Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Construcciones mentales del concepto transformación lineal bajo la teoría APOE en estudiantes de ciencias exactas

Tesis

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta
Antonio Pérez González

Director de Tesis
Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

PUEBLA, PUE DICIEMBRE 2016.

Con cariño para mis mejores maestros de vida, mis padres:

Benita González Sánchez y Benito Pérez Báez.

Agradecimientos

Mis agradecimientos antes que nada al ser supremo que llamo Dios, por permitirme llegar hasta estos momentos.

Agradezco a mi madre Benita, por su apoyo económico y moral durante la realización de mis estudios, gracias por tus enseñanzas, sin duda tu fortaleza me inspiró a no darme por vencido en los momentos más difíciles, gracias por los consejos que han sido la mejor herencia de vida.

Gracias a mi padre Benito, por los valores morales inculcados, por los consejos de vida, gracias por mostrarme que para llegar al éxito se requiere de esfuerzo, dedicación y sacrificio.

Agradezco a mis hermanos, Alejandra por el apoyo moral durante la realización de mi carrera, así como sus invaluables consejos y motivaciones, gracias por tus ejemplos de tenacidad y perseverancia. A mi hermano Juan Carlos quien en su momento me apoyaste y me diste consejos, son para mí un ejemplo de lucha y esfuerzo. A mi hermana Maricarmen quien espero que encuentre en mí un ejemplo de motivación para continuar sus estudios, sé que el camino es largo y en ocasiones pesado pero con base en tú esfuerzo, lograrás el éxito. En especial a mi hermana Araceli (†) quien me inspiró para estudiar esta carrera.

A ti Guadalupe por ser mi novia y mi amiga, agradezco el apoyo que me has brindado durante estos 5 años en los proyectos que he iniciado, gracias por compartirme tú tiempo y sobre todo el gusto que tienes por las matemáticas, agradezco a tú hermana Rocío por los consejos otorgados y el apoyo brindado.

Gracias a mis amigos Dánae, Alejandro, Bernardino, Bruno, José David, José Luis, Fredy, Marco, Javier, Jerónimo, Víctor, León, Yair y Mauricio con quienes he compartido mi gusto por las matemáticas, como olvidar las horas agotadoras de estudio, los momentos de esparcimiento y los consejos otorgados durante los años que compartimos.

Gracias a las personas que han creído y confiado en mí, por el apoyo que me brindaron durante mis años de estudio.

Gracias a la Doctora Lidia por aceptar dirigir la presente tesis, por sus invaluables correcciones, el tiempo brindado durante la realización de la misma y sobre todo por el apoyo incondicional.

Gracias al jurado a la Dra. Dinazar Isabel Escudero Ávila, M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez y Dr. José Antonio Juárez López por la lectura de este trabajo y por sus invaluables aportaciones.

Introducción

El álgebra lineal es una materia que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas de diferentes carreras, como por ejemplo, las ingenierías, economía, ciencias sociales y licenciatura en ciencias. En esto radica la importancia y el interés de investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Un rasgo característico del álgebra lineal es el alto nivel de abstracción en sus conceptos, así como también el fracaso de una buena parte de estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área. Por otra parte, existen diferentes grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México, entre otros, los cuales han diseñado diferentes investigaciones para determinar las causas de las dificultades en los estudiantes en esta materia. Por ejemplo, Sierpinska buscó evitar el obstáculo del formalismo con el concepto transformación lineal mediante su introducción en el ambiente del software Cabri - Géomètre II (Sierpinska, et al., 1999). El problema radica en que en esta materia, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión de los conceptos involucrados. En particular, sobre el concepto de transformación lineal, la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor.

Diversas investigaciones en didáctica de la matemática han abordado su problemática de aprendizaje. Algunas de ellas son las de Uicab y Oktaç (2006) y Molina y Oktaç (2007), ambas investigaciones abordan la problemática de aprendizaje desde una perspectiva geométrica del concepto, identificando aquellos modelos que pueden tener los estudiantes en relación al concepto transformación lineal y el grado de interferencia de estos. Por otra parte, Roa y Oktaç (2008) presentaron dos descomposiciones genéticas fundamentadas en la teoría APOE sobre el concepto transformación lineal. En ese estudio reportaron la prevalencia de una de estas descomposiciones debido, en su opinión, a la influencia de la representación que se usa en los libros de texto. Como resultado de su investigación propusieron un refinamiento de la descomposición genética que prevaleció.

Debido a la naturaleza del álgebra lineal y las dificultades que afrontan los estudiantes cuando intentan construir conceptos, como por ejemplo, el de transformación lineal, hemos encontrado en la teoría APOE una herramienta potente para explicar el porqué de esos problemas.

Índice general

Capítulo 1 Antecedentes y Justificación

En este capítulo se presenta una revisión de algunos trabajos sobre el concepto de trasformación lineal. En dichas investigaciones se presenta el desempeño de estudiantes de ingeniería cuando se enfrentan al concepto desde una perspectiva geométrica.

1.1 Antecedentes

Los trabajos iniciales en la investigación del concepto trasformación lineal se centraron en las representaciones geométricas en el plano o en el espacio, y las concepciones que generan dichas representaciones. Sin embargo, las investigaciones más recientes se han abordado desde la teoría APOE, la cual se ha tomado como una gran referencia no sólo en la investigación de cómo se construyen los conceptos del álgebra lineal, sino en otras áreas de la matemática.

Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) han realizado una investigación sobre la introducción geométrica de los conceptos de vectores, vector propio y transformación lineal, así como las implicaciones que dicho enfoque genera en las concepciones de los estudiantes. Debemos señalar que los resultados de esa investigación se centraron en discutir los problemas relacionados con la representación de transformaciones y transformaciones lineales. Los investigadores señalan que es común que las transformaciones lineales sean introducidas mediante una definición formal como transformaciones entre espacios vectoriales, las cuales preservan combinaciones lineales. No obstante, la definición abordada se olvida rápidamente cuando se introduce la idea de la representación matricial de una transformación lineal, centrando el concepto en las representaciones matriciales, en las transformaciones lineales en el plano como rotaciones, reflexiones, y combinaciones de estas. En seguida presentamos un pequeño resumen de dicho trabajo.

Los investigadores presentan el resultado de una investigación en ingeniería didáctica, donde buscaron evitar el obstáculo del formalismo del concepto transformación lineal, en palabras de los autores: “El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes que operan a nivel de la forma de expresiones sin ver que estas expresiones se refieren a algo más que a sí mismas” (Sierpinska et al., 1999, p.12). En otras palabras, este fenómeno se aprecia a menudo en los estudiantes que trabajan con expresiones matemáticas, pero sin encontrarle un verdadero significado, conduciéndolos a escribir operaciones que carecen de sentido.

Los investigadores trataron de evitar dicho obstáculo mediante la introducción del software Cabri-Géomètre II. El software se utiliza como un auxiliar de la enseñanza, no como una herramienta para resolver problemas de álgebra lineal. El motivo del uso del software fue que los investigadores observaron sus características dinámicas y la posibilidad de realizar representaciones geométricas y aritméticas simultáneas de vectores y transformaciones lineales, lo que consideraron apropiado para la comprensión de dichos conceptos matemáticos. Sin embargo, la interpretación dada por los estudiantes no fue la que se esperaba; debido a que las características que los investigadores habían apreciado en el software, no pudieron ser aprovechadas por los estudiantes porque no poseían la teoría para interpretar dichas representaciones.

En la investigación de estos autores se menciona uno de los experimentos realizados. Con el uso de los comandos de arrastrar y dibujar del software se buscaba que los estudiantes observaran la relación de un vector v y su respectiva imagen $T(v)$ bajo una transformación T. Se buscaba que ellos concluyeran que la transformación es definida para cualquier vector en el plano y por lo tanto que establecieran alguna relación entre v y $T(v)$.

Para tal fin, los investigadores iniciaron el experimento mediante la introducción, de una manera informal, del concepto transformación de un espacio vectorial, es decir, sin hablar de dominios y codominios: “Nunca hemos introducido la noción de espacio vectorial de una manera formal” (Sierpinska, et al., 1999, p.22). Sin embargo, por el contexto de las trasformaciones los investigadores asumieron que se definirían con vectores y que las imágenes serían vectores. A los estudiantes se les entregó cuatro transformaciones para explorar:

1. Una rotación seguida de una dilatación.
2. El vector v fue rotado por 45° y dilatado por el factor variable $\|v\|^2$.
3. Traslación.
4. $T\big((0,0)\big) = (0,0)$ y si $v = (x, y) \neq (0,0)$ entoces $T(v) = c(-y, x)$ donde $c = \frac{|\mathrm{x}|}{\|\mathrm{v}\|}$. (Sierpinska, et al., 1999, p.24).

En la sesión experimental la transformación fue representada por una figura dinámica en Cabri, en la cual, un vector v podría ser arrastrado o incluso alargado, al mismo tiempo un vector $T(v)$ parecía ser controlado por el movimiento de v. En un primer momento los estudiantes catalogaron a esta situación como un par dinámico de vectores, es decir, no establecieron ninguna relación entre ellos, fue posteriormente que esta pareja dinámica de vectores se interpretó como un vector libre v y otro dependiente $T(v)$. Este tipo de dinámica de un vector libre y un vector dependiente les hizo notar una clase especial de dinámica: “las dilataciones del vector libre fueron acompañadas por dilataciones proporcionales del vector dependiente" (Sierpinska, et al., 1999, p.28). Los estudiantes se refirieron a este par de vectores como transformaciones lineales representando este objeto con la siguiente expresión $\frac{kv}{v} = \frac{T(kv)}{T(v)}$ y $T(kv) = kT(v)$ por lo que esto fue interpretado como el concepto de proporcionalidad. Los investigadores reportaron que la conservación de la suma vectorial no apareció de manera explícita en la definición de los estudiantes del concepto transformación lineal e incluso la condición $T(v + w) = T(v) + T(w)$ fue interpretada como una especie de proporcionalidad.

Posterior a los trabajos de Sierpinska y su grupo de investigación, Uicab y Oktaç (2006) desarrollaron una investigación sobre el problema de extensión lineal, en la que buscaban identificar el obstáculo del formalismo, identificar las características del pensamiento teórico en los estudiantes, haciendo mayor énfasis en detectar el pensamiento sistémico. Este último se refiere a aquel que incluye sistemas de conceptos, y en el que, el significado de un concepto se construye mediante la relación con otros conceptos, más no en cosas o eventos.

El problema de extensión lineal consiste en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base. Abordar el problema implica establecer conexiones entre varios conceptos, especialmente al concepto de base y transformación lineal. En ese trabajo los autores comentaron que un concepto puede ser aprendido como una entidad individual, la importancia se encuentra en asociar los nuevos conceptos a sistemas de significados para entrar a formar parte de una estructura conceptual, lo que permitirá establecer conexiones con otros conceptos.

> "Por ejemplo, una matriz se puede ver como un arreglo de números, pero si sabemos que $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es la matriz (de orden $m\ x\ n$) de coeficientes en un sistema de ecuaciones, ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$), y que si A es invertible implica que el sistema de ecuaciones representado por $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, entonces A forma parte de una estructura conceptual" (Uicab y Oktaç, 2006, p.468).

Para poder apreciar la presencia de un pensamiento teórico en los estudiantes los autores consideraron que deben estar presentes los siguientes comportamientos:

- Reflexión sobre los datos explícitos y aquellos que podrían estar involucrados implícitamente en la interpretación del problema.
- Actitud indagadora respecto a posibles conceptos involucrados.
- Desarrollo de estrategias con un propósito, haciendo uso de los conceptos involucrados en un problema.
- Toma de decisiones pertinentes que involucren conceptos relacionados para llegar a la solución de un problema, ofreciendo argumentos válidos que permitan justificar el planteamiento de una solución con una coherencia que haga ver un sistema de conceptos.

El objetivo de la investigación se centró en: “Observar la presencia de conexiones entre conceptos y su naturaleza, basándonos en observaciones empíricas” (Uicab y Oktaç, 2006, p.471), para tal fin, la investigación se realizó con un grupo de ocho estudiantes de maestría en matemática educativa, se buscó que los estudiantes analizaran y conocieran ejemplos del uso de la tecnología, la rama elegida fue álgebra lineal y el software empleado Cabri-Géomètre II. Durante el curso se llevaron a cabo seis módulos, los 4 primeros se enfocaron en conocer los comandos del software, así como los conceptos de vector, coordenadas de un vector en una base y cambio de base en un ambiente geométrico. Se detallan los módulos cinco y seis debido a que en ellos se enfocaron en el desarrollo del concepto transformación lineal. El módulo cinco comenzó con la definición de espacio vectorial y sus axiomas, enseguida se presentó a los estudiantes la idea de transformación de todo el plano vectorial, con el objetivo de evitar asociar una transformación con sólo un vector del plano. Otra actividad realizada fue que se les presentó a los estudiantes transformaciones y transformaciones lineales donde un vector libre v sobre la pantalla, y su imagen bajo una transformación T eran determinados mediante la aplicación de una macro. Luego, mediante el movimiento del punto terminal de v, se podían visualizar las imágenes de muchos vectores bajo T. Algunos ejemplos de dichas construcciones fueron reflexión, proyección, rotación, una transformación semilineal, trasquilado o deslizamiento y traslado-punto-terminal. Para finalizar el módulo cinco se proporcionó la definición de una transformación lineal de la siguiente forma:

> […] “Aquella que preserva combinaciones lineales, es decir, para cualesquiera vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y cualesquiera escales k_1 y k_2, $T(k_1\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2)= k_1T(\,\vec{v}_1)+ k_2T(\vec{v}_2)$. Como equivalente a esta definición, una transformación es lineal si y sólo si conserva a la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, o sea $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)= T(\,\vec{v}_1)+ T(\vec{v}_2)$ para cualesquiera vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y $T(k\vec{v})= kT(\vec{v})$, cualquier vector $\vec{v}$ y cualquier escalar k” (Uicab y Oktaç, 2006, p. 473).

El módulo 6 se inició trabajando con transformaciones lineales y no lineales, usando la preservación de combinaciones lineales para determinar la linealidad de una transformación. Mediante la aplicación de un proceso macro de combinación lineal y donde, dados dos vectores libres $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ se calculó un vector $\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2$. A este vector se le aplicó una macro transformación, generando $T(\vec{w})$. Finalmente, se construyó un vector $\vec{r}$ tal que $\vec{r} = k_1T(\,\vec{v}_1)+ k_2T(\vec{v}_2)$, concluyendo que $T(\vec{w}) = \vec{r}$. Esperaban que estas actividades prepararan a los estudiantes para enfrentar el problema de extensión lineal. Con el objetivo de caracterizar el pensamiento de los estudiantes se aplicó un cuestionario de diagnóstico con 12 preguntas relacionadas con las transformaciones lineales. Como resultado se destaca lo siguiente: los estudiantes hacen referencia a las transformaciones basándose en intuiciones relacionadas con su propia experiencia. La mayoría de los estudiantes consideró a las transformaciones lineales como las que satisfacen 2 condiciones $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)= T(\,\vec{v}_1)+ T(\vec{v}_2)$ y $T(k\vec{v})= kT(\vec{v})$, no evidenciaron el uso de cuantificadores, así como también olvidaron a qué campo pertenecen sus elementos. En un caso particular, un estudiante consideró tres propiedades en las transformaciones lineales, agregando a estas dos la preservación de combinaciones lineales como una condición independiente.

Finalmente se realizó una entrevista de la cual concluyeron lo siguiente:

- Los estudiantes no establecen una conexión entre los conceptos de base y transformación lineal. Únicamente relacionan el problema con el concepto transformación lineal, debido a que tienen este concepto aislado y sus estrategias giran alrededor de él.
- Dos de los estudiantes solamente pensaron en problemas prototipo de transformaciones lineales en el plano que vieron con anterioridad.
- Otros dos estudiantes consideraron combinaciones lineales en sus estrategias y tras algunos intentos lograron llegar a la solución. Sin embargo, el significado de sus conceptos no jugaron el papel adecuado debido a que no les permitieron tomar decisiones pertinentes y justificar el desarrollo de su solución. Esto se reflejó en la seguridad que uno de los estudiantes mostraba al presentar sus argumentos y la falta de claridad del significado respecto al concepto base.

Con los resultados obtenidos encontraron evidencias del obstáculo del formalismo en un contexto geométrico, debido a que los estudiantes manipularon objetos concretos (vectores y construcciones geométricas relacionadas con ellos) pero que carecen de significado para ellos y sólo lo interpretan como la necesidad de hacer algo. Este hecho fue evidente en uno de los estudiantes quien trató de adecuar sus experiencias pasadas con la nueva situación que estaba abordando; insistía en relacionar sus ideas de linealidad, paralelismo y suma para verificar si una trasformación era lineal.

El resultado de su investigación las lleva a plantear la siguiente pregunta ¿Cómo ayudar a los estudiantes a pensar teóricamente y hacer conexiones entre diferentes conceptos?

Consideraron que dos elementos permiten llevar a cabo dichas conexiones: la abstracción y la práctica constante de problemas nuevos. Toda práctica de enseñanza debe hacer énfasis en el formalismo propio de los conceptos, evitando que estos sean tratados por sus características o su carácter funcional. Se enfatiza la importancia de incorporar problemas novedosos que promuevan el establecimiento de conexiones entre los conceptos nuevos y los conceptos previos. En cuanto al estudio de las transformaciones lineales concluyeron:

> “En particular, en el aprendizaje del concepto de transformaciones lineales es importante hacer hincapié, por un lado, en el aspecto intuitivo, considerando el aspecto geométrico de sus propiedades; por otro lado, atender el aspecto formal, incluyendo el uso de los cuantificadores y el espacio vectorial en su definición. Así mismo, hay que incluir más situaciones de extensión lineal para ayudar a los estudiantes a hacer conexiones con otros conceptos del álgebra lineal, de manera que puedan apreciar una estructura global” (Uicab y Oktaç 2006, p.488).

Como lo demuestran los resultados, los conceptos de combinación lineal y base están íntimamente relacionados con el concepto de transformación lineal y por ende al concepto de vector y espacio vectorial. Por lo que sería imposible establecer una conexión entre estos conceptos, si se carecen de estructuras previas para formar un nuevo concepto.

En el trabajo presentado por Molina y Oktaç (2007) describen el tipo de concepciones sobre la transformación lineal adquiridas específicamente en un contexto geométrico basándose en las ideas planteadas por Fischbein (1987, citado en Molina y Oktaç, 2007, p.243) sobre la intuición y los modelos intuitivos. La conjetura central de su investigación fue que algunos estudiantes asocian la idea del movimiento con las transformaciones lineales. Durante el desarrollo de la investigación se trabajó con situaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$, con el objetivo de identificar aquellos modelos geométricos que puedan influir en la comprensión del concepto transformación lineal**.** Estos investigadores identificaron 3 tipos de movimientos:

- Movimientos geométricos simples: Ciertos movimientos asociados a transformaciones lineales; por ejemplo, una transformación lineal de expansión o de contracción, una transformación lineal de rotación o una transformación lineal de reflexión.

- Combinación de movimientos geométricos simples: Nos referimos a las combinaciones que los estudiantes pueden realizar con los movimientos simples, por ejemplo, la composición de una rotación y una expansión.

- Transformaciones difíciles o imposibles de escribir con movimientos geométricos simples o combinaciones de estos: Es el caso de las transformaciones lineales de trasquilado, la cual requiere de interpretaciones algebraicas para ser aceptada como transformación lineal, o bien otras transformaciones como $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$. (Molina y Oktaç, 2007, p.244)

La hipótesis fue que algunos estudiantes podrían asociar geométricamente una transformación lineal con los dos primeros casos, y la existencia de una transformación lineal se puede rechazar geométricamente si se presenta el tercer caso.

Para Fischbein la intuición no tiene una definición única, comenta que debemos de entenderla como aquellas ideas que se aceptan como ciertas al ser evidentes por sí mismas, no requieren argumentación para ser aceptadas. Al parecer, un modelo concreto es más significativo para el estudiante que las propiedades formales. Se dice que un modelo intuitivo implícito (o tácito) es aquel cuando el sujeto no está consciente de su influencia o alcance, este trabajo se centra principalmente en este modelo. Estos modelos se caracterizan por su simplicidad, por su cualidad elemental e incluso por su carácter casi trivial. Con base en el marco de referencia los autores realizan el siguiente razonamiento:

> "Pensamos que el carácter abstracto del álgebra lineal con frecuencia obliga a los estudiantes a buscar sustitutos que les ayuden a convertir las nociones del álgebra lineal en ideas aceptables intuitivamente. En este caso, la construcción de un modelo intuitivo tal vez no se base tanto en la inaceptabilidad de la teoría matemática, sino en la necesidad inconsciente de reducir el nivel de abstracción que posee el concepto. Nuestra idea se basa en que las representaciones geométricas de la transformación lineal tratadas en clase o libros de texto podrían ser las responsables de tal asociación, aunado a la dificultad de una interpretación inmediata visual de las propiedades analíticas del concepto" (Molina y Oktaç, 2007, p.251).

Otro de los factores radica en la necesidad de los estudiantes de reducir los conceptos a algo conocido para ellos y que tenga nombre. Para tal sentido el movimiento lo encuentran relacionado con las transformaciones lineales. En esta medida los modelos intuitivos son limitados y no comprenden la totalidad de las características del concepto. Con el objetivo de obtener información los investigadores aplicaron una entrevista de manera individual a cinco estudiantes que habían terminado una licenciatura en la enseñanza de la matemática en la cual habían llevado uno o dos cursos de álgebra lineal. Al momento de la aplicación de la entrevista se encontraban inscritos en la maestría de matemática educativa. Los estudiantes se encontraban tomando un curso que involucraba el uso de la tecnología como recurso para la enseñanza del álgebra lineal, con el software Cabri–Géomètre, en dicho curso aún no se había abordado las transformaciones lineales. La entrevista se dividió en dos partes: Preguntas abiertas (relacionadas con el concepto transformación y transformación lineal) y preguntas que involucraban a la transformación lineal (Dada la representación gráfica de vectores en el plano y su supuesta imagen bajo T, determinar si existe dicha transformación lineal). Para los investigadores este tipo de representaciones geométricas que de alguna manera es concreta para los estudiantes, son apropiadas para identificar los modelos intuitivos en los estudiantes. Estos objetos se pueden ver, manipular y controlar, ya que al ser visibles ayudan a formar en la mente la imagen de un concepto abstracto.

Los investigadores agrupan los resultados de su investigación en 6 items. A continuación se presenta una síntesis de cada uno de ellos.

- *La transformación lineal como movimientos simples y combinaciones de estos.* El resultado principal fue que los modelos intuitivos detectados en todos los estudiantes sobre las transformaciones lineales son casos particulares de ellos, como lo son expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones. Cuando los estudiantes se enfrentan a transformaciones y ellas no se comportan como en los casos particulares antes mencionados no se consideran como transformaciones lineales
- *La transformación lineal como la transformación de un vector en particular, y no como una función que transforma todo el plano.* Originalmente para los

investigadores no era su objetivo, sin embargo, los resultados los llevaron a observar este fenómeno: Algunos estudiantes consideran a las transformaciones lineales como una trasformación particular de un vector, más no como una función que transforma todo el plano. Esto se pone en evidencia al no considerar la existencia de una transformación lineal en donde interviene más de un vector, ya que piensan en dos transformaciones lineales para cada vector.

- *Con respecto al adjetivo "lineal" en el término transformación lineal,* se observaron las siguientes ideas asociadas: un estudiante lo relaciona con vectores, dos lo relacionan con líneas rectas, uno más relaciona que una transformación lineal transforma líneas rectas en líneas rectas y finalmente otro más con el orden que deben realizarse las operaciones. Esto muestra cómo los estudiantes producen sustitutos intuitivamente más accesibles reemplazando el concepto formal. Para los autores podría ser la razón de por qué la linealidad, dentro de las transformaciones lineales, carece de importancia, se olvide o pase desapercibida.
- *La noción de espacio vectorial.* La mayoría de los estudiantes no involucra dicha noción. Los investigadores suponen que con el paso del tiempo dicha noción se pierde.
- *La noción geométrica del movimiento de un vector, llevada al contexto aritmético.* Los investigadores señalan que la mayoría de los ejemplos prototipo (incluyendo los libros de texto) representan a las transformaciones lineales como rotaciones o reflexiones, pudiendo ocasionar que el estudiante se quede con la noción de que las transformaciones lineales pueden expresarse algebraicamente por medio de la multiplicación de las componentes del vector (x, y) por escalares.
- *Con respecto al movimiento.* Observaron que los estudiantes asocian la idea del movimiento con las transformaciones lineales, los cuales las manejan en algunos de sus argumentos, debido a que sus modelos están constituidos por movimientos geométricos. Estas ideas pueden surgir en los estudiantes cuando se ejemplifica la rotación de un vector y al mostrar dicha rotación nos dice "la transformación hace que gire el vector". Por ello es natural pensar que los estudiantes perciban la imagen de un vector como movimiento.

Los investigadores encontraron que el concepto transformación lineal se degrada con el tiempo y solamente persiste la idea de transformación.

Con respecto al concepto de transformación lineal, los autores comentan:

> "El término transformación lineal por sí mismo significa un cambio de forma. En los casos factibles de trabajar representaciones geométricas se da una concordancia entre lo que ocurre geométricamente y la idea asociada al nombre del concepto. Esto tiene como consecuencia que se ponga un velo sobre el concepto transformación lineal –en varios casos, lleva el estudiante a pensar que la transformación lineal es el vector transformado-, ocultando quién es en realidad la transformación lineal, lo cual hace que los estudiantes se enfoquen

en los objetos involucrados (por ejemplo, los vectores) y no el proceso implícito (la transformación lineal)" (Molina y Oktaç, 2007, p.271).

Los autores sugieren realizar investigaciones que se enfoquen en el diseño de actividades didácticas donde se conduzca a los estudiantes a distinguir quién es el objeto y quien el proceso, cuando trabajan con transformaciones lineales.

Por otro lado comentan que, aunque las trasformaciones no lineales sean un tema ajeno al álgebra lineal es relevante enfatizar en ellas debido a que pueden beneficiar en la enseñanza de las transformaciones lineales. Por lo que posiblemente convenga abordar la transformación antes que la transformación lineal y establecer el vínculo con la noción de función abordada en el cálculo. Además, sugieren que cuando se trabaje con las transformaciones lineales se utilicen distintas dimensiones.

Hasta el momento, los trabajos que hemos revisado han abordado la construcción del concepto de transformación lineal desde una perspectiva geométrica. Roa y Oktaç (2008) cambiaron el rumbo de las investigaciones sobre este concepto al utilizar la teoría APOE. Es precisamente este trabajo lo que motivó el desarrollo de la presente tesis, por lo que, al final del capítulo 2 se explicará con detalle.

1.2 Justificación

Como se ha mencionado anteriormente, el álgebra lineal es una materia que se encuentra presente en los programas de matemáticas de diferentes carreras. Las investigaciones que se han realizado sobre el concepto transformación lineal se han realizado desde un enfoque geométrico, y reportan que la mayoría de los estudiantes no asimilan de manera eficiente dicho concepto.

Otras investigaciones han abordado las transformaciones lineales considerando su naturaleza abstracta. Este aspecto llamó nuestra atención para indagar sobre dicho concepto, ya que nos permitirá reflexionar desde su definición formal como objeto matemático, sobre sus características y las relaciones con otros conceptos previos necesarios para su construcción.

De este modo, más que detectar dificultades buscamos determinar un camino mediante el cual los estudiantes puedan abordar las transformaciones lineales mediante la reflexión sobre su naturaleza abstracta.

Con esta investigación buscamos aportar al análisis cognitivo del concepto transformación lineal, que permita el diseño de un modelo de enseñanza que ayude a los estudiantes a tener mejores resultados durante el aprendizaje de dicho concepto.

Para el desarrollo de nuestra investigación nos apoyaremos en la teoría APOE y hemos tomando como guía el trabajo realizado por Roa y Oktaç (2008) debido a que propusieron una descomposición genética refinada, que nosotros deseamos probar en estudiantes de matemáticas y actuaría.

1.3 Objetivo general

Buscamos identificar y analizar las estructuras mentales, así como los mecanismos cognitivos que se hacen presentes en estudiantes de las Licenciaturas en Matemáticas Aplicadas y Actuaría al construir el concepto transformación lineal.

1.4 Objetivos específicos

- Verificar que el refinamiento de la descomposición genética propuesta en el trabajo de Roa y Oktaç (2008) es una herramienta que describe adecuadamente la manera en que estudiantes de matemáticas y actuaría construyen el concepto transformación lineal.

- Realizar algunas sugerencias didácticas en relación al aprendizaje del concepto transformación lineal en estudiantes de las Licenciaturas en Matemáticas Aplicadas y Actuaría de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP.

Capítulo 2 Marco Teórico

En el presente capítulo analizamos las características esenciales de la teoría APOE, debido a que la hemos elegido como fundamento de nuestra investigación. También presentamos el trabajo desarrollado por Roa y Oktaç (2008), ya que será nuestro punto de partida para el análisis de las construcciones mentales de los estudiantes de matemáticas y actuaría.

2.1 Desarrollo histórico de la teoría

Podemos decir que la teoría APOE trata de cómo se aprenden los conceptos matemáticos, debido a que se centra en los modelos de lo que podría estar pasando en la mente de una persona cuando intenta aprender un concepto matemático. Sus ideas están enraizadas en la obra de Jean Piaget, las cuales se introdujeron por primera vez en la década de 1980 por Dubinsky, dicha teoría es de enfoque constructivista. Antes de comenzar con el desarrollo de la teoría, consideramos que es de vital importancia conocer su evolución histórica, la cual se describe en 3 periodos principales: "en primer lugar los pensamientos, en segundo, el trabajo realizado por Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC) y los esfuerzos continuos por pequeños equipos que funcionan de forma independiente" (Arnon et al., 2014, p.1, traducción nuestra).

- Primer Periodo: Se centra en los años de 1983-1984 en los cuales surgen los primeros pensamientos acerca de la teoría. El creador de dicha teoría Dubinsky, alrededor de 1983, reflexionó acerca de la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas de educación superior. Las primeras publicaciones de estas ideas aparecen en 1984 en las actas de una conferencia en Helsinky, Finlandia, donde realizó una ponencia en la que habló acerca de pensar en una función como un proceso y como un objeto. También consideraba el uso de una computadora como una herramienta para apoyar a los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos.

- Segundo Periodo: se centra en los años de 1985-1995 durante los cuales se llevan a cabo los primeros desarrollos de la teoría. En los años 1985-1988 Dubinsky, junto con algunos colaboradores, desarrollaron estrategias pedagógicas mediante la programación para aprender diversos conceptos matemáticos, dicho trabajo los llevó a publicar el primer libro basado completamente en APOE y el uso de la programación como una herramienta pedagógica. La estrategia empleada en el texto fue primeramente la descomposición genética (modelo hipotético de construcciones mentales que un estudiante probablemente necesite hacer para aprender un concepto matemático), en la cual se describen las acciones, procesos, objetos, esquemas (aunque este último solo se abordó de manera general) y los mecanismos mentales mediante las cuales los estudiantes construyen estas estructuras. Durante 1989-1995 Dubinsky trabajó con varios colaboradores para desarrollar el marco que se conoció como APOE. Desde ese momento se realizaron muchas investigaciones aplicadas en el aula, estas investigaciones condujeron al desarrollo del ciclo de la enseñanza (ECA) por sus siglas en ingles. Finalmente, durante los dos periodos 1983-1984 y 1985-1995, se introdujeron los principales componentes de la teoría APOE.

- Tercer Periodo: este periodo lo podemos dividir en dos etapas, la formación de RUMEC (1995-2003) y después de RUMEC (2003-Presente). Durante los años de 1988-1996 Dubisnky era el recipiente de becas de la Fundación Nacional de Ciencias (NSF), por sus siglas en inglés. La investigación del papel de la abstracción reflexiva y varios informes sobre el cálculo fueron apoyadas por esta subvención, lo que permitió recabar muchísima información sobre entrevistas a los estudiantes que habían estado estudiando conceptos matemáticos basados en la teoría APOE. Debido a la gran cantidad de información, los datos permanecieron sin ser analizados. En 1995 Dubinsky recibió una subvención de cinco años a partir de la NFS, el objetivo llevar talleres de verano para el desarrollo profesional de las matemáticas, dicho proyecto fue titulado Aprendizaje Cooperativo en la Licenciatura de Educación Matemática (CLEME) por sus siglas en inglés. En ese año Dubinsky comunicó al grupo la existencia de los datos recolectados, así que se formó una organización, (RUMEC) con el objetivo de ayudar a los matemáticos a realizar investigación en educación. El método inicial, llevar a cabo la investigación cooperativa en equipos de tres, cuatro, o cinco investigadores. Dicho trabajo fue financiado por cinco años, a partir de 1996 hasta 2001. Los manuscritos se revisaban internamente por la organización de manera anual donde se realizaban observaciones. Dos publicaciones son esenciales en este periodo (Asiala et al 1996) donde realiza una descripción completa de la teoría APOE, una descripción del Ciclo de la Enseñanza (ECA) por sus siglas en inglés y la metodología utilizada en la teoría. La segunda publicación (Weller et al 2003) resume los resultados de la investigación basada en APOE y la enseñanza usando la ECA hasta ese momento.

  RUMEC (2003-Presente). En el año 2001 los fondos se agotaron, por lo que no era posible realizar reuniones del grupo RUMEC, revisiones internas se llevaron a cabo durante algún tiempo, finalmente en el 2003 RUMEC ya no existía como organización. Algunos miembros formaron equipos de investigación de manera individual. Dos ejemplos de investigación de esta organización “Post- RUMEC” dio lugar a la posterior evolución la teoría APOE. Uno de ellos es el desarrollo de la estructura de esquema y el segundo se trata de una serie de estudios que emplean la teoría APOE para investigar el desarrollo de la comprensión en los estudiantes del concepto matemático de infinito. Estos estudios han conducido a la introducción de una nueva etapa potencial en la teoría APOE, la “totalidad” que se encuentra entre la etapa proceso y objeto, sin embargo se necesita realizar más investigación para determinar si la totalidad es una etapa separada o es parte del objeto.

2.2 Abstracción Reflexiva

Como podemos observar, la teoría APOE es muy joven con sus apenas treinta años, dejando la invitación para seguir realizando investigación en este marco teórico. En estos momentos sólo hemos revisado su evolución histórica, lo que nos conduce plantear la siguiente pregunta ¿Qué es la teoría APOE?, para responder es necesario remontar desde sus inicios. La teoría nace cuando Dubinsky reflexionó sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas de educación superior, pero, ¿Qué es la abstracción reflexiva? La respuesta de Piaget consta de dos partes, la primera es sobre la reflexión en un sentido del pensamiento contemplativo y de la conciencia, al cual Piaget lo llama contenido y las operaciones en dicho contenido, todo ello en un nivel cognitivo inferior. Podríamos decir que la conciencia y el pensamiento se encuentran en un estado estático. En la segunda parte nos encontramos en un ambiente dinámico, es decir, la reconstrucción y reorganización del contenido, así como las operaciones en esta etapa superior, convirtiendo al contenido en aquel que se le pueden aplicar nuevas operaciones. Esto condujo a Dubinsky a considerar que la abstracción reflexiva es una herramienta sólida para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos avanzados.

Piaget no creía que la ideas más abstractas y generales provenían de extraer características comunes de un conjunto de objetos (Los objetos pueden ser mentales, no necesariamente físicos), consideraba que el desarrollo del conocimiento de un objeto, requiere que el sujeto actué sobre él y viceversa, es decir, que el objeto y sujeto no pueden estar separados.

Dichas ideas, sientan las bases de las distinciones más sutiles, como lo son las acciones materiales y operaciones interiorizadas, ambas constituyen las diferencias entre las estructuras mentales de *acción* y *proceso*, así como los mecanismos mentales como la interiorización y la encapsulación que conducen a la formación de las diferentes concepciones que constituyen la progresión A→P→ O→E.

Piaget considera que la “abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas” (Arnon et al., 2014, p.7, traducción nuestra). Dubinsky interpreta a las “acciones materiales” como las acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él. Dentro de la teoría APOE las “operaciones interiorizadas” de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual una acción física externa se reconstruye en la mente del sujeto en un proceso, es decir, se realiza la misma acción pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de como un proceso (acción interiorizada) se transforma en un objeto (operación en la cual, en etapas superiores se le pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

Dubinsky interpreta esta situaciones como el desarrollo cognitivo que empieza con acciones, que son interiorizadas en los procesos y luego se encapsulan en objetos a lo que se le pueden aplicar nuevas acciones, todo ello forman un esquema, pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma A→P→ O→E. Sin embargo, aunque se presente en esta forma lineal el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder dentro de las etapas.

2.3 Estructuras mentales y mecanismos mentales

Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y la generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas). Todos ellos se presentan en el siguiente diagrama:

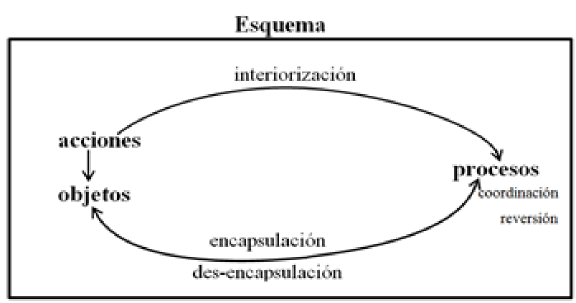


Figura 1. Teoría APOE (Arnon et al., 2014)

Nuevas investigaciones tienen en cuenta la posible etapa de la totalidad, sin que hasta la fecha exista investigación sólida al respecto. A continuación presentamos una descripción de los mecanismos mentales:

- ***Interiorización***: Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras el individuo pasa de tener ayudas externas para tener un control interno. El individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.

- ***Coordinación***: Este mecanismo es descrito como la coordinación general de acciones, se refiere a todas las maneras de emplear una o más acciones para formar nuevas acciones u objetos. Dos o más procesos pueden coordinarse para formar nuevos procesos.

- ***Encapsulación***: Consiste cuando un individuo aplica una acción a un proceso, de manera general consiste en la conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (estructura estática).

- ***Desencapsulación***: Una vez que un individuo a encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo genero, en otras palabras reinvertir el mecanismo que lo genero. Así el individuo puede regresar al proceso siempre que lo desee.

- ***Generalización***: Se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.

Dentro de la teoría APOE los términos concepción y concepto, aunque están relacionados presentan diferentes ideas. McDonald (2000) citado en Arnon et al., (2014) mencionan lo siguiente:

> "La distinción entre la concepción y el concepto está dada en que la primera es intrapersonal (es decir, es la idea que el individuo tiene para comprender) y la segunda es comunal (es decir, un concepto es el resultado de un acuerdo hecho por matemáticos)" (McDonald y et al., 2000, p.78).

Es por ello que cuando un estudiante construye un concepto particular se dirá que ha logrado una concepción de dicha construcción. Estamos entendiendo una concepción como la idea que un estudiante posee de un determinado concepto que puede ser cercana o no a la definición.

Enseguida presentamos una descripción específica de las construcciones mentales tomando como ejemplo el concepto de función:

- ***Acciones*:** Diremos que un estudiante posee una *concepción acción* si realiza las transformaciones de un objeto dirigido externamente, la acción es externa debido a que cada paso de dicha transformación debe realizarse explícitamente y guiado por instrucciones externas, estableciendo una analogía se puede relacionar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo. Por ejemplo un estudiante con una concepción acción del concepto de función relaciona el concepto con la acción de remplazar valores dados en una expresión para obtener otros valores por ejemplo la expresión $F(x) = 3x + 1$. Podemos concluir que un individuo que está limitado a una concepción acción se basa en señales externas.

- ***Procesos*:** Es la estructura mental en la que se realiza la misma operación que la acción sólo que totalmente en la mente del individuo, permitiendo que sea capaz de imaginar la realización de la trasformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita. Puede realizar la transformación sin la necesidad de llevar acabo cada paso. Por ejemplo, una concepción proceso del concepto de función puede llevar acabo la composición de funciones sin estar limitado por su representación, por ejemplo, puede determinar la composición de la función $f \circ g$ donde:
$$f(x) = x^3 + 10 \text{ y } g(x) = \begin{cases} x^2 + 10, x \leq 0; \\ 1 + \cos x \,, x > 0; \end{cases}$$
- ***Objetos:*** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto por tanto el individuo posee una concepción objeto del concepto. El mecanismo de desencapsulación es tan importante como el de encapsulación, debido a que puede regresar al proceso que genero dicho concepto. Por ejemplo la concepción objeto del concepto de función se presenta cuando el estudiante puede tomar dos o más funciones y componerlas obteniendo así una nueva función. Podemos decir que la naturaleza del objeto depende del proceso por el cual fue encapsulado.
- ***Esquemas:*** Un esquema se construye como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. Además, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continua debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Estas construcciones son la base de las estructuras matemáticas de un individuo, las cuales fundamentan la construcción de esquemas. Los esquemas no son estructuras estáticas, más bien, son dinámicas debido a que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas, con esto podemos decir que un esquema no es una estructura terminada, sino que está en constate desarrollo.

Los esquemas pueden ser más o menos coherentes, lo cual está relacionado con la capacidad del individuo para determinar si un esquema le permite solucionar un determinado problema. Al respecto Trigueros (2005) comenta lo siguiente: “Se define un esquema para una parte de la matemática como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas de un individuo que están ligadas, consciente o inconscientemente, en un marco coherente en la mente de un individuo” (Trigueros, 2005, p.15).

El trabajo de la teoría APOE sobre la evolución de los esquemas se ha centrado en la existencia de relaciones entre objetos o esquemas con diferentes conceptos matemáticos. La evolución de los esquemas han sido abordados por muy pocos trabajos, dentro de los cuales, se encuentra una investigación realizada sobre la manera en como los estudiantes construyen la regla de la cadena para la derivación en cálculo (Clark et al., 1997), otro sobre series y sucesiones (McDonald et al., 2000); uno más sobre sistemas de ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2000) y algunas otras investigaciones relacionadas principalmente con el cálculo diferencial. En un trabajo en conjunto de Piaget y García (1996) titulado "Psicogénesis e historia de la ciencia" proponen que los esquemas evolucionan y se pueden distinguir tres fases o etapas, los niveles intra-, inter y trans- dichas etapas se caracterizan por el grado de construcción de relación entre los elementos que constituyen el esquema.

Una mejor descripción de estas etapas dentro de los esquemas es la siguiente:

> […] "En los trabajos publicados se asocia el nivel intra- con la construcción de relaciones entre procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto, el nivel inter- con la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de las matemáticas y el nivel trans- con el hecho de que el estudiante demuestra, a lo largo de su trabajo, de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo es aplicable dicha estructura y cuándo no" (Trigueros, 2005, p.16).

En la actualidad se están desarrollando investigaciones que buscan dar mejor claridad sobre esta construcción y la manera de cómo encontrar evidencias sobre su evolución. En nuestro trabajo buscamos una reflexión específicamente sobre el concepto transformación lineal mediante una descomposición genética en términos de acciones, procesos y objetos, sentimos la necesidad de reportar evidencias que se identifiquen sobre la construcción de esquema.

2.4 Ciclo de Investigación de la teoría APOE

La investigación basada en la teoría APOE implica tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de enseñanza y observación, además de la verificación de datos.

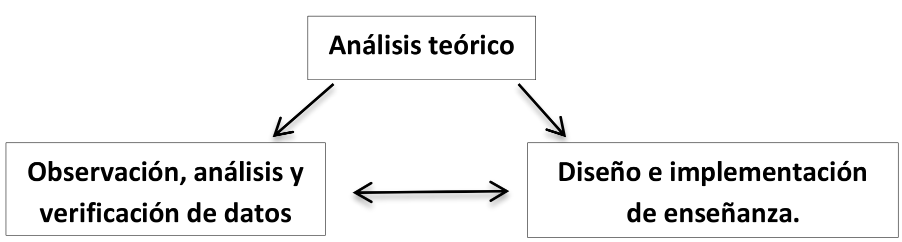


Figura 2. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014, p.94)

Este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada y cercana a los conceptos matemáticos mediante su repetición. A continuación se presenta un breve desglose de cada uno de los elementos del ciclo de investigación:

- *Análisis teórico*: La investigación se inicia con un análisis teórico sobre el concepto matemático, en el cual se toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable en la construcción del concepto.
  "Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado" (Roa y Oktaç, 2008, p.35).
  Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto, que determine un camino viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante una descripción de las construcciones mentales y mecanismos mentales que un estudiante puede realizar para la construcción de su comprensión de un concepto matemático. Cabe señalar que una descomposición genética de un concepto no es única, ya que en ella dependen los caminos de construcción del concepto y de las estructuras definidas en los estudiantes. Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de los tres componentes del ciclo de la investigación lo que permite documentarla con los datos empíricos y refinarla.

- *Diseño e implementación de la enseñanza:* El análisis teórico conduce al diseño e implementación de la enseñanza, cuyas actividades están destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Actividades y ejercicios están encaminados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlos en procesos, encapsular procesos en objetos y la coordinación de dos o más procesos para la construcción de nuevos procesos. Así también una gran variedad de estrategias pedagógicas como el aprendizaje cooperativo y la resolución de problemas en grupos pequeños entre otras. Estos diseños que fueron construidos con base en la descomposición genética, debe reflejar las construcciones expuestas en ella y los mecanismos de construcción mediante los cuales los estudiantes pueden realizar dichos conceptos.

- *Análisis y verificación de datos:* La ejecución de la enseñanza permite la oportunidad de recolectar datos y analizarlos, los resultados obtenidos mediante la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados y cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben, el propósito es responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico? ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el contenido matemático?, si la respuesta a la primera pregunta es negativa, la instrucción es reconsiderada y revisada. Ahora bien si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la segunda negativa, el análisis teórico es reconsiderado y revisado. En cualquiera de los casos el ciclo se repite hasta que las respuestas de ambas sean afirmativas y el instructor/investigador está convencido de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos suficientemente bien. En otras palabras el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico compartan las mismas construcciones mentales.

En conclusión podemos decir que una descomposición genética refinada para esta etapa de la investigación puede ser mejorada mediante la repetición de este ciclo de investigación.

Weller et al. (2003) clasifica los estudios de investigación en cuatro tipos:

- *Estudios comparativos*: este estudio compara el rendimiento de los estudiantes que recibieron instrucción usando la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza (ECA), con los estudiantes que completaron un curso de matemáticas de manera tradicional.
- *Estudios no comparativos*: miden el rendimiento de los estudiantes que completaron un curso utilizando la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza.
- *Estudios sobre el nivel de desarrollo cognitivo*: son aquellos en los que los estudiantes completaron un curso basado en la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza o un curso de modelo tradicional.
- *Comparaciones de las actitudes de los estudiantes a largo plazo en cursos basados en APOE y (ECA)*: el propósito es investigar el efecto de las estrategias pedagógicas basadas en la actitud de los estudiantes en comparación con los estudiantes que completaron el curso de matemáticas basado en la instrucción de manera tradicional. (p.98).

2.5 Descomposición genética

Antes de abordar la descomposición genética propuesta para nuestra investigación, es necesario conocer lo que se entiende por descomposición genética.

Una descomposición genética lo definen Arnon et al (2014) de la siguiente manera: “Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.” (p.27). Por lo general una descomposición genética comienza como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores. Una descomposición hasta que no se prueba experimentalmente, es una hipótesis y se conoce como preliminar. Es posible que un concepto pueda constar de varias acciones diferentes, procesos y objetos, la descomposición genética puede incluir una descripción de cómo estas estructuras están relacionadas y organizadas dentro de una estructura mental más grande llamado esquema. Además, describe cómo un concepto podría construirse mentalmente, de igual manera podría incluir una descripción de las estructuras pre-requisito que un individuo necesita haber construido previamente, los cuales podrían explicar diferencias en el desarrollo de los estudiantes en el rendimiento matemático.

Una descomposición genética preliminar puede guiar el desarrollo de la instrucción del concepto. Como lo vimos en el ciclo de la investigación la instrucción permite la recopilación de datos y su respectivo análisis, lo que puede conducir a una revisión de dicha descomposición o la instrucción, en dicha etapa ya no se considera preliminar, ya que cada refinamiento conduce a una nueva revisión de la instrucción ofreciendo un nuevo análisis de los datos.

Es importante que una descomposición genética prediga las construcciones mentales a partir del análisis de los datos recogidos por los diseños experimentales. Cabe mencionar que una descomposición genética no explica qué pasa en la mente de una persona, más bien describe las estructuras que el estudiante necesita para construir el aprendizaje de un concepto.

Algunas descomposiciones genéticas se han diseñado considerando las descripciones matemáticas de un concepto, junto con las experiencias de los investigadores (como estudiantes o profesores). Otras han sido diseñadas a partir de los datos de la educación matemática, no necesariamente utilizando la teoría APOE, sino más bien, considerando las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de un concepto particular. Otras más, basadas en los datos obtenidos por medio de las observaciones de los estudiantes que están aprendiendo un concepto matemático. El diseño de una descomposición genética también se puede basar en el desarrollo histórico del concepto o mediante el análisis de materiales de texto.

Una descomposición genética actúa como una gran lente que los investigadores utilizan para explicar cómo los estudiantes desarrollan o no, su comprensión de los conceptos matemáticos, así también una descomposición genética guía el análisis. Por otro lado, señala las deficiencias en la comprensión de los investigadores de cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo. Podemos decir que es una herramienta mediante la cual los investigadores tratan de dar sentido de como los estudiantes construyen el aprendizaje de un determinado concepto y explicar las razones de las dificultades de los estudiantes, también funciona como una herramienta de diagnóstico y de predicción. Una descomposición genética necesita ser probada experimentalmente, con el propósito de responder la siguiente pregunta: ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales requeridas por el modelo teórico?, si se observan las construcciones descritas, se apoya el modelo. Si los resultados obtenidos difieren de lo que se describe en la descomposición genética, entonces se refina. Por otro lado, si las diferencias son demasiado grandes el modelo se desecha a favor de una nueva descomposición genética.

Una descomposición genética no es única, es decir, no proporciona una única forma en la que todos los estudiantes construyan un concepto matemático específico, su valor reside en que describe aquellas construcciones que se encuentran en los estudiantes y que son requeridas por la mayoría en el aprendizaje de un concepto. Una descomposición genética pude ser diseñada por diferentes investigadores, para describir el aprendizaje de un concepto particular. Si estas descomposiciones genéticas son apoyadas por los estudios empíricos en las construcciones realizadas por los estudiantes, todas ellas podrían considerarse como razonables.

Además de ser un modelo teórico para la investigación, la descomposición genética puede guiar la instrucción de un concepto, aparte de que describe las construcciones que un estudiante puede necesitar cuando aprende un concepto matemático. En un diseño de enseñanza basado en la teoría APOE se proponen actividades para que los estudiantes trabajen colaborativamente y cada actividad está diseñada para fomentar la interiorización de acciones en procesos, para ayudar a la coordinación y la reversión de procesos, así como apoyar la encapsulación de procesos en objetos. También se busca la construcción de relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas previamente construidos.

2.6 Investigación realizada por Roa y Oktac (2008)

En dicha investigación abordan el concepto de transformación lineal desde su definición matemática formal, es decir, como una función definida entre dos espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales. Su objetivo principal es dar cuenta de las construcciones mentales que los estudiantes realizan mediante mecanismos mentales sobre el concepto transformación lineal, con este fin propusieron una descomposición genética. Además propusieron dar respuesta a las siguientes preguntas: “¿Qué elementos previos debe poseer un estudiante para poder abordar de manera exitosa el concepto transformación lineal? ¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados con dicho concepto?”. Para ello plantearon el siguiente objetivo general: “Identificar y analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes y los mecanismos cognitivos asociados al construir el concepto transformación lineal, mediante el desarrollo del ciclo de investigación planteado por la teoría APOE” (Roa y Oktaç, 2008, p.14).

La metodología de esta investigación fue la descrita por el ciclo de investigación de la teoría APOE. La investigación se centró en la construcción formal del concepto. Para poder construir dicho concepto consideran que los estudiantes debieron haber construido previamente algunos elementos como: el esquema de función y un esquema de espacio vectorial. Bajo el análisis teórico se propusieron dos caminos para la descomposición genética:

- El primer camino supone que el estudiante primero construye el concepto de transformación. Ya que se inicia describiendo la construcción de dos procesos establecidos por las propiedades de linealidad, podría considerarse que el estudiante debe poseer una concepción objeto del concepto transformación, debido a que las propiedades 1 y 2 son transformaciones sobre T donde es posible determinar si dicho objeto cumple o no con una de las dos propiedades.
- El segundo camino, el objeto espacio vectorial es asimilado por el esquema de función, debido a que el estudiante generaliza su esquema de función y comienza analizar funciones definidas entre espacios vectoriales.

Dichas descomposiciones se analizarán con mayor profundidad en el siguiente capítulo. Las investigadoras consideran que el segundo camino es más cercano a las construcciones que realizan los estudiantes debido a la forma que se presenta el contenido en el aula. En este camino consideran la construcción de dos propiedades:

1. ***Propiedad 1***. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T: U \rightarrow V$ una función tal que $\forall\, u_{1,}\, u_2 \in U$ se tiene que $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.
2. ***Propiedad 2***. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T: U \rightarrow V$ una función tal que $\forall\, u \in U$ y para todo $c \in K$ se tiene que $T(cu) = cT(u)$.

Los autores señalan que si el estudiante verifica las propiedades 1 y 2 para casos concretos, es decir, tomando vectores y escalares particulares diremos que posee una concepción acción, también señalan que es posible que los estudiantes parecieran manipular la forma general de un vector para las propiedades antes mencionadas, como un representante de los elementos del espacio vectorial, no obstante, no puedan generalizar el cumplimiento para todos los elementos del dominio (estado intermedio entre acción y proceso), es decir, no aparece de manera explícita el cuantificador universal $\forall$. Si el estudiante comienza a pensar en vectores generales del dominio diremos que las acciones se han interiorizado y que el estudiante posee una concepción proceso. En este punto surge una nueva etapa que es cuando son capaces de coordinar las propiedades 1 y 2 compactándose en una sola: $T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2)$ para todo par de vectores en U y $\forall \alpha, \beta \in K$, lo que equivale a determinar la linealidad. En esta situación se considera que el estudiante posee una concepción proceso del concepto. Finalmente, cuando el estudiante logre pensar en la transformación lineal como un todo pudiendo realizar conscientemente transformaciones sobre él se dirá que posee la concepción objeto. En seguida mostramos el diagrama de la descomposición genética propuesta:

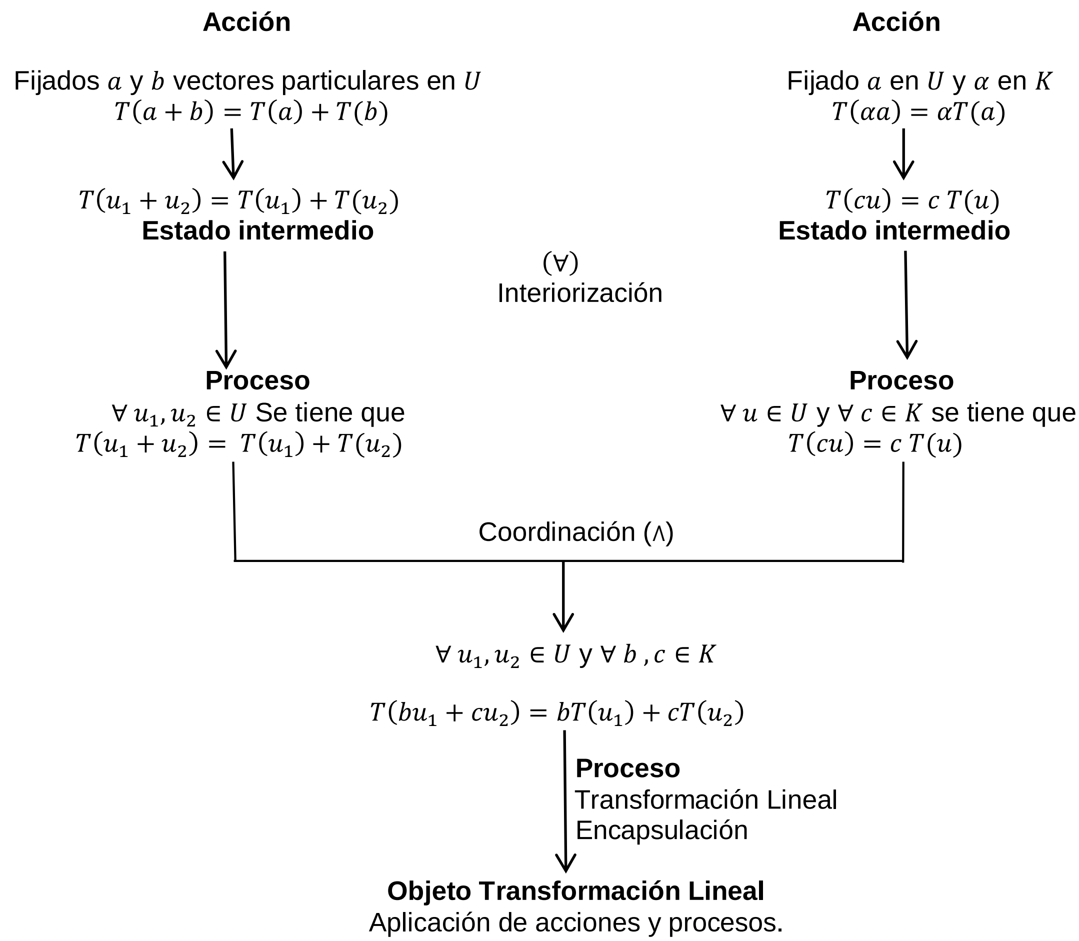


Figura 3. Descomposición genética (Roa y Oktaç, 2008, p.46).

Con base en la descomposición genética diseñaron un cuestionario de diagnóstico, con la finalidad de determinar a los estudiantes que participarían en la entrevista. El diagnóstico se aplicó a un total de diecisiete estudiantes, ocho de la Licenciatura en Matemáticas, ocho de Estadística y uno de Ingeniería Mecánica, cada uno de ellos contó con noventa minutos para realizar la prueba de siete preguntas, cada una tenía el objetivo de evidenciar en qué etapa se encontraba la construcción del concepto transformación lineal dentro de la teoría APOE. Aquellos estudiantes que evidenciaban haber comenzado a construir mejor el concepto y contaban con mejores argumentos para continuar su desarrollo se les aplicó una entrevista con el objetivo de determinar la validez de las hipótesis que se plantearon mediante los resultados del diagnóstico. La entrevista se aplicó a siete de los diecisiete estudiantes. Esperaban encontrar información más clara sobre la concepción proceso del concepto, además de identificar ciertas conductas que les permitieran caracterizar con mayor claridad el concepto transformación lineal.

Los resultados ponen en evidencia que los estudiantes construyen el concepto mediante el segundo camino propuesto por la descomposición genética.

A continuación presentamos las evidencias de las construcciones mentales que se hicieron presentes.

Concepción acción de las propiedades, se pudo encontrar que algunos estudiantes argumentan la existencia de una trasformación lineal mediante el cumplimiento de las propiedades para vectores y escalares particulares, algunos más tuvieron dificultades en evaluar la función para valores concretos. Los autores hacen hincapié que si un estudiante no posee las estructuras adecuadas de vector y función, no podrá avanzar en la comprensión del concepto transformación lineal.

Estado intermedio entre la concepción acción y proceso, esta atapa se hizo presente en algunos estudiantes debido que no emplearon el uso del cuantificador ∀ en la solución de algunos problemas, así mismo, cuando se les pido definir lo que es una transformación lineal dieron evidencia en pensar en casos particulares de espacios vectoriales, sin definir lo que lo hace lineal. Los estudiantes dan muestras de comenzar a pensar en forma general sin que a un lo hayan logrado.

Concepción proceso de trasformación lineal, en esta etapa los estudiantes evidenciaron que definen el concepto transformación lineal en términos del cumplimiento de las dos propiedades antes mencionadas, pudieron presentar un contra ejemplo en aquellas transformaciones que no son lineales, además lograron demostrar mediante la preservación de combinaciones lineales, tienen la capacidad de elegir el tipo de argumento para validar sus respuestas y algo que también se observó fue que no usaron los cuantificadores de manera explícita, pero bajo el contexto de sus respuestas evidenciaron tenerlos implícitamente.

Concepción objeto del concepto trasformación lineal, los estudiantes que evidenciaron poseer este nivel se caracterizaron por generar objetos de la misma especie como resultado de la aplicación de acciones (suma de transformaciones lineales) a objetos dados, así mismo son capaces de establecer conexiones con otros conceptos gracias a las estructuras que poseen.

Ahora se presentan los datos obtenidos mediante la entrevista:

- Concepción acción del producto por un escalar: En las entrevistas los investigadores identificaron la preservación del producto por un escalar de una manera independiente y relacionada con el concepto de transformación lineal, uno de los estudiantes pone en evidencia esta situación y hace notar que la suma vectorial pasa hacer invisible dentro de sus argumentos, para él la expresión $S(ap + bq) = aS(p) + bS(q)$ la considera como dos veces la expresión $S(ap) = aS(p)$, como la propiedad del producto por un escalar sin tener en cuenta la suma vectorial. En la entrevista comenta "Es tener lo mismo dos veces". Otra situación que se hizo presente es que un estudiante dentro de su concepción del cuantificador le hace pensar en demostrar para un caso particular es equivalente en demostrar para cualquier elemento del espacio y cualquier elemento del campo. Las investigadoras afirman que el estancamiento en esta concepción se presentan por la falta de estructuras previas que son consideradas fundamentales en la construcción del concepto.

- Concepción proceso de transformación lineal: Se pudo observar que uno de los estudiantes durante la entrevista puso en evidencia esta etapa, ya que no necesitó desarrollar paso a paso sobre los elementos del proceso, sino más bien pudo pensar sobre ellos. Sólo cinco estudiantes dieron evidencias de tener una concepción proceso ya que definen el concepto de transformación lineal en términos del cumplimiento de las dos propiedades, no obstante al demostrar que una función es una transformación lineal lo realizan por medio de la conservación de combinaciones lineales, también se observó que no emplean los cuantificadores explícitamente pero es evidente que los consideran implícitamente, solamente evidenciaron el uso de cuantificadores cuando se les pidió que definieran el concepto transformación lineal. Por otro lado los estudiantes con esta construcción muestran una concepción muy clara de los vectores como objeto.

- Concepción objeto de transformación lineal: Este tipo de construcciones fue evidente en cinco estudiantes en diferentes grados de complejidad, ellos dieron evidencia de haber encapsulado el proceso de combinación lineal, lo cual les permite desencapsular el objeto y relacionarlos con otros conceptos a medida que la situación así lo requería.

Es evidente que las estructuras de función como esquema y espacio vectorial como objeto son indispensables en la construcción del concepto transformación lineal.

En su descomposición genética habían considerado un estado intermedio entre la concepción acción y proceso determinado por el uso de los cuantificadores, es decir, los estudiantes consideran solamente a vectores particulares en el cumplimiento de las propiedades sin considerarlos de manera general para todo elemento del espacio vectorial, no obstante, los resultados de la investigación ponen en evidencia que aunque no usen específicamente los cuantificadores sus respuestas evidencian que consideran el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos del espacio vectorial, ésta situación guío a un refinamiento de su segunda descomposición genética, dicho refinamiento será detallado en el siguiente capítulo.

Con base en los resultados, las investigadoras consideran que la coordinación entre los procesos de preservación de la suma de vectores y la conservación del producto por un escalar es un camino viable para la construcción del concepto transformación lineal. Consideran que si los estudiantes perciben de manera aislada estas dos condiciones será imposible que evolucionen.

También hallaron que los estudiantes que poseen una concepción proceso de una transformación lineal pueden determinar, previamente a la realización de acciones sobre una función dada, si es una transformación lineal o no, además, son capaces de elegir la manera de validar sus argumentos, ya sea mediante la demostración de preservación de operaciones (suma vectorial y producto por un escalar) o la preservación de combinaciones lineales, en caso contrario proporcionar un contra ejemplo. Concluyeron que el hecho de que un estudiante posea la capacidad para describir ciertas transformaciones lineales y generar otras, a partir de un determinado procedimiento, no es suficiente para asegurar que posea una concepción objeto de este concepto. Para las investigadoras, un estudiante que muestra evidencias de poseer esta concepción objeto tiene la capacidad de regresar sobre el proceso que lo generó, en este caso su concepción proceso debe estar fundamentada sobre la preservación de combinaciones lineales. El análisis de los resultados muestra evidencias de la necesidad de construir este concepto de manera paralela a otros, principalmente sobre el concepto de base.

Finalmente, terminan proponiendo un modelo de enseñanza el cual consiste en analizar funciones entre espacios vectoriales que cumplan con una u otra propiedad, así como las implicaciones del cumplimiento de una propiedad sobre la otra.

Capítulo 3 Desarrollo de la investigación y Resultados

En el presente capítulo se describe el diseño del instrumento de medición fundamentado en la descomposición genética en la cual basamos nuestra investigación. Se presenta un análisis de los libros de texto recomendados en el programa de álgebra lineal de nuestra población de estudio, al igual que un análisis para cada pregunta de dicho instrumento donde se señalan las posibles soluciones que los estudiantes pueden dar y los mecanismos y estructuras mentales que se describen en la descomposición genética.

Presentamos la descomposición genética en la cual basamos nuestra investigación. Así como el análisis de los datos obtenidos, mostrando las construcciones y mecanismos mentales que se presentaron en los estudiantes sobre la construcción del concepto transformación lineal.

3.1 Diagnóstico

Con los elementos que hemos abordado hasta el momento estamos en condiciones de presentar nuestro estudio. La metodología que empleamos en esta investigación se rige por el ciclo de investigación de la teoría APOE, pero sin implementar los resultados en la enseñanza.

Nuestra investigación la hemos centrado en la construcción formal del concepto transformación lineal, sin tener en cuenta su representación geométrica ni su representación matricial.

El objetivo principal de la aplicación del instrumento de diagnóstico es buscar evidencias de las construcciones y mecanismos mentales del concepto transformación lineal presentes en los estudiantes que han recibido instrucción mediante un curso tradicional de álgebra lineal, así también, verificar qué tan acertada es la descomposición genética en la cual basamos nuestra investigación.

El cuestionario de diagnóstico fue tomado de Roa y Oktaç (2008) al cual se le realizaron algunas modificaciones para fines de nuestro trabajo. En el diseño del cuestionario se tuvieron en cuenta los siguientes elementos: descomposición genética preliminar, que los problemas planteados en el cuestionario ofrecieran evidencias de las construcciones mentales mencionadas en la descomposición genética preliminar, y el análisis de los libros de texto utilizados por los estudiantes.

Los libros de texto de apoyo recomendados por el programa de álgebra lineal de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, para el tema transformaciones lineales, presentan las siguientes definiciones:

1. Sean V y V' los espacios vectoriales sobre el campo K. Una aplicación lineal $F: \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ es una asignación que satisface las siguientes dos propiedades:
   LM1. Para todo elemento $u\,, v$ en V tenemos $F(u+v) = F(u) + F(v)$.
   LM2. Para todo c en K y v en V tenemos $F(cv) = cF(v)$.
   Si queremos especificar el campo K, también se dice que F es K-lineal.
   Puesto que por lo general tratamos con un cuerpo K fijo, omitimos el prefijo K, y decimos simplemente que F es lineal. (Serge Lang, 1975, p.51).

2. Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,
   (1) $T(u+v) = Tu + Tv$ y
   (2) $T(\alpha \mathrm{v}) = \alpha T v$

   (Grossman Stanley, 1996, p.460).

3. Sean V y W espacios vectoriales reales (sobre F). Una función $T: V \to W$ se llama transformación lineal de V en W si para toda $x, y \in V$ y $c \in F$ tenemos que:
   (a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$.
   (b) $T(cx) = c\,T(x)$.

   A menudo denominaremos a T simplemente lineal.

   (Stephen Friedberg, 2003, p.63).

Presentamos las definiciones de los textos anteriores debido a que corresponden a los libros recomendados en el programa de las Licenciaturas en Matemáticas Aplicadas y Actuaría, cuyos estudiantes participaron en nuestra investigación.

Como podemos observar, la definición presentada por Serge Lang, (1975) define la naturaleza de V y V' como espacios vectoriales, lo que llama la atención es el empleo del término aplicación, el cual puede generar algún conflicto con el estudiante, ya que los autores restantes no la emplean en sus definiciones, por lo que es necesario que el catedrático establezca la relación entre aplicación y función como sinónimo. La definición establece el papel que tiene el campo K sobre la aplicación, más aun, determina que una aplicación es lineal si cumple las propiedades de preservación de la suma vectorial bajo la aplicación lineal, así como la preservación del producto de un vector por un escalar bajo la aplicación lineal definidos en los espacios vectoriales V y V'. También podemos observar que si deseamos especificar el campo K, se dice que F es K-lineal.

Por otro lado, la definición de Grossman Stanley (1996) presenta a V y W como espacios vectoriales reales, sin generalizarlos como espacios vectoriales. Desde nuestra perspectiva consideramos que la definición conduce al alumno a construir las transformaciones lineales sobre espacios vectoriales particulares. Consideramos que la definición de Serge Lang se presenta de una manera más general, debido a que hace énfasis sobre el cumplimiento de las dos condiciones para que una función sea lineal entre espacios vectoriales. Aunque no se mencionan los cuantificadores de manera explícita en la definición de Grossman, bajo su contexto se entiende que las dos propiedades se deben cumplir para todos los elementos del dominio y codominio, de la misma manera para todo escalar α. Este último escalar, por su naturaleza, se entiende que se encuentra en el campo K, sin que se especifique si se trata de los $\mathbb{R}$ o de algún otro campo.

Finalmente, se considera la definición presentada por Stephen Friedberg (2003) debido a que en el programa de estudios aparece como texto complementario. Al igual que en la definición presentada por Grossman toma a V y W como espacios vectoriales reales sobre un campo (F) sin que se especifique su naturaleza. Afirma que una función T es una transformación lineal de V en W si preserva la suma vectorial y el producto de un escalar por un vector sobre los espacios vectoriales de naturaleza real. Nuevamente, como en la definición presentada anteriormente, no aparece el uso explícito de cuantificadores, se entiende que se debe cumplir para todos los elementos del dominio y codominio al igual que para todo escalar.

Como podemos observar, ninguna de las definiciones presenta a la transformación lineal como la preservación de combinaciones lineales. Sin lugar a dudas se debe buscar que los estudiantes establezcan esta relación con las definiciones anteriores.

3.1.1 Construcciones previas necesarias

Con base en el análisis de los distintos trabajos que abordan el concepto transformación lineal, es evidente que los estudiantes no logran asimilar dicho concepto, ya sea por poco interés o por la complejidad que representa para ellos su carácter abstracto. Por lo que en muchos casos terminan actuando de manera repetitiva haciendo uso de expresiones y resultados que no son nada claros para ellos. Para Roa y Oktaç (2008) "este fenómeno se presenta debido a la desconexión entre los elementos básicos del álgebra lineal" (p.39). Otro factor que consideran se debe a que los estudiantes no poseen las estructuras previas necesarias para la construcción del concepto, lo que no les permite que avancen en el desarrollo de sus estructuras mentales.

Al igual que las investigadoras consideramos que un esquema maduro del concepto función fundamenta el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, lo cual encamina a los estudiantes a tener mayor éxito en la construcción del concepto transformación lineal, ya que sin él sería imposible avanzar. Para la investigación se consideran funciones $f: U \rightarrow V$, cuyo dominio y codominio son espacios vectoriales sobre un campo K, donde la función asigna a cada vector $u \in U$ un vector $v \in V$, por lo que se espera que el objeto espacio vectorial sea asimilado por el esquema de función. Bajo este esquema, el estudiante puede recurrir a las funciones como objeto, desencapsulando el proceso por el cual dicho objeto fue construido y aplicarlo a una determinada situación. Por otro lado, consideramos que una concepción previa de espacio vectorial como esquema permite las construcciones de vector y combinación lineal como objetos. Finalmente consideramos que es suficiente que el estudiante posea una concepción proceso del concepto de operación binaria, debido a que es esencial en la construcción del esquema de espacio vectorial. En otras palabras para iniciar la construcción del concepto transformación lineal es necesario que el estudiante posea de manera previa un esquema de función y de espacio vectorial.

3.2 Descomposición genética preliminar del concepto de trasformación lineal

La descomposición genética preliminar que consideramos para nuestra investigación ha sido tomada del trabajo realizado por Roa y Oktaç (2008), en el cual se proponen dos descomposiciones genéticas.

El primer camino propuesto por las investigadoras sobre la construcción del concepto trasformación lineal, parte de suponer que primeramente el estudiante construye el concepto de transformación (Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K la función $T: U \rightarrow V$ se denomina transformación). Debido a que se inicia describiendo la construcción de dos procesos establecidos por la propiedad de linealidad, se considera que el estudiante posea una concepción objeto del concepto transformación, las propiedades 1 y 2 son transformaciones sobre T , donde es posible determinar si dicho objeto cumple con una de las dos propiedades o no.

El segundo camino presenta el objeto de espacio vectorial asimilado por el esquema de función. El estudiante generaliza su esquema de función e inicia analizando funciones definidas entre espacios vectoriales. Las investigadoras consideran que este camino es el más cercano a las construcciones que hace el estudiante por la forma que se presentan los contenidos en el aula y como aparece en los libros de texto. Durante el análisis de los datos empíricos obtenidos en su investigación muestran evidencia de este hecho lo que las conduce a realizar un refinamiento de su descomposición genética propuesta inicialmente.

Para nuestra investigación presentamos las dos descomposiciones genéticas, pero sin duda es en la recolección de datos empíricos y su análisis donde encontraremos evidencia o no, de la presencia de la primera descomposición genética. Una característica fundamental y común entre los dos caminos que presentamos es que consideran la construcción de las propiedades de linealidad de manera independiente. A continuación presentamos los dos caminos antes mencionados.

Camino 1: Objeto transformación como objeto preliminar

Esta descomposición genética comienza con la construcción general de transformación entre dos espacios vectoriales. Este concepto debió haber sido construido como un objeto. El objeto transformación se desencapsula en el proceso que lo generó y mediante la coordinación del proceso de transformación y el de operación binaria (suma vectorial) a través del cuantificador universal $\forall$ generen un nuevo proceso para determinar si la transformación satisface la propiedad de adición para todo par de vectores en el dominio. Esta coordinación se presenta específicamente cuando el estudiante considera que la trasformación T puede ser aplicada a todos los elementos del dominio y que al sumar dos vectores arbitrarios $u_1, u_2 \in U$ el vector resultante $u_1 + u_2 \in U$, esto debido a que U es un espacio vectorial, por lo tanto es posible determinar su imagen bajo T. Diremos que el estudiante posee una concepción proceso de dicha propiedad, si considera el cumplimiento para todo par de vectores en U.

De la misma manera, mediante la coordinación entre los procesos de transformación, multiplicación por un escalar y mediante el cuantificador universal $\forall$ generen un nuevo proceso, con el objetivo de determinar si la transformación satisface la propiedad del producto de un escalar por un vector, para cada vector del dominio y cada escalar de un campo arbitrario. Esta coordinación mediante el cuantificador se presenta específicamente cuando el estudiante compara los vectores $T(cu)$ y $cT(u)$ pensando de manera general en el cumplimiento de dicha propiedad para todo elemento $u \in U$ y $c \in K$.

Como podemos observar la construcción del proceso de ambas parte de la coordinación de dos procesos, más no como interiorización de acciones. Enseguida presentamos el diagrama que representa esta descomposición genética:

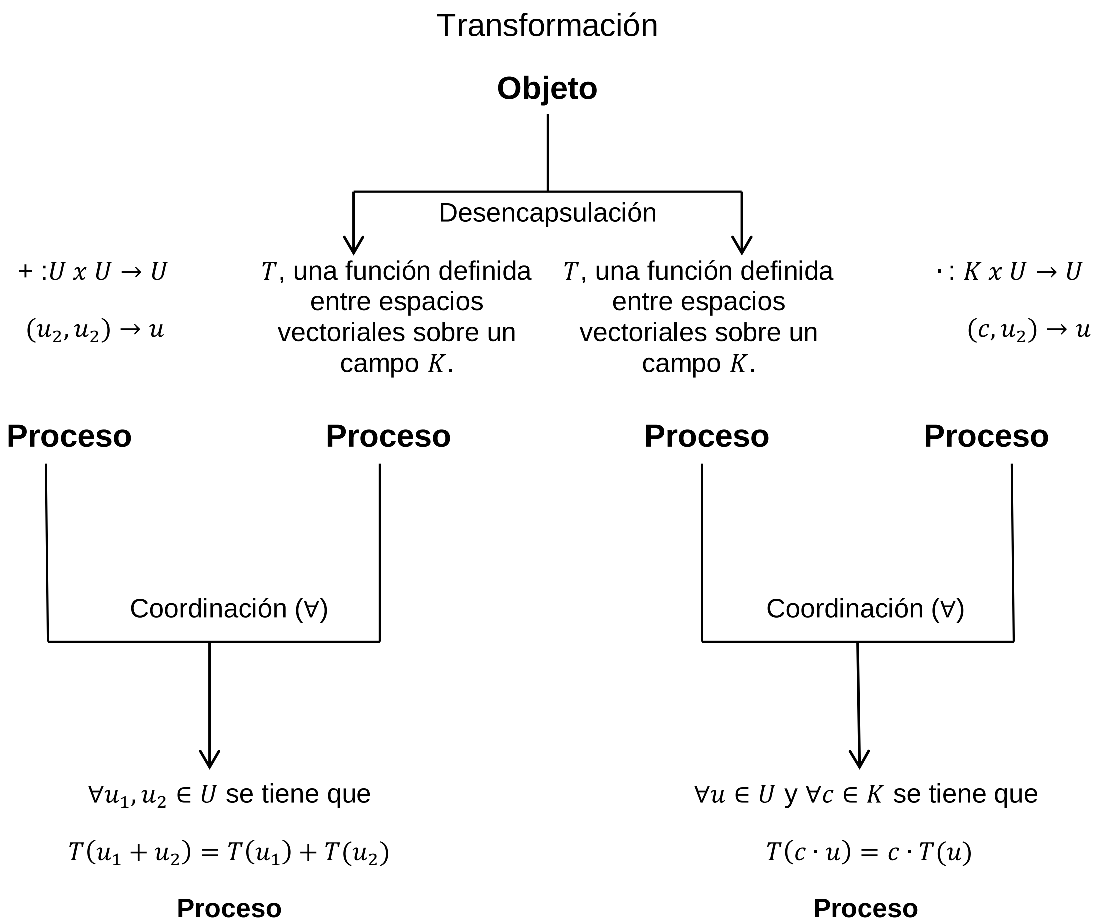


Figura 4. *Objeto transformación como elemento preliminar* (Roa y Oktaç, 2008, p.44)

Camino 2: Asimilación del espacio vectorial por el esquema de función

La segunda descomposición genética, es un refinamiento de la investigación realizada por Roa y Oktaç (2008). Nuestro objetivo es tomar como referencia esta descomposición genética y mediante el análisis de los datos obtenidos de nuestro diagnóstico comprobar que realiza una mejor descripción de las estructuras y mecanismos mentales presentes en los estudiantes. De lo contrario proponer un segundo refinamiento.

Esta descomposición genética considera la construcción de las dos propiedades mediante acciones específicas, ambas propiedades se construyen como resultado de la interiorización de una acción. Enseguida se presenta un análisis de cada una de estas construcciones.

Propiedad 1. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T: U \rightarrow V$ una función tal que $\forall \: u_{1,} \: u_2 \in U$ se tiene que $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.

Esta propiedad involucra la operación suma entre elementos del espacio vectorial, los cuales generan nuevos elementos del espacio. Mediante la asimilación de espacio vectorial por el esquema de función, el estudiante podrá determinar que la suma de dos elementos arbitrarios de U es un nuevo elemento de U, por lo que es posible determinar su imagen en V. De manera análoga podrá determinar que la suma de dos vectores cualesquiera de V es un nuevo vector en V. Así, el estudiante establecerá en este momento que el dominio y el codominio de la función T son espacios vectoriales, por lo tanto son cerrados bajo la operación binaria (+) definida en cada espacio vectorial U, V.

Si un estudiante toma dos vectores particulares del dominio (U) y los suma mediante la operación definida en U y determina su imagen bajo T como un elemento de V, por otro lado transforma dichos vectores bajo T y los suma mediante la adición definida en V obteniendo un nuevo elemento en V, para que finalmente compare los vectores resultantes, diremos que el estudiante posee una *concepción acción* de la propiedad 1. Como lo mencionamos al inicio, el estudiante sólo verifica el cumplimiento de la propiedad para vectores particulares de U y no puede considerar el cumplimiento de la propiedad para todos los vectores de U de manera general bajo la transformación T.

Si el estudiante comienza a pensar en la forma general de los elementos del espacio vectorial U, ya no considera vectores particulares, sino vectores en general, diremos que dichas acciones se han interiorizado y por tanto el estudiante posee una *concepción proceso* de la propiedad 1. Puede pensar en el cumplimiento o no de la propiedad para todos los vectores del espacio vectorial y de la forma como T actúa sobre ella de manera mental.

Propiedad 2. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T: U \to V$ una función tal que $\forall\, u \in U$ y para todo $c \in K$ se tiene que $T(cu) = cT(u)$.

La propiedad involucra la operación (·) el producto de un escalar por un vector del espacio vectorial, con el escalar en el campo K. Mediante la concepción de espacio vectorial, el estudiante podrá determinar que el producto de cualquier elemento del espacio vectorial U y del campo K son nuevos elementos de U, por tanto considerar la cerradura de la operación (·) para U, de manera análoga para la operación (·) definida en el espacio vectorial V.

Por medio de la asimilación de espacio vectorial por el esquema de función el estudiante podrá considerar el cumplimiento de esta propiedad. Si el estudiante verifica la propiedad para casos particulares, es decir, toma un vector específico y un escalar específico de K y verifica dicha propiedad diremos que posee una *concepción acció*n de la propiedad 2. En este caso solamente considera el cumplimiento de la propiedad para elementos particulares de U y K. Cuando el estudiante puede pensar en el vector $u \in U$ de manera general y determine $T(cu)$ y $cT(u)$ como elemento del espacio vectorial V y pueda compararlos (bajo una concepción objeto de vector) y establece el cumplimiento o no de la propiedad para todo elemento de U y para todo elemento del campo K, diremos que el estudiante posee una *concepción proceso* de la propiedad 2. En otras palabra le permite pensar en el cumplimiento de la propiedad para todo elemento del dominio de T.

Una vez que el estudiante logra una concepción proceso de ambas propiedades, estas deben coordinarse mediante el conectivo lógico ($\wedge$), ya que el cumplimiento simultáneo de los dos procesos determinarán la función como una transformación lineal. Con las propiedades 1 y 2 el estudiante ha considerado dentro de su universo transformaciones que cumplen la propiedad una o dos, sin embargo ahora debe identificar aquellas que cumplen con ambas propiedades. La coordinación de ambas propiedades se logra cuando el estudiante puede considerar su cumplimiento simultáneamente. Ambas propiedades se pueden unir en una sola $T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2)$ para todo par de vectores en U y $\forall \alpha, \beta \in K$, que es equivalente a determinar la linealidad de la función. En este momento consideramos que el estudiante posee una *concepción proceso* del concepto transformación lineal como resultado de la coordinación de ambas propiedades. Si un estudiante no ha logrado construir el objeto función no lograra construir el concepto transformación lineal como un proceso. Esta concepción pone en juego un concepto fundamental, el concepto de combinación lineal. Una vez que el estudiante logra ver la transformación T como una función que preserva combinaciones lineales, es decir, que preserva la adición y el producto escalar definido en su dominio y codominio se considera que está preparado para encapsular este proceso en un objeto.

Se dirá que un estudiante ha encapsulado este proceso en un objeto cuando logre pensar en la transformación lineal como un todo, y pueda realizar de manera consiente transformaciones sobre él. El trabajo de investigación realizada por Roa y Oktaç (2008) proponen dos maneras de categorizar la construcción de este objeto: “están determinadas por la generación de nuevas transformaciones lineales mediantes las operaciones suma, producto o composición definidas para estos objetos y, mediante el análisis de preguntas específicas sobre las características o propiedades de este concepto” (p.48). Además ofrecen la siguiente descripción para cada una de las dos categorías:

- *Construcción de nuevos objetos.* En su trabajo de investigación desglosan los siguiente ejemplos que pertenecen a esta categoría, si el estudiante considera la siguiente transformación lineal $T: U \to V$ donde U y V son espacios vectoriales sobre un campo K, con $a \in K$, puede definir una nueva transformación aT el cual asigna a cada vector $u \in U$ un vector $aT(u) \in V$. Por medio del mecanismo mental de la desencapsulación del objeto transformación lineal se podrá verificar que la transformación $aT: U \to V$ es una nueva transformación lineal. Generalizando podrá generar nuevas transformaciones lineales como resultado de la multiplicación de los escalares que se encuentran en K (campo), encapsulando como nuevos objetos de su conjunto de transformaciones lineales. Considerar a las transformaciones lineales como elementos que pueden sumarse, requiere que el estudiante recurra a su esquema de función y considere el proceso mediante el cual se define la suma de funciones. Así dadas las transformaciones $T_1: U \to V$ y $T_2: U \to V$ podrá definir una nueva transformación $T_1 + T_2: U \to V$ mediante el proceso que determina la linealidad de una transformación, podrá determinar que la nueva transformación $T_1 + T_2$ es una transformación lineal. Como se habrá notado hasta el momento hemos tomados las transformaciones lineales y mediante la operación suma y producto por un escalar construimos nuevos objetos que pueden ser nuevas transformaciones lineales, veamos un ejemplo más que abordan las investigadoras para el caso de composición de transformaciones lineales. Para definir la transformación lineal $T_1 \circ T_2: U \to V$ como resultado de la composición de las transformaciones lineales $T_1: V \to W$ y $T_2: U \to V$ es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de transformación lineal y mediante el empleo de su esquema de función podrá determinar la nueva transformación $T_1 \circ T_2$. Mediante la desencapsulación del objeto transformación lineal podrá determinar el proceso por el cual construyo dicho objeto y determinar la linealidad de la composición. Como un proceso de generalización el estudiante podrá pensar en nuevas transformaciones lineales como resultado de componer dos transformaciones lineales, bajo las condiciones requeridas de sus dominios y codominios, incluso se puede considerar el conjunto $L(U,U) = \{T: U \to U | T\ es\ una\ transformación\ lineal\}$ como conjunto cerrado bajo la operación composición.

- *Propiedades o características del objeto.* Otra manera de categorizar las trasformaciones lineales como un objeto es considerándolas como elementos de un conjunto, como por ejemplo, las operaciones de suma y producto descritas en la categorización anterior e incluso el conjunto $L(U,U)$. Esta categorización no es elemental para los estudiantes, pero puede generar en ellos la concepción objeto de este concepto. Observemos el siguiente ejemplo: Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$ ¿Es T invertible? de serlo determine T^{-1}. El problema plantea una pregunta directa sobre el operador lineal T, el estudiante debe pensar en las características específicas de éste operador determinando su núcleo e imagen, para determinar si es invertible o no. También puede determinar uno de los dos espacios ($Nu(T)$ o $Im(T)$) y mediante el uso del teorema de dimensión considerar si T es biyectiva y por tanto determinar si es invertible o no. Las investigadoras comentan en su trabajo que este tipo de problemas promueve una elaboración más profunda sobre el concepto, motivando el principio de construcción del esquema transformación lineal.

Para finalizar esta sección presentamos el diagrama de la descomposición genética refinada propuesta por Roa y Oktaç (2008):

Acción

Fijados a y b vectores particulares de U
$T(a+b) = T(a) + T(b)$

Acción

Fijado a en U y α en K
$T(\alpha a) = \alpha T(a)$

($\forall$)

Interiorización

Proceso

$\forall\, u_1, u_2 \in U$ Se tiene que
$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Proceso

$\forall\, u \in U$ y $\forall\, c \in K$ se tiene que
$T(cu) = c\, T(u)$

Coordinación ($\wedge$)

$\forall\, u_1, u_2 \in U$ y $\forall\, b, c \in K$

$T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$

Proceso

Transformación Lineal

Encapsulación

Objeto Transformación Lineal

Aplicación de acciones y procesos.

Figura 5. Descomposición genética refinada (Roa y Oktaç, 2008, p.112).

3.3 Participantes

El diagnóstico se aplicó en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) durante el semestre de otoño del año 2016. Participaron estudiantes que estaban cursando la materia de Programación Lineal los cuales al menos ya habían tomado un curso de álgebra lineal, 24 pertenecen a la Licenciatura en Actuaría y 18 a la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. El instrumento se aplicó en el salón donde se imparte la materia, con previa autorización del catedrático, cada estudiante recibió una prueba escrita, la cual presentamos en el anexo 3 y 120 minutos para responderla.

3.4 Análisis del cuestionario

Presentamos un análisis de la intención de cada una de las seis preguntas del cuestionario, así como un análisis hipotético de las posibles respuestas que los estudiantes podrían dar a cada pregunta.

Pregunta 1

Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funciones definidas por $f(x, y) = (y^2, x^2)$ y $g(x, y) = (x, 3y - 2x, y)$

a. Sean $u = (1,0)$ y $v = (0,1)$.

- Calcula $(u + v)$ y determina $f(u + v)$.
- Calcula $f(u)$, $f(v)$ y encuentra el vector $f(u) + f(v)$.
- Comparando los resultados anteriores, ¿son $f(u + v)$ y $f(u) + f(v)$ iguales?

b. Sea $u = (-2,0)$ y $c = 1$

- Calcula cu y determina $f(cu)$.
- Calcula $f(u)$ y encuentra el vector $cf(u)$.
- Comparando los resultados anteriores. ¿son $f(cu)$ y $cf(u)$ iguales?

c. Realiza los puntos a y b para la función g.

d. ¿Son f y g transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.

e. ¿Qué es una transformación lineal?

El problema presenta dos funciones definidas entre espacios vectoriales, donde f es una transformación y g es una transformación lineal. En los incisos (a) y (b) se dan dos vectores particulares con los cuales se deben verificar las propiedades de linealidad para la función f, además de realizar los mismos pasos en el inciso (c) para la función g. En el inciso (d) se pregunta al estudiante si las funciones son o no transformaciones lineales. Por ultimo en el inciso (e) se les pide lo que es una transformación lineal.

Buscamos determinar si los estudiantes consideran el cumplimiento de las propiedades de linealidad para todos los vectores del espacio y cómo se refleja esto en su definición de transformación lineal. Cabe resaltar que para los vectores u y v dados, las funciones f y g cumplen las igualdades, pero esto sucede únicamente con este par de vectores para la función f.

Se presenta el siguiente análisis hipotético con base en nuestro marco teórico, de los posibles razonamientos que un estudiante puede hacer frente a esta situación:

- Consideramos que si el estudiante posee una concepción objeto de vector y proceso de función podrá resolver los inciso (a), (b), y (c) comparándolos y determinar si cumplen o no las propiedades.
- En el inciso (d) puede determinar que las dos transformaciones son transformaciones lineales ya que cumplen con las propiedades, bajo esta situación diremos que está dando muestras de poseer una concepción acción de las propiedades debido a que no está considerando el cumplimiento para todo vector en $\mathbb{R}^2$.
- Por otro lado, si el estudiante toma la forma general de los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para verificar si f es una transformación lineal (con los procedimientos pertinentes) puede determinar que no lo es. Con ello se puede evidenciar si dentro de su estructura existen objetos como transformaciones o simplemente considera f como una función no lineal o determina que no es una transformación lineal.
- Si el estudiante considera los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para evidenciar que g es una transformación lineal mediante el cumplimiento de las propiedades, diremos que posee una concepción proceso de dichas propiedades al considerar el cumplimiento para todo vector del espacio; si claramente relaciona el cumplimiento simultáneo de ambas propiedades con la linealidad de g o directamente verifica el cumplimiento de preservación de combinaciones lineales diremos que posee una concepción proceso de transformación lineal.
- Si el estudiante define el concepto de transformación lineal, podremos analizar la coherencia entre sus argumentos de los incisos anteriores y las características de su definición. Si recurre a las propiedades sin definir el dominio y codominio de la transformación como espacios vectoriales podremos decir que lo puede hacer de manera mental o quizá no tiene en cuenta el cumplimiento de ellas para todo elemento de los conjuntos involucrados. Si el estudiante comienza definiendo la transformación como una función entre espacios vectoriales y centra su atención en el cumplimiento de las propiedades de manera independiente diremos que posee una concepción proceso de las propiedades, si de alguna manera contempla el cumplimiento de ellas para todo elemento del dominio y el campo. Ahora bien, si el estudiante determina la transformación como una función entre espacios vectoriales que cumplen de manera simultánea ambas propiedades diremos que posee una concepción proceso de la transformación lineal.

Pregunta 2

Determine si la función dada es una transformación lineal:

a. $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a + b + c + d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b. Demuestra que la función siguiente, no es transformación lineal, donde: $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a^2$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En este problema buscamos que el alumno preste atención a la forma de los vectores del dominio y codominio, de la misma manera buscamos hacer énfasis sobre la existencia de transformaciones no lineales. Si el estudiante es capaz de construir una solución a los problemas diremos que posee las estructuras previas de vector y función, ya que el alumno pone en evidencia la comprensión en la forma de los elementos del dominio y codominio. Dependiendo de los argumentos que presente podremos decir que posee una concepción proceso de las propiedades de linealidad o de transformación lineal. Algunos de los argumentos que se pueden presentar son los siguientes:

- En la solución del inciso (a) el estudiante puede proceder a demostrar el cumplimiento de las propiedades y concluir que es una transformación lineal. En el inciso (b) puede demostrar que no cumple una de las dos propiedades o dar un contra ejemplo sobre un par de vectores específicos o un vector y un escalar del campo. Bajo esta situación podremos decir que el estudiante muestra evidencia de poseer una concepción proceso de las propiedades y de transformación lineal. Si sucede que el estudiante se basa en una sola propiedad para dar respuesta de manera incompleta, podremos concluir que se ha construido dicha propiedad como proceso, pero no el proceso asociado con la transformación lineal.
- Otra solución que puede presentar para el inciso (a) es demostrar que es una transformación lineal por la preservación de combinaciones lineales, en este caso puede ser que el estudiante posea una concepción proceso del concepto.

Pregunta 3

¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

a. $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
b. $T: P_2 \to P$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$
c. $T: P_2 \to P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$

Este ejercicio presenta tres funciones donde el estudiante debe determinar cuál de ellas define una transformación lineal, considerando los diferentes dominios y codominios. Consideramos que este ejercicio puede proporcionar elementos para identificar las construcciones de tipo acciones y procesos relacionados con dicho concepto. Consideremos para cada inciso el siguiente análisis:

- Con el inciso (a) buscamos determinar si el estudiante contempla las condiciones establecidas sobre el dominio y codominio de la función antes de indagar sobre su linealidad. Es importante indagar sobre la manera que demostrará que efectivamente es una transformación lineal, ya sea demostrando el cumplimiento simultáneo de las dos propiedades o mediante la preservación de combinaciones lineales, en este caso diremos que el estudiante posee una *concepción proceso* del concepto. Ahora, si recurre a la verificación de las propiedades de linealidad podemos pensar que posee una *concepción proceso* de las propiedades.

- En el inciso (b) se espera que el alumno proceda de manera análoga al inciso anterior, siempre contemplando la naturaleza del dominio y codominio de la función, antes de abordar su linealidad. Diremos que el estudiante posee una *concepción proceso* de las propiedades si recurre a demostrar las propiedades de linealidad, y diremos que posee una *concepción proceso* del concepto si demuestra el cumplimiento simultáneo de las dos propiedades o mediante la preservación de combinaciones lineales.
- Al igual que en los incisos previos en el inciso (c) se busca que el estudiante considere las condiciones establecidas sobre el dominio y codominio de la función antes de abordar su linealidad. Por otro lado es posible que sólo con observar que la función eleva al cuadrado los vectores, el estudiante considere que no se trata de una transformación lineal y lo demuestre con un contra ejemplo sobre una de las propiedades de linealidad. Bajo esta situación diremos que el estudiante posee una concepción proceso del concepto.

Pregunta 4

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x, y) = (x, 4y)$.

a. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Determinar la imagen de S bajo T.
b. Describe en términos geométricos S y su imagen.

El objetivo del problema es observar si el estudiante puede determinar la imagen de una región del plano, es decir, si puede pensar en transformar un determinado subconjunto de un espacio vectorial bajo cierta transformación lineal. Para este problema es fundamental su concepción de vector debido a que debe determinar la forma de los vectores de S y su imagen bajo T. Consideramos que la forma en que se plantea la situación, puede no ser familiar para el estudiante y por tal motivo determine el conjunto $T(S)$.

En el segundo inciso se busca que los estudiantes determinen de manera geométrica S y $T(S)$, permitiéndonos observar la relación que establecen entre los conjuntos presentados de manera algebraica y su representación geométrica.

Pregunta 5

Sean U y V espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y T una transformación lineal de U en V. Si $T(u_1) = (-2,0)$ y $T(u_2) = (1, -3)$, determina:

a. $T(2u_1)$
b. $T(3u_2)$
c. $T(2u_1 - 3u_2)$

Con este problema se busca determinar si los estudiantes consideran la condición de T como transformación lineal para encontrar los vectores indicados. Dicho ejercicio también puede realizarse de manera mecánica, se espera encontrar evidencias de construcciones mentales en los argumentos dados en la solución de la pregunta.

Pregunta 6

Sea $T: P_3 \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ para todo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ en P_3

- **a.** Encuentra una transformación lineal F tal que $F + T$ sea una transformación lineal.
- **b.** ¿Si $L + G$ es una transformación lineal, son L y G transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.
- **c.** ¿Si $L + G$ y G son transformaciones lineales, entonces L es una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

El objetivo central de este problema es buscar determinar si los estudiantes pueden pensar en las transformaciones lineales como objetos, y por tanto realizar acciones sobre ellas, ya sea mediante la realización de operaciones entre ellas o al considerarlas como elementos de un conjunto. Consideremos el siguiente análisis para cada inciso:

- Un estudiante con una *concepción proceso* de transformación lineal, en el inciso (a) podrá determinar sin dificultad una función F y la forma en como está definida la función $F + T$, determinando su linealidad mediante la demostración sobre su definición.
- Si menciona que $F + T$ es necesariamente transformación lineal ya que F y T son transformaciones lineales, diremos que posee una *concepción objeto* debido a que a partir de acciones sobre dos objetos presenta uno nuevo de la misma naturaleza y puede aplicar propiedades sobre estos objetos.
- En el inciso (b) es indispensable que el estudiante realice una lectura comprensiva del problema. Consideramos que algunos estudiantes pueden acudir de manera inmediata a argumentar que la suma de transformaciones lineales es una transformación lineal por tal motivo su respuesta será afirmativa. Sin embargo en el ejercicio sólo se afirma que $L + G$ es una transformación lineal. Por lo que consideramos que un estudiante bajo una concepción objeto de transformación lineal pude desencapsularlo para hallar casos particulares de transformaciones no lineales l y g tal que al determinar la suma $l + g$ sea una transformación lineal. Con el hecho de operar estos elementos y determinar una nueva transformación lineal nos da evidencia de una *concepción objeto* de este concepto.
- En este inciso (c) es posible que se presente una situación parecida el inciso anterior. En este problema se dan las funciones $l + g$ y g como transformaciones lineales; consideramos que un estudiante que posee una *concepción objeto* de transformación lineal podrá determinar que $-g$ es una

transformación lineal y bajo la consideración de las funciones como elementos de un espacio vectorial puede determinar que $(l+g)+(-g)=l+(g-g)=l+0=l$, por lo que se concluye que l es una transformación lineal. Este procedimiento de las funciones es una evidencia clara de una concepción objeto de este concepto.

3.5 Evidencias de las construcciones realizadas por los estudiantes

Haremos un análisis general de los datos obtenidos en el diagnóstico, mediante la descripción de las construcciones que evidenciaron poseer los estudiantes, el fin, determinar la viabilidad de la descomposición genética en la cual basamos nuestra investigación. El análisis de los datos obtenidos lo realizamos con base en las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética.

Al igual que Roa y Oktaç (2008), consideramos que las construcciones que realiza un estudiante alrededor de un concepto se encuentran determinadas por la manera en como éste le es presentado por primera vez. Como se puede notar en el capítulo dos durante el análisis de los libros de texto, las definiciones que se presentan no hacen referencia a la existencia del objeto transformación previo al de transformación lineal, por tal motivo no encontramos de manera evidente datos que hagan referencia al camino 1 descrito en la descomposición genética.

Enseguida presentamos el análisis de nuestros resultados, mostrando los tipos de construcciones que realizaron los estudiantes. Para cada una de ellas agregamos ejemplos de las respuestas de los estudiantes. Adoptamos la siguiente notación para la presentación de los resultados: los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas EMA25, EMA26,…, EMA42 y para los estudiantes de Licenciatura en Actuaría EA1, EA2,…EA24.

3.5.1 Concepción acción

En esta concepción los estudiantes pueden encontrar las imágenes de los vectores dadas las funciones. Pero consideran que la preservación de la suma de dos vectores particulares del dominio y la multiplicación de un vector por un escalar particular del campo implican que son transformaciones lineales. Los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas que dieron evidencias de poseer una concepción acción son los siguientes EMA27, EMA28, EMA30, EMA31 y EMA41.

Por ejemplo, el estudiante EMA31 en la pregunta 1 al verificar las propiedades con los vectores dados concluye que las dos funciones son transformaciones lineales, presenta el siguiente desarrollo:

a. $(u+v) = (1,0) + (0,1) = (1,1)$

$f(u+v) = f(1,1) = (1^2, 1^2) = (1,1)$

$f(u) = f(1,0) = (0^2, 1^2) = (0,1)$

$f(v) = f(0,1) = (1^2, 0^2) = (1,0)$

$f(u)+f(v) = (0,1) + (1,0) = (1,1)$

los resultados de $f(u+v) = f(u)+f(v)$ si son iguales.

b. $cu = 1(-2,0) = (-2,0)$

$f(cu) = cf(u) = 1f(-2,0) = 1(0^2,(-2)^2) = 1(0,4) = (0,4)$

$f(u) = f(-2,0) = (0^2,(-2)^2) = (0,4)$

$cf(u) = 1(0,4) = (0,4$

los resultados de $f(cu) = cf(u)$

c. a. $(u+v) = (1,0) + (0,1) = (1,1)$

$g(u+v) = g(1,1) = (1, 3(1)-2(1), 1) = (1,1,1)$

$g(u) = g(1,0) = (1, 3(0)-2(1), 0) = (1,-2,0)$

$g(v) = g(0,1) = (0, 3(1)-2(0), 1) = (0,3,1)$

$g(u)+g(v) = (1,-2,0) + (0,3,1) = (1,1,1)$

los resultados $g(u)+g(v) = g(u+v)$

b. $cu = 1(-2,0) = (-2,0)$

$g(cu) = cg(u) = c\,g(-2,0) = 1(-2,3(0)-2(-2),0) = 1(-2,4,0) = (-2,4,0)$

$g(u) = g(-2,0) = (-2,0) = (-2,3(0)-2(-2),0) = (-2,4,0)$

$cg(u) = 1g(u) = 1\,g(-2,0) = 1(-2,3(0)-2(-2),0) = 1(-2,4,0) = (-2,4,0)$

los resultados de $g(cu) = cg(u)$

d. Sí, porque los propiedades para que sea transformacion lineal son que i) $h(u+v) = h(u)+h(v)$

ii) $h(cu) = ch(u)$

Como podemos observar, realiza correctamente la evaluación de los vectores y concluye que las funciones son lineales. Este estudiante considera la transformación lineal como una función especial que cumple 2 propiedades, sin considerar la naturaleza del dominio y codominio como espacios vectoriales. Su conclusión en el inciso d tiene sentido debido a que en su definición, no usa explícitamente los cuantificadores, ya que escribe lo siguiente:

e. Una transformación lineal esta definida por una función que cumple las propiedades que mencione en el inciso d.

Por otro lado los estudiantes de la Licenciatura en Actuaria que presentan una concepción acción (debido a que con los vectores particulares concluyen que f y g son lineales) son EA1, EA5, EA6, EA7, EA9, EA10, EA11, EA12, EA13, EA15, EA16, EA17, EA20, EA22, EA23 y EA24.

Por ejemplo el estudiante EA20 evidencia una concepción acción debido a que en los ejercicios 2a, 3a y 3b demuestra su linealidad empleando vectores particulares. Presentamos el desarrollo que utilizó:

Ejercicio 2 Determine si la función dada es una transformación lineal

a) $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a+b+c+d$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $2 \in F$

① $T(A) = 10$
$T(B) = 26$
$T(A) + T(B) = 36$

$T(A+B) = T\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = 36$
$\therefore T(A) + T(B) = T(A+B)$

② $T(2A) = 20$
$2T(A) = 20$
$\therefore T(2A) = 2T(A)$

$\therefore$ Si es una trans. lineal

Ejercicio 3 ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \longrightarrow P_3$, $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

Sean $a = 1$, $b = 2$, $5 \in F$

① $T(a) = 1 + x + x^2 + x^3$
$T(b) = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3$
$T(a) + T(b) = 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3$
$T(a+b) = T(3) = 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3$
$\therefore T(a) + T(b) = T(a+b)$

② $T(5a) = 5 + 5x + 5x^2 + 5x^3$
$5T(a) = 5 + 5x + 5x^2 + 5x^3$
$\therefore T(5a) = 5T(a)$

Por lo tanto, SI es una trans. lineal

b) $T: P_2 \longrightarrow P_2$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$

Sean $a = 1 + x + x^2$, $b = 2 + 2x + 2x^2$ y $3 \in F$

① $T(a) = 1 + 2x$

$T(b) = 2 + 4x$

$T(a) + T(b) = 3 + 6x$

$T(a+b) = T(3 + 3x + 3x^2) = 3 + 6x$

$\therefore T(a) + T(b) = T(a+b)$

② $T(3a) = 3 + 6x$

$3T(a) = 3 + 6x$

$\therefore T(3a) = 3T(a)$

$\therefore$ Sí es una trans. lineal

El desarrollo presentado por el estudiante puede entenderse debido a la definición que dio sobre el concepto transformación lineal y la respuesta en el ejercicio 1d, ya que considera a las transformaciones lineales como funciones especiales, pero no considera el domino o codominio como espacios vectoriales, tampoco se presentan los cuantificadores en su definición. Presentamos sus argumentos desarrollados en el diagnóstico:

d) ¿Son f y g transformaciones lineales? Justifica

Sí, si son transformaciones, ya que deben cumplir con 2 propiedades

$f(a) + f(b) = f(a+b)$ Obligatorio que cumpla ambas

$x \in F$ $f(ax) = x f(a)$

e) ¿Qué es una transformación lineal? Como su nombre lo dice es una "transformación" de una función lineal y que debe cumplir con las propiedades antes mencionadas.

Este tipo de concepción no permite a los estudiantes pensar en una transformación como una función especial, debido a que en la definición proporcionada no establecen una conexión entre las funciones y las transformaciones, llegando a tomar las transformaciones lineales como una simple regla de correspondencia. Por ejemplo el estudiante EMA27 presenta la siguiente definición:

e. Una transformación lineal cumple una regla de correspondencia y cumple la linealidad: ① $c f(u) = f(cu)$ · ② $f(u+v) = fu + fv$.

Otro ejemplo similar se presenta con el estudiante EMA36 el cual define la transformación lineal con una regla de asociación:

e) Sean V y W espacios vectoriales sobre K un campo, decimos que una regla de asociación $T: V \to W$, $u \to T(u) = w$ es una transformación lineal

si, 1) $\forall u, v \in V \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$

2) $\forall c \in K, \forall u \in V \quad T(cu) = cT(u)$.

Algunos estudiantes no hacen uso de notación matemática durante su definición, simplemente enuncian el cumplimiento de las dos propiedades o tratan de definir mediante alguna reflexión construida sobre las transformaciones lineales, por ejemplo, presentamos algunos de los casos que se manifestaron en los estudiantes EA1 redacta lo siguiente:

e. Una transformación lineal es una regla de correspondencia de un espacio vectorial a otro

EA3:

c) Una transformación lineal es una regla u operación que cumple con varias condiciones ya establecidas, como la aditividad, producto por escalar, etc.

EA5:

e) Una transformación lineal es cuando conviertes un espacio a otro por ejemplo de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, cuando el dominio y el contradominio son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo

EMA29:

e- es función que va de un espacio a otro, con la propiedad que separa sumas y saca escalares.

Un resultado que es interesante rescatar es el presentado por el estudiante EMA32, debido a que en su definición asocia el concepto de isomorfismo como una transformación lineal, pero no contempla el caso en que una función sea transformación lineal pero no isomorfa, por lo que su definición queda ajustada a casos particulares. Dicho argumento lo utiliza en el ejercicio 3a para afirmar erróneamente que no es lineal, a continuación el desarrollo presentado en el diagnóstico:

Una transformación lineal es un isomorfismo entre 2 espacios

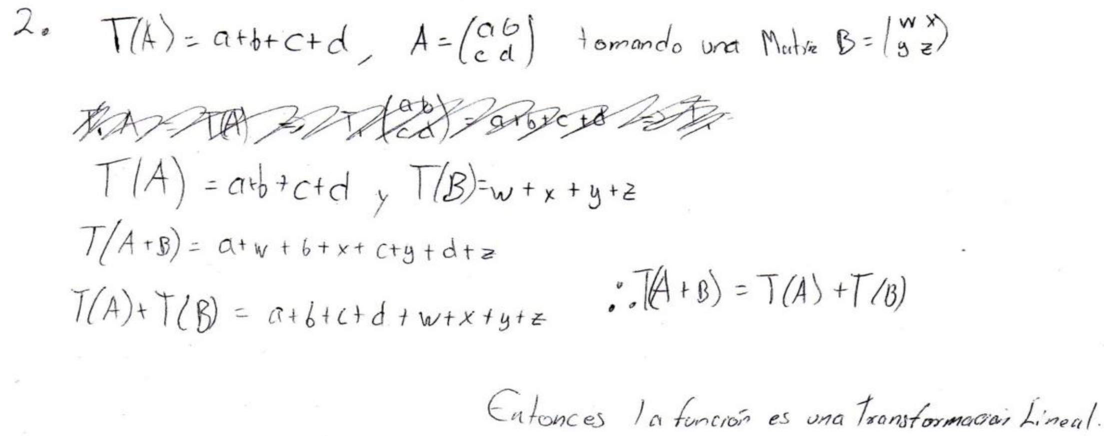
a) $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$, No es transformación lineal, $\mathbb{R} \ncong P_3$ $\mathbb{R}$ no es isomorfo a los polinomios de grado 3.

$a, b \in \mathbb{R}$.
$T(ab) = ab + abx + abx^2$

Consideramos que los estudiantes EA21, EA22, EA23 y EMA25 no poseen las construcciones previas, como el esquema de función y el esquema de espacio vectorial para construir el concepto de transformación lineal. Esto se afirma tomando como base lo desarrollado en su diagnóstico. Por ejemplo, el estudiante EA22 solamente aborda los ejercicios 1 y 5, evidenciando una concepción objeto de vector y concepto de función ya que desarrolla correctamente los incisos 1a, 1b y 1c. Por otro lado en el ejercicio 5 presenta el siguiente argumento:

5 $T(u_1) = (-2, 0)$ $T(u_2) = (1, -3)$
a) $T(2u_1) = (-4, 0)$
b) $T(3u_2) = (3, -9)$
c) $T(2u_1 - 3u_2) = (-7, 9)$

Deducimos que para llegar a los vectores solicitados no emplea la linealidad de T, sino que procede a realizar las operaciones de manera mecánica. El estudiante EMA25, solamente realiza el ejercicio 1, los tres primeros incisos correctamente, el ejercicio 2a afirma que es lineal sin demostrar, intenta abordar el ejercicio 4 y 6 fracasando en su intento, no contesta el resto del diagnóstico. El estudiante EA21 sólo resuelve correctamente el ejercicio 1 incisos a, b, c, el resto del diagnóstico no es contestado. Finalmente, el estudiante EA23 responde correctamente el ejercicio 1 incisos a, b, c y para el ejercicio 2a intenta demostrar la linealidad, sólo demostrando el cumplimiento de una de las propiedades sin hacer uso explícito de los cuantificadores, el resto del diagnóstico no es respondido. Enseguida mostramos lo expuesto por el estudiante en el inciso 2a:



2. $T(A) = a+b+c+d$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tomando una Matriz $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$

$T(A) = a+b+c+d$ y $T(B) = w+x+y+z$

$T(A+B) = a+w+b+x+c+y+d+z$

$T(A)+T(B) = a+b+c+d+w+x+y+z$ $\quad \therefore T(A+B) = T(A)+T(B)$

Entonces la función es una Transformación Lineal.

Desde nuestra perspectiva es evidente que si un estudiante no posee las construcciones adecuadas de vector y de función, sus estructuras no podrán evolucionar respecto al concepto transformación lineal. Con base en los resultados podemos ver la importancia de hacer énfasis en los objetos matemáticos involucrados en la definición de transformación lineal, haciendo conexiones con los conceptos previos. Por ejemplo, con el concepto de espacio vectorial, debido a que algunos estudiantes no lo emplean en su definición, igualmente los cuantificadores no aparecen de forma explícita en algunas definiciones. De la misma manera es evidente que algunos no consideran a las transformaciones lineales como funciones especiales, por lo que no lo asocian con este concepto.

3.5.2 Concepción proceso

Dentro de nuestra descomposición genética preliminar, consideramos que un estudiante posee una concepción proceso de las propiedades si demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual. También afirmamos que un estudiante que posee una concepción proceso del concepto, es aquel que demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento simultáneo de ambas propiedades. Es decir, demuestra que una función es una transformación lineal si preserva combinaciones lineales. Bajo esta consideración mostramos las evidencias de cada una de las propiedades.

- ***Concepción proceso de las propiedades***

Los estudiantes que evidenciaron poseer dicha concepción, son los siguientes: EMA26, EMA27, EMA30, EMA3, EMA32, EMA36, EMA37, EMA38, EMA41, EMA42, EA1, EA2, EA3, EA5, EA6, EA7, EA9, EA10, EA11, EA12, EA13, EA14, EA15, EA16, EA17, EA18, EA19 y EA24. Enseguida presentamos algunos de los argumentos desarrollados, por ejemplo, el estudiante EMA41 desarrolla lo siguiente para los ejercicios 2 y 3:

2.- $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad T(A) = a+b+c+d \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(a)

• Sea k una constante

$T(kA) = T\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = ka + kb + kc + kd = k(a+b+c+d) = k\,T(A)$.

• Sea $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

$T(A+B) = a+e+b+f+c+g+d+h = (a+b+c+d) + (e+f+g+h) = T(A) + T(B)$

$\therefore$ T si es una transformación lineal.

(b) $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad T(A) = a^2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

• Sea k = constante $\quad kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

$T(kA) = k^2 a^2$ y $k\,T(A) = k a^2 \Rightarrow T(kA) \neq k\,T(A)$

• Sea $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$T(A+B) = (a+e)^2$ y $T(A) = a^2 \quad T(B) = e^2$

$T(A) + T(B) = a^2 + e^2$

$\Rightarrow T(A+B) \neq T(A) + T(B)$

$\therefore$ No es transformación lineal.

3-) a) $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

Sea k constante

• $T(ka) = ka + kax + kax^2 + kax^3 = k(a + ax + ax^2 + ax^3) = k\,T(a)$

• $T(a+b) = (a+b) + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3$

$= (a + ax + ax^2 + ax^3) + (b + bx + bx^2 + bx^3)$

$= T(a) + T(b)$

$\therefore$ Es transformación lineal

3- b) $T: P_2 \to P_2$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$

Sea k una constante

$T(ka_0 + ka_1 x + ka_2 x^2) = ka_1 + 2ka_2 x = k(a_1 + 2a_2 x) = k\,T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2)x$$
$$= a_1 + 2a_2 x + b_1 + 2b_2 x$$
$$= T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + T(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$

$\therefore$ Es una Transformación lineal.

c) $T: P_2 \to P_4$: $T[p(x)] = [p(x)]^2$

Sea k constante

$T[kp(x)] = [kp(x)]^2 = k^2[p(x)]^2$ y $k\,T[p(x)] = k\,[p(x)]^2$

$\Rightarrow$ No es Transformación lineal.

El estudiante EMA37:

2:- a) $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. $T(A) = a+b+c+d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vdash T(A+B) = T(A) + T(B)$

$T(A+B) = T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)$

$= (a_1+b_1+c_1+d_1) + (a_2+b_2+c_2+d_2) = T(A) + T(B)$.

$\therefore T(A+B) = T(A) + T(B)$

$\vdash \alpha T(A) = T(\alpha A)$

$T(\alpha A) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 + \alpha d_1 = \alpha(a_1+b_1+c_1+d_1)$

$= \alpha T(A)$

$\therefore T(\alpha A) = \alpha T(A)$

$\therefore T(A) = a+b+c+d$ es T. L

b) Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$\vdash T(A+B) = T(A) + T(B)$

$T(A+B) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = (a_1+a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = T(A) + T(B) + 2a_1a_2$

$\therefore T(A+B) \neq T(A) + T(B)$

$\therefore$ T no es T. L.

3:-

a). $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $\vdash T(a+b) = T(a) + T(b)$

$T(a+b) = (a+b) + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3 = (a+ax+ax^2+ax^3) + (b+bx+bx^2+bx^3) = T(a) + T(b)$

$\therefore T(a+b) = T(a) + T(b)$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vdash \alpha T(a) = T(\alpha a)$

$\alpha T(a) = \alpha(a+ax+ax^2+ax^3) = \alpha a + \alpha ax + \alpha ax^2 + \alpha ax^3) = T(\alpha a)$

$\therefore$ T es T. L

b) $T: P_2 \to P_2$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$

Sean $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$

$\vdash T(a(x) + b(x)) = T(a(x)) + T(b(x))$

$T(a(x)+b(x)) = T((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2) = (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x$

$= (a_1 + 2a_2 x) + (b_1 + 2b_2 x) = T(a(x)) + T(b(x))$

$\therefore T(a(x)+b(x)) = T(a(x)) + T(b(x))$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vdash \alpha T(a(x)) = T(\alpha a(x))$

$\alpha T(a(x)) = \alpha T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \alpha(a_1 + 2a_2 x) = (\alpha a_1 + 2\alpha a_2 x) = T(\alpha a(x))$

$\therefore \alpha T(a(x)) = T(\alpha a(x))$

$\therefore$ T es T.L.

c) $T: P_2 \to P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$

Sean $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$

$\vdash T[p(x) + q(x)] = T[p(x)] + T[q(x)]$

$T[p(x)+q(x)] = [p(x)+q(x)]^2 = [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2]^2$

$= [(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2]^2 = (a_0+b_0)^2 + 2(a_0+b_0)(a_1+b_1)x + (a_1+b_1)^2 x^2$
$+ 2(a_0+b_0)(a_2+b_2)x^2 + 2(a_1+b_1)(a_2+b_2)x^3 + (a_2+b_2)^2 x^4$

$T[p(x)] + T[q(x)] = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2$
$+ a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + a_2^2 x^4 + b_0^2 + 2b_0 b_1 x + 2b_0 b_2 x^2 + b_1^2 x^2 + 2b_1 b_2 x^2 + b_2^2 x^4$

Pero $T[p(x)+q(x)] \neq T[p(x)] + T[q(x)]$

$\therefore$ T no es T.L

El estudiante EA16 presenta el siguiente argumento:

2 a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$:

i) $T(A) + T(B) = a+b+c+d+e+f+g+h$ $\qquad T(A+B) = T\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = a+e+(b+f)+(c+g)+(d+h)$
$= a+b+c+d+e+f+g+h$

$\Rightarrow T(A) + T(B) = T(A+B)$

ii) $T(kA) = T\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = ka + kb + kc + kd = k(a+b+c+d)$

$kT(A) = k(a+b+c+d)$

$\Rightarrow T(kA) = kT(A)$

$\therefore$ T es una transformación lineal

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

i) $T(A+B) = T\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0^2 = 0$

$T(A) + T(B) = T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 + (-2)^2 = 4+4 = 8$

Como $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$, entonces T no es una transformación lineal.

③ a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

i) $T(a+b) = a+b + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3$

$= (a+b)(1+x+x^2+x^3)$

$T(a) + T(b) = (a + ax + ax^2 + ax^3) + (b + bx + bx^2 + bx^3) = a+b + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3$

$= a+b(1+x+x^2+x^3)$

$\Rightarrow T(a+b) = T(a) + T(b)$

ii) $T(ac) = ac + ac(x) + ac(x^2) + ac(x^3) = ac(1+x+x^2+x^3)$

$aT(c) = a(c+cx+cx^2+cx^3) = ac(1+x+x^2+x^3)$ $\Rightarrow T(ac) = aT(c)$

$\therefore$ $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$ es transformación lineal

b) Sean $a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$; $k \in K$:

i) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) + T(b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_1 + 2a_2x + (b_1 + 2b_2x) = (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x$

$T(a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2) = (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x$

ii) $T(k(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = T(ka_0 + ka_1x + ka_2x^2) = ka_1 + 2ka_2x$

$kT(a_0 + a_1x + a_2x^2) = k(a_1 + 2a_2x) = ka_1 + 2ka_2x$

$\therefore$ $T: P_2 \to P_2$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$ es lineal.

c) Sean $p(x) = x^2$, $q(x) = -x^2 \in P_2$

i) $T(p+q) = T(x^2 + (-x^2)) = T(\bar{0}) = 0$

$T(p) + T(q) = (x^2)^2 + (-x^2)^2 = x^4 + x^4 = 2x^4$

$\therefore$ T no es lineal.

El estudiante EA19 presenta el siguiente argumento:

② a) Sea $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde $T(A) = a+b+c+d$, con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\vdash T(A)$ es transformación lineal

i) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

P.D. $T(A) + T(B) = T(A+B)$

$\Rightarrow T(A) + T(B) = T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1+b_1+c_1+d_1) + (a_2+b_2+c_2+d_2)$

$= (a_1+a_2) + (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + (d_1+d_2) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$

$= T(A+B)$

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $c \in F$

P.D. $cT(A) = T(cA)$

$\Rightarrow cT(A) = cT\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = c(a_1+b_1+c_1+d_1) = ca_1+cb_1+cc_1+cd_1$

$= \begin{pmatrix} ca_1 & cb_1 \\ cc_1 & cd_1 \end{pmatrix} = T(cA)$

Dado que i y ii se cumplen $T(A) = a+b+c+d$ si es transformación lineal//

b) Sea $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a^2$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

P.D. no es una transformación lineal

i) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

suponemos $T(A) + T(B) = T(A+B)$

$\Rightarrow T(A) + T(B) = T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$= a_1^2 + a_2^2$

y $T(A+B) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$

$= (a_1+a_2)^2$

$a_1^2 + a_2^2 \neq (a_1+a_2)^2$ ⊘

Dado que no cumplen con la definición, no es una Transformación lineal//

③ a) Sea $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

i) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ P.D. $T(a) + T(b) = T(a+b)$

$\Rightarrow T(a) + T(b) = (a + ax + ax^2 + ax^3) + (b + bx + bx^2 + bx^3)$

$= (a+b) + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3 = T(a+b)$ ✓

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $c \in F$ P.D. $cT(a) = T(ca)$

$\Rightarrow cT(a) = c(a + ax + ax^2 + ax^3)$

$= (ca) + (ca)x + (ca)x^2 + (ca)x^3$

$= T(ca)$ ✓

$\therefore T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = \ldots$ si es una transformación lineal

b) Sea $T: P_2 \to P_2$; $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$

i) Sea $a=(a_0+a_1x+a_2x^2)$ y $b=(b_0+b_1x+b_2x^2) \in P_2$ P.D. $T(a)+T(b)=T(a+b)$

$\Rightarrow T(a)+T(b) = T(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2)$

$= (a_1+2a_2x)+b_1+2b_2x$

$= (a_1+b_1)+2(a_2+b_2)x$

$= T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)$

$= T(a+b)$ ✓

ii) Sea $a=(a_0+a_1x+a_2x^2)$, $c \in F$ P.D $cT(a)=T(ca)$

$\Rightarrow cT(a) = cT(a_0+a_1x+a_2x^2) = c(a_1+2a_2x)$

$= ca_1+2ca_2x$

$= T(ca_0+ca_1x+ca_2x^2)$

$= T(ca)$ ✓

$\therefore$ si es transformación lineal //

c) $T: P_2 \to P_4$; $T(p(x)) = (p(x))^2$

i) Sea $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $\varrho(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$

P.D. $T(P(x))+T(\varrho(x)) = T(P(x)+\varrho(x))$

$\Rightarrow T(P(x))+T(\varrho(x)) = T(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2)$

$= (a_0+a_1x+a_2x^2)^2+(b_0+b_1x+b_2x^2)^2 \leftarrow$ sea $*$

$\Rightarrow T(P(x)+\varrho(x)) = T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)$

$= ((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(b_0+b_1x+b_2)x^2)^2 \leftarrow$ sea ϱ

$* \neq \varrho$ $\therefore$ no es transformación lineal //

Es evidente que aunque no hacen uso explícito de los cuantificadores, bajo el contexto de sus soluciones lo consideran implícitamente, otra característica que encontramos, es que el estudiante es capaz de decidir el tipo de argumento que utilizará para evidenciar cuándo una función no es una transformación lineal. Puede utilizar un contra ejemplo en una de las propiedades o demostrar que en general una de ellas no se cumple. Uno de los estudiantes evidenció que no posee el concepto de polinomio nulo debido a que en el ejercicio 3a afirma erróneamente la no linealidad de la función y para el cual presenta el siguiente argumento:

3- $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a+ax+ax^2+ax^3$

sea $a=1$ y $-a=-1$

$T(a+(-a)) = T(0) = 0$ no pertenece a P_3 $\therefore$ No es lineal

- ***Concepción proceso del concepto*.**

Los estudiantes que evidenciaron poseer dicha concepción, son los siguientes: EA4, EA8, EMA28, EMA29, EMA33, EMA34, EMA35, EMA39 y EMA40. A continuación presentamos algunos de los argumentos desarrollados, por ejemplo, el estudiante EA4 presenta la siguiente definición:

-1

e) $\lambda : \alpha \to \beta$ es una transformación lineal si $\lambda(ax+b) = a\lambda(x) + \lambda(b)$
$\quad \alpha \to \lambda(\alpha)$
$\forall x, b \in \alpha$, $a \in$ campo

Es evidente que en su definición no contempla las transformaciones lineales como funciones especiales, tampoco considera el dominio y codominio como espacios vectoriales. Sin embargo, su concepción le permite demostrar la preservación de combinaciones lineales, a continuación presentamos los argumentos dados por el alumno para el ejercicio 2 y 3:

2\. a) P.P. $T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B) \quad \forall A, B \in M_{2\times 2}^{(R)}, \lambda \in R$

$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda T(A) + T(B) = \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$

$= (\lambda a_1 + b_1) + (\lambda a_2 + b_2) + (\lambda a_3 + b_3) + (\lambda a_4 + b_4) = T(\lambda A + B)$

$\therefore$ T es lineal

b. P.P. $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$ Para algunos $A, B \in M_{2\times 2}^{(R)}$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculemos $T(A+B)$, $T(A)$ y $T(B)$

$T(A+B) = T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 9 \qquad T(A) = 1 \;\wedge\; T(B) = 4$

$\Rightarrow T(A+B) \neq T(A) + T(B)$

$\therefore$ T NO es lineal

3\. a) P.D. T es lineal $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad T(ca+b) = cT(a) + T(b)$

$T(ca+b) = (ca+b) + (ca+b)x + (ca+b)x^2 + (ca+b)x^3$

$= ca + cax + cax^2 + cax^3 + b + bx + bx^2 + bx^3$

$= c(a + ax + ax^2 + ax^3) + b + bx + bx^2 + bx^3$

$= cT(a) + T(b)$

$\therefore$ T es lineal

b) P.D. T es lineal $\Leftrightarrow \forall a,b,c \in \mathbb{R}_2$ $T(ca+b) = cT(a)+T(b)$ $\quad a := a_0 + a_1x + a_2x^2$, $\; b := b_0 + b_1x + b_2x^2$

$$cT(a)+T(b) = c(a_1+2a_2x) + (b_1+2b_2x)$$
$$= ca_1+b_1 + c2a_2x + 2b_2x$$
$$= ca_1+b_1 + 2(ca_2+b_2)x$$
$$= T(ca+b)$$

$\therefore$ T es lineal

c) Sean $x := x^2$, $y := y^2$, $x, y \in P_2$ $\quad$ P.D. $T(x+y) \neq T(x)+T(y)$

$$T(x+y) = T(x^2+y^2) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$
$$T(x) = x^4 \wedge T(y) = y^4$$

$\therefore$ T NO es lineal

El estudiante EA18 propone el siguiente desarrollo

2.- a $\; T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a+b+c+d$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\vdash c_1T(A) + T(B) = T(c_1A+B)$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$c_1T(A) = c_1a + c_1b + c_1c + c_1d$$
$$c_1T(A) + T(B) = (c_1a + c_1b + c_1c + c_1d) + (e+f+g+h)$$
$$= (c_1a+e) + (c_1b+f) + (c_1c+g) + (c_1d+h)$$
$$= T(c_1A+B)$$

$\therefore$ sí es una transformación lineal

b.- $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a^2$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\vdash c_1T(A) + T(B) = T(c_1A+B)$ $\quad$ Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$c_1T(A) = c_1a^2$$
$$c_1T(A) + T(B) = c_1a^2 + e^2$$
$$T(c_1A+B) = (c_1a+e)^2 \neq c_1a^2 + e^2$$

$\therefore$ T no es una transformación lineal

3.- a.- $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

$\vdash \quad c_1 T(a) + T(b) = T(c_1 a + b)$.

$c_1 T(a) + T(b) = [c_1 a + c_1 a x + c_1 a x^2 + c_1 a x^3] + [b + bx + bx^2 + bx^3]$

$= [c_1 a + b] + [c_1 a x + bx] + [c_1 a x^2 + bx^2] + [c_1 a x^3 + bx^3]$

$= T(c_1 a + b)$ $\therefore$ T sí es una transformación lineal

b.- $T: P_2 \to P_2$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$.

$\vdash c_1 T(A) + T(B) = T(c_1 A + B)$

sea $A = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \wedge B(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$

$c_1 T(A) + T(B) = [c_1 a_1 + c_1 2a_2 x] + [b_1 + 2b_2 x]$

$= [c_1 a_1 + b_1] + [c_1 2a_2 x + 2b_2 x]$

$c_1 A + B = [c_1 a_0 + c_1 a_1 x + c_1 a_2 x^2] + [b_0 + b_1 x + b_2 x^2]$

$= (c_1 a_0 + b_0) + (c_1 a_1 x + b_1 x) + (c_1 a_2 x^2 + b_2 x^2)$

$= (c_1 a_0 + b_0) + (c_1 a_1 + b_1)x + (c_1 a_2 + b_2)x^2$

$T(c_1 A + B) = c_1 a_1 + b_1 + 2(c_1 a_2 + b_2)x = c_1 T(A) + T(B)$

$= c_1 a_1 + b_1 + c_1 2a_2 x + 2b_2 x$

$\therefore$ sí es una transformación lineal.

c.- $T: P_2 \to P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$.

$\vdash c_1 T(A) + T(B) = T(c_1 A + B)$

Sea $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \wedge B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$c_1 T(A) = c_1 [a_0 + a_1 x + a_2 x^2]^2$

$c_1 T(A) + T(B) = c_1 [a_0 + a_1 x + a_2 x^2]^2 + [b_0 + b_1 x + b_2 x^2]^2$

$T(c_1 A + B) = [(c_1 a_0 + b_0) + (c_1 a_1 + b_1)x + (c_1 a_2 + b_2)x^2]^2$

Pero $c_1 T(A) + T(B) \neq T(c_1 A + B)$ $\therefore$ no es transformación lineal.

Otros argumentos presentados por los estudiantes son, por ejemplo, el estudiante EMA29:

2- Sean $A, B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$\vdash T(c(A+B)) = c(T(A)+T(B))$

$T(c(A+B)) = T\left(\begin{bmatrix} c(a_{11}+b_{11}) & c(a_{12}+b_{12}) \\ c(a_{21}+b_{21}) & c(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}\right) = c(a_{11}+b_{11}) + c(a_{12}+b_{12}) + c(a_{21}+b_{21}) + c(a_{22}+b_{22})$

$= c((a_{11}+b_{11})+(a_{12}+b_{12})+(a_{21}+b_{21})+(a_{22}+b_{22}))$

$= c((a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})+(b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22})) = c\left(T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$

$= c(T(A)+T(B))$ $\therefore$ T es transformación lineal

b) Sean $A, B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$T(A+B) = T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}+b_{11})^2$

$T(A) = a_{11}^2$, $T(B) = b_{11}^2 \Rightarrow T(A)+T(B) = a_{11}^2 + b_{11}^2 \neq (a_{11}+b_{11})^2 = T(A+B)$

$\therefore$ T no es lineal

3- a- sean $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$\vdash T(k(a+b)) = k(T(a)+T(b))$

$T(k(a+b)) = T(ka+kb) = (ka+kb) + (ka+kb)x + (ka+kb)x^2 + (ka+kb)x^3$

$= k((a+b) + (a+b)x + (a+b)x^2 + (a+b)x^3)$

$= k((a+b) + (ax+bx) + (ax^2+bx^2) + (ax^3+bx^3))$

$= k((a+ax+ax^2+a^3) + (b+bx+bx^2+bx^3)) = k(T(a)+T(b))$

$\therefore$ T es lineal

b- Sean $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2 \in P_2$, $k \in K$

$\vdash T(k(f(x)+g(x))) = k(T(f(x))+T(g(x)))$

$T(k(f(x)+g(x))) = T(k(a_0+b_0+a_1x+b_1x+a_2x^2+b_2x^2)) = k(a_1+b_1) + 2k(a_2+b_2)x$

$k((a_0+b_0) + k(a_1+b_1)x + k(a_2+b_2)x^2)$

$= k((a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x) = k((a_1+2a_2x) + (b_1+2b_2x)) = k(T(f(x))+T(g(x)))$

$\therefore$ T es lineal

c- Sean $f(x), g(x) \in P_2$

$T(f(x)+g(x)) = (f(x)+g(x))^2$

por otro lado

$T(f(x)) + T(g(x)) = (f(x))^2 + (g(x))^2 \neq T(f(x)+g(x))$

$\therefore$ T no es lineal.

El estudiante EMA39 presenta el siguiente argumento:

2) a). Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$

$T(tA+B) = T\begin{pmatrix} ta+w & tb+x \\ tc+y & td+z \end{pmatrix} = (ta+w)+(tb+x)+(tc+y)+(td+z) = t(a+b+c+d)+(w+x+y+z)$

$= tT(A)+T(B)$

$\therefore$ T es lineal

b) Sup. que T es lineal ent. se cumple que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) t \in \mathbb{R}$.

qnt:

$T(tA+B) = tT(A)+T(B) \Rightarrow (ta+w)^2 = ta^2 + w^2$ ⊽

$\therefore$ T no es lineal

3). a) $T: \mathbb{R} \to P_3$.

Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

$T(ca+b) = (ca+b)+(ca+b)x+(ca+b)x^2+(ca+b)x^3 = c(a+ax+ax^2+ax^3)+(b+bx+bx^2+bx^3)$

$= cT(a)+T(b)$

$\therefore$ T es lineal

b). $T: P_2 \to P_2$.

Sea $a_0+a_1x+a_2x^2$; $b_0+b_1x+b_2x^2 \in P^2$, $c \in \mathbb{R}$

$T(c(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)) = (ca_1+b_1)+2(ca_2+b_2)x = c(a_1+2a_2x)+(b_1+2b_2x)$

$= cT(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2)$

$\therefore$ T es lineal.

c). $T: P_2 \to P_4$

Sea $p(x), q(x) \in P_2$, $c \in \mathbb{R}$

$$T[cp(x)+q(x)] = [cp(x)+q(x)]^2$$
$$\neq$$
$$cT(p(x))+T(q(x)) = c[p(x)]^2 + [q(x)]^2.$$

$\therefore$ T no es lineal

Al igual que en el análisis anterior se detecta que no hacen uso explícito de los cuantificadores, pero bajo el contexto de su solución es evidente que los consideran. Por otro lado, el estudiante tiene la capacidad de demostrar la no linealidad de una transformación mediante un contra ejemplo en una de las propiedades, demostrando que, en general, no se cumple una de las propiedades o que una transformación no es lineal si no preserva combinaciones lineales.

3.5.3 Concepción Objeto

Los estudiantes que evidenciaron poseer una concepción objeto, consideran las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial, aquellos que evidenciaron poseer esta concepción son: EMA34, EMA35, EMA36, EMA38, EMA39, EMA40, EMA42, EA4, EA9, EA13, EA14, EA16, EA18, y EA19, por ejemplo, los estudiantes EMA40 y EA4 responden a los tres incisos de la pregunta 6, los cuales presentan el siguiente argumento respectivamente:

6: $T: P_3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ $\quad T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

$\forall\, p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ en $\mathbb{R}^3$

a: F tal que F+T sea una Transformación lineal

$F: P_3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ $\quad F+T: P_3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$F[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (F+T)[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ es lineal.

b: ¿Si L+G es lineal
L y G son lineales

ejemplo $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad T(x) = x^2$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = -x^2$

$(T+F): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(T+F)(x) = 0$ es lineal

pero T y F no lo son
así no se cumple.

c) Si $L+G$ y G son transformaciones, L es transformación?

Si, la suma de transformaciones lineales es lineal

así $L+G-G$ es lineal entonces L

$\therefore$ L es lineal

El estudiante EA4 desarrolla el siguiente argumento:

6. a) Basta tomar F : $F(P(x)) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ con $p(t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ es claro que F es lineal. P.D. $F+T$ es lineal

P.D. $F+T(\lambda p+q) = \lambda F+T(p) + F+T(q) \quad \forall p,q \in P_3, \lambda \in \mathbb{R}$

Calculemos $\lambda p+q$ y después $F+T(\lambda p+q)$

$p := p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$

$q := q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3$

$$\lambda p+q = \lambda(p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3) + q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3 = (\lambda p_0+q_0) + (\lambda p_1+q_1)x + (\lambda p_2+q_2)x^2 + (\lambda p_3+q_3)x^3$$

$$F+T(\lambda p+q) = F(\lambda p+q) + T(\lambda p+q) = \begin{pmatrix} \lambda p_3+q_3 & \lambda p_1+q_1 \\ \lambda p_2+q_2 & \lambda p_0+q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda p_0+q_0 & \lambda p_1+q_1 \\ \lambda p_2+q_2 & \lambda p_3+q_3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} p_3 & p_1 \\ p_2 & p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_3 & q_1 \\ q_2 & q_0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\left[\begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ p_2 & p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} q_3 & q_1 \\ q_2 & q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \lambda F+T(p) + F+T(q)$$

b) No necesariamente, tomemos $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (\frac{x}{2}, 2y+y^2)$; $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G(x,y) \to (\frac{x}{2}, 2y-y^2)$

$\Rightarrow L+G(x,y) = (x, 2y)$

Y es claro que ni L ni G son lineales

c) Si, ya que suponer que L no es lineal implica que $L+G$ no lo es lo cual contradice a la hipótesis ya que G lo es.

El estudiante EMA35, presenta el siguiente argumento en relación al ejercicio 6a:

6\. a) $F: P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $F(p(x)) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, $a_0+a_1x+a_2x_2+a_3x^3 \in P_3$

$(F+T)(p(x)) = \begin{bmatrix} 2a_0 & a_1 \\ a_2 & 2a_3 \end{bmatrix}$ para todo $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \in \mathbb{P}_3$

Sean $P, Q \in P_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(F+T)(P+Q) = \begin{bmatrix} 2(\lambda a_0+b_0) & \lambda a_1+b_1 \\ \lambda a_2+b_2 & 2(\lambda a_3+b_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda a_0+2b_0 & \lambda a_1+b_1 \\ \lambda a_2+b_2 & 2\lambda a_3+2b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda a_0 & \lambda a_1 \\ \lambda a_2 & 2\lambda a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_0 & b_1 \\ b_2 & 2b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2a_0 & a_1 \\ a_2 & 2a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_0 & b_1 \\ b_2 & 2b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\ (F+T)(p(x) + (F+T)(Q(x))$$

$\therefore$ $F+T$ es transformación lineal.

El estudiante EMA32, solamente responde el inciso 6b mediante el siguiente contra ejemplo:

b) no , contra exemplo:

$L(x) = x^2 \qquad G(x) = -x^2$

$(L+G)(x) = x^2 - x^2 = 0$

$(L+G)(x) = 0$ es una transformación lineal

$((L+G)(a+b) = 0 = (L+G)(a) + (L+G)(b)$; $c(L+G)(a) = 0 = (L+G)(ca))$

~~Pero~~ Pero $L(x) = x^2$ y $G(x) = -x^2$ no son transfomaciones lineales

(contra exemplo: $cL(x) = cx^2 \neq c^2x^2 = L(cx))$
$cG(x) = -cx^2 \neq -c^2x^2 = G(cx))$

El estudiante EA16 en el inciso 6a presenta el siguiente argumento:

6 a) Sea $F: P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definida por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ en P_3.

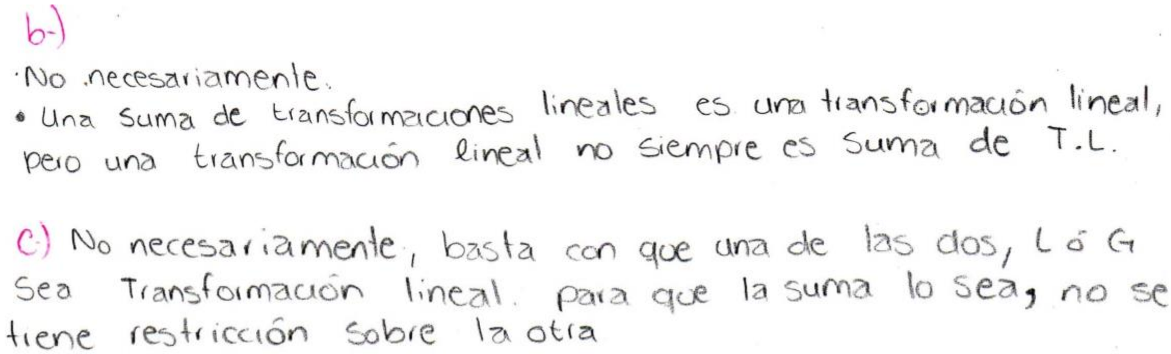
Entonces F es lineal, pues: Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $k \in \mathbb{R}$
$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$

i) $T(p+q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $p+q \in P_3$ $\wedge$ $T(p) + T(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $T(kp) = T\left(k\ (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\right) = T\left(ka_0+ka_1x+ka_2x^2+ka_3x^3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

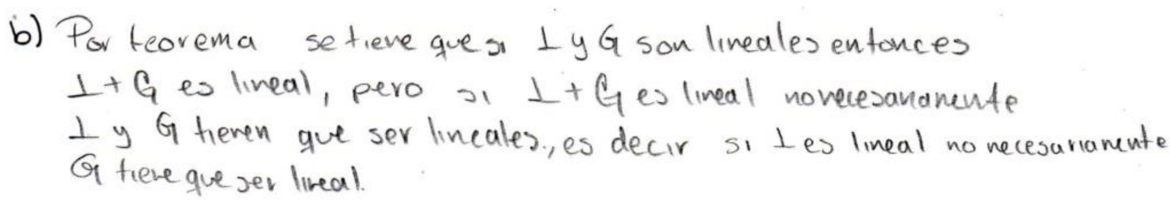
$\wedge$ $kT(p) = k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Entonces como T es lineal y F es lineal, F + T es lineal.

El resto de los estudiantes solamente tienen éxito al abordar el inciso 6a, algunos de ellos se limitan a realizar afirmaciones. Por ejemplo, el estudiante EMA41 presenta el siguiente argumento:


b-)
·No necesariamente.
• Una suma de transformaciones lineales es una transformación lineal, pero una transformación lineal no siempre es suma de T.L.

c.) No necesariamente, basta con que una de las dos, L ó G sea Transformación lineal. para que la suma lo sea, no se tiene restricción sobre la otra

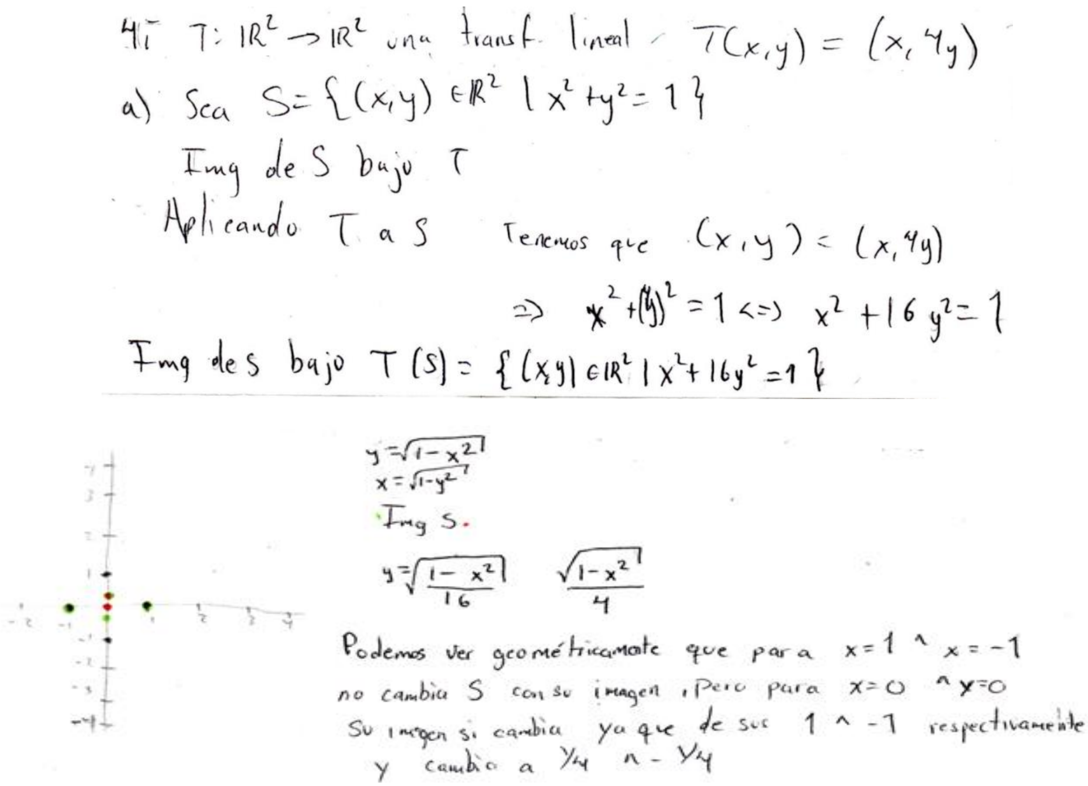
Por otro lado el estudiante EMA39 en relación al inciso 6b presenta el siguiente razonamiento en relación con un teorema propio de las transformaciones lineales:


b) Por teorema se tiene que si L y G son lineales entonces L+G es lineal, pero si L+G es lineal no necesariamente L y G tienen que ser lineales., es decir si L es lineal no necesariamente G tiene que ser lineal.

Es evidente que los estudiantes memorizaron estos resultados durante su curso de álgebra lineal, lo cual se hace presente mediante una afirmación sin argumento.

Este tipo de construcción mental le permite generar, sin dificultad, objetos de la misma especie resultado de aplicar acciones mediante la suma de transformaciones lineales sobre objetos dados, ponen en evidencia clara una concepción objeto.

Antes de finalizar la sección presentamos los resultados del análisis realizado al ejercicio 4 de nuestro cuestionario, el cual consiste en determinar la imagen de una región de $\mathbb{R}^2$ bajo cierta transformación, es decir, evidenciar si las construcciones mentales que posee le permiten transformar un subconjunto de un espacio vectorial en otro subconjunto. Los estudiantes que presentaron mejor desempeño al abordar el ejercicio fueron EA1, EA2, EA5, EA13 y EA24, de todos estos estudiantes mencionados, quien resolvió correctamente el ejercicio, es el estudiante EA5, quien presenta el siguiente argumento:


4.- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transf. lineal / $T(x,y) = (x, 4y)$

a) Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Img de S bajo T

Aplicando T a S   Tenemos que $(x,y) = (x, 4y)$

$\Rightarrow x^2 + (4y)^2 = 1 \iff x^2 + 16y^2 = 1$

Img de S bajo $T(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 16y^2 = 1\}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

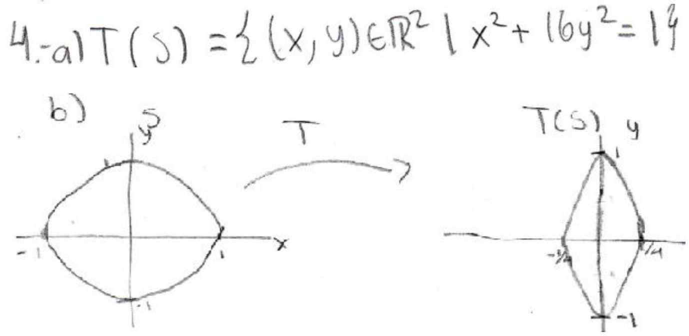
$x = \sqrt{1-y^2}$

Img S.

$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{16}}$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}$

Podemos ver geométricamete que para $x = 1 \wedge x = -1$ no cambia S con su imagen, pero para $x = 0 \wedge y = 0$ su imagen si cambia ya que de ser $1 \wedge -1$ respectivamente y cambia a $1/4 \wedge -1/4$

Como podemos observar el estudiante es capaz de realizar una correcta interpretación geométrica sobre la transformación, el resto de los estudiantes no tuvo éxito al abordar el inciso b). Por ejemplo, el estudiante EA2, presenta el siguiente argumento:



Consideramos que las construcciones mentales que poseen los estudiantes que mostraron un mejor desempeño, no los limitan a determinar la imagen de un vector en el espacio vectorial, más bien su concepción objeto de vector les permite encontrar la imagen de un subespacio vectorial bajo cierta transformación lineal. Quienes no han construido este concepto, están limitados a trabajar sólo con vectores aislados del espacio. Consideramos que los estudiantes que no abordaron el ejercicio se debe a que no se encuentran familiarizados con esta clase de ejercicios.

3.6 Observaciones generales

Para que los estudiantes abordaran el diagnóstico con mayor interés, el catedrático acordó que los que presentaran un buen desempeño se les otorgaría un punto extra en su próximo examen parcial. Para garantizar que la prueba se realizara de manera individual el aplicador permaneció en todo momento en el salón.

Los resultados obtenidos a través del diagnóstico mostraron la importancia de las construcciones previas necesarias en la edificación del concepto espacio vectorial, principalmente los conceptos de vector, función y espacio vectorial.

Durante el análisis de los resultados comprobamos la importancia de promover en los estudiantes la construcción de los conceptos de una manera adecuada. Consideramos que la construcción del concepto transformación lineal no puede evolucionar si siempre se hace énfasis en el cumplimiento de dos propiedades de manera independiente. Es por ello la importancia de hacer énfasis sobre la coordinación de estos dos procesos en uno, mediante la preservación de combinaciones lineales.

Aunque esta investigación no se planteó como objetivo comparar el desempeño de los estudiantes de las carreras de matemáticas y actuaría, consideramos adecuado y útil presentar los resultados del diagnóstico por separado. Las diferencias en las construcciones mentales alcanzadas por estos grupos de estudiantes podrían aportar al conocimiento del desarrollo cognitivo de los mismos y de sus intereses o preferencias.

El 13% de los estudiantes de la Licenciatura en Actuaría presentaron evidencias de una concepción acción del concepto transformación lineal, y el 6% de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas evidenciaron esta concepción. La mayoría de los estudiantes que se ubicaron en esta etapa solamente contestaron los primeros tres incisos del ejercicio 1. Consideramos que lo anterior muestra que el concepto transformación lineal no se alcanzó a construir completamente después de haber concluido un curso de álgebra lineal tradicional.

Ahora, con respecto al nivel proceso, el 56% de los estudiantes de Matemáticas Aplicadas dieron evidencias de encontrarse en él, contra un 58% de los estudiantes de Actuaría. Es evidente que el mayor porcentaje en esta etapa la poseen los estudiantes de Actuaría, pero es primordial señalar que la mayoría de ellos evidencian una concepción proceso de las propiedades. Es decir, para afirmar que una función determinada es una transformación lineal verifican si cumple o no las dos propiedades de manera individual. Por otro lado, aunque el porcentaje de los estudiantes de Matemáticas que se encuentran en este nivel es menor que los de Actuaría, hay más estudiantes que poseen una concepción proceso del concepto. Es decir, tienen la capacidad de demostrar la linealidad de una función mediante la preservación de combinaciones lineales. Sólo un estudiante de Actuaría mostró evidencias de poseer una concepción proceso del concepto.

Finalmente, el 39% de los estudiantes de Matemáticas Aplicadas presentaron una concepción objeto del concepto contra un 29% de los estudiantes de Actuaría. La mayoría de los estudiantes de ambas carreras respondieron el inciso 6a, de los cuales, dos estudiantes de Matemáticas Aplicadas respondieron con ejemplos sólidos el inciso 6b y sólo uno de los dos argumentó correctamente el inciso 6c. Por otro lado, únicamente un estudiante de la Licenciatura en Actuaría respondió adecuadamente el inciso 6b y ninguno argumentó bien el inciso 6c.

En la investigación realizada por Roa y Oktaç (2008) se reporta que ningún estudiante intenta demostrar la linealidad de una transformación utilizando vectores y escalares particulares en todos los ejercicios propuestos en el diagnóstico (concepción acción). En nuestra investigación, un estudiante emplea este tipo de argumento para demostrar la linealidad en los ejercicios 2 y 3. Por otro lado, los estudiantes que participaron en la investigación realizada por Roa y Oktaç (2008) no dieron evidencias de un estado intermedio entre la concepción acción y proceso, dicha situación las condujo a realizar un refinamiento de la descomposición genética que habían propuesto inicialmente. Los datos obtenidos en nuestra investigación refuerzan dicho refinamiento, ya que los estudiantes no hicieron uso explícito de los cuantificadores, pero bajo el contexto de su solución es evidente que los consideraron de manera mental.

En la concepción proceso del concepto, los estudiantes que participaron en la investigación de Roa y Oktaç (2008) definen la trasformación lineal en términos del cumplimiento de las 2 propiedades de manera individual, pero al demostrar la linealidad de una trasformación la realizan sobre la preservación de combinaciones lineales, evidenciando una concepción proceso del concepto. En nuestra investigación se detectó que la mayoría de los estudiantes evidenciaron tener una concepción proceso de las propiedades, es decir, demostraron la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento de las 2 propiedades de manera individual. La situación que detecta Roa y Oktaç en la entrevista sobre la condición $S(ap+bq)=aS(p)+bS(q)$ donde considera como dos veces la expresión $S(ap)=aS(p)$, no se hizo presente en nuestro estudio.

Es importante señalar que la mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación de Roa y Oktaç tuvieron mayor éxito al abordar el ejercicio 6 de nuestro diagnóstico debido a que logran responder los incisos 6b y 6c evidenciado que la mayoría poseían una concepción objeto. Dentro de nuestra investigación, tres estudiantes de los 42 que participaron tuvieron éxito al abordar el inciso 6b y de los 3 únicamente uno solucionó el inciso 6c. Tal situación pone en evidencia que, la mayoría de los participantes alcanzó a construir el concepto transformación lineal como un proceso y sólo pocos estudiantes lograron una concepción objeto, después de haber aprobado un curso de álgebra lineal bajo una instrucción tradicional.

Capítulo 4 Algunas reflexiones

En este capítulo presentamos algunas reflexiones generadas por nuestro trabajo de investigación. Con base en al análisis de los datos empíricos consideramos la viabilidad del refinamiento de la descomposición genética propuesta por Roa y Oktaç (2008). Además incluimos algunos aspectos metodológicos y cognitivos que consideramos deben ser tomados en cuenta al trabajar con el concepto de transformación lineal. Por último presentamos algunas conclusiones

4.1 Descomposición genética

Concluimos que la descomposición genética que consideramos en nuestra investigación es una buena herramienta en general, debido a que describe adecuadamente la manera en que los estudiantes encuestados construyeron el concepto transformación lineal, dicha afirmación se basa en el análisis de los datos empíricos obtenidos en la prueba de diagnóstico.

Se pudo apreciar que no hay una gran discrepancia entre la descomposición genética y el desarrollo observado por los estudiantes en la prueba. Es importante resaltar la ausencia del uso de los cuantificadores de forma explícita durante el desarrollo de los ejercicios, pero bajo el contexto de la solución que presentan es evidente que los cuantificadores los consideran de manera mental, tal situación no se encuentra descrita explícitamente en la descomposición genética, debido a que se aprecia cuando un estudiante considera vectores particulares y vectores generales, evidenciando las construcciones mentales de acción y proceso.

El ejercicio 6 fue diseñado explícitamente para detectar a los estudiantes que poseen una concepción objeto del concepto transformación lineal. Los resultados evidenciaron que algunos estudiantes consideraron a las transformaciones lineales como elemento de un espacio vectorial, manifestando así la presencia de una concepción objeto.

Como lo mencionamos en la sección 3.5 los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas presentaron mejores argumentos al abordar el problema 6, lo cual quedó en evidencia debido a la capacidad que tuvieron 3 estudiantes para resolver los incisos 6b y 6c, este último solamente fue resuelto por uno de los 42 que presentaron la prueba.

4.2 Sugerencias Didácticas

Consideramos que un modelo de enseñanza que se base en la descomposición genética preliminar debe incluir el análisis de funciones que cumplan una u otra propiedad y las implicaciones que tiene el cumplimiento de una propiedad sobre la otra. Cuando se está construyendo la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar por separado es necesario examinar si estas dos condiciones son independientes una de la otra. Así mismo, analizar que bajo ciertas circunstancias la preservación de la suma vectorial implica el producto por un escalar. Dichas reflexiones ayudan a construir este concepto más allá de la mecanización.

Es vital que los estudiantes trabajen con distintos problemas de funciones lineales donde se haga hincapié sobre la naturaleza del dominio y codominio como espacios vectoriales, la finalidad es que el estudiante tenga una comprensión profunda de la definición. También es importante realizar un análisis más específico sobre la naturaleza del campo sobre el cual están definidos los espacios vectoriales. Retomando el ejemplo otorgado por Roa y Oktaç (2008) en sus conclusiones si consideramos las función $\mathrm{C}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $\mathrm{T}(\mathrm{z}) = \bar{\mathrm{z}}$, es evidente que la transformación es lineal si el espacio vectorial $\mathbb{C}$ se define sobre el campo $\mathbb{R}$, pero no es transformación lineal si se define sobre el campo de los complejos $(\mathrm{K} = \mathbb{C})$, debido a que la suma vectorial se preserva, pero el producto por un escalar no, es suficiente tomar el ejemplo donde $z = 1 - i$ y $\alpha = 1 + i$, tenemos que $T(\alpha z) = 2$ y $\alpha T(z) = 2i$. Consideramos que este tipo de ejercicios promueven que el estudiante desarrolle razonamiento de tipo abstracto, donde reflexionen sobre los contenidos, más allá, de desarrollar habilidades para repetirlos.

Es primordial resolver problemas que conduzcan a los estudiantes a construir una concepción objeto de transformación lineal, donde sean capaces de generalizar a las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial los cuales cumplen las propiedades de linealidad. Además, que los conduzcan a establecer relaciones entre transformaciones lineales y otros conceptos, como por ejemplo con el concepto base. Un estudiante puede coordinar los procesos de transformación lineal y base permitiéndole determinar que definida una base en un espacio vectorial todos los vectores del espacio pueden ser expresados como combinación lineal de los elementos de dicha base. Esto le permitirá conocer las imágenes de dichos elementos y por ende determinar la transformación lineal.

Otro tipo de ejercicios que consideramos importantes que los estudiantes se familiaricen y con apoyo en ellos construir estructuras mentales que les permitan abordarlos posteriormente son aquellos en los que se les pide determinar la transformación lineal de un subconjunto del espacio vectorial. El objetivo es que no se limiten a realizar solamente transformaciones lineales de vectores en el espacio. Es indispensable que el estudiante interprete de manera correcta la expresión algebraica de dicha transformación ya que le permitirá una correcta interpretación geométrica. Recomendamos trabajar con transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. En los libros de texto y los cursos tradicionales de álgebra lineal no es común que aborden ejemplos de este tipo, sólo se limitan a trabajar con vectores en el espacio vectorial para ejemplificar cuándo una función es transformación lineal. Por este motivo, afirmamos que el fracaso de los estudiantes al abordar el ejercicio 4 del diagnóstico se debe a que no están familiarizados con este tipo de problemas.

Con este tipo de alternativas buscamos que los maestros motiven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes mediante una reflexión profunda de los conceptos. La descomposición genética propuesta puede ser la base que motive dicha reflexión y que va más allá de la considerada en los libros de texto.

4.3 Conclusiones

Después del trabajo de Roa y Oktaç (2008) los investigadores Maturana y Parraguez (2013) utilizaron la teoría APOE para investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego durante la construcción o reconstrucción del concepto transformación lineal, pero reconociendo componentes de origen geométrico, funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos como diferentes interpretaciones de una misma definición. En este trabajo de tesis se ha presentado la construcción del concepto transformación lineal con el apoyo del marco teórico de APOE, pero desde la perspectiva funcional. En el trabajo de Maturana y Parraguez (2013) reportan que la mayoría de los estudiantes dentro de la interpretación funcional solamente alcanzaron a construir dicho concepto en un nivel proceso, dicha situación es similar a la nuestra, ya que la mayoría de los estudiantes que participaron en nuestra investigación evidenciaron una concepción proceso. Por otro lado, Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez (2015) realizaron una investigación para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen en la construcción del TMATL (Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal) con el apoyo de la teoría APOE. Como podemos notar el concepto investigado es distinto al de esta tesis, lo que es importante señalar es que después del trabajo de Roa y Oktaç (2008) varias investigaciones relacionadas con el concepto trasformación lineal han utilizado el marco teórico APOE.

Tomando como base el análisis de los datos empíricos, observamos que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas mostraron mayor éxito al trabajar con conceptos abstractos que los de Actuaría. Por ejemplo, el estudiante EMA32, asoció el concepto de transformación lineal con el de isomorfismo sin considerar que una función lineal puede ser lineal pero no isomorfa. Podemos decir que dicho estudiante dio indicios de haber establecido conexiones con otros conceptos, pero sin avanzar más allá de una concepción proceso.

Concluimos que la mayoría de los estudiantes de la Licenciatura en Actuaria construyeron una concepción proceso de las propiedades, debido a que respondieron los ejercicios del cuestionario mediante la demostración de las dos propiedades de linealidad de manera independiente. Probablemente esta fue la causa del bajo éxito que tuvieron al abordar el ejercicio 6 del cuestionario. Finalmente, del total de la población que participaron en la prueba solamente un estudiante tuvo éxito en la solución completa del ejercicio 6.

Consideramos que los resultados de nuestra investigación pueden ser refinados mediante la aplicación del ciclo de la investigación. Sugerimos para futuras investigaciones que para obtener datos más profundos sobre las construcciones mentales que los estudiantes emplean al aprender el concepto transformación lineal sea diseñar y aplicar una entrevista. En dicha etapa se recomienda que la presenten los estudiantes que pongan en evidencia una concepción objeto o esquema del concepto. Esta sugerencia es debido a que una entrevista nos permite adentrar en la construcción de un concepto matemático en la mente de un estudiante mediante preguntas estructuradas.

Resulta interesante el diseño de un modelo de enseñanza con base en la descomposición genética propuesta, tomando en cuenta las recomendaciones didácticas que se han planteado.

Sugerimos que se realice una nueva propuesta de una descomposición genética que describa la construcción del concepto transformación lineal desde las estructuras mentales, acciones, procesos, objetos y esquemas debido a que la contemplada en esta investigación sólo aborda las estructuras mentales de acción, proceso y objeto, además de que con apoyo en ella se realice un diagnóstico que involucre ejercicios que nos de luces sobre la manera en que evoluciona el esquema transformación lineal y permita describir de manera específica sus niveles de evolución.

Por otro lado consideramos de suma importancia estudiar la representación matricial de una transformación lineal, lo que nos lleva a preguntarnos ¿Cómo podemos relacionar la descomposición genética que empleamos en nuestra investigación, con la representación matricial de una transformación lineal? ¿Qué estructuras previas se necesitan para poder construir la representación matricial de una transformación lineal? Posiblemente estas preguntas pueden guiar a futuros trabajos relacionados con este concepto matemático.

BIBLIOGRAFÍA

Arnon, I. Cottril, J.Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S, Trigueros, M. & Weller K, (2014). APOS Theory. New York Springer.

Dorier, J. (2002). Teaching Linear Algebra at University, *ICM*, Vol. III, pp.875-884.

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: Transformations. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education* I—*Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 209–221). Osnabruck, Germany.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2012). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. New York Springer, pp.275-282.

Kú, D. & Roa, S. (2010). La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 767-773. *México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.*

Kú, D. Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *En revista Educación Matemática*, 20(2), pp. 65-89.

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *AOSIS Publishing*. *PYTHAGORA*S, *Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, pp.41-52.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). TRANSFORMACIONES LINEALES. UNA MIRADA DESDE LA TEORIA APOE. En CLAME, Acta 2013, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol.26, pp. 881-890.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. *En SEMUR (Ed)*, *Acta VII congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 1993-200. Uruguay.

Maturana, I., & Parraguez, M., & Trigueros M (2015). El esquema del Concepto Transformación Lineal. Una Mirada a tres Interpretaciones desde la Teoría APOE. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, *CIAEM-IACME*, Chiapas, México.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en*

Matemática Educativa, 6(3), pp. 221-278. *México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa*.

Molina, G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *En revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, 10(1), pp. 241-273.

Oktaç, A., & Trigueros M (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal*? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), pp.373-385. *México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa*.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, pp. 2112–2124.

Parraguez, M., Maturana, I., & Rodríguez M. (2013). APOE Una Perspectiva Cognitiva para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. *En SEMUR (Ed)*, *Acta VII congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 1993-2000. Uruguay.

Roa, S., & Oktaç, A (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), pp.89-112. *México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa*.

Roa, S., & Oktaç, A (2012). VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENETICA DE TRANSFORMACIÓN LINEAL: UN ANÁLISIS REFINADO POR LA APLICACIÓN DEL CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORIA APOE. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15 (2), pp. 199-232. *México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa*.

Roa, S., & Oktaç, A. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal. Tesis de Maestría, CINVESTAV- IPN.

Salgado, H. & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21 (1), pp. 91-117.

Sarah R. Weyer (2010). APOS Theory as a Conceptualization for Understanding Mathematical Learning. *RIPON COLLEGE*, pp.9-15. Summation.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. and Hillel J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactiquedes Mathématiques*, 19(1), pp.7-40.

Thomas, M. & Stewart, S. (2007) EMBODIED, SYMBOLIC AND FORMAL ASPECTS OF BASIC LINEAR ALGEBRA CONCEPTS. *Proceedings of the* 31^{st} *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *PME 31*, vol 4, pp.201-2018.

Trigueros, M. (2005). LA NOCIÓN DE ESQUEMA EN LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA A NIVEL SUPERIOR. *En revista Educación Matemática*. 17(1). pp. 5-31.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., & Rodríguez M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *En revista Educación Matemática*, 27(2) pp. 95-124.

Uicab, R. y Oktaç, A (2006) Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 9(3), pp. 459-490.

ANEXO 1

La siguiente tabla muestra las construcciones mentales que se hicieron presentes en los estudiantes de la Lic. Actuaría, después de realizar el análisis de los datos obtenidos por medio de la prueba de diagnóstico.

TABLA 1

Construcciones mentales presente en estudiantes de Lic. Actuaría			
Alumnos	**Acciones**	**Procesos**	**Objetos**
EA1	**Si hay evidencias** debido a que determina que f y g son transformaciones lineales en inciso 1.d	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad para el inciso 2a, 3a y 3b por medio del cumplimiento de las propiedades de manera independiente. Para los incisos 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una propiedad.	**No muestra evidencias**.
EA2	El estudiante realiza la demostración para todos los vectores sobre la linealidad de g y la no linealidad de f. Por lo que afirmamos que **si hay evidencias**	**Si hay evidencias**, debido a que en el inciso 2a demuestra el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el inciso 2b muestra que en general no se cumple una de las propiedades, en el ejercicio 3 responde de manera correcta en los incisos a, b y c sin desarrollar una demostración, asumimos que realizo mentalmente las operaciones.	**No muestra evidencias**.
EA3	Afirma correctamente que f no es lineal y g lo es, no otorga argumentos para tales afirmaciones. **Si hay evidencias** debido a que realiza cálculos de manera mecánica.	**Si hay evidencias**, debido a que en el inciso 2b demuestra el cumplimiento de las 2 propiedades de manera independiente, en el inciso 3a y 3b afirma correctamente su linealidad sin desarrollar el ejercicio, suponemos que este hecho lo realizo de manera menta, en el inciso 2d demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo y para el inciso 3c de manera general muestra que no se cumple una de las propiedades.	**No muestra evidencias**.
EA4	Afirma correctamente que f y g son lineales para los vectores particulares, pero falta demostrar este hecho de manera general, concluimos que **si muestra evidencias.**	**Si hay evidencias**, debido a que en los incisos 2a, 3a, 3b demuestra su linealidad bajo la preservación de combinaciones lineales. Para los incisos 2b y 3c demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo en una de las propiedades.	**Si hay evidencias,** debido a que en el inciso 6a propone una transformación lineal acertadamente, demuestra mediante la preservación de combinaciones lineales la linealidad de la suma, en el inciso 6b construye un ejemplo de 2 transformaciones no lineales y cuya suma es lineal, finalmente en el inciso 6c construye una reflexión correctamente.
EA5	**Si hay videncias** debido a que afirma que la función f y g son transformaciones	**Si hay evidencia**, aunque no realiza un desglose de los ejercicios 3 y ejercicio 2 inciso a. solamente en el ejercicio 5 usa la linealidad para hallar los vectores	**No muestra evidencias**.

	lineales, considerando solamente vectores particulares.	solicitados.	
EA6	**Si hay evidencias** debido a que con vectores particulares afirma que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** ya que en el inciso 2a demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, para el inciso 2b demuestra que en general no se cumple una de las propiedades.	**No muestra evidencias**.
EA7	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares debido a que afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que para el ejercicio 2a demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente y para el inciso 2b demuestra que en general no se cumple una de las propiedades. Para el ejercicio 5 usa la linealidad de T para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EA8	No responde al inciso 1d y 1e, bajo las respuestas concluimos que **si hay evidencias**.	**Si hay evidencias**, ya que en el inciso 2a, 3a y 3b demuestra de manera general que preservan combinaciones lineales, en los ejercicios 2b y 3c demuestra de manera general que una de las propiedades no se cumple, en el ejercicio 5 emplea la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EA9	**Si hay evidencias**, ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares debido a que afirma que f y g son transformaciones lineales.	**Si presenta evidencias** debido a que demuestra para el ejercicio 2b, 3a, y 3b el cumplimiento de las propiedades de manera individual, para los ejercicios 2a y 3c demuestra que en general no se cumple una de las propiedades. Para el ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Hay evidencias** debido a que construye adecuadamente la transformación solicitada en el ejercicio 6a, además demuestra que la suma de las 2 trasformaciones lineales es una transformación lineal mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual, para el ejercicio 6b la afirmación es correcta, pero no realiza argumentación.
EA10	**Si hay evidencias**, ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si presenta evidencias**, debido a que en los ejercicios 2a, 3a y 3b demuestra su linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual, para el caso de los ejercicios 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las 2 propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EA11	**Si hay evidencias**, ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias**, debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores	**No hay evidencias**.

		solicitados.	
EA12	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** ya que en el inciso 2a demuestra el cumplimiento de las propiedades de manera individual, para el caso del inciso 2b demuestra que en general no se cumple una de las propiedades, no realiza el ejercicio 3, en el ejercicio 5 considera la linealidad para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EA13	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Presenta evidencias**, ya que construye adecuadamente la trasformación lineal solicitada en el inciso 6a y realiza una demostración para argumentar que la suma de las dos transformaciones lineales es una transformación lineal, finalmente recurre anunciar el teorema ya que durante su desarrollo comete algunos errores. Para los incisos 6b y 6c afirma correctamente sin realizar argumentación.
EA14	Demuestra la no linealidad de f mediante un contra ejemplo y demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las 2 propiedades de manera independiente, por lo tanto afirmamos que **si hay evidencias**.	**Si hay evidencias** ya que para el inciso 2a y 3b demuestra su linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso del problema 3a afirma erróneamente sobre la no linealidad al no considerar al polinomio nulo. En los ejercicios 2b y 3c demuestra su no linealidad mediante un contra ejemplo en una de las propiedades, finalmente en el ejercicio 5 considera la linealidad para hallar los vectores solicitados.	**Presenta evidencias** ya que logra construir la trasformación solicitada por el ejercicio 6a demostrando que la suma de las 2 transformaciones lineales es una transformación lineal.
EA15	**Si hay evidencia** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que en el ejercicio 2a demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera independiente, y para el inciso 2b demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades. No responde los ejercicios restantes de la prueba.	**No hay evidencias**.
EA16	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra mediante un contra ejemplo en una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Presenta evidencias** debido a que es capaz de demostrar que la suma de 2 transformaciones lineales es lineal, además de que fue capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a.

EA17	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** ya que demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las 2 propiedades de manera individual para los ejercicios 2a y mediante un contra ejemplo la no linealidad de 2b, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EA18	Demuestra que f no es lineal mediante un contra ejemplo, también demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las 2 propiedades de manera individual. Por lo tanto concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las 2 propiedades de manera individual para los ejercicios 2a y mediante la demostración que en general no se cumple una de las 2 propiedades en el ejercicio 2b para afirmar sobres su no linealidad, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencias** ya que en el inciso 6c construye una reflexión sobre un teorema propio de las transformaciones lineales.
EA19	**Si hay evidencia** debido a que afirma que para los vectores otorgados las funciones son transformaciones lineales y para generalizar se debe hacer la demostración general, sin que proceda a su demostración.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal. Es decir presenta la capacidad de ver a las transformaciones lineales como elementos de un conjunto.
EA20	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**No hay evidencias**	**No hay evidencias**.
EA21	**Si hay evidencias** ya que logra comparar lo solicitado en los incisos 1a y 1b, logra realizar operaciones mecánicamente.	**Si hay evidencias** ya que en su definición se enfoca en el cumplimiento de las dos de manera individual. No podemos detallar más sobre esta construcción debido a que no contesta los ejercicios restantes de la prueba.	**No hay evidencias**.
EA22	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**No hay evidencias**.	**No hay evidencias**.

EA23	**Si hay evidencia** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**No hay evidencias**.	**No hay evidencias**.
EA24	**Si hay evidencia** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.

ANEXO 2

La presente tabla presenta los resultados obtenidos del diagnóstico aplicado a los estudiantes de la Lic. Matemáticas Aplicadas, detectando qué tipo de construcciones mentales presentan.

TABLA 2

Construcciones mentales presente en estudiantes de Lic. Matemáticas Aplicadas			
Alumnos	**Acciones**	**Procesos**	**Objetos**
EMA25	**Si hay evidencias** debido a que realiza operaciones de manera mecánica, solamente responde a los ejercicios 1a, 1b y 1c.	**No hay evidencias**.	**No hay evidencias**.
EMA26	Para el inciso1 d del diagnóstico comenta que las igualdades sólo se cumplen para los vectores dados, pero afirma que se debe cumplir para todos los vectores, no realiza la	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del	**No hay evidencias**.

	demostración, afirmamos que **si hay evidencia**.	ejercicio 5 no considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados, lo realiza de manera mecánica.	
EMA27	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA28	**Si hay evidencias** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante la preservación de combinaciones lineales, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que las transformaciones no preserva combinaciones lineales, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA29	Demuestra que f no es una trasformación lineal ya que una de las propiedades no se cumple en general, demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera independiente. Concluimos que **si hay evidencias**.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante la preservación de combinaciones lineales, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA30	**Si hay evidencia** ya que considera el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad del ejercicio 2a, mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso del inciso 2b demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo, el ejercicio 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias.**
EMA31	**Si hay evidencia** ya que consideran el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad del ejercicio 2a, mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso del inciso 2b demuestra que en general no se	**No hay evidencias**.

	son transformaciones lineales.	cumple una de las dos propiedades, el ejercicio 3c demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	
EMA32	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia**.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso del inciso 3a afirma que no es lineal empleando el termino isomorfismo, lo que lo lleva a una afirmación errónea, en el caso de los incisos 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA33	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia**.	**Si hay evidencias** debido a que demuestra en el ejercicio 2a su linealidad mediante la preservación de combinaciones lineales, para el caso del inciso 2b demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo, en el ejercicio 3 no desarrolla los incisos sólo afirma correctamente acerca de su linealidad asumimos que las operaciones las realizo de manera mental, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados	**No hay evidencias**.
EMA34	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad del ejercicio 2a mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual, para los ejercicios 3a y 3b demuestra la preservación de combinaciones lineales, en los incisos 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal mediante la preservación de combinaciones lineales, no responde a los incisos 6b y 6c.
EMA35	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante la preservación de combinaciones lineales. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante la preservación de combinaciones lineales, en el caso del inciso 2b demuestra que en general no preserva combinaciones lineales, no responde el ejercicio 3c, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal mediante la preservación de combinaciones lineales, aunque la afirmación para el inciso 6b es correcta, no construye argumentos.

		solicitados.	
EMA36	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado afirma que g es lineal sin realizar una demostración formal, suponemos que realizo este hecho de manera mental. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que en el inciso 2a demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el ejercicio 2b demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo en una de las propiedades, para el caso del ejercicio 3a afirma que es lineal sin realizar la demostración asumimos que la realizo de manera mental, en el inciso 3b asocia el ejercicio con el operador derivada por lo que considera el cumplimiento de las propiedades de manera individual, finalmente en el inciso 3c demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal mediante la preservación de combinaciones lineales. En el inciso 6d fracasa su demostración como argumento.
EMA37	Demuestra que f no es lineal ya que en general no se cumple una de las propiedades, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA38	Demuestra que f no es lineal mediante un contra ejemplo, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso del inciso 2b demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades y el inciso 3c demuestra la no linealidad mediante un contra ejemplo en una de las propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a demostrando su linealidad y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual. Los argumentos dados para los ejercicios 6b y 6c son erróneos.
EMA39	Demuestra que f no es lineal ya que no preserva combinaciones lineales, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante la preservación de combinaciones lineales. Concluimos que	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante la preservación de combinaciones lineales, en el caso de los incisos 2b y 3c demuestra que no preservan combinaciones lineales, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a demostrando su linealidad y además demuestra que la suma de las dos transformaciones lineales es lineal mediante la preservación de combinaciones lineales, en el inciso 6b construye un

	si hay evidencia.	de T, para hallar los vectores solicitados.	razonamiento correcto si dar argumentos concretos.
EMA40	Demuestra que f no es lineal mediante un contra ejemplo, por otro lado demuestra la linealidad de g mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual. Concluimos que **si hay evidencia.**	**Si hay evidencia** debido a que en el inciso 6a demuestra la linealidad mediante el cumplimiento de las propiedades de manera individual, para el caso de los ejercicios 3a y 3b demuestra la linealidad mediante la preservación de combinaciones lineales, no soluciona el inciso 2b, y en el inciso 3c proporciona un argumento erróneo, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a, no demuestra su linealidad pero recurre al teorema que la suma de 2 transformaciones lineales es lineal, para el inciso 2b proporciona 2 transformaciones no lineales y cuya suma es lineal, finalmente en el inciso c, reflexiona concluye que $-G$ es transformación lineal y al sumar en la expresión concluye que L es lineal.
EMA41	**Si hay evidencia** ya que consideran el cumplimiento de las propiedades para vectores particulares para afirmar que f y g son transformaciones lineales.	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra que en general no se cumple una de las dos propiedades, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**No hay evidencias**.
EMA42	**Si hay evidencia** debido a que intenta demostrar la linealidad mediante el cumplimiento o no de las propiedades con vectores particulares.	**Si hay evidencia** debido a que demuestra la linealidad en los ejercicios 2a, 3a y 3b mediante el cumplimiento de las propiedades de manera independiente, en el caso de los inciso 2b y 3c demuestra mediante un contra ejemplo en una de las propiedades su no linealidad, para el caso del ejercicio 5 considera la linealidad de T, para hallar los vectores solicitados.	**Si hay evidencia** debido a que es capaz de construir la transformación lineal solicitada en el inciso 6a, no demuestra su linealidad pero recurre al teorema que dice que la suma de 2 transformaciones lineales es lineal demostrando este importante teorema, en el inciso 6b argumenta su afirmación mediante un contra ejemplo considera 2 transformaciones no lineales, cuya suma es lineal, finalmente en el inciso 6c fracasa en su demostración.

ANEXO 3

Cuestionario de diagnóstico que respondieron los estudiantes.

Transformaciones Lineales

Nombre: ____

Semestre: ____________________ Carrera: ____________________

El objetivo de esta prueba es analizar el proceso de construcción del concepto transformación lineal, de acuerdo a la teoría APOE. Los resultados sólo de usarán con fines académicos y serán presentados de manera anónima.

1.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funciones definidas por $f(x, y) = (y^2, x^2)$ y $g(x, y) = (x, 3y - 2x, y)$

a. Sean $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$.
◊ Calcula $(u + v)$ y determina $f(u + v)$.
◊ Calcula $f(u), f(v)$ y encuentra el vector $f(u) + f(v)$.
◊ Comparando los resultados anteriores, ¿son $f(u + v)$ y $f(u) + f(v)$ iguales?
b. Sean $u = (-2, 0)$ y $c = 1$
◊ Calcula cu y determina $f(cu)$.
◊ Calcula $f(u)$ y encuentra el vector $cf(u)$.
Comparando los resultados anteriores son, ¿Son $f(cu)$ y $cf(u)$ iguales?
c. Realiza los puntos a y b para la función g.
d. ¿Son f y g transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.
e. ¿Qué es una transformación lineal?

2.- Determine si la función dada es una transformación lineal:
a. $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a + b + c + d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
b. Demuestra que la función siguiente, no es transformación lineal, donde:

$$T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ definida como } T(A) = a^2, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3.- ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
a. $T : \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$.
b. $T : P_2 \to P_1$;$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$.
c. $T : P_2 \to P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$.

4.- Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x, y) = (x, 4y)$.
a. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Determina la imagen de S bajo T.
b. Describe en términos geométricos S y su imagen.

5.- Sean U y V espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y T una transformación lineal de U en V. Si $T(u_1) = (-2, 0)$ y $T(u_2) = (1, -3)$, determina:
a. $T(2u_1)$
b. $T(3u_2)$
c. $T(2u_1 - 3u_2)$

6.- Sea $T : P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ para todo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ en P_3.
a. Encuentra una transformación lineal F tal que $F + T$ sea una transformación lineal.
b. ¿Si $L+G$ es una transformación lineal, son L y G transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.
c. ¿Si $L + G$ y G son transformaciones lineales , entonces L es una transformación lineal? Justifica tu respuesta.