



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**ALGUNOS RESULTADOS SOBRE GRUPOS
KLEINIANOS, SUPERFICIES DE RIEMANN Y
GRUPOS DE LIE**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
P R E S E N T A:

ANGEL RODRÍGUEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

Febrero 2013

Jurado asignado:

Presidente: Dra. Patricia Domínguez Soto

Secretario: M.C. Julio Erasto Poisot Macías

1^{er} Vocal: Dr. Hugo Juárez Anguiano

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM)
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Director de tesis:

M.C. Juan Francisco Estrada García.

A

mi familia



así

como también a todos los que me apoyaron en la carrera.

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo.

Jacques Hadamard

Las matemáticas no mienten, lo que hay son muchos matemáticos mentirosos.

Henry David Thoreau

Índice general

1. Introducción	1
2. Transformaciones de Möbius	3
2.1. Preliminares	3
2.2. Definición de transformación de Möbius, propiedades analíticas, algebraicas y geométricas de estas transformaciones	7
2.2.1. Propiedades analíticas	7
2.2.2. Propiedades algebraicas	9
2.2.3. Propiedades geométricas	12
2.2.4. Puntos fijos	12
2.2.5. Razón doble	14
2.3. Clasificación de las transformaciones de Möbius	16
2.3.1. Círculo isométrico	18
2.3.2. Iteraciones	20
2.4. Automorfismos de dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$	21
2.4.1. Geometrías no euclidianas	24
2.4.1.1. La métrica cordal	25
2.4.1.2. La métrica hiperbólica	26
2.5. Teorema del mapeo de Riemann	29
3. Grupos Kleinianos	31
3.1. Acciones de grupos	31
3.2. Definición de grupo Kleiniano	34
3.3. Grupos Discretos	39
4. Superficies de Riemann	41
4.1. Espacios recubridores	41
4.1.1. Transformaciones propias	43
4.1.2. Comportamiento local de una función holomorfa	44
4.2. Superficies de Riemann	44
4.3. Morfismos entre superficies de Riemann	47
4.3.1. Propiedades de los morfismos	48
4.4. Relación entre grupos kleinianos y superficies de Riemann	50
5. Grupos de Lie	55
5.1. Preeliminaries a la definición de grupo de Lie	55
5.2. Definición de Grupo de Lie	61
5.3. G-variedades	64
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción

Las transformaciones de Möbius son el tipo más elemental de funciones racionales de grado 1 de una variable compleja. Se exhiben sus propiedades básicas, geométricas, algebraicas y analíticas así como también su clasificación. También establecemos un teorema que clasifica los automorfismos de los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$, a saber $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mediante tales transformaciones y los relacionamos con la famosa definición de geometría de **Felix Klein**, y así obtenemos que los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$ son modelos para las distintas geometrías, la elíptica, euclídea y la hiperbólica respectivamente, para el caso de dominios no canónicos simplemente conexos utilizamos el famoso teorema del **Mapeo de Riemann** y los automorfismos del disco unitario Δ , lo cual nos permite asociarle a cada dominio no canónico simplemente conexo una geometría hiperbólica.

Siguiendo el estudio del grupo de las transformaciones de Möbius y de sus subgrupos, nos adentramos en la teoría de los grupos Kleinianos, los cuales nos serán de gran utilidad, puesto que el enfoque que nos interesa de los grupos kleinianos es el de representar superficies de Riemann vía estos grupos.

Continuamos esta tesis con un material introductorio sobre las superficies de Riemann y la enunciada caracterización de una superficie de Riemann vía el cociente de la región de discontinuidad de un grupo Kleiniano y el grupo mismo.

Culminamos esta tesis con una introducción a los grupos de Lie con la finalidad de entender un poco el enfoque de **Shopus Lie** el cual era mostrar que los distintos métodos para resolver ecuaciones diferenciales pueden ser clasificados a través del estudio del carácter invariante de dichas ecuaciones por un grupo continuo de transformaciones. Esta filosofía aparecía también en los trabajos de *Felix Klein* que llegó a definir la geometría como el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo de transformaciones, que fue nuestra principal motivación en esta tesis. Cabe destacar que no nos adentramos en la teoría de ecuaciones diferenciales pero este enfoque que tomamos es una buena motivación para seguir el estudio de estas teorías con más detalle en un futuro.

Capítulo 2

Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius son una familia de funciones de variable compleja, a las que dedicamos este capítulo, aquí se exhiben sus propiedades básicas, geométricas, algebraicas y analíticas así como también su clasificación.

2.1. Preliminares

Conviene extender el plano complejo $\mathbb{C}$ añadiendo un punto infinito, con lo que obtenemos el plano extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Aparte de las operaciones heredadas de $\mathbb{C}$, sobre $\hat{\mathbb{C}}$, definimos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{0} &= \infty, \quad a \neq 0, \\ \frac{a}{\infty} &= 0, \quad a \neq \infty \\ a\infty &= \infty, \quad a \neq 0\end{aligned}$$

y

$$a + \infty = \infty.$$

La topología¹ de $\mathbb{C}$ es la topología inducida por la métrica $d(w, z) = |w - z|$. La topología de $\hat{\mathbb{C}}$ es, la topología de $\mathbb{C}$ unión la familia de los complementos de conjuntos compactos en $\mathbb{C}$. De aquí que $\hat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico compacto.

La esfera unitaria,

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\},$$

llamada esfera de Riemann, es el modelo requerido para incluir al punto al infinito. Para asociar cada punto en el plano con uno en $\mathbb{S}^2$, usamos la siguiente idea geométrica: se toma el plano $\mathbb{C} \equiv \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, y la línea que proyecta el polo norte $e_3 = (0, 0, 1)$ de la esfera de Riemann a cualquier otro punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ en dicha esfera.

Esta línea cruza el plano complejo en un único punto, para encontrarlo se parametriza

$$e_3 + t(x - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

y se debe cumplir

$$[e_3 + t(x - e_3)] \cdot e_3 = 0,$$

¹Una topología en un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen:

- (i) $\emptyset \in \tau$; $X \in \tau$
- (ii) Si $A_1, \dots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$
- (iii) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

Si τ es una topología en X a la pareja (X, τ) le llamamos espacio topológico y a los elementos que pertenecen a τ , conjuntos abiertos en X .

$$1 + t(x - e_3) \cdot e_3 = 0,$$

$$t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

De donde, el punto asociado a x es

$$\begin{aligned} e_3 + \frac{1}{1 - x_3}(x - e_3) &= \\ &= e_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) = \\ &= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Se define la función

$$\Phi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Afirmamos que Φ es biyectiva.

Para demostrar esto se construye la función inversa. Obsérvese que si $z = \Phi[(x_1, x_2, x_3)]$, como $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, se tiene que

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

y despejando tenemos que

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (2.1)$$

También

$$z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3},$$

y

$$x_1 = \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right),$$

entonces

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}. \quad (2.2)$$

Finalmente, como

$$z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3}$$

se sigue que

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}. \quad (2.3)$$

Por consiguiente, Φ es inyectiva, ya que z determina (x_1, x_2, x_3) .

Obsérvese también que la función

$$\Pi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

es inversa por la izquierda de Φ .

Que Φ es sobreyectiva se sigue del hecho de que Π es también inversa derecha de Φ .

Haciendo corresponder ∞ con el polo norte e_3 se obtiene una biyección de $\mathbb{S}^2$ en $\hat{\mathbb{C}}$ y el

modelo buscado. A esta biyección se le llama la **proyección estereográfica**.

Geométricamente es evidente que el hemisferio sur ($x_3 < 0$) corresponde al disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y el hemisferio norte ($x_3 > 0$) al exterior de este disco; la fórmula 2.1 también muestra este hecho de manera analítica (véase figura 1.1.).

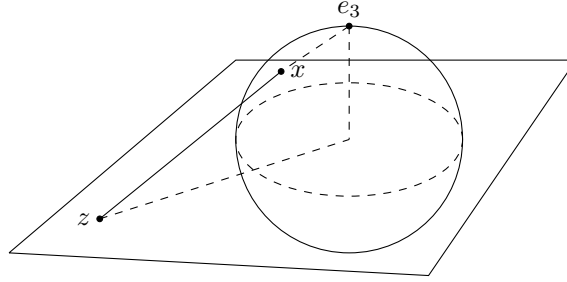


Figura 1.1: la proyección estereográfica.

Recordemos la definición de función derivable en $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto en $\mathbb{C}$, una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si f es derivable (en el sentido complejo), es decir, si la derivada

$$z \mapsto f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

está definida como una función de A en $\mathbb{C}$.

Algunos resultados importantes que necesitaremos más adelante, pero que no demostraremos aquí (véase [5, pág. 230, 233 y 243]), son los siguientes:

Teorema 2.1.1. Sea f holomorfa en un abierto A . Sea $z_0 \in A$ y sea $A_r = \{z : |z - z_0| < r\}$ contenido en A . Entonces, para cada $z \in A_r$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en A_r , y tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (2.4)$$

La serie de la ecuación 2.4 es llamada la **serie de Taylor** de f alrededor del punto z_0 .

De aquí tenemos:

Corolario 2.1.1. Sea A un abierto en $\mathbb{C}$ y sea f una función definida en A valuada en los complejos. Entonces, f es holomorfa en A si y sólo si, para cada z_0 en A existe un número $r > 0$ tal que el disco $D(z_0, r) \subset A$ y f es igual a una serie de potencias convergente en $D(z_0, r)$.

En este caso decimos que f es **analítica** en $D(z_0, r)$.

De lo anterior tenemos como observación que una función uno derivable en el sentido complejo es infinitamente derivable y además sus derivadas aparecen en los coeficientes de su serie de Taylor.

Si f es analítica en $A \subset \mathbb{C}$, excepto en un punto z_0 , z_0 es una **singularidad aislada** de f , luego podemos dibujar dos círculos concéntricos con centro en z_0 , contenidos en A ; en la región anular, f admite un desarrollo llamado **Expansión de Laurent**, de manera formal lo decimos en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2. Sea $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ y considere la región $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Se admite que $r_1 = 0$ ó $r_2 = \infty$ (ó ambos). Sea f analítica en la región A . Entonces, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n} \quad (2.5)$$

donde ambas series en el lado derecho de la ecuación, convergen absolutamente en A y uniformemente en cualquier conjunto de la forma $B_{\rho_1, \rho_2} = \{z \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Si γ es un círculo alrededor de z_0 con radio r , con $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)[(\zeta - z_0)^{n-1}] d\zeta \quad n = 1, 2, \dots$$

La serie para f en la ecuación 2.5 es llamada la **serie de Laurent** ó **Expansión de Laurent** alrededor de z_0 en el anillo A . Cualquier expansión convergente puntualmente de f de esta forma, es igual a la expansión de Laurent respecto de r_1 y r_2 .

La parte $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}$ le llamamos **parte principal** de f en z_0 . Si z_0 es una singularidad aislada de f y si todos los b_n , excepto un número finito, en la ecuación 2.5 son cero, entonces z_0 es llamado un **polo** de f . Si k es el mayor entero tal que $b_k \neq 0$, z_0 es llamado un **polo de orden k** . Si z_0 es un polo de primer orden, también decimos que es un polo simple. Si un número infinito de b_k es distinto de cero, z_0 es llamada una **singularidad esencial** (algunas veces esta z_0 es llamada un polo de orden infinito).

Definición 2.1.2. Una función definida en un dominio $A \subset \mathbb{C}$, se dice que es meromorfa cuando es analítica en todo A excepto en un número finito de polos.

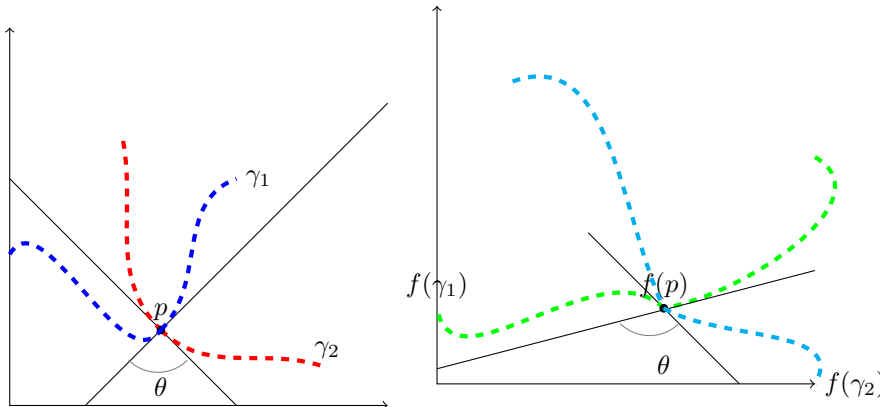
Nos interesan también recordar lo siguiente.

Decimos que una función f **preserva ángulos**, cuando el ángulo entre todo par de curvas γ_1 y γ_2 que se intersectan es igual al ángulo entre $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$. El ángulo que forman dos curvas γ_1 , γ_2 al intersectarse, es el ángulo que forman las tangentes de cada curva, en el punto de intersección.

Notemos que la orientación de los ángulos puede o no preservarse.

Teniendo en cuenta lo de arriba recordemos el concepto de función conforme.

Definición 2.1.3. Una función, que preserva ángulos y la orientación de éstos, entre las curvas que pasan por un punto dado se llama conforme en este punto.



Si la función preserva únicamente el valor del ángulo, y el sentido de su dirección cambia por el contrario diremos que es *anticonforme*.

En el caso de funciones de variable compleja tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Una función de variable compleja, analítica en un abierto A , es una función conforme en todos los puntos en los que la derivada es distinta de cero.*

Demostración.

Supongamos que en un punto $z_0 \in A$ existe la derivada $f'(z_0) \neq 0$. Tracemos por el punto z_0 alguna curva $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$, $\lambda(\alpha) = z_0$), para la cual existe la derivada $\lambda'(\alpha) \neq 0$; la curva λ posee tangente en el punto $z_0 = \lambda(\alpha)$ con ángulo de inclinación igual al $\text{Arg}(\lambda'(\alpha))$. Mediante la función $f(z)$ esta curva se transforma en una curva μ , es decir, $f[\lambda(t)] = \mu(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$, $\mu(\alpha) = f(z_0) = w_0$). Según la regla de la cadena para la composición de funciones, la función $\mu(t)$ es derivable en el punto α y $\mu'(\alpha) = f'(z_0) \cdot \lambda'(\alpha) \neq 0$, por lo cual la curva μ posee tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$, y el ángulo entre la tangente y el eje real es igual a

$$\text{Arg}(\mu'(t_0)) = \text{Arg}[f'(z_0) \cdot \lambda'(t_0)] = \text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\lambda'(t_0)).$$

De aquí se deduce que, al pasar de la curva λ a su imagen μ , el ángulo de inclinación de la tangente en el punto inicial de la curva varía en la magnitud

$$\text{Arg}(\mu'(t_0)) - \text{Arg}(\lambda'(t_0)) = \text{Arg}(f'(z_0)) \quad (2.6)$$

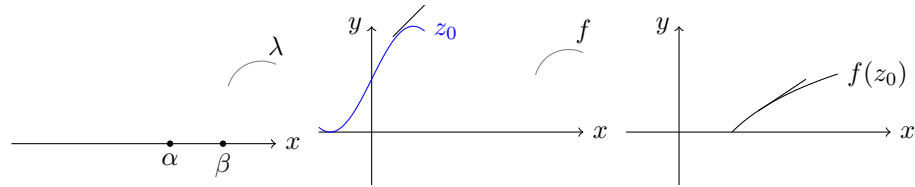
Sean λ_1 y λ_2 dos curvas que se intersectan en z_0 , formando un ángulo θ , o sea

$$\theta = \text{Arg}(\lambda_1'(\alpha)) - \text{Arg}(\lambda_2'(\alpha))$$

y considérese las dos curvas $f(\lambda_1)$ y $f(\lambda_2)$ que se intersectan en $f(z_0)$ que forman un ángulo θ' , o sea

$$\theta' = \text{Arg}(f'(\lambda_1(\alpha))) - \text{Arg}(f'(\lambda_2(\alpha)));$$

entonces por 2.6 tenemos que $\theta' = \theta$ como se quería. $\square$



2.2. Definición de transformación de Möbius, propiedades analíticas, algebraicas y geométricas de estas transformaciones

A las funciones racionales de grado 1 del conjunto siguiente son llamadas transformaciones de Möbius

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

2.2.1. Propiedades analíticas

Es importante observar que los coeficientes a, b, c, d están determinados salvo por un factor distinto de 0, es decir,

$$T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d},$$

para toda $\lambda \neq 0$. Por tanto, si $\alpha = ad - bc$, podemos dividir los coeficientes entre $\sqrt{\alpha}$, y obtener

$$T(z) = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}}\right)z + \frac{b}{\sqrt{\alpha}}}{\left(\frac{c}{\sqrt{\alpha}}\right)z + \frac{d}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'},$$

con $a'd' - b'c' = 1$. Así podemos suponer también que $ad - bc = 1$.

Consideremos la transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$, afirmamos que.

Si $c = 0$, entonces $T(z) = \alpha z + \beta$ donde $\alpha = \frac{a}{d}$ y $\beta = \frac{b}{d}$.

Si $c \neq 0$, entonces $T(z) = f(\zeta(g(z)))$, donde $g(z) = c^2z + cd$, $\zeta(z) = \frac{1}{z}$ y $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$. En efecto si $c = 0$ es clara la afirmación, luego si $c \neq 0$ entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{azc + bc}{c^2z + dc},$$

puesto que $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{azc + bc}{c^2z + dc} = \frac{azc + ad - (ad - bc)}{c^2z + dc} = \frac{a(zc + d) - (ad - bc)}{c^2z + dc} = \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad + bc}{c^2z + dc} = f(\zeta(g(z))). \square \end{aligned}$$

De la afirmación tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty$$

y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c},$$

de esta manera obtenemos una función continua de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.

Ahora veamos que T es *holomorfa* en todo $\hat{\mathbb{C}}$.

Supongamos primero que $c = 0$, entonces $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha = \frac{a}{d}$ y $\beta = \frac{b}{d}$, está definida para todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ y posee derivada $T'(z) = \alpha$ que conserva un valor constante y distinto de cero si $\alpha \neq 0$. Luego $T(z)$ es *holomorfa* en $\mathbb{C}$. Ahora supongamos que $c \neq 0$, entonces

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

ya que $ad - bc \neq 0$, y existe para todo $z \neq -\frac{d}{c}$.

Supongamos, como antes que $c \neq 0$ y que $ad - bc \neq 0$. Sabemos que $T(\delta) = \infty$ y $T(\infty) = \eta$, donde $\delta = -\frac{d}{c}$ y $\eta = \frac{a}{c}$.

Por lo tanto, el punto finito δ se transforma mediante T en el punto del infinito, y el punto del infinito se transforma en el punto finito η . Veamos que T es *holomorfa* también en estos puntos.

Definamos

$$S(z) = \frac{1}{T(z)} = \frac{cz + d}{az + b}.$$

Esto lo hacemos ya que, dada una función holomorfa f definida en una vecindad de ∞ , se dice que f es holomorfa en ∞ (o que f tiene un polo de orden k en ∞), si la función g definida en una vecindad del cero por

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es holomorfa en cero (o tiene un polo de orden k en cero). Obsérvese que si ∞ no es una singularidad esencial, entonces necesariamente se tiene una de las dos posibilidades antes mencionadas.

La elección de $\frac{1}{z}$ en esta definición no es arbitraria. Por una parte, es una elección natural de cartas coordenadas para proveer de estructura de superficie de Riemann a la esfera $\mathbb{S}^2$ como se verá más adelante, por otra parte, $z \mapsto \frac{1}{z}$ rota a la esfera de Riemann en un ángulo π alrededor del eje real. En este caso el exterior de la circunferencia unidad (correspondiente al hemisferio norte), se transformará en el interior de la misma (correspondiente al hemisferio sur).

Por lo tanto la transformación $\frac{1}{z}$ reduce el estudio del punto al infinito y de cualquier entorno del mismo al estudio del punto cero y de su entorno correspondiente.

Luego

$$S'(z) = \frac{-(ad - bc)}{(az + b)^2}$$

y

$$S'(\delta) = S'\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0$$

por lo tanto $T(z)$ es *holomorfa* en el punto $z = \delta$.

Ahora veamos qué pasa en el punto al infinito. Tomamos a $\zeta = \frac{1}{z}$ entonces

$$T(z) = \frac{a\frac{1}{\zeta} + b}{c\frac{1}{\zeta} + d} = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$$

entonces

$$T'(z) = \frac{-(ad - bc)}{(c + d\zeta)^2} \neq 0$$

y de aquí

$$T'(\infty) = \frac{-(ad - bc)}{c^2} \neq 0$$

esto porque $\zeta = \frac{1}{z}$ y $0 = \frac{1}{\infty}$, por lo tanto $T(z)$ es *holomorfa* en el punto al infinito.

Cuando $c = 0$, $T(z) = \alpha z + \beta$ y tenemos que $T(\infty) = \infty$.

Ahora mediante la transformación auxiliar $S(z) = \frac{1}{T(z)} = \frac{1}{\alpha z + \beta}$ y la igualdad $z = \frac{1}{\zeta}$ tenemos que

$$S'(z) = \frac{-\alpha}{(\alpha + \beta\zeta)^2} \neq 0$$

y por lo tanto $T(z)$ es *holomorfa* en el punto al infinito si $c = 0$. $\square$

Hemos demostrado que las transformaciones de Möbius $T(z)$ son *holomorfas* en todo el plano extendido $\hat{\mathbb{C}}$, además con derivada distinta de cero en todo punto de $\hat{\mathbb{C}}$ y en consecuencia tenemos que $T(z)$ es conforme en todo el plano extendido $\hat{\mathbb{C}}$ (esto por la proposición 2.1.1).

2.2.2. Propiedades algebraicas

El conjunto $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ es un **grupo**.

La transformación identidad $Id(z) = \frac{az+0}{0z+a} = z \in Möb(\hat{\mathbb{C}})$.

La *inversa* de la transformación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

es la transformación

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Si

$$T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} = s$$

y

$$T_2(w) = \frac{ew + f}{gw + h} = z$$

son dos transformaciones de Möbius, la transformación que se obtiene al realizar la composición es de nuevo una transformación de Möbius, en efecto supongamos que se efectúa primero la transformación $T_2(w) = z$ y después la transformación $T_1(z) = s$. Entonces

$$T_1 \circ T_2(w) = T_1(T_2(w)) = T_1\left(\frac{ew + f}{gw + h}\right) = \frac{(ae + bg)w + (af + bh)}{(ce + dg)w + (cf + dh)},$$

con

$$(ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) = (ad - bc)(eh - gf) \neq 0.$$

Así pues $T_1 \circ T_2 \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$.

Más aún como la composición usual de funciones es asociativa se sigue que la composición de transformaciones de Möbius es asociativa. Por lo tanto el conjunto de las transformaciones de Möbius $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$, con la composición usual de funciones forman un grupo no conmutativo, ya que si tomamos las transformaciones

$$T_1(z) = \frac{z}{z+1} \quad \text{y} \quad T_2(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

se tiene

$$T_2 \circ T_1(z) = T_2(T_1(z)) = -2z - 1,$$

mientras que

$$T_1 \circ T_2(z) = T_1(T_2(z)) = \frac{z+1}{2z}.$$

Este grupo es conocido como el grupo de Möbius denotado por $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$.

El siguiente hecho se puede obtener también utilizando coordenadas **homogéneas**.

Ahora si consideramos el grupo

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : \det(A) \neq 0\}$$

con la operación $(\cdot)$, que es el producto usual de matrices ($GL(2, \mathbb{C})$ es el grupo general lineal, formado por las matrices dos por dos con coeficientes complejos y determinante $\neq 0$), y el grupo de Möbius

$$\text{Möb}(2, \mathbb{C}).$$

Entonces

$$\varphi : (GL(2, \mathbb{C}), \cdot) \longrightarrow (\text{Möb}(2, \mathbb{C}), \circ)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es un homomorfismo de grupos, es decir que $\forall A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ se cumple que $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$.

En efecto sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

entonces

$$\varphi(A \cdot B) = T_{AB}(z) = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}$$

por otro lado

$$\varphi(A) \circ \varphi(B) = T_A(z) \circ T_B(z) = T_A\left(\frac{ez + f}{gz + h}\right) =$$

$$= \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} = \varphi(A \cdot B),$$

por lo tanto φ es un homomorfismo de grupos.

Veamos cual es el núcleo de φ .

$$K_\varphi = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \varphi(A) = Id(z) = z\}$$

donde $Id(z)$ es la identidad en $Möb(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$K_\varphi = \{\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0 : \varphi(\Lambda) = \frac{az + 0}{0z + a} = \left(\frac{a}{a}\right)z = z = Id(z)\}.$$

Es evidente que φ es sobreyectivo y aplicando el primer teorema de isomorfismo de grupos tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} GL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & Möb(2, \mathbb{C}) \\ \rho \downarrow & \nearrow \psi & \\ \frac{GL(2, \mathbb{C})}{K_\varphi} & & \end{array}$$

donde $\rho(A) = K_\varphi \cdot A$ y $\psi(K_\varphi \cdot A) = \varphi(A) = T_A(z)$, es decir, que

$$\frac{GL(2, \mathbb{C})}{K_\varphi} \cong Möb(2, \mathbb{C}).$$

Ahora si restringimos el homomorfismo φ al subgrupo $SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$ de $GL(2, \mathbb{C})$ tenemos que para toda $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, definimos $T_A \in Möb(2, \mathbb{C})$ como $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
La restricción

$$\Phi = \varphi|_{SL(2, \mathbb{C})} : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Möb(2, \mathbb{C})$$

es un homomorfismo de grupos, y el núcleo K_Φ consiste de las matrices $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Phi} & Möb(2, \mathbb{C}) \\ \varrho \downarrow & \nearrow \Psi & \\ \frac{SL(2, \mathbb{C})}{K_\Phi} & & \end{array}$$

Entonces

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{K_\Phi} \cong Möb(2, \mathbb{C}) \cong \frac{GL(2, \mathbb{C})}{K_\varphi}.$$

Un cálculo de rutina usando las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ muestra que $K_\Phi = Z_{SL}$ donde Z_{SL} es el centro del grupo $SL(2, \mathbb{C})$.²

De lo anterior se sigue que hay exactamente dos matrices unimodulares que determinan una transformación de Möbius dada. Esto es, ya que si T es de Möbius y está definida por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

entonces

$$1 = a'd' - b'c' = k^2(ad - bc) = k^2$$

y

$$k = \pm 1, \text{ i.e. } \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Al cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su centro $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se le llama su proyectivización.

²Si G es un grupo, el centro de G , Z , está definido por $Z = \{g \in G \mid gx = xg \ \forall x \in G\}$

2.2.3. Propiedades geométricas

Una propiedad geométrica de las transformaciones de Möbius, conocida como propiedad **homocíclica** (ó circular), se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *La imagen de una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$ bajo la transformación de Möbius $T(z)$, es una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostración.

Supongamos primero que $c = 0$, entonces $T(z) = \alpha z + \beta$, y de aquí que la transformación $T(z)$ se reduce a una traslación (cuando $\alpha = 1$) o una rotación seguida de una dilatación (si $\alpha \neq 1$), y estas conservan rectas y circunferencias. Debido a que $T(z) = f(\zeta(g(z)))$, donde $g(z) = c^2 z + cd$, $\zeta(z) = \frac{1}{z}$ y $f(z) = -(ad-bc)z + \frac{a}{c}$, o sea que $T(z)$ es la composición de una traslación, una rotación, una inversión y otra traslación, basta con demostrar que la imagen de una circunferencia bajo la inversión es una circunferencia.

Consideremos la transformación

$$w = \zeta(z) = \frac{1}{z}.$$

Sabemos que la ecuación de cualquier circunferencia puede expresarse en la forma

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Cuando $A = 0$ y B y C no son iguales a cero, resulta una recta, y cuando $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$, resulta una circunferencia. Si $z = x + iy$ entonces si sustituimos $x^2 + y^2$ por $z\bar{z}$, $2x$ por $z + \bar{z}$ y $2y$ por $-i(z - \bar{z})$, representamos esta ecuación en la forma

$$A(z\bar{z}) + (B - iC)z + (B + iC)\bar{z} + D = 0,$$

o bien

$$A(z\bar{z}) + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0,$$

donde $E = B + Ci$. Aquí si $A = 0$, y el número complejo E es distinto de cero es el caso de una recta y si $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$ es una circunferencia. El conjunto de números $z \neq 0$ que satisfacen la ecuación $A(z\bar{z}) + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$ se transforman en la siguiente ecuación, sustituyendo a $z = \frac{1}{w}$:

$$A\left(\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}}\right) + \bar{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

o bien

$$A + \bar{E}\bar{w} + Ew + D(w\bar{w}) = 0.$$

La ecuación $A + \bar{E}\bar{w} + Ew + D(w\bar{w}) = 0$ tiene la misma forma que la ecuación $A(z\bar{z}) + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$, con la sustitución de A por D , D por A y E por $\bar{E}$. De aquí se deduce que si $D = 0$ ésta es la ecuación de una recta, y si $D \neq 0$ es la ecuación de una circunferencia. Queda demostrado que la imagen de una circunferencia bajo la inversión es una circunferencia. Entonces como $T(z) = f(\zeta(g(z)))$ y además f, ζ y g transforman circunferencias en circunferencias, se sigue que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene la misma propiedad. $\square$

Obsérvese que este resultado también se puede obtener utilizando la proyección estereográfica y la transformación $\frac{1}{z}$.

2.2.4. Puntos fijos

Para poder obtener la clasificación de las transformaciones de $Möb(2, \mathbb{C})$ necesitamos el concepto de punto fijo el cual analizamos a continuación. Notar que en esta parte se relacionan las propiedades algebraicas, las analíticas y las geométricas.

Si la transformación de Möbius $T(z)$ es distinta de la identidad, entonces, por lo general, $T(z) =$

$\frac{az+b}{cz+d} = w$ es distinto de z . No obstante, aquí también existen puntos fijos, caracterizados por la ecuación

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z.$$

Supongamos primero que $c = 0$, entonces $T(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha = \frac{a}{d}$ y $\beta = \frac{b}{d}$). Como $T(\infty) = \infty$, uno de los puntos fijos de esta transformación es el punto del infinito. Si $\alpha \neq 1$, existe también otro punto fijo, determinado por la ecuación

$$z = \alpha z + \beta.$$

Este es el punto $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$, no existe ningún punto fijo finito.

Si $c \neq 0$. Entonces $T(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, o sea, el punto $z = \infty$ no es fijo. Del mismo modo, no es un punto fijo el punto $\delta = -\frac{d}{c}$, pues $T(\delta) = \infty \neq -\frac{d}{c}$.

Resolvamos la ecuación

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

suponiendo que $z \neq \infty$ y $z \neq -\frac{d}{c}$, es decir, la ecuación

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$

Obtenemos:

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Si $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, entonces de aquí se hallan los dos puntos fijos finitos distintos. Cuando $(a-d)^2 + 4bc = 0$ se tiene un solo punto fijo $\frac{a-d}{2c}$. Esta condición es equivalente a $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$ y si tomamos a $ad-bc = 1$ tenemos que $(a+d)^2 = 4$.

En resumen, las transformaciones de Möbius distintas de la identidad poseen solamente dos puntos fijos. De aquí se tiene que si la transformación de Möbius posee más de dos puntos fijos puede ser solamente la transformación identidad $Id(z) = z$ (para la cual todos los puntos son fijos).

Del teorema 2.2.1 sabemos que las transformaciones de Möbius envían circunferencias en $\hat{\mathbb{C}}$ en circunferencias en $\hat{\mathbb{C}}$, además sabemos que una circunferencia está determinada por tres puntos distintos, entonces dos preguntas que surgen naturalmente de lo expuesto son las siguientes:

¿Dadas dos ternas (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) de puntos en $\mathbb{C}$ existe $T \in Möb(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $T(z_i) = w_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$? , si existe, ¿es única?

Las respuestas a estas preguntas son afirmativas y, para la demostración de la existencia de una transformación de Möbius que toma (z_1, z_2, z_3) y los envía a (w_1, w_2, w_3) , es suficiente mostrar que existe una transformación de Möbius que satisface

$$T(z_1) = 0, T(z_2) = \infty, T(z_3) = 1.$$

Si podemos construir tal T , entonces podemos construir $S \in Möb(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $S(w_1) = 0, S(w_2) = \infty, S(w_3) = 1$ y entonces $M = S^{-1} \circ T$ es la transformación que satisface $M(z_i) = w_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Supongamos primero que z_1, z_2, z_3 y $z \neq \infty$, para que T tome el valor 0 en z_1 y el valor ∞ en z_2 , es necesario y suficiente que T sea de la forma

$$T(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

pero T toma el valor 1 en z_3 por lo que se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a}{c} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \\ \Rightarrow \frac{a}{c} &= \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \end{aligned}$$

luego

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{(z_3 - z_2)z - z_1(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)z - z_2(z_3 - z_1)}. \quad (2.7)$$

Si z_1, z_2 o $z_3 = \infty$ la transformación se reduce a

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2}, \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \text{ ó } \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

además ya que los $z_i, i \neq j$ son distintos se tiene que

$$(z_3 - z_2)(-z_2)(z_3 - z_1) - (-z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_3 - z_2)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \neq 0$$

y así $T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$.

De manera análoga construimos $S \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ con las propiedades requeridas, y hacemos

$$M = S^{-1} \circ T,$$

y es la transformación deseada.

Ahora veamos la unicidad.

Sea M y Λ transformaciones tales que

$$M(z_i) = w_i = \Lambda(z_i) \quad \forall i = 1, 2, 3$$

luego entonces

$$\Lambda^{-1}(w_i) = z_i \quad \forall i = 1, 2, 3;$$

por lo tanto

$$\Lambda^{-1} \circ M(z_i) = \Lambda^{-1}(M(z_i)) = z_i.$$

Es decir la transformación $\Lambda^{-1} \circ M$ tiene tres puntos fijos distintos: z_1, z_2 y z_3 , o sea, es la transformación identidad:

$$\Lambda^{-1} \circ M = Id.$$

Por consiguiente,

$$\Lambda \circ (\Lambda^{-1} \circ M) = \Lambda \circ Id.$$

Entonces

$$\Lambda \circ (\Lambda^{-1} \circ M) = (\Lambda \circ \Lambda^{-1}) \circ M = Id \circ M = M = \Lambda \circ Id = \Lambda,$$

por lo tanto

$$M = \Lambda,$$

como se quería demostrar.

2.2.5. Razón doble

De la ecuación 2.7 se deduce una importante propiedad general de las transformaciones de Möbius.

Definición 2.2.1. *Dados cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3 y z_4 en $\mathbb{C}$, se define la razón doble de z_1, z_2, z_3 y z_4 como:*

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

La definición de la razón doble la extendemos también al caso en que uno de los cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 sea el del infinito.

La razón doble de cuatro puntos, entre los cuales uno es el del infinito, se obtiene pasando al límite de la razón doble, cuando $z_i \rightarrow \infty$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} [\infty, z_2; z_3, z_4] &= \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_4 - z}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{z_4}{z} - 1}{\frac{z_4}{z} - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{\frac{z_3}{z} - 1} = \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}. \end{aligned}$$

La razón doble de $[z_1, \infty; z_3, z_4], [z_1, z_2; \infty, z_4]$ y $[z_1, z_2; z_3, \infty]$ se define similarmente.

Como consecuencia del teorema 2.2.1 y usando la razón doble obtenemos:

Proposición 2.2.1. *Cualesquiera que sean las rectas o circunferencias γ y Γ y dos ternas de puntos (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) , pertenecientes a γ y Γ , respectivamente, existe una transformación de Möbius T que transforma a γ en Γ y hace corresponder a los puntos (z_1, z_2, z_3) en los puntos (w_1, w_2, w_3) , respectivamente.*

Demostración.

Escribamos la transformación de Möbius $T(z)$ que satisface las condiciones de que $T(z_i) = w_i$ ($i = 1, 2, 3$). Según lo expuesto anteriormente, tal transformación existe y es la única que cumple lo requerido. Esta función transforma a la recta o circunferencia γ en una recta o circunferencia Γ' (por el Teorema 2.2.1). Pero por hipótesis γ pasa por z_1, z_2 y z_3 , por lo tanto Γ' pasa por w_1, w_2 y w_3 , y como por tres puntos no puede pasar dos rectas o dos circunferencias distintas, $\Gamma = \Gamma'$. Así, pues, $T(z)$ es la transformación deseada. $\square$

El comportamiento de la razón doble bajo transformaciones de Möbius se describe en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Si T es una transformación de Möbius, entonces*

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$$

para toda cuadrupla (z_1, z_2, z_3, z_4) de puntos distintos de $\mathbb{C}$.

Demostración.

Sea g la única transformación de Möbius que envía a $T(z_1)$ en 0, $T(z_2)$ en ∞ , y $T(z_3)$ en 1. Entonces $g \circ T$ transforma a z_1 en 0, a z_2 en ∞ , y a z_3 en 1. De acuerdo con la definición de razón doble tenemos que

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = g \circ T(z_4) = g[T(z_4)] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$$

como se deseaba. $\square$

El resultado anterior nos asegura la invarianza de la razón doble bajo las transformaciones de Möbius.

Una cuestión sorprendente está provista por el siguiente ejemplo, el cual establece que al encontrar $T \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ que envía tres puntos distintos de la recta real en tres puntos del círculo unidad, nos produce un mapeo conforme entre sus dominios correspondientes, lo cual nos permite asegurar una equivalencia conforme entre estos dos dominios.

Ejemplo 2.2.1. *Supongamos que hay que transformar conformemente el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, en el interior de círculo unidad $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Para encontrar la transformación T , que envía $\mathbb{H}$ en Δ , tomamos tres puntos de la recta real extendida $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 1$, consideremos también tres puntos en la circunferencia unitaria, digamos $w_1 = 1$, $w_2 = i$ y $w_3 = -1$. Entonces la transformación que satisface las condiciones $w_i = T(z_i)$ ($i = 1, 2, 3$), puede expresarse en la forma

$$\frac{w-1}{w-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{z+1}{z} \cdot \frac{1}{1+1},$$

entonces

$$w = \frac{z-i}{zi-1} = T(z).$$

Estos fenomenos son generalizados utilizando el teorema **del mapeo de Riemann**, el cual revisaremos más adelante.

2.3. Clasificación de las transformaciones de Möbius

En esta sección daremos la clasificación por conjugación de las transformaciones de Möbius, utilizando la razón doble, los puntos fijos de estas transformaciones, y mostrando que toda transformación de Möbius es conjugada a una transformación dada de forma estándar (en la bibliografía se les llama también transformaciones *canónicas* véase [8, pág. 20]).

Antes de iniciar esta clasificación introduciremos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Decimos que dos transformaciones de Möbius M y T son conjugadas si existe una transformación de Möbius ρ tal que*

$$M = \rho \circ T \circ \rho^{-1}.$$

Geoméricamente, si M y T son conjugadas por ρ , entonces la conjugación nos provee de un cambio de coordenadas. Es claro que si M y T son conjugadas por ρ , entonces M y T tienen el mismo número de puntos fijos.

La idea básica de la clasificación de las transformaciones de Möbius es conjugar una transformación de Möbius con una dada de forma estándar, y luego clasificarlas por las formas estándar posibles. Trabajaremos con una transformación de Möbius T distinta de la identidad.

Suponga que T tiene un solo punto fijo $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$, y sea $w \in \hat{\mathbb{C}} - \{\zeta\}$. Observe que $(\zeta, w, T(w))$ es una terna de puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ distintos entre sí.

Sea ρ una transformación de Möbius tal que envía la terna $(\zeta, w, T(w))$ en la terna $(\infty, 0, 1)$, y consideremos la composición $\rho \circ T \circ \rho^{-1}$.

Por la construcción de ρ (que es posible gracias a la razón doble), tenemos que

$$(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(\infty) = \rho(T(\zeta)) = \rho(\zeta) = \infty.$$

Dado que $\rho \circ T \circ \rho^{-1}$ deja fijo al punto del infinito, podemos escribirla como $\rho \circ T \circ \rho^{-1}(z) = az + b$ con $a \neq 0$, ya que $\rho \circ T \circ \rho^{-1}$ tiene un solo punto fijo el del infinito tenemos que

$$\begin{aligned} az + b = z &\iff z = \frac{b}{1-a} = \infty \\ &\iff a = 1. \end{aligned}$$

Luego como $(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(0) = \rho \circ T(w) = \rho(T(w)) = 1$, de aquí tenemos que

$$(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(z) = z + 1 = M(z).$$

Por lo tanto, una transformación T con un solo punto fijo es conjugada a una transformación de Möbius de la forma $M(z) = z + 1$.

Definición 2.3.2. *Decimos entonces que T es parabólica, si T fija exactamente un punto en $\hat{\mathbb{C}}$ y nos referimos a su forma estándar como $(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(z) = z + 1 = M(z)$.*

Supongamos ahora que T tiene dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$, digamos α y β . Sea

$$q(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{2.8}$$

una transformación de Möbius tal que $q(\alpha) = 0$ y $q(\beta) = \infty$, y consideremos la composición $q \circ T \circ q^{-1}$.

Por definición, tenemos que $(q \circ T \circ q^{-1})(\infty) = (q \circ T)(\beta) = q(\beta) = \infty$, y que $(q \circ T \circ q^{-1})(0) = (q \circ T)(\alpha) = q(\alpha) = 0$ y así podemos escribir $(q \circ T \circ q^{-1})(z) = az$ para algún $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. En adelante nos referimos a a como el **multiplicador** de la transformación T .

Si el *multiplicador* de T , satisface que $|a| = 1$, entonces podemos escribir a $a = e^{2i\varphi}$ para algún $\varphi \in (0, \pi)$, y $q \circ T \circ q^{-1}(z) = e^{2i\varphi}z$ es una rotación alrededor del origen por un ángulo 2φ .

Definición 2.3.3. Decimos que T es elíptica, si T fija exactamente 2 puntos en $\hat{\mathbb{C}}$, y es conjugada a la transformación de Möbius $S(z) = az$ tal que $|a| = 1$. Nos referimos a $(q \circ T \circ q^{-1})(z) = e^{2i\varphi}z$ como su forma estándar.

Por otro lado si $|a| \neq 1$, entonces podemos escribir a $a = \lambda^2 e^{2i\varphi}$ donde λ es un número real positivo distinto de la unidad y para algún $\varphi \in [0, \pi)$, de modo que $q \circ T \circ q^{-1}(z) = \lambda^2 e^{2i\varphi}z$ es la composición de una dilatación por λ^2 y una rotación alrededor del origen por un ángulo 2φ .

Definición 2.3.4. Decimos que T es hiperbólica, si T fija exactamente 2 puntos en $\hat{\mathbb{C}}$, y es conjugada a la transformación de Möbius $S(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Si $|a| \neq 1$ y $a \notin \mathbb{R}^+$, a T se le llama loxodrómica.

Otra clasificación de las transformaciones de Möbius se obtiene en términos de la traza de la matriz A asociada a la transformación T , la cual denotaremos como $Tr_A(T)$. Esto se tiene de la condición $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$, que se obtuvo en el análisis de los puntos fijos de la transformación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, es decir que los puntos fijos de T están siendo determinados por la traza cuadrada de la matriz A .

Ya observamos que toda transformación de Möbius puede ser conjugada a una de las dos formas estándar (determinadas por el número de puntos fijos de la transformación), a saber;

$$M(z) = z + 1$$

ó

$$S(z) = az.$$

Como $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{K_\Phi} \cong \text{Möb}(2, \mathbb{C})$, tenemos que $A_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es la matriz que representa a la transformación $M(z) = z + 1$, y $B_S = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$, es la matriz que representa a la transformación $S(z) = az$, fijemonos en la traza cuadrada de A_M y B_S ,

$$Tr_{A_M}^2(M) = 4$$

y

$$Tr_{B_S}^2(S) = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = a + \frac{1}{a} + 2.$$

Por lo tanto tenemos que para toda $T \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$, tal que T no es la identidad,

$$Tr_A^2(T) = a + \frac{1}{a} + 2, \quad (2.9)$$

donde $a, \frac{1}{a}$ son los multiplicadores de T y Tr_A es la traza de su matriz asociada A .

Teniendo en cuenta 2.9 se puede demostrar facilmente el siguiente teorema que resume la clasificación de las transformaciones de Möbius en términos de la traza.

Teorema 2.3.1. Sea $T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$, tal que T no es la identidad, y sea $Tr_A(T)$ la traza de la matriz asociada a la transformación T . Entonces

- (i) T es parabólica si y sólo si $Tr_A(T) = \pm 2$;
- (ii) T es elíptica si y sólo si $Tr_A(T) \in (-2, 2)$;
- (iii) T es hiperbólica si y sólo si $Tr_A(T) \in [(2, \infty) \cup (-\infty, -2)]$;
- (iv) T es loxodrómica si y sólo si $Tr_A(T) \notin \mathbb{R}$

Una demostración de este teorema se puede ver en [8, pág. 40] o también en [9, pág. 405]. Esta clasificación es de gran utilidad, por ejemplo, permite detectar de manera inmediata de qué tipo es una transformación de Möbius dada.

Ejemplo 2.3.1. *Las transformaciones*

$$z \mapsto \frac{2z+3}{z+2} \quad y \quad z \mapsto \frac{2z+9}{-z-4}$$

son hiperbólica y parabólica, respectivamente. Por otra parte, las funciones

$$z \mapsto \frac{-1}{z} \quad y \quad z \mapsto \frac{iz-2}{z+iz}$$

son elíptica de orden 2 y loxodrómica, respectivamente.

El siguiente resultado que es consecuencia del teorema anterior, muestra que la traza clasifica las clases conjugadas de $Möb(2, \mathbb{C})$.

Corolario 2.3.1. *Dos transformaciones de Möbius T, R son conjugadas en $Möb(2, \mathbb{C})$ si y sólo si*

$$Tr^2(T) = Tr^2(R).$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sabemos que si R y T son conjugadas entonces existe ρ tal que $R = \rho \circ T \circ \rho^{-1}$ y como la traza es invariante bajo la conjugación en $GL(2, \mathbb{C})$ (ó en $SL(2, \mathbb{C})$), entonces la traza de la matriz asociada a R es igual a la traza de la matriz asociada a T .

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $Tr^2(T) = Tr^2(R)$. Sabemos que T y R son conjugadas cada una a una de forma estándar, digamos $T = \rho \circ S_a \circ \rho^{-1}$, $R = \mu \circ S_b \circ \mu^{-1}$, con $\rho, \mu \in Möb(2, \mathbb{C})$, $S_a = az$ y $S_b = bz$. Por lo tanto

$$Tr^2(S_a) = Tr^2(T) = Tr^2(R) = Tr^2(S_b)$$

y usando 2.9, se muestra que $a = b$ ó $a = \frac{1}{b}$, claramente S_a es conjugada con $S_{\frac{1}{a}}$ mediante la función $\zeta(z) = -\frac{1}{z}$ (el caso en $a = 1$ es trivial). Ahora tenemos que T es conjugada a S_a y R es conjugada a S_b y (con $a = b$ ó $a = \frac{1}{b}$) S_a es conjugada a S_b , por lo tanto tenemos que T es conjugada a R que es lo que se deseaba. $\square$

2.3.1. Círculo isométrico

Consideremos una transformación de Möbius T , diferente de la identidad. Consideremos aquellos puntos en la esfera de Riemann donde T no produce distorsión Euclideana, es decir, aquellos puntos donde $|T'(z)| = 1$.

(1) Si $T(\infty) = \infty$, entonces $T(z) = az + b$, con $a \neq 0$. En este caso, $|T'(z)| = |a|$. Luego T no produce distorsión en un punto si y sólo si no produce distorsión en todo punto de $\mathbb{C}$ si y sólo si T es elíptica.

(2) Si $T(z) \neq \infty$, entonces $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $c \neq 0$ y $ad-bc = 1$. En este caso $|T'(z)| = 1$ si y sólo si $|cz+d| = 1$. Obtenemos así que el conjunto de puntos donde T no produce distorsión Euclideana es un círculo con centro $-\frac{d}{c}$ y cuyo radio es $\frac{1}{|c|}$. Este círculo recibe el nombre de círculo isométrico de T y lo denotamos por I_T .

Si consideramos la transformación de Möbius inversa de T ,

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

obtenemos los respectivos círculos isométricos

$$I_T := \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{d}{c}| = \frac{1}{|c|}\},$$

$$I_{T^{-1}} := \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{c}| = \frac{1}{|c|}\}.$$

Ambos círculos isométricos tienen el mismo radio Euclideo. Más aún, se puede verificar directamente que:

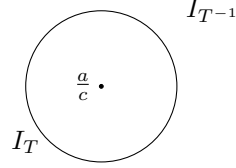
$$T(I_T) = I_{T^{-1}}$$

y

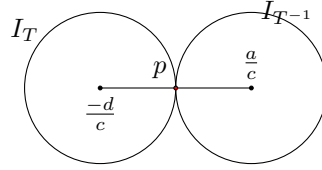
$$T(\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{d}{c}| \leq \frac{1}{|c|}\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{c}| \geq \frac{1}{|c|}\} \cup \{\infty\}.$$

Geométricamente, tenemos cuatro posibles configuraciones para este par de círculos:

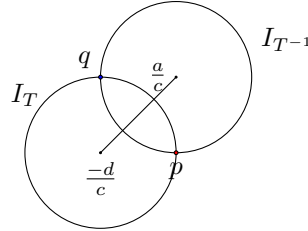
(1) Ambos círculos coinciden. Esto ocurre si y sólo si $d = -a$, lo cual es lo mismo que decir que $T^2 = Id$.



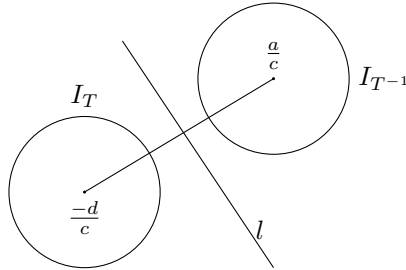
(2) Ambos círculos son tangentes en un punto. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es igual a la suma de los radios, es decir $|a + d| = 2$. Luego T es parabólica o loxodrómica.



(3) Ambos círculos intersectan en exactamente dos puntos. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es mayor a cero y es menor a la suma de los radios, es decir $0 < |a + d| < 2$. Luego T es elíptica o loxodrómica.



(4) Ambos círculos son disjuntos. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es mayor a la suma de los radios, es decir $|a + d| > 2$. Luego T es loxodrómica.



Supongamos ahora que $T \neq Id$. Tenemos entonces que los centros de ambos círculos isométricos son diferentes. Consideremos la única línea L que pasa por esos centros, es decir, por $T^{-1}(\infty)$ y $T(\infty)$. Sea M la línea ortogonal a L que pasa por el medio del trazo de L determinado por ambos centros. Sea $R = \eta \circ \tau$, donde τ es la única reflexión cuyo conjunto de puntos fijos es I_T

y η la única reflexión cuyo círculo de puntos fijos es $M \cup \{\infty\}$. Entonces $S = T^{-1} \circ R$ es una transformación de Möbius que satisface $S(\infty) = \infty$, $S(I_T) = I_T$ y $S(T^{-1}(\infty)) = T^{-1}(\infty)$. Es fácil ver que necesariamente S es una rotación (luego una transformación elíptica). En este caso $T = R \circ S^{-1}$. En el caso que $T^2 = Id$, podemos hacer lo mismo considerando $\eta = Id$. De esta manera hemos obtenido la siguiente:

Proposición 2.3.1. *Sea T una transformación de Möbius diferente de la identidad tal que $T(\infty) = \infty$. Entonces:*

- (1) *Los círculos isométricos de T y T^{-1} coinciden si y sólo si $T^2 = Id$.*
- (2) *T es composición de dos reflexiones y una rotación (si $T^2 = Id$, una de las reflexiones es reemplazada por la identidad). Una reflexión y la rotación preservan la métrica Euclideana del plano. Luego la distorsión de áreas Euclidianas producida por T es la producida por la reflexión en su círculo isométrico.*

2.3.2. Iteraciones

Concluimos esta sección con una breve discusión sobre las composiciones iteradas de una transformación de Möbius la cual es necesaria para entender la geometría de estas transformaciones. Si T es parabólica, entonces para algún $\rho \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ tenemos que

$$(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(z) = z + 1 = M(z).$$

Al iterar M tenemos que

$$M^n(z) = z + n = (\rho \circ T \circ \rho^{-1})^n(z) = (\rho \circ T^n \circ \rho^{-1})(z).$$

O sea que los puntos de $\mathbb{C}$ se mueven hacia ∞ en la dirección de 1, es decir

$$(\rho \circ T^n \circ \rho^{-1})(z) = M^n(z) \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así en general tenemos que si T es parabólica entonces

$$T^n(z) \rightarrow \alpha,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y donde α es el punto fijo de T .

Si T no es parabólica, entonces T tiene dos puntos fijos, digamos α y β , y para q como en 2.8 tenemos que

$$q \circ T \circ q^{-1}(z) = az = S(z) \quad (a \neq 0, 1)$$

y de aquí que

$$(q \circ T \circ q^{-1})^n(z) = q \circ T^n \circ q^{-1}(z) = a^n z = S^n(z).$$

$$\Leftrightarrow T^n(z) = (q^{-1} \circ S^n \circ q)(z)$$

$$\Leftrightarrow q \circ T^n(z) = \frac{T^n(z) - \alpha}{T^n(z) - \beta} = a^n \left[\frac{z - \alpha}{z - \beta} \right] = S^n \circ q(z).$$

Por lo cual si $a > 1$ y $z \neq \alpha$, entonces $T^n(z) \rightarrow \beta$, cuando $n \rightarrow \infty$, ya que $S^n \circ q(z)$ se acerca a ∞ . En este caso los puntos fluyen hacia β y se dice que β es el *atractor*. También $S^n \circ q(z)$ se aleja de 0 y por tanto $T^n(z)$ de α , se dice que α es el *repulsor*. Note que si $a < 1$ se invierten los papeles α es ahora el *atractor* y β el *repulsor*, además el punto atractor de T es el punto repulsor de T^{-1} y viceversa.

2.4. Automorfismos de dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$

En esta sección veremos una clasificación de los automorfismos de los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$. El teorema de clasificación es de mucha importancia ya que con éste obtenemos modelos de las distintas geometrías, o sea, la geometría euclídeana, la elíptica y la hiperbólica.

Pero antes del teorema necesitamos del siguiente lema que es de mucha importancia y la siguiente definición.

Lema 2.4.1. (Lema de Schwarz) Sea $f : \Delta \rightarrow \Delta$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Delta$. Entonces:

i) $|f(z)| \leq |z|$.

ii) $|f'(0)| \leq 1$.

iii) Si existe $z_0 \in \Delta - \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$, entonces es un giro, es decir,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : f(z) = e^{i\theta} z, \forall z \in \Delta.$$

Demostración. Definamos la función auxiliar

$$q : \Delta \rightarrow \mathbb{C} \quad q(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

Esta función es holomorfa en todo el disco.

Luego si $r \in (0, 1)$ y para $z \in \Delta$, tal que $|z| \leq r$, por el principio del módulo máximo³ se sigue que

$$|q(z)| \leq \max \{ |q(z)| : |z| = r \} = \max \left\{ \left| \frac{f(z)}{z} \right| : |z| = r \right\} \leq \frac{1}{r}.$$

Haciendo $r \rightarrow 1$, obtenemos que $|q(z)| \leq 1$ y esta desigualdad es válida para todo $z \in \Delta$. Por lo tanto se cumple i) y ii) del lema:

Ahora sea $z_0 \in \Delta$ tal que $|q(z_0)| = 1$ (es decir, $z_0 \in \Delta - \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$). De nuevo utilizando el principio del módulo máximo, tenemos que la función $|q|$ alcanza su máximo absoluto en Δ , ésto ocurre solo cuando $q(z)$ es constante, de módulo 1. Por lo tanto

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : q(z) = e^{i\theta}, \forall z \in \Delta. \square$$

Definición 2.4.1. Una función biyectiva entre dos dominios (abiertos y conexos) U y V , holomorfa, es un biholomorfismo entre estos dos dominios, y establece un homeomorfismo⁴ conforme entre estos dos dominios. A tal transformación se le llama equivalencia conforme, si $A = B$, tal equivalencia conforme se llama automorfismo conforme de A .

Por lo tanto las transformaciones de Möbius son *biholomorfismos*, y lo más importante es que podemos clasificar todos los automorfismos de los dominios canónicos $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mediante tales transformaciones. Esta clasificación se describe en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. (i) Todo elemento de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tiene la forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

³**Teorema del módulo máximo.** Sea f analítica en una región A y supóngase que $|f|$ tiene un máximo relativo $z_0 \in A$ (esto es, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z en alguna vecindad de z_0). Entonces, f es constante en alguna vecindad de z_0 . Es decir, que una función holomorfa no constante no puede alcanzar un valor máximo absoluto en algún punto interior de la región de definición.

⁴Una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ entre dos espacios topológicos se llama *homeomorfismo* si es una función biyectiva y tanto como f y su inversa f^{-1} son continuas.

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con $ad - bc = 1$.

(ii) Todo elemento de $Aut(\mathbb{C})$ tiene la forma

$$\gamma(z) = az + b$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$.

(iii) Todo elemento de $Aut(\Delta)$ tiene la forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Estos elementos también se pueden escribir como

$$\gamma(z) = \exp i\theta \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \Delta$.

(iv) Todo elemento de $Aut(\mathbb{H})$ tienen la forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc = 1$.

Demostración.

(i) Si $\gamma \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ y $\gamma(\infty) = \infty$, entonces en una vecindad del ∞ , γ tiene una expansión de Laurent (ya que el ∞ es una singularidad aislada),

$$\gamma(z) = az + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

con $a \neq 0$,

$$\gamma(z) - az = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

y de aquí que $\gamma(z) - az$ es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ y por el teorema de Liouville⁵, tenemos que $\gamma(z) - az$ debe de ser una constante b . De aquí que $\gamma(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Si $\gamma(z) \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ y $\gamma(\infty) = z_0 \neq \infty$, entonces definimos $h = g \circ \gamma$, donde $g(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Ya que g es de Möbius y es tal que mapea z_0 en el ∞ , h es un mapeo conforme de $\hat{\mathbb{C}}$ que deja fijo al punto ∞ . Por lo anterior se tiene que h tiene la forma $h(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Por lo tanto se tiene que h es una transformación de Möbius. Luego si $\gamma = h$ ó $\gamma = g^{-1} \circ h$, γ es una transformación de Möbius como se deseaba.

(ii) Cada elemento de $\gamma \in Aut(\mathbb{C})$ se extiende a un elemento de $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ si establecemos que $\gamma(\infty) = \infty$. Así por el argumento anterior se sigue que γ se escribe de la forma estipulada.

(iii) Demostremos el caso en el que $\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \Delta$. Primero verifiquemos que $\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ mapea conformemente a Δ en sí mismo.

Definamos $\gamma = g \circ h$ en Δ , donde $g(z) = e^{i\theta}(z)$ y $h(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$. Como g es una rotación de Δ alrededor del origen, g mapea a Δ en sí mismo. Veamos que h también mapea a Δ en sí mismo. Sabemos que $z, \alpha \in \Delta$ veamos que $|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}| < 1$.

Tenemos que $|z|^2 < 1$ y que $0 < 1 - |\alpha|^2$, entonces

$$|z|^2 (1 - |\alpha|^2) < 1 - |\alpha|^2$$

⁵El teorema de Liouville dice que: *Toda función entera y acotada es constante*, es decir, no hay más funciones holomorfas y acotadas en todo $\mathbb{C}$ más que las constantes

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow |z|^2 - |z|^2 |\alpha|^2 < 1 - |\alpha|^2 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 + |\alpha|^2 < 1 + |\alpha|^2 |z|^2 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha}z - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2 < 1 + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 |z|^2 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2 < 1 - \alpha\bar{z} - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 |z|^2 \\
 &\Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) < (1 - \alpha\bar{z})(1 - \alpha\bar{z}) \\
 &\Leftrightarrow |z - \alpha|^2 < |1 - \alpha\bar{z}|^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{|z - \alpha|^2}{|1 - \alpha\bar{z}|^2} < 1.
 \end{aligned}$$

Por tanto $|h(z)| < 1$ cuando $|z| < 1$, en otras palabras $h(\Delta) \subset \Delta$. Ahora consideremos la función k definida por $k(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$. Como k tiene la misma estructura de h se sigue que $k(\Delta) \subset \Delta$. Además es claro que $h(k(z)) = k(h(z)) = z$ para todo $z \in \Delta$ lo cual implica que

$$\Delta = [h \circ k](\Delta) = h[k(\Delta)] \subset h(\Delta) \subset \Delta,$$

es decir, $h(\Delta) = \Delta$. Como consecuencia tenemos que g y h mapean conformemente a Δ en sí mismo. Por lo tanto la composición $\gamma = g \circ h$ hace lo mismo. Queda por comprobar que para cualquier mapeo conforme γ de Δ en sí mismo es de la forma estipulada. Para ello, proponemos el conjunto $\{\alpha\} = \gamma^{-1}(0)$ y nos fijamos en la función $g : \Delta \rightarrow \Delta$ dada por $g = \gamma \circ k$, donde $k : \Delta \rightarrow \Delta$ es el mapeo conforme definido como $k(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$. Entonces g , también es un automorfismo de Δ , tal que

$$g(0) = \gamma[k(0)] = \gamma(\alpha) = \gamma[\gamma^{-1}(0)] = 0.$$

Tenemos que $g(0) = 0$, por el **Lema de Schwarz** tenemos que $|g'(0)| \leq 1$. Luego la función g^{-1} también es un automorfismo conforme de Δ que deja fijo al origen, entonces aplicando de nuevo el Lema de Schwarz tenemos que

$$\frac{1}{|g'(0)|} = |[g^{-1}]'(0)| \leq 1.$$

Como resultado obtenemos que $|g'(0)| = 1$. De acuerdo con el Lema de Schwarz esto solo pasa cuando g tiene la estructura $g(z) = e^{i\theta}z$ para algún número real θ . Finalmente, por la primera parte de la demostración sabemos que la inversa de k es la función $h : \Delta \rightarrow \Delta$ con la regla de correspondencia $h(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, en conclusión tenemos que $\gamma = g \circ k^{-1} = g \circ h$ tiene la forma estipulada.

(iv) Si γ es una transformación de la forma indicada en el enunciado, entonces γ deja invariante el eje real extendido $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$, y como $\text{Im}[\gamma(i)] = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0$, por la conexidad de $\mathbb{H}$, se tiene que la imagen bajo γ de $\mathbb{H}$ es el mismo $\mathbb{H}$.

Por otra parte, si una función en $Möb(2, \mathbb{C})$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

preserva $\mathbb{H}$, entonces por la continuidad y la biyectividad implica que T también preserva la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}$. Ahora, si

$$S(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

resulta que T y S coinciden en $\hat{\mathbb{R}}$, ya que si $z \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces

$$T(z) = \overline{T(z)} = S(\bar{z}) = S(z).$$

Por lo tanto, como T y S coinciden en más de dos puntos, $T = S$ y

$$a = \pm \bar{a}, \quad b = \pm \bar{b}, \quad c = \pm \bar{c}, \quad d = \pm \bar{d}.$$

Hay que probar que a, b, c y d no son imaginarios puros, si así fuera, se tendría

$$T(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-\bar{c}i + \bar{d})}{|ci + d|^2}$$

y

$$\operatorname{Im}(T(i)) = \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{|ci + d|^2} = \frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}}{|ci + d|^2} < 0,$$

lo cual contradice que T preserva $\mathbb{H}$. $\square$

En algunas investigaciones geométricas contemporáneas los principios de la teoría de grupos siguen jugando un papel importantísimo, lo cual es herencia de **Felix Klein** (1849-1925) que dió una famosa definición de geometría en su discurso el *Programa de Erlangen* en 1872, cuyo principio unificador es la idea de que una geometría es el estudio de los invariantes de un espacio bajo la acción de un cierto grupo de transformaciones. El teorema de clasificación de los automorfismos canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$ me lleva vía, el *Programa de Erlangen* a obtener modelos para las distintas geometrías, es decir, $\hat{\mathbb{C}}$ es un modelo para la geometría elíptica, $\mathbb{C}$ es un modelo de la geometría euclidea y Δ y $\mathbb{H}$ son modelos de la geometría hiperbólica, esto se tiene vía la acción de los subgrupos de *automorfismos* de los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$, que se constituyen como subgrupos del grupo $Möb(2, \mathbb{C})$.

2.4.1. Geometrías no euclideanas

En la Geometría Euclidea estudiamos a $\mathbb{C}$ y sus isometrías, es decir las transformaciones T , tales que $|z_1 - z_2| = |T(z_1) - T(z_2)|$, dichas isometrías pertenecen al grupo $Aut(\mathbb{C})$, y pueden ser representadas como producto de traslaciones y rotaciones, la forma analítica de éstas isometrías en el plano euclideo según el teorema 2.4.1 es

$$\gamma(z) = az + b$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, 1 y $|a| = 1$.

Es claro ver que cualquier isometría del plano manda líneas y circunferencias euclideas en líneas y circunferencias euclideas.

Es costumbre darle el nombre de **geometrías no euclideas**, a aquellas geometrías que conservan todos los postulados de Euclides menos uno de ellos, el quinto, el llamado postulado de las paralelas, el cual evidentemente es el más complicado en su enunciado y menos intuitivo para su comprensión, por lo que utilizaremos un enunciado equivalente, uno de los más utilizado en la actualidad, atribuido a John Playfair (1748-1818):

“Por un punto exterior a una recta, pasa una y solo una paralela”;

el cual no se deduce de los otros postulados de Euclides, y el hecho de negarlo aceptando los demás, no conduce a contradicción alguna. Esta idea se maduró en la primera mitad del siglo XIX, por célebres matemáticos como Bolyai, Lobachevsky y Gauss, que demostraron que existían otros sistemas geométricos en los cuales no se cumplía el quinto postulado pero sí los cuatro primeros, reafirmando entonces la independencia del mismo, y que dió como resultado el nacimiento de las geometrías no euclideas, como ejemplo tenemos.

La geometría elíptica, la cual resulta de sustituir el postulado de las paralelas por el siguiente:

“Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela”;

es la geometría sobre $\hat{\mathbb{C}}$, donde se consideran como rectas las circunferencias máximas. Solamente hay que convenir, para evitar que dos rectas se corten en dos puntos diferentes, que los puntos diametralmente opuestos sean un solo punto.

Vía el *Programa de Erlangen* tenemos que el grupo de $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ actúa sobre $\hat{\mathbb{C}}$, y por el teorema 2.4.1 sabemos cuál es la forma analítica de todo elemento de $Aut(\hat{\mathbb{C}})$, la cual es una transformación de Möbius.

2.4.1.1. La métrica cordal

Es útil obtener, en términos de z y z' , puntos del plano complejo, una fórmula de la distancia entre sus proyecciones en la esfera. Si denotamos éstas por (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3) , se tiene

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x_3)^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3).$$

Ahora usando 2.1, 2.2, 2.3, se sigue que

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 &= \\ &= \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left(\frac{z' + \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) - \left(\frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left(\frac{z' - \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) + \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \left(\frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} = \\ &= \frac{-2(z - z')(\bar{z} - \bar{z}') + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \end{aligned}$$

(el último paso equipara numerador y denominador).

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x_3)^2 &= 2 - 2 \left(1 - \frac{2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \right) = \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}. \end{aligned}$$

Esta nueva fórmula de distancia en $\hat{\mathbb{C}}$ es particularmente novedosa y útil por incluir el punto al infinito. En este caso, si $z' = \infty$, se tiene

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

por lo que

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x_3)^2 = 2 - 2 \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{4}{1 + |z|^2}.$$

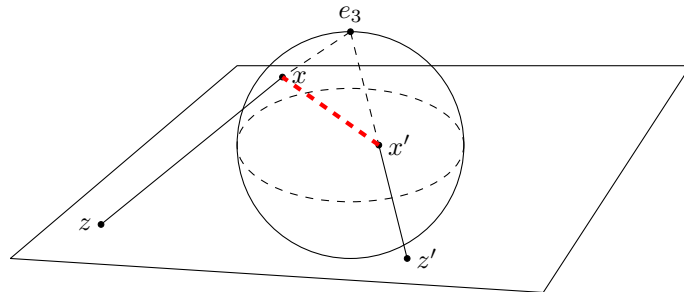
Estos cálculos inducen la métrica buscada en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 2.4.2. Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente manera

$$d_C(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, & \text{si } z_2 = \infty \end{cases}$$

Como $\mathbb{S}^2$ es un subespacio métrico de $\mathbb{R}^3$, esta distancia define en efecto una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$. El término cordal proviene de que mide cuerdas en la esfera

$$d_C(z_1, z_2) = |\Pi(z_1) - \Pi(z_2)|.$$



Más aún las métricas cordal y euclidiana inducen la misma topología en $\mathbb{C}$, es decir definen los mismos abiertos en $\mathbb{C}$ (ver [8, Pag. 7]).

La más rica de las geometrías no euclideanas es la geometría hiperbólica, la cual resulta de sustituir el postulado de las paralelas por el siguiente

“Por un punto exterior a una recta pasan una infinidad de paralelas”;

sabemos por el teorema de clasificación de los automorfismos en $\hat{\mathbb{C}}$ 2.4.1 que $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ son modelos para la geometría hiperbólica.

2.4.1.2. La métrica hiperbólica

Sabemos que una curva en $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ es una función diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \hat{\mathbb{C}}$, donde U puede ser cualquier dominio canónico en $\hat{\mathbb{C}}$.

En el plano $\mathbb{H}$ se define la longitud hiperbólica de una curva de la siguiente manera:

Definición 2.4.3. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ es una curva en $\mathbb{H}$, definimos la longitud hiperbólica de α , y la denotamos por $l(\alpha)$, como

$$l(\alpha) = \int_a^b \frac{\sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}}{\alpha_2(t)} dt. \quad (2.10)$$

Con la fórmula 2.10 podemos definir una métrica en el plano hiperbólico. En efecto, diremos que una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ une los dos puntos z_1 y z_2 si $\alpha(a) = z_1$ y $\alpha(b) = z_2$. Notemos que $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ dada por $\alpha(t) = tz_2 + (1-t)z_1$ es una curva que une a z_1 y z_2 , y si $z_1 \neq z_2$ (esto porque $\mathbb{H}$ es convexo) entonces la longitud es positiva. Por lo tanto tiene sentido definir la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen ambos puntos.

Definición 2.4.4. La distancia hiperbólica entre dos puntos z_1 y z_2 la denotamos como $\rho(z_1, z_2)$ y se define como

$$\rho(z_1, z_2) = \inf \{l(\alpha) \mid \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}, \alpha(a) = z_1, \alpha(b) = z_2\}. \quad (2.11)$$

La demostración de que en efecto $\rho(z_1, z_2)$ es una métrica, puede verse en [8, pág. 44].

Más adelante veremos que existe una curva que realiza dicho ínfimo, y por lo tanto se puede definir la distancia como el mínimo de dichas longitudes. En el siguiente ejemplo calculamos explícitamente la distancia entre dos puntos sobre el eje imaginario positivo.

Ejemplo 2.4.1. Sean $z_1 = xi$ y $z_2 = yi$ con $x, y > 0$, entonces

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \log\left(\frac{y}{x}\right) \right|. \quad (2.12)$$

En efecto. Suponemos que $x < y$. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva que une z_1 con z_2 . Entonces

$$l(\alpha) = \int_a^b \frac{\sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}}{\alpha_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|\alpha'_2(t)|}{\alpha_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\alpha'_2(t)}{\alpha_2(t)} dt = \log(\alpha_2(t)) \Big|_a^b = \log\left(\frac{y}{x}\right).$$

Por lo tanto, $l(\alpha)$ está acotado inferiormente por $\log(\frac{y}{x})$, es decir, $\rho(z_1, z_2) \geq \log(\frac{y}{x})$.

Ahora bien si definimos

$$\beta(t) = it, \quad x \leq t \leq y,$$

entonces β es una curva que une xi con yi , y además

$$l(\beta) = \int_x^y \frac{dt}{t} = \log(y) - \log(x) = \log\left(\frac{y}{x}\right).$$

Por lo tanto $\rho(z_1, z_2) = \rho(xi, yi) = \log(\frac{y}{x})$. Notemos que la curva

$$\beta(t) = it, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (2.13)$$

realiza la distancia entre dos puntos cualesquiera en $\mathbb{H}$. Una curva con esa propiedad se le denomina geodésica.

Este procedimiento se puede generalizar para cualquier espacio donde tengamos definido un producto interno.

Del teorema 2.4.1 sabemos que la forma analítica de los elementos de $Aut(\mathbb{H})$ es

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc = 1$, los cuales se pueden extender al eje real, el cual queda invariante bajo estas transformaciones.

Con lo dicho arriba y, de la propiedad homocíclica 2.2.1 y la conformidad de las transformaciones de Möbius 2.1.1 se sigue que cada $\gamma \in Aut(\mathbb{H})$ manda geodésicas en geodésicas.

Los siguientes lemas establecen dos propiedades importantes de las transformaciones en $Aut(\mathbb{H})$, y que nos serán útiles para determinar todas las rectas hiperbólicas y para encontrar una fórmula explícita de la distancia $\rho(z, w)$.

Lema 2.4.2. Si $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$ es una curva y $T \in Aut(\mathbb{H})$, entonces $l(\alpha) = l(T(\alpha))$.

Demostración. Si suponemos que $ad - bc = 1$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$T'(z) = \frac{1}{|cz + d|^2}$$

y

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) &= Im\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) = \\ Im\left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}\right) &= \frac{Im(z)ad - Im(z)bc}{|cz + d|^2} = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{|T'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)|}{Im(T(\alpha(t)))} = \frac{\alpha'(t)}{Im(\alpha(t))}. \square$$

Lema 2.4.3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, entonces existe $T \in Aut(\mathbb{H})$ tal que $T(z_1) = ia$ y $T(z_2) = ib$, con $a, b > 0$.

Demostración. Consideremos la única recta o circunferencia euclidiana L , perpendicular a $\mathbb{R}$, a la cual pertenecen z_1 y z_2 . Esta recta L interseca a $\mathbb{R}$ en un punto γ . La transformación $T(z) = \frac{-1}{z - \gamma}$ transforma a L en una recta euclidiana, perpendicular al eje real; esto es, una recta de la forma $\{it - \beta, t \in \mathbb{R}\}$, para algún $\beta \in \mathbb{R}$. Luego

$$S(z) = \frac{-1}{z - \gamma} + \beta$$

es la transformación buscada. $\square$

Con lo que acabamos de demostrar, podemos enunciar y probar el siguiente resultado:

Teorema 2.4.2. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ y $\rho(z_1, z_2)$ es la distancia definida en 2.10, entonces se cumple que

$$\rho(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - \bar{z}_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - \bar{z}_2|} \quad (2.14)$$

$$\cosh \rho(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Im(z_1) \cdot Im(z_2)} \quad (2.15)$$

Demostración.

Para demostrar este teorema seguiremos varios pasos. En primer lugar, haciendo cuentas es fácil probar que 2.15 y 2.14 son equivalentes. Por lo tanto es suficiente probar, por ejemplo, que 2.15 se verifica. En segundo lugar, veamos que ambos miembros de la igualdad en 2.15 son invariantes por transformaciones de $Aut(\mathbb{H})$. En efecto, por el Lema 2.4.2 se sigue que

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}.$$

Además

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_2)|^2 &= \left| \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (cz_1 + d)(az_2 + b)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right|^2 \\ &= \frac{|z_1 - z_2|^2}{|cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2}, \end{aligned}$$

y

$$Im[T(z_1)] \cdot Im[T(z_2)] = \frac{Im z_1 \cdot Im z_2}{|cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2}$$

por lo tanto

$$1 + \frac{|T(z_1) - T(z_2)|^2}{2 \cdot Im[T(z_1)] \cdot Im[T(z_2)]} = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \cdot Im(z_1) \cdot Im(z_2)}.$$

Por último, usaremos el resultado del lema 2.4.3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, entonces existe $T \in Aut(\mathbb{H})$ tal que $T(z_1) = ip$ y $T(z_2) = iq$ con $p, q > 0$. Luego

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(ip, iq) = \left| \log \frac{p}{q} \right|,$$

según lo visto en el ejemplo 2.4.1. Puesto que

$$\cosh \rho(ip, iq) = \cosh \left| \log \frac{p}{q} \right| = \frac{p^2 + q^2}{pq} = 1 + \frac{|ip - iq|^2}{2pq},$$

se cumple que 2.15 se verifica para ip e iq , y por lo tanto para z_1 y z_2 . Puesto que z_1 y z_2 son puntos elegidos arbitrariamente en $\mathbb{H}$, el resultado es válido para todo z_1 y z_2 . $\square$

En Resumen.

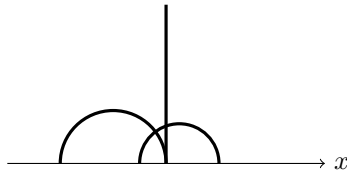
La curva que realiza la distancia entre dos puntos cualesquiera del eje imaginario positivo es la geodésica $\beta(t) = it$, $t \in (0, \infty)$.

Si $z, w \in \mathbb{H}$ y T es tal que $T(z) = ip$ y $T(w) = iq$, entonces $(T^{-1} \circ \beta)$ realiza la distancia entre z y w , puesto que $l(T^{-1} \circ \beta) = l(\beta) = \rho(ip, iq) = \rho(z, w)$.

Si γ es una curva que realiza la distancia entre z y w , entonces $T \circ \gamma$ realiza la distancia entre ip e iq . Luego $T \circ \gamma = \beta$, es decir $\gamma = T^{-1} \circ \beta$.

Si $T \in Aut(\mathbb{H})$, entonces la imagen por T del eje imaginario positivo es la intersección de una circunferencia o una recta euclidiana ortogonal al eje real. Por lo tanto, si γ es una geodésica, la imagen de γ está contenida en un arco de circunferencia con centro en $\mathbb{R}$ o en una recta perpendicular a $\mathbb{R}$.

Es natural concluir entonces que las rectas hiperbólicas son precisamente las intersecciones de rectas o circunferencias euclidianas perpendiculares al eje real, y que los arcos de rectas hiperbólicas son subconjuntos conexos de dichas rectas.



2.5. Teorema del mapeo de Riemann

Algunas ideas de la naturaleza de los mapeos conformes se puede adquirir mediante el estudio de funciones de variable compleja, pero que presentan severas dificultades en su geometría. Escogiendo una transformación adecuada, el problema puede simplificarse transformando el dominio en el que se plantea el problema en otro de geometría más *accesible*. Esta idea tomada en primer lugar por **Bernhard Riemann**, a quien la teoría de los mapeos conformes debe su desarrollo moderno en un cambio de énfasis de la teoría funciones a la parte geométrica del problema.

Podemos incluso evitar destacar la función $f(z)$ y se pregunta *¿si, dados dos dominios U y V , siempre existe un mapeo conforme continuamente diferenciable de U en V ?* La respuesta es afirmativa y la idea básica es que un mapeo conforme puede usarse para transformar un dominio dado en un dominio más simple, en el cual el problema puede resolverse mediante inspección. Al regresar otra vez al dominio original, se obtiene el resultado deseado. Que tales mapeos siempre existen en teoría, es la afirmación del famoso teorema del mapeo de Riemann el cual se discute, a continuación, pero no se demuestra.

Teorema 2.5.1. (Teorema del mapeo de Riemann) Sea A un dominio simplemente conexo tal que $A \neq \hat{\mathbb{C}}$. Entonces existe un mapeo conforme biyectivo $f : A \rightarrow \Delta$, donde $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Más aún, para cualquier $z_0 \in A$ fija, podemos encontrar una f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Con tales condiciones f es única.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [1, pág. 222].

A partir de este resultado, vemos que si A y B son dos dominios simplemente conexos con $A \neq \hat{\mathbb{C}}$, $B \neq \hat{\mathbb{C}}$, entonces existe un mapeo conforme biyectivo $g : A \rightarrow B$. En efecto, si $f : A \rightarrow \Delta$ y $h : B \rightarrow \Delta$ son dos mapeos de Riemann entonces si tomamos $g = h^{-1} \circ f$, entonces A y B son conformemente equivalentes vía el mapeo g . Así, el teorema del mapeo de Riemann implica que dos dominios simplemente conexos (distintos de $\hat{\mathbb{C}}$) son conformemente equivalentes.

El teorema del mapeo de Riemann nos permite obtener el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Delta \\ g \uparrow & & \downarrow \gamma \\ A & \xrightarrow{f} & \Delta \end{array}$$

Entonces con la definición 2.3.1 y el diagrama tenemos que

$$g = f \circ \gamma \circ f^{-1},$$

es decir, todos los automorfismos de un dominio simplemente conexo $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ los obtenemos por medio de la conjugación, vía el mapeo de Riemann y los automorfismos del disco unitario.

En la sección anterior vimos que el teorema de clasificación de automorfismos canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$ 2.4.1, vía el *Programa de Erlangen* nos permite obtener modelos de las distintas geometrías. Ahora si tenemos un dominio no canónico en $\hat{\mathbb{C}}$ y su grupo de automorfismos. *¿Que modelo geométrico obtenemos?* o *¿Que geometría le podemos asociar?* En general la respuesta no es trivial, pero si el dominio es simplemente conexo, podemos utilizar el teorema del mapeo de Riemann, y dado que el disco unitario es un modelo de la geometría hiperbólica, obtenemos que cada dominio simplemente conexo en $\hat{\mathbb{C}}$ tiene asociada una geometría hiperbólica.

Entonces vía el teorema de transformación conforme de Riemann podemos obtener una geometría hiperbólica sobre cualquier dominio simplemente conexo que no sea todo el plano. Lo cual problemas geométricos de una geometría complicada se puede resolver en uno de geometría conocida.

Capítulo 3

Grupos Kleinianos

La teoría de los grupos kleinianos fue fundada por los grandes matemáticos H. Poincaré, Schottky y Klein en el siglo XIX.

Los grupos kleinianos fueron utilizados para la uniformización de superficies de Riemann finitas, es decir, se trata de grupos con una componente invariante. En este capítulo dare una introducción de los conceptos básicos de grupos kleinianos utilizando los conceptos del capítulo anterior.

3.1. Acciones de grupos

Exponemos algunos conceptos de álgebra, a los que haremos referencia posteriormente. En lo que sigue X es un conjunto no vacío, G un grupo y e denota la identidad en G .

Definición 3.1.1. Una acción de G en X es una función $\alpha : G \times X \longrightarrow X$, $\alpha(g, x) := g(x)$ que satisfice:

- i) $\alpha(e, x) = x \ \forall x \in X$;
- ii) $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x)) \ \forall g, h \in G, \forall x \in X$.

Generalmente diremos que G actúa en X .

Definición 3.1.2. A la función $\phi_g : X \longrightarrow X$ dada por $\phi_g(x) = \alpha(g, x) = g(x)$ se llamará transición.

Toda transición es una función biyectiva. En efecto, sea $g \in G$ y $\phi_g : X \longrightarrow X$ una transición, por las propiedades de la definición de acción tenemos que $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = id_X$ y $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = id_X$. Por lo tanto ϕ_g es biyectiva para toda $g \in G$.

Dada una acción α de G en X , y si $Bij(X) := \{\phi : X \longrightarrow X : \phi \text{ es biyectiva}\}$ es el grupo de todas las funciones biyectivas de X en sí mismo, hay un homomorfismo de grupos $\theta : G \longrightarrow Bij(X)$ tal que para cada $g \in G$ corresponde $\phi_g : X \longrightarrow X$ dada por $\phi_g(x) = \alpha(g, x)$. En efecto sea $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ una acción de G en X sea $\theta_\alpha : G \longrightarrow Bij(X)$ definido por $\theta_\alpha(g) = \phi_g$, entonces $\theta_\alpha(gh) = \phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h$. De aquí que las condiciones de arriba son equivalentes a:

- a) $\phi_e = id_X$.
- b) $\phi_{g \cdot h} = \phi_g \circ \phi_h \ \forall g, h \in G$.

Cualquier ϕ que satisface estas condiciones proviene de una única acción α .

Observamos que si H es un subgrupo de G , y G actúa en X , evidentemente H actúa en X , por medio de la restricción de α a $H \times X$; el homomorfismo $\theta|_H = \hat{i} : H \longrightarrow Bij(X)$ correspondiente, en la restricción de θ en H .

Ejemplo 3.1.1. Todo grupo actúa en sí mismo por multiplicación. Es decir, sea G un grupo, definimos la acción de G en G por conjugación: $g(h) = ghg^{-1}$. Esta acción es por homomorfismos.

En el capítulo anterior obtuvimos una clasificación de los automorfismos de los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$ (teorema 2.4.1), que se constituyen como subgrupos del grupo $Möb(2, \mathbb{C})$. Así como también a partir de este hecho pudimos relacionar los dominios canónicos en $\hat{\mathbb{C}}$ como modelos para las distintas geometrías vía la acción de estos subgrupos del grupo $Möb(2, \mathbb{C})$.

Ahora con la definición 3.1.1 veamos a qué nos referíamos con la acción de los subgrupos de automorfismos del grupo $Möb(2, \mathbb{C})$ sobre los dominios canónicos.

Ejemplo 3.1.2. Sean $G = Möb(2, \mathbb{C})$ y $X = \hat{\mathbb{C}}$, entonces G actúa en X . En efecto, definimos $\alpha : G \times X \rightarrow X$ como $\alpha(T, z) = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces

$$\alpha(I, z) = I(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z$$

y se cumple i) de la definición 3.1.1.

Ahora sean $T, S \in G$ y $z \in X$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha(T \circ S, z) &= (T \circ S)(z) = T[S(z)] \\ &= \alpha(T, S(z)) = \alpha(T, \alpha(S, z)) \end{aligned}$$

y se cumple ii) de la definición 3.1.1.

La función $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un ejemplo de función transición.

De manera análoga tenemos que:

$\alpha_{\mathbb{C}} : Aut(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como $\alpha(\gamma, z) = \gamma(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, es una acción y $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en una transición.

$\alpha_{\mathbb{H}} : Aut(\mathbb{H}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, definida como $\alpha(\eta, z) = \eta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es una acción y $\eta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ en una transición.

$\alpha_{\Delta} : Aut(\Delta) \times \Delta \rightarrow \Delta$, definida como $\alpha(\mu, z) = \mu(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \Delta$, es una acción y $\mu : \Delta \rightarrow \Delta$ en una transición.

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.3. Sea G que actúa en X , y $A \subset X$, $H < G$ (H subgrupo de G), definimos $H \cdot A = \{h \cdot a : h \in H \text{ y } a \in A\}$. Diremos que A es H -invariante si $H \cdot A \subset A$. En particular si $G = H$ entonces diremos que A es invariante.

Un concepto que necesitaremos en lo que sigue y que posteriormente ejemplificará muchas cuestiones del tipo algebraicas es el siguiente.

Definición 3.1.4. Sean G y G' grupos tales que hay una acción $\theta : G \times G' \rightarrow G'$ dada por automorfismos ($\theta_{g'} \in Aut(G')$, $\forall g' \in G'$) se define el producto semidirecto de G' y G , como el conjunto $G' \times_{\theta} G$ con la operación

$$(g, g') * (h, h') = (g\theta_{g'}(h), g'h').$$

La identidad es $(e_{G'}, e_G)$.

Dado $(g, g') \in G' \times_{\theta} G$ definimos $(g, g')^{-1} = (\theta_g^{-1}(g'^{-1}), (g')^{-1})$.

Daremos una serie de definiciones, dado que G es un grupo que actúa en X .

Definición 3.1.5. La **órbita** del elemento $x \in X$, es el subconjunto de X definido como el conjunto

$$G(x) := \{g(x) : g \in G\}$$

Dos puntos en la misma órbita se llaman *congruentes* con respecto a G .

Observación. Sea G que actúa en X , definimos la siguiente relación de equivalencia en X : $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$, es decir si, y sólo si $y \in G(x)$.

Verifiquemos que es una relación de equivalencia:

- i) Es reflexiva, ya que $e(x) = x$, por tanto $x \in G(x)$.
- ii) Es simétrica, ya que si $y \in G(x)$ entonces existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$; como $g^{-1} \in G$ tenemos que $x \in G(y)$.
- iii) Es transitiva, ya que si $y \in G(x)$ y $z \in G(y)$, entonces existen $g, g' \in G$ tales que $g(x) = y$ y $g'(y) = z$ entonces $g'(y) = g'(g(x)) = g' \circ g(x) = z$ por lo tanto $z \in G(x)$.

Ahora podemos decir que una órbita de x , es lo mismo que una clase de equivalencia, pues

$$G(x) = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Por lo tanto es claro que dos órbitas coinciden o son ajenas.

Definición 3.1.6. El punto $x \in X$ es un **punto fijo** de $g \in G$ si $\{x\}$ es invariante bajo g , y escribimos a

$$X^G = \{x \in X : g(x) = x, g \in G\}$$

como el conjunto de puntos fijos.

Definición 3.1.7. El elemento $x \in X$ es un punto periódico de g , si para algún $n > 0$ se cumple que

$$g^n(x) = x.$$

Definición 3.1.8. Al mínimo $n > 1$, tal que $g^n = e$, le llamamos **orden** ó **período** de g .

En el siguiente ejemplo tenemos involucradas las definiciones antes mencionadas, es decir, tenemos órbitas periódicas, puntos fijos puntos periódicos y órbitas densas.

Ejemplo 3.1.3. De la clasificación de las transformaciones de Möbius sabemos que una transición de Möbius con dos puntos fijos es conjugada a $S(z) = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, donde los puntos fijos de S son 0 e ∞ .

Si $z \neq 0$ las composiciones iteradas sucesivas de S en z determinan la órbita de z , es decir, $G(z) = \{S^n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ así que $S^n(z) = \lambda^n z$ y $G(z)$ consta de una sucesión que converge a $z = 0$ si $|\lambda| < 1$ y de una sucesión que diverge a ∞ si $|\lambda| > 1$, por lo tanto ∞ es un punto **atractor** y 0 es un punto **repulsor**.

Si $|\lambda| = 1$ tenemos dos posibilidades, que el argumento θ sea racional o irracional, en el primer caso, si $\theta = \frac{p}{q}$ con p y q coprimos, $\lambda^q = 1$ y $S^q(z) = z$ así que $G(z)$ consta de un conjunto con q -puntos en la circunferencia de radio $|z|$ para toda $z \in \mathbb{C}$, la cual se conoce como órbita periódica ya que si tomamos cualquiera de esos puntos y le aplicamos iteradamente S q -veces, regresamos al punto inicial.

Por último si θ es irracional, $G(z)$ consta de un conjunto denso en esta circunferencia. Sin pérdida de generalidad lo demostraremos para la circunferencia unitaria, que denotaremos como $\partial\Delta = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si $z = e^{\theta\pi i}$ entonces

$$G(z) = \{z^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

como θ es irracional, tenemos que $G(z)$ es infinito y dado que $\mathbb{S}^1$ es compacto, obtenemos que $G(z)$ tiene un punto de acumulación $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Por tanto podemos extraer una sucesión $\{z^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^{n_k} = \alpha.$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ distintas tales que $|z^n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$, y $|z^m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$. Además, sea $\alpha' \in \mathbb{S}^1$ tal que $|\alpha' - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |z^{n-m} - \alpha'| &\leq |z^{n-m} - 1| + |1 - \alpha'| = |z^n - z^m| + |1 - \alpha'| \\ &< |z^n - \alpha| + |z^m - \alpha| + |1 - \alpha'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que cualquier punto en una vecindad de 1 de radio $\frac{\varepsilon}{3}$ es punto de acumulación de $G(z)$. Como podemos cubrir a $\mathbb{S}^1$ con un número finito de vecindades de este tipo, se tiene que $G(z)$ es denso en $\mathbb{S}^1$.

El siguiente concepto es de mucha importancia como veremos más adelante.

Definición 3.1.9. *El conjunto de las $g \in G$, tales que dejan fijo a $x \in X$, forman un subgrupo de G llamado **subgrupo de isotropía** ó **estabilizador** de x . Lo escribiremos como*

$$G_x := \{g \in G : g(x) = x\}.$$

Dada una acción de un grupo en un espacio, es claro que la órbita de un punto es tan grande como G . La relación es más concreta y se resume en el siguiente lema:

Lema 3.1.1. *Sea G un grupo actuando en un conjunto X . Para cada $x \in X$, se tiene una biyección*

$$\alpha : G/G_x \longrightarrow G(x),$$

con $\alpha(gG_x) = g(x)$.

Demostración. Veamos que α está bien definida. Si g_1 y g_2 son tales que $g_1G_x = g_2G_x$, entonces tenemos que $g_2^{-1} \circ g_1 \in G_x$, por tanto $g_2^{-1} \circ g_1(x) = x$, entonces $g_2(x) = g_1(x)$.

Ahora veamos que es sobre. Como todo elemento de $G(x)$ es de la forma $g(x)$, se tiene que α es sobreyectiva. Finalmente si $\alpha(g_1G_x) = \alpha(g_2G_x)$, es decir, $g_1(x) = g_2(x)$ y por lo tanto $g_2^{-1} \circ g_1(x) = x$ lo cual me dice que $g_1 = g_2$, es decir α es inyectiva. $\square$

Definición 3.1.10. *Al espacio $X/G := \{G(x) : x \in X\}$, lo llamamos el **espacio de órbitas** de G en X .*

Definición 3.1.11. *Se dice que la acción de G en X es **transitiva** si para toda $x_1, x_2 \in X$, existe $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$, es decir cuando $G(x) = X$, o sea el número de órbitas es uno.*

Ejemplo 3.1.4. *La acción de $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$ en $\hat{\mathbb{C}}$ es **transitiva**, esto se sigue del hecho de que dadas dos ternas (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) de puntos distintos en $\mathbb{C}$ existe una única $T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $T(z_i) = w_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.*

Definición 3.1.12. *Una acción se llama:*

- 1) **Trivial** si $G_x = G, \forall x \in X$
- 2) **Libre** si $G_x = \{e\}, \forall x \in X$
- 3) **Efectiva** si $K_\theta = \{e\}$ donde K_θ es el nucleo del homomorfismo θ

3.2. Definición de grupo Kleiniano

En esta tesis el enfoque que nos interesa es la representación de superficies de Riemann vía grupos kleinianos y es por eso que nos conviene decir ahora que X denota un espacio topológico.

Una propiedad importante de la acción de un grupo G en un espacio topológico X es que los elementos de cada órbita no se acumulen. Esta propiedad la podemos describir como sigue:

Definición 3.2.1. *Sea G un grupo que actúa en un espacio topológico X . La acción es **propia-mente discontinua** si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para toda $g \in G$ con $g \neq e$.*

La siguiente proposición nos proporciona una serie de criterios para decidir si existe o no una acción discontinua. Obsérvese que en el inciso (vi) hablamos de $\mathbb{R}^n$ y por consiguiente de sus propiedades, pero esto no debe generar confusión alguna, ya que hemos estado trabajando con $\mathbb{C}$, el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3.2.1. Si G actúa discontinuamente en X . Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (i) Todo subgrupo $H < G$ actúa discontinuamente en X .
- (ii) Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ actúa discontinuamente en Y .
- (iii) Si $Y \subset X$ es un conjunto G -invariante, entonces G actúa discontinuamente en Y .
- (iv) Si $x \in X$ y $g_1, g_2, \dots$ es una colección de elementos distintos de G , entonces la sucesión $g_1(x), g_2(x), \dots$ no puede converger a ninguna $y \in X$.
- (v) Si $x \in X$, entonces el estabilizador G_x es finito.
- (vi) Si $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces G es a lo sumo numerable.

Demostración. (i) Se sigue inmediatamente de la definición.

(ii) Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Cualquier $V \subset Y$ abierto es la imagen bajo φ de un abierto $U \subset X$ ($U = \varphi^{-1}(V)$). Se tiene entonces que, para cualquier $g \in G$

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(V) \cap V = \varphi \circ g(U) \cap \varphi(U) = \varphi(g(U) \cap U).$$

Por hipótesis, G actúa discontinuamente en X , es decir, $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda $g \in G$, por lo que se sigue de 3.2.1 que $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ actúa discontinuamente en Y .

(iii) Si $Y \subset X$, sabemos que cualquier $U \subset Y$ abierto en Y es un abierto en X , por lo que esta parte se sigue de la definición.

(iv) Supongamos para $x, y \in X$, la sucesión $g_1(x), g_2(x), \dots$ converge a y . Entonces el conjunto $K = \{y, g_1(x), g_2(x), \dots\}$ es compacto¹. Por hipótesis los g_n son distintos, y $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ para toda n , por lo que si U es una vecindad de x tal que $K \subset U$ entonces $g_n(U) \cap U \neq \emptyset$ para toda n , por lo que G no puede actuar discontinuamente en X .

(v) Sabemos que $\{x\}$ es compacto y para cualquier vecindad U de x , $\{x\} \subset U$ entonces por la definición 3.2.1 tenemos que G_x es necesariamente finito.

(vi) Por el lema 3.1.1, existe una correspondencia biyectiva entre G/G_x y la órbita $G(x)$. Dado que G_x es finito, G es a lo más numerable si y sólo si $G(x)$ lo es. Supongamos que $G(x)$ no es numerable.

Afirmación. Si $G(x)$ no es numerable, entonces tiene un punto de acumulación $y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración de la afirmación. Supongamos que todos los puntos de $G(x)$ son aislados. Entonces, para cada $v, u \in G(x)$, podemos elegir vecindades N_v y N_u tales que $N_v \cap N_u = \emptyset$, si $u \neq v$. Ahora, en cada una de estas vecindades, escogemos un punto con coordenadas racionales, y ponemos en correspondencia el centro de la vecindad con este punto. Pero esto es absurdo, pues para toda n , el conjunto de puntos con coordenadas racionales en $\mathbb{R}^n$ es numerable. Por tanto, $G(x)$ tiene al menos un punto de acumulación. $\square$

Continuemos con la demostración del inciso (vi). Una vez que hemos mostrado que $G(x)$ tiene un punto de acumulación y , podemos extraer una sucesión $g_1(x), g_2(x), \dots$ que converge a y , por lo que G no puede actuar discontinuamente en X . $\square$

El conjunto de puntos en los cuales G actúa discontinuamente es llamado el conjunto de **discontinuidad** y es denotado por $\Omega = \Omega_G$.

Ahora sí podemos definir lo que es un grupo Kleiniano.

Definición 3.2.2. Un subgrupo $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ que actúa discontinuamente en algún punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ es llamado grupo **Kleiniano** (ó discontinuo).

Para entender mejor la definición de grupo Kleiniano damos los siguientes ejemplos sencillos pero de mucha importancia.

¹ Un conjunto K es **compacto** si toda cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.

En el caso en que K es un subconjunto de $\mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) K es cerrado y acotado.
- ii) Toda sucesión de puntos en K tiene una subsucesión que converge a algún punto en K .
- iii) K es compacto.

Ejemplo 3.2.1. Definamos $\alpha : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\alpha(z) = -z$. Si consideramos al grupo generado por α , al cual denotaremos como $G = \langle \alpha \rangle$, entonces $G = \{id, \alpha\}$ pues $\alpha^2 = id$. Note que $G < Möb(2, \mathbb{C})$ y que el estabilizador G_{z_0} es finito para todo z_0 , y por el criterio de arriba G es keliniano. Otra manera de probar que G es un grupo kleiniano es la siguiente.

Probaremos que $1 + i \in \Omega_G$. Si $z_0 = 1 + i$ entonces $G_{z_0} = id$. Además, si $U = B(z_0, 1/2)$ entonces $\alpha(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto G actúa discontinuamente en $1 + i$. De hecho este mismo argumento se puede aplicar para todo $z_0 \neq 0$ en $\mathbb{C}$ considerando a U como la bola con centro en z_0 y radio $\frac{|z_0|}{2}$. En el caso en que $z_0 = 0$ (respectivamente $z_0 = \infty$) se tiene trivialmente que $0 \in \Omega_G$ (respectivamente $\infty \in \Omega_G$), ya que $G_0 = G$ ($G_\infty = G$). De este modo, la región de discontinuidad es todo el plano extendido.

Ejemplo 3.2.2. Sea $G = \{g(z) = z + b : b \in \mathbb{C}\}$ el subgrupo de traslaciones de $Möb(2, \mathbb{C})$. Como $G_\infty = G$ y G es infinito, tenemos que $\infty \notin \Omega_G$. Probaremos que G actúa discontinuamente en todo $\mathbb{C}$.

Sin pérdida de generalidad probaremos que $0 \in \Omega_G$. Primero que todo notemos que G_0 es trivial. Luego si $g \in G_0$ entonces $g(U) = U$ para toda U vecindad de 0. Si $g \in G - \{id\}$ entonces dado $b \in \mathbb{C}$ podemos tomar $U = B(0, \frac{1}{4})$. Ésta cumple que $g(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, hemos probado que $\Omega_G = \mathbb{C}$ y así G es un grupo kleiniano.

Un punto que no es un punto de discontinuidad de G es llamado un punto límite de G . El conjunto de puntos límite de G , es usualmente denotado por Λ ó Λ_G y es el conjunto de puntos de acumulación de alguna órbita de G , es decir.

Definición 3.2.3. Un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ está en Λ si existe un punto $x \in \hat{\mathbb{C}}$ y una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de G tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = z_0$.

Obsérvese que dado $G < Möb(2, \mathbb{C})$, si un número infinito de transformaciones fijan α , o un número infinito de iteraciones distintas de una misma transformación fijan α entonces $\alpha \in \Lambda_G$. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3.2.3. Si $G = \langle \lambda z : \lambda \neq 0, 1 \rangle$ entonces por lo discutido en el ejemplo 3.1.3 tenemos que $\Lambda_G = \{0, \infty\}$.

Ejemplo 3.2.4. Sea $G = \langle g(z) = z + 1 \rangle$, entonces $\Lambda_G = \{\infty\}$ ya que las composiciones iteradas sucesivas de g en z determinan la órbita de z , es decir, $G(z) = \{g^n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}$, la cual consta de una sucesión que converge a ∞ (ver la subsección 2,3,2).

Afirmamos que Λ_G y Ω_G son conjuntos G -invariantes, en efecto sea $x \in \Lambda_G$. Dado que x es un punto límite, entonces existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de G y hay un punto $z \in \Omega_G$ con $g_n(z) \rightarrow x$. Entonces $g \circ g_n(z) \rightarrow g(x) \in \Lambda_G$. En particular, esto se cumple también para g^{-1} esto es $g^{-1}(\Lambda_G) \subset \Lambda_G$. Por consiguiente, componiendo con g se tiene que $\Lambda_G = g \circ g^{-1}(\Lambda_G) \subset g(\Lambda_G)$, y de aquí que Λ_G es G -invariante.

Si tomamos $g \in G$ como g es biyectiva tenemos que $g(\Omega_G) = \Omega_G$, es decir, Ω_G es G -invariante.

El conjunto límite Λ_G nunca es vacío, esto ya que si $g \in G$ es un elemento loxodrómico que no fija a z y α el atractor de g . Como $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$, entonces $\alpha \in \Lambda_G$. Por tanto $\Lambda_G \neq \emptyset$.

Veamos que Λ_G es cerrado. Supongamos ahora que $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en Λ_G que convergen a w . Se tiene entonces que para cada w_n existen transformaciones distintas $g_{n_k} \in G$, $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z) = w_n$. Podemos escoger una colección de elementos de G distintos tales que las imágenes de z converjan a w . En efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escoger $w_k \in \Lambda_G$ tal que $|w_k - w| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $g_{m_k} \in G$ tal que $|w_k - g_{m_k}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $|g_{m_k}(z) - w| \leq |w_k - g_{m_k}(z)| + |w_k - w| < \varepsilon$. Esto lo podemos hacer para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, y como además los elementos $g_{m_k} \in G$ los podemos tomar distintos se tiene que $w \in \Lambda_G$ y por tanto Λ_G es cerrado.

El conjunto Ω_G es un conjunto abierto. Si $x \in \Omega_G$, entonces existe un abierto U , de manera que $x \in U$ tal que el conjunto $\{g \in G : g(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Luego tenemos que $U \subset \Omega_G$ por tanto Ω_G es abierto.

El siguiente teorema nos asegura una partición de $\hat{\mathbb{C}}$ en términos del conjunto límite y el conjunto de discontinuidad con respecto a un grupo kleiniano.

Teorema 3.2.1. *Sea G un grupo kleiniano. Los conjuntos Ω_G y Λ_G son complementarios, es decir son ajenos y su unión es todo $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea z un punto límite, entonces cualquier vecindad U de z contiene infinitas imágenes del punto z , por lo que hay infinitos elementos distintos $g \in G$ con $g(U) \cap U \neq \emptyset$. De aquí que $\Omega_G \cap \Lambda_G = \emptyset$.

Ahora supongamos que $x \notin \Omega_G$. Entonces para cada vecindad U de x , existen infinitas imágenes de U que intersectan a U . Por lo tanto podemos encontrar una sucesión de elementos distintos $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y podemos encontrar también una sucesión de puntos $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de modo que $z_m \rightarrow x$ y $g_n(z_m) \rightarrow x$. Por el teorema que dice que *si x es un punto límite de un grupo kleiniano. Entonces hay un punto límite x_0 , y hay una sucesión $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de G , de modo que $g_m(z) \rightarrow x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\hat{\mathbb{C}} - \{x_0\}$.* Para una demostración de este hecho véase [4, Pag.22 D.2].

Por lo tanto tenemos que existe una subsucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de G tal que $g_n(z) \rightarrow w$ uniformemente en subconjuntos compactos del complemento de x_0 , donde w y x_0 son ambos puntos límite. Si $x = x_0$, entonces $x \in \Lambda_G$; si $x \neq x_0$, entonces los puntos z_m no se acumulan en $\{x_0\}$ así que $g_m(z_m) \rightarrow w$, es decir, $x = w \in \Lambda_G$ y tenemos el resultado. $\square$

Nótese que pudimos desde el principio definir a los conjuntos Ω y Λ como conjuntos complementarios como se hace en [8], pero creemos que esta contrucción es más apropiada para lo que sigue.

Del teorema anterior se sigue que, si Γ es un subgrupo de G , donde $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$, entonces es evidente que

$$\Lambda_\Gamma \subset \Lambda_G,$$

ya que si un punto α es un punto límite de Γ entonces se sigue directamente de la definición, que α también lo es de G . Esta observación prueba que también

$$\Omega_G \subset \Omega_\Gamma,$$

lo cual implica el siguiente hecho fundamental: los subgrupos de los grupos kleinianos son también kleinianos.

Ahora estableceremos una relación entre los conjuntos Λ_G y $\Lambda_{hGh^{-1}}$ donde $h \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$, la cual muestra el comportamiento del conjunto límite bajo la conjugación de un elemento que no pertenece al grupo.

Teorema 3.2.2. *Sea $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$, y $h \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$. Entonces $\Lambda_{hGh^{-1}}(h(z)) = h(\Lambda_G(z))$.*

Demostración. Sea $w \in \Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$. Entonces por definición tenemos que existe una colección de transformaciones $hg_nh^{-1} \in hGh^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hg_nh^{-1}(h(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} hg_n(z) = w$$

se tiene por continuidad que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = h^{-1}(w)$, de donde se sigue que $h^{-1}(w) \in \Lambda_G(z)$. Por lo tanto $w \in h(\Lambda_G(z))$.

Inversamente, sea $w \in h(\Lambda_G(z))$, o equivalentemente $h^{-1}(w) \in \Lambda_G(z)$. Esto es, existen distintas $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = h^{-1}(w)$. Se sigue entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} hg_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} hg_nh^{-1}(h(z)) = w$, y como las $hg_nh^{-1} \in hGh^{-1}$ son distintas esto implica que $w \in \Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$. $\square$

Del teorema 3.2.1 y como $h \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ es biyectiva se tiene que $(h(\Lambda_G))^c = h(\Omega_G)$, por lo que Ω_G también posee la propiedad anterior.

Obsérvese que del teorema anterior y lo expuesto en la subsección 2,3,2 se tiene un resultado que relaciona puntos límite con puntos fijos.

Lema 3.2.1. Sea T una transformación en $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$, que no es elíptica y que tampoco es la identidad, supóngase también que existe $w \in \hat{\mathbb{C}}$ y una sucesión creciente de naturales, n_k , $k \in \mathbb{N}$, tales que

$$T^{n_k}(w) \mapsto z_0,$$

entonces z_0 es un punto fijo.

Cerramos esta sección con más ejemplos.

Ejemplo 3.2.5. Si un subgrupo G de $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$ es transitivo en la esfera de Riemann, es decir, cualesquiera dos puntos son G -equivalentes, entonces hay una sola órbita y el grupo G **no es discontinuo**, ya que $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$, la órbita de z se acumula en z . El grupo $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$ es evidentemente transitivo, puesto que cualquier punto se puede mandar a ∞ (de hecho es transitivo en ternas, véase ejemplo 3.1.4); por lo tanto **no es discontinuo**.

Ejemplo 3.2.6. Si G es finito, se sigue directamente de la definición que G **es discontinuo** y que $\Omega_G = \hat{\mathbb{C}}$, ya que no hay sucesiones infinitas de elementos distintos (ver ejemplo 3.2.1).

Ejemplo 3.2.7. Sea G cíclico, consideremos tres casos.

i) G cíclico finito. G es necesariamente elíptico y G es conjugado a un grupo de rotaciones generadas por $z \mapsto e^{2\pi i \frac{p}{q}} z$, con p y q coprimos. Esto se sigue, ya que si $g(z) = e^{i\theta} z$ genera el grupo de rotaciones y q es el menor entero positivo por el cual $e^{iq\theta} = 1$, entonces $q\theta = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$. El subgrupo es entonces de orden q , ya que la elección de q implica $(p, q) = 1$.

ii) G cíclico infinito elíptico. Al conjugar G a un subgrupo de rotaciones generado por $g(z) = e^{i\theta}$, se tiene que θ no es de la forma $2\pi t$, $t \in \mathbb{Q}$, ya que en este caso G sería finito. Por lo cual $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, se tiene que

$$e^{in\theta} \neq e^{im\theta},$$

es decir, los números $e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, son todos distintos. Ahora, como $\partial\Delta = \mathbb{S}^1$ es compacto, estos números complejos tiene un punto de acumulación (véase 3.1.3), digamos $e^{i\psi}$; por lo cual existe una subsucesión m_j , $j \in \mathbb{N}$, crecientes de naturales, o decreciente de enteros negativos, para los cuales

$$e^{im_j\theta} \rightarrow e^{i\psi},$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Finalmente, si $f(z) = e^{-i\psi} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, se tiene

$$g^{m_j} \circ f(z) = e^{i(m_j\theta - \psi)} z \rightarrow z,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Por lo cual, cualquier elemento en la esfera de Riemann es un punto límite y G no es discontinuo.

iii) G cíclico no elíptico. Sea g el generador del grupo G , nótese que si f_n , $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de transformaciones distintas de G , entonces existe una subsucesión f_{n_k} , de tal manera que todas son potencias positivas en orden creciente de g (ó g^{-1}). Si g es parabólica, denotamos por α al punto fijo, y si g es hiperbólica o loxodrómica, denotamos a los puntos fijos por α y β . Por lo discutido en los ejemplos 3.2.3 y 3.2.4 tenemos que $\Lambda_G = \{\alpha\}$ en el caso parabólico, y $\Lambda_G = \{\alpha, \beta\}$ en los casos hiperbólico o loxodrómico.

Ejemplo 3.2.8. Grupos Fuchsianos: Estos grupos tienen la característica que dejan invariante un disco Euclideano. El conjunto límite está contenido en el círculo borde. Si todo el círculo borde es el conjunto límite, entonces decimos que G es un grupo Fuchsiano de primera clase. En caso contrario, decimos que es de segunda clase. Estos grupos aparecen como los grupos cubrientes universales de las superficies de Riemann hiperbólicas; aquellas superficies de característica de Euler negativa. Por ejemplo,

- (i) las superficies cerradas de género mayor o igual a dos;
- (ii) esferas con al menos tres bordes;
- (iii) superficies cerradas de género al menos uno y con un punto eliminado; etc.

Ejemplo 3.2.9. *Grupos de Schottky anodados: Estos son grupos Kleinianos planares isomorfos a grupos libres de rango finito. El rango de este grupo es también llamado el género del grupo de Schottky anodado. Un grupo de Schottky es, por definición, un grupo de Schottky anodado donde sus elementos diferentes de la identidad son transformaciones loxodrómicas.*

3.3. Grupos Discretos

En esta sección veremos la relación que existe entre los grupos kleinianos y los discretos. Comenzamos con la definición acerca de la convergencia de sucesiones de matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ (ó en $GL(2, \mathbb{C})$).

Definición 3.3.1. Sean

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ (ó $GL(2, \mathbb{C})$), se dice que $A_n \rightarrow A$, si $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$ y $d_n \rightarrow d$, cuando $n \rightarrow \infty$.

El siguiente resultado muestra que el producto de matrices induce una función continua, por lo que los grupos $SL(2, \mathbb{C})$ y $GL(2, \mathbb{C})$ son grupos topológicos. Más aún, los grupos $SL(n, \mathbb{C})$ y $GL(n, \mathbb{C})$ son grupos de Lie como veremos más adelante, pero es importante mencionarlo puesto que $GL(2, \mathbb{C})$ y $SL(2, \mathbb{C})$ nos han acompañando y nos seguirán acompañando durante toda esta tesis.

Lema 3.3.1. Sean A , B , A_n , B_n , matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ (ó en $GL(2, \mathbb{C})$) con $n \in \mathbb{N}$, tales que $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$A_n B_n \rightarrow AB.$$

Demostración. Si

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} e_n & f_n \\ g_n & h_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

entonces

$$A_n B_n = \begin{pmatrix} a_n e_n + b_n g_n & a_n f_n + b_n h_n \\ c_n e_n + d_n g_n & c_n f_n + d_n h_n \end{pmatrix}$$

y

$$A_n B_n \longrightarrow \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = AB. \quad \square$$

Definición 3.3.2. Sea $\bar{G} < SL(2, \mathbb{C})$, se dice que $\bar{G}$ es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas, $A_n \in \bar{G}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $A_n \rightarrow A$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde A es una matriz de 2×2 con entradas complejas.

Definición 3.3.3. Se dice que un subgrupo G de $Möb(2, \mathbb{C})$ es discreto, si está determinado por un subgrupo discreto $\bar{G}$ de $SL(2, \mathbb{C})$

El siguiente resultado muestra que para detectar si un grupo es o no discreto, basta verificar el comportamiento cerca de la identidad.

Lema 3.3.2. Un subgrupo $\bar{G}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si no existe una sucesión $A_n \in \bar{G}$, $n \in \mathbb{N}$, de matrices distintas, tales que $A_n \rightarrow Id$.

Demostración. Es claro que si existe sucesión de elementos diferentes de la identidad convergiendo a la identidad, entonces $\bar{G}$ es no discreto por la definición.

Recíprocamente, sea $\bar{G}$ un grupo discreto y sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos distintos de $\bar{G}$ convergiendo a $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces $K_n = A_{n+1} \cdot A_n^{-1}$ es una sucesión de elementos distintos de $\bar{G}$ convergiendo a la identidad. Si podemos extraer una subsucesión de elementos diferentes, entonces obtenemos una contradicción a la discreción de $\bar{G}$. Si no es posible encontrar una subsucesión de elementos diferentes, entonces existe $N > 0$ tal que K_n son todos iguales para $n > N$. De esta manera, $K_n = Id$ para $n > N$ lo cual obliga a tener $A_n = A_{n+1}$ para $n > N$, lo cual contradice la hipótesis de que los A_n son todos distintos. $\square$

Teorema 3.3.1. Sea $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ es un grupo kleiniano (ó discontinuo), entonces G es discreto.

Demostración. Si G no fuese discreto, entonces existiría una sucesión de elementos distintos $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo a la identidad (por el lema anterior, tomando al $\bar{G} < SL(2, \mathbb{C})$ que determina a G). Es decir $g_n(z) \rightarrow Id(z) = z \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ y por tanto G no sería discontinuo. $\square$

El recíproco de este teorema no siempre es cierto. Pero el siguiente teorema expresa una relación entre los subgrupos discretos en $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$ y la acción discontinua en $\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$

Teorema 3.3.2. Un subgrupo $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si actúa discontinuamente en $\mathbb{H}^3$

Una demostración de este hecho puede encontrarse en [3, pag.95] y cuya demostración no la ponemos aquí puesto que no hemos discutido un concepto necesario para la demostración que se conoce como la extensión de **Poincaré**.

Para concluir este capítulo necesitamos revisar una propiedad importante del cociente de un subgrupo G de $\text{Möb}(2, \mathbb{C})$ y su región de discontinuidad Ω_G (Ω_G/G), que utilizaremos más adelante para la caracterización que nos interesa.

Teorema 3.3.3. Sea $G < \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ un grupo kleiniano con región de discontinuidad Ω_G . Entonces el espacio Ω_G/G es un espacio T_2 , es decir es un espacio topológico de **Hausdorff**²

Demostración. Sabemos que Ω_G/G es un espacio topológico con la topología cociente y que el mapeo proyección $\pi : \Omega_G \rightarrow \Omega_G/G$ es continua, como Ω_G es conexo se sigue que Ω_G/G es conexo. Es claro que π es un mapeo abierto pues si $A \subset \Omega_G$, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A).$$

Por tanto si A (y de aquí $g(A)$) es abierto, entonces $\pi(A)$ también lo es.

Ahora sí, veamos que Ω_G/G es Hausdorff. Primero escogemos $z_1, z_2 \in \Omega_G$ con $z_1 \neq z_2$, y sea $r > 0$ tal que los discos

$$K_1 = \{z : |z - z_1| \leq r\}, \quad K_2 = \{z : |z - z_2| \leq r\}$$

están contenidos en Ω_G . Para $n \geq 1$ definimos

$$A_n = \left\{ z : |z - z_1| < \frac{r}{n} \right\}, \quad B_n = \left\{ z : |z - z_2| < \frac{r}{n} \right\}.$$

Si para cada n

$$\pi(A_n) \cap \pi(B_n) \neq \emptyset,$$

entonces existe $w_n \in A_n$ y un $g_n \in G$, tal que $g_n(w_n) \in B_n$, esto implica que

$$g_n(K) \cap K \neq \emptyset,$$

donde $K = K_1 \cup K_2$ (que es compacto) y se sigue por la discontinuidad que el conjunto $\{g_1, g_2, \dots\}$ es finito. Con la sucesión adecuada, digamos, $g_n = g$, y

$$g(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(w_n) = z_2.$$

Sean $\pi(z_1) \neq \pi(z_2) \in \Omega_G/G$, en consecuencia z_1 y $z_2 \in \Omega_G$ pero no son equivalentes bajo G .

Se sigue entonces que para algún n , los conjuntos $\pi(A_n)$ y $\pi(B_n)$ son disjuntos y separan a $\pi(z_1)$ y $\pi(z_2)$, además estos conjuntos son abiertos porque π es un mapeo abierto. $\square$

Ejemplo 3.3.1. Sea $G = \langle z \mapsto z + 1 \rangle$; sabemos que $\Omega_G = \mathbb{C}$. $\mathbb{C}/G$ es un cilindro doblemente infinito.

²Un espacio topológico (X, τ) es llamado T_2 ó espacio topológico de Hausdorff si satisface: Dados dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, existen $A_1, A_2 \in \tau$ tales que $x \in A_1$, $y \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Capítulo 4

Superficies de Riemann

En este capítulo daremos un material introductorio de las superficies de Riemann, el cual es un tema muy amplio y se puede estudiar desde distintos enfoques, el analítico, topológico y algebraico. Se dará un poco de material sobre espacios cubrientes, transformaciones propias, el comportamiento de funcines holomorfas, como preliminares a la definición de superficie de Riemann, debido a que los temas mencionados son amplios solo enunciaremos los resultados que necesitaremos, pero trataremos de ejemplificar los resultados para una visualización de éstos, se dará la definición de superficie de Riemann la cual enfatizaremos en el concepto de variedad diferenciable, también hablaremos de los morfismos entre superficies de Riemann y culminaremos con un teorema de representación que relaciona los grupos kleinianos con las superficies de Riemann.

4.1. Espacios recubridores

La teoría de los espacios recubridores está estrechamente relacionada con el estudio del grupo fundamental. Muchas cuestiones topológicas basicas sobre espacios recubridores pueden reducirse a cuestiones puramente algebraicas sobre los grupos fundamentales de los distintos espacios involucrados. Esta teoría es importante para la topología, geometría diferencial, grupos de Lie, y superficies de Riemann.

En lo que sigue se supondrá que todos los espacios son *arco-conexos* y *localmente arco-conexos* mientras no se diga lo contrario.

Definición 4.1.1. Una transformación continua $\rho : Y \longrightarrow X$ entre espacios topológicos es llamada un recubrimiento o más precisamente Y **recubre** a X a través de ρ si se verifica:
Para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los V_j son abiertos disjuntos de Y tal que para todo $j \in J$,

$$\rho|_{V_j} : V_j \longrightarrow U \text{ es un homeomorfismo.}$$

En particular, ρ es un homeomorfismo local. Se designa a veces el recubrimiento ρ por el triplete (Y, ρ, X) .

Ejemplos de recubrimientos topológicos.

Ejemplo 4.1.1. $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ con $\rho(t) = e^{it}$ es un recubrimiento. En efecto, tenemos que $\mathbb{R}$ es un espacio topológico arco conexo. Es claro que $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es continua.
Sea $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, supongamos que $x > 0$ y sea $U_{(x,y)} := \{(a, b) \in \mathbb{S}^1 | a > 0\} \subset \mathbb{S}^1$ entonces $U_{(x,y)}$ es

un abierto en $\mathbb{S}^1$ pues $U_{(x,y)} = \mathbb{S}^1 \cap \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | 0 < a < 2, -1 < b < 1\}$ es un abierto en $\mathbb{R}^2$. Además $(x,y) \in U_{(x,y)}$. Veamos que $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, con $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \forall n \in \mathbb{Z}$, es una partición de $\rho^{-1}(U_{(x,y)})$ en hojas.

$$\rho^{-1}(U_{(x,y)}) = \{a \in \mathbb{R} | \rho(a) = (\cos 2\pi a, \sin 2\pi a) \in \mathbb{S}^1 \text{ y } \cos 2\pi a > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n.$$

con $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Esto ya que

$$\begin{aligned} \cos 2\pi a > 0 &\Leftrightarrow 2\pi a \in (2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}) \forall n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2\pi a < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \forall n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow (n - \frac{1}{4})2\pi < 2\pi a < (n + \frac{1}{4})2\pi \forall n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow n - \frac{1}{4} < a < n + \frac{1}{4} \forall n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow a \in (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) = V_n \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como $\sin(2\pi a)$ es estrictamente creciente en cada $\overline{V_n}$, ρ es inyectivo en cada V_n . Si $a \in \overline{V_n} = [n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}] \Rightarrow 2\pi a \in [2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin(2\pi a) \in [-1, 1]$.

Además ρ mapea cada $\overline{V_n}$ en $\overline{U_{(x,y)}}$ y V_n en $\overline{U_{(x,y)}}$. Como $\overline{V_n}$ es compacto, $\rho|_{\overline{V_n}}$ es homeomorfismo de $\overline{V_n}$ en $\overline{U_{(x,y)}}$, en particular $\rho|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ es homeomorfismo.

Se aplica un proceso similar en los casos $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$. En estos casos se toma $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | a < 0\}$, $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | b > 0\}$ y $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | b < 0\}$, respectivamente.

Observación. En el ejemplo anterior, se puede pensar en ρ como una aplicación que enrolla la recta real alrededor de $\mathbb{S}^1$, y el proceso aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo 4.1.2. $\rho_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ con $\rho_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ es un recubrimiento

Ejemplo 4.1.3. $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$ con $\rho(z) = z^k$ y $k \in \mathbb{N}$ es un recubrimiento.

ρ es un homeomorfismo local: para $b \in \mathbb{C}^*$ y $a = \rho(b)$, existen vecindades abiertas V_0 de b y U de a tales que $\rho|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Sea w una raíz k -ésima primitiva de la unidad, entonces

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j$$

con $V_j = w^j V_0$. Si $z \in V_{j_1} \cap V_{j_2}$, se tiene $w^{j_1-j_2} = 1$, entonces $j_1 = j_2$ por lo tanto los V_j ($j = 0, \dots, k-1$) son ajenos, $V_j \subset \mathbb{C}^*$ son homeomorfos a U a través de ρ .

Ejemplo 4.1.4. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ con $\exp(z) = e^z$ es un recubrimiento.

Sea $a = \exp(b)$; $\exp$ es un homeomorfismo local, por tanto existe una vecindad abierta V_0 de b y una vecindad abierta U de a tal que $\exp|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Entonces

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

con $V_n = 2\pi i n + V_0$ y puesto que V_0 debe estar contenida en una banda de longitud $2\pi i$, entonces los V_n son ajenos.

Contraejemplos.

Contraejemplo 4.1.1. Sea $j : Y \rightarrow X$ la inyección canónica de un abierto Y en un espacio topológico X , con $Y \subsetneq X$; entonces j es un homeomorfismo local biyectivo de Y sobre su imagen, es decir Id_Y , pero para todo $y \in \bar{Y} - Y$ y toda vecindad abierta U de y en X , $j^{-1}(U) \cap Y$ es un abierto de Y que no es homeomorfo a U a través de j ; por tanto j no es un recubrimiento.

Contraejemplo 4.1.2. Sea $f : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local sobre y y sea $\{y_j\}_{j \in J}$ la fibra f^{-1} de $x \in X$; todo punto y_j tiene una vecindad abierta V'_j tal que $f|_{V'_j}$ es un homeomorfismo: $V'_j \rightarrow f(V'_j) = U_j$. Si J es finito, entonces $\bigcap_{j \in J} U_j$ es un abierto U no vacío y, los $V_j = V'_j \cap f^{-1}(U)$ son los abiertos tales que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j;$$

si para todo x los abiertos V_j son ajenos, f es un recubrimiento. Pero si J es infinito, para que sea así, es necesario que $\bigcap_{j \in J} U_j$ sea un abierto, lo cual no siempre sucede.

Definición 4.1.2. Se dice que una transformación continua $\rho : Y \rightarrow X$ tiene la propiedad, de **levantar los arcos** si para todo arco $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, y para todo $y_0 \in Y$ tal que $\rho(y_0) = \sigma(0)$ existe un levantamiento $\hat{\sigma} : [0, 1] \rightarrow Y$ de σ tal que $\hat{\sigma}(0) = y_0$; $\hat{\sigma}$ es un arco en Y . Así que $\sigma = \rho \circ \hat{\sigma}$.

Teorema 4.1.1. Todo recubrimiento $\rho : Y \rightarrow X$ levanta los arcos.

Teorema 4.1.2. Sean X, Y dos espacios topológicos **Hausdorff**, siendo X conexo por arcos y $\rho : X \rightarrow Y$ un recubrimiento. Entonces el cardinal $\text{Card}(\rho^{-1}(x))$ es independiente de $x \in X$, en particular si $Y \neq \emptyset$, ρ es sobre. $\text{Card}(\rho^{-1}(x))$ es llamado el número de hojas de ρ .

Contraejemplo 4.1.3. Sea $\rho : (0, 10) \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\rho(t) = e^{it}$, entonces ρ es un homeomorfismo local que no es un recubrimiento y no tiene la propiedad de levantar arcos.

Corolario 4.1.1. Si $\rho : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local que levanta arcos, entonces ρ es un recubrimiento.

Teorema 4.1.3. (Existencia de un levantamiento) Sean $\rho : Y \rightarrow X$ un recubrimiento de espacios T_2 , Z un espacio topológico conexo por arcos y simplemente conexo y $f : Z \rightarrow X$ una transformación continua. Entonces para todo $z_0 \in Z$, para todo $y_0 \in \rho^{-1}(f(z_0)) \subset Y$, existe un levantamiento único $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ de f a Y tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow \rho \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Definición 4.1.3. Un espacio cubriente universal de X es un espacio cubriente (Y, ρ) con Y simplemente conexo.

A menudo uno abusa de la notación y dice que Y es un espacio cubriente universal de X cuando Y es simplemente conexo.

Ejemplo 4.1.5. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente universal de $\mathbb{S}^1$

Para un estudio más detallado de los espacios cubrientes y sus propiedades véase [14, Capítulo X].

4.1.1. Transformaciones propias

Definición 4.1.4. Sean D y G espacios localmente compactos. Una transformación analítica $f : D \rightarrow G$, se llama propia, si existe un entero positivo k tal que f es $(k : 1)$, el número k es llamado grado topológico de f .

Una tal transformación, tiene una expresión de la forma:

$$f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k + \cdots, \quad a_k \neq 0 \quad (4.1)$$

la cual es válida en todo D . Así que cada punto en G tiene exactamente k preimágenes, contados respecto a su multiplicidad.

Proposición 4.1.1. *Sea f como en 4.1. $F : D \rightarrow G$ analítica es propia si y sólo si $f(\partial D) = \partial G$ sii preimágenes de compactos son compactos.*

Teorema 4.1.4. *Sea $\rho : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo local propio con X y Y localmente compactos. Entonces ρ es un recubrimiento.*

4.1.2. Comportamiento local de una función holomorfa

1) Si $f'(z) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 (por la prop. 2.1.1). Además, en una vecindad de $w_0 = f(z_0)$, existe la inversa g de f y $g'(w) = [f'(z)]^{-1}$. En particular f y g son conformes en una vecindad de z_0 y w_0 respectivamente.

2) Si $f'(z) = 0$.

Caso a). Caso particular, $f(z) = z^d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ entonces los ángulos no son conservados en 0, si no son multiplicados por d . La función inversa no está definida en una vecindad de $w = 0$. Pero para cada $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, uno obtiene para z , d -funciones distintas (determinaciones ó ramas)

$$z = e^{\frac{1}{d} \log(w)} \cdot e^{ik \frac{2\pi}{d}} = e^{\frac{1}{d} \log|w|} \cdot e^{i[Arg(w) + \frac{2k\pi}{d}]}$$

con $k = 0, 1, \dots, d-1$, que son las inversas de f .

Caso b). Caso general, $f(z) = a_0 + a_d(z - z_0)^d + O(|z - z_0|^d)$ con $a_d \neq 0$ y $d \geq 2$. Por medio de una transformación de Möbius, se puede considerar que $z_0 = 0$, es decir, $f(0) = 0$ y f se expresa en una vecindad de $z = 0$ y $g(z) = 1 + g_1(z)$ con $g_1(0) = 0$ y $c \in \mathbb{C}^*$. Entonces, para $|z|$ suficientemente pequeño, $\log(1 + g_1(z))$ tiene sentido, por tanto también: $h(z) = ce^{\frac{1}{d}(\log(g(z)))}$; así que $f(z) = z^d h^d(z) = (zh)^d(z)$ y la transformación holomorfa $z \mapsto \zeta = zh(z)$ es invertible en una vecindad de $\zeta = 0$; es un cambio de coordenadas holomorfo local; la transformación inversa de $\zeta \mapsto w$, para $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, $\zeta = w^{\frac{1}{d}}$ con d -determinaciones ó ramas

$$\zeta = e^{\frac{1}{d} \log|w|} \cdot e^{i[Arg(w) + \frac{2k\pi}{d}]}, \quad k = 0, 1, \dots, d-1$$

La inversa de f es la composición de $w \mapsto \zeta$ y de $\zeta \mapsto z$ que es la inversa del isomorfismo local $z \mapsto \zeta = zh(z)$.

4.2. Superficies de Riemann

Elegimos una definición de superficie de Riemann, que destaca que se trata de variedades que poseen una determinada estructura.

Las variedades son espacios topológicos que son localmente igual a $\mathbb{R}^n$. Este hecho permite entonces utilizar conceptos que conocemos de $\mathbb{R}^n$ y usarlos en la variedad, al menos localmente (es decir, al menos para cada abierto). Por ejemplo, la diferencial es un concepto bien importante de $\mathbb{R}^n$ porque nos da un modelo simple de movimiento. El movimiento es la propiedad más importante de todo objeto en la naturaleza.

Como utilizaremos el concepto de variedad en lo que sigue, damos su definición.

Definición 4.2.1. Una **variedad** de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff M , tal que para todo punto $p \in M$ existe una vecindad U_p que es homeomorfa a un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^n$. Tal homeomorfismo

$$f: U_p \rightarrow V$$

se le llama **carta** (ó coordenada).

Un **atlas** es una familia de cartas $\{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (I es el conjunto de índices), tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Si M es una variedad, a :

U_α se le llama **dominio** de la carta.

(U_α, f_α) se le llama **sistema de coordenadas** sobre U_α .

Si $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, a $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ se llama **imagen de la carta** f_α .

$(V_\alpha, f_\alpha^{-1})$ se le llama **parametrización** de U_α .

Sean $C_\alpha = \{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $C_\beta = \{U_\beta, f_\beta\}_{\beta \in I}$ dos atlas. A las funciones

$$\varphi_{\alpha\beta} := f_\beta \circ f_\alpha^{-1}: f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

se les llama **funciones de transición**, donde $\varphi_{\alpha\beta}$ es un homeomorfismo.

Si en la definición cambiamos real por complejo, tenemos variedades complejas de dimensión n . Por ejemplo, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ es una variedad compleja de dimensión uno. Estaremos más interesados en lo que sigue en variedades de dimensión $n = 2$ (ó variedades complejas de dimensión uno).

A una variedad de dimensión dos suele llamársele **superficie**.

Definición 4.2.2. Un atlas $C_\alpha = \{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sobre una variedad M se dice *diferenciable* si las funciones transición

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1}: f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son diferenciables de clase C^∞ .

Para el caso complejo diremos también que la variedad es analítica.

Ejemplo 4.2.1. $\mathbb{R}^n$ es una variedad, considerando como carta global la función identidad.

Ejemplo 4.2.2. La esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$, con su topología heredada de $\mathbb{R}^3$, es una variedad 2-dimensional que al menos tiene dos cartas. Estas son:

$C_1 = \{U_1, \alpha_+\}$, con $U_1 = S^2 - \{e_3 = (0, 0, 1)\}$ y el **homeomorfismo** α_+ esta definido como:

$$\alpha_+(x) = \alpha_+[(x_1, x_2, x_3)] = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

cuya inversa está dada por:

$$\alpha_+^{-1}[(y_1, y_2)] = \left(\frac{2y_1}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \frac{2y_2}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{1 + y_1^2 + y_2^2} \right).$$

Análogamente, la segunda carta, ahora sin el polo sur, esta dada por:

$C_1 = \{U_2, \alpha_-\}$, con $U_2 = S^2 - \{-e_3 = (0, 0, -1)\}$ y el homeomorfismo α_- esta definido como:

$$\alpha_-(x) = \alpha_-[(x_1, x_2, x_3)] = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right)$$

cuya inversa está dada por:

$$\alpha_-^{-1}[(y_1, y_2)] = \left(\frac{2y_1}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \frac{2y_2}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \frac{1 - y_1^2 - y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2} \right).$$

Entonces $S^2 = U_1 \cup U_2$ y α_+ y α_- son homeomorfismos. Recordemos que α_+ es la **proyección estereográfica** desde es polo norte (que ya se estudió) y α_- desde es polo sur.

Definición 4.2.3. Una aplicación $f: M \rightarrow N$ se dice que es un difeomorfismo si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En tal caso, las variedades M y N se dice que son difeomorfas.

Brevemente, una superficie de Riemann es un espacio topologico que, cuando se observa a nivel local, es esencialmente el mismo que el plano complejo. La definición formal es la siguiente.

Definición 4.2.4. Una *superficie de Riemann* S es una variedad analítica de dimensión uno compleja.

Habitualmente se añade la condición de conexo, porque las superficies de Riemann más interesantes son las de este tipo. Sin embargo, trataremos con conjuntos que no son conexos pero pueden ser dotados de estructura de superficie de Riemann. Recordemos que las componentes conexas de un conjunto son abiertos, por lo que heredarán la estructura. Recíprocamente, si definimos una estructura de superficie de Riemann sobre cada una de las componentes conexas de un conjunto, como son disjuntas, la unión de dichas estructuras configura al conjunto total como superficie de Riemann, aunque no conexa. Por este motivo, nos centraremos fundamentalmente en los espacios conexos.

Ejemplo 4.2.3. La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann como se enuncio en el primer capítulo. La topología de $\hat{\mathbb{C}}$ es la topología de $\mathbb{C}$ unión la familia de los complementos de conjuntos compactos en $\mathbb{C}$.

Con esta topología, vemos que $\hat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico de Hausdorff.

Definiremos una estructura compleja en $\hat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

Sean $U := \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C}$ y $V := \hat{\mathbb{C}} - \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ y consideremos en U la función identidad $Id : U \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Claramente estas aplicaciones son homeomorfismos; también,

$$Id(U \cap V) = \varphi(U \cap V) = \mathbb{C}^*$$

y la función

$$\varphi \circ Id^{-1} : Id(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V), z \mapsto \frac{1}{z}$$

es un biholomorfismo. Similarmente

$$Id \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow Id(U \cap V), z \mapsto \frac{1}{z}$$

es un biholomorfismo. Con esta estructura compleja, decimos que $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.

Ejemplo 4.2.4. El ejemplo 4.2.2 es también un claro ejemplo de que $\mathbb{S}^2$ es una superficie de Riemann.

Ejemplo 4.2.5. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Se toma el grupo

$$\Lambda = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

bajo la operación adición. Se define una relación de equivalencia en los números complejos: dos números z_1, z_2 son equivalentes si y solo si $z_1 - z_2 = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ para alguna pareja de enteros m_1, m_2 .

Un subconjunto Σ de un espacio topológico es discreto si para cada punto $\mu \in \Sigma$ existe un entorno abierto U de μ tal que $U \cap \Sigma = \{\mu\}$. El conjunto Λ es cerrado y discreto.

El conjunto $X = \mathbb{C}/\Lambda$ es un grupo aditivo, y lo dotamos de la topología cociente, dada por la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, donde cada conjunto $G \subset X$ es abierto si y solamente si $\pi^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Esta definición hace a π continua y, como $\mathbb{C}$ es conexo, X también lo es.

Todo abierto en X es imagen de un abierto en $\mathbb{C}$, ya que si U es abierto en X , $U = \pi(\pi^{-1}(U))$, pues π es sobreyectiva. Además, π es una aplicación abierta, es decir, para cada abierto en $\mathbb{C}$ su

imagen bajo π es un abierto en X . Si $V \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces para ver que $\pi(V)$ es abierto en X debemos probar que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$. Pero se tiene que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (\omega + V),$$

que es la unión de trasladados de V , y todos son abiertos de $\mathbb{C}$.

Veamos que X es Hausdorff; sean $z_1 + \Lambda$, $z_2 + \Lambda$ puntos distintos de X . Entonces $z_1 - z_2 \notin \Lambda$. Como Λ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\omega, \epsilon) \cap \Lambda = \{\omega\}$ para toda $\omega \in \Lambda$. A lo más, $z_1 - z_2$ pertenece a una única bola $B(\omega_0, \epsilon)$. Tomemos $\epsilon' = \frac{1}{2}|(z_2 - z_1) - \omega_0|$, entonces $z_2 - z_1 \notin B(\omega, \epsilon')$ para toda $\omega \in \Lambda$. De aquí que $|(z_2 - z_1) - \omega| > \epsilon' > 0$ para toda $\omega \in \Lambda$. Por tanto,

$$\eta = \inf_{\omega \in \Lambda} \{|z_1 - (z_2 - \omega)|\} > 0.$$

Sean U_1, U_2 discos de radio $\frac{\eta}{2}$ centrados en z_1 y z_2 , respectivamente. Entonces

$$(U_1 + \omega) \cap U_2 = \emptyset, \forall \omega \in \Lambda$$

pues si existe $z \in U_1$, $\omega \in \Lambda$, con $z + \omega \in U_2$, entonces

$$\begin{aligned} |z_2 - (z_1 + \omega)| &\leq |z_1 - (z + \omega)| + |(z + \omega) - (z_1 - \omega)| = \\ &= |z_1 - (z + \omega)| + |z - z_1| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

que contradice la definición de η . Como π es una aplicación abierta, $\pi(U_1)$ y $\pi(U_2)$ son abiertos disjuntos de $z_1 + \Lambda$ y $z_2 + \Lambda$ en $\mathbb{C}/\Lambda$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que $|\omega| < 2\varepsilon \forall \omega \in \Lambda$ no nulo, y para $z_0 \in \mathbb{C}$ consideremos el disco abierto $D = B(z_0, \varepsilon)$. Por la elección de ε podemos garantizar que no hay dos puntos en D cuya diferencia sea un elemento de Λ . Es decir, si $z \neq z' \in D$ entonces $\pi(z) \neq \pi(z')$.

Es claro que $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ es sobreyectiva, continua y abierta. Por la elección de ε , es inyectiva. Por tanto, $\pi|_D$ es un homeomorfismo entre D y $\pi(D)$.

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ sea $D_{z_0} = B(z_0, \varepsilon)$, consideremos a $\psi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ la inversa de la aplicación $\pi|_{D_{z_0}}$. Tenemos así un recubrimiento de X y una familia de homeomorfismos ψ_{z_0} sobre abiertos de $\mathbb{C}$. Debemos ver la compatibilidad de las cartas. Sean z_1, z_2 dos puntos distintos, y consideremos las aplicaciones

$$\psi_1 = \psi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}, \quad \psi_2 = \psi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}.$$

Sea $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$. Si U es vacío no hay nada que probar. Si U no es vacío, sea $T(z) = \psi_2(\psi_1^{-1}(z)) = \psi_2(\pi(z))$, para cada $z \in \psi_1(U)$. Ahora solo resta demostrar que T es holomorfa en $\psi_1(U)$. Observamos que $\pi(T(z)) = \pi(z) \forall z \in \psi_1(U)$. Entonces $T(z) - z = \omega(z) \in \Lambda \forall z \in \psi_1(U)$. La función $\omega : \psi_1(U) \rightarrow \Lambda$ es continua. Como Λ es un conjunto discreto, ω es localmente constante en $\psi_1(U)$ (es constante en las componentes conexas de U). Por lo tanto, de manera local $T(z) = z + \omega$, para algún $\omega \in \Lambda$, y es holomorfa.

El conjunto $X = \mathbb{C}/\Lambda$ con esta estructura compleja se denomina el **toro complejo**, y es una superficie de Riemann.

4.3. Morfismos entre superficies de Riemann

Se supondrá en lo que sigue que las superficies de Riemann consideradas son conexas.

Ahora es posible definir funciones analíticas entre superficies de Riemann.

Definición 4.3.1. Si X y Y son superficies de Riemann con atlas $C_{\alpha_X} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $D_{\beta_Y} = \{V_\beta, \phi_\beta\}_{\beta \in J}$ respectivamente, entonces un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es analítico si cada mapeo

$$\varphi_\alpha \circ f \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítico (como mapeo de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$). El mapeo es llamado conforme si es también inyectivo y sobreyectivo. En este caso $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también conforme.

4.3.1. Propiedades de los morfismos

Teorema 4.3.1. (de Identidad) Sea X una superficie de Riemann y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos morfismos que coinciden en una vecindad de un punto $x_0 \in X$, entonces f_1 y f_2 coinciden en X .

Corolario 4.3.1. Sean X una superficie de Riemann y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos morfismos que coinciden en un conjunto A de X , que tiene un punto de acumulación x_0 , entonces f_1 y f_2 coinciden en X .

Teorema 4.3.2. (de Extensión) Sean U un abierto de una superficie de Riemann, $a \in U$ y $f \in O(U - \{a\})$ una función acotada en una vecindad de a . Entonces f tiene una extensión única holomorfa en U .

Teorema 4.3.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante de superficies de Riemann. Para todo $a \in X$, existe una carta (h, U) de X centrada en a , una carta (k, V) de Y centrada en $b = f(a)$, con $f(U) \subset V$ y un entero $n \geq 1$ tal que la transformación $F = k \circ f \circ h^{-1} : h(U) \rightarrow k(V)$ es $z \mapsto F(z) = z^n$.

Demostración. Fijemos una carta k centrada en $b = f(a)$, y escojamos una carta arbitraria $\psi : U \rightarrow V$ centrada en a . Entonces la serie de Taylor para la función $T(w) = k(f(\psi^{-1}(w)))$ debe ser de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i,$$

con $c_m = 0$, y $m \geq 1$, pues $T(0) = 0$. Podemos escribir $T(w) = w^m S(w)$, donde $S(w)$ es una función holomorfa en $w = 0$, y $S(0) = 0$. Entonces existe una función $R(w)$ holomorfa en un entorno de 0 tal que $R(w)^m = S(w)$ (por la existencia de raíz m -ésima; véase caso b) de la subsección 4.1.2), de donde $T(w) = (wR(w))^m$. Sea $\eta(w) = wR(w)$. Como $\eta'(0) \neq 0$, la función η es invertible en un entorno de cero (teorema de la función implícita), y holomorfa. Entonces la composición $h = \eta \circ \psi$ es una carta en X centrada en a . Si vemos η como una nueva coordenada z ($z = \eta(w)$), entonces

$$\begin{aligned} k(f(h(z))) &= k(f(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= T(w) \\ &= (wR(w))^m \\ &= z^m. \end{aligned}$$

La unicidad de m se obtiene al observar que, en un entorno de a , hay exactamente m preimágenes de puntos cercanos a $f(a)$. Entonces este exponente m queda determinado por las propiedades topológicas de la aplicación en un entorno de a , y es independiente de las cartas elegidas. $\square$

Corolario 4.3.2. Sean X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante. Entonces f es una transformación abierta.

Corolario 4.3.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo inyectivo. Entonces f es un isomorfismo de X sobre $f(X)$.

Corolario 4.3.4. (Principio del máximo) Sean X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no constante. Entonces $|f|$ no alcanza su máximo.

Teorema 4.3.4. Sean $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante de superficies de Riemann. Entonces, si X es compacta, Y es también compacta y f es sobre.

Corolario 4.3.5. Toda función holomorfa definida no constante sobre una superficie de Riemann compacta es constante.

Corolario 4.3.6. Toda función meromorfa f diferente de ∞ sobre $\mathbb{C}$ es racional.

Teorema 4.3.5. Sea $\rho : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante de superficies de Riemann. Entonces ρ es abierto y discreto.

Sea $\rho : Y \rightarrow X$ un morfismo no constante de superficies de Riemann, un punto $y \in Y$ se dice un punto de ramificación de ρ si no existe vecindad V de y tal que $\rho|_V$ sea inyectivo, ρ es entonces un morfismo ramificado.

Un morfismo sin puntos de ramificación se dice no ramificado.

Teorema 4.3.6. Sea $\rho : Y \rightarrow X$ un morfismo no constante de superficies de Riemann; entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:

- a) ρ es no ramificado.
- b) ρ es un homomorfismo local.

Ejemplos.

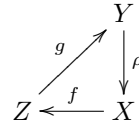
Ejemplo 4.3.1. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definida como $\exp(z) = e^z$; para todo $u_0 \in \mathbb{C}^*$, sea $D(U_0) \subset \mathbb{C}^*$ un disco, consideremos una rama de $\log(u)$, tenemos para $u = e^z$, $\log(u) = z$. La transformación $\exp$ es un morfismo no ramificado.

Ejemplo 4.3.2. La proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}^2$ es un morfismo no ramificado, donde $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Lambda$ es el toro complejo.

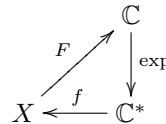
Ejemplo 4.3.3. De acuerdo con el teorema 4.3.3, todo morfismo no constante entre superficies de Riemann $f : X \rightarrow Y$, se comporta localmente como $z \mapsto z^n$. Sean $a \in X$ y U_0 una vecindad de a , existe una vecindad abierta $U \subset U_0$ de a y una vecindad abierta $W = f(U)$ de $b = f(a)$ tal que, para toda $x \in W - \{a\}$, $f^{-1}(x)$ consiste exactamente de n -puntos: se dice que f tiene multiplicidad n en a . Así que a es un punto de ramificación de f , si $n \geq 2$.

Teorema 4.3.7. Sean X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico Hausdorff y $\rho : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Entonces Y acepta una estructura compleja única tal que ρ sea holomorfa.

Teorema 4.3.8. Sean X, Y, Z , superficies de Riemann, $\rho : Y \rightarrow X$ un morfismo no ramificado y $f : Z \rightarrow X$ un morfismo. Entonces todo levantamiento $g : Z \rightarrow Y$ es un morfismo.



Ejemplo 4.3.4. (Logaritmo de una función) Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa, $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$. Se busca una función holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp F = f$, es decir, tal que F sea un levantamiento de f a $\mathbb{C}$, respecto a la $\exp$:



Sea $x_0 \in X$ y $c \in \mathbb{C}$ tal que $e^c = f(x_0)$, entonces de acuerdo al teorema sobre la existencia de un levantamiento 4.1.3, existe $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x_0) = c$. De acuerdo con el teorema precedente, F es holomorfa.

Cualquier otra solución defiere de F por sucesión de $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$. Por definición $F = \log(f)$. Si f es la inyección canónica, $\log(f)$ es una rama continua de la función $\log$ en X .

Teorema 4.3.9. Sea Y una superficie de Riemann, X un espacio topológico Hausdorff y conexo, y $f : X \rightarrow Y$ un recubrimiento de X en Y bajo f . Entonces existe una única estructura de superficie de Riemann en X para la que f es un morfismo de superficies de Riemann.

Demostración.

Si $p \in X$, sea $q = f(p)$ y V entorno de q tal que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$. Podemos tomar (V, φ) carta en q , y consideramos $(U_i, \varphi \circ f|_{U_i})$ carta en p . Definimos un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{C}$, y si $(U'_i, \psi \circ f|_{U'_i})$ es otra carta, se tiene que

$$(\psi \circ f) \circ (\varphi \circ f)^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1},$$

que es holomorfa. Tenemos así un atlas complejo C en X . Para la unicidad, supongamos que (X, C') es otro atlas complejo, tal que la aplicación $f : (X, C') \rightarrow Y$ es morfismo. Si φ' son las cartas de C' , entonces la composición $\varphi \circ f \circ \varphi'^{-1}$ es holomorfa en su dominio, y esto es lo mismo que decir que $Id : (X, C) \rightarrow (X, C')$ es morfismo. Como es biyectiva, es isomorfismo. $\square$

4.4. Relación entre grupos kleinianos y superficies de Riemann

Un método de construcción de superficies de Riemann es formando el espacio cociente con respecto a una acción de grupo discontinua. De hecho, se sabe que cada superficie de Riemann surge de esta manera. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sea G un grupo kleiniano con región de discontinuidad Ω , entonces $S = \Omega/G$ es una superficie de Riemann.*

Demostración. La demostración de que $S = \Omega/G$ es un espacio topológico Hausdorff es la misma que la del teorema 3.3.3. Ahora demos una estructura de superficie de Riemann a Ω/G . Tomamos un $z \in \Omega/G$ y $w \in \Omega$ tal que $\pi(w) = z$ (donde $\pi : \Omega_G \rightarrow \Omega_G/G$ es la proyección natural que asocia a cada $w \in \Omega$ su clase de equivalencia). Si G_w sólo consiste de la identidad, entonces existe una vecindad abierta U de w tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda $g \in G - \{e\}$. Esto dice que $\pi : U \rightarrow \pi(U)$ es una coordenada local. Ahora si G_w tiene elementos diferentes de la identidad, hemos visto que G_w es un grupo cíclico finito de orden n . Sabemos que vía una transformación de Möbius γ podemos mapear a w en 0 y U en Δ , y como el estabilizador de w es de orden n entonces, módulo conjugación tenemos que

$$\gamma \circ g \circ \gamma^{-1}(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} z, \quad z \in \Delta.$$

En este caso consideramos a $q(z) = z^n$; esta función mapea Δ en sí mismo y tiene la propiedad que para toda k y para toda $w_1 \in U$, tenemos que

$$\begin{aligned} q \circ \gamma \circ g^k(w_1) &= [\gamma \circ g^k \circ \gamma^{-1}(\gamma(w_1))]^n \\ &= [e^{\frac{2i\pi k}{n}}(\gamma(w_1))]^n \\ &= [\gamma(w_1)]^n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observar que esto es independiente del entero k .

Tomaremos como cartas de S a los pares:

$$(\pi|_U(U) = \pi_w(U), \quad q \circ \gamma \circ \pi^{-1}).$$

Cada punto en $\pi_w(U)$ es enviado bajo π_w^{-1} en n -puntos $g^k(w_1)$; por ejemplo, cuando $k = 0, 1, \dots, n-1$ en U . De acuerdo con 4.2, este mapeo π bajo $q \circ \gamma$ se envían al mismo punto en Δ , así

$$\phi_w = q \circ \gamma \circ \pi^{-1}$$

es una biyección de $\pi_w(U)$ en Δ . Como los mapeos q , γ y π_w son abiertos y continuos, vemos que cada ϕ_w es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} U \subset \Omega & & \\ \downarrow \pi_w & \searrow q \circ \gamma & \\ V \subset S & \xrightarrow{\phi_w} & \Delta \end{array}$$

con $V = \pi_w(U)$.

Con la finalidad de comprobar que los mapeos transición son analíticos, primero debemos estudiar los mapeos

$$\pi_v^{-1} \circ \pi_u, \quad u \neq v.$$

Supongamos que $\zeta_u \in U_u$, $\zeta_v \in U_v$ y

$$\pi(\zeta_u) = \pi(\zeta_v) = \zeta,$$

es decir, para algún $g \in G$, tenemos que

$$\zeta_v = g(\zeta_u).$$

Supongamos ahora que ζ_u , y de aquí que ζ_v no tienen puntos fijos elípticos. Entonces π_v es inyectiva en alguna vecindad de ζ_v y por lo tanto existe una inversa local π_v^{-1} que mapea ζ en ζ_v . Los dos mapeos

$$\pi_v \circ g, \quad \pi_u$$

coinciden con π , y por lo tanto uno con el otro, en alguna vecindad de ζ_v y toma valores en $\pi_v(U_v)$. Aplicando π_v^{-1} vemos que

$$g = \pi_v^{-1} \circ \pi_u$$

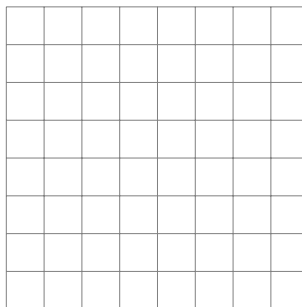
cerca de ζ_u . De aquí que $\pi_v^{-1} \circ \pi_u$ es un mapeo analítico cerca de los puntos que no tiene puntos fijos elípticos de G .

Como q y γ son mapeos analíticos y hemos visto que π_v es analítico tenemos que $\phi_v = q_v \circ \gamma_v \circ \pi_v^{-1}$ es analítico y de aquí que

$$\phi_v \circ \phi_u^{-1}$$

es analítica (la prueba es similar a la de arriba solo tomando en cuenta las respectivas restricciones de cada una de las funciones, y tomando una sola rama de la función q_v^{-1} en el punto correspondiente a los puntos no fijos en G). $\square$

Ejemplo 4.4.1. Sean $T_1(z) = z + 1$, $T_2(z) = z + i \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$. Ahora tomemos todas las posibles composiciones de estas dos transformaciones y sus inversas. El conjunto de todas estas composiciones forman el grupo $G = \langle T_1, T_2 \rangle$. Veamos cómo actúa en los puntos del plano. Cuadriclemos el plano con rectas verticales separadas por una distancia igual a uno, similarmente por rectas horizontales separadas también a distancia uno.

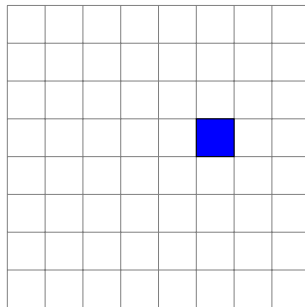


Esta cuadrícula es como un rompecabezas infinito. El grupo G no altera la cuadrícula ya que, si tomamos uno de los cuadrados de la cuadrícula y le aplicamos la transformación T_1 el cuadrado se transforma en el de la derecha (al de la izquierda si se aplica la inversa), del mismo modo si le aplicamos la transformación T_2 a un cuadrado de la cuadrícula se mueve un cuadro hacia arriba (hacia abajo si aplicamos la inversa).

Sabemos también que la región de discontinuidad del grupo G sigue siendo $\mathbb{C}$ (ver 3.2.2), veamos qué se construye formando el cociente de $\mathbb{C}$ y G , es decir, $\mathbb{C}/G$.

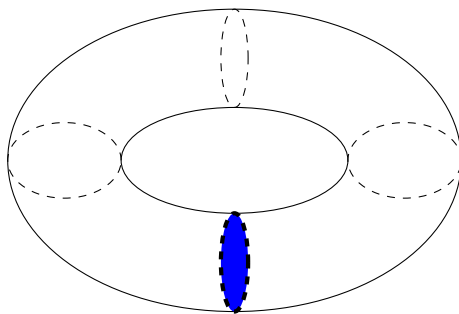
Si queremos entender las clases de todo el rompecabezas nos podemos quedar con una sola pieza,

puesto que cualquier cuadrado está relacionado con el otro. Quedémonos solamente con un cuadrado al que llamaremos Γ . Sin embargo Γ tiene su frontera que corresponde a dos líneas horizontales y dos verticales.



Recordemos que el grupo G es generado por dos elementos (T_1, T_2) que mueven a la línea vertical izquierda en la de la derecha y la horizontal inferior con la superior. Así que tenemos que pegar las líneas de la frontera de Γ como nos indica el grupo G , es decir las verticales entre sí y las horizontales entre sí.

El resultado es el toro complejo que como se demostró en el ejemplo 4.2.5 es una superficie de Riemann, más aún la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$ es un mapeo cubriente universal.



Dada una superficie de Riemann S uno puede construir una superficie de Riemann simplemente conexa $\hat{S}$ (por el teorema 4.3.9) y un mapeo $\varphi : \hat{S} \rightarrow S$ con las propiedades siguientes

- i) cada $\hat{z}$ en $\hat{S}$ tiene una vecindad $\hat{N}$ tal que la restricción de φ en $\hat{N}$ es un homeomorfismo en un subconjunto abierto de S ;
- ii) φ tiene la propiedad de levantar arcos 4.1.2.

Estas propiedades nos están diciendo que $(\hat{S}, \varphi)$ es una superficie de Riemann simplemente conexa que cubre a S , es decir, $\hat{S}$ es un espacio cubriente universal de S . Y por el siguiente teorema:

Teorema 4.4.2. Teorema de Uniformización. *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es holórficamente equivalente a una y solo una de las siguientes:*

$$\hat{\mathbb{C}}; \mathbb{C}; \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}.$$

Podemos entonces suponer que $\hat{S}$ es una de estas tres posibilidades.

La demostración de este teorema no es para nada trivial y puede encontrarse en [6], pero lo menciono porque hemos discutido ya a los dominios mencionados en el teorema.

Caso 1: Si $\hat{S} = \hat{\mathbb{C}}$, entonces la única manera de que G actúe sin puntos fijos es que $G = \{e\}$ en este caso S es la esfera de Riemann.

Caso 2: Si $\hat{S} = \mathbb{C}$, entonces la única manera que G actúe sin puntos fijos y de manera discontinua es que sea una de las siguientes dos formas módulo conjugación:

- (a) $G_1 = \langle T_1(z) = z + 1 \rangle$; ó

(b) $G_2 = \langle T_2(z) = z + \tau \rangle$, donde $\tau \in \mathbb{H}$.

Si tomamos el grupo $G = \langle T_1, T_2 \rangle$ generado por $T_1(z) = z + 1$ y $T_2(z) = z + \tau$ tenemos que $\Omega_G/G = \mathbb{C}/\langle T_1, T_2 \rangle$ es isomorfo al toro complejo (véase ejemplo 4.4.1). La proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\langle f_1, f_2 \rangle$ es un mapeo cubriente universal, o sea el plano es un espacio cubriente universal del Toro, G es el grupo de transformaciones cubrientes.

Caso 3: Todas las otras superficies de Riemann que tienen como espacio cubriente universal a $\mathbb{H}$, son llamadas superficies de Riemann *hiperbólicas*.

Capítulo 5

Grupos de Lie

Como se mencionó en el segundo capítulo, el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie, el cual ha sido parte importante de nuestro estudio (con $n = 2$), además de que este grupo es una herramienta fundamental de la geometría diferencial y de las ecuaciones diferenciales, entonces el estudio de este grupo es fundamental para entender la génesis del enfoque de **Sophus Lie**, el cual era mostrar que los distintos métodos para resolver ecuaciones diferenciales pueden ser clasificados a través del estudio del carácter invariante de dichas ecuaciones por un grupo continuo de transformaciones. Esta filosofía ya aparecía en los trabajos pioneros de *Felix Klein* que llegó a definir la geometría como el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo de transformaciones (véase Capítulo 1).

En esta tesis se da material introductorio acerca de la teoría de Lie, utilizando lo visto en los capítulos anteriores, con la intención de seguir estudiando esta teoría posteriormente y lograr entender la relación entre las ecuaciones diferenciales y los grupos de Lie.

Daremos unos preliminares a la definición de grupo de Lie, retomando la definición de variedad que se dió en el capítulo anterior y asociándole ahora a la variedad su espacio tangente en un punto, después daremos la definición de grupo de Lie, ejemplos y algunas propiedades elementales, culminamos este capítulo con una pequeña introducción a las *G-variedades*.

5.1. Preleminares a la definición de grupo de Lie

Vamos a iniciar con la definición de vector tangente a una variedad y el espacio de todos los vectores tangentes, daremos una serie de propiedades de este espacio y enfatizaremos en que este espacio es un espacio vectorial. Nos interesamos en esto ya que es parte central de una introducción a la teoría de grupos de Lie, en la cual no nos adentraremos tanto, sólo haremos ver que con lo estudiado hasta el momento podemos introducirnos a esta teoría y con esto tener motivación para seguir estudiándola y posteriormente tratar de entender el enfoque de **Sophus Lie** desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

Definición 5.1.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m en $\mathbb{R}^k$ y p un punto de M . Un vector v de $\mathbb{R}^k$ es **tangente** a M en p , si v se puede expresar como el vector velocidad en p de alguna curva diferenciable en M que pase por p . El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es llamado **espacio tangente** a M en p y se denota por $T_p M$.

Ahora, sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ una función diferenciable. Sabemos que para todo $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ tal que $p \in U$ y una función diferenciable F de U en $\mathbb{R}^l$ tal que $F|_{M \cap U} = f$. Definimos para cada $p \in M$ la diferencial de f en p por:

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$df_p = dF_{p|_{T_p M}}.$$

Verifiquemos que df_p está bien definida, para ello sea G otra función diferenciable de un abierto V de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^l$ tal que $p \in V$ y $G|_{M \cap V} = f$. Sea $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable en M tal que $\alpha(t_0) = p$. Entonces, $\beta(t) = f(\alpha(t)) = G(\alpha(t))$ de manera que en t_0 tenemos

$$dF_p(\alpha'(t_0)) = \beta'(t_0) = dG_p(\alpha'(t_0))$$

lo cual muestra que $dF_{p|_{T_p M}} = dG_{p|_{T_p M}}$ y así df_p está bien definida.

Observación. Sean $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ abiertos, y sea $p \in U$. Consideremos el mapa diferenciable $f : U \rightarrow V$ como mapa entre variedades y calculemosle el diferencial: $df_p : T_p U = \mathbb{R}^k \rightarrow T_{f(p)} V = \mathbb{R}^l$. Observemos que el propio U es un entorno abierto de p , entonces podemos tomar como extensión F la propia f

$$df_p = dF_{p|_{T_p M}} = dF_{p|_{\mathbb{R}^k}} = dF_p = df_p$$

(a la izquierda: el “diferencial entre variedades”, a la derecha, el “diferencial usual”). Obtenemos el diferencial usual que es lo que uno esperaba, y lo que nos permite decir que este nuevo diferencial generaliza al anterior.

Proposición 5.1.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m en $\mathbb{R}^k$ y p un punto de M . El espacio tangente a M en p es un espacio vectorial de dimensión m .*

Demostración. Dado un punto p en M y $u \in T_p M$, existe una curva $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = u$. Sea (V, f^{-1}) una parametrización de M en p tal que $f^{-1}(x_0) = p$. Como f es diferenciable tenemos que $\beta = f \circ \alpha$ es una curva diferenciable en V con $\beta(t_0) = x_0$ y $\beta'(t_0) = df(u) \in \mathbb{R}^m$. Inversamente, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe una curva diferenciable γ en V tal que pasa por x_0 y el vector velocidad de γ en x_0 es precisamente v y puesto que $f^{-1} \circ \gamma$ es una curva diferenciable en M , $df_{x_0}^{-1}(v) \in T_p M$. Por lo tanto

$$T_p M = df_{x_0}^{-1}(\mathbb{R}^m)$$

y así $T_p M$ es un espacio vectorial. Ahora, para las transformaciones lineales

$$df_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$$

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tenemos que $df_{x_0}^{-1} \circ df_p$ es la identidad en $\mathbb{R}^m$, de donde $df_{x_0}^{-1}$ es sobreyectiva y df_p es inyectiva, por lo tanto, la dimensión de $T_p M$ es igual a la dimensión de $\mathbb{R}^m$, la cual es como sabemos m . $\square$

Consideremos dos variedades, $M \subset \mathbb{R}^m$ y $N \subset \mathbb{R}^l$, y una transformación diferenciable $f : M \rightarrow N$. Sea p en M y α una curva en M tal que $\alpha(t_0) = p$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva en N tal que $(f \circ \alpha)(t_0) = f(p)$ y de aquí tenemos que los vectores tangentes a M en p serán mandados por df_p a vectores tangentes a N en $f(p)$ por lo tanto la diferencial nos da una aplicación bien definida entre los espacios tangentes

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N.$$

Como antes, la diferencial tiene las siguientes propiedades fundamentales:

Regla de la Cadena: Sean $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ y $P \subset \mathbb{R}^m$. Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son diferenciables con $p \in M$ y $f(p) = q$, entonces

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

Es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} N & \xrightarrow{dg_{f(p)}} & T_{g(f(p))} P \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & d(g \circ f)_p & & \end{array}$$

Demostración. Sean F y G extensiones diferenciables de f y g alrededor de p y de $f(p) = q$, respectivamente. Como F es continua, podemos suponer que la imagen de F está contenida en el dominio de G . Entonces $G \circ F$ es una extensión de $g \circ f$ en p y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{F} & V & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & G \circ F & & \end{array}$$

donde U es el dominio de F y V es el dominio de G (nos tomamos $F(U) \subset V$). Le aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dF_p} & \mathbb{R}^l & \xrightarrow{dG_q} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & d(G \circ F)_p & & \end{array}$$

Como $dF_p(T_p M) \subset T_{f(p)} N$ entonces podemos restringir a los espacios tangentes:

$$\begin{array}{ccccc} T_p M & \xrightarrow{dF_p} & T_{f(p)} N & \xrightarrow{dG_{f(p)}} & T_{g(f(p))} P \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & d(G \circ F)_p & & \end{array}$$

y aquí las extensiones son las propias funciones: el diagrama anterior es igual al siguiente, concluyendo la demostración:

$$\begin{array}{ccccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} N & \xrightarrow{dg_{f(p)}} & T_{g(f(p))} P \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & d(g \circ f)_p & & \end{array}$$

□

Si Id es la aplicación identidad de M , entonces dId_p es la aplicación identidad de $T_p M$. De forma mas general, si $M \subset N$ con la aplicación inclusión $i : M \rightarrow N$, entonces $di_p : T_p M \rightarrow T_p N$ es la aplicación inclusión. La demostración de estas propiedades se sigue de la definición de la diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades y las propiedades análogas para aplicaciones diferenciales de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^l$. Como antes, estas propiedades implican la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2. *Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, la dimensión de M es igual a la dimensión de N .*

Demostración. Ya sabemos que “el diferencial de la identidad es la identidad” y que vale la regla de la cadena, así que repetimos la demostración de esta proposición para abiertos. Tenemos $f \circ f^{-1} = Id_N$ y $f^{-1} \circ f = Id_M$, entonces:

$$Id_{T_p M} = d(Id_M)_p = d(f^{-1} \circ f)_p = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p$$

$$Id_{T_{f(p)} N} = d(Id_N)_{f(p)} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ d(f^{-1})_{f(p)}$$

Por lo tanto df_p es invertible, y además $(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$. Supongamos ahora que $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ y $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow N$ son parametrizaciones, con φ elegida de modo tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$. Si definimos $\hat{f} : U \rightarrow V$ como $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \psi^{-1} \\ U & \xrightarrow{\hat{f}} & V \end{array}$$

y $\hat{f}$ es un difeomorfismo entre $U \subset \mathbb{R}^k$ y $V \subset \mathbb{R}^l$ de donde $m = n$, entonces M y N tienen la misma dimensión. $\square$

Dada una aplicación diferenciable entre dos variedades $f : M \longrightarrow N$, tenemos que la diferencial $df_p : T_p M \longrightarrow T_p N$ en una transformación lineal que depende del punto p de M , así que al cambiar de punto obtenemos, mediante la diferencial de f , otra transformación lineal entre los espacios tangentes correspondientes. Esto motiva a definir una transformación del conjunto de todos los vectores tangentes a M en el conjunto de todos los vectores tangentes a N . Para tal fin, definamos para una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^k$, el subconjunto de $M \times \mathbb{R}^k$

$$TM = \{(x, u) \in M \times \mathbb{R}^k | x \in M\}, u \in T_x M \quad (5.1)$$

y al cual llamaremos **haz tangente**. De manera que el elemento (x, u) puede ser interpretado como “el vector u tangente a M en x ”. Se puede verificar que TM es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^{2k}$, pues $TM \subset M \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{2k}$. Entonces, retomando las variedades $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ y f , una función diferenciable entre ellas, podemos definir

$$df : TM \longrightarrow TN$$

$$df(x, u) \mapsto (f(x), df_x(u))$$

que al definir la proyección

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

$$\pi(x, u) = x$$

tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Ahora recordemos el teorema de la función inversa para funciones de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^l$.

Teorema 5.1.1. (Teorema de la función inversa) Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ una aplicación diferenciable con U abierto en $\mathbb{R}^k$. Si la diferencial $df_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es no singular, entonces f manda cualquier vecindad abierta U' de $x \in U$ suficientemente pequeña, difeomorfamente sobre un conjunto abierto $f(U')$.

La demostración se puede encontrar en [13, Pag. 451].

El teorema de la función inversa se puede enunciar de la siguiente manera.

Teorema 5.1.2. (Teorema de la función inversa) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ diferenciable con U abierto en $\mathbb{R}^k$ tal que $df_p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es un isomorfismo para algún $p \in U$, entonces existe X vecindad de p en U y existe Y vecindad de $f(p)$ en $\mathbb{R}^l$ tales que $f : X \longrightarrow Y$ tiene una inversa diferenciable $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

Justificación:

$df_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es un isomorfismo, entonces la matriz asociada a la transformación lineal df_x que es la matriz **Jacobiana**, o sea, la matriz

$$[df_x] = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) & \dots & D_k f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) & \dots & D_k f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_l(x) & D_2 f_l(x) & \dots & D_k f_l(x) \end{pmatrix} = (D_j f_i(x))_{1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq k}.$$

Si $(D_j f_i(x))_{1 \leq i \leq l}^{1 \leq j \leq k} = A$, $\forall w \in \mathbb{R}^k$, $df_x(w) = A \cdot w$, entonces $df_x = T_A = T_{(D_j f_i(x))_{1 \leq i \leq l}^{1 \leq j \leq k}}$ es una transformación lineal, y como es isomorfismo entonces la matriz es invertible y por tanto de determinante distinto de cero.

Ahora veamos una versión de este teorema para variedades diferenciables.

Teorema 5.1.3. Sean M y N variedades, $p \in M$ y $f : M \rightarrow N$ un mapeo diferenciable tal que df_p es un isomorfismo lineal. Entonces existe $X \subset M$ con $p \in X$ (es decir, un entorno relativo de p en M) tal que $f|_X : X \rightarrow f(X)$ es un difeomorfismo.

Demostración. Sean $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ y $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow N$ parametrizaciones, con φ elegida de modo tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$. Si definimos $\hat{f} : U \rightarrow V$ como $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \psi^{-1} \\ U & \xrightarrow{\hat{f}} & V \end{array}$$

Si $\varphi(q) = p$ y $\psi(r) = f(p)$, aplicamos la regla de la cadena y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} N \\ d\varphi_q \uparrow & & \downarrow d(\psi^{-1})_{f(p)} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{d\hat{f}_q} & \mathbb{R}^l \end{array}$$

¡Son todos isomorfismos lineales! En efecto, df_p , $d\varphi_q$ y $d(\psi^{-1})_{f(p)}$ lo son (el primero por hipótesis, los otros dos por ser diferenciales de difeomorfismos), entonces por la conmutatividad del diagrama (es decir, por composición), $d\hat{f}_q$ es un isomorfismo lineal.

Ahora, gracias a f estamos en las hipótesis del teorema de la función inversa para abiertos. Podemos encontrar $\hat{U} \subset U$ tal que $f|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow \hat{f}(\hat{U})$ sea un difeomorfismo. Restringiendo el primer diagrama a este $\hat{U}$ y mirándolo desde arriba, obtenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\hat{U}) & \xrightarrow{f|_{\hat{U}}} & f(\varphi(\hat{U})) \\ \varphi|_{\varphi(\hat{U})}^{-1} \downarrow & & \uparrow \psi|_{f(\hat{U})} \\ \hat{U} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{f}(\hat{U}) \end{array}$$

Esta vez son todos difeomorfismos: $\hat{f}|_{\hat{U}}$ por el teorema de la función inversa, $\psi|_{f(\hat{U})}$ y $\varphi|_{\varphi(\hat{U})}^{-1}$ por restricciones de difeomorfismos, de donde por la conmutatividad del diagrama (es decir, por composición), $f|_{\varphi(\hat{U})} : \varphi(\hat{U}) \rightarrow \hat{f}(\varphi(\hat{U}))$ es un difeomorfismo. Tomando $X = \varphi(\hat{U})$ tenemos demostrado el teorema $\square$.

Definición 5.1.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ una función diferenciable. Decimos que $p \in U$ es un punto regular si df_p es sobreyectivo. Si p no es regular decimos que es un punto crítico.

Observación. Tenemos que $\dim(\text{Im}(df_p)) \leq n$ ya que por el teorema de las dimensiones:

$$n = \dim(\ker(df_p)) + \dim(\text{Im}(df_p))$$

recordando que el diferencial es una transformación lineal.

Definición 5.1.3. (Valor regular) Sea $y \in \mathbb{R}^k$. Decimos que y es un valor regular si el conjunto $f^{-1}(y) \subset U$ no contiene puntos críticos.

Observación. En el caso $l = 1$, la matriz asociada a df_p (la jacobiana) resulta ser el vector $\nabla f(p)$, es decir $df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v$. En este caso df_p es sobreyectivo si y sólo si $\dim[Im(df_p)] = 1$, o sea si $\nabla f(p) \neq 0$. Es decir, p es un punto crítico si y sólo si $\nabla f(p) = 0$.

Teorema 5.1.4. Sea $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ una función diferenciable y $v \in \mathbb{R}^l$ un valor regular de f . Entonces $M = f^{-1}(\{v\})$ es una variedad de dimensión $k - l$.

Demostración. Sea $p \in M$, queremos encontrar una parametrización de M alrededor de p . Como $p \in f^{-1}(\{v\})$, entonces p es un punto regular, luego $df_p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es sobreyectivo: tiene rango l . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las primeras l filas de df_p son linealmente independientes. Sea A la matriz formada por dichas filas: es cuadrada e invertible. Definimos $\hat{f} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ por

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k) = (f(x_1, \dots, x_k), x_{l+1}, \dots, x_k).$$

Esta función es diferenciable, y su diferencial en p es:

$$[df_p] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & Id \end{pmatrix}.$$

Es invertible ya que A e Id (la identidad) lo son. Luego, por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos de p y v , llamémosles U y V respectivamente, tales que $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Entonces restringiendo a $M = f^{-1}(\{v\})$ tenemos $\hat{f} : M \cap U \longrightarrow V \cap (\{v\} \times \mathbb{R}^{k-l})$ que es también un difeomorfismo. Por lo tanto el mapa $\hat{f}^{-1}|_{V \cap (\{v\} \times \mathbb{R}^{k-l})}$ es la parametrización de M alrededor de p buscada $\square$.

Ejemplo 5.1.1. Veamos finalmente que $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una variedad de dimensión 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Entonces $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ y el único punto crítico es $(0, 0, 0)$. 0 es valor regular porque $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \mathbb{S}^2$ y $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(\{0\})$. Por lo tanto $\mathbb{S}^2$ es una variedad de dimensión 2.

Ojo: la preimagen de un valor regular es una variedad, pero esto no significa que dada una función, sólo serán variedades las preimágenes de los valores regulares:

Contraejemplo 5.1.1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2$. Entonces 0 no es valor regular, porque $f(0, 0, 0) = 0$ y el gradiente de f se anula en $(0, 0, 0)$, por lo tanto $(0, 0, 0)$ es un punto crítico. Sin embargo $f^{-1}(\{0\})$ es una variedad: es el plano $z = 0$.

Contraejemplo 5.1.2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. Entonces $\nabla f(x, y, z) = (2x + 2y + 2z - 2, 2x + 2y + 2z - 2, 2x + 2y + 2z - 2) = (0, 0, 0) \iff x + y + z = 1$. Si $x + y + z = 1$ entonces $f(x, y, z) = 0$ por tanto los valores regulares son todos salvo el 0. Veamos que $f^{-1}(0)$ también es una variedad:

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z - 1)^2 = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x - y\} \\ &= \text{graf}(f) \end{aligned}$$

definiendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = 1 - x - y$, f es diferenciable. Luego $f^{-1}(0)$ es una variedad, aunque 0 no sea un valor regular.

5.2. Definición de Grupo de Lie

Uno de los hechos matemáticos que hace de los grupos de Lie potentes herramientas para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es que son generados infinitesimalmente. Esto significa que hay ciertas transformaciones infinitesimales del espacio que generan el grupo. Una transformación infinitesimal no es otra cosa que una ecuación diferencial de primer orden. De esta manera surgen las álgebras de Lie que son el aspecto infinitesimal de los grupos de Lie.

Con lo estudiado en los capítulos anteriores tenemos los conceptos fundamentales para poder definir un grupo de Lie. En lo que sigue, toda variedad se supondrá de Hausdorff, pero no necesariamente conexa. El adjetivo diferenciable estará tomado en el sentido C^∞ .

Definición 5.2.1. Decimos que un grupo G es un grupo de Lie si G es un variedad diferenciable y las funciones

$$\begin{aligned}\eta_1 : G \times G &\longrightarrow G; \eta_1(g, h) = g \cdot h \\ \eta_2 : G &\longrightarrow G; \eta_2(g) = g^{-1}\end{aligned}$$

multiplicación e inversión respectivamente, son diferenciables.

Aclaremos que al decir que un grupo es una variedad diferenciable queremos significar que el conjunto subyacente del grupo tiene una estructura de variedad diferenciable.

Teorema 5.2.1. Sea G una variedad diferenciable de clase C^∞ con estructura de grupo. Entonces G es un grupo de Lie si y solo si la función

$$\eta_3 : G \times G \longrightarrow G; \eta_3(g, h) = g \cdot h^{-1}$$

es C^∞ .

Demostración. Si G es un grupo de Lie, es claro que la función η_3 es diferenciable de clase C^∞ , ya que es la composición de las funciones η_1 y η_2 , a saber $\eta_3(g, h) = \eta_1(g, \eta_2(h))$, las cuales son diferenciables de clase C^∞ .

Por otro lado, observe que

$$\eta_2(h) = \eta_3(e, h) \text{ y } \eta_1(g, h) = \eta_3(g, \eta_2(h)).$$

Por lo tanto, η_1, η_2 resultan ser diferenciables si η_3 lo es. $\square$

La propiedad anterior nos proporciona un criterio para decir cuándo un grupo es de Lie o no. Para los fines prácticos esta propiedad es de mucha ayuda.

Ejemplo 5.2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie abeliano con la suma habitual de vectores.

Los grupos de transformaciones, en la terminología de Sophus Lie (1890), son grupos parametrizados por un juego finito de números reales. En muchos casos, sus elementos son transformaciones lineales de un espacio vectorial, es decir, forman grupos de matrices. Además, dichos elementos pueden dejar invariante una forma de volumen, o bien una forma bilineal sobre el espacio vectorial. Estos grupos matriciales se llaman **grupos clásicos**.

Y como un ejemplo de estos grupos es el grupo $GL(n, \mathbb{R})$, el cual ya hemos mencionado en esta tesis.

Ejemplo 5.2.2. $GL(n, \mathbb{R})$, el grupo general lineal, con producto usual de matrices, admite una estructura de variedad diferenciable mediante la función $\sigma : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ definida como

$$\sigma(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}).$$

El producto de las matrices $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$ es la matriz $C = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Es decir c_{ij} viene dado por una función polinómica de grado dos en las variables a_{ik} , b_{kj} . Por lo que es una función diferenciable, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\bar{a}_{ij})$, donde $\bar{a}_{ij}$ son los cofactores de A . Luego los coeficientes de A^{-1} son cocientes de polinomios, donde el denominador es no nulo. Por esta razón $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

En el caso especial $n = 1$, $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$ es el grupo multiplicativo de los números reales no nulos.

En particular, tenemos que $GL(2, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie, el cual tiene una estrecha relación con las transformaciones de Möbius.

Veamos otros ejemplo relacionados con lo que hemos visto en esta tesis.

Ejemplo 5.2.3. Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ entonces $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ con las operaciones $(z_1, z_2) \mapsto (x+iy)(x'+iy') = (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$ y $z_1 \mapsto z_1^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ son ambas diferenciables, luego G es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.2.4. El **toro complejo** $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ con la estructura de variedad dada en el ejemplo 4.2.5 y con las operaciones producto e inversión definidas por el producto de las clases de equivalencia y la inversión de éstas.

De lo dicho arriba se sigue el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.5. Sea $G = (Möb(2, \mathbb{C}), \circ)$ es un grupo de Lie ya que toda transformación de Möbius es un biholomorfismo y el conjunto suyacente del grupo G , que es $\hat{\mathbb{C}}$, tiene estructura de variedad diferenciable.

Este ejemplo es de un caracter general y relaciona el espacio de todos los vectores tangentes de una variedad.

Ejemplo 5.2.6. Sea X una variedad diferenciable, TX la variedad de los vectores tangentes de X , que es un fibrado vectorial sobre X . La correspondencia $T : V \longrightarrow V$ se puede extender a un funtor covariante entre la categoria de las variedades diferenciables y sí misma; si $\varphi : X \longrightarrow X'$, entonces, $T\varphi : TX \longrightarrow TX'$ es la aplicación inducida sobre los vectores tangentes. Además posee la propiedad

$$T(X_1 \times X_2) \cong TX_1 \times TX_2.$$

Sea ahora en particular $X = G$ un grupo de Lie. La multiplicación $\eta_1 : G \times G \longrightarrow G$ en G induce una aplicación en TG :

$$T(G \times G) \xrightarrow{T(\eta_1)} TG,$$

con $TG \times TX = T(G \times G)$. Es inmediato que $T(\eta_1)$ es efectivamente un producto, por lo cual TG es un grupo, y más aún, un grupo de Lie, pues $T(\eta_1)$ resulta analítica, y análogamente para la inversión.

Por ejemplo, la asociatividad de $T(\eta_1)$ se sigue de la conmutabilidad de

$$\begin{array}{ccc} TG \times TG \times TG & \xrightarrow{T^*} & TG \times TG \\ \downarrow T(\eta_1 \times Id_{TG}) & & \downarrow T(\eta_1) \\ TG \times TG & \xrightarrow{T(\eta_1)} & TG \end{array}$$

con $T(\eta_1 \times Id_{TG}) = T^*$, lo cual es consecuencia del carácter funtorial de T y del hecho $TG \times TG = T(G \times G)$. Las demás propiedades de grupo se prueban análogamente.

Con la siguiente propiedad podemos contruir más ejemplos de grupos de Lie.

Proposición 5.2.1. Sean G_1 y G_2 grupos de Lie. Entonces $G = G_1 \times G_2$, con el producto $(x, y) \cdot (x, y) = (x \cdot x, y \cdot y)$ y el inverso dado por $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$ es un grupo de Lie.

Demostración. Se sigue de que como el conjunto subyacente de G_1 y G_2 tiene una estructura de variedad diferenciable entonces el producto cartesiano con las estructuras diferenciables de cada una, es una estructura diferenciable para G y de la misma manera como el producto y la inversión de cada grupo son diferenciables se sigue que el producto y la inversión en el grupo producto también es diferenciable. $\square$

Definamos cuándo un subconjunto de un grupo de Lie es también un grupo de Lie.

Definición 5.2.2. Llamaremos subgrupo de Lie a toda subvariedad de un grupo de Lie que sea subgrupo.

El siguiente teorema es un criterio para saber cuándo un subgrupo de un grupo de Lie es un grupo de Lie.

Teorema 5.2.2. Sea G un grupo de Lie y $H < G$ un subgrupo que es a la vez una subvariedad. Entonces H con esta estructura de variedad y de grupo es un grupo de Lie.

Demostración. Veamos que la función $\mu : H \times H \rightarrow H$ dada por $\mu(h, j) = hj^{-1}$ es diferenciable. La idea es utilizar la función inclusión, fijémonos en el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ \downarrow i_{H \times H} & & \downarrow i_H \\ G \times G & \xrightarrow{\eta_3} & G \end{array}$$

por lo tanto tenemos que μ es diferenciable, ya que $\mu = i_{H \times H} \circ \eta_3 \circ i_H^{-1}$ $\square$.

Ejemplifiquemos este hecho.

Ejemplo 5.2.7. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ y que también tiene estructura de variedad diferenciable, por tanto es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.2.8. $O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : XX^T = Id\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo y a la vez una subvariedad diferenciable de $GL(n, \mathbb{R})$ (a los elementos de $O(n, \mathbb{R})$ se les conoce como matrices ortogonales), luego es un grupo de Lie. Este grupo es conocido como el grupo ortogonal de dimensión n , y que además posee un subgrupo propio invariante formado por todas las matrices ortogonales con determinante igual a 1 el cual denotamos por $SO(n, \mathbb{R})$

Dado que los grupos de Lie poseen una estructura de variedad diferenciable, tenemos que algunos resultados que se mencionaron para variedades se cumplen también para los grupos de Lie como el siguiente resultado.

Teorema 5.2.3. Sea $f : G \rightarrow V$ diferenciable, con G grupo de Lie. Si para un $y \in V$, $f^{-1}(y)$ es subgrupo, entonces es grupo de Lie de dimensión $\dim G - \dim \text{Im}(f)$.

Demostración. Por el teorema 5.1.4 tenemos que es una variedad de esa dimensión, por tanto subgrupo de Lie y por el teorema anterior es un grupo de Lie. $\square$

Sea G un grupo de Lie. En G tenemos definidas las siguientes aplicaciones naturales;

1. Inversión (η_2). La aplicación inversión $\eta_2 : G \rightarrow G$, es definida por $g \mapsto g^{-1}$. Es claro que η_2 , es una aplicación diferenciable y que $\eta_2^{-1} = \eta_2$, esto es, $\eta_2 \circ \eta_2 = Id$.
2. Traslación por la izquierda (respectivamente, por la derecha) para un elemento fijo $a \in G$ son las aplicaciones $L_a, R_a : G \rightarrow G$ definidas por $L_a(g) = ag$ y $R_a(g) = ga$. Es claro que L_a y R_a son aplicaciones diferenciables. Además, $L_a^{-1}(g) = a^{-1}g = L_{a^{-1}}(g)$, $R_a^{-1}(g) = ga^{-1} = R_{a^{-1}}(g)$, luego L_a y R_a son difeomorfismos. Ahora, notemos que $L_g \circ L_h = L_{gh}$, $R_g \circ R_h = R_{hg}$, $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ y $A_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ es un difeomorfismo, tal que $A_g(x) = gxg^{-1}$, $A_g(xy) = A_g(x)A_g(y)$, A_g es llamado automorfismo interior.

Entonces con lo dicho arriba podemos definir lo que entenderemos como un morfismo de grupos de Lie.

Definición 5.2.3. Sean G_1 y G_2 grupos de Lie y $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos. Decimos que φ es un homomorfismo de grupos de Lie o simplemente un homomorfismo si φ es diferenciable.

Como ejemplos tenemos:

Ejemplo 5.2.9. $G_1 = GL(n, \mathbb{R})$, $G_2 = \mathbb{R} - \{0\} = GL(1, \mathbb{R})$ y $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ definido por $\psi(X) = \det(X)$. Tenemos $\ker(\psi) = \{X \in G_1 \mid \psi(X) = \det(X) = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie. Más aún si tomamos $G_1 = GL(2, \mathbb{C})$, $G_2 = \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ y $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ dada por $\varphi(X) = T_X(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ también es un homomorfismo de grupos de Lie (ya que $T_X(z)$ es holomorfa con derivada distinta de cero; véase capítulo 1).

Ejemplo 5.2.10. $G_1 = (\mathbb{R}, +)$, $G_2 = (\mathbb{S}^1, \cdot)$ y $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$, $\phi(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Tenemos $\ker(\phi) = \{t \in G_1 \mid \phi(t) = 1\} = \mathbb{Z}$, es un grupo de Lie discreto.

Ejemplo 5.2.11. Sea V un espacio vectorial n -dimensional sobre $\mathbb{R}$. Cada base de V define un isomorfismo de grupos $GL(V) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, el cual permite definir en el grupo $GL(V)$ de automorfismos de V una estructura de grupo de Lie. Tal estructura es independiente de la base elegida, puesto que dos isomorfismos tales sólo difieren por un automorfismo (interior, es decir, automorfismos de la forma $A_g(h) = L_g \circ R_g(h) = ghg^{-1}$) de $GL(n, \mathbb{R})$

Ejemplo 5.2.12. Sea G un grupo de Lie, TG es fibrado tangente de los vectores tangentes, y G_e el espacio tangente en la identidad e de G .

Dando a G_e la estructura de grupo de Lie definido por la adición, la inyección natural (o sea la inclusión) $j : G_e \longrightarrow TG$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Asimismo lo es la proyección natural $P : TG \longrightarrow G$, que a cada vector tangente le asigna su origen.

Notar que en los ejemplos anteriores, el núcleo del homomorfismo es un grupo de Lie, por lo que enunciamos el siguiente teorema, con el cual concluimos esta sección.

Teorema 5.2.4. Sea $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces la imagen de ϕ es constante y $\ker(\phi)$ es una subvariedad cerrada, con $\dim(\ker(\phi)) = \dim(G_1) - \dim(\text{Im}(\phi))$.

Demostración. Sea $a \in G_1$ y sea $b = \phi(a)$. Denotemos por e_1 y e_2 los elementos neutros de G_1 y G_2 , respectivamente. Entonces $\phi(g) = \phi(aa^{-1}g) = \phi(a)\phi(a^{-1}g) = b\phi(L_{a^{-1}}(g)) = L_b \circ \phi \circ L_{a^{-1}}(g)$, luego para todo $a \in G_1$ se tiene $\phi(a) = \phi(aa^{-1}a) = L_b \circ \phi \circ L_{a^{-1}}(a)$ y

$$\begin{aligned} d\phi(a) &= d(L_b \circ \phi \circ L_{a^{-1}})(a) \\ &= dL_b(\phi(L_{a^{-1}}(a))) \circ d\phi(L_{a^{-1}}(a)) \circ dL_{a^{-1}}(a) \\ &= dL_b(\phi(e_1)) \circ d\phi(e_1) \circ dL_{a^{-1}}(a) \\ &= dL_b(e_2) \circ d\phi(e_1) \circ dL_{a^{-1}}(a) \end{aligned}$$

Como $L_{a^{-1}}$ y L_b son difeomorfismos, la imagen de ϕ en a y la imagen de ϕ en e_1 son iguales. Por lo tanto $\text{Im}(\phi)$ es constante y por el Teorema del 5.1.4, $\ker(\phi) = \phi^{-1}(e_2)$ es una subvariedad, con $\dim(\ker(\phi)) = \dim(G_1) - \dim(\text{Im}(\phi))$. Como $\ker(\phi)$ es un subgrupo de G_1 , se tiene que es un grupo de Lie. $\square$

5.3. G-variedades

En lo que sigue, G designará a un grupo de Lie, y X a una variedad diferenciable.

Definición 5.3.1. Sea G un grupo de Lie. Una G -variedad X es una variedad diferenciable tal que G actúa en X en el sentido de la definición 3.1.1, además la acción $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ es diferenciable. El par (G, X) se llama grupo de Lie de transformaciones.

Entonces G actúa en X donde X es variedad diferenciable y G un grupo de Lie; en la definición se exige que la acción sea diferenciable.

Ejemplo 5.3.1. Sean $G = \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ y $X = \hat{\mathbb{C}}$, dado que G actúa en X y como X es una variedad. Entonces X es una G -variedad.

De manera análoga tenemos que:

$\alpha_{\mathbb{C}} : \text{Aut}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida como $\alpha(\gamma, z) = \gamma(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ es una acción y como $\mathbb{C}$ es variedad se sigue que $\mathbb{C}$ es una $\text{Aut}(\mathbb{C})$ -variedad.

De igual manera como $\mathbb{H}$ es una variedad y $\alpha_{\mathbb{H}} : \text{Aut}(\mathbb{H}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, definida como $\alpha(\eta, z) = \eta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es una acción, se sigue que $\mathbb{H}$ también es una G -variedad con $G = \text{Aut}(\mathbb{C})$. De la misma manera tenemos que Δ es una G -variedad, donde $G = \text{Aut}(\Delta)$.

Sea ahora X una G -variedad, X' una G' -variedad, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie.

Definición 5.3.2. Una aplicación $\psi : X \longrightarrow X'$ se llama ρ -equivariante con respecto al homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$, si es una aplicación $\psi : X \longrightarrow X'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X' \\ \tau_g \downarrow & & \downarrow \tau_{\rho(g)} \\ X & \xrightarrow{\psi} & X' \end{array}$$

conmuta para todo $g \in G$ y donde $\tau_g, \tau_{\rho(g)}$ son funciones transición en el sentido de 3.1.4, y además es diferenciable. En particular, si $G' = G$ y $\rho = \text{Id}_G$, diremos simplemente que ψ es equivariante.

Los siguientes ejemplos son de caracter general pero muy ilustrativos.

Ejemplo 5.3.2. Las $\mathbb{R}$ -variedades son de fundamental importancia en la teoría de G -variedades, y reciben el nombre especial de **grupos a un parámetro de transformaciones**.

Ejemplo 5.3.3. La acción de un grupo de Lie G sobre su variedad subyacente por traslación a izquierda convierte a G en una G -variedad. Lo mismo ocurre con la acción de G sobre G definida por automorfismos interiores, es decir, automorfismos de la forma $A_g(h) = L_g \circ R_g(h) = ghg^{-1}$.

Ejemplo 5.3.4. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $GL(V)$ es un grupo de Lie. Sea G un grupo de Lie y $\tau : G \longrightarrow GL(V)$ un homomorfismo. Llamaremos a τ una representación de G en V , cuando la aplicación $G \times V \longrightarrow V$ es diferenciable.

Ejemplo 5.3.5. Sea X una G -variedad y T el funtor que asigna a cada variedad diferenciable su fibrado tangente. Puesto que T conserva productos directos, TX es una TG -variedad, y como además G es subgrupo de TG (véase ejemplo 5.2.12), TX es una G -variedad.

Este hecho justifica muchas notaciones clásicas en la teoría de grupo de transformaciones que a primera vista aparecen como excesivamente abreviadas.

Ejemplo 5.3.6. Sean G y G' grupos de Lie y G' una G -variedad con respecto a un homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \text{Aut}(G')$. entonces el producto semidirecto $G' \times_{\tau_g} G$ definido en 3.1.4 es un grupo de Lie. Esto generaliza el ejemplo 5.2.6, que corresponde a la operación trivial de G en G' .

Culminamos este capítulo con un teorema que relaciona las G -variedades con su grupo G y el estabilizador de un punto

Teorema 5.3.1. Sea M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie que actúa transitivamente por difeomorfismos en M . Fijemos $x \in M$ y consideremos el grupo de isotropía $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$. Entonces M y G/G_x son difeomorfas

Demostración. Sea $\varphi : G \rightarrow M$ la aplicación definida por $\varphi(g) = g \cdot x$. φ es diferenciable y se factoriza a través de G/G_x a una aplicación, también diferenciable, f ; es decir $f : G/G_x \rightarrow M$, $[g] \mapsto g \cdot x$. Como la acción de G es transitiva, implica que f es sobre. El lema de Sard¹ implica entonces que existe al menos un valor regular en todos los puntos de G/G_x . Así f es biyectiva sobre y abierta, por lo tanto un difeomorfismo. $\square$

Para relacionar este teorema con lo estudiado nos fijamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3.7. Si $G = SL(2, \mathbb{R})$, sabemos por lo hecho en el capítulo 1 que G actúa en $\mathbb{H}$.

Para probar que la acción es transitiva basta ver que dado cualquier $z \in \mathbb{H}$ existe un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot i = z$. Consideremos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ entonces $g \cdot i = a^2i + ab$ es claro que si $z = x + iy$ podemos tomar $a = \sqrt{x}$ y $b = \frac{x}{a}$.

Calculemos finalmente la isotropía en i . Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = i$ entonces $ai + b = di - c$ por lo tanto $a = d$ y $b = -c$. El grupo de isotropía es $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$ el cual es isomorfo a $SO(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto

$$\mathbb{H} \cong SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R}).$$

Notese que todo este material es introductorio y se trató de utilizar todo lo que se vió en la tesis, además de que es una buena motivación para continuar estudiando estos temas con más detalle y así poder entender de manera más precisa la gran ventaja de estudiar grupos con una estructura diferenciable la cual es que las condiciones de invariancia ante la acción del grupo, que generalmente son no lineales y muy complicadas, se pueden reemplazar por la condición de anular a los campos vectoriales generados por la acción. De esta manera el problema se linealiza y éste se simplifica notablemente.

¹**Lema de Sard.** El conjunto de valores regulares de una aplicación diferenciable $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es denso dondequiera.

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors.: *Complex Analysis*. McGraw-Hill Third Edition, 1966.
- [2] T. Needham.: *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1997.
- [3] A. F. Beardon.: *The geometry of discrete groups*. SpringerVerlag, 1983.
- [4] B. Maskit.: *Kleinian groups*. SpringerVerlag, 1988.
- [5] M. Hoffman y J. E. Marsden.: *Análisis Básico de variable compleja*. México Trillas, 1996.
- [6] L. V. Ahlfors y L. Sario.: *Riemann surfaces*. Princeton Math. Ser. No. 26, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [7] J. W. Anderson.: *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 1999.
- [8] A. L. Orive.: *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Facultad de Ciencias UNAM, 2005.
- [9] Bruce P. Palka.: *An introduction to Complex Function Theory*. SpringerVerlag, 1991.
- [10] L. R. Ford.: *Automorphic functions*. Chelsea, New York, 1951.
- [11] C. Chevalley.: *Theory of Lie Groups*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946.
- [12] L. Ahlfors.: *Finitely generated Kleinian groups*. Amer. J. Math. 86 (1964), 413-429.
- [13] T. M. Apostol.: *Análisis matemático*. Editorial Reverté, 1976
- [14] Joseph J. Rotman.: *An introduction to algebraic topology*. SpringerVerlag, 1991.