $m : L \longrightarrow H$ es un homomorfismo continuo sobreyectivo entre grupos completos segundo numerables, por el Teorema de Banach se sigue que m es abierta y por ello $f(U) = m(W) \in \mathcal{V}^\circ(e_H)$. Por lo tanto, f es abierta. □

Teorema 4.29. *Sea G un grupo topológico tal que el peso de red (la menor cardinalidad de una red en G, denotado por $nw(G)$) cumple que $nw(G) \leq \Gamma$, con Γ un cardinal. Entonces G es Γ-precompacto y admite una topología de grupo más gruesa tal que su peso $w(G)$ (la menor cardinalidad de una base en G) es a lo más Γ.*

Demostración. Observemos que el número de Lindelöf $l(G)$ (mínimo cardinal λ para el cual toda cubierta abierta tiene una subcubierta de cardinalidad a lo más λ) cumple que $l(G) \leq nw(G) \leq w(G)$ porque cada base es una red.
Por otro lado, observemos que para $X \subseteq G$ y $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ se cumple que $\{xU \cap Ux\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de X y existe una subcubierta $\{xU \cap Ux\}_{x \in S}$ de cardinalidad a lo más $l(x)$. En particular, $|S| \leq l(x)$ y $X \subseteq (SU) \cap (US)$, es decir, $l(X) \leq \tau$ implica que X es τ-precompacto. Así, G es Γ-precompacto.
Notemos que las imágenes continuas de redes son redes y además el peso de la red imagen es menor o igual que el peso de la red original. En virtud de **Corollary 2.17** de [12] existe una topología de grupo $\mathcal{T}'$ sobre G tal que el carácter $\chi(G, \mathcal{T}')$ de $(G, \mathcal{T}')$ es menor o igual que Γ, donde $\chi(X)$ es el supremo del conjunto formado por las mínimas cardinalidades de bases locales de cada punto $x \in X$.
Puesto que $(G, \mathcal{T}')$ es una imagen continua de $(G, \mathcal{T}_G)$, entonces $nwG, \mathcal{T}' \leq nw(G, \mathcal{T}_G) \leq \Gamma$. Esto muestra que $(G, \mathcal{T}')$ es Γ-precompacto. Y como $\chi(G) \leq \Gamma$, entonces $w(G, \mathcal{T}') \leq \Gamma$ (cf. **Lemma 2.28** de [12]). □

Corolario 4.30. *Si G es un grupo con una red numerable, entonces admite una topología de grupo de Hausdorff τ' más gruesa tal que (G, τ') es metrizable.*

Teorema 4.31. *Todo grupo h-completo con una red numerable es minimal y metrizable.*

Demostración. Sea G un grupo topológico h-completo con una red numerable. Por el Corolario 4.30 se obtiene que G es metrizable y ω-precompacto, luego, $id_G : (G, \tau_G) \longrightarrow (G, \tau')$ es un homomorfismo continuo. Por el Teorema 4.28 se tiene que id_G es abierto, de donde id_G es un homeomorfismo y $\tau_G = \tau'$. Así, G no admite una topología de grupo de Hausdorff más gruesa. Por lo tanto, G es minimal (Teorema 4.22). $\square$

Corolario 4.32. *Cualquier grupo topológico h-completo con una red numerable es totalmente minimal y metrizable.*

Demostración. Sean G un grupo topológico y N un subgrupo normal cerrado de G. Como G es metrizable, entonces G/N es metrizable, y ya que G es ω-precompacto, se sigue que G/N es ω-precompacto. Luego, G/N cumple las hipótesis del Teorema 4.31, de donde se obtiene que G/N es minimal. Por lo tanto, G es totalmente minimal (Teorema 4.24). $\square$

Teorema 4.33. *Sea G un grupo topológico ω-precompacto. Si todos los subgrupos normales cerrados de G son h-completos, entonces G es totalmente minimal.*

Demostración. Se probará que para cualesquiera homomorfismo sobreyectivo $f : G \longrightarrow H$ y $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ se tiene que $f(U)$ es abierto en H.
Como en la prueba del Teorema 4.28, podemos suponer que $U = g^{-1}(V)$ para algún homomorfismo continuo $g : G \longrightarrow K$ y algún $V \in \mathcal{V}^\circ(e_K)$, con K segundo numerable. Si $L = Ker(g)$, entonces $f(U) = f(UL)$, y por la sobreyectividad de f se obtiene que $U = UL$. Como L es un subgrupo normal cerrado de G porque $Ker(g) = g^{-1}(\{e_K\})$ y $\{e_K\}$ es cerrado en K porque K es T_1, se verifica que L es h-completo, de donde se sigue que $f(L)$ es cerrado en H, por lo cual $H/f(L)$ es de Hausdorff (Teorema 2.42(3)). Notemos que existe un homomorfismo natural $\overline{f} : G/L \longrightarrow H/f(L)$ inducido por f (Teorema 2.43). Por el Teorema 4.28 se sigue que g es un homomorfismo abierto y, por ello, G es topológicamente isomorfo a K. Así,

podemos considerar el homomorfismo $\overline{f} : K \longrightarrow H/f(L)$, lo cual implica que $H/f(L)$ tiene una red numerable. Ya que $H/f(L)$ es una imagen continua de G, se sigue que $H/f(L)$ es metrizable. Ahora, por el Teorema 4.28, la composición $G \longrightarrow H \longrightarrow H/f(L)$ es abierta, de modo que la imagen de $f(U)$ bajo $H \longrightarrow H/f(L)$ es abierta en $H/f(L)$. Por lo tanto, $f(U) = f(UL) = f(U)f(L)$ es abierto en H. $\square$

Corolario 4.34. *Cualquier grupo c-compacto ω-precompacto es totalmente minimal.*

Demostración. Sea G un grupo topológico c-compacto ω-precompacto. Entonces todo subgrupo cerrado es c-compacto, en particular cualquier subgrupo normal cerrado de G es c-compacto y, por el Teorema 4.5, cualquier subgrupo normal cerrado de G es h-completo. Ya que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.33 $\square$

Corolario 4.35. *Si G un grupo topológico c-compacto, entonces cada subgrupo cerrado separable de G es totalmente minimal.*

Demostración. Como G es un grupo topológico, por el Corolario 2.73 se tiene que existe una pseudonorma que genera la topología de G, la cual genera un pseudométrica que induce la topología de grupo de G. Luego, cada subgrupo cerrado separable es pseudometrizable por lo cual cada subgrupo cerrado tiene una red numerable. Como cada subgrupo cerrado de G es c-compacto, se sigue que cada uno de ellos es h-completo. Por el Corolario 4.32 se tiene el resultado deseado. $\square$

A continuación enunciamos un resultado cuya prueba escapa de la herramienta desarrollada hasta ahora, por lo cual se omite.

Proposición 4.36. *[Teorema de Prodanov-Stojanov] Cualquier grupo topológico abeliano minimal es precompacto.*

Aunque no lo parezca, éste es uno de los resultados más profundos e importantes acerca de la minimalidad de grupos abelianos.

Teorema 4.37. *En la clase de los grupos topológicos abelianos, h-completez coincide con compacidad.*

Demostración. Sea G un grupo topológico abeliano h-completo. Ya que la h-compes hereditaria a subgrupos centrales cerrados (Teorema 4.19), se obtiene que todos los subgrupos cerrados de G son h-completos. Analicemos dos casos:

Caso 1: Supongamos que G es separable.

Ya que G es pseudometrizable, se sigue que G es segundo numerable y por ello es ω-precompacto. Por el Teorema 4.33, G es totalmente minimal. Como G es topológicamente isomorfo a $G/\{e_G\}$ y $\{e_G\}$ es cerrado en G, entonces G es minimal. Por el Teorema de Prodanov-Stojanov se concluye que G es precompacto.

Como G es subgrupo cerrado de G y central, G es h-completo, y como $1_G : G \longrightarrow G$ es continua y sobreyectiva, entonces G es completo. Como G es completo y precompacto, se sigue que G es compacto (ver Corolario B.14).

Caso 2. Por el Caso 1 se tiene que todos los subgrupos cerrados separables de G son compactos, así, G es numerablemente compacto, lo cual implica que G es precompacto. Como G es completo y precompacto, en virtud del Corolario B.14 se concluye que G es compacto. □

Corolario 4.38. *En la clase de los grupos topológicos abelianos, c-compacidad coincide con compacidad.*

Ahora estudiemos otra clase de grupos.

Definición 4.39. *La* ***serie central superior*** $\{Z_n(G)\}$ *de un grupo* G *se define recursivamente como sigue: si* $n = 1$ *se toma* $Z_1(G) = Z(G)$ *el centro de* G *y para cada* $n \geq 1$ *consideremos* $p_n : G \longrightarrow G/Z_n(G)$ *la proyección natural y sea* $Z_{n+1}(G) = p_n^{-1}(Z(G/Z_n(G)))$.

Lema 4.40. *Sea* G *un grupo topológico. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $Z_n(G)$ *es un subgrupo cerrado normal de* G *y* $Z_{n+m}(G) = p_n^{-1}(Z_m(G/Z_n(G)))$.

Demostración. Para cada $g \in G$ se cumple que la función $[g, -] : G \longrightarrow G$ definida por $x \mapsto gxg^{-1}x^{-1}$ es continua porque las traslaciones y la inversión son continuas en G. Por lo anterior, la preimagen $[g, -]^{-1}(\{e_G\})$ es cerrado en G para cada $g \in G$ y por lo tanto

$$Z(G) = \cap_{g \in G}[g, -]^{-1}(\{e_G\})$$

es cerrado en G. Además, si $x, y \in Z(G)$ y $g \in G$, entonces $xy^{-1}g = xgy^{-1} = gxy^{-1}$, de donde se implica que $xy^{-1} \in Z(G)$, y por esto, $Z(G)$ es subgrupo

de G. También $g^{-1}xg = g^{-1}gx = x \in Z(G)$, por lo cual $Z(G)$ es subgrupo normal cerrado de G.
Ahora probaremos la afirmación sobre inducción sobre n. El caso $n = 1$ es el anterior. Supongamos que el resultado se satisface para n. Entonces $Z_n(G)$ es subgrupo normal cerrado de G, de donde $G/Z_n(G)$ es un grupo topológico de Hausdorff. Por lo que se ha mostrado, $Z(G/Z_n(G))$ es un subgrupo normal cerrado del espacio cociente $G/Z_n(G)$. Por lo tanto, $Z_{n+1}(G) = p_n^{-1}(G/Z_n(G))$.
Ahora, la segunda parte del enunciado se mostrará por inducción sobre m. Para $m = 1$ la afirmación coincide con la definición. Supogamos que la afirmación se cumple para m, es decir, $p_n(Z_{n+m}(G)) = Z_m(G/Z_n(G))$, o equivalentemente, $Z_{n+m}(G)/Z_n(G) = Z_m(G/Z_n(G))$, entonces

$$\frac{G/Z_n(G)}{Z_n(G/Z_n(G))} = \frac{G/Z_n(G)}{Z_{n+m}(G)/Z_n(G)}.$$

Por un Teorema de Isomorfismo

$$\frac{G}{Z_{n+m}(G)} \cong fracG/Z_n(G)Z_{n+m}(G)/Z_n(G).$$

Así obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "p_n"] \arrow[d, "p_{n+m}"] & & G/Z_n(G) \arrow[d, "p'_m"] \\
\frac{G}{Z_{n+m}(G)} \arrow[r, "\cong"'] & \frac{G}{Z_{n+m}(G)} \cong & \frac{G/Z_n(G)}{Z_{n+m}(G)/Z_n(G)}
\end{tikzcd}$$

donde p'_m es la proyección canónica correspondiente. Sea $X = Z\left(\frac{G/Z_n(G)}{Z_n(G/Z_n(G))}\right)$, luego, por definición, $Z_{m+1}(G/Z_n(G)) = p_m^{-1}(X)$. A partir del diagrama se obtiene que

$$p_n^{-1}(Z_{m+1}(G/Z_n(G))) = p_n^{-1}\left(p_m^{-1}(X)\right) = p_{n+m}^{-1}(X).$$

Por otro lado, X es el centro de $G/Z_{n+m}(G)$ (salvo isomorfismo). Por lo tanto $p_{n+m}^{-1}(X) = Z_{n+m+1}(G)$ y por la cadena de igualdades anterior se obtiene que

$$p_n^{-1}(Z_{m+1}(G/Z_n(G))) = Z_{n+m+1}(G).$$

□

Teorema 4.41. *Sea G un grupo topológico. Si G es h-completo, entonces cualquier grupo $Z_n(G)$ de la serie central superior de G es compacto.*

Demostración. Como la h-completez se preserva bajo subgrupos centrales cerrados, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que el grupo $Z_{n+1}(G)/Z_n(G)$, que es el centro del grupo h-completo $G/Z_n(G)$ y por ello es abeliano, es h-completo. Por el Teorema 4.37 se sigue que $Z_{n+1}(G)/Z_n(G)$ es compacto. Ya que la clase de los grupos compactos tiene la propiedad de los tres espacios, se obtiene por inducción que todos los grupos $Z_n(G)$ son compactos. $\square$

Corolario 4.42. *Si G es un grupo topológico c-compacto, entonces cualquier elemento de la serie central superior de G es compacto.*

Definición 4.43. *Un grupo topológico es* ***nilpotente*** *si existe un número natural n tal que $Z_n(G) = G$. El menor número tal que $Z_n(G) = G$ es llamado* ***clase de nilpotencia*** *de G.*

Corolario 4.44. *En la clase de los grupos topológicos nilpotentes, h-completez coincide con compacidad.*

Corolario 4.45. *En la clase de los grupos topológicos nilpotentes, c-compacidad coincide con compacidad.*

Antes de presentar la siguiente clase de grupos topológicos en la cual la c-compacidad coincide con la compacidad requerimos un concepto y dos proposiciones adicionales.

Definición 4.46. *Sea G un grupo topológico (no necesariamente T_2). La* ***componente conexa*** *G_0 de G es la componente conexa de e_G en G.*

Proposición 4.47 (Teorema de Iwasawa)**.** *Si G un grupo localmente compacto tal que G/G_0 es compacto, entonces existe un número natural n tal que G es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times C$, donde C es un subgrupo compacto maximal de G.*

Esta versión del Teorema de Iwasawa corresponde a **32.5 Malcev-Iwasawa Theorem**(c) de [16]. El resultado original, enfocado al estudio de grupos de Lie, se puede consultar en [8].

La siguiente clase de grupos relaciona la compacidad local, la conexidad y la c-compacidad.

Teorema 4.48. *En la clase de los grupos topológicos localmente compactos y conexos, c-compacidad coincide con compacidad.*

Demostración. Ya que $\mathbb{R}$ es abeliano y no compacto, entonces $\mathbb{R}$ no es c-compacto. Sea G un grupo localmente compacto y conexo. Tenemos que G no tiene subgrupos cerrados isomorfos a $\mathbb{R}$. Notemos que por el Teorema 4.47, G es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times C$, para algún $n \in \omega$ y C subgrupo compacto de G. Ya que G no tiene subgrupos cerrados isomorfos a $\mathbb{R}$, se obtiene que $n = 0$, de donde se sigue que G es homeomorfo a C. Por tanto, G es compacto. $\square$

El siguiente lema es útil para trabajar con la componente conexa de la identidad.

Lema 4.49. *Si G es un grupo topológico (no necesariamente T_2), entonces la componente conexa G_0 es un subgrupo cerrado normal de G.*

Demostración. Notemos que para cualquier $x \in G_0$ se cumple que $e_G = xx^{-1} \subseteq G_0x^{-1} \subseteq G_0$ por la maximalidad de G_0 y esto implica que G_0 es subgrupo de G. Como G_0 es la componente conexa de e_G, entonces G_0 es cerrado en G. Ya que para cualquier $a \in G$ se cumple que I_a es un isomorfismo topológico, se tiene que $I_a(G_0) = aG_0a^{-1}$ es conexo, y por la maximalidad de la componente conexa, como $e_G \in aG_0a^{-1}$, se tiene que $aG_0a^{-1} \subseteq G_0$. Puesto que $I_{a^{-1}}$ también es un isomorfismo topológico para cualquier $a \in G$, entonces $a^{-1}G_0a \subseteq G_0$, lo cual implica que $G_0 \subseteq aG_0a^{-1}$. De lo anterior se obtiene que para cualquier $a \in G$ se cumple que $aG_0a^{-1} = G_0$. Por lo tanto, G_0 es subgrupo normal y cerrado en G. $\square$

Finalmente, mostramos otra clase de grupos localmente compactos en la cual el concepto categórico de compacidad coincide con el concepto topológico. Esta clase está motivada por los resultados mostrados en el Capítulo 3, de manera que el siguiente teorema es nuevo y da otra respuesta parcial al cuestionamiento planteado al principio.

Teorema 4.50. *En la clase de los $\overline{FC}$-grupos localmente compactos, c-compacidad coincide con compacidad.*

Demostración. Sea G un $\overline{FC}$-grupo localmente compacto y c-compacto y consideremos a G_0 la componente conexa de G. Por el Lema 4.49 tenemos que G_0 es subgrupo normal y cerrado de G, por lo cual es $\overline{FC}$-grupo (Teorema 3.7(1)). Así, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G_0 \xhookrightarrow{\;i\;} G \xrightarrow{\;p\;} H \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión, $H = G/G_0$ y p es la proyección natural.
Ya que la clase de los $\overline{FC}$-grupos es cerrada bajo imágenes homomórficas y p es sobreyectiva se obtiene que H es $\overline{FC}$-grupo (Teorema 3.7(2)), y por un argumento similar se verifica que H es c-compacto (Teorema 4.3(2)). También, ya que G es localmente compacto se sigue, del Teorema 2.57, que G_0 y H son localmente compactos. Además, como G_0 es una componente conexa, H es totalmente disconexo.
Como H es $\overline{FC}$-grupo localmente compacto, por definición se cumple que $B(H) = H$ y por el Corolario 3.23 se verifica que H tiene un subgrupo compacto, abierto y normal N. Por el Teorema 2.36(4) se obtiene que N es cerrado.
Consideremos el grupo cociente H/N. Por argumentos similares a los usados para H se obtiene que H/N es $\overline{FC}$-grupo localmente compacto y c-compacto. Vemos que del Teorema 2.42(7) se implica que H/N es discreto. Dado que H/N es $\overline{FC}$-grupo discreto, para cada $x \in H/N$ se cumple que su clase de conjugación $C_{H/N}(x)$ es finita porque es compacta y cerrada en un espacio discreto. Por lo anterior, H/N es un FC-grupo.
Probaremos por contradicción que H/N es finito. Supongamos que H/N es infinito. Ya que H/N es FC-grupo, por la Proposición C.18, existe un subgrupo K localmente finito y normal de H/N tal que $(H/N)/K$ es abeliano.
Caso 1: K es infinito.
Entonces existe un subgrupo L de K con L abeliano e infinito (Proposición C.7). Como $L < K < H/N$ y es cerrado porque es discreto, entonces L es c-compacto y abeliano. Por el Corolario 4.38 se tiene que L es compacto. Por lo tanto, L es finito. Esto es una contradicción.
Caso 2: K es finito.
Se sigue que $(H/N)/K$ es infinito. Como $(H/N)/K$ es abeliano y c-compacto, por el Corolario 4.38 se obtiene que $(H/N)/K$ es compacto. Como el Teorema 2.42(7) implica que $(H/N)/K$ es discreto porque K es abierto dado que H/N es discreto, entonces se verifica que $(H/N)/K$ es finito. Esto es una contradicción.
En conclusión, H/N es finito. Por lo tanto, H/N es compacto.
Dado que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\ i\ } H \xrightarrow{\ p'\ } H/N \longrightarrow 0$$

es exacta y la compacidad tiene la propiedad de los tres espacios (Teorema 2.59), se sigue que H es compacto.

Como G_0 es localmente compacto, conexo y c-compacto, por el Teorema 4.48, se tiene que G_0 es compacto. Así, al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G_0 \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 0$$

obtenemos que G es compacto porque G_0 y H son compactos y la compacidad tiene la propiedad de los tres espacios.
Esto concluye la prueba. $\square$

La construcción anterior motiva lo siguiente.

Conjetura 4.51. *En la clase de los $\overline{FC}$-grupos, c-compacidad coincide con compacidad.*

La cual estaría probada si se responde afirmativamente el siguiente cuestionamiento.

Pregunta 4.52. *En la clase de los $\overline{FC}$-grupos, ¿minimalidad total implica precompacidad?*

Conclusiones

En el presente trabajo se han revisado algunos resultados clásicos respecto a $\overline{FC}$-grupos con la finalidad de entender su relación con la c-compacidad. Como se vio, la condición de compacidad local permitió elaborar una prueba de que en la clase de los $\overline{FC}$-grupos localmente compactos la c-compacidad equivale con la compacidad, pero justamente dicha construcción motiva lo siguiente.

Conjetura 4.53. *En la clase de los $\overline{FC}$-grupos, c-compacidad coincide con compacidad.*

El camino seguido para llegar a la prueba del Teorema 4.50 sugiere de manera natural el siguiente custionamiento:

Pregunta 4.54. *En la clase de los $\overline{FC}$-grupos, ¿minimalidad total implica precompacidad?*

Ya que una respuesta afirmativa probaría la conjetura planteada.
Es importante mencionar otro posible enfoque para atacar este problema está dentro de la Teoría de Categorías, en particular, en la llamada Topología Categórica, como ejemplo de este enfoque tenemos la prueba categórica de la propiedad productiva de la c-compacidad dada por M. Clementino, E. Giuli y W. Tholen en *Topology in a category: compatness*, donde además presentan la ν-compacidad (en sentido categórico) y desarrollan algunas de sus propiedades, donde se generaliza el trabajo realizado en [4] donde dentro de la categoría de grupos topológicos **GrpTop**. A pesar de esto, el trabajo desarrollado en [4] (y con más detalle en [12]) es importante porque permite caracterizar una propiedad categórica en términos de la categoría subyacente, lo cual da lugar a mayor herramienta y a nuevas líneas de investigación.
Aunque el estudio de los grupos topológicos, en específico de los $\overline{FC}$-grupos, es relativamente reciente, se han obtenido avances considerables en cuanto al

conocimiento de sus propiedades. En particular, los resultados aquí pesentados son una somera revisión y una pequeña aportación al basto universo de los $\overline{FC}$-grupos, y buscan invitar al lector a futuras investigaciones acerca de propiedades categóricas interpretadas dentro de la categoría **GrpTop**.

Apéndice A

Topología compacto abierta y producto semidirecto

En el presente capítulo se presenta una estructura de grupo que resulta interesante por preservar varias propiedades (algebraicas y topológicas) y no ser abeliano. Para llegar a dcho concepto primero revisaremos algunas propiedades de la topología compacto-abierta y posteriormente definiremos el producto semidirecto de dos grupos algebraicos para estudiarlo al dotarlo de la topología compacto-abierta modificada cuando trabajemos con grupos topológicos.

A.1. Topología compacto abierta modificada

Definición A.1. *Sean X y Y espacios topológicos y denotemos por $C(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas de X en Y. Para cualesquiera subconjuntos K y W de X y Y, respectivamente, sea*

$$\langle K, W\rangle = \{h \in C(X,Y) \mid h(K) \subseteq W\}.$$

La topología generada por la sub-base

$$\mathcal{S}_{c-o} = \{\langle K, W\rangle \mid K \text{ es compacto y } W \text{ es abierto}\}$$

se llama la ***topología compacto abierta*** *$\mathcal{T}_{c-o}$ sobre $C(X,Y)$.*

Convención A.2. En adelante, para cualesquiera espacios topológicos X y Y se considerará a $C(X,Y)$ dotado de la topología compacto abierta a menos que se diga lo contrario.

Lema A.3. *Sean X y Y espacios topológicos no vacíos y consideremos $C(X,Y)$. Se cumple que*

(1) Y es T_0 si y sólo si $C(X,Y)$ es T_0.

(2) Y es T_1 si y sólo si $C(X,Y)$ es T_1.

(3) Y es T_2 si y sólo si $C(X,Y)$ es T_2.

Demostración. (a) Sean $\phi, \psi \in C(X,Y)$ con $\phi \neq \psi$. Por ello, existe $x \in X$ tal que $\phi(x) \neq \psi(x)$. Consideremos $U \in \mathcal{V}_Y^{\circ}(\phi(x))$ tal que $\psi(x) \notin U$. Así $\langle \{x\}, U\rangle$ es una vecindad abierta de ϕ en $C(X,Y)$ que no contiene a ψ. Si además existe $V \in \mathcal{V}_Y^{\circ}(\psi(x))$ tal que $U \cap V = \varnothing$, entonces $\langle \{x\}, U\rangle$ y $\langle \{x\}, V\rangle$ son vecindades disjuntas de ϕ y ψ, respectivamente.
(b) Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$. Consideremos las funciones $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ tales que $f_1(x) = y_1$ y $f_2(x) = y_2$. Claramente, $f_1, f_2 \in C(X,Y)$ y existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f_1(x_1) = y_1$ y $f_2(x_2) = y_2$. Si $U \in \mathcal{V}^{\circ}(f_1)$ y $V \in \mathcal{V}^{\circ}(f_2)$, entonces existen $U' \in \mathcal{V}_Y^{\circ}(y_1)$ y $V' \in \mathcal{V}_Y^{\circ}(y_2)$ tales que $\langle \{x_1\}, U'\rangle \subseteq U$ y $\langle \{x_2\}, V'\rangle \subseteq V$. Esto concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado muestra una propiedad importante de la cerradura de los sub-básicos de la topología compacto abiera.

Lema A.4. *Sean X y Y espacios topológicos. Si K es subconjunto compacto de X y W es subconjunto abierto de Y, entonces*

$$cl_{C(X,Y)}(\langle K, W\rangle) \subseteq \langle K, cl_Y(W)\rangle = cl_{C(X,Y)}(\langle K, cl_Y(W)\rangle).$$

Demostración. Sea $\phi \in C(X,Y)$. Si existe $k \in K$ tal que $\phi(k) \notin cl_Y(W)$, entonces $\phi \in \langle \{k\}, Y \setminus cl_Y(W)\rangle$, el cual cumple que $\langle K, cl_Y(W)\rangle \cap \langle \{k\}, Y \setminus cl_Y(W)\rangle = \varnothing$. Por lo tanto, $\langle K, cl_Y(W)\rangle$ es cerrado y contiene a $cl_{C(X,Y)}(\langle K, W\rangle)$. $\square$

La siguiente proposición muestra que ciertas funciones se comportan como operaciones de grupo para $C(X,Y)$.

Proposición A.5. *[Continuidad de la composición] Sean X, Y y Z espacios topológicos y consideremos la función* ***composición*** *$\kappa : C(X,Y) \times C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z)$ definida por $\kappa(f,g) = g \circ f$ la composición usual.*

(1) Sea $\alpha \in C(X,Y)$ fijo. La función $\_\circ\alpha : C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z)$ dada por $\psi \mapsto \psi \circ \alpha$ es continua, es decir, la restricción $\kappa|_{\{\alpha\}\times C(Y,Z)}$ es continua.

(2) Sea $\beta \in C(Y,Z)$ fijo. La función $\beta \circ \_ : C(X,Y) \longrightarrow C(X,Z)$ determinada por $\phi \mapsto \beta \circ \phi$ es continua, esto es, la restricción $\kappa|_{C(X,Y)\times\{\beta\}}$ es continua.

(3) Si Y es localmente compacto, entonces κ es continua.

Demostración. Sean $\alpha \in C(X,Y)$ y $\beta \in C(Y,Z)$ y supongamos que $K \subseteq X$ es un compacto y $U \subseteq Z$ es un abierto tales que $\beta \circ \alpha \in \langle K, U\rangle$. Entonces $\alpha(K)$ es compacto y $\alpha(K)\, subseteq \beta^{-1}(U) \in \tau_Y$. De lo anterior, las vecindades $\langle K, \beta^{-1}(U)\rangle$ y $\langle \alpha(K), U\rangle$ de α y β, respectivamente, son mandadas a $\langle K, U\rangle$ por $\beta \circ \_$ y $\_ \circ \alpha$, repectivamente. Esto muestra (1) y (2). Ahora, supongamos que Y es localmente compacto. Para cada $x \in \alpha(K)$ existe $V_x \in \mathcal{V}_Y(x)$ compacta tal que $V_x \subseteq \beta^{-1}(U)$. Como $\alpha(K)$ es compacto, existe $F \subseteq \alpha(K)$ finito tal que $\alpha(K) \subseteq W = \cup_{f\in F} V_f^\circ$. Luego, W es abierto y $D = \cup_{f\in F} V_f$ es compacto. Por lo tanto,

$$(\alpha, \beta) \in \langle K, W\rangle \times \langle D, U\rangle \subseteq \kappa^{-1}(\langle K, U\rangle).$$

Esto prueba (3). □

Proposición A.6 (Continuidad de la función evaluación)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Si $x \in X$, la función **evaluación** $\omega_x : C(X,Y) \longrightarrow Y$ definida por $\omega_x(\phi) = \phi(x)$ es continua.*

Demostración. Basta notar que $\langle \{x\}, U\rangle$ es abierto en $C(X,Y)$. □

Lema A.7. *Sean X y Y espacios topológicos y $\mathcal{T}$ una topología sobre un subconjunto $\mathcal{S}$ de $C(X,Y)$. Si la función $w : X \times \mathcal{S} \longrightarrow Y$ definida por $w(x,\phi) = \phi(x)$ es continua, entonces $\mathcal{T}_{c-o}|_{\mathcal{S}}$ es más gruesa que $\mathcal{T}$.*

Demostración. Sean K compacto en X y U abierto en Y tales que $\langle K, Y\rangle \in \mathcal{T}_{c-o}$. Se afirma que $\langle K, U\rangle \cap \mathcal{S} \in \mathcal{T}$. Vemos que para cada $\phi \in \langle K, U\rangle \cap \mathcal{S}$ y para cualquier $k \in K$ existen $V_k \in \mathcal{V}_X^\circ(k)$ y $W_k \in \mathcal{V}_\mathcal{T}^\circ(\phi)$ tales que $w(V_k \times W_k) \subseteq U$. Como K es compacto, existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \cup_{f\in F} V_f$. Luego, $W = \cup_{f\in F} W_f$ es una vecindad abierta de ϕ tal que $W \subseteq \langle K, U\rangle$. Finalmente, como $\langle K, U\rangle \in \mathcal{T}|_{c-o}$, se sigue que $\mathcal{T}_{c-o}|_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$. □

Proposición A.8. *[Acción continua] Sean X y Y espacios topológicos. Si X es localmente compacto, entonces la función $w : X \longrightarrow C(X,Y) \longrightarrow Y$ definida por $w(x,\phi) = \phi(x)$ es continua.*

Demostración. Sea U abierto en Y. Consideremos $x \in X$ y $\phi \in C(X,Y)$ tales que $\phi(x) \in U$. Luego, existe una vecindad compacta V de x tal que $\phi(V) \subseteq U$, de donde $(x,\phi) \in V \times \langle V,U\rangle \subseteq w^{-1}(U)$. $\square$

A partir de este momento, retomamos la estructura de grupo topológico.

Proposición A.9. *Sean G un grupo topológico, $\mathfrak{m}$ el producto en G, In la inversión de elementos de G y $\mathcal{T}$ una topología sobre G tal que $\mathfrak{m}$ es continua. Si $\overline{\mathcal{T}}$ es la topología generada por la sub-base $\{S \cap InT \mid S,T \in \mathcal{T}\}$, entonces $\left(G,\mathfrak{m},\overline{\mathcal{T}}\right)$ es un grupo topológico. Además, si $(H,*,\mathcal{T}')$ es un grupo topológico y $f:(H,*,\mathcal{T}') \longrightarrow (G,\mathfrak{m},\mathcal{T})$ es un homomorfismo continuo, entonces $f:(H,*,\mathcal{T}') \longrightarrow \left(G,\mathfrak{m},\overline{\mathcal{T}}\right)$ es un homomorfismo continuo.*

Demostración. Es claro que In es continua si consideramos $\overline{\mathcal{T}}$ por la forma de la sub-base, por lo cual resta mostrar que $\mathfrak{m}$ es continua. Observemos que para cualesquiera $S,T \in \mathcal{T}$ y $g,h \in G$ tales que $\mathfrak{m}(g,h) \in S \cap In(T)$ existen $U \in \mathcal{V}^\circ(g)$, $V \in \mathcal{V}^\circ(h)$, $W \in \mathcal{V}^\circ(In(h))$ y $X \in \mathcal{V}^\circ(Ing)$ tales que $U \times V \subseteq \mathfrak{m}^{-1}(S)$ y $W \times X \subseteq \mathfrak{m}^{-1}(T)$. Por lo tanto,

$$(U \times In(X)) \times (V \times In(W)) \subseteq \mathfrak{m}^{-1}(S \cap In(T)).$$

Para la segunda parte, observemos que si $S,T \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}'$ y $f^{-1}(T^{-1}) = \left(f^{-1}(T)\right)^{-1} \in \mathcal{T}'$, es decir, $f^{-1}(S \cap In(T)) \in \mathcal{T}'$. $\square$

Notación A.10. Si X es un espacio topológico, $Homeo(X)$ denota al conjunto de homeomorfismos de X en sí mismo.

Definición A.11. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. A la topología inducida por $\overline{\mathcal{T}_{c-o}}$ en $Homeo(X)$ se le llama* ***topología compacto abierta modificada****.*

Con abuso de notación, dado un espacio topológico X localmente compacto, usaremos $\left(Homeo(X), \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$ para denotar que $Homeo(X)$ está dotado de la topología compacto abierta.
El siguiente resultado es inmediato a partir de la Proposición A.9.

Corolario A.12. *Si X es un espacio topológico localmente compacto, entonces $\left(Homeo(X), \circ, \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$, donde $\circ$ denota la composición usual de funciones, es un grupo topológico.*

Corolario A.13. *Sea X un espacio localmente compacto. Si consideramos* $\left(Homeo\left(X\right), \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$, *entonces la función* $w : X \times Homeo\left(X\right) \longrightarrow X$ *definida por* $w\left(x, \phi\right) = \phi\left(x\right)$ *es continua.*

Demostración. Notemos que la topología inducida por $\mathcal{T}_{c-o}$ en $Homeo\left(X\right)$ es más gruesa que $\overline{\mathcal{T}_{c-o}}$. En virtud de las Proposiciones A.8 y A.9 se tiene el resultado deseado. □

La proposición siguiente resume toda la información acerca de los automorfismos topológicos de un grupo topológico derivada a partir de los resultados anteriores.

Proposición A.14. *Si G es un grupo topológico localmente compacto y* $Aut\left(G\right)$ *es el grupo de automorfismos topológicos de G, entonces*

(1) $Aut\left(G\right)$ *es un subgrupo topológico de* $Homeo\left(G\right)$,

(2) $Aut\left(G\right)$ *dotado con la topología inducida por la topología compacto abierta modificada* $\overline{\mathcal{T}_{c-o}}$ *es un grupo topológico, y*

(3) la función $w : G \times Aut\left(G\right) \longrightarrow G$ *definida por* $w\left(g, \alpha\right) = \alpha\left(g\right)$ *es continua.*

A.2. Grupos topológicos de transformaciones

En esta sección desarrollaremos herramientas que nos permitirá efectuar fácilmente la construcción del producto semidirecto.

Definición A.15. *Sean X un espacio topológico y G un grupo topológico.*

(1) Una ***acción*** *de G sobre X es una función* $w : X \times G \longrightarrow X$ *tal que para cualesquiera* $x \in X$ *y* $g, h \in G$ *se satisface* $w\left(x, gh\right) = w\left(w\left(x, g\right), h\right)$ *y* $w\left(x, e_G\right) = x$. *Si w es una función continua, a la terna* $\left(X, G, w\right)$ *se le llama* ***grupo topológico de transformaciones***.

(2) Una ***representación mediante permutaciones*** *de G en X es un homomorfismo* $\delta : G \longrightarrow Sym\left(X\right)$, *donde* $Sym\left(X\right) = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$. *En particular, si X es localmente compacto,* $\delta : G \longrightarrow \left(Homeo\left(X\right), \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$ *es una* ***representación como grupo topológico de transformaciones*** *si δ es un homomorfismo continuo.*

Ejemplos A.16. (1) Sea X un conjunto no vacío y consideremos $\sigma : X \times Sym(X) \longrightarrow X$ definida por $\sigma(x, \phi) = \phi(x)$. Para cualesquiera $x \in X$ y $\phi, \psi \in Sym(X)$ se cumple que

$$\sigma(x, \phi \circ \psi) = \phi \circ \psi(x) = \phi(\psi(x)) = \phi(\sigma(x, \psi)) = \sigma(\sigma(x, \psi), \phi),$$

y por otro lado $\sigma(x, 1_X) = 1_X(x) = x$. Por lo tanto, σ es una acción de $Sym(X)$ en X.

(2) Si X es localmente compacto, por el Corolario A.13 se tiene que $w : X \times Homeo(X) \longrightarrow X$ dada por $w(x, \phi) = \phi(x)$ es continua. A partir del Ejemplo (1) se obtiene que w es una acción continua.

(3) Sean G un grupo topológico y N un subgrupo normal de G. La función $w_N : G/N \times G \longrightarrow G/N$ dada por $w_N(Hx, g) = Hxg$ es una acción continua.

(4) Si G es un grupo topológico y N un subgrupo normal de G, entonces $\kappa_N : N \times G \longrightarrow G$ definido por $\kappa(x, g) = g^{-1}xg$ es una acción continua.

Definición A.17. *Sean X un conjunto no vacío y G un grupo topológico.*

(1) Para cada acción $w : X \times G \longrightarrow X$ se define la representación mediante permutaciones $\delta_w : G \longrightarrow Sym(X)$ para cada $g \in G$ como la permutación $\delta_w(g) : X \longrightarrow X$ dada por $\delta_w(g)(x) = w(x, g)$.

(2) Para cada representación mediante permutaciones $\delta : G \longrightarrow Sym(X)$ se define la acción $w_\delta : X \times G \longrightarrow X$ dada por $w_\delta(x, g) = \delta(g)(x)$.

En el siguiente lema se muestra que las funciones definidas arriba en efecto son una representación mediante permutaciones y una acción, respectivamente, a la vez que muestra algunas de sus propiedades.

Lema A.18. *Sean X un conjunto no vacío y G un grupo topológico.*

(1) Para cada acción $w : X \times G \longrightarrow X$, la función δ_w es una representación mediante permutaciones y $w_{\delta_w} = w$.

(2) Para cada representación mendiante permutaciones $\delta : G \longrightarrow Sym(X)$, la función w_δ es una acción y $\delta_{w_\delta} = \delta$.

(3) Si X es un espacio topológico y $w : X \times G \longrightarrow X$ es una acción continua, entonces $\delta : G \longrightarrow \left(Homeo\,(X)\,, \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$ es un homomorfismo continuo. Si además X es localmente compacto, entonces δ_w es una representación como grupo topológico de transformaciones.

(4) Si X es localmente compacto y $\delta : G \longrightarrow \left(Homeo\,(X)\,, \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$ es una representación como grupo topológico de transformaciones, entonces $w_\delta : X \times G \longrightarrow X$ es una acción continua.

Demostración. (1) Notemos que $\delta_w : G \longrightarrow Sym\,(X)$ está bien definida. También, para cada $x \in X$ se cumple que $\delta_w\,(e_G)\,(x) = w\,(x, e_G) = x$, esto es, $\delta_w\,(e_G) = 1_X$. Además, para cualesquiera $g, h \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned}\delta_w\,(gh)\,(x) &= w\,(x, gh) = w\,(w\,(x,g)\,, h)\\ &= \delta_w\,(h)\,(w\,(x,g)) = \delta_w\,(h)\,(\delta_w\,(g)\,(x))\\ &= \delta_w\,(h) \circ \delta_w\,(g)\,(x)\,,\end{aligned}$$

por lo tanto, $\delta_w\,(gh) = \delta_w\,(h) \circ \delta\,(g)$. Como $\circ\,(\delta_w\,(g)\,, \delta_w\,(h)) = \delta_w\,(h) \circ \delta\,(g)$, esto muestra δ_w es un homomorfismo.
Para la otra parte es suficiente observar que

$$w_{\delta_w}\,(x, g) = \delta_w\,(g)\,(x) = w\,(x, g)\,.$$

(2) Notemos que para cualquier $x \in X$ se cumple que

$$w_\delta\,(x, e_G) = \delta\,(e_G)\,(x) = 1_x\,(x) = x,$$

y para cualesquiera $g, h \in G$ se satisface

$$\begin{aligned}w\delta\,(x, gh) &= \delta\,(gh)\,(x) = \delta\,(h) \circ (h)\,(x)\\ &= \delta\,(h)\,(\delta\,(g)\,(x)) = \delta\,(h)\,(w_\delta\,(x,g))\\ &= w_\delta\,(w_\delta\,(x,g)\,, h)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, w_δ es una acción.
Para la otra parte, notemos que $\delta_{w_\delta}\,(g) : X \longrightarrow X$ está dada por $\delta_{w_\delta}\,(g)\,(x) = w_\delta\,(x, g) = \delta\,(g)\,(x)$.
(3) Sea X un espacio topológico y supongamos que $w : X \times G \longrightarrow X$ es una acción continua. Observemos que para cada $g \in G$, la representación $\delta_w\,(g) : X \longrightarrow X$ se puede considerar como la restricción $w|_{X \times \{g\}}$, por lo

cual $\delta_w(g)$ es continua. Además, $In(\delta_w(g)) = \delta(In(g))$ (por (1)) también es una función continua. Así, obtenemos que $\delta_w : G \longrightarrow Homeo(X)$.
Ahora, para cualesquiera $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq X$ abierto se cumple que $\delta_w(g) \in \langle K, U \rangle$, lo cual equivale a que $w(K \times \{g\}) \subseteq U$. Como w es continua, para cada $k \in K$ existen $V_k \in \mathcal{V}^\circ(k)$ y $W_k \in \mathcal{V}^\circ(g)$ tales que $w(V_k \times W_k) \subseteq U$, y ya que K es compacto, existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \cup_{f \in F} V_f$. Además, $W = \cap_{f \in F} W_f \in \mathcal{V}^\circ(g)$. Luego, $w(K \times W) \subseteq U$, es decir, $\delta_w(W) \subseteq \langle K, U \rangle$.
El resto de la afirmación e sigue en virtud de la continuidad de δ_w y del hecho de $Homeo(X)$ estar dotado de la topología compacto abierta junto con el uso de la Proposición A.9.
(4) Si $\delta : G \longrightarrow Homeo(X)$ es un homomorfismo continuo, entonces $\alpha(x, g) = (x, \delta(g))$ define una función continua $\alpha : X \times G \longrightarrow X \times Homeo(X)$. Por el Corolario A.13, la acción $w' : X \times Homeo(X) \longrightarrow X$ definida por $w'(x, \phi) = \phi(x)$ es continua. Por lo tanto, $w_\delta = w' \circ \alpha$ es continua. □

Ejemplo A.19. Si κ_N es como en el Ejemplo A.16(4), entonces $\delta_{\kappa_N} \subseteq Aut(N)$, por lo cual δ_{κ_N} induce un homomorfismo continuo de G en $Aut(N)$, donde $Aut(N)$ está dotado con la topología inducida por la topología compacto abierta modificada sobre $C(N, N)$.

A.3. Producto semidirecto de grupos topológicos

En esta sección introduciremos unos de los grupos que permiten conservar estructura topológica pero que modifica sustancialmente la estructura algebraica. En primer lugar revisaremos el concepto algebraico e inmediatamente lo dotaremos de una estructura de grupo topológico.

Definición A.20. *Sean H y N grupos y $\eta : H \longrightarrow Aut(N)$ un homomorfismo. Consideremos $\mathfrak{m} : (N \times H) \times (N \times H) \longrightarrow N \times H$ definido por*

$$\mathfrak{m}((n, h), (m, k)) = (n, h)(m, k) = (n\eta(h)(m), hk).$$

*Al par $(N \times H, \mathfrak{m})$ se le llama **producto semidirecto** de H y N con respecto al homomorfismo η y se denota usualmente por $N \rtimes_\eta H$, y cuando no haya lugar a confusión se simplifica a $N \rtimes H$.*

En caso de que η sea el homomorfismo identidad se tiene que $N \rtimes H$ coindcide con el producto directo $N \times H$. Otro hecho que es importante notar, es la existencia de otras formas de definir este grupo, como ejemplo tenemos el desarrollo realizado en [15], donde se parte de una generalización del producto directo interno y posteriormente se contrasta con el producto semidirecto externo. Aquí seguiremos el desarrollo de [16]. Para no sobrecargar la notación se usará $\eta_h = \eta(h)$ para cualquier $h \in H$.

Proposición A.21. *Sean H y N grupos (algebraicos) y $\eta : H \longrightarrow Aut(N)$ un homomorfismo (de grupos). Se cumple que:*

(1) $N \rtimes_\eta H$ es un grupo, $\{e_N\} \times H$ es un subgrupo y $N \times \{e_H\}$ es un subgrupo normal de $N \rtimes_\eta H$.

(2) Si N y H son grupos topológicos y la acción w_η es continua, entonces $N \rtimes_\eta H$ es un grupo topológico al considerar a $N \times H$ dotado de la topología producto. Además, si H y N son de Hausdorff, entonces $N \rtimes_\eta H$ es de Hausdorff y $\{e_N\} \times H$ y $N \rtimes \{e_H\}$ son subgrupos cerrados.

Demostración. (1) Primero veamos que el producto es asociativo. Por un lado

$$\begin{aligned}((l,h_1)(m,h_2))(n,h_3) &= (l\eta_{h_1}(m), h_1h_2)(n,h_3)\\ &= (l\eta_{h_1}(m)\,\eta_{h_1h_2}(n), h_1h_2h_3),\end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned}(l,h_1)((m,h_2)(n,h_3)) &= (l,h_1)(m\eta_{h_2}(n), h_2h_3)\\ &= (l\eta_{h_1}(m\eta_{h_2}(n)), h_1h_2h_3).\end{aligned}$$

Como η es un homomorfismo, se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}\eta_{h_1}(m)\,\eta_{h_1h_2}(n) &= \eta_{h_1}(m)(\eta_{h_1}\circ\eta_{h_2})(n)\\ &= \eta_{h_1}(m)\,\eta_{h_1}(h_2(n)) = \eta_{h_1}(m\eta_{h_2}(n)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la multiplicación definida sobre $N \times H$ es asociativa.
Sea afirma que (e_N, e_H) es el elemento identidad de $N \rtimes_\eta H$ y que dado $(n,h) \in N \times H$, $(n,h)^{-1} = (\eta_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$. Para mostrarlo notemos que

$$(n,h)(e_N,e_H) = (n\eta_{e_H}(e_N), he_H) = (n\,1_N(e_N), h) = (ne_N, h) = (n,h),$$

y también

$$\begin{aligned}
(n,h)(n,h)^{-1} &= (n,h)\left(\eta_{h^{-1}}\left(n^{-1}\right),h^{-1}\right)\\
&= \left(n\eta_h\left(\eta_{h^{-1}}\left(n^{-1}\right)\right),hh^{-1}\right)\\
&= \left(n\eta_{hh^{-1}}\left(n^{-1}\right),e_H\right) = \left(n\eta_{e_H}\left(n^{-1}\right),e_H\right)\\
&= \left(n\,1_N\left(n^{-1}\right),e_H\right) = \left(nn^{-1},e_H\right) = (e_N,e_H)\,.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $N \rtimes_\eta H$ es un grupo. Ahora, como

$$(e_N,h)^{-1} = \left(\eta_{h^{-1}}\left(e_N^{-1}\right),h^{-1}\right) = \left(\eta_{h^{-1}}(e_N),h^{-1}\right) = \left(e_N,h^{-1}\right),$$

entonces se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
(e_N,h_1)(e_N,h_2)^{-1} &= (e_N,h_1)\left(e_N,h_2^{-1}\right)\\
&= \left(e_N\eta_{h_1}(e_N),h_1h_2^{-1}\right) = \left(e_Ne_N,h_1h_2^{-1}\right)\\
&= \left(e_N,h_1h_2^{-1}\right),
\end{aligned}$$

y por ello se tiene que $\{e_N\} \times H$ es subgrupo de $N \rtimes_\eta H$.
También, como se satisface

$$\begin{aligned}
(n,e_H)(m,e_H)^{-1} &= (n,e_H)\left(\eta_{e_H^{-1}}\left(m^{-1}\right),e_H^{-1}\right) = (n,e_H)\left(\eta_{e_H}\left(m^{-1}\right),e_H\right)\\
&= (n,e_H)\left(1_N\left(m^{-1}\right),e_H\right) = (n,e_H)\left(m^{-1},e_H\right)\\
&= \left(n\eta_{e_H}\left(m^{-1}\right),e_He_H\right) = \left(nm^{-1},e_H\right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $N \times \{e_H\}$ es subgrupo de $N \rtimes_\eta H$. Resta ver que $N \times \{e_H\}$ es normal, para ello, observemos que

$$\begin{aligned}
(m,h)(n,e_H)(m,h)^{-1} &= (m\eta_h(n),he_H)\left(\eta_{h^{-1}}\left(m^{-1}\right),h^{-1}\right)\\
&= \left(m\eta_h(n)\,\eta_h\left(\eta_{h^{-1}}\left(m^{-1}\right)\right),hh^{-1}\right)\\
&= \left(m\eta_h(n)\,\eta_{hh^{-1}}\left(m^{-1}\right),e_H\right)\\
&= \left(m\eta_h(n)\,\eta_{e_H}\left(m^{-1}\right),e_H\right)\\
&= \left(m\eta_h(n)\,m^{-1},e_H\right) \in N \times \{e_H\}.
\end{aligned}$$

(2) Notemos que el producto en $N \rtimes_\eta H$ puede ser descrito como la función

$$((m,h),(n,g)) \mapsto (m,w_\eta(n,h),h,g) \mapsto (mw_\eta(n,h),hg),$$

y dado que los productos en N y H es continuo, respectivamente, la continuidad de w_η asegura la continuidad del producto en $N \rtimes_\eta H$. También, la inversión de elementos de $N \rtimes_\eta H$ puede ser considerada como

$$(n,h) \mapsto \left(w_\eta\left(n,h^{-1}\right),h\right) \mapsto \left(\left(w_\eta\left(n,h^{-1}\right)\right)^{-1},h^{-1}\right),$$

y en virtud de la continuidad de las inversiones de elementos de N y H, respectivamente, y de la continuidad de w_η se obtiene que la inversión en $N \rtimes_\eta H$ es continua.
Es claro que $N \times \{e_H\}$ y $\{e_N\} \times H$ son cerrados en $N \rtimes_\eta H$ porque son el producto de cerrados. □

A partir del inciso (4) del Lema A.18 se obtiene que la continuidad de w_η se obtiene cuando N es localmente compacto y η es una representación como grupo topológico de transformaciones.
A continuación se presenta una caracterización interna de producto semidirecto.

Proposición A.22. *[Caracterización de productos semidirectos] Sea G un grupo topológico y supongamos que existen un sugrupo normal N de G y un subgrupo H de G tales que $G = NH$ y $N \cap H = \{e_G\}$. Consideremos la acción $\kappa : N \times H \longrightarrow N$ definida por $\kappa(n,h) = h^{-1}nh$ y sea $\delta = \delta_{\kappa_N} : H \longrightarrow Aut(N)$ definida para cada $h \in H$ como $\delta_h : N \longrightarrow N$ dado por $\delta_h(m) = \kappa_N(m,h)$. Se cumple que:*

(1) la función $\alpha : N \rtimes_\delta H \longrightarrow G$ definida por $\alpha(n,h) = nh$ es un homomorfismo continuo biyectivo, y

(2) si N es localmente compacto, entonces δ es continua con respecto a $\left(Aut(N), \overline{\mathcal{T}_{c-o}}\right)$.

Demostración. (1) Notemos que $\alpha = \mathfrak{m}|_{N\times H}$, y como G es grupo topológico, entonces α es continua. Ya que para cualesquiera $m,n \in N$ y $h,l \in H$ se cumple que

$$(mh)(nl) = m\left(hnh^{-1}\right)hl = mI_h(n)hl,$$

y también

$$(m,h)(n,l) = (m\delta_h(n), hl) = (mI_h(n), hl),$$

entonces

$$\alpha((m,h)(n,l)) = \alpha(m,h)\,\alpha(n,l),$$

es decir, α es un homomorfismo de grupos. Tenemos que α es sobreyectivo porque $G = NH$, y es inyectivo porque $Ker\,(\alpha) \leq N \cap H = \{e_G\}$.
(2) Se sigue inmediatamente del Ejemplo A.16(4) y del Lema A.18(3). $\square$

La siguiente proposición es un recíproco del resultado anterior.

Proposición A.23. *Sean G y H grupos topológicos y $\phi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo. Si existe un homomorfismo continuo $\sigma : H \longrightarrow G$ tal que $\phi \circ \sigma = 1_H$, entonces*

(1) ϕ es un morfismo cociente y σ es un encaje, y

(2) si $K = Ker\,(\phi)$ y se considera $\delta : H \longrightarrow Aut\,(K)$ definida para cada $h \in H$ como el morfismo $\delta\,(h) = \delta_h : K \longrightarrow K$ determinado por $\delta_h\,(k) = \sigma\,(h)\,k\sigma\,(h^{-1})$, entonces el producto semidirecto $K \rtimes_\delta H$ es un grupo topológico y la función $\alpha : K \rtimes \delta H \longrightarrow G$ definida por $\alpha\,(k,h) = k\sigma\,(h)$ es un isomorfismo de grupos topológicos.

Demostración. (1) Es el Teorema 2.45.
(2) Notemos que para cualesquiera $h \in H$ y $k \in K$ se satisface $w_\delta\,(k,h) = \sigma\,(h)\,k\sigma\,(h^{-1})$, y como σ es continua y G es un grupo topológico se obtiene que w_δ es continua. Por la Proposición A.21(2) se tiene que $K \rtimes_\delta H$ es un grupo topológico.
Como para cualesquiera $(k,h)\,,(j,l) \in K \rtimes_\delta H$ se verifica

$$\begin{aligned}
\alpha\,(k,h)\,\alpha\,(j,l) &= k\sigma\,(h)\,j\sigma\,(l) \\
&= k\sigma\,(h)\,j\sigma\,(h)^{-1}\,\sigma\,(h)\,\sigma\,(l) \\
&= k\delta_h\,(j)\,\sigma\,(hl) \\
&= \alpha\,(k\delta_h\,(j)\,,hl) \\
&= \alpha\,((k,h)\,(j,l))\,,
\end{aligned}$$

entonces α es un homomorfismo.
Observemos que $\alpha\,(e_K, e_H) = e_K\sigma\,(e_H) = e_Ke_H = e_G$. Se mostrará la continuidad de α en (e_K, e_H). Sean $U, V \in \mathcal{V}_G^\circ\,(e_G)$ tales que $V^2 \subseteq U$. Como $\sigma \circ \phi : G \longrightarrow G$ es continua, existe $W \in \mathcal{V}_G^\circ\,(e_G)$ tal que $\sigma \circ \phi\,(W) \subseteq V$. Como ϕ es una función cociente (por (1)), se tiene que ϕ es una función abierta, luego, $\phi\,(W)$ es abierto en H. Como $(V \cap K) \times \phi\,(W)$ es abierto en $K \rtimes_\delta H$ y

$$\alpha\,((V \cap K) \times \phi\,(W)) = \{k\,(\sigma\,(\phi\,(w)))\,|\,k \in V \cap K,\, w \in W\} \subseteq VV \subseteq U,$$

se sigue que α es continua en (e_K, e_H). Por el Teorema 2.27(2) se tiene que α es continua.
Ahora, la función $\beta : G \longrightarrow K \rtimes_\delta H$ definida por $\beta(g) = (g\sigma(\phi(g^{-1})), \phi(g))$ es la inversa de α. Primero notamos que β está bien definida y además, por un lado se satisface

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(g) &= \alpha\left(g\sigma\left(\phi\left(g^{-1}\right)\right), \phi(g)\right)\\ &= g\sigma\left(\phi\left(g^{-1}\right)\right)\sigma(\phi(g))\\ &= ge_G = g,\end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned}\beta \circ \alpha(k,h) &= \beta(k\sigma(h))\\ &= \left(k\sigma(h)\,\sigma\left(\phi\left([k\sigma(h)]^{-1}\right)\right), \phi(k\sigma(h))\right)\\ &= \left(k\sigma(h)\,\sigma\left(\phi\left(\sigma\left(h^{-1}\right)k^{-1}\right)\right), \phi(k)\,\phi(\sigma(h))\right)\\ &= \left(k\sigma(h)\,\sigma\left(\phi\left(\sigma\left(h^{-1}\right)\right)\right)\sigma\left(\phi\left(k^{-1}\right)\right), e_H 1_H(H)\right)\\ &= \left(k\sigma(h)\,\sigma\left(1_H\left(h^{-1}\right)\right)\sigma(e_H), h\right)\\ &= \left(k\sigma(h)\,\sigma\left(h^{-1}\right)e_G, h\right)\\ &= (ke_K, h)\\ &= (k,h),\end{aligned}$$

de aquí se concluye que en efecto β es la inversa de α. Ya que es evidente la continuidad de β, se sigue que α es un isomorfismo topológico. $\square$

Notemos que la Proposición anterior muestra que la sucesión

$$0 \longrightarrow K \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{\phi} H \longrightarrow 0$$

es exacta porque $i(K) = Ker(\phi)$ y se parte porque σ es una inversa por la izquierda para ϕ. Como H es topológicamente isomorfo a G/K, existe un subgrupo H' de G tal que H' es topológicamente isomorfo a G/K. Por esto, existe un subgrupo de G tal que G es topológicamente isomorfo a $K \rtimes_\delta H'$.
Ahora, si existen un subgrupo normal N de G y un subgrupo H de G tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{\phi} H \longrightarrow 0$$

se parte, entonces $N \rtimes_{\delta} H$ es topológicamente isomorfo a G. En virtud de estas elucubraciones basadas en las dos proposiciones anteriores se puede enunciar el siguiente resultado.

Proposición A.24. *Un grupo topológico G es un producto semidirecto o se representa como un producto semidirecto si y sólo si existen subgrupos H y N de G con N normal y una sucesión exacta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook, "i"] & G \arrow[r, shift left, "\phi"] & H \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En tal caso, G es topológicamente isomorfo a $N \rtimes_{\eta} H$ con $\eta_h : N \longrightarrow N$ dado por $\eta_h(n) = \sigma(h^{-1})\, n\sigma(h)$.

Apéndice B

Compleciones de grupos topológicos

En cursos básicos de anaálisis se estudian sucesiones y sucesiones de Cauchy para conocer el comportamiento de algunos subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$, de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$, el plano complejo $\mathbb{C}$ y, en general, de espacios métricos. En el caso de éstos, se muestra que existen espacios métricos en los cuales las sucesiones de Cauchy no necesariamente son convergentes y para ello se desarrolla el concepto de *compleción* de un espacio y se demuestra que dicha estructura contiene de manera densa a un subespacio homeomorfo al espacio original y, además, dicha compleción es única salvo homeomorfismo.

Una generalización usual del concepto de sucesión es el concepto de filtro, el cual nos permitirá construir compleciones de grupos topológicos. Es importante reconocer que no existe una única forma de completar grupos topológicos, como ejemplo tenemos la compleción de Weil, donde se pueden tener conpleción izquierda o compleción derecha, la cuales no necesariamente forman un grupo topológico. Para un estudio detallado de esta construcción y de otras varias a partir de uniformidades remitimos al lector a [15]. Para los fines que perseguimos usaremos una compleción que siempre forma un grupo topológico: la compleción del supremo o compleción de Raĭkov. Para ello, primero definiremos filtros adecuados para su construcción, haremos la construcción y estableceremos resultados importantes acerca de ella.

En este Apéndice se usará la Convención 3.3 respecto a los grupos considerados a menos que se diga lo contrario.

Definición B.1. *Sea G un grupo topológico. Un* ***filtro de Cauchy*** *en G es un filtro $\mathcal{F}$ tal que para cualquier vecindad abierta U de e_G existe un elemento F de $\mathcal{F}$ que satisface $FF^{-1} \subseteq U$ y $F^{-1}F \subseteq U$. G es un* ***grupo completo*** *en el sentido de Raĭkov si cualquier filtro de Cauchy en G es convergente.*

Ya que nos interesa generalizar el concepto de sucesión de Cauchy es de esperar que todo filtro convergente sea de Cauchy. El siguiente resultado da algunas propiedades adicionales.

Proposición B.2. *Sea G un grupo topológico.*

(1) Cualquier filtro convergente es un filtro de Cauchy.

(2) Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, entonces $\mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} | \, F \in \mathcal{F}\}$ es un filtro de Cauchy.

(3) Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son filtros de Cauchy, entonces el filtro producto $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ generado por la base-filtro $\{F_1F_2 | \, F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}$ es un filtro de Cauchy.

Demostración. (1) Supongamos que $\mathfrak{F}$ es un filtro en G tal que $\mathcal{F} \longrightarrow g$ para algún $g \in G$. Sea $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ Por el Teorema 2.12 (1), existe $V \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Además, como los automorfismos internos son funciones continuas, existe $W \in \mathcal{V}^*(e_G)$ tal que $g^{-1}Wg \subseteq V$ y $gWg^{-1} \subseteq V$. Como $\mathcal{F} \longrightarrow g$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq (gW) \cap (Wg)$. Luego

$$F^{-1}F \subseteq (Wg)^{-1}(Wg) = g^{-1}WWg = \left(g^{-1}Wg\right)\left(g^{-1}Wg\right) \subseteq VV \subseteq U.$$

Análogamente $FF^{-1} \subseteq U$.
(2) Se sigue a partir de la definición de filtro de Cauchy.
(3) Sea $U \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$. Consideremos $V \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que $V^3 \subseteq U$ (Teorema 2.12(1)). Como $\mathcal{F}_1$ es filtro de Cauchy, existe $F_1 \in \mathcal{F}_1$ tal que $F_1F_1^{-1} \subseteq V$. Sea $x \in F_1$. Con un argumento similar al de (1), existe $W \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tal que $xWx^{-1} \subseteq V$. También, como $\mathcal{F}_2$ es filtro de Cauchy, existe $F_2 \in \mathcal{F}_2$ tal que $F_2F_2^{-1} \subseteq W$, luego $xF_2F_2^{-1} \subseteq xWx^{-1} \subseteq V$, y ya que $e_G \in x^{-1}F_1$, entonces

$$\begin{aligned}(F_1F_2)(F_1F_2)^{-1} &= F_1F_2F_2^{-1}F_1^{-1} \subseteq F_1\left(F_1^{-1}x\right)F_2F_2^{-1}\left(x^{-1}F_1\right)F_1^{-1} \\ &\subseteq \left(F_1F_1^{-1}\right)\left(xF_2F_2^{-1}x^{-1}\right)\left(F_1F_1^{-1}\right) \subseteq VVV \subseteq U.\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que existen $F_1' \in \mathcal{F}_1$ y $F_2' \in \mathcal{F}_2$ tales que

$$(F_1'F_2')^{-1}(F_1'F_2') \subseteq U.$$

Si tomamos $F = (F_1 \cap F_1') (F_2 \cap F_2')$, entonces $FF^{-1} \subseteq U$ y $F^{-1}F \subseteq U$. Esto concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado muestra que la completez se comporta como la compacidad con respecto a subgrupos cerrados.

Proposición B.3. *Sea G un grupo topológico completo. Un subgrupo H de G es completo si y sólo si H es cerrado en G.*

Demostración. (a) Supongamos que H es subgrupo completo y sea $y \in cl_G(H)$. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ en G tal que $\mathcal{F} \longrightarrow g$. Por la Proposición B.2(1) se tiene que $\mathcal{F}$ es de Cauchy en G. Luego, la restricción $\mathcal{F}|_H = \{F \subseteq H |\, F \in \mathcal{F}\}$ es un filtro de Cauchy. Ya que H es completo, existe $h \in H$ tal que $\mathcal{F}|_H \longrightarrow h$, es decir, $\mathcal{F} \longrightarrow h$. Como G es T_2, entonces $h = g$. Por lo tanto, $g \in H$.
(b) Supongamos que H es cerrado en G y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en H. Sea $\mathcal{F}'$ el filtro en G generado por $\mathcal{F}$. Si $U \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$, entonces $U \cap H \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$, por lo cual existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FF^{-1} \subseteq U \cap H$ y $F^{-1}F \subseteq U \cap H$. Como $F \in \mathcal{F}'$, entonces $FF^{-1} \subseteq U$ y $F^{-1}F \subseteq U$, por lo cual $\mathcal{F}'$ es un filtro de Cauchy en G. Como G es completo, entonces existe $g \in G$ tal que $\mathcal{F}' \longrightarrow g$. Ya que H es cerrado, $g \in H$ y, por tanto, $\mathcal{F} \longrightarrow g$. $\square$

Tal como ocurre con los g-filtros y los og-filtros, los filtros de Cauchy se comportan bien respecto a los homomorfismos continuos.

Proposición B.4. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en G, entonces $f(G)$ es un filtro de Cauchy en H.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}_H^\circ(e_H)$. Como f es continua se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_G^\circ(e_G)$, por lo cual existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FF^{-1} \subseteq f^{-1}(U)$ y $F^{-1}F \subseteq f^{-1}(U)$. Por lo tanto, $f(F) f(F)^{-1} \subseteq U$ y $f(F)^{-1} f(F) \subseteq U$ como se deseaba. $\square$

Corolario B.5. *La completez es una propiedad productiva.*

Demostración. Sean $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de grupos topológicos completos, $G = \prod_{\alpha\in I} G_\alpha$, y para cada $\alpha \in I$ consideremos la proyección canónica $\pi_\alpha : G \longrightarrow G_\alpha$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en G, entonces para cada $\alpha \in I$ se cumple que $\pi_\alpha(\mathcal{F})$ es un filtro de Cauchy en G_α (Proposición B.4). Luego, existe $g_\alpha \in G_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(\mathcal{F}) \longrightarrow g_\alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{F} \longrightarrow (g_\alpha)_{\alpha\in I}$. $\square$

El siguiente resultado muestra una propiedad importante acerca de grupos completos.

Proposición B.6. *Sean G un grupo topológico, D un subgrupo denso de G y H un grupo topológico completo. Cada homomorfismo continuo $f : D \longrightarrow L$ se extiende de forma única a un homomorfismo continuo $\overline{f} : G \longrightarrow H$.*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{f}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Demostración. Primero se mostrará la existencia del homomorfismo $\overline{f}$. Ahora, si $g \in G$, entonces existe un filtro $\mathcal{F}_g$ tal que $\mathcal{F}_g \longrightarrow g$ y $D \in \mathcal{F}_g$. Por la Proposición B.2(1) se tiene que cada $\mathcal{F}_g$ es un filtro de Cauchy en G, y por lo tanto también lo es su restricción $\mathcal{F}|_D = \{F \subseteq D |\, F \in \mathcal{F}\}$. Ahora, por la Proposición B.4, se obtiene que $f(\mathcal{F}|_D)$ es un filtro de Cauchy en H, y como H es completo, entonces existe $\overline{f}(g)$ tal que $f(\mathcal{F}|_D) \longrightarrow \overline{f}(g)$. Si $\mathcal{F}'$ es otro filtro tal que $\mathcal{F}' \longrightarrow g$ y $D \in \mathcal{F}'|_D$, entonces $\mathcal{F}'|_D (\mathcal{F}|_D)^{-1} \longrightarrow e_G$ en D. De lo anterior se obtiene que $f(\mathcal{F}'|_D) f(\mathcal{F}|_D)^{-1} = f\left(\mathcal{F}'|_D (\mathcal{F}|_D)^{-1}\right) \longrightarrow e_H$ por la continuidad de f. Por lo tanto, $\overline{f}(g)$ es independiente de la elección del filtro. Así, $\overline{f} : G \longrightarrow H$ está bien definida.
A continuación mostraremos que $\overline{f}$ es homomorfismo de grupos. Si $g_1, g_2 \in G$, consideremos filtros $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tales que $\mathcal{F}_1 \longrightarrow g_1$, $\mathcal{F}_2 \longrightarrow g_2$, $D \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, luego, como $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2^{-1} \longrightarrow g_1 g_2^{-1}$ y $D \in \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2^{-1}$, se sigue que $\overline{f}\left(g_1 g_2^{-1}\right) = \overline{f}(g_1)\, \overline{f}(g_2)^{-1}$.
Veamos que $\overline{f}$ es continua. Sea $U \in \mathcal{V}_H^{\circ}(e_H)$. Consideremos $W \in \mathcal{V}_H^{\circ}(e_H)$ tal que $cl_H(W) \subseteq U$. Como f es continua en D, existe $V \in \mathcal{V}_G^{\circ}(e_G)$ con $f(V \cap D) \subseteq W$, y por ello $V \subseteq cl_G(V \cap D)$. Así, si $x \in V$, existe un filtro $\mathcal{F}$ en G tal que $\mathcal{F} \longrightarrow x$ y $V \cap D \in \mathcal{F}$, de donde $\overline{f}(x) \in cl_H(f(V \cap D)) \subseteq cl_H(W) \subseteq U$. Esto prueba que $\overline{f}(V) \subseteq U$. Por el Teorema 2.27(2) se obtiene que $\overline{f}$ es continua.
Finalmente, si $h : G \longrightarrow H$ es otro homomorfismo continuo tal que $h|_D = f$ entonces $\overline{f}|_D = h|_D$ y por la densidad de D se obtiene que $h = \overline{f}$. Esto muestra la unicidad deseada. $\square$

Una construcción usual de la compleción de un espacio métrico es mediante la formación de un espacio de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy y en esa idea se basará la construcción a realizar, por ello el siguiente resultado será útil para hacer elecciones de clases de equivalencia.

Lema B.7. *Sean G un grupo topológico y $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en G. Se cumple que el filtro $\mathcal{F}_{mín}$ generado por $\{WFW | W \in \mathcal{V}^\circ(e_G)\}$ es un filtro de Cauchy minimal, es decir, si $\mathcal{H}$ es un filtro de Cauchy tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}_{mín} \subseteq \mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{E}$ el filtro generado por la base-filtro $\mathcal{V}^\circ(e_G)$. Como $\mathcal{E} \longrightarrow e_G$, por la Proposición B.2(1) se sigue que $\mathcal{E}$ es un filtro de Cauchy. Ahora, por el inciso (3) de la Proposición B.2, $\mathcal{EFE}$ es un filtro de Cauchy y cumple que $\mathcal{F}_{mín} \subseteq \mathcal{EFE}$. Por otro lado, si $X \in \mathcal{EFE}$, entonces existen $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ y $F \in \mathcal{F}$ tal que $E_1 F E_2 \subseteq X$, y como $\mathcal{E}$ es generado por $\mathcal{V}^\circ(e_G)$, entonces existen $U_1, U_2 \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tales que $U_1 \subseteq E_1$ y $U_2 \subseteq E_2$, por lo cual $W = U_1 \cap U_2$ satisface $WFW \subseteq E_1 F E_2 \subseteq X$, es decir, $X \in \mathcal{F}_{mín}$. Por tanto, $\mathcal{F}_{mín} = \mathcal{EFE}$.
Resta mostrar que $\mathcal{F}_{mín}$ es minimal. Sea $\mathcal{H}$ un filtro de Cauchy tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ y consideremos $WFW \in \mathcal{F}_{mín}$ donde $W \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ y $F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{H}$ es un filtro de Cauchy, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H^{-1}H \subseteq W$. Ya que $F, H \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, e sigue que $F \cap H \neq \varnothing$, así, sea $h \in F \cap H$. Es claro que $h^{-1}H \subseteq W$, por lo cual $H \subseteq hW \subseteq FW \subseteq WFW$, de donde se obtiene que $WFW \in \mathcal{H}$. Esto muestra que $\mathcal{F}_{mín} \subseteq H$. $\square$

al igual que ocurre en el caso de espacios métricos, una **compleción** de un grupo topológico G es un grupo topológico $\widetilde{G}$ completo y tal que existe un subgrupo H de $\widetilde{G}$ denso e isomorfo topológicamente a G.

Proposición B.8. *Cualquier grupo topológico admite una compleción que es única salvo isomorfismo topológico.*

Demostración. Sea G un grupo topológico y consideremos $\widetilde{G}$ el conjunto de todos los filtros de Cauchy minimales, es decir, si $\mathcal{F} \in \widetilde{G}$, entonces $\mathcal{F}_{mín} = \mathcal{F}$ (con la notación del Lema B.7). Se mostrará que $\widetilde{G}$ es un grupo con las operaciones definidas en la Proposición B.2.
Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \widetilde{G}$. Por la Proposición B.2 se obtiene que $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2^{-1}$ es un filtro de Cauchy, por lo cual resta ver que es minimal. Sean $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$, entonces existen $F_1' \in \mathcal{F}_1$ y $W_1 \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ tales que $W_1 F_1' W_1 \subseteq F_1$ porque $\mathcal{F}_1$ es minimal y, de manera análoga, existen $W_2 \in \mathcal{V}^\circ(e_G)$ y $F_2' \in \mathcal{F}_2$ tales que $W_2 F_2' W_2 \subseteq F_2$. Ahora, para $W = W_1 \cap W_2^{-1}$ se satisface $WF_1'W \subseteq F_1$ y $W(F_2')^{-1}W \subseteq F_2^{-1}$, de donde se implica

$$WF_1'(F_2')^{-1}W \subseteq WF_1'WW(F_2')^{-1}W \subseteq F_1F_2^{-1},$$

y por lo tanto $F_1F_2^{-1} \in \widetilde{G}$. La asociatividad de la multiplicación se sigue de la asociatividad de la multiplicación en G. El elemento identidad de $\widetilde{G}$ es el filtro $\mathcal{E}$ generado por $\mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ (ver Lema B.7) puesto que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ para cualquier filtro $\mathcal{F}$, en particular, para $\mathcal{F} \in \widetilde{G}$, se tiene que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{E}$ por la minimalidad de $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ y el hecho de contener a $\mathcal{E}$. En conclusión, $\widetilde{G}$ es un grupo.
A continuación se construirá una topología de grupo para $\widetilde{G}$. Sea $\widetilde{\mathcal{B}_0} = \{\widetilde{U} | U \in \mathcal{V}^{*}(e_G)\}$ con $\widetilde{U} = \{\mathcal{F} \in \widetilde{G} | U \in \mathcal{F}\}$. Se probará que $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ cumple las condiciones del Teorema 2.23:

(B1) Se cumple a partir de la definición de $\widetilde{\mathcal{B}_0}$.

(B2) Si $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$, lo cual implica que $\left(\widetilde{V}\right)^2 \subseteq \widetilde{U}$,

(B3) Sean $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$ y $\mathcal{F} \in \widetilde{G}$. Como $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{E}\mathcal{F} = \mathcal{E}$ y $U \in \mathcal{E}$, existen $W \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $F^{-1}WF \subseteq U$, luego, para $V = W \cap W^{-1}$ se cumple que $F^{-1}VF \cap U$ y V es simétrica. De lo anterior se sigue que $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$ y $\mathcal{F}^{-1}\widetilde{V}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

(B4) Sean $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$ y $\mathcal{F} \in \widetilde{U}$. Entonces $U \in \mathcal{F}$ y, por la minimalidad de $\mathcal{F}$, existen $F \in \mathcal{F}$ y $W \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tales que $WFW \subseteq U$. Si $V = W \cap W^{-1}$, se obtiene que $VF \subseteq U$ con V simétrica. Por lo tanto, $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$ y $\widetilde{V}\mathcal{F} \subseteq \widetilde{U}$.

(B5) Si $\widetilde{U_1}, \widetilde{U_2} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$ son tales que $U_1, U_2 \in \mathcal{V}^{*}(e_G)$, entonces $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}^{*}(e_G)$, y además $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2}$.

Ahora se mostrará que la topología $\mathcal{T}$ generada por $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ es de Hausdorff. Si $\mathcal{F} \in \widetilde{G} \setminus \{\mathcal{E}\}$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \notin \mathcal{F}$. Ya que $\mathcal{E}$ es generado por $\mathcal{V}^{\circ}(e_G)$, existe $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que $U \subseteq E$. Luego, $V = U \cap U^{-1} \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ es simétrica y cumple $V \subseteq E$ y $V \notin \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \notin \widetilde{V}$ y $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$. Por lo tanto, $\cap\widetilde{\mathcal{B}_0} = \{\mathcal{E}\}$. En virtud del Teorema 2.23 se concluye que $\mathcal{T}$ es de Hausdorff.
Sea $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ el homomorfismo definido por $i(x) = \mathcal{E}x$. Si $i(g) = \mathcal{E}$, entonces $g \in E$ para cualquier $E \in \mathcal{E}$, en particular, $g \in U$ para cualquier $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$, es decir, $g = e_G$ porque G es de Hausdorff. Así, $Ker(i) = \{e_G\}$, esto es, i es inyectiva. Como $i^{-1}\left(\widetilde{U}\right) = U$ para cada $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$, se tiene que i es continua y abierta en e_G, y en virtud del Teorema 2.27 se tiene que

i es continua y abierta. Por lo tanto, i es un encaje. Se afirma que $i\left(G\right)$ es denso en $\widetilde{G}$. Si $\mathcal{F}\in\widetilde{G}$ y $\widetilde{U}\in\widetilde{\mathcal{B}_0}$, entonces existe $F\in\mathcal{F}$ tal que $FF^{-1}\subseteq U$ porque $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en G. Para $x\in\mathcal{F}$ fijo se cumple que $xF^{-1}\subseteq U$, de donde $U\in x\mathcal{F}^{-1}$. Así, $x\mathcal{F}^{-1}\in\widetilde{U}$ y por ello $\mathcal{E}x\mathcal{F}^{-1}\in\widetilde{U}$. Luego, $\mathcal{E}x=i\left(x\right)\in\widetilde{U}\mathcal{F}$, lo cual muestra la densidad deseada.
Veamos que $\widetilde{G}$ es grupo topológico completo. Sea $\mathcal{H}$ un filtro de Cauchy en $\widetilde{G}$. Por el Lema B.7, $\mathcal{H}$ contiene un filtro de Cauchy $\mathcal{H}_{mín}$ minimal en $\widetilde{G}$. Basta mostrar que $\mathcal{H}_{mín}$ converge, por lo cual, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{mín}$. Consideremos $\mathcal{F}=\left\{i^{-1}\left(H\right)\,|\,H\in\mathcal{H}\right\}$. Se afirma que:

(a) $\mathcal{F}\in\mathcal{H}$.

(b) $\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{F}$.

(a) Sea $H\in\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es filtro de Cauchy minimal, existen $W\in\mathcal{V}^{\circ}\left(e_{\widetilde{G}}\right)$ y $H'\in\mathcal{H}$ tales que $WH'W\subseteq H$. Ya que $i\left(G\right)$ es denso en $\widetilde{G}$ y $WH'W$ es abierto en $\widetilde{G}$, se obtiene que $H\cap i\left(G\right)\neq\varnothing$. Luego, $i^{-1}\left(H\right)\neq\varnothing$ para cada $H\in\mathcal{H}$, es decir, $\varnothing\notin\mathcal{F}$. Puesto que $\mathcal{H}$ es un filtro y las intersecciones y uniones son preservadas por preimágenes, se obtiene que $\mathcal{F}$ es un filtro. Además, si $U\in\mathcal{V}^{\circ}\left(e_G\right)$, entonces existe $H\in\mathcal{H}$ tal que $HH^{-1}\subseteq\widetilde{U}$ y $H^{-1}H\subseteq\widetilde{U}$ porque $\mathcal{H}$ es filtro de Cauchy, y de esto se sigue que $i^{-1}\left(H\right)\left(i^{-1}\left(H\right)\right)^{-1}\subseteq U$ y $\left(i^{-1}\left(H\right)\right)^{-1}i^{-1}\left(H\right)\subseteq U$, por lo cual $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en G. También, como $\mathcal{H}$ es minimal, para cualquier $H\in\mathcal{H}$ existen $H'\in\mathcal{H}$ y $W\in\mathcal{V}^{\circ}\left(e_{\widetilde{G}}\right)$ tales que $WH'W\subseteq H$, de donde, $i^{-1}\left(W\right)i^{-1}\left(H'\right)i^{-1}\left(W\right)\subseteq i^{-1}\left(H\right)$, y como i es continua, entonces $i^{-1}\left(W\right)\in\mathcal{V}^{\circ}\left(e_G\right)$, y así, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy minimal en G.
(b) Sea $\widetilde{U}\in\widetilde{\mathcal{B}_0}$. Tenemos que existe $\widetilde{V}\in\widetilde{\mathcal{B}_0}$ tal que $\left(\widetilde{V}\right)^2\subseteq\widetilde{U}$. Como $\mathcal{H}$ es un filtro de Cauchy en $\widetilde{G}$, existe $H\in\mathcal{H}$ tal que $HH^{-1}\subseteq\widetilde{V}$, de donde se sigue que $i^{-1}\left(H\right)\left(i^{-1}\left(H\right)\right)^{-1}\subseteq V$. Si $x\in i^{-1}\left(H\right)$ fijo, entonces $x\left(i^{-1}\left(H\right)\right)^{-1}\subseteq V$, de donde $V\in x\mathcal{F}^{-1}$ y por ello $x\mathcal{F}^{-1}\in\widetilde{V}$ y $i\left(x\right)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{E}x\mathcal{F}^{-1}\in\widetilde{V}$. Además, como $i\left(x\right)\in H$, se obtiene que $Hi\left(x\right)^{-1}\subseteq\widetilde{V}$. Luego,

$$H\mathcal{F}^{-1}=\left(Hi\left(x\right)^{-1}\right)\left(i\left(x\right)\mathcal{F}^{-1}\right)\subseteq\widetilde{V}\widetilde{V}\subseteq\widetilde{U},$$

es decir, $H\subseteq\widetilde{U}\mathcal{F}$. Por lo tanto, para cualquier $\widetilde{U}\in\widetilde{\mathcal{B}_0}$ existe $H\in\mathcal{H}$ tal que $H\subseteq H\subseteq\widetilde{U}\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{F}$.

Finalmente, mostraremos la unicidad de la compleción de G. Sea H otra compleción de G. Por la Proposición B.6 se tiene que el encaje $j : G \longrightarrow H$ se extiende a un homomorfismo continuo $\overline{j} : \widetilde{G} \longrightarrow H$ porque $i(G)$ es denso en $\widetilde{G}$. Análogamente, el homomorfismo $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ se extiende a un homomorfismo continuo $\overline{i} : H \longrightarrow \widetilde{G}$. Como $\overline{i} \circ \overline{j} : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}$ restringido a $i(G)$ coincide con la identidad y $i(G)$ es denso en $\widetilde{G}$, entonces $\overline{i} \circ \overline{j} = 1_{\widetilde{G}}$. De manera similar se observa que $\overline{j} \circ \overline{i} = 1_H$. Por lo tanto, $\widetilde{G}$ es topológicamente isomorfo a H. Esto concluye la prueba. $\square$

Es de esperar que el tomar bases en un grupo topológico permita generar bases de su compleción.

Corolario B.9. *Si $\mathcal{B}_0'$ es una base para el elemento identidad de un grupo topológico G, entonces $\widetilde{\mathcal{B}_0'} = \{\widetilde{B} \mid B \in \mathcal{B}_0'\}$ es una base para el elemento identidad de la compleción $\widetilde{G}$.*

Demostración. Si $W \in \mathcal{V}^\circ\left(e_{\widetilde{G}}\right)$, entonces existe $U \in \mathcal{V}^*(e_G)$ tal que $\widetilde{U} \subseteq W$ porque $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ es una base para la identidad en $\widetilde{G}$ (con la notación de la Proposición B.8). Ya que $\mathcal{B}_0'$ es una base para la identidad en G, existe $B \in \mathcal{B}_0'$ tal que $B \subseteq U$. Por lo tanto, $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}_0'}$ y $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{U} \subseteq U$. $\square$

A continuacií observamos que la compleción se porta bien respecto a cerrados y productos.

Corolario B.10. *(1) Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo de G, entonces $\widetilde{H} = cl_{\widetilde{G}}(H)$.*

(2) Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de grupos topológicos, entonces $\widetilde{\prod_{\alpha \in I} G_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \widetilde{G_\alpha}$.

Demostración. (1) Por la Proposición B.3 se obtiene que $cl_{\widetilde{G}}(H)$ es completo porque es subgrupo cerrado de $\widetilde{G}$. Como H es denso en $cl_{\widetilde{G}}(H)$, se tiene el resultado deseado.
(2) Tenemos que $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es subgrupo denso en $\prod_{\alpha \in I} \widetilde{G_\alpha}$. Como por el Corolario B.5 se tiene que $\prod_{\alpha \in I} \widetilde{G_\alpha}$ es completo, entonces se obtiene la conclusión deseada. $\square$

Un grupo topológico G con la propiedad de ser cerrado en cualquier grupo que lo contiene como subgrupo se llama **absolutamente cerrado**. El siguiente resultado muestra que esta condición es equivalente a la completez.

Corolario B.11. *Un grupo topológico G es completo si y sólo si es absolutamente cerrado.*

Demostración. (a) Supongamos que G es completo y que está contenido como un subgrupo en el grupo H. Entonces G es un subgrupo del grupo completo $\widetilde{H}$ (la compleción de H), luego, por la Proposición B.3, G es cerrado en $\widetilde{H}$. En particular, $G = G \cap H$ es cerrado en H.
(b) Si G es absolutamente cerrado, como G es denso y cerrado en su compleción $\widetilde{G}$, luego, $G = \widetilde{G}$. $\square$

El siguiente resultado brinda una clase de grupos completos, es decir, muestra que existen grupos completos.

Corolario B.12. *Cualquier grupo topológico localmente compacto es completo. En particular, cualquier grupo discreto y cualquier grupo compacto es completo.*

Demostración. Sean G un grupo topológico localmente compacto y $\widetilde{G}$ su compleción. Sea $U \in \mathcal{V}^{\circ}(e_G)$ tal que $cl_G(U)$ es compacto y consideremos $V = U \cap U^{-1}$. Así $K = cl_G(V)$ es compacto, y entonces K es cerrado en $\widetilde{G}$ y $cl_{\widetilde{G}}(U) = K \subseteq G$. Por su forma, existe $W \in \mathcal{V}^{*}\left(e_{\widetilde{G}}\right)$ tal que $V = W \cap G$. Sea $x \in \widetilde{G}$. Como G es denso en $\widetilde{G}$, existe $g \in Wx \cap G$, y por la simetría de W se obtiene que $x \in Wg$. Observemos que por la densidad de G se sigue que $cl_{\widetilde{G}}(Wg) = cl_{\widetilde{G}}(Wg \cap G) = cl_{\widetilde{G}}(Ug)$.
Ya que la traslación derecha ϕ_g es un homeomorfismo (Teorema 2.7(1)), se verifica que $cl_{\widetilde{G}}(Ug) = \left(cl_{\widetilde{G}}(U)\right) g = Kg$. Por ello

$$x \in Wg \subseteq cl_{\widetilde{G}}(Wg) = Kg \subseteq Gg = G.$$

Por lo tanto, $G = \widetilde{G}$. $\square$

A partir del Corolario anterior los siguientes hechos son inmediatos.

Corolario B.13. *Un grupo topológico G es precompacto si y sólo si su compleción $\widetilde{G}$ es compacta.*

Demostración. Si G es precompacto, entonces G es precompacto en $\widetilde{G}$. Como $cl_{\widetilde{G}}(G) = \widetilde{G}$, se obtiene que $\widetilde{G}$ es compacto por ser la cerradura de un precompacto. Y si $\widetilde{G}$ es compacto, como $cl_{\widetilde{G}}(G) = \widetilde{G}$, se obtiene que G es precompacto. □

Corolario B.14. *Un grupo topológico G es compacto si y sólo si es completo y precompacto.*

Demostración. Si G es compacto, entonces es precompacto y es cerrado en cualquier espacio de Hausdorff que lo contiene como subespacio, en particular, es cerrado en cualquier grupo que lo contiene como subgrupo, es decir, es absolutamente cerrado y en virtud del Corolario B.11 se obtiene que G es completo.
El recíproco se cumple en virtud del Corolario B.13 porque $\widetilde{G} = G$ ya que G es completo. □

Finalmente, veamos que la completez tiene la propiedad de los tres espacios.

Proposición B.15. *Sea G un grupo topológico. Si N es un subgrupo normal de G y N y G/N son grupos completos, entonces G es completo.*

Demostración. Sea $\widetilde{G}$ la compleción de G. Por el Corolario B.11, como N es completo y es subgrupo de $\widetilde{G}$, entonces N es cerrado en $\widetilde{G}$. Notemos que la inclusión $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ induce un homomorfismo inyectivo continuo $i_N : G/N \longrightarrow \widetilde{G}/N$ con imagen densa en $\widetilde{G}/N$. Como $N \subseteq G$ se sigue que $(NU) \cap G = N(U \cap G)$ para cualquier $U \in \mathcal{V}^{\circ}\left(e_{\widetilde{G}}\right)$ y, por lo tanto, i_N es abierta sobre su imagen (Teorema 2.27(1)). Por lo tanto, el cociente G/N es denso en $\widetilde{G}/N$. En virtud del Corolario B.11 se obtiene que G/N es cerrado en $\widetilde{G}/N$ porque G/N es completo. Así, $G/N = \widetilde{G}/N$, es decir, $G = \widetilde{G}$. Esto concluye la prueba. □

Apéndice C

Condiciones de finitud sobre grupos

En este apéndice estudiaremos dos condiciones de finitud sobre grupos. La primera es la finitud de los subgrupos finitamente generados, condición que permite definir los grupos localmente finitos. Por otro lado, se estudia la finitud de las clases de conjugación y da origen a los llamados FC-grupos, los cuales son la contraparte algebraica de los $\overline{FC}$-grupos y por ello tienen un comportamiento similar. Como veremos, estas clases de grupos poseen propiedades interesantes respecto a su operación de grupo, subgrupos y productos directos, así como su relación hacia extensiones.

C.1. Grupos localmente finitos

Iniciaremos la exposición con el concepto que da título a esta sección.

Definición C.1. *Sea G un grupo. G es un* ***grupo localmente finito*** *si cada subgrupo finitamente generado es finito.*

Observemos que a partir de la Definición anterior se obtiene que un grupo localmente finito es un grupo de torsión. También es inmediato el siguiente resultado.

Proposición C.2. *(1) Si G es un grupo localmente finito, entonces cualquier subgrupo de G es localmente finito.*

(2) Si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo con G un grupo localmente finito, entonces $f(G)$ es un grupo localmente finito.

Ahora mostraremos que la clase de grupos localmente finitos es cerrada bajo extensiones.

Proposición C.3. *[Schmidt] Sea G un grupo. Si N es subgrupo normal de G y N y G/N son grupos localmente finitos, entonces G es un grupo localmente finito.*

Demostración. Sea H un subgrupo finitamente generado de G. Observemos que $H/(H \cap N)$ es isomorfo a $(HN)/N$, el cual es finito por ser subgrupo de G/N. Ahora, por **1.6.11** de [14] se obtiene que $H \cap N$ es finitamente generado, por lo cual es finito. Se concluye que H es finito. $\square$

A continuación haremos una revisión rápida al concepto de p-subgrupos en el marco de grupos localmente finitos. Primero, recordemos que dado un número primo p, un grupo finito es un p-grupo si su orden es una potencia de p y que dado un grupo finito G, un p-subgrupo de Sylow de G es un p-subgrupo de orden p^α, donde $|G| = p^\alpha m$ y $mcd(p, m) = 1$. Ahora, generalicemos este concepto.

Definición C.4. *Sean G un grupo (no necesariamente finito) y p un número primo. Un subgrupo H de G es un* ***p-subgrupo de Sylow*** *si es un p-subgrupo maximal.*

La Definición anterior es correcta, además, por el Lema de Zorn se cumple que cualquier p-subgrupo está contenido en p-subgrupo de Sylow, lo cual implica, en particular, la existencia de los p-subgrupos de Sylow. También, a partir del Teorema de Sylow, cuando G es finito se obtiene que un p-subgrupo maximal de G tiene orden igual a la mayor potencia de p que divide a $|G|$, lo cual muestra que esta generalización conserva la definición para el caso finito.

A partir del párrafo anterior se podría esperar un comportamiento similar de los p-subgrupos de Sylow para el caso infinito, pero no es así, de hecho se presentan situaciones como la existencia de p-subgrupos no isomorfos. El lector interesado en estudiar un poco más cuál es el comportamiento de esta clase de subgrupos puede consultar [14, 14.3]. Para nuestro interés basta el siguiente resultado acerca de p-subgrupos de Sylow en grupos localmente finitos.

Proposición C.5. *Sea G un grupo localmente finito. Si P un p-subgrupo de Sylow de G finito, entonces todos los p-subgrupos de Sylow de G son finitos y conjugados.*

Demostración. Sea P_1 un p-subgrupo de Sylow de G. Tenemos que $H = \langle P, P_1 \rangle$ es finito porque G es localmente finito. Como P es p-subgrupo de Sylow de H, se sigue por el Teorema de Sylow que P_1 está contenido en algún conjugado de P. En particular, $|P_1| \leq |P|$ y ningún p-subgrupo de G puede tener orden mayor que $|P|$. De lo anterior se concluye que cualquier p-subgrupo de Sylow es finito y cualesquiera dos p-subgrupos de Sylow son conjugados con P. □

Para continuar establecemos el cuestionamiento: ¿cualquier grupo infinito tiene algún subgrupo infinito abeliano? La respuesta es positiva en el caso de grupos con un elemento de orden infinito, por lo cual se puede restringir al caso de los grupos de torsión. Aunque no es fácil obtener una respuesta, en general es negativa, por lo cual es interesante saber en qué clases de grupos se tiene una respuesta afirmativa. Más adelante se mostrará que en la clase de grupos localmente finitos la respuesta es afirmativa; para la prueba se requiere el siguiente resultado técnico.

Proposición C.6. *[Šunkov] Sea G un grupo de torsión e infinito. Si G tiene una involución i, es decir, $i^2 = e_G$, tal que su centralizador $Z_G(i)$ es finito, entonces el centro de G $(Z(G))$ contiene una involución o G tiene un subgrupo propio infinito con centro no trivial. En ambos casos existe un elemento no trivial con centralizador infinito.*

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que la conclusión de la Proposición es falsa.
Recordemos que el centralizador de un elemento $g \in G$ es $Z_G(g) = \{x \in G | gx = xg\}$, y si $x, g \in G$, denotemos $x^g = g^{-1}xg$ para simplificar la escritura. También, a los elementos $g \in G$ tales que $g^i = g^{-1}$ los llamaremos i-elementos. Ahora, la prueba se hará en cinco pasos.
(**i**) Existen una infinidad de i-elementos.
En primer lugar observemos que la clase de conjugación $C_G(i)$ es infinita porque el índice $|G : Z_G(i)|$ es infinito. Así, G contiene una infinidad de involuciones. Ahora, ya que $Z_G(i)$ es finito, entonces existe una infinidad de clases laterales de la forma $Z_G(i)\, a$ con a una involución. Observemos que

$$\left(aa^i\right)^i = i^{-1}\left(ai^{-1}ai\right)i = i^{-1}aia = a^i a = \left(aa^i\right)^{-1},$$

es decir, aa^i es un i-elemento. También, si $aa^i = bb^i$, entonces los elementos a y b son involuciones, por lo cual, $ab \in Z_G(i)$, así que $Z_G(i)\,a = Z_G(i)\,b$. De lo dicho antes se obtiene que involuciones pertenecientes a diferentes clases laterales generan una infinidad de i-elementos.
(**ii**) G contiene solamente una cantidad finita de elementos de orden par.
Supongamos que $X = \{x_r | \, r \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito de elementos de orden par de G. Tenemos que para cada $r \in \mathbb{N}$ existe un entero positivo m_r tal que $x_r^{m_r}$ es una involución, por lo cual, para cada $r \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_r^{m_r} \in Z_G(i)$. Pero sólo una cantidad finita de los $x_r^{m_r}$ son distintos, así que para algún r se tiene que la involución $x_r^{m_r}$ es centralizada por una infinidad de x_s. Esto contradice la hipótesis de falsedad de la Proposición.
Elijamos un i-elemento $a \neq i$ de orden impar y sea $k = ia$. Notemos que $k^2 = iaia = i^2 a^i a = e_G$, y como $a \neq i$, k es una involución.
(**iii**) Existe una infinidad de i-elementos b no triviales de orden impar tales que $u = ik^b$ es un i-elemento de orden impar. Denotemos por S a dicho conjunto.
Notemos que si $u = ik^b$, entonces u es un i-elemento porque $u^i = k^b i = u^{-1}$. Por otro lado, ya que la Proposición es falsa, $Z_G(k)$ es finito con k una involución. Luego, si b varía sobre las clases laterales módulo $Z_G(k)$, entonces obtenemos una infinidad de elementos de la forma $u = ik^b$, de los cuales, por (ii), un número finito de ellos es de orden par.
Observemos que el grupo $\langle i, k\rangle$ es un grupo diédrico en el cual $a = ik$ es un elemento de orden impar. Entonces, $\langle i\rangle$ y $\langle k\rangle$ son conjugados porque son 2-subgrupos de Sylow de $\langle i, k\rangle$. De aquí se sigue que existe $a_1 \in \langle a\rangle$ tal que $i = k^{a_1}$.
(**iv**) Para cada $b \in S$ existe $h \in Z_G(k)$ tal que la involución $j = bi$ cumple que $(ha_1)^j = a_1^{-1} h^{-1}$.
Sea $u = ik^b$ como en (iii). Ya que u tiene orden impar, i y k^b son conjugados en $\langle i, k^b\rangle$, por lo tanto, existe $u_1 \in \langle u\rangle$ tal que $i = \left(b^k\right)^{u_1}$. Así, tenemos que $k^{bu_1} = i = k^{a_1}$, lo cual implica que $h = bu_1 a_1^{-1} \in Z_G(k)$. Observemos que $j = bi$ es una involución porque $b^i = b^{-1}$. Además,

$$j^{-1}(ha_1)\,j = bibu_1bi = bb^iu_1^ib^i = bb^{-1}u_1^{-1}b^{-1} = u_1^{-1}b^{-1} = (ha_1)^{-1},$$

lo cual prueba (iv).
(**v**) Conclusión. Por (iv) y la finitud de $Z_G(k)$ se sigue que existe un subconjunto infinito T de S y un elemento $h \in Z_G(k)$ tales que $j = bi$ conjuga a $c = ha_1$ a su inverso para cada $b \in T$. Si $b, b' \in T$, entonces $c^{bi} = c^{-1} = c^{b'i}$,

así que $c^b = c^{b'}$ y $b\,(b')^{-1} \in Z_G\,(c)$. Como T es infinito se obtiene que $Z_G\,(c)$ es infinito.
Supongamos que $c \in Z\,(G)$. Ya que $c = ha_1$ y $h \in Z_G\,(k)$, entonces $a_1 \in Z_G\,(k)$. Luego, $k = k^{a_1} = i$, lo cual implica que $a = e_G$, y esto es una contradicción. Por lo tanto, $c \notin Z\,(G)$ y por ello $Z_G\,(c)$ es un subgrupo propio con centro no trivial. □

Para concluir esta sección presentamos el teorema que responde al cuestionamiento planteado antes. Es importante mencionar que la prueba usa el teorema de Feit y Thompson que establece la solubilidad de los grupos de orden impar, el cual es muy complicado de acuerdo a [14] y se puede encontrar en el artículo *Solvability of groups of odd order* de los autores mencionados. Además, como se menciona en [14], no se conoce una prueba que no use ese teorema complicado.

Proposición C.7. *[P. Hall-Kulatilaka, Kargapolov] Cualquier grupo infinito localmente finito tiene un subgrupo abeliano infinito.*

Demostración. La prueba se hará en ocho pasos. Primero veremos (de (i) a (vii)) que cualquier grupo infinito localmente finito tiene un elemento no trivial con centralizador infinito, y se concluirá en $(viii)$ con el resultado deseado.
La prueba se hará por contradicción. Supongamos que G es un grupo infinito localmente finito tal que cualquier elemento no trivial tiene centralizador finito.
(**i**) Si F es un subgrupo finito no trivial de G, entonces el normalizador $N_G\,(F)$ es finito.
Recordemos que $N_G\,(F) = \{g \in G | g^{-1}Fg = F\}$. Notemos que para $x \in F \setminus \{e_G\}$ se cumple que $Z_G\,(F) \leq Z_G\,(x)$ y $Z_G\,(x)$ es finito. Así, $Z_G\,(F)$ es finito. Como $Z_G\,(F) \leq N_G\,(F)$, se obtiene que $N_G\,(F)$ es finito.
(**ii**) Existe un subgrupo finito F tal que $Z_G\,(F) = \{e_G\}$.
Sea $x \in G \setminus \{e_G\}$. Tenemos que $Z_G\,(x) = \{1, y_1, \ldots, y_n\}$ con $y_i \neq e_G$. Como $Z_G\,(y_i)$ es finito, podemos tomar $z_i \in G$ con $z_i \notin Z_G\,(y_i)$. Como G es localmente finito, $F = \langle x, y_i, z_i | i = 1, \ldots, n\rangle$ es finito. Claramente, $Z_G\,(F) \leq Z_G\,(x)$, pero como y_i y z_i no conmutan, se obtiene que $Z_G\,(F) = \{e_G\}$.
(**iii**) Para cualquier número primo p se cumple que los p-subgrupos de Sylow de G son finitos y conjugados.
Supongamos que P es un p-subgrupo de Sylow infinito. Ya que P es localmente finito y los elementos no triviales de P tienen centralizador finito,

por (ii) existe un subgrupo finito F de P tal que $Z_P(F) = \{e\}$. Como $Z(F) \leq Z_P(F)$, se tiene que $Z(F) = \{e\}$, esto es, $F = \{e\}$. Esto implica que $P = 1$, lo cual es una contradicción. Por la Proposición C.5 se tiene la conjugación de los p-subgrupos de Sylow.

(**iv**) Cualquier cociente propio de G es finito.

Sea N un subgrupo normal de G no trivial. Tenemos que N posee un p-subgrupo de Sylow P para algún número primo p. Ya que todos los p-subgrupos de Sylow de N son conjugados, para cualquier $g \in G$ se cumple que $g^{-1}Pg \leq N$ y $g^{-1}Pg$ es un p-subgrupo de Sylow, luego, por el Teorema de Sylow, $g^{-1}Pg = n^{-1}Pn$ para algún $n \in N$, lo cual implica que $gn^{-1} \in N_G(P)$ y $g \in N_G(P)N$, y por ello $G = N_G(P)N$. Así que $|G : N| = |N_G(P) : N \cap N_G(P)|$, que es finito en virtud de (i) y (iii). Esto prueba lo deseado.

(**v**) G es un grupo localmente soluble (es decir, los subgrupos finitamente generados son solubles) sin elementos de orden 2.

El Teorema de Šunkov (Proposición C.6) muestra que G no contiene una involución. Luego, los subgrupos finitamente generados de G tienen orden impar, y por el Teorema de Feit y Thompson son solubles.

(**vi**) G no es residualmente finito.

Antes de probar este hecho, recordemos que un grupo G es residualmente finito si para cualquier $g \in G \setminus \{e_G\}$ existe un subgrupo normal N de G tal que $g \notin N$ y G/N es finito. La prueba de (v) se hará por contradicción. Supongamos que G es residualmente finito. Notemos que existe un p-subgrupo de Sylow P de G no trivial para algún primo p. Sea $T = \langle Z_G(x) \,|x \in P \setminus \{e\}\rangle$. Puesto que P es finito, entonces T es finito y además, $P \leq T$. La condición de ser residualmente finito implica que existe un subgrupo normal K de G con índice finito en G tal que $K \cap T = \{e\}$, lo cual implica que $K \cap P = \{e\}$. Ya que los p-subgrupos de Sylow son conjugados, se sigue que K no tiene elementos de orden p. Como $K \neq \{e\}$, entonces existen un número primo $q \neq p$ y un q-subgrupo de Sylow Q de K no trivial. Si $N = N_G(Q)$, por un argumento similar al dado en (iv), se obtiene que $G = NK$. Tenemos que $|P|$ divide a $|G : K| = |N : N \cap K|$ porque P es isomorfo a PK/K. Si reemplazamos P por un subgrupo conjugado adecuado (la operación no afecta por la normalidad de K), podemos suponer que $P \leq N$. Por lo tanto, $Q^P = Q$.

A continuación probaremos PQ es un grupo de Frobenius, es decir, PQ tiene un subgrupo H tal que para cualquier $x \in PQ \setminus H$ se cumple que $H \cap H^x = \{e\}$. Sea $x \in P \cap P^y \setminus \{e\}$ con $y \in Q \setminus \{e\}$. Entonces $x = a^y$ para algún $a \in P \setminus \{e\}$, luego $[a, y] = a^{-1}x \in P \cap Q = \{e\}$ porque Q es subgrupo normal de PQ. Así obtenemos que $y \in K \cap Z_G(a) \leq K \cap T = \{e\}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que PQ es un grupo de Frobenius. Además, en virtud de **10.5.6** de [14] se tiene que P es cíclico.

El párrafo anterior muestra que cada subgrupo de Sylow de G es cíclico. Por **10.1.10** se obtiene que los subgrupos finitos de G tienen longitud derivada 2, lo cual genera que G tiene longitud derivada 2. Si G fuera abeliano y $g \in G \setminus \{e\}$, entonces $Z_G(g) = G$ es finito. Como esto es falso, $G' = [G, G] \neq \{e\}$. Ahora, para $g \in G' \setminus \{e\}$ se tiene que $G' \leq Z_G(g)$, esto es, G' es finito. Luego, por (iv) se obtiene que G/G' es finito, lo cual implica que G es finito y esto es una contradicción.

(**vii**) Conclusión. Sea R la intersección de todos los subgrupos normales de G con índice finito. Por lo hecho en (vi) se obtiene que $R \neq \{e\}$, de donde G/R es finito por lo mostrado en (iv). Sea N un subgrupo normal no trivial de R. Tenemos que R es un grupo localmente finito con la propiedad de centralizadores finitos como G, así que (v) muestra que R/N es finito. Luego, $|G : N|$ es finito, por lo cual la unión de los subgrupos normales de G contenidos en N tiene índice finito en G. Ya que dicha unión contiene a R, se sigue que $N = R$, por lo cual R es un grupo simple. Puesto que G es localmente soluble, también R es localmente soluble. Un teorema de Mal'cev establece que cualquier grupo localmente soluble tiene orden primo (ver **12.5.2** de [14]), por lo cual R es de orden primo. De lo anterior se deduce que G es finito, esto es una contradicción. Por lo tanto, G tiene un elemento no trivial con centralizador infinito.

(**viii**) Es suficiente probar que cualquier grupo infinito localmente finito tiene un elemento no trivial con centralizador infinito.

Supongamos que G es un grupo infinito localmente finito para el cual existe un elemento no trivial con centralizador infinito. Elijamos un subgrupo abeliano A_1 con centralizador infinito C_1 en G, por ejemplo, $A_1 = \{e_G\}$. Así, A_1 es subgrupo normal de C_1 y C_1/A_1 es un grupo infinito localmente finito, y por hipótesis se obtiene que existe $x \in C_1 \setminus A_1$ tal que el centralizador $D/A_1 = Z_{C_1/A_1}(xA_1)$ es infinito.

Dado que el subgrupo $A_2 = \langle x, A_1 \rangle$ es finitamente generado, se obtiene que A_2 es finito. Sea $C_2 = Z_G(A_2)$. Notemos que $C_2 \leq D$, por lo cual $C_2 \leq Z_D(x)$. Por otro lado, $D \leq C_1$ implica que $Z_D(x) \leq C_2$, así que $C_2 = Z_D(x)$. Ya que el grupo conmutador $[D, x]$ es subgrupo de A_1 y $A_1 \leq A_2$, se tiene que

A_2 es subgrupo normal de D. Se verifica que

$$|D : Z_D(x)| = |D : C_2| \leq |Aut(A_2)| \leq \infty.$$

Como D es finito, se sigue que $Z_D(x)$ es infinito, por lo cual $Z_G(A_2) = C_2$. Inductivamente se construye una cadena infinita de subgrupos abelianos $A_1 < A_2 < \cdots$ tales que $Z_G(A_i)$ es infinito. La unión de la cadena es un subgrupo abeliano infinito. $\square$

C.2. FC-grupos

En esta sección se presenta una clase de grupos que se basa en el estudio de las clases de conjugación.

Definición C.8. *Sea G un grupo. Un elemento g de G es un* ***FC-elemento*** *si su clase de conjugación $C_G(g)$ es finita.*

Como es de esperar, los FC-elementos forman un subgrupo.

Proposición C.9. *Sea G un grupo. Los FC-elementos de G forman un subgrupo característico de G.*

Demostración. Sean x, y dos FC-elementos. Observemos que

$$\begin{aligned} C_G\left(xy^{-1}\right) &= \{g^{-1}\left(xy^{-1}\right)g \mid g \in G\} \\ &= \{\left(g^{-1}xg\right)\left(g^{-1}y^{-1}g\right) \mid g \in G\} \\ &\subseteq C_G(x)\, C_G\left(y^{-1}\right) \end{aligned}$$

y como $C_G(y^{-1}) = In(C_G(y))$, se concluye que $C_G(xy^{-1})$ es finito. Por lo tanto, xy^{-1} es FC-elemento y por ello los FC-elementos forman un subgrupo de G. El hecho de que el subgrupo de FC-elementos sea subgrupo característico se sigue de que para cualquier automorfismo α se cumple que $C_G(\alpha(x)) = \alpha(C_G(G))$. $\square$

Observemos que el concepto de FC-elemento es una generalización del concepto de elemento central, puesto que los elementos del segundo tipo sólo tienen un único conjugado. Por esto, al subgrupo de FC-elementos se le llama FC**-centro**.

Definición C.10. *Sea G un grupo. G es un* **FC-*grupo*** *si G coincide con su FC-centro.*

Ejemplo C.11. Cualquier grupo finito o cualquier grupo abeliano es un FC-grupo.

Proposición C.12. *La clase de los FC-grupos es cerrada bajo subgrupos, imágenes homomórficas y productos finitos.*

Demostración. Sean G un FC-grupo y H un subgrupo de G. Notemos que para cualquier $h \in H$ se cumple que $C_H(h) = C_G(h) \cap H$. Por lo tanto, H es un FC-grupo.
Sea $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo con G un FC-grupo. Sin pérdida de generalidad supongamos que f es sobreyectiva. Si $y \in G'$, entonces

$$\begin{aligned} C_{G'}(y) &= \{h^{-1}yh | h \in G'\} = \{(f(g))^{-1} f(x) f(g) | g \in G\} \\ &= \{f\left(g^{-1}xg\right) | g \in G\} = f(C_G(x)), \end{aligned}$$

y por lo tanto $C_{G'}(y)$ es finita.
Sean $\{G_i\}_{i=1}^n$ una familia de FC-grupos y $G = \prod_{i=1}^n G_i$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$, entonces

$$\begin{aligned} C_G(x) &= \{y^{-1}xy |\, y \in G\} \\ &= \{\left(y_1^{-1}x_1y_1, \ldots, y_n^{-1}x_ny_n\right) | \forall i \in \{1, \ldots, n\} : y_i \in G_i\} \\ &\subseteq \prod_{i=1}^n C_{G_i}(x_i), \end{aligned}$$

y como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $C_{G_i}(x_i)$ es finito, se obtiene que $\prod_{i=1}^n C_{G_i}(x_i)$ es finito. Esto prueba que $C_G(x)$ es finito. Por lo tanto, G es FC-grupo. $\square$

Notemos que la propiedad de ser FC-grupo puede extenderse a sumas directas, puesto que la clase de conjugación de cada elemento se puede considerar como el producto finito de las clases de conjugación de las coordenadas del elemento que no son identidades. Por otro lado, la clase de los FC-grupos no es cerrada bajo extensiones y para ello basta considerar el grupo G de la Observación 3.14, dado que $\mathbb{R}$ y K son abelianos, esto es, son FC-grupos.
El siguiente resultado muestra una forma de obtener subgrupos normales finitos. Para hacerlo, diremos que un subconjunto de un grupo es *normal* si contiene todos los conjugados de sus elementos.

Proposición C.13. *[Lema de Dicman] Sea G un grupo. Si X es un subconjunto normal finito formado por elementos de orden finito genera un subgrupo normal finito.*

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un subconjunto normal de G y $H = \langle X \rangle$. Es claro que H es normal en G, por lo cual resta probar que H es finito. Si $h \in H \setminus \{e\}$, entonces $h = x_{\alpha_1}^{m_1} \cdots x_{\alpha_r}^{m_r}$, donde $1 \leq \alpha_i \leq n$. Aunque pueden existir varias expresiones de h, elegimos la de mínima longitud r. Además, para estas expresiones de mínima longitud existe una que es la primera en el orden lexicográfico de r-adas: $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ antecede a $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r)$ si $\alpha_i = \alpha'_i$ para $i < s$ y $\alpha_s < \alpha'_s$ para algún $s \leq r$. Denotemos por $h = y_1 y_2 \cdots y_r$ donde $y_i = x_{\alpha_i}^{m_i}$.
Supongamos que $\alpha_i = \alpha_j$ para $i < j$. Si "movemos" y_j hacia la izquierda obtenemos

$$h = y_1 \cdots y_{i-1} (y_i y_j) \, y_{j+1}^{y_i} \cdots y_{j-1}^{y_j} y_{j+1} \cdots y_r,$$

la cual es una expresión de longitud menor que r, de donde se sigue que todos los α_i son diferentes. Ahora, si suponemos que $a_i > a_i$, entonces

$$h = y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} y_i^{y_{i+1}} y_{i+2} \cdots y_r,$$

pero esta expresión de longitud r antecede a $y_1 y_2 \cdots y_r$ en el orden las r-adas. Por lo tanto, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$. Por lo tanto, existen a lo más $\prod_{i=1}^{n} |x_i|$ posibilidades para h. $\square$

Es importante notar la similitud en la construcción realizada aquí con la realiada en la prueba del Teorema 3.19.
Seguiremos el estudio de los FC-grupos enfocándonos en los grupos de torsión. Para ello requerimos un concepto auxiliar.

Definición C.14. *Sea G un grupo. G es* ***residualmente finito*** *si para cualquier elemento g no trivial del grupo se cumple que existe un subgrupo N normal de G tal que $g \notin N$ y G/N es finito.*

En primer lugar analizaremos el cociente de un FC-grupo por su centro $Z(G)$.

Proposición C.15. [Baer] *Si G es un FC-grupo, entonces $G/Z(G)$ es un grupo de torsión residualmente finito.*

Demostración. Observemos que $Z(G) = \cap_{g \in G} Z_G(g)$, y como cada $Z_G(g)$ es de índice finito se obtiene que $G/Z(G)$ es residualmente finito.
Ahora para $g \in G$ consideremos $G/Z_G(g)$. Elijamos un único representante de cada clase de equivalencia, digamos $x_1 Z_G(g), \ldots, x_n Z_G(g)$. Como $C = \cap_{i=1}^{n} Z_G(x_i)$ tiene índice finito, se sigue que $K = \cup\{N \trianglelefteq G \mid N \subseteq C\}$ también es de índice finito. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m \in K$, por lo cual para cada x_i se cumple que $g^m x_i = x_i g^m$. Puesto que $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ y $Z_G(g)$ generan G, se obtiene que $g^m \in Z(G)$. Esto concluye la prueba. □

A continuación presentamos un teorema que caracteriza a los FC-grupos de torsión.

Proposición C.16. *Sea G un grupo de torsión. G es un FC-grupo si y sólo si cada subconjunto finito está contenido en un subgrupo normal finito.*

Demostración. Supongamos que G es un FC-grupo y sea F un subconjunto finito. Tenemos que el conjunto de elementos conjugados de F en G es un subconjunto finito normal de G y, por la Proposición C.13, se tiene que dicho subconjunto genera un subgrupo normal finito.
Para la recíproca, supongamos que cualquier subconjunto finito de G está contenido en un subgrupo normal finito. Si $x \in G$, entonces existe un subgrupo F normal finito de G. Luego, todos los conjugados de x pertenecen a F, es decir, $C_G(x)$ es finito. □

Es importante notar que la prueba anterior es muy similar a la realizada en el Corolario 3.23. También, a los FC-grupos de torsión habitualmente se les llama *grupos localmente finitos y normales.*

Proposición C.17. *[B. H. Newmann] Si G es un FC-grupo, entonces el subgrupo derivado $G' = [G : G]$ es un grupo de torsión. Además, los elementos de orden finito (elementos de torsión) forman un subgrupo que contiene a G'.*

Demostración. Observemos que por las Proposiciones C.15 y C.16 se obtiene que $G/Z(G)$ es un grupo localmente finito. Ahora, si X es un subgrupo finitamente generado de G, entonces $X/(X \cap Z(G))$ es finito, lo cual implica que $X/Z(X)$ es finito. Luego, por un Teorema de Schur se obtiene que X' es finito. Ya que G' es la unión de los X' se sigue que G' es un grupo de torsión.
Para la segunda parte, sean $x, y \in G$ tales que existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $x^m = e_G = y^n$. Observemos que $(xy^{-1})^{mn} G' = G'$, por lo cual $(xy^{-1})^{l}$ para algún

$l \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, los elementos de orden finito forman un subgrupo que contiene a G'. $\square$

Para concluir esta sección presentamos un resultado que relaciona de manera directa a los FC-grupos con los grupos localmente finitos.

Proposición C.18. *Sea G un grupo. Si G es FC-grupo, entonces existe un subgrupo T normal y localmente finito de G tal que G/T es abeliano.*

Demostración. Sea T el conjunto de los elementos de torsión de G. Por la Proposición C.17 tenemos que $G' \leq T \leq G$. Como G es FC-grupo y T es subgrupo de G, se tiene que T es un FC-grupo, además, es claro que T es un subgrupo de torsión. Por la Proposición C.16 se obtiene que T es localmente finito. Ya que $G' \leq T$, se concluye que G/T es abeliano. $\square$

Referencias

[1] Arhangel'skii, Alexander y Mikhail Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press- World Scientific, Serie "Atlantis Studies in Mathematics", 2008.

[2] Christenson, Charles O. y William L. Voxman, *Aspects of Topology*, BCS Associates, USA, 2nd. ed., 1998.

[3] Dikranjan, Dikran N. y W. Tholen, *Categorical structure of closure operators*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1995.

[4] Dikranjan, Dikran N. y V. V. Uspenskij, *Categorically compact topological groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, **126**, 149-168, 1998.

[5] Engelking, Ryszard, *General Topology*, Helderman-Verlag, Germany, Serie "Sigma Series in Pure Mathematics", Vol. 6, 1989.

[6] Grosser, Siegfried y Martin Moskowitz, *Compactness conditions in topological groups*, J. Reine Angew, Math., **236**, 1-40, 1971.

[7] Hewitt, Edwin y Kennet A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I*, Springer-Verlag, USA, Serie "Comprehensive Studies in Mathematics", vol. 115, 2nd. ed., 1979.

[8] Iwasawa, Kenkichi, *On some types of topological groups*, Anns. of Math., **50**(2), 507-558, *3*, 1949.

[9] Klyachko, Anton A., Alexander Yu. Olshanskii y Denis V. Osin, *On topologizable and non-topologizable groups*, Top. and its Apps., **160**, 2104-2120, *17*, 2013.

[10] Leja, Franciszek, *Sur la notion du groupe abstrait topologique*, Fundamenta Mathematicae, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, **9**, 37-49, *1*, 1927.

[11] Liukkonen, John R., *Dual spaces of groups with precompact conjugacy classes*, Trans. Amer. Math. Soc., **180**, 85-108, 1973.

[12] Lukács, Gábor, *Compact-like Topological Groups*, Helderman-Verlag, Germany, Serie "Research and Exposition in Mathematics", Vol. 31, 2009.

[13] Neymet, Sylvia de, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, México, Serie "Textos", Vol. 23, 2005.

[14] Robinson, Dereck J. S., *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, USA, Serie "Graduate Texts in Mathematics", 2nd. ed., 1996.

[15] Roelcke, Walter y Susanne Dierolf, *Uniform structures on topological groups and their quotients*, McGraw-Hill Inc., USA, 1981.

[16] Stroppel, Markus, *Locally Compact Groups*, European Mathematical Society, Germany, Serie "EMS Textbooks in Mathematics", 2006.

[17] Casarrubias Segura, Fidel y Ángel Tamariz Mascarrúa, *Elementos de Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, México, Serie "Textos", Vol. 37, 2012.

[18] Tkachenko, Mikhail *et al*, *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1997.

[19] Wu, T. S. y Y. K. Yu, *Compactness propierties of topological groups*, Michigan Math., **19**, 299-313, 1972.