Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Estabilidad de superficies de curvatura media constante en el espacio euclidiano

Tesis que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

ANGEL AUGUSTO CAMACHO ACOSTA

DIRECTORES DE TESIS:
DR. AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO (FCFM, BUAP)
DR. JUAN MIGUEL RUIZ ZEPEDA (ENES, UNAM León)
DRA. ARELI VÁZQUEZ JUÁREZ (ENES, UNAM León)

Puebla, Pue. Enero, 2022

A mi familia: María Luisa, José Luis,
Tayde y Gonzalo.
Y a mi tío Miguel,
que aunque no le hubiera entendido,
le habría gustado ver esto.

Índice general

Agradecimientos

La realización de esta obra habría sido imposible sin el invaluable apoyo de tantos y tantos que siempre han estado a mi lado desde el primer instante, en los momentos duros, en las horas de incertidumbre, cuando el desánimo me alcanzaba y el deseo de dar marcha atrás se apoderaba de mí. Es necesario agradecer por darme alivio en el tormento, devolverme la esperanza, motivarme a luchar por mis aspiraciones y acompañarme en esta travesía.

A ti, mi Señor, por estar conmigo en cada paso que di.

A mi madre, María Luisa, por su amor incondicional, por todas las veces que me escuchó, por todas las veces que lloró mis tristezas y se alegró de mis alegrías.

A mi padre, José Luis, por su sacrificio diario durante tantos años, que ahora que soy mayor entiendo más, por estar cerca aun estando lejos.

A mi hermana, Tayde, por estar pendiente de mí, por las innumerables veces que me ha ayudado de mil maneras diferentes.

A mi hermano, Gonzalo, por ser el primer amigo y rival que tuve, por las risas, los juegos, los retos, la complicidad y el apoyo.

A Sarai, que veo mientras escribo estas palabras. A ti te dedico especialmente esto, pues sin tu compañía, apoyo y amor sin reservas esto no sería posible. Gracias por creer en mí más de lo que yo mismo creo, por alentarme a seguir mis sueños, por las centenas de noches en vela, construyendo pasito a pasito el camino para alcanzar nuestras metas.

A Alethia, mi persona, por haberme entendido como nadie desde el primer momento, por compartir conmigo quien eres y aceptarme tal cual soy, por apaciguar mis demonios y mostrarme tu maravillosa mente y corazón. *Owfobe wojvyb xelfzbdyohte ly uytz xehdyje. Do kvyobe.*

A Diana, por ser la persona más especial que conocí. A Dalay, por ser mi hermano de otra madre desde el día uno. A Marycarmen, por ser mi amiga de toda la vida. A Danny, por ser el primer mentor que me guió. A Daniel, por esta amistad que se ha preservado por años. A Fredy, por las charlas profundas y el cariño inconmensurable. A Gustavo, por ser mi primer verdadero amigo. A Karina, por la confianza vertida en mí y por haber compartido tanto.

A mi tío Miguel Angel, quien me ha pasado su nombre. Aunque ya no está aquí, en gran parte esto es gracias a él. A mi abuelita Tayde, por cuidarme desde mis primeros días. Sé que aún lo haces. A mis abuelitas Mary y Gloria, por darme su cariño sin igual, que aún llevo en el corazón. A mi abuelito Augusto, cuyo nombre e ingenio llevo. Aunque cuando llegué al mundo ya se había ido, estoy seguro le encantaría saber que me convertí en matemático. A mi abuelito Paulino, pues yo sé lo orgulloso que estaría de verme graduado. A mi tía Lucy, que estuvo cerca en la distancia y aún lo está aunque ya no esté. A Marifer, mi prima de sangre y mi gemela de mente, corazón y personalidad, por ser tan iguales y distintos a la vez. A Sara, con quien hubo diversión y desastre desde niños, pero sobre todo felicidad. A Ruth, quien se ganó mi corazón desde su primer día de vida. A toda mi familia por acompañarme de cerca o de lejos.

A Cynthia Michel porque más que mi colega ha sido mi amiga y mi apoyo incondicional. A Diana Laura, que compartimos juntos tantas cosas durante tantos años que sería injusto no darle las gracias por tanto. A Uriel, a quien siempre veré como el niño tan especial que llegó a la Comunidad, y de quien siempre me sentiré orgulloso. A Jesús Omar, quien primero fue mi aprendiz, y se ha convertido en mi amigo y colega. A Isyoel, a quien he visto madurar y perder el miedo. A Adriana, que me adoptó como su “apá” y desde entonces tiene mi cariño y aprecio. A Esther, que pese al poco tiempo de conocernos ya se ha vuelto importante por estar siempre pendiente. A David, el Master, por las atenciones, las recomendaciones y llenar de música la vida. A Brenda, por los años y la conexión bonita que se ha dado tras tantos sucesos. A Martín, pues incluso antes de la Comunidad ya era mi amigo, y verlo crecer me trae nostalgia y alegría. A Yahir, que a pesar de las adversidades ha seguido adelante, y por ello es de mis mayores ejemplos. A Toño, con quien las risas no han faltado y donde siempre hay apoyo. A Mónica, que siempre me sorprende, de quien aprecio todo el cariño que me ha llegado a dar. A Kevin, pues siempre es atento, da lo mejor de sí y está dispuesto a ayudar. A Gabriel, que me ha hecho recordar el entusiasmo y el compromiso de cuando empecé mi servicio. A Beto, quien es un ejemplo de perseverancia y a quien considero de corazón el mejor de todos. A Adrianna, a quien no puedo evitar ver como la niña pequeña y alegre que fue, que siempre motivada busca hacer las cosas cada vez mejor. A Jaquelin, Jesica, Fernando, Karen, Silvia, Sebas, Luz, Aide, Axel, Carlo, Esme, Carlos Fernando, Marti, Fercho, Pancho, Mariana, Brandon, Lupita, Juan Carlos, David, Christopher y a toda la Comunidad de Monaguillos presente y pasada, pues son mi segunda familia.

A Mireya, por compartir el camino y tantos ideales conmigo. A Baruch, porque su brillantez, humildad, carisma y amistad no tienen comparación. A Wendy, mi compa, por el aprecio, consejos, charlas y aventuras. Por siempre brindarme otra forma de ver las cosas. A Itzel, por orientarme y motivarme, y por las charlas cada vez más nuestras. A Alba, por la compañía en los momentos en los que me sentí más solo. A Nava, pues su cariño es el Sol dorado de las tardes. A Catalina, por todas las veces en que me sacó del apuro económico y de la pesadez emocional. A Carlos Uriel, por renovar la pasión por la carrera a través de su propia pasión. A José Antonio, por ser el papá del grupo “Pilineos” y demostrar que un amigo puede venir de cualquier lado. A Cristina, porque su amabilidad palia el dolor del mundo. A Paulina, por soportarme y ser un lugar de calma para mí. A Alfonso, por compartir el amor al arte y

enseñarme tanto. A Daniela, que siempre me motivó y me recordó que la constancia y el trabajo duro tarde o temprano rinde frutos. A Estela, que pese a que no nos vemos mucho, siempre ha estado ahí. A “Los pistolas” por todas las aventuras que hicieron de estos años algo digno de rememorar.

A Maximino, pues sin él, el bachillerato no habría sido lo mismo. A Jeovanny, por tener siempre la iniciativa de hacer mejor las cosas. A Eduardo, por compartir conmigo el amor al verso. A Erica, pues su amistad con los años se ha vuelto algo único. A Arturo, por ser mi mano derecha en aquellos años. A Manuel, por ser mi amigo/competencia en aquellos días. A Elena, por ser la primera que me mostró otros mundos. A Erick, por enseñarme la pasión por el futbol. A todos mis amigos, que siempre han sido mi soporte.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por la oportunidad de estudiar en la que siempre será mi *alma máter*. Al Dr. Iván Martínez Ruíz, quien siempre me abrió las puertas y me ayudó a confiar más en mi camino. Al Mtro. Manuel Ibarra Contreras, pues despertó en mí el interés en la carrera que me faltaba. Al Dr. Agustín Contreras Carreto, quien siempre se esforzó por dar la mejor y más amena clase, y por todo el apoyo para presentar este trabajo. A la Dra. Raquel del Carmen Perales Aguilar, por aceptar revisar mi trabajo y por todas sus observaciones para pulirlo. A la Dra. Areli Vázquez Juárez y al Dr. Juan Miguel Ruiz Zepeda, por ser como mis padres de licenciatura, por su infinita paciencia, invaluable apoyo, por enseñarme y explicarme tanto y por no perder la fe en mí. A la Universidad Nacional Autónoma de México, pues este trabajo fue realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IA106918.

A tantas personas que Dios ha puesto en mi camino, les estoy eternamente agradecido.

Introducción

El concepto de curvatura fue abordado de manera implícita por Gottfried Leibniz, cuando su obra *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* vio la luz en 1686, en la cual presenta la *circunferencia osculatriz*, noción que Johannes Kepler vagamente había sugerido usar ya tres siglos atrás. Más tarde, en el siglo XVIII, Leonhard Euler introduce el concepto de *curvatura* de una curva en un punto como la velocidad de variación del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto dado con una recta de referencia. Fue Euler quien en 1760 establece las bases de la geometría para las superficies. Su método de estudio de la curvatura de una superficie consistió en hacer cortes seccionales, con planos normales a la superficie que pasaran por un punto dado. En el mismo trabajo, Euler se percata de que existe una dirección en la cual la curvatura normal alcanza su máximo valor, y otro donde alcanza su valor mínimo, ortogonales entre sí. A tales direcciones son a las que actualmente se les conoce como *direcciones principales*, y a la curvatura que la superficie tiene en esas direcciones como *curvaturas principales*. Luego, para la segunda década del siglo XIX, Sophie Germain en sus trabajos sobre elasticidad menciona por primera vez el concepto de *curvatura media* para el caso de la esfera, definiéndola como la semisuma de las curvaturas principales. Aunque el trabajo de Germain fue ignorado en su tiempo, el mismo Carl F. Gauss reconoció la importancia de éste.

El estudio particular de superficies de *curvatura media constante* también ha sido de gran relevancia. En los inicios del siglo XIX, Charles Delaunay identificó todas las superficies de revolución que poseían esta propiedad. Más adelante, en el siglo XX, Aleksandr D. Aleksandrov demostró que la única superficie regular de curvatura media constante, cerrada, sin frontera ni autointersecciones es justamente la esfera.

Por otro lado, el concepto de estabilidad es más moderno. Tal concepto evoca al área mínima que puede tener una superficie que encierra un volumen determinado. Es común hallar superficies óptimas en la naturaleza, en el sentido en que minimizan área para volúmenes dados, y las formas que poseen satisfacen condiciones de estabilidad. Por ejemplo, las películas de jabón producidas por un arillo de alambre. El cuerpo jabonoso adquiere forma cilíndrica siempre, incluso si el arillo fuera de otra forma geométrica (cuadrada, triangular, poligonal, etc.). Particularmente las burbujas siempre serán de forma esférica. Por eso mismo la naturaleza tiende a adoptar estas formas, desde las estrellas y planetas hasta los organismos unicelulares.

Una pregunta que tiene que ver con ambos conceptos es qué pasa con las superficies que son estables y de curvatura media constante. En esta tesis presentaremos una demostración del Teorema de Barbosa-Do Carmo que asegura lo siguiente: *La única superficie regular orientable, compacta, conexa y de curvatura media constante que es estable es la esfera* $\mathbb{S}^n$.

El contenido del trabajo consta de cuatro capítulos: El capítulo 1 presenta conceptos básicos sobre la Geometría Diferencial, como son: *superficie regular*, *superficies parametrizadas*, *plano tangente* y *orientabilidad*, así como resultados referentes a la manera en que se inducen métricas en estos espacios, a través de la *primera* y *segunda forma fundamental*. El capítulo 2 está dedicado a presentar la definición de *variación* y *variación normales*, con lo cual se definen las funciones de área y volumen, de las cuales se estudiarán sus variaciones. El capítulo 3 es el capítulo central de este trabajo, ya que en él se presenta la definición de *estabilidad* y se desarrollan herramientas con el objetivo de dar la demostración prometida. Finalmente, el capítulo 4 aborda la generalización a dimensiones mayores que dos, de todos los conceptos e ideas expuestas a lo largo del documento.

Capítulo 1

Superficies regulares

1.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo, daremos una breve introducción a las llamadas "superficies regulares". De manera intuitiva, una superficie regular es un conjunto en el espacio euclidiano, sin picos, el cual es posible "planchar"por partes para hacerlo más manejable. Esta idea de planchar los pedazos de la superficie significa que cada uno puede ser transformado en un pedazo de $\mathbb{R}^2$, sin cortarlo ni pegarlo. Un ejemplo en la vida cotidiana puede ser el de un globo terráqueo que quiere ser representado en una hoja de papel; cada una de sus secciones es llevada a una sección particular de la hoja. Naturalmente, vemos cómo tales secciones contienen esencialmente la misma información de la superficie terrestre, salvo por la forma de los continentes, que es obligada a modificarse. De manera formal, una superficie regular se define de la siguiente manera (ver [3] pág. 54):

Definición 1.1.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. S es una **superficie regular** si para cada punto $p \in S$, existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^2$ y $V \subset \mathbb{R}^3$ y una función $\varphi : U \to V \cap S$ tal que:*

i) *φ es diferenciable en U*

ii) *φ es un homeomorfismo*

iii) *Para cada $x \in U$, la derivada de φ en x es inyectiva. (Condición de regularidad)*

Nota: *A φ se le llama* ***parametrización local alrededor de*** *p.*

Salvo que se indique lo contrario, para una parametrización local φ alrededor de un punto p, denotaremos a $\varphi^{-1}(p)$ con la letra q y a la matriz de derivadas parciales de φ en q como $D\varphi(q)$.

Recordemos que para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe una única transformación lineal asociada con las bases canónicas, $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Asimismo, la matriz $D\varphi(q)$ tiene asociada una transformación lineal que denotaremos como $D_\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Además, denotaremos como $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ o φ_u al vector de derivadas parciales de φ respecto de u, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Observación:

1. La condición *iii)* es equivalente a que la matriz de derivadas parciales de φ sea de rango 2.

La condición de regularidad nos sirve para asegurar que nuestra superficie no tiene "picos" y que se preserva "suave" en toda su extensión. La observación anterior nos permite dar una interpretación geométrica de este hecho:
Ya que la matriz de derivadas parciales de φ es de rango dos, sus vectores columna son linealmente independientes, por lo que podemos pensar en un vector ortogonal a ambos, y en consecuencia, en un único vector normal al plano (salvo múltiplos de éste) generado por dichos vectores columna. Sin la condición de regularidad, en caso de ser de rango uno, se tiene un único vector columna. Un único vector en el espacio

posee una infinidad de vectores ortogonales a él, y cada vector ortogonal será normal a un plano que contenga a nuestro vector original; en caso de que el rango sea 0, estaríamos hablando de un único punto en el espacio, a saber, el origen $0_{\mathbb{R}^3}$, el cual por sí solo no nos aporta información en el estudio de la superficie en cuestión.
Para nuestro estudio, será indispensable poder garantizar que en cada punto de nuestra superficie, exista un único plano generado por los vectores columna de la matriz de derivadas parciales de φ.

Ejemplo 1.1.1.

1. *Sean* $P_1 = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $P_2 = (b_1, b_2, b_3)$ *dos vectores no paralelos en* $\mathbb{R}^3$ *y* $P_0 = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ *un punto. Definimos el plano generado por* P_0*,* P_1 *y* P_2 *como*

$$\mathcal{P} := \left\{ P \in \mathbb{R}^3 : \ \textit{existen } u, v \in \mathbb{R} \textit{ tales que } P = P_0 + uP_1 + vP_2 \right\}.$$

Ya que P_1 *y* P_2 *no son paralelos,*

$$P_1 \times P_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Entonces alguna coordenada es distinta de cero, digamos, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$*.*
Veamos que $\mathcal{P}$ *es una superficie regular:*
Sea $P \in \mathcal{P}$*. Definamos* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{P}$ *como* $\varphi(u, v) = P_0 + uP_1 + vP_2$*.*

i) φ *es diferenciable, pues*

$$\varphi(u, v) = P_0 + uP_1 + vP_2 = \begin{pmatrix} p_1 + a_1u + b_1v \\ p_2 + a_2u + b_2v \\ p_3 + a_3u + b_3v \end{pmatrix}$$

y cada coordenada es una función diferenciable.

ii.i) *Ya que φ es diferenciable, es continua.*

ii.ii.i) *Sean $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$, es decir,*

$$\begin{pmatrix} p_1 + a_1u_1 + b_1v_1 \\ p_2 + a_2u_1 + b_2v_1 \\ p_3 + a_3u_1 + b_3v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + a_1u_2 + b_1v_2 \\ p_2 + a_2u_2 + b_2v_2 \\ p_3 + a_3u_2 + b_3v_2 \end{pmatrix}.$$

Tomando las igualdades entre las primeras dos coordenadas, cancelando p_1 y p_2, pasando al lado izquierdo los segundos miembros de las igualdades y factorizando, tenemos

$$\begin{cases} a_1(u_1 - u_2) + b_1(v_1 - v_2) = 0 \\ a_2(u_1 - u_2) + b_2(v_1 - v_2) = 0 \end{cases}.$$

Luego, multiplicando la primera ecuación por a_2, la segunda por a_1 y restando la primera de la segunda, se obtiene que

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(v_1 - v_2) = 0,$$

por lo que $v_1 - v_2 = 0$, o sea, $v_1 = v_2$. Además, como a_1 y a_2 no son ambos cero, se deduce que $u_1 = u_2$. Por tanto, φ es inyectiva.

ii.ii.ii) *Sea $Q \in \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}$. Entonces existen $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $Q = P_0 + uP_1 + vP_2$. Así, $\varphi(u, v) = Q$, por lo que φ es sobreyectiva.*
Por lo tanto, φ es biyectiva.

ii.iii) *Definamos $\varphi^{-1} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ como*

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{b_2(x - p_1) - b_1(y - p_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2(x - p_1) - a_1(y - p_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \right).$$

Entonces $\varphi^{-1}(\varphi(u,v)) = (u,v)$, $\varphi(\varphi^{-1}(x,y,z)) = (x,y,z)$ *y* φ^{-1} *es continua.*

Se concluye que φ *es un homeomorfismo.*

iii) *Notemos que* $\varphi_u(u,v) = (a_1,a_2,a_3)$ *y* $\varphi_v(u,v) = (b_1,b_2,b_3)$. *Luego,*

$$D\varphi(q) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Si $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2$ *son tales que* $D_\varphi(p)(u_1,v_1) = D_\varphi(p)(u_2,v_2)$, *es decir, que*

$$\begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1v_1 \\ a_2u_1 + b_2v_1 \\ a_3u_1 + b_3v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u_2 + b_1v_2 \\ a_2u_2 + b_2v_2 \\ a_3u_2 + b_3v_2 \end{pmatrix},$$

entonces por el procedimiento descrito en el inciso (ii.ii.i) se tiene que $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$, *por lo que* $D_\varphi(p)$ *es inyectiva.*

Se concluye que $\mathcal{P}$ *es una superficie regular.* $\lhd$

2. *Definimos la* ***esfera unitaria*** *como el conjunto*

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Sea $\varphi_1 : (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \cap \mathbb{S}^2$ *tal que*

$$\varphi_1(u,v) = (sen(u)sen(v), cos(u)sen(v), cos(v)).$$

i) φ_1 *es diferenciable, ya que sus funciones coordenadas lo son.*

ii.i) φ_1 *es continua.*

ii.ii.i) *Sean* $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in (0,2\pi) \times (0,\pi)$ *tales que* $\varphi_1(u_1,v_1) = \varphi_1(u_2,v_2)$, *es* *decir,*

$$\begin{pmatrix} sen(u_1)sen(v_1) \\ cos(u_1)sen(v_1) \\ cos(v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen(u_2)sen(v_2) \\ cos(u_2)sen(v_2) \\ cos(v_2) \end{pmatrix}.$$

Ya que $cos(v_1) = cos(v_2)$ *y el coseno es una función inyectiva en* $(0, \pi)$*, se obtiene que* $v_1 = v_2$*. Además, ya que* $sen(v) \neq 0$ *en* $(0, \pi)$*, se tiene que* $sen(u_1) = sen(u_2)$*, por lo que* $u_2 = \pi - u_1$ *o* $u_2 = 3\pi - u_1$ *o bien* $u_2 = u_1$*, y* $cos(u_1) = cos(u_2)$*, de donde* $u_2 = 2\pi - u_1$*.*

Caso I: *Si* $u_2 = \pi - u_1$ *y* $u_2 = 2\pi - u_1$*, entonces* $1 = 2$*, lo que es una contradicción.*

Caso II: *Si* $u_2 = 3\pi - u_1$ *y* $u_2 = 2\pi - u_1$*, entonces* $2 = 3$*, nuevamente una contradicción.*

Así, el resto de los casos indica que $u_1 = u_2$ *y por lo tanto,* φ_1 *es inyectiva.*

ii.ii.ii) φ_1 *no es sobreyectiva, pues para* $(0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ *no existe* $v \in (0, \pi)$ *tal que* $cos(v) = 1$*. Sin embargo,* φ_1 *es sobreyectiva en* $Im(\varphi_1)$*.*

Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : (x = 0 \Rightarrow y < 0)\}$*. Veremos que* $Im(\varphi_1) = C$*:*

ii.ii.ii.i) *Sea* $(x, y, z) \in Im(\varphi_1)$*. Entonces existe* $(u, v) \in dom(\varphi_1)$ *tal que* $\varphi_1(u, v) = (x, y, z)$*, es decir,* $x = sen(u)sen(v)$*,* $y = cos(u)sen(v)$ *y* $z = cos(v)$*. Luego,* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *y si* $x = 0$*, dado que para cada* v*,* $sen(v) \neq 0$*, se tiene que* $sen(u) = 0$*, por lo que* $u = \pi$*. Así,* $y = cos(\pi)sen(v) = -sen(v) < 0$ *y por tanto,* $(x, y, z) \in C$*, por lo cual* $Im(\varphi_1) \subset C$*.*

ii.ii.ii.ii) *Sea* $(x, y, z) \in C$*. Debido a que* $C \subset \mathbb{S}^2$*, tal punto cumple que*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Caso I: *Si* $x \neq 0$*. Despejando* z *obtenemos que* $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$*. Notemos que* $0 \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} < 1$ *y* $-1 < \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 0$*, por lo que* $-1 < z < 1$*. Entonces existe* $v_0 \in (0, \pi)$ *tal que* $z = cos(v_0)$*.*

Luego, $\|(x,y)\|^2 = x^2+y^2 = 1-cos^2(v_0) = sen^2(v_0)$ *y ya que* $sen(v_0) > 0$, $\|(x,y)\| = sen(v_0)$. *Sea* $k = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1-z^2}$. *Entonces* $\left\|(\frac{x}{k},\frac{y}{k},0)\right\|^2 = \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2} = 1$, *por lo cual existe* $u_0 \in (0,2\pi)$ *tal que* $(\frac{x}{k},\frac{y}{k}) = (sen(u_0), cos(u_0))$, *o bien,* $(x,y) = (ksen(u_0), kcos(u_0)) = (sen(u_0)sen(v_0), cos(u_0)sen(v_0))$. *Entonces, existe* $(u_0,v_0) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$ *tal que*

$$\varphi_1(u_0,v_0) = (sen(u_0)sen(v_0), cos(u_0)sen(v_0), cos(v_0)) = (x,y,z),$$

por lo que $(x,y,z) \in Im(\varphi_1)$.

Caso II: *Si* $x=0$, *entonces* $y^2+z^2=1$, *por lo cual,* $z = \pm\sqrt{1-y^2}$. *Luego, existe* $v_0 \in (0,\pi)$ *tal que* $z = cos(v_0)$. *Ahora, al despejar a* y *tenemos que* $y = \sqrt{1-cos^2(v_0)} = sen(v_0) > 0$. *Entonces, para* $(\pi, v_0) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$, $\varphi_1(\pi,v_0) = (sen(\pi)sen(v_0), cos(\pi)sen(v_0), cos(v_0)) = (0, sen(v_0), cos(v_0)) = (x,y,z)$, *es decir,* $(x,y,z) \in Im(\varphi_1)$.

En ambos casos, se concluye que $C \subset Im(\varphi_1)$. *Por tanto,* $Im(\varphi_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : (x=0 \Rightarrow y<0)\}$.

ii.iii) *Para definir* φ_1^{-1}, *necesitaremos de las siguientes funciones:*

$$arccos_\pi : [-1,1] \to [\pi,2\pi]\,, \quad arcos_\pi(x) = arcos(x)+\pi \quad y$$

$$cos_\pi : [\pi,2\pi] \to [-1,1]\,, \quad cos_\pi(u) = cos(u-\pi).$$

Notemos que cada una es un homeomorfismo, y que son inversas una de la otra. También utilizaremos las siguientes igualdades: para cada $u \in (0,2\pi)$, $sen(u+\pi) = -sen(u)$ *y* $cos(u+\pi) = -cos(u)$.

Definimos $\varphi_1^{-1} : Im(\varphi_1) \to (0,2\pi)\times(0,\pi)$ *como*

$$\varphi_1^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} (arcos\left(\frac{y}{k}\right), arcos(z)), & si \quad 0 \leq y < 1 \\ (arcos_\pi\left(-\frac{y}{k}\right), arcos(z)), & si \quad -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

Entonces, φ_1^{-1} *es inversa continua de* φ_1*, y por tanto,* φ_1 *es un homeomorfismo.*

iii) *La matriz de derivadas parciales de* φ_1 *es:*

$$D\varphi_1(u,v) = \begin{bmatrix} cos(u)sen(v) & sen(u)cos(v) \\ -sen(u)sen(v) & cos(u)cos(v) \\ 0 & -sen(v) \end{bmatrix}.$$

Notemos que $(\varphi_1)_u$ *y* $(\varphi_1)_v$ *son ortogonales, y por tanto, linealmente independientes. Luego,* $D\varphi_1(u,v)$ *es de rango 2.*

Así, se concluye que φ_1 *es una parametrización de* $\mathbb{S}^2$.
Ya que φ_1 *no cubre totalmente a* $\mathbb{S}^2$*, necesitamos definir una función más. Sea* $\varphi_2 : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \cap \mathbb{S}^2$ *tal que*

$$\varphi_2(u,v) = (cos(v), -cos(u)sen(v), sen(u)sen(v)).$$

De manera similar que con φ_1*, se prueba que* φ_2 *es una parametrización sobre* $Im(\varphi_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : (z = 0 \Rightarrow y > 0)\}$*. Juntas,* φ_1 *y* φ_2 *cubren todo* $\mathbb{S}^2$*.*
$\triangleleft$

Al mandar partes de nuestra superficie a conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$, dotamos a tal porción de la superficie de un sistema de referencia, a partir del sistema de coordenadas rectangulares de $\mathbb{R}^2$. Aun cuando el punto $0_{\mathbb{R}^2}$ no pertenezca al abierto, podemos pensar en una traslación de un punto arbitrario a éste. Así, al tomar un punto p en la superficie, el respectivo punto q en el abierto U genera un sistema coordenado donde q es el nuevo "origen", para luego transferir este sistema a la superficie, vía nuestra parametrización. Dicho de un modo más preciso, tenemos lo siguiente (ver [3] pág. 55):

Definición 1.1.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización alrededor de p tal que $q = (u_0, v_0)$. Las* ***curvas coordenadas respecto de $u = u_0$ y $v = v_0$*** *son las funciones $v \longmapsto \varphi(u_0, v)$ y $u \longmapsto \varphi(u, v_0)$ respectivamente.*

Ya que este sistema se produce en una vecindad de un punto p, a la parametrización φ también se le suele llamar **sistema de coordenadas locales**, mientras que a $V \cap S$ **vecindad coordenada**.
Este sistema de referencia no es único, pues bien podríamos hacer una traslación de un punto q en el abierto de tal modo que coincida con el origen, como se mencionó antes, de tal forma que obtendríamos un nuevo dominio para nuestra parametrización. Más aún, dada una parametrización de una vecindad coordenada, podemos escoger un nuevo dominio para ella, siempre que sea "esencialmente" el mismo.
Otra manera de pensarlo es la siguiente: dadas dos parametrizaciones de una misma vecindad coordenada, podemos pasar de una de ellas a la otra mientras los dominios sean esencialmente los mismos (ver [3] pág. 72).

Definición 1.1.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, y $\varphi_1 : U_1 \to S$ y $\varphi_2 : U_2 \to S$ parametrizaciones alrededor de p tales que $p \in W = \varphi_1[U_1] \cap \varphi_2[U_2]$. Definimos* ***el cambio de parámetro de φ_1 a φ_2*** *como la función $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}[W] \to \varphi_2^{-1}[W]$.*

El siguiente resultado nos indica de manera más exacta a qué nos referimos con "esencialmente" los mismos dominios. De manera intuitiva, se entiende por esto que podemos ir y regresar de un dominio a otro de manera *suave* (ver [3] pág. 72).

Teorema 1.1.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, y $\varphi_1 : U_1 \to S$ y $\varphi_2 : U_2 \to S$ parametrizaciones alrededor de p. Entonces el cambio de parámetro $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es diferenciable e invertible con inversa diferenciable.* $\square$

Podemos ampliar un poco nuestros conceptos de superficie y de parametrización local, al considerar una función diferenciable, sin necesidad de establecer un codominio particular (ver [3] pág. 80).

Definición 1.1.4. *Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$.*

a) *φ es una* ***superficie parametrizada*** *si es diferenciable.*

b) *φ es una* ***superficie regular parametrizada*** *si es una superficie parametrizada y $D_\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.*

Este concepto será muy utilizado en capítulos posteriores.

Notemos que una superficie parametrizada puede tener autointersecciones. Por otro lado, en principio, no podemos asegurar que $\varphi[U]$ sea una superficie regular. Afortunadamente, el siguiente teorema nos garantiza que dado un punto en U siempre podemos hallar una vecindad cuya imagen sí sea una superficie regular.

Teorema 1.1.3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. Entonces para cada $p \in S$ existe una vecindad V de p tal que V es una superficie regular.* $\square$

Hasta ahora hemos hablado únicamente del concepto de superficie. El estudio de estos objetos matemáticos también se enfoca en analizar cómo se comportan a lo largo de su extensión. Sin embargo, ciertos cambios y alteraciones suelen pasar desapercibidas al examinar la superficie en su totalidad. Es decir, al observar toda la superficie de una sola vez, al mirar hacia un punto desde "lejos", podría ser que no lográramos distinguir el comportamiento exacto de la superficie en ese punto y sus alrededores, pues podría ser que a simple vista fueran imperceptibles ciertas variaciones que ocurriesen a una escala muy pequeña. Es por ello que el análisis se hace en las proximidades de un punto, donde es más fácil percatarse de los cambios que se dan en sus alrededores.
Ahora introduciremos una de las nociones más importantes para nuestro trabajo referente a las superficies: pensemos en una curva dibujada sobre el plano $\mathbb{R}^2$. Si esta curva es suave, podemos hablar de *"el vector tangente"* a la curva en p. Ahora imaginemos una superficie S en el espacio que pasa por un punto $p \in S$. Al encontrarse en el espacio, para p no existe un vector tangente único, pues ahora tenemos múltiples direcciones a considerar. Así, si una curva en S pasa por p, obtenemos un vector tangente. Al describir otra curva, bien podemos obtener un vector tangente a S en p con una dirección diferente al de la primera curva dada (ver [3] pág. 85).

Definición 1.1.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$.*

a) *Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente a S en p** si existen $\varepsilon > 0$ y una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $Im(\alpha) \subset S$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.*

b) *El **plano tangente a S en p** es el conjunto $T_p(S)$ de vectores tangentes a S en p.*

Ejemplo 1.1.4.

1. *Para el plano $\mathcal{P}$ del ejemplo 1.1.1, sea $P \in \mathcal{P}$. Entonces existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $P = P_0 + \lambda P_1 + \mu P_2$. Veamos que $v = \lambda P_1 + \mu P_2$ es un vector tangente a $\mathcal{P}$ en P:*
   Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = P_0 + \lambda(1+t)P_1 + \mu(1+t)P_2$. Entonces $\alpha(0) = P_0 + \lambda P_1 + \mu P_2 = P$ y $\alpha'(t) = \lambda P_1 + \mu P_2$. Esto es, α' es constante. En particular, $\alpha'(0) = \lambda P_1 + \mu P_2 = v$. $\lhd$

2. *Sea $p_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $\varphi_1^{-1}(p_0) = q_0 = (u_0, v_0)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(q_0) \subset (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y definamos $\varepsilon = mín\{\delta, \frac{\delta}{|\lambda|}, \frac{\delta}{|\mu|}\}$. También definimos $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ como*

$$\beta(t) = (sen(u_0 + \lambda t)sen(v_0 + \mu t), cos(u_0 + \lambda t)sen(v_0 + \mu t), cos(v_0 + \mu t)).$$

   Entonces $\beta(0) = p_0$. Además

$$\beta'(t) = \begin{pmatrix} \lambda cos(u_0 + \lambda t)sen(v_0 + \mu t) + \mu sen(u_0 + \lambda t)cos(v_0 + \mu t) \\ -\lambda sen(u_0 + \lambda t)sen(v_0 + \mu t) + \mu cos(u_0 + \lambda t)cos(v_0 + \mu t) \\ -\mu sen(v_0 + \mu t) \end{pmatrix},$$

   por lo que $\beta'(0) = \lambda(\varphi_1)_u(q_0) + \mu(\varphi_1)_v(q_0)$. Por tanto, toda combinación lineal de la base $\{(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_v\}$, es un vector tangente a $\mathbb{S}^2$ en p_0. $\lhd$

Como mencionamos anteriormente, cada parametrización local alrededor de un punto p nos permite hablar de un único plano generado a partir de los vectores columna de la matriz $D\varphi(q)$. Este plano trasladado a p tiene la particularidad de que, localmente, sólo toca a la superficie en p. También podemos hacer la siguiente interpretación: considérense sobre la superficie tres puntos no colineales con p. Estos tres puntos generan un único plano que corta nuestra superficie. Imaginemos que los puntos se van acercando a p cada vez más. En el límite, habremos obtenido un plano que, localmente, toca a nuestra superficie únicamente en p.

Observación:

1. $T_p(S)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Para una parametrización $\varphi : U \to V \cap S$, las derivadas parciales de φ forman una base para $T_p(S)$.

3. $T_p(S)$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

El siguiente resultado nos otorga un modo útil de entender a los planos tangentes a las superficies (ver [3] pág. 86):

Teorema 1.1.5. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Si $\varphi : U \to S$ es una parametrización tal que $p \in Im(\varphi)$, entonces $T_p(S)$ es igual a la imagen de la transformación $D_\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.* $\square$

Como ejemplo de este teorema, podemos notar que en cada inciso del ejemplo 1.1.4 hemos descrito implícitamente a $D_\varphi(u_0, v_0)$, en cada caso basta con reescribir la última expresión que tiene $\beta'(0)$.

Si pensamos en una curva α cuya imagen $Im(\alpha)$ está contenida en U, podemos decir que $\varphi[Im(\alpha)] \subset S$ es la imagen de la curva $\beta = \varphi \circ \alpha$. Este comentario nos permite interpretar el teorema anterior de la siguiente manera: $D_\varphi(q)$ manda vectores tangentes a α a vectores tangentes a β.

Observación:

1. $D_{\varphi}(q)[\mathbb{R}^2]$ no depende de la parametrización que se tome.

1.2. Superficies de revolución

Ahora, mencionaremos un tipo particular de superficies regulares. La idea consiste en tomar una curva en el espacio, contenida en uno de los planos formados por dos de los ejes coordenados, y hacerla rotar respecto a uno de estos dichos ejes. A lo largo de esta sección, ilustraremos cada uno de los conceptos dados en la sección 1.1. Empezaremos esta exposición presentando una definición análoga a la de superficie regular. Tal definición es la de "curva regular" (ver [3] pág. 77).

Definición 1.2.1. *Sea $C \subset \mathbb{R}^3$. C es una **curva regular** si para cada $p \in C$, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ y una función $c : I \to V \cap C$ tal que:*

a) *c es diferenciable.*

b) *c es un homeomorfismo.*

c) *c' es inyectiva.*

Notemos que la definición 1.2.1 es perfectamente equiparable con la definición 1.1.1 de superficie regular.

A continuación hablaremos de manera más precisa sobre cómo obtener una superficie regular a partir de una curva regular. Consideremos una curva regular C contenida en el plano xz y sea $c : I \to V \cap C$ el homeomorfismo diferenciable que nos garantiza la definición. Para simplificar los cálculos, consideraremos que C está completamente contenido en V. Si $I = (a, b)$, tenemos a $c : (a.b) \to C$ como nuestra parametrización. Por la contención, $c(v) = (f(v), 0, g(v))$. Ahora necesitamos hacer girar a C alrededor del eje z. Dado un punto $p \in C$, las coordenadas de este punto son $(f(v), 0, g(v))$, para algún $v \in I$. Al hacer rotar a p alrededor del eje z en un ángulo $u \in (0, 2\pi)$, las coordenadas de p se modifican a un punto

$$p' = (f(v)cos(u), f(v)sen(u), g(v)).$$

Pediremos que para cada $v \in I$, $f(v) > 0$, para evitar que se genere más de un punto para el mismo valor de u por la rotación. Ahora consideremos los conjuntos $U = (0, 2\pi) \times I$ y

$$S_C = \{(f(v)cos(u), f(v)sen(u), g(v)) : (u, v) \in U\}.$$

Afirmamos que S_C es una superficie regular. En efecto: definamos la función $\varphi : U \to S_C$ como

$$\varphi(u, v) = (f(v)cos(u), f(v)sen(u), g(v)). \tag{1.2.1}$$

i) Notemos que cada función coordenada de φ es derivable. En consecuencia, φ es diferenciable.

ii.i) Ya que cada función coordenada es continua, φ es continua.

ii.ii.i) Sean $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$ tales que $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$, esto es,

$$(f(v_1)cos(u_1), f(v_1)sen(u_1), g(v_1)) = (f(v_2)cos(u_2), f(v_2)sen(u_2), g(v_2)).$$

Entonces $f(v_1)cos(u_1) = f(v_2)cos(u_2)$, $f(v_1)sen(u_1) = f(v_2)sen(u_2)$ y

$g(v_1) = g(v_2)$. Luego

$$f(v_1) = \sqrt{f(v_1)^2 cos(u_1)^2 + f(v_1)^2 sen(u_1)^2}$$

$$= \sqrt{f(v_2)^2 cos(u_2)^2 + f(v_2)^2 sen(u_2)^2} = f(v_2),$$

es decir, $f(v_1) = f(v_2)$ y $g(v_1) = g(v_2)$, y dado que c es inyectiva, obtenemos que $v_1 = v_2$. Además, $cos(u_1) = cos(u_2)$ y $sen(u_1) = sen(u_2)$, por lo cual $u_1 = u_2$. En consecuencia, φ es inyectiva.

ii.ii.ii) Sea $(x, y, z) \in S_C$. Entonces existe $(u, v) \in U$ tal que $(x, y, z) = (f(v)cos(u), f(v)sen(u), g(v))$, es decir, $\varphi(u, v) = (x, y, z)$. Luego, φ es sobreyectiva. Por tanto, φ es biyectiva.

ii.iii) Daremos la forma explícita de φ^{-1}. Primero notemos que dado $p = (x, y, z) \in S_C$ y $q = (u, v) \in U$ tal que $\varphi(q) = p$, se obtiene que $\sqrt{x^2 + y^2} = f(v)$ y $z = g(v)$. Definimos $\varphi^{-1} : S \to U$ como

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left(2arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right), c^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z\right)\right) & si \quad u \neq \pi \\ \\ \left(u, c^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z\right)\right) & si \quad u = \pi \end{cases}$$

Es claro que φ^{-1} es continua. Por tanto, concluimos que φ es un homeomorfismo.

iii) La matriz de derivadas parciales es

$$D\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} -f(v)sen(u) & f'(v)cos(u) \\ f(v)cos(u) & f'(v)sen(u) \\ 0 & g'(v) \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

Queremos ver que los vectores $\varphi_u(u,v)$ y $\varphi_u(u,v)$ son linealmente independientes. Basta ver que son ortogonales. En efecto, tenemos que

$$\langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle = -f(v)f'(v)cos(u)sen(u) + f(v)f'(v)cos(u)sen(u) = 0,$$

por lo que $D\varphi(u,v)$ es de rango dos.

Hemos probado que el conjunto S_C es una superficie regular.
Para esta construcción, hemos considerado a C contenida en el plano xz. Mas podría considerarse en su lugar alguno de los planos xy o yz, con las respectivas modificaciones que este cambio traería consigo. A este tipo de curvas que se encuentran completamente contenidas en un plano suele llamárseles **curvas planas**.
Ya que hemos visto cómo se desarrolla esta construcción, podemos decir que una superficie de revolución es una superficie que se genera al girar una curva regular alrededor de un eje de rotación. Precisamos tal concepto en la siguiente definición:

Definición 1.2.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular.*

a) *S es una* ***superficie de revolución*** *si existe una curva regular plana C tal que $S = S_C$.*

b) *C es una* ***curva generatriz de S*** *si $S = S_C$.*

Remarcamos que la definición 1.2.2 nos expresa que una superficie regular es de revolución si está generada por una curva regular plana.

Ahora consideremos un punto $p_0 \in S$ y su preimagen $q_0 = (u_0, v_0) \in U$, y una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t)$. Al definir $\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to S$

como $\beta(t) = (\varphi \circ \alpha)(t)$, donde $\varepsilon_1 = \text{mín}\left\{\varepsilon, |-\frac{u_0}{\lambda}|, |\frac{2\pi-u_0}{\lambda}|, |\frac{a-v_0}{\mu}|, |\frac{b-v_0}{\mu}|\right\}$, podemos ver que $\beta(0) = p_0$ y $\beta'(0) = \lambda\varphi_u(q_0) + \mu\varphi_v(q_0)$, por lo cual $\beta'(0)$ es un vector tangente a S en p_0. Además, acorde al teorema 1.1.5, $\beta'(0) = D_\varphi(u_0, v_0)$.

Retomaremos el tema de las superficies de revolución a lo largo de este trabajo. En lo sucesivo su estudio será integrado a los conceptos relativos a superficies que vayamos examinando.

1.3. La primera forma fundamental

Una herramienta de suma importancia en la geometría sobre el plano es la posibilidad de tomar medidas de diferentes elementos en él, como lo son longitudes, ángulos y áreas. En esta sección presentaremos el concepto que nos permitirá medir estos elementos dentro de la superficie, auxiliados del producto interno de $\mathbb{R}^3$.
Ya que la forma de medir vectores en el espacio es a través de la norma $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$, podría pensarse que esta definicón será extrapolada para superficies. Sin embargo, se definirá de forma equivalente (ver [3] pág. 95).

Definición 1.3.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Definimos* ***la primera forma fundamental en p*** *como la función $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $w = r\varphi_u(q) + s\varphi_v(q) \in T_p(S)$,*

$$I_p(w) = \langle w, w\rangle = \|w\|^2, \tag{1.3.1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

Dada una base $\{v_1, v_2\}$ de $T_p(S)$, $w \in T_p(S)$ se escribe como $w = rv_1 + sv_2$, para algunos $r, s \in \mathbb{R}$. Así,

$$I_p(w) = I_p(rv_1 + sv_2) = \langle rv_1 + sv_2, rv_1 + sv_2 \rangle_S = r^2 \langle v_1, v_1 \rangle_S + 2rs \langle v_1, v_2 \rangle + s^2 \langle v_2, v_2 \rangle$$

Además, para una parametrización $\varphi : U \to S$ alrededor de p, $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es una base de $T_p(S)$, por lo que

$$I_p(w) = r^2 \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle + 2rs \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle + s^2 \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle$$

Si definimos $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ como $E(u, v) = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle$, $F(u, v) = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle$ y $G(u, v) = \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle$, la ecuación se reduce a

$$I_p(w) = r^2 E(q) + 2rsF(q) + s^2 G(q), \tag{1.3.2}$$

o bien

$$I_p(w) = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

E, F y G son llamados los **coeficientes de la primera forma fundamental en $\boldsymbol{w}$**.

Notemos que, como $w \in T_p(S)$, para alguna curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = \varphi \circ \alpha$, con $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $\alpha(0) = q$, $w = \beta'(0) = D\varphi(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\varphi(q)(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = \alpha_1'(0)\varphi_u(q) + \alpha_2'(0)\varphi_v(q)$. De esto se sigue que $r = \alpha_1'(0)$ y $s = \alpha_2'(0)$.

Denotaremos por P_I a la matriz de la primera forma fundamental.

Ejemplo 1.3.1.

1. *Para* $\mathcal{P}$ *y la parametrización* $\varphi(u,v) = P_0 + uP_1 + vP_2$ *alrededor de* $P = P_0 + \lambda P_1 + \mu P_2 \in \mathcal{P}$, *se tiene que* $\varphi_u(u,v) = P_1$ *y* $\varphi_v(u,v) = P_2$. *Luego,*

$$E(u,v) = \langle P_1, P_1 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2,$$

$$F(u,v) = \langle P_1, P_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i,$$

$$G(u,v) = \langle P_2, P_2 \rangle = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i^2$$

Si $w = \lambda P_1 + \mu P_2 \in T_P(\mathcal{P})$ *y* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ *es tal que* $\alpha(t) = (\lambda(1+t), \mu(1+t))$, *entonces se cumple*

$$I_{p_0}(w) = \sum_{i=1}^{3}(\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda\mu a_i b_i + \mu^2 b_i^2). \quad \triangleleft$$

2. *Para* $\mathbb{S}^2$ *con la parametrización* φ_1 *del ejemplo 1.1.1, alrededor de* $p_0 = \varphi_1^{-1}(q) = \varphi_1^{-1}(u_0, v_0)$, *los coeficientes de la primera forma fundamental son:*

$$E(u,v) = \langle (cos(u)sen(v), -sen(u)sen(v), 0), (cos(u)sen(v), -sen(u)cos(v), 0) \rangle$$

$$= cos^2(u)sen^2(v) + sen^2(u)sen^2(v) = sen^2(v),$$

$$F(u,v) = \langle (cos(u)sen(v), -sen(u)sen(v), 0), (sen(u)cos(v), cos(u)cos(v), -sen(v)) \rangle$$

$$= cos(u)sen(v)sen(u)cos(v) - cos(u)cos(v)sen(u)sen(v) = 0,$$

$$G(u,v) = \langle (sen(u)cos(v), cos(u)cos(v), -sen(v)), (sen(u)cos(v), cos(u)cos(v), -sen(v)) \rangle$$

$$sen^2(u)cos^2(v) + cos^2(u)cos^2(v) + sen^2(v) = 1$$

Considerando $w = \lambda\varphi_1(q) + \mu\varphi_2(q) \in T_p(\mathbb{S}^2)$ *y* $\alpha(t) = (u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t)$, *la primera forma fundamental queda como*

$$I_{p_0}(w) = \lambda^2 sen^2(v_0) + \mu^2. \triangleleft$$

3. *Para la parametrización* (1.2.1) *y la matriz* (1.2.2) *de la sección 1.2, los coeficientes de la primera forma fundamental son:*

$$\begin{aligned} E(u,v) =& f(v)^2 sen(u)^2 + f(v)^2 cos(u)^2 = f(v)^2 \\ F(u,v) =& 0 \\ G(u,v) =& f'(v)^2 + g'(v)^2. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Habiendo dotado a las superficies regulares con una medida, y viendo que ésta puede ser expresada en la forma de la ecuación (1.3.2), nos interesa ahora utilizarla para medir los elementos antes mencionados. El primero en el que nos enfocaremos es la longitud de las curvas que estén situadas sobre la superficie.
Recordemos que, para una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, la longitud de arco de α entre 0 y t está dada por

$$l(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Por las observaciones anteriores, si β es una curva en S, entonces $\beta'(t)$ estará en $T_p(S)$. Entonces se puede aplicar la primera forma fundamental a $\beta'(t)$. Ya en términos de E, F y G, obtenemos el siguiente resultado (ver [3] pág. 97):

Teorema 1.3.2. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie regular,* $p \in S$ *y* $\varphi : U \to V \cap S$ *una* *parametrización local alrededor de* p. *Si* $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S$ *es una curva diferenciable, entonces la longitud de arco de* β *entre* 0 *y* t *es*

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 E + 2rsF + s^2 G}\, dt. \quad \square \tag{1.3.5}$$

Ejemplo 1.3.3.

1. *Para* $p \in \mathcal{P}$ *y* $\alpha(t) = P_0 + \lambda(1+t)P_1 + \mu(1+t)P_2$,

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda\mu a_i b_i + \mu^2 b_i^2)}\, dt = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda\mu a_i b_i + \mu^2 b_i^2)}\, t. \quad \lhd$$

2. *Para* $p \in \mathbb{S}^2$ *y la parametrización* φ_1 *del ejemplo 1.1.1,*

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\lambda sen^2(v) + \mu^2}\, dt = \sqrt{\lambda sen^2(v) + \mu^2} \int_0^t dt = \sqrt{\lambda sen^2(v) + \mu^2} t. \lhd$$

3. *Para una curva* $\beta = \varphi \circ \alpha$ *sobre una superficie de revolución, la longitud de arco está dada por*

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha_1'(t)^2 f(v)^2 + a_2'(t)^2 \left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)}\, dt. \tag{1.3.6}$$

Otro de los elementos que es importante poder medir es, en general, el ángulo entre dos curvas que se intersectan en un punto. Éste se define como el ángulo entre los respectivos vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección. Al considerar la orientación de las curvas, y por consiguiente de los vectores tangentes, tal ángulo queda bien definido. Más formalmente, queremos medir el ángulo $\theta \in [0, \pi)$ entre dos curvas diferenciables β_1 y β_2 que se cruzan en un punto $p \in Im(\beta_1) \cap Im(\beta_2)$. Tal ángulo está dado por

$$cos(\theta) = \frac{\beta_1'(t_1) \cdot \beta_2'(t_2)}{\|\beta_1'(t_1)\| \|\beta_2'(t_2)\|} \tag{1.3.7}$$

Ahora, al pensar en dos curvas cualesquiera β_1 y β_2 sobre una superficie S que se intersectan en un punto p, haciendo uso de los coeficientes de la primera forma fundamental obtenemos:

Teorema 1.3.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de p. Si $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S$ son dos curvas diferenciables sobre S que se intersectan en p, Entonces el ángulo $\theta \in [0, \pi)$ entre ellas es*

$$cos(\theta) = \frac{r_1 r_2 E + (r_1 s_2 + r_2 s_1)F + s_1 s_2 G}{\sqrt{r_1^2 E + 2r_1 s_1 F + s_1^2 G}\sqrt{r_2^2 E + 2r_2 s_2 F + s_2^2 G}}. \qquad \square \tag{1.3.8}$$

Particularmente, si las curvas son las curvas coordenadas de φ, obtenemos el teorema siguiente, nuevamente en términos de E, F y G (ver [3] pág. 98):

Teorema 1.3.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de p. Entonces el ángulo $\theta \in [0, \pi)$ entre las curvas coordenadas de φ es*

$$cos(\theta) = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \qquad \square \tag{1.3.9}$$

Ejemplo 1.3.6.

1. *Para $p_0 \in \mathcal{P}$ y $\alpha(t) = P_0 + \lambda(1+t)P_1 + \mu(1+t)P_2$, el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ entre*

$\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$ es

$$cos(\theta) = \frac{\langle P_1, P_2 \rangle}{\|P_1\| \, \|P_2\|}. \quad \triangleleft$$

2. *Para $p \in \mathbb{S}^2$ y φ_1 del ejemplo 1.1.1, ya que $F(u,v) = 0$ el ángulo entre $(\varphi_1)_u(q)$ y $(\varphi_1)_v(q)$ es $\frac{\pi}{2}$.* $\triangleleft$

3. *Para una superficie de revolución con la parametrización de* (1.2.1), *el ángulo entre φ_u y φ_v es $\frac{\pi}{2}$.* $\triangleleft$

También es posible definir cuándo dos curvas en $\mathbb{R}^3$ son ortogonales en un punto p:

Definición 1.3.2. *Sean α y β curvas en $\mathbb{R}^n$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que α y β son diferenciables en t_1 y t_2 respectivamente y $\alpha(t_1) = \beta(t_2) = p$. α y β son* ***curvas ortogonales en p*** *si $\alpha'(t_1)$ es ortogonal a $\beta'(t_2)$.*

De la definición 1.3.2, para las curvas coordenadas en un plano tangente a una superficie S en un punto p se desprende el siguiente resultado, que proporciona una equivalencia a la propiedad de ortogonalidad:

Corolario 1.3.7. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de $p = \varphi^{-1}(q)$. Entonces las curvas coordenadas de φ son ortogonales si y sólo si $F(q) = 0$.* $\square$

Otra propiedad deseable es el poder medir el área de una región sobre una superficie regular. Para formalizar tal idea en el ambiente de las superficies regulares, primero definiremos lo siguiente (ver [9] pág. 5):

Definición 1.3.3. *Sea* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva.*

a) α *es* ***cerrada*** *si* $\alpha(a) = \alpha(b)$ *y* α *es diferenciable en* a.

b) α *es* ***simple*** *si es inyectiva.*

c) α *es* ***diferenciable a trozos*** *si existe* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$, *con* $i = \overline{1,m}$ *tales que:*

i) *Para cada* $i = \overline{1,m}$, α_i *es diferenciable en* $[a_i, b_i]$

ii) *La imagen de* α *es la unión de las imágenes de* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

iii) *Para cada* $i = \overline{1,m}$, $\alpha_i(b_i) = \alpha_{i+1}(a_{i+1})$.

También es importante precisar a qué nos referimos al hablar de una "región sobre una superficie". Primero daremos la definición para $\mathbb{R}^n$ y luego procederemos a darla para cualquier superficie regular S:

Definición 1.3.4. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) A *es un* ***dominio de*** $\mathbb{R}^n$ *si es abierto y conexo.*

b) A *es una* ***región de*** $\mathbb{R}^n$ *si es la unión de un dominio con su frontera.*

La definición que veremos a continuación, está totalmente inspirada en la definición para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. No obstante, en este trabajo pediremos una condición más para hablar de dominios regulares (ver [9] pág. 7):

Definición 1.3.5. *Sea* S *una superficie regular y* $D \subset S$.

a) *D es un* ***dominio (regular) de S*** *si es abierto y conexo en S y ∂D es una curva diferenciable a trozos, cerrada y simple.*

b) *R es una* ***región de S*** *si D es un dominio y $R = D \cup \partial D$.*

De esta manera, las regiones se encuentran delimitadas por una curva particular. Ahora bien, sabemos que el área de una región $R \subset S$ se calcula como

$$A(R) = \int_R dS = \iint_Q \|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\| dudv \tag{1.3.10}$$

donde Q es la imagen inversa de R bajo una parametrización φ. Haciendo uso de los coeficientes E, F y G una vez más, se deduce lo siguiente (ver [3] pág. 100):

Teorema 1.3.8. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de p. Si $R \subset V \cap S$ es una región de S tal que para una región $Q \subset U$, $\varphi[Q] = R$, entonces el área de R es*

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\, dudv. \tag{1.3.11}$$

Demostración:
Para hacer la demostración, calcularemos $\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2$. Si $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$ y $\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$, entonces:

$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (x_u z_v - z_u x_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2$
$= (x_u y_v)^2 + (x_u z_v)^2 + (y_u x_v)^2 + (y_u z_v)^2 + (z_u x_v)^2 + (z_u y_v)^2 - 2(x_u x_v y_u y_v + y_u y_v z_u z_v + z_u z_v x_u x_v)$
$= x_u^2(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) + y_u^2(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) + z_u^2(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v)^2 - (y_u y_v)^2 - (z_u z_v)^2 - 2(x_u x_v y_u y_v + y_u y_v z_u z_v + z_u z_v x_u x_v)$
$= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - [x_u x_v(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) + y_u y_v(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) +$

$z_u z_v(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)] = \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 = EG - F^2$.
Así, $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$. Luego,

$$A(R) = \iint\limits_Q \|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\| dudv = \iint\limits_Q \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\, dudv$$

como queríamos demostrar. ■

Ejemplo 1.3.9.

1. *Sea $r > 0$. En $\mathcal{P}$, sea $Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \|(u,v)\| < r\}$ y $R = \varphi[Q]$. Entonces*

$$A(R) = \iint\limits_Q \sqrt{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 - \langle P_1, P_2\rangle^2} dudv$$

$$= \sqrt{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 - \langle P_1, P_2\rangle^2} \int_{-r}^{r} \int_{\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} dvdu = \sqrt{\|P_1\|^2 \|P_2\|^2 - \langle P_1, P_2\rangle^2} \pi r^2. \quad \triangleleft$$

2. *De acuerdo al ejemplo 1.1.1, si tomamos $Q = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y a $R = \varphi_1[Q]$, tenemos que*

$$A(R) = \int_R dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{sen^2(v)} dudv = \int_0^\pi sen(v) dv \int_0^{2\pi} du$$

$$= 2\pi(-cos(\pi) + cos(0)) = 2\pi(1+1) = 4\pi. \triangleleft$$

3. *Para una región R sobre una superficie de revolución, el área de R se calcula del siguiente modo:*

$$A(R) = \iint\limits_Q f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}\, dudv. \triangleleft$$

Para una superficie S, un punto $p \in S$ y una parametrización local alrededor de

p, $\varphi : U \to V \cap S$, puede calcularse una base ortonormal $\{\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_v\}$ para $T_p(S)$ a partir de $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:
Definamos

$$\tilde{\varphi}_u = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \frac{\varphi_u}{\sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}} = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}},$$

luego tomamos $\tilde{\varphi}_v$ como

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_v = \frac{\varphi_v - \langle \varphi_v, \tilde{\varphi}_u \rangle \tilde{\varphi}_u}{\|\varphi_v - \langle \varphi_v, \tilde{\varphi}_u \rangle \tilde{\varphi}_u\|} &= \frac{\varphi_v - \left\langle \varphi_v, \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}}{\left\| \varphi_v - \left\langle \varphi_v, \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\rangle \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\|} = \frac{\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u}{\left\|\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u\right\|} \\ &= \frac{\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u}{\sqrt{\left\langle \varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u, \varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u \right\rangle}}.\end{aligned}$$

Como

$$\left\langle \varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u, \varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u \right\rangle = G - 2\frac{F^2}{E} + \frac{F^2}{E} = G - \frac{F^2}{E} = \frac{1}{E}\left(EG - F^2\right),$$

tenemos que

$$\tilde{\varphi}_v = \frac{\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u}{\sqrt{\frac{1}{E}\left(EG - F^2\right)}} = \frac{\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u}{\sqrt{\frac{1}{E}\left(EG - F^2\right)}} = \frac{\varphi_v - \frac{F}{E}\varphi_u}{\sqrt{\frac{1}{E}}\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\sqrt{E}\varphi_v - \frac{F}{\sqrt{E}}\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \frac{\sqrt{E}\varphi_v - \frac{F}{\sqrt{E}}\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right\} \tag{1.3.12}$$

es una base ortonormal para $T_p(S)$.

Ejemplo 1.3.10.

1. *Para $\mathcal{P}$ y $\varphi(u,v) = P_0 + \lambda(1+t)P_1 + \mu(1+t)P_2$, la base de derivadas parciales de φ en P es $\{P_1, P_2\}$, $E = \|P_1\|^2$, $F = \langle P_1, P_2\rangle$ y $G = \|P_2\|^2$. Luego, una base ortonormal para $T_P(\mathcal{P})$ es*

$$\left\{ \frac{P_1}{\|P_1\|}, \frac{\|P_1\|\, P_2 - \frac{\langle P_1, P_2\rangle}{\|P_1\|} P_1}{\sqrt{\|P_1\|^2\, \|P_2\|^2 - \langle P_1, P_2\rangle^2}} \right\}. \quad \lhd$$

2. *Para $\mathbb{S}^2$ y la parametrización φ_1 del ejemplo 1.1.1, las derivadas parciales son*

$$(\varphi_1)_u(u,v) = (cos(u)sen(v), -sen(u)sen(v), 0) \quad y$$

$$(\varphi_1)_v(u,v) = (sen(u)cos(v), cos(u)cos(v), -sen(v)),$$

y $E = sen^2(v)$, $F = 0$ y $G = 1$. Entonces, una base ortonormal para $T_p(\mathbb{S}^2)$ es

$$(\tilde{\varphi_1})_u = (cos(u), -sen(u), 0) \quad y$$

$$(\tilde{\varphi_1})_v = (\varphi_1)_v. \lhd$$

3. *En una superficie de revolución con la parametrización de (1.2.1), una base ortonormal para $T_p(S)$ es*

$$\left\{ \tilde{\varphi}_u(q) = \begin{pmatrix} -sen(u) \\ cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{\varphi}_v(q) = \begin{pmatrix} \frac{f'(v)cos(u)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \\ \frac{f'(v)sen(u)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \\ \frac{g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \end{pmatrix} \right\}. \lhd \tag{1.3.13}$$

Más adelante se utilizará la base de (1.3.12) para demostrar unos resultados que serán útiles cuando queramos expresar la primera variación del volumen.

1.4. La segunda forma fundamental

En la sección 1.3 hemos dirigido nuestra atención a definir la primera forma fundamental y estudiar como es que nos permite medir longitudes, ángulos y áreas sobre una superficie, tal como lo hacemos en el plano. En esta sección nuestro objetivo es presentar una herramienta que nos dará la posibilidad de trabajar con "la medida" de otro concepto: la curvatura de una superficie en un punto.
Antes de abordar este nuevo concepto, primero daremos algunas definiciones que nos permitirán hablar de él con más precisión (ver [3] pág. 106).

Definición 1.4.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular.*

a) ***Una orientación de S*** *es una familia de parametrizaciones* $\Phi = \{\varphi_i : U_i \to S|$ *para cada* $i \in I, U_i$ *es un abierto de* $\mathbb{R}^2\}$ *tal que:*

 i) $S \subset \bigcup_{i \in I} Im(\varphi_i)$

 ii) *Si* $W_{ij} = \varphi_i[U_i] \cap \varphi_j[U_j]$, *para cada* $p \in Im(\varphi_i) \cap Im(\varphi_j)$, *el cambio de parámetro* $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}[W_{ij}] \to \varphi_j^{-1}[W_{ij}]$ *tiene determinante jacobiano mayor que cero en el punto* $q_i = \varphi_i^{-1}(p)$.

b) *S es* ***orientable*** *si existe una orientación de S.*

La idea que se intenta plasmar en la definición es la de poder hablar de "lados" en la superficie. Sabemos que si v y w son vectores en el espacio, los vectores $v \times w$ y $w \times v$ son vectores ortogonales tanto a v como a w, con la diferencia de que tienen sentidos opuestos. Al pensar en una orientación, se entiende que, al rotar los vectores de una base hacia los vectores de la otra base en sentido opuesto a las manecillas del reloj (levógiro), la direción en la que apunta el vector del producto cruz es una, mientras que si la rotación fuera en sentido a las manecillas del reloj (dextrógiro), la dirección en la que apuntaría sería opuesta. La condición **ii)** de forma intuitiva nos dice que al girar los vectores de la base de la primera parametrización y acomodarlos de tal modo que apunten en la misma dirección que los vectores de la base de la segunda parametrización, se preserva la orientación original, pues los respectivos productos vectoriales de los vectores de las dos bases apuntan en la misma dirección. De este modo, se puede diferenciar de uno y otro lado, según el sentido del producto vectorial.

Ejemplo 1.4.1.

1. *El plano $\mathcal{P}$ del ejemplo 1.1.1 es orientable, ya que se puede tomar $\Phi = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}\}$, donde φ es la parametrización definida en el mismo ejemplo.*

2. *La esfera $\mathbb{S}^2$ es orientable, pues el conjunto $\Phi = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$ de las parametrizaciones definidas en el mismo ejemplo es una orientación.*

3. *Sea S una superficie de revolución generada por una curva C contenida en el plano Oxz. Sean $c_i : (a_i, b_i) \to V_i \cap C$, dadas por $c_i(v_i) = (f_i(v_i), 0, g_i(v_i))$, las parametrizaciones tales que $C \subset \bigcup_{i\in I} Im(c_i)$. Entonces S es orientable si y sólo si para cada $c \in Im(c_i) \cap Im(c_j)$,*

$$\frac{d}{dv_i}(c_j^{-1} \circ c_i)(v_i) > 0. \triangleleft \tag{1.4.1}$$

Notemos que al efectuar el producto vectorial de los vectores de la base asociada a una parametrización φ, en un punto p, obtenemos un único vector ortogonal a ambos. Así pues, para cada punto sobre una superficie S tenemos un vector ortogonal a ella.

Esta correspondencia nos lleva a la siguiente definición (ver [3] pág. 138):

Definición 1.4.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria. Una* ***función de Gauss*** *es una función diferenciable $N : S \to \mathbb{S}^2$ tal que para cada $p \in S$, $N(p)$ es perpendicular a $T_p(S)$.*

Intuitivamente, la función asigna un vector normal al plano tangente a S en p, al punto p. Esto también puede pensarse como mover cada vector normal a la superficie al centro de la esfera unitaria, para poder visualizar la dirección en la que apunta, lo cual será fundamental para poder medir la curvatura.

Ejemplo 1.4.2.

1. *Para $\mathcal{P}$, $N : \mathcal{P} \to \mathbb{S}^2$ dada por*

$$N(p) = \frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|}$$

es una función de Gauss.

2. *Para $\mathbb{S}^2$ y las parametrizaciones φ_1 y φ_2 del ejemplo 1.1.1, tenemos que*

$$(\varphi_1)_u \times (\varphi_1)_v = (sen(u)sen^2(v), cos(u)sen^2(v), sen(v)cos(v)),$$

$$(\varphi_2)_u \times (\varphi_2)_v = (sen(v)cos(v), -cos(u)sen^2(v), sen(u)sen(v)^2) \quad y$$

$$\|(\varphi_1)_u \times (\varphi_1)_v\| = \|(\varphi_2)_u \times (\varphi_2)_v\| = sen(v).$$

Esto es,

$$\frac{(\varphi_1)_u \times (\varphi_1)_v}{\|(\varphi_1)_u \times (\varphi_1)_v\|}(u, v) = (sen(u)sen(v), cos(u)sen(v), cos(v)) = \varphi_1(u, v)$$

y

$$\frac{(\varphi_2)_u \times (\varphi_2)_v}{\|(\varphi_2)_u \times (\varphi_2)_v\|}(u,v) = (cos(v), -cos(u)sen(v), sen(u)sen(v)) = \varphi_2(u,v).$$

Así, $N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *dada por*

$$N(p) = \begin{cases} \varphi_1(u,v), & si \quad p \in Im(\varphi_1) \quad y \quad \varphi_1(u,v) = p \\ \varphi_2(u,v), & si \quad p \in Im(\varphi_2)\backslash Im(\varphi_1) \quad y \quad \varphi_2(u,v) = p \end{cases}$$

es una función de Gauss.

Ya que para cada $p \in Im(\varphi_1)$*, existe* $(u,v) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$ *tal que* $\varphi_1(u,v) = p$*, podemos escribir a* $N|_{Im(\varphi_1)}$ *como*

$$N|_{Im(\varphi_1)}(p) = \varphi_1(u,v) = p.$$

De manera análoga, $N|_{Im(\varphi_2)\backslash Im(\varphi_1)}(p) = p$*, por lo que podemos pensar a* N *como la identidad sobre* $\mathbb{S}^2$*, es decir,* $N(p) = p$ *para todo* $p \in \mathbb{S}^2$*.* $\triangleleft$

3. *En una superficie de revolución con la parametrización de* (1.2.1)*, se tiene que*

$$\begin{aligned} \varphi_u(u,v) &= (-f(v)sen(u), f(v)cos(u), 0) \\ \varphi_v(u,v) &= (f'(v)cos(u), f'(v)sen(u), g'(v)) \\ (\varphi_u \times \varphi_v)(u,v) &= (f(v)g'(v)cos(u), f(v)g'(v)sen(u), -f(v)f'(v)) \\ \|\varphi_u \times \varphi_v)(u,v)\| &= f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$N(u,v) = \left(\frac{g'(v)cos(u)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}, \frac{g'(v)sen(u)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}, -\frac{f'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \right). \triangleleft \qquad (1.4.2)$$

Observación:

1. $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$.

Recordemos lo siguiente: Un operador lineal $T : V \to V$ sobre un espacio n-dimensional es llamado **autoadjunto** si para cada $v_1, v_2 \in V$, se cumple que

$$\langle v_1, T(v_2)\rangle = \langle T(v_1), v_2\rangle.$$

El siguiente resultado nos garantiza que esta propiedad también la posee la derivada de N (ver [3] pág. 142):

Teorema 1.4.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Entonces $D_N(p) : T_p(S) \to T_p(S)$ es un operador autoadjunto.*

Demostración:

Basta demostrarlo para una base de derivadas parciales $\{\varphi_u, \varphi_v\}$:

Sean $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización alrededor de $p \in S$, $\delta_1, \delta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ curvas tales que $\delta_1(t) = (t, 0)$, $\delta_2(t) = (0, t)$ y $\delta_1(0) = \delta_2(0) = q$. También sean $\gamma_1 = \varphi \circ \delta_1$ y $\gamma_2 = \varphi \circ \delta_2$. Entonces $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$.

Ya que el vector normal es perpendicular a φ_v, tenemos que $\langle N, \varphi_v\rangle = 0$. Entonces

$$0 = \frac{d}{dt}\langle (N \circ \gamma_1)(t), (\varphi_v \circ \delta_1)(t)\rangle|_{t=0} = \langle D_N(\gamma_1(0))\gamma_1'(0), (\varphi_v \circ \delta_1)(0)\rangle +$$

$$\langle (N \circ \gamma_1)(0), \frac{d}{dt}(\varphi_v \circ \delta_1)(0)\rangle = \langle D_N(p)\gamma_1'(0), \varphi_v(q)\rangle + \langle N(p), \frac{d}{dt}(\varphi_v \circ \delta_1)(0)\rangle.$$

Ahora,

$$\gamma_1'(0) = (\varphi \circ \delta_1)'(0) = D_\varphi(\delta(0))\delta_1'(0) = D_\varphi(q) \cdot (1, 0) = \varphi_u(q)$$

y

$$\frac{d}{dt}(\varphi_v \circ \delta_1)(0) = D_{\varphi_v}(0,0) \cdot (1,0) = \varphi_{vu}(q).$$

De ahí se sigue que

$$\langle D_N(p)\varphi_u(q), \varphi_v(q)\rangle = -\langle N(p), \varphi_{vu}(q)\rangle.$$

Análogamente, al calcular $\frac{d}{dt}\langle(\varphi_u \circ \delta_2)(t), (N \circ \gamma_2)(t)\rangle|_{t=0}$, se obtiene que

$$\langle \varphi_u(q), D_N(p)\varphi_v(q)\rangle = -\langle \varphi_{uv}(q), N(p)\rangle$$

y puesto que el producto punto es simétrico y $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, se deduce la igualdad deseada. ■

Ya que $D_N : T_p(S) \to T_p(S)$ es autoadjunto, es posible asociarle una forma cuadrática. Esta forma será la herramienta que nos permita medir la curvatura sobre una superficie. Tal forma cuadrática es denotada por II_p y se define como sigue (ver [3] pág. 143):

Definición 1.4.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable y $p \in S$. La **segunda forma fundamental en p** es la función $II_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$II_p(w) = \langle w, D_N(p)(w)\rangle. \tag{1.4.3}$$

Nota: *Al operador $D_N(p)$ se le suele llamar **operador de Weingarten**.*

La idea detrás de esta definición es la siguiente:
Para una superficie regular orientable S y un punto p en ella, considérese el vector normal a S en p, $N(p)$. Sea $w \in T_p(S)$. Ambos vectores generan un plano que corta

a S en una curva C. Entonces la segunda forma fundamental mide la curvatura de C en las proximidades de p. Esto es, $II_p(w)$ mide la curvatura de S alrededor de p, en la dirección de w, por lo que, para cada elección de dirección w, se tendrá un valor para la curvatura en p.

Ejemplo 1.4.4.

1. *Para $\mathcal{P}$ y $N(p) = \frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|}$ se tiene que $N_u = N_v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Luego, para cada $p \in \mathcal{P}$ y cada $w \in T_p(S)$, $II_p(w) = \langle w, D_N(p)(w)\rangle = \langle w, 0_{\mathbb{R}^3}\rangle = 0$. $\lhd$*

2. *Para $\mathbb{S}^2$ y la función de Gauss del ejemplo 1.4.2, ya que $N = \varphi_1$, se tiene que $D_N(p) = D_{\varphi_1}(p)$. Si $w = \lambda(\varphi_1)_u(q) + \mu(\varphi_1)_v(q)$, entonces la segunda forma fundamental queda*

$$II_p(w) = \langle w, D_N(p)(w)\rangle = \langle w, w\rangle = \|w\|^2 = I_p(w) = \lambda^2 sen(v) + \mu^2. \lhd$$

Puesto que D_N es autoadjunto, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Entonces existe una base ortonormal $B = \{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $D_N(p)(w_1) = k_1 w_1$ y $D_N(p)(w_2) = k_2 w_2$.* $\square$

Ejemplo 1.4.6.

1. *En $\mathcal{P}$, ya que para cada $p \in \mathcal{P}$ y $w \in T_p(S)$, $D_N(p)(w) = 0$, se sigue que $k_1 = k_2 = 0$. $\lhd$*

2. *En $\mathbb{S}^2$, ya que N del ejemplo 1.4.2 actúa como "identidad"sobre los puntos de*

la superficie, se tiene que

$$DN(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $k_1 = k_2 = 1$. $\triangleleft$

3. *Sea* S *una superficie de revolución con la parametrización de* (1.2.1), $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ *y* $\beta = \varphi \circ \alpha$ *tal que* $\beta(0) = p$ *y* $\beta'(0) = w$. *Si* N *es la función de Gauss de* (1.4.2) *del ejemplo 1.4.2, al calcular* $D_N(p)(w) = (N \circ \alpha)'(t)$ *se obtiene:*

$$(N_1 \circ \alpha)'(0) = \frac{[g''(v_0)v_0' cos(u_0) - g'(v_0)sen(u_0)u_0'] \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}{\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}$$

$$- \frac{g'(v_0)cos(u_0) \, [f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0']}{\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}$$

$$(N_2 \circ \alpha)'(0) = \frac{[g''(v_0)v_0' sen(u_0) + g'(v_0)cos(u_0)u_0'] \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}{\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}$$

$$- \frac{g'(v_0)sen(u_0) \, [f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0']}{\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)}$$

$$(N_3 \circ \alpha)'(0) = \frac{f''(v_0)v_0' \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2) - f'(v_0) \, [f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0']}{\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \, (f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2)},$$

es decir,

$$D_N(p)(w) = \begin{bmatrix} \frac{\left[g''(v_0)v_0' cos(u_0) - g'(v_0) sen(u_0) u_0'\right]\left(f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2\right) - g'(v_0) cos(u_0)\left[f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0'\right]}{\sqrt{f'(v_0)^2+g'(v_0)^2}(f'(v_0)^2+g'(v_0)^2)} \\ \\ \frac{\left[g''(v_0)v_0' sen(u_0) + g'(v_0) cos(u_0) u_0'\right]\left(f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2\right) - g'(v_0) sen(u_0)\left[f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0'\right]}{\sqrt{f'(v_0)^2+g'(v_0)^2}(f'(v_0)^2+g'(v_0)^2)} \\ \\ \frac{f''(v_0)v_0'\left(f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2\right) - f'(v_0)\left[f''(v_0)f'(v_0)v_0' + g''(v_0)g'(v_0)v_0'\right]}{\sqrt{f'(v_0)^2+g'(v_0)^2}(f'(v_0)^2+g'(v_0)^2)} \end{bmatrix},$$

que tras efectuar varios cálculos toma la forma

$$\begin{aligned} D_N(p)(w) = (N \circ \alpha)'(0) = & \frac{g'(v_0)u_0'}{f(v_0)\sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2}} \varphi_u(u_0, v_0) \\ & + \frac{f'(v_0)\left(g''(v_0)f'(v_0) - g'(v_0)f''(v_0)\right)v_0'}{\left(f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \varphi_v(u_0, v_0). \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Al considerar la base de (1.3.13) *del ejemplo 1.3.10, obtenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} D_N(p)(\tilde{\varphi}_u(q)) = & \frac{g'(v)}{f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}} \tilde{\varphi}_u(q) \\ D_N(p)(\tilde{\varphi}_v(q)) = & \frac{f'(v)\left(g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)\right)}{\left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tilde{\varphi}_v(q), \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

esto es, $k_1 = \frac{g'(v)}{f(v)\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}$ *y* $k_2 = \frac{f'(v)(g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v))}{(f'(v)^2+g'(v)^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\lhd$

Sabemos que k_1 y k_2 son valores propios de D_N. Tales valores propios poseen una propiedad importante que permitirá describir en qué dirección se curva más y menos una superficie. Para deducirla, utilizaremos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.7. *Sean $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal autoadjunto y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \langle (x,y), L(x,y) \rangle$. Entonces*

1. *f es diferenciable*

2. *Los valores propios de L son los puntos extremos de $f|_{\mathbb{S}^1}$.*

Demostración:

1. Primero veremos que f es diferenciable:

Definamos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ como $g(x,y) = (x, y, L_1(x,y), L_2(x,y))$, con L_1 y L_2 tales que $L(x,y) = (L_1(x,y), L_2(x,y))$ y $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ como $h(x,y,z,w) = \langle (x,y),(z,w) \rangle = xz + yw$. Entonces $f = h \circ g$. Observemos que g es diferenciable, ya que cada función coordenada de g es lineal. Además h también es diferenciable, por ser suma de productos de funciones diferenciables. Así, f es diferenciable.

2. Para probar que los valores propios de L son los puntos extremos de $f|_{\mathbb{S}^1}$, primero notemos que f es continua por ser diferenciable. Además, $\mathbb{S}^1$ es compacto en $\mathbb{R}^2$ por ser cerrado y acotado. Luego, $f|_{\mathbb{S}^2}$ alcanza sus valores extremos en $\mathbb{S}^1$.

Ahora, utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para ver que son los valores propios:

Definamos $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $r(x,y) = \|(x,y)\|^2$ con la restricción $r(x,y) = 1$. Es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Sea $F(\lambda, x, y) = f(x,y) - \lambda(r(x,y) - 1)$. Por ser L autoadjunta, su matriz asociada A es simétrica, digamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Luego, $F(\lambda, x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Entonces el gradiente de F queda como

$$\nabla F(\lambda, x, y) = (-x^2 - y^2 + 1,\ 2a_{11}x + 2a_{12}y - 2\lambda x,\ 2a_{12}x + 2_{22}y - 2\lambda y).$$

Al igualar el gradiente a cero para buscar los puntos críticos de F obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= \lambda x \\ a_{12}x + a_{22}y &= \lambda y. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Luego,

$$L(x,y) = A(x,y)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

es decir, λ es un valor propio de L.

Utilizaremos la matriz hessiana para ver cuál es el máximo y cuál es el mínimo:

Calculando las segundas derivadas parciales de F respecto a λ, x y y tenemos:

$$\begin{array}{ccc} F_{\lambda\lambda}(\lambda,x,y) = 0, & F_{\lambda x}(\lambda,x,y) = -2x, & F_{\lambda y}(\lambda,x,y) = -2y \\ F_{x\lambda}(\lambda,x,y) = -2x, & F_{xx}(\lambda,x,y) = 2a_{11} - 2\lambda, & F_{xy}(\lambda,x,y) = 2a_{12} \\ F_{y\lambda}(\lambda,x,y) = -2y, & F_{yx}(\lambda,x,y) = 2a_{12}, & F_{yy}(\lambda,x,y) = 2a_{22} - 2\lambda \end{array}.$$

Entonces la matriz hessiana es

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & 2a_{11} - 2\lambda & 2a_{12} \\ -2y & 2a_{12} & 2a_{22} - 2\lambda \end{bmatrix}$$

y su determinante es

$$det(M_H) = 2x[(-2x)(2a_{22} - 2\lambda) - (2a_{12})(-2y)] - 2y[(-2x)(2a_{12}) - (2a_{11} - 2\lambda)(-2y)]$$

$$= -8[(a_{22} - \lambda)x^2 - 2a_{12}xy + (a_{11} - \lambda)y^2].$$

Utilizando el polinomio característico de A tenemos que

$$det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0,$$

de donde

$$a_{12}^2 = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}),$$

es decir,

$$a_{12} = \pm\sqrt{(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)}.$$

Analizaremos los valores del argumento:

Caso I: Si $a_{11} - \lambda > 0$, entonces $a_{22} - \lambda > 0$. Entonces $\lambda < mín\{a_{11}, a_{22}\}$ y $a_{12} = \pm\sqrt{a_{11} - \lambda}\sqrt{a_{22} - \lambda}$. Con esto el determinante hessiano queda como

$$det(M_H) = -8[(a_{22} - \lambda)x^2 \pm 2\sqrt{a_{11} - \lambda}\sqrt{a_{22} - \lambda}\, xy + (a_{11} - \lambda)y^2]$$

$$= -8(\sqrt{a_{22} - \lambda}\, x \pm \sqrt{a_{11} - \lambda}\, y)^2 \leq 0,$$

por lo que λ es un valor mínimo.

Caso II: Si $a_{11} - \lambda = 0$, entonces $a_{12} = 0$ y por las ecuaciones de (1.4.6), se tiene que

$\lambda = a_{11} = a_{22}$.

Caso III: Si $a_{11} - \lambda < 0$, entonces $\lambda - a_{11} > 0$ y $\lambda - a_{22} > 0$. Luego, $\lambda > máx\{a_{11}, a_{22}\}$ y $a_{12} = \pm\sqrt{\lambda - a_{11}}\sqrt{\lambda - a_{22}}$. Entonces el determinante hessiano se escribe como

$$det(M_H) = -8[(a_{22} - \lambda)x^2 \pm 2\sqrt{\lambda - a_{11}}\sqrt{\lambda - a_{22}}xy + (a_{11} - \lambda)y^2]$$

$$= 8(\sqrt{\lambda - a_{11}}x \pm \sqrt{\lambda - a_{22}}y)^2 \geq 0,$$

por lo que λ es un valor máximo. ■

Así, pues, para el caso particular de II_p y D_N se tiene:

Corolario 1.4.8. *k_1 y k_2 son el máximo y mínimo de $II_p|_{\mathbb{S}^2}$.* □

Así, hemos garantizado que las direcciones de la base ortonormal mencionada en el Corolario 1.4.5 son en las que la curvatura de la superficie es mayor y es menor. Estos vectores y valores propios de D_N, por su importancia, son llamados de manera especial (ver [3] pág. 146):

Definición 1.4.4. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, $B = \{w_1, w_2\}$ base ortonormal de $T_p(S)$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $D_N(p)(w_1) = k_1 w_1$ y $D_N(p)(w_2) = k_2 w_2$.*

a) *k_1 y k_2 son llamados las **curvaturas principales en p**.*

b) *w_1 y w_2 son llamados las **direcciones principales en p**.*

Ahora que tenemos conocimiento de la curvatura de una superficie orientada en un punto, definiremos la curvartura gaussiana y la curvatura media (ver [3] pág. 148):

Definición 1.4.5. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$.*

a) *La **curvatura gaussiana de S en p** es el número $K = det(DN(p))$.*

b) *La **curvatura media de S en p** es el número $H = \frac{1}{2}tr(DN(p))$.*

c) *Definimos la **norma de $B = DN(p)$** como $\|B\| = \sqrt{tr(BB^T)}$.*

Observación:

1. En términos de k_1 y k_2, se tiene que $K = k_1k_2$, $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ y $\|B\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

Así pues, en términos de las curvaturas principales, la curvatura gaussiana es el producto de ellas, mientras que la curvatura media es su promedio.

Ejemplo 1.4.9.

1. *Para el plano $\mathcal{P}$, $K = H = \|B\| = 0$.*

2. *Para $\mathbb{S}^2$, $K = H = 1$ y $\|B\| = \sqrt{2}$.*

A partir de la curvatura gaussiana K es posible hacer una clasificación sobre los tipos de superficies que se presentan. En particular, más adelante nos interesará poder clasificar la superficie con la que estemos trabajando como una esfera. En este capítulo veremos que hay otra superficie particular que *a priori* podría parecer dificultar ligeramente el alcanzar nuestro propósito. Sin embargo, otras condiciones permitirán obtener la conclusión deseada.

Antes de pasar al resultado que nos interesa, daremos la siguiente definición (ver [3] pág. 149):

Definición 1.4.6. *Sea S una superficie regular y $p \in S$.*

a) *Decimos que p es un **punto umbilical** si $k_1 = k_2$ en p.*

b) *Decimos que S es una **superficie totalmente umbilical** si para cada $p \in S$, p es un punto umbilical.*

Si en un punto $p \in S$ la mínima y máxima curvatura son iguales, naturalmente la curvatura en todas las direcciones posibles tendrán el mismo valor, es decir *alrededor de p, S tiene la misma curvatura.*

Ejemplo 1.4.10.

1. *Para cada $p \in \mathcal{P}$, p es un punto umbilical.*

2. *Para cada $p \in \mathbb{S}^2$, p es un punto umbilical.*

Ahora presentaremos un teorema para superficies totalmente umbilicales que poseen una condición adicional (ver [3] pág. 149).

Teorema 1.4.11. *Sea S una superficie regular conexa. Si S es totalmente umbilical, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.*

Demostración:

Sea $p \in S$, $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de p y $\beta = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ una base para $T_p(S)$. Como $DN(p)$ es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable, por lo cual existe una matriz diagonal D y una matriz ortogonal A tal que $A^T DN(p)A = D$. Además, $A^T = A^{-1}$, y como $k_1 = k_2 = \lambda$, $D = \lambda I_{22}$. Así,

$$\lambda I_{22} = D = A^T DN(p)A = A^{-1}DN(p)A.$$

Premultiplicando por A y posmultiplicando por A^{-1}:

$$\lambda I_{22} = \lambda AA^{-1} = A(\lambda I_{22})A^{-1} = A(A^{-1}DN(p)A)A^{-1} = DN(p),$$

es decir, $DN(p) = \lambda I_{22}$.

Ya que para cada $q_0 \in V \cap S$, q_0 es un punto umbilical, se tiene que para cada $w = a_1\varphi_u + a_2\varphi_v \in T_{q_0}(S)$,

$$D_N(q_0)(w) = DN(q_0)(w) = \lambda(q_0)I_{2\times 2}w = \lambda(q_0)w.$$

Veamos que λ es una función diferenciable: Sabemos que para cada $q_0 \in V \cap S$, II_{q_0} es diferenciable. Además,

$$II_{q_0}(\varphi_u(q_0)) = \langle D_N(q_0)(\varphi_u(q_0)), \varphi_u(q_0)\rangle = \langle \lambda(q_0)\varphi_u(q_0), \varphi_u(q_0)\rangle = \lambda(q_0)\left\|\varphi_u(q_0)\right\|^2$$

Así, $\lambda : V \cap S \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lambda(q_0) = \frac{II_{q_0}(\varphi_u(q_0))}{\|\varphi_u(q_0)\|^2}$, con lo cual concluimos que λ es diferenciable.

Por otro lado, $D_N(q_0)(w) = a_1N_u + a_2N_v$. De ahí que para cada $w \in T_{q_0}(S)$, $a_1N_u + a_2N_v = \lambda(a_1\varphi_u + a_2\varphi_v)$. En particular, para φ_u y φ_v se tiene

$$N_u = \lambda\varphi_u \qquad \text{y} \qquad N_v = \lambda\varphi_v.$$

Derivando la primera igualdad respecto de v y la segunda igualdad respecto de u se obtiene

$$N_{uv} = (\lambda \circ \varphi)_v \varphi_u + (\lambda \circ \varphi)\varphi_{uv} \quad \text{y} \quad N_{vu} = (\lambda \circ \varphi)_u \varphi_v + (\lambda \circ \varphi)\varphi_{vu},$$

y restando la segunda ecuación de la primera

$$(\lambda \circ \varphi)_v \varphi_u - (\lambda \circ \varphi)_u \varphi_v = 0.$$

Puesto que $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son linealmente independientes, se sigue que $(\lambda \circ \varphi)_u = (\lambda \circ \varphi)_v = 0$. Ya que $V \cap S$ es conexo, obtenemos que $(\lambda \circ \varphi)$ es constante en U, es decir, λ es constante en $V \cap S$.

Caso Ia: Si $\lambda = 0$, $N_u = N_v = 0$, por lo que $N = N_0$ es constante en $V \cap S$.
Si derivamos $\langle \varphi, N_0 \rangle$ respecto de u, la derivada queda como $\langle \varphi, N_0 \rangle_u = \langle \varphi_u, N_0 \rangle + \langle \varphi, 0_{\mathbb{R}^3} \rangle = 0$. De manera similar, derivando respecto a v se obtiene que $\langle \varphi, N_0 \rangle_v = 0$. Por lo tanto, para cada $(u, v) \in U$, $\langle \varphi(u, v), N_0 \rangle$ es constante, por lo que existe $c \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\langle \varphi(u, v), N_0 \rangle = c$, por lo que $V \cap S$ está contenido en un plano.
Caso IIa: $\lambda \neq 0$. Sea $\psi(u, v) = \varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v)$. Derivando respecto de u:

$$\psi_u(u, v) = \varphi_u(u, v) - \frac{1}{\lambda} N_u(u, v) = 0.$$

De manera semejante, $\psi_v(u, v) = 0$. Por tanto, $\psi(u, v)$ es constante. Entonces

$$\|\varphi(u, v) - \psi(u, v)\|^2 = \left\| \varphi(u, v) - \varphi(u, v) + \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right\|^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

por lo que $V \cap S$ está contenido en una esfera con centro en $\psi(u, v)$ y radio $\frac{1}{|\lambda|}$. Ahora bien, ya que S es conexo, para un punto $p_1 \in S$ existe una curva continua $\alpha : [0, 1] \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = p_1$. Entonces para cada $\alpha(t) \in S$, existe una vecindad V_t tal que $V_t \cap S$ está contenida en una esfera o en un plano y de tal modo que $\alpha^{-1}[V_t]$ es un conjunto abierto en $[0,1]$. Entonces $\bigcup_{t\in[0,1]} \alpha^{-1}[V_t]$ cubre a $[0,1]$, el cual es compacto, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left\{\alpha^{-1}(V_{t_i}) : i = \overline{1,k}\right\}$ es una cubierta abierta de $[0,1]$. Entonces $\alpha\,[[0,1]]$ es cubierto por una cantidad finita de vecindades V_{t_i}.

Caso Ib: Si para algún t_{i_0}, $V_{t_{i_0}} \cap S$ está en un plano, por el caso Ia tenemos que λ es constante en $\left(\bigcup_{i=1}^k V_{t_i}\right) \cap S$. Luego, ya que $\lambda = 0$ en $V_{t_{i_0}} \cap S$, lo es en todo $\left(\bigcup_{i=1}^k V_{t_i}\right) \cap S$, y como p_1 es arbitrario, todos los puntos de S están en un plano.

Caso IIb: Si para algún t_{i_0}, $V_{t_{i_0}} \cap S$ está en una esfera, por el caso IIa tenemos que λ es constante en $\left(\bigcup_{i=1}^k V_{t_i}\right) \cap S$. Luego, ya que $\lambda \neq 0$ en $V_{t_{i_0}} \cap S$, lo es en todo $\left(\bigcup_{i=1}^k V_{t_i}\right) \cap S$. Finalmente, ya que p_1 es arbitrario, todos los puntos de S están en una esfera. ■

En el ejemplo 1.4.10 se aprecia que al menos dos tipos de superficies tienen puntos umbilicales en toda su extensión. Luego el teorema 1.4.11 dice que bajo la condición de conexidad, las superficies que son totalmente umbilicales tienen que ser necesariamente parte de una esfera o parte de un plano. En el capítulo 3 será cuando hagamos uso de este importante teorema.

Al igual que una parametrización local alrededor de un punto $p \in S$, una función de Gauss N genera una base $B_N = \{N_u, N_v\}$ para $T_p(S)$. Estos son los vectores columna de la matriz $DN(p)$. Para una parametrización alrededor de p, $\varphi : U \to V \cap S$, y una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ tal que $\alpha(0) = q$, sea $\beta = \varphi \circ \alpha$. Así que $\beta(0) = p$.

Al calcular la derivada de la función de Gauss sobre la curva tenemos que

$$(N \circ \beta)'(t) = DN(\beta(t))\beta'(t) = DN(\beta(t))D\varphi(\alpha(t))(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$$

$$= DN(\beta(t))\left(\alpha_1'(t)\varphi_u + \alpha_2'(t)\varphi_v\right) = \alpha_1'(t)N_u + \alpha_2'(t)N_v.$$

Teniendo ya esta expresión, podemos calcular el valor de la segunda forma fundamental en el vector tangente:

$$
\begin{aligned}
II_p(\beta'(0)) &= \langle \beta'(0), D_N(p)(\beta'(0))\rangle = \langle r\varphi_u + s\varphi_v, rN_u + sN_v\rangle \\
&= r^2 \langle \varphi_u, N_u\rangle + rs \langle \varphi_u, N_v\rangle + rs \langle \varphi_v, N_u\rangle + s^2 \langle \varphi_v, N_v\rangle .
\end{aligned}
$$

Notemos que $\langle \varphi_u, N\rangle = 0$, por lo que $0 = \langle \varphi_u, N\rangle_v = \langle \varphi_{uv}, N\rangle + \langle \varphi_u, N_v\rangle$. Luego, $\langle \varphi_u, N_v\rangle = -\langle \varphi_{uv}, N\rangle$. De manera análoga, ahora derivando respecto de v, se obtiene que $\langle \varphi_v, N_u\rangle = -\langle \varphi_{vu}, N\rangle$. Por lo tanto, $\langle \varphi_u, N_v\rangle = \langle \varphi_v, N_u\rangle$. Si denotamos $e = \langle \varphi_u, N_u\rangle$, $f = \langle \varphi_u, N_v\rangle$ y $g = \langle \varphi_v, N_v\rangle$ y usamos la observación previa, la segunda forma fundamental se escribe como:

$$
II_p(w) = r^2 e(q) + 2rsf(q) + s^2 g(q) \tag{1.4.7}
$$

o como

$$
II_p(w) = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} . \tag{1.4.8}
$$

Llamaremos a e, f y g los **coeficientes de la segunda forma fundamental**.

Por otro lado, al escribir los vectores de la base B_N en términos de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\
N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v
\end{aligned} \tag{1.4.9}
$$

Con esto, podemos reescribir el operador de Weingarten en $\beta'(0)$ como

$$DN(p)(r,s) = rN_u + sN_v = r(a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) + s(a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v)$$

$$= (a_{11}r + a_{12}s)\varphi_u + (a_{21}r + a_{22}s)\varphi_v$$

o sea

$$DN(p)(r,s) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \tag{1.4.10}$$

También podemos relacionar los coeficientes de la segunda forma fundamental con los de la primera:

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ f &= \langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_u, a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ f &= \langle \varphi_v, N_u \rangle = \langle \varphi_v, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ g &= \langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_v, a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse como ecuación de producto de matrices

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Ya que $EG - F^2 > 0$, la matriz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ es invertible con inversa

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

con lo que podemos escribir la matriz de $D_N(p)$ como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}.$$

Así, los términos a_{ij} se expresan como

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{eG - fF}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{fE - eF}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{fG - gF}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{gE - fF}{EG - F^2} \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Con todo esto, podemos dar la curvatura de Gauss y la curvatura media a partir de los coeficientes e, f, g y E, F y G:

$$\begin{aligned} K &= det(DN(p)) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \frac{(eG - fF)(gE - fF)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(fE - eF)(fG - gF)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{egEG - f^2EG - egF^2 + f^2F^2 - eGfF + eGfF - gEfF + gEfF}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

$$H = \frac{1}{2}tr(DN(p)) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{eG - fF + gE - fF}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}. \qquad (1.4.14)
\end{aligned}
$$

Más adelante, haremos uso de estas expresiones, cuando hablemos de la funciones de área y volumen.

Ejemplo 1.4.12.

1. *Para el plano* $\mathcal{P}$*,* $e = \langle P_1, 0_{\mathbb{R}^3}\rangle = 0$ $f = \langle P_1, 0_{\mathbb{R}^3}\rangle = 0$ *y* $g = \langle P_2, 0_{\mathbb{R}^3}\rangle = 0$*. Entonces*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{EG - F^2} = 0 \quad y$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{0}{2(EG - F^2)} = 0. \lhd$$

2. *Para* $\mathbb{S}^2$*,* $e = \langle(\varphi_1)_u, N_u\rangle = \langle(\varphi)_u, (\varphi_1)_u\rangle = E = sen^2(v)$*,* $f = \langle(\varphi_1)_u, N_v\rangle = \langle(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_v\rangle = F = 0$ *y* $g = \langle(\varphi_1)_v, N_v\rangle = \langle(\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v\rangle = G = 1$*. Luego,*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{EG - F^2}{EG - F^2} = 1 \quad y$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{E + E}{E} = \frac{2sen^2(v)}{2sen^2(v)} = 1. \lhd$$

3. *Dada una superficie de revolución* S*, la parametrización* (1.2.1) *y con vector normal definido en* (1.4.2) *para cada punto* $p \in S$*, tenemos que*

$$N_u(u,v) = \left(-\frac{g'(v)sen(u)}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}}, \frac{g'(v)cos(u)}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}}, 0 \right)$$

$$N_v(u,v) = \frac{[g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)]}{(f'(v)^2 + g'(v)^2)^{\frac{3}{2}}} \left(f'(v)cos(u), f'(v)sen(u), g'(v) \right),$$

con lo cual, los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental se expresan como

$$\begin{aligned} e =& \frac{f(v)g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}} \\ f =& 0 \\ g =& \frac{g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}}. \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Por esto, podemos escribir a H como

$$H = \frac{g'(v)}{2f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}} + \frac{f'(v)\left[g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)\right]}{2\left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.4.16}$$

y a K como

$$K = \frac{g'(v)\left[g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)\right]}{f(v)\left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)^2} \tag{1.4.17}$$

Capítulo 2

Problemas variacionales

2.1. Preliminares

Antes de abordar el objeto de estudio de este capítulo, introduciremos un par de definiciones que serán útiles. Empezaremos por definir el concepto de producto interno sobre una superficie S. Para esto, nos auxiliaremos del producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ y del plano tangente a S en un punto p, obteniendo de esta manera una generalización del producto interno en el plano.

Definición 2.1.1. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y φ una parametrización local alrededor de p. Para dos vectores $w_1 = r_1\varphi_u(q) + s_1\varphi_v(q), w_2 = r_2\varphi_u(q) + s_2\varphi_v(q) \in T_p(S)$ definimos el* ***producto interno de $\mathbf{w_1}$ con $\mathbf{w_2}$ sobre $\mathbf{S}$ en*** *como*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_S = \langle D_\varphi(q)(r_1, s_1), D_\varphi(q)(r_2, s_2) \rangle . \tag{2.1.1}$$

Notemos que este producto se efectúa realmente sobre el plano tangente $T_p(S)$, por lo que para cada punto $p \in S$ se tiene un producto interno diferente. Por otro lado, la definición dada nos dice que el producto interno se define como el producto de los vectores vistos como vectores en $\mathbb{R}^3$, independientemente del punto que se haya considerado.

El siguiente resultado nos muestra que, en general, podemos escribir cualquier producto de vectores tangentes en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Teorema 2.1.1. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, φ una parametrización local alrededor de p y $w_1 = r_1\varphi_u(q) + s_1\varphi_v(q), w_2 = r_2\varphi_u(q) + s_2\varphi_v(q) \in T_p(S)$. Entonces*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_S = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix}. \quad \square \tag{2.1.2}$$

Observación:

1. Si $w_1 = w_2 = w$, tenemos

$$\langle w, w \rangle_S = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = I_p(w),$$

es decir, el producto interno en S de un vector consigo mismo coincide con la primera forma fundamental en ese mismo vector.

En cálculo vectorial, dada una función real de variable vectorial y diferenciable, es posible calcular la variación en una dirección particular, es decir, podemos hallar la derivada direccional en una dirección específica. El vector que indicará la dirección se escoge dentro del dominio de la función.

Ahora queremos generalizar esta noción. Para ello, consideraremos un campo vectorial con dominio una superficie regular, y tomaremos la dirección en el plano tangente a la superficie en un punto dado:

Definición 2.1.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, $p \in S$, $w \in T_p(S)$ y $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva en S tal que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = w$. Definimos la* ***derivada direccional de F en la dirección de w*** *como*

$$D_w(F)(p) = (F \circ \beta)'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0}. \tag{2.1.3}$$

Ahora que hemos definido el producto interno y la derivada direccional en relación a una superficie, utilizaremos estos conceptos para poder definir el gradiente sobre el plano tangente a una superficie en un punto dado (ver [3] pág. 104):

Definición 2.1.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el* ***gradiente de f sobre la superficie S****, como la función $\nabla_S(f) : S \to T_p(S)$ tal que para cada $w \in T_p(S)$, $\langle \nabla_S f(p), w \rangle_S = D_w f(p)$.*

La definición anterior es la manera del cálculo vectorial en la que se calcula la derivada direccional de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en la dirección de un vector v, cuando se conoce el gradiente. Ésto es, $\nabla_v f = \nabla f \cdot v$.

Observación:

1. $\nabla_S f$ es una función diferenciable.

La definición 2.1.3 no es práctica cuando deseamos hallar el gradiente de una función. Afortunadamente, el siguiente teorema nos proporciona una manera de calcularlo (ver [3] pág. 104):

Teorema 2.1.2. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, φ una parametrización local alrededor de p y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces*

$$\nabla_S(f) = \frac{Gf_u - Ff_v}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{Ef_v - Ff_u}{EG - F^2}\varphi_v. \quad \square \tag{2.1.4}$$

En cálculo vectorial, para campos vectoriales $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define el concepto de divergencia. Pensemos en el caso particular de $n = 3$ e intentemos dar una noción de divergencia para superficies regulares. Ahora el dominio del campo será una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. La idea será proyectar la derivada del campo $F : S \to \mathbb{R}^3$ sobre los vectores de una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $T_p(S)$ y sumar las proyecciones que resulten.

Definición 2.1.4. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$, $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal en $T_p(S)$. Definimos la **divergencia del campo F sobre la superficie S** como*

$$div_S(F) = \langle D_{v_1}(F), v_1\rangle + \langle D_{v_2}(F), v_2\rangle \tag{2.1.5}$$

Observación:

1. Si se considera, por ejemplo, a $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ y a $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}$, entonces $div_S(F)$ coincide con la divergencia en $\mathbb{R}^2$ para coordenadas x y y.

Notemos que, al tomar una base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ la divergencia sobre S se calcula sobre el plano tangente $T_p(S)$.
Es deseable que la divergencia así definida siga cumpliendo con las mismas propiedades que la divergencia tradicional. El siguiente teorema justamente garantiza que así sucede:

Teorema 2.1.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $F, G : S \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales $p \in S$, φ una parametrización local alrededor de p y $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ una base local alrededor de p. Entonces:*

1. $div_S(F + G) = div_S(F) + div_S(G)$.

2. *Para una función* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $div_S(fF) = f div_S(F) + \langle \nabla_S f, F \rangle$.$\square$

Uno de los principales resultados en cálculo vectorial es el *Teorema de la divergencia*, que relaciona la integral de línea sobre la curva que delimita un dominio con la divergencia sobre su área, que en su versión para $\mathbb{R}^2$ se enuncia como sigue (ver [4] pág. 508):

Teorema 2.1.4 (de la divergencia). *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio tal que su frontera es $fr(D) = C$, $N : C \to \mathbb{R}^2$ el campo normal a C, $R = D \cup C$ y $F : R \to \mathbb{R}^2$ diferenciable. Entonces*

$$\oint_C \langle F, N \rangle \, ds = \iint_R div(F) dA. \quad \square$$

Ahora presentaremos un resultado más general para superficies regulares de este mismo teorema:

Teorema 2.1.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada, $D \subset S$ un dominio regular tal que su frontera es $fr(D) = C$, $R = D \cup C$ y $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable. Entonces*

$$\int_C \langle F, N \rangle \, ds = \int_R div_S(F) dS. \quad \square \tag{2.1.6}$$

Más adelante este resultado será muy útil para nuestro estudio.

Finalizaremos esta sección definiendo también el "laplaciano sobre una superficie regular":

Definición 2.1.5. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el* ***laplaciano de f sobre la superficie S***

$$\Delta_S(f) = div_S(\nabla_S f). \tag{2.1.7}$$

2.2. Variaciones normales

En esta sección hablaremos acerca del concepto que permitirá desarrollar la herramienta necesaria para poder demostrar el resultado principal de este trabajo. Hablamos del concepto de variación. Intuitivamente, podemos decir que dada una superficie regular S, en un intervalo de tiempo, es posible obsevar cómo evoluciona S, crece, se deforma, etc. Esto es, podemos ver cómo varía una superficie a lo largo del tiempo. En particular nos interesará estudiar esta variación en una"dirección particular". Tal idea se establece formalmente de la siguiente manera (ver [3] pág. 200):

Definición 2.2.1. *Sean* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie regular,* $p \in S$, $\varphi : U \to V \cap S$ *una parametrización alrededor de* p, $Q \subset U$ *un dominio en* $\mathbb{R}^2$, $h : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* $\varepsilon > 0$.

a) *Una* ***variación de*** $\boldsymbol{\varphi[\overline{Q}]}$ *es una función* $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $x((u,v),0) = \varphi(u,v)$.

b) *Si* $N : S \to \mathbb{S}^2$ *es una función de Gauss,* x *es una* ***variación normal de*** $\boldsymbol{\varphi[\overline{Q}]}$ ***determinada por*** $\boldsymbol{h}$ *si* x *es una variación y* $x((u,v),t) = \varphi(u,v) + th(u,v)N(u,v)$.

Nota: *Se suele escribir* $x(u,v,t)$ *haciendo uso de un isomorfismo de conjuntos entre* $\overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ *y el subconjunto* $A = \{(u,v,t) : (u,v) \in \overline{Q} \text{ y } \ t \in \mathbb{R}\}$.

En el inciso a) de nuestra definición se expresa que, en el tiempo $t = 0$, tenemos la superficie original, mientras que el inciso b) nos habla de una variación particular que va deformando, cambiando, la superficie en dirección del vector normal. Este último concepto de variación normal se define también como aquella variación cuyo vector de variación coincide con hN. Hacemos esta aclaración, pues será necesario trabajarlo así más adelante.

Ejemplo 2.2.1.

1. *Definimos* $x : \mathbb{R}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ *como* $x(u,v,t) = (1+t)P_0 + uP_1 + vP_2$. *Entonces* x *es una variación para el plano* $\mathcal{P}$.

2. *La función* $x : \mathbb{R}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$x(u,v,t) = P_0 + uP_1 + vP_2 + t(u+v)\frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|}$$

es una variación normal de $\mathcal{P}$.

3. *Para $\mathbb{S}^2$, $x : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definido como*

$$x(u, v, t) = (sen(u + t)sen(v + t), cos(u + t)sen(v + t), cos(v + t))$$

es una variación.

4. *Para $\mathbb{S}^2$ y la parametrización φ_1 del ejemplo 1.1.1 y la función de Gauss del ejemplo 1.4.2, la función*

$$x(u, v, t) = \varphi_1(u, v) + tc(u, v)N(u, v) = (1 + tc(u, v))\varphi_1(u, v),$$

con $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $c(u, v) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$, es una variación normal.

5. *Si S es una superficie de revolución con parametrización* (1.2.1) *y campo normal* (1.4.2)*, entonces una variación normal para S es*

$$x(u, v, t) = \begin{pmatrix} \left(f(v) + \frac{th(u,v)g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \right) cos(u) \\ \left(f(v) + \frac{th(u,v)g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \right) sen(u) \\ g(v) - \frac{th(u,v)f'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} \end{pmatrix}. \lhd$$

Observación:

1. Para $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la función $x^{t_0} : Q \to \mathbb{R}^3$ tal que $x^{t_0}(u, v) = x(u, v, t_0)$ es una superficie parametrizada.

2. Las derivadas parciales respecto de u y v son $x^t_u = \varphi_u + t(h_u N + hN_u)$ y $x^t_v = \varphi_v + t(h_v N + hN_v)$.

Para una variación normal x, puesto que x^t es una parametrización, podemos calcular los coeficientes E^t, F^t y G^t de la primera forma fundamental:

$E^t = \langle x_u^t, x_u^t \rangle = \langle \varphi_u + t(h_u N + hN_u), \varphi_u + t(h_u N + hN_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + th \langle \varphi_u, N_u \rangle + th_u \langle \varphi_u, N \rangle + th \langle N_u, \varphi_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 hh_u \langle N_u, N \rangle + th_u \langle N, \varphi_u \rangle + t^2 hh_u \langle N, N_u \rangle + t^2 h_u^2 \langle N, N \rangle = E - 2the + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u^2$

$F^t = \langle x_u^t, x_v^t \rangle = \langle \varphi_u + t(h_u N + hN_u), \varphi_v + t(h_v N + hN_v) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + th \langle \varphi_u, N_v \rangle + th_v \langle \varphi_u, N \rangle + th \langle N_u, \varphi_v \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 hh_v \langle N_u, N \rangle + th_u \langle N, \varphi_v \rangle + t^2 hh_u \langle N, N_v \rangle + th_u h_v \langle N, N \rangle = F - 2thf + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v$

$G^t = \langle x_v^t, x_v^t \rangle = \langle \varphi_v + t(h_v N + hN_v), \varphi_v + t(h_v N + hN_v) \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle + th \langle \varphi_v, N_v \rangle + th_v \langle \varphi_v, N \rangle + th \langle N_v, \varphi_v \rangle + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 hh_v \langle N_v, N \rangle + th_v \langle N, \varphi_v \rangle + t^2 hh_v \langle N, N_v \rangle + t^2 h_v^2 \langle N, N \rangle = G - 2thg + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v^2,$

es decir,

$$\begin{aligned} E^t =& E - 2the + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u^2 \\ F^t =& F - 2thf + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v \\ G^t =& G - 2thg + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v^2 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Ejemplo 2.2.2.

1. *Las derivadas parciales de* $x(u,v,t) = P_0 + uP_1 + vP_2 + t(u+v)\frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|}$ *son:*

$$x_u^t(u,v) = P_1 + t\frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|} \qquad y \qquad x_u^t(u,v) = P_2 + t\frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|},$$

mientras que los coeficientes de primera forma fundamental quedan como

$$E^t = \|P_1\|^2 + t^2, \quad F^t = \langle P_1, P_2\rangle + t^2 \quad y \quad G^t = \|P_2\| + t^2.$$

2. *Al considerar $\mathbb{S}^2$ junto con la variación normal del ejemplo 2.2.1, las derivadas parciales de x^t son:*

$$x^t_u(u,v) = (1+tc)(\varphi_1)_u(u,v) \qquad y \qquad x^t_v(u,v) = (1+tc)(\varphi_1)_v(u,v),$$

y los respectivos coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E^t = (1-2tc+t^2c^2)sen^2(v), \quad F^t = 0 \quad y \quad G^t = 1-2tc+t^2c^2.$$

3. *Utilizando los cálculos realizados en el inciso (3) del ejemplo 1.4.12, para una superficie de revolución con la variación del ejemplo 2.2.1, los coeficientes de la Primera Forma Fundamental son*

$$\begin{aligned}
E^t =& f(v)^2 - \frac{2th(u,v)f(v)g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}} + \frac{t^2h(u,v)^2g'(v)^2}{f'(v)^2+g'(v)^2} + t^2h_u(u,v)^2\\
F^t =& t^2h_u(u,v)h_v(u,v)\\
G^t =& f'(v)^2+g'(v)^2 - \frac{2th(u,v)\left[g''(v)f'(v)-g'(v)f''(v)\right]}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}\\
&+ \frac{t^2h(u,v)^2f'(v)^2\left[g''(v)f'(v)-g'(v)f''(v)\right]^2}{\left(f'(v)^2+g'(v)^2\right)^2} + t^2h_v(u,v)^2. \lhd
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Finalizamos esta sección presentando el siguiente concepto (ver [1] pág. 341):

Definición 2.2.2. *Sea $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una variación tal que $x^0[Q] = \varphi[Q] = D$.* ***x* fija la frontera de *D*** *si para cada $q \in \partial Q$ y cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x^t(q) = \varphi(q)$.*

La idea subyacente a esta definición es simplemente que la frontera no varía con la superficie, como al hacer una burbuja de jabón con un soplador de burbujas. La superficie de la burbuja cambia, mientras que el arillo permanece inmutable.

2.3. Primera variación del área

Al modificarse una superficie respecto al tiempo, cabe preguntarse si el área que posee alguna región contenida en ella también se modifica. Por ejemplo, pensemos en un globo sin inflar y calculemos el área que posee. Conforme lo vayamos llenando de aire, a cada instante el área irá creciendo.
En esta sección nos enfocaremos en los cálculos para hallar la razón de cambio de esta variación de área. Así pues, comenzaremos definiendo qué queremos decir con "el área de una región respecto al tiempo" (ver [1] pág. 341).

Definición 2.3.1. *Sea $\varphi : Q \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada y $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi[Q] = D$. Para una variación normal $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$, definimos la* ***función de área de D en el tiempo t*** *como $A_D(t) = A[x^t[Q]]$.*

Antes de pasar a los cálculos sobre la variación del área, recordemos que en la sección 2.2 hemos calculado los coeficientes de la primera forma fundamental para variaciones normales. Una vez que tenemos las expresiones para los coeficientes en función de t E^t, F^t y G^t, podemos plantear la fórmula para calcular el área en tales términos. Primero que nada, veamos cómo se escribe $E^tG^t - (F^t)^2$:

$$E^tG^t - (F^t)^2$$

$$= (E - 2the + t^2h^2 \langle N_u, N_u\rangle + t^2h_u^2)(G - 2thg + t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle + t^2h_v^2)$$

$$-(F - 2thf + t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)^2$$

$$= EG - F^2 - 2thEg + 4thFf - 2thGe + [E(t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle + t^2h_v^2)$$

$$+2the(2thg - t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle - t^2h_v^2)$$

$$+(t^2h^2 \langle N_u, N_u\rangle + t^2h_u^2)(G - 2thg + t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle + t^2h_v^2) - F(t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)$$

$$-2thf(2thf - t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle - t^2h_uh_v)$$

$$-(t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)(F - 2thf + t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)]$$

$$= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R_0,$$

con

$$R_0 = E(t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle + t^2h_v^2) + 2the(2thg - t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle - t^2h_v^2)$$

$$+(t^2h^2 \langle N_u, N_u\rangle + t^2h_u^2)(G - 2thg + t^2h^2 \langle N_v, N_v\rangle + t^2h_v^2) - F(t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)$$

$$-2thf(2thf - t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle - t^2h_uh_v)$$

$$-(t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)(F - 2thf + t^2h^2 \langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v)$$

$$= t^2A_1 + t^2A_2 - t^3A_3 + t^2A_4 - t^3A_5 + t^4A_6 - 2t^2A_7 - t^2A_8 + t^3A_9 + t^3A_9 - t^4A_{10}$$

$$= (A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8)t^2 + (2A_9 - A_3 - A_5)t^3 + (A_6 - A_{10})t^4,$$

es decir,

$$R_0 = (A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8)t^2 + (2A_9 - A_3 - A_5)t^3 + (A_6 - A_{10})t^4,$$

donde

$$\begin{array}{ll} A_1 = E(h^2 \langle N_v, N_v\rangle + h_v^2) & A_6 = (h^2 \langle N_u, N_u\rangle + h_u^2)(h^2 \langle N_v, N_v\rangle + h_v^2) \\ A_2 = 4h^2 eg & A_7 = F(h^2 \langle N_u, N_v\rangle + h_u h_v) \\ A_3 = 2he(h^2 \langle N_v, N_v\rangle - h_v^2) & A_8 = 4h^2 f^2 \\ A_4 = G(h^2 \langle N_u, N_u\rangle + h_u^2) & A_9 = 2hf(h^2 \langle N_u, N_v\rangle + h_u h_v) \\ A_5 = 2hg(h^2 \langle N_u, N_u\rangle + h_u^2) & A_{10} = (h^2 \langle N_u, N_v\rangle + h_u h_v)^2 \end{array} . \qquad (2.3.1)$$

Esto es, R_0 es una función que depende de u, v y t.

Ya que la curvatura media en términos de E, F, G, e, f, y g es $H = \frac{1}{2}\frac{Eg-2Ff+Ge}{EG-F^2}$, factorizando $EG - F^2$ se obtiene

$$E^tG^t - (F^t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH + R),$$

con $R = R_0/(EG - F^2)$.

Con esto, la fórmula del área dada en el teorema 1.3.8 en función de t queda como

$$\begin{aligned} A_D(t) &= \iint_{\overline{Q}} \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\, dudv = \iint_{\overline{Q}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH + R)}\, dudv \\ &= \iint_{\overline{Q}} \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 - 4thH + R}\, dudv \qquad (2.3.2) \end{aligned}$$

Para facilitar el trabajo referente al cómputo de la variación del área, introducimos el siguiente resultado (ver [10] pág. 256 y [11]):

Teorema 2.3.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que $A \approx I \times J$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto y $J \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto, y $f : A \to \mathbb{R}$. Si*

i) *$f(x, \cdot, \cdot)$ es derivable en I*

ii) *$f(\cdot, y, z)$ es integrable en J*

iii) *$\frac{\partial}{\partial x} f$ es continua en A,*

entonces

$$\frac{d}{dx} \iint\limits_J f(x, y, z) dydz = \iint\limits_J \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dydz. \quad \square$$

Para simplificar los cálculos, sea $\xi = \sqrt{EG - F^2}$ y definamos la función

$$a(u, v, t) = \sqrt{1 - 4th(u, v)H(u, v) + R(u, v, t)}. \tag{2.3.3}$$

Notemos que a es derivable respecto a t, con derivada

$$\frac{\partial a(u, v, t)}{\partial t} = \frac{-4h(u, v)H(u, v) + R'(u, v, t)}{2\sqrt{1 - 4th(u, v)H(u, v) + R(u, v, t)}} \tag{2.3.4}$$

donde $R'(u, v, t) = \frac{\partial}{\partial t} R(u, v, t)$

$$= \left(\frac{2(A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8)t + 3(2A_9 - A_3 - A_5)t^2 + 4(A_6 - A_{10})t^3}{EG - F^2} \right)(u, v). \tag{2.3.5}$$

Además, ξa es integrable en $\overline{Q}$ y $\xi \frac{\partial}{\partial t} a$ continua en $D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Si evaluamos en $t = 0$, la ecuación (2.3.4) se reduce a $\frac{\partial}{\partial t} a = -2hH$. Con esta última observación y el hecho de que para ε pequeña $A(t)$ es diferenciable, por el teorema 2.3.1 se tiene que la derivada de A en $t = 0$ es:

$$A'_D(0) = \frac{d}{dt} \int_D \sqrt{1 - 4thH + R}\, dS \bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} \iint\limits_{\overline{Q}} \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 - 4thH + R}\, dudv \Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \iint\limits_{\overline{Q}} \xi a(u,v,t)\, dudv \Bigg|_{t=0} = \iint\limits_{\overline{Q}} \xi \left. \frac{\partial}{\partial t} a(u,v,t) \right|_{t=0} dudv$$

$$= \iint\limits_{\overline{Q}} -2hH\xi\, dudv = - \iint\limits_{\overline{Q}} 2hH\sqrt{EG - F^2}\, dudv = - \int_D 2hH\, dS.$$

Es decir,

$$A'_D(0) = - \int_D 2hH\, dS. \tag{2.3.6}$$

En general, la primera derivada de la función de área A está dada por

$$A'_D(t) = \int_D \frac{-4hH + R'}{2\sqrt{1 - 4thH + R}}\, dS. \tag{2.3.7}$$

Calcularemos también la segunda derivada parcial de R respecto a t. Esto queda como:

$$R''(u,v,t) = \frac{\partial}{\partial t} R'(u,v,t)$$

$$= \left(\frac{2(A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8) + 6(2A_9 - A_3 - A_5)t + 12(A_6 - A_{10})t^2}{EG - F^2} \right)(u,v). \tag{2.3.8}$$

Más adelante aparecerá esta función en nuestros cálculos.

Ejemplo 2.3.2.

1. *Considerando el plano $\mathcal{P}$ y la variación normal del ejemplo 2.1.1., de $R = \varphi[Q]$,* *donde* $Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \|(u,v)\| < r\}$*, para* $r > 0$*. Entonces*

$$A_R'(0) = -\int_R 2(u+v)0\, dS = -\int_R 0\, dS = 0.$$

Más aún, ya que $H = 0$*, para cualquier función* h*,* $A_R'(0) = 0$. $\triangleleft$

2. *Para* $\mathbb{S}^2$ *con la variación normal del ejemplo 2.2.1,* $Q = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ *y* $R = \varphi_1[Q]$*, tenemos*

$$A_R'(0) = -\int_R 2c1 dS = -2c\int_R dS = -2cA_R(0) = -2c(4\pi) = -8\pi c. \qquad \triangleleft$$

3. *Si* S *es una superficie de revolución, por la ecuación* (1.4.16)*, la primera variación del área de* S *en* $t = 0$ *es*

$$A'(0) = \int_a^b \int_0^{2\pi} h(u,v)\left(g'(v) + \frac{f(v)\left[g''(v)f'(v) - g'(v)f''(v)\right]}{f'(v)^2 + g'(v)^2}\right) dudv. \triangleleft \tag{2.3.9}$$

2.4. Primera variación del volumen

Del mismo modo que nos hemos preguntado si una variación modifica el área de una región, podemos preguntarnos qué ocurre con el volumen. Hemos de aclarar que el **volumen de una región en una superficie** es el "cono" que se forma teniendo la región como base y el origen en $\mathbb{R}^3$ como vértice del cono. La respuesta en general es afirmativa (aunque no siempre). Para formalizarla tenemos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sea $\varphi : Q \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada y $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi[Q] = D$. Para una variación normal $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$, definimos la* ***función de volumen de D en el tiempo t*** *como $V_D(t) = V[x^t[Q]]$.*

Haciendo un poco de énfasis en el *"aunque no siempre"* del párrafo anterior, en ocasiones las variaciones no modifican el volumen de la región. Esto significa que a través del tiempo el volumen se preserva.

Definición 2.4.2. *Sea $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una variación tal que $x^0[Q] = \varphi[Q] = D$. x* ***preserva el volumen*** *si para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $V_D(t) = V_D(0)$.*

Esta definición será utilizada más adelante.

Ahora daremos una expresión para el cálculo de la primera variación del volumen de una región, contenida en superficie regular, en función del tiempo. A diferencia de la sección 2.3, los cálculos en esta ocasión son un poco más *largos*, por lo que para abordarlos, antes necesitaremos un par de resultados previos.

Lema 2.4.1. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada, $Q \subset U$ un dominio, $h : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ diferenciable y $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una variación normal.*
Entonces $\frac{\partial}{\partial t} \langle x^t, N \rangle \big|_{t=0} = - \langle \nabla_S h, \varphi \rangle + h$.

Demostración:
Sean $(u_0, v_0) \in \overline{D}$ y $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable tal que $\beta(0) = \varphi(u_0, v_0)$. Derivando directamente la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t(u_0, v_0), N(t) \right\rangle \bigg|_{t=0},$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle x^t(u_0,v_0),N(t)\right\rangle\Big|_{t=0}=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}x^t(u_0,v_0),N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}+\left\langle x^t(u_0,v_0),\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$$=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(u_0,v_0)+th(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0))),N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$$+\left\langle\varphi(u_0,v_0)+th(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0)),\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$$=\left\langle h(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0)),N(\varphi(u_0,v_0))\right\rangle|_{t=0}$$

$$+\left\langle\varphi(u_0,v_0)+th(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0)),\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$$=\left\langle h(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0)),N(\varphi(u_0,v_0))\right\rangle+\left\langle\varphi(u_0,v_0),\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\Big|_{t=0}\right\rangle$$

y puesto que N es unitario, la expresión se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle x^t(u_0,v_0),N(t)\right\rangle\big|_{t=0}=h(u_0,v_0)+\left\langle\varphi(u_0,v_0),\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\Big|_{t=0}\right\rangle. \tag{2.4.1}$$

Ahora bien, queremos calcular $\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t))\big|_{t=0}$. Para ello, analizaremos las componentes de las proyecciones sobre los vectores N, x^t_u y x^t_v.
Para empezar, sabemos que $\langle N,N\rangle=1$. Entonces

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle N(\beta(t)),N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0}=2\left\langle\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t)),N(\beta(t))\right\rangle\Big|_{t=0},$$

es decir, $\left\langle\frac{\partial}{\partial t}N,N\right\rangle=0$. Además, ya que N y x^t_u son ortogonales, se tiene $\langle N,x^t_u\rangle=0$.
Luego

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle N(\beta(t)),x^t_u(u_0,v_0)\right\rangle|_{t=0}=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}N(\beta(t)),x^t_u(u_0,v_0)\right\rangle\Big|_{t=0}+\left\langle N(\beta(t)),\frac{\partial}{\partial t}x^t_u(u_0,v_0)\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(\beta(t)), \varphi_u(u_0,v_0) + t(h_u(u_0,v_0)N(\beta(t)) + h(u_0,v_0)N_u(\beta(t))) \right\rangle\Big|_{t=0}$$
$$+ \left\langle N(\beta(t)), \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_u(u_0,v_0) + t\,(h_u(u_0,v_0)N(\beta(t)) + h(u_0,v_0)N_u(\beta(t)))) \right\rangle\Big|_{t=0}$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(\varphi(u_0,v_0)), x_u^t(u_0,v_0) \right\rangle$$
$$+ \langle N(\varphi(u_0,v_0)), h_u(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0)) + h(u_0,v_0)N_u(\varphi(u_0,v_0))\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(\varphi(u_0,v_0)), x_u(u_0,v_0) \right\rangle + \langle N(\varphi(u_0,v_0)), h_u(u_0,v_0)N(\varphi(u_0,v_0))\rangle$$
$$+ \langle N(\varphi(u_0,v_0)), h(u_0,v_0)N_u(\varphi(u_0,v_0))\rangle$$

y dado que $\langle N, N_u\rangle = 0$, se obtiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} N, x_u^t \right\rangle = -h_u$$

Análogamente, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} N, x_v^t \right\rangle = -h_v$. Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\beta(t))\Big|_{t=0} = -h_u x_u^t - h_v x_v^t = -\left(h_u x_u^t + h_v x_v^t\right) = -\nabla_S h.$$

Se concluye así que $\frac{\partial}{\partial t}\left\langle x^t, N(t)\right\rangle\big|_{t=0} = -\left\langle \nabla_S h, \varphi\right\rangle + h$. ■

Para el siguiente lema, requeriremos de un par de definiciones.

Definición 2.4.3. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada tal que $\varphi[U] = S$ y $N : S \to \mathbb{R}^3$ un campo normal a φ.*

a) *Definimos la **componente normal de** φ como $\varphi^\perp := \langle \varphi, N\rangle N$.*

b) *Definimos la **componente tangente de** φ como $\varphi^\top := \varphi - \varphi^\perp$.*

Podemos mencionar brevemente que el inciso *a)* hace que la parametrización φ se proyecte sobre el vector normal, por lo que nos quedamos únicamente con la parte normal de φ, mientras que el inciso *b)* provoca que nos quedemos con la parte de φ que vive en el plano tangente.

Lema 2.4.2. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada, $D \subset U$ un dominio $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ diferenciable y $x : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una variación normal. Entonces $div_S(h\varphi^\top) - 2h = 2hH \langle \varphi, N \rangle + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top \right\rangle$.*

Demostración:
Consideremos una base ortonormal $\{\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_v\}$. Sabemos que $div_S(h\varphi^\top) = h\, div_S(\varphi^\top) + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top \right\rangle$, entonces basta con calcular la divergencia de $\varphi^\top$.
Ya que $\varphi^\top = \varphi - \varphi^\perp$, tenemos que

$$div_S(\varphi^\top) = div_S(\varphi - \varphi^\perp) = div_S(\varphi) - div_S(\varphi^\perp).$$

Ahora bien, por un lado, al calcular la divergencia de φ vista como un campo, tenemos

$$div_S(\varphi) = \langle D_{\tilde{\varphi}_u}\varphi, \tilde{\varphi}_u \rangle + \langle D_{\tilde{\varphi}_v}\varphi, \tilde{\varphi}_v \rangle = 1 + 1 = 2.$$

Por otro lado, ya que $\left\langle \varphi^\perp, \tilde{\varphi}_u \right\rangle = \left\langle \varphi^\perp, \tilde{\varphi}_v \right\rangle = \langle N, \tilde{\varphi}_u \rangle = \langle N, \tilde{\varphi}_v \rangle = 0$,

$$div_S(\varphi^\perp) = \left\langle D_{\tilde{\varphi}_u}(\varphi^\perp), \tilde{\varphi}_u \right\rangle + \left\langle D_{\tilde{\varphi}_v}(\varphi^\perp), \tilde{\varphi}_v \right\rangle = -\left\langle \varphi^\perp, D_{\tilde{\varphi}_u}\tilde{\varphi}_u \right\rangle - \left\langle \varphi^\perp, D_{\tilde{\varphi}_v}\tilde{\varphi}_v \right\rangle$$

$$= -\langle \langle \varphi, N \rangle N, D_{\tilde{\varphi}_u}\tilde{\varphi}_u \rangle - \langle \langle \varphi, N \rangle N, D_{\tilde{\varphi}_v}\tilde{\varphi}_v \rangle = -\langle \varphi, N \rangle \left(\langle D_{\tilde{\varphi}_u} N, \tilde{\varphi}_u \rangle + \langle D_{\tilde{\varphi}_v} N, \tilde{\varphi}_v \rangle \right).$$

Notemos que $div_S(N) = \langle D_{\tilde{\varphi}_u} N, \tilde{\varphi}_u \rangle + \langle D_{\tilde{\varphi}_v} N, \tilde{\varphi}_v \rangle$. Al utilizar los cálculos hechos para bases ortonormales en 1.3.12, estos productos quedan como

$$\langle D_{\tilde{\varphi}_u} N, \tilde{\varphi}_u \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} D_{\varphi_u} N, \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \frac{1}{E} \langle N_u, \varphi_u \rangle = \frac{e}{E},$$

y como

$$\langle D_{\tilde{\varphi}_v} N, \tilde{\varphi}_v \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\sqrt{E} D_{\varphi_v} N - \frac{F}{\sqrt{E}} D_{\varphi_u} N \right), \frac{\sqrt{E}\varphi_v - \frac{F}{\sqrt{E}}\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\xi^2} \left(E \langle N_v, \varphi_v \rangle - F \langle N_v, \varphi_u \rangle - F \langle N_u, \varphi_v \rangle + \frac{F^2}{E} \langle N_u, \varphi_u \rangle \right) = \frac{1}{\xi^2} \left(Eg - 2fF + \frac{F^2}{E} e \right).$$

Entonces, la divergencia de N queda:

$$div_S(N) = \frac{e}{E} + \frac{1}{\xi^2} \left(Eg - 2fF + \frac{F^2}{E} e \right) = \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{EGe}{E} - \frac{F^2 e}{E} + Eg - 2fF + \frac{F^2 e}{E} \right)$$

$$= \frac{1}{\xi^2} (Eg - 2fF + Ge) = 2H.$$

Así,

$$div_S(\varphi^\top) = 2 + 2H \langle \varphi, N \rangle,$$

y por tanto

$$div_S(h\varphi^\top) = h(2 + 2H \langle \varphi, N \rangle) + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top \right\rangle = 2h + 2hH \langle \varphi, N \rangle + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top \right\rangle,$$

es decir

$$div_S(h\varphi^\top) - 2h = 2hH \langle \varphi, N \rangle + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top \right\rangle,$$

como queríamos demostrar. ■

Habiendo ya verificado los lemas anteriores, estamos en condiciones para calcular la expresión prometida para la variación del volumen. Dada una superficie parametrizada φ, una variación normal x y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, el volumen de D respecto a t (ver [1] pág. 341) es

$$V_D(t) = \frac{1}{3} \int_D \left\langle x^t, N(\beta(t)) \right\rangle dS_t = \frac{1}{3} \iint_Q \left\langle x^t, N(\beta(t)) \right\rangle \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv.$$

Definamos la función $b = \langle x^t(o), (N \circ \beta)(t)\rangle \sqrt{1 - 4thH + R}$. Notemos que la derivada de b en t es

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t, (N \circ \beta)(t)\right\rangle \sqrt{1 - 4thH + R} + \left\langle x^t, (N \circ \beta)(t)\right\rangle \frac{-4hH + R'}{2\sqrt{1 - 4thH + R}}.$$

Ya que ξb es integrable en $\overline{Q}$ y $\xi \frac{\partial}{\partial t} b$ es continua en $D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, por el teorema 2.3.1 obtenemos lo siguiente:

$$V_D'(0) = \frac{1}{3}\frac{d}{dt} \int_D \left\langle x^t(o), (N \circ \beta)(t)\right\rangle \sqrt{1 - 4hH + R}\, dS\bigg|_{t=0} = \frac{1}{3} \iint\limits_Q \xi \, \frac{\partial}{\partial t} b\bigg|_{t=0} dudv$$

$$= \frac{1}{3} \iint\limits_Q \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t, (N \circ \beta)(t)\right\rangle\big|_{t=0} + \langle \varphi, (N \circ \varphi)\rangle (-2hH) \right) dudv$$

$$= \frac{1}{3} \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t, (N \circ \beta)(t)\right\rangle |_{t=0} + \langle \varphi, (N \circ \varphi)\rangle (-2hH) \right) dS$$

$$= \frac{1}{3} \left[\int_D \frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t, (N \circ \beta)(t)\right\rangle\big|_{t=0} dS + \int_D \langle \varphi, (N \circ \varphi)\rangle (-2hH)\, dS \right],$$

es decir,

$$V_D'(0) = \frac{1}{3} \left[\int_D \frac{\partial}{\partial t} \left\langle x^t, N\right\rangle |_{t=0} dS + \int_D \langle \varphi, N\rangle (-2hH)\, dS \right].$$

En virtud de los lemas 2.4.1 y 2.4.2, $V_D'(0)$ se escribe como

$$V_D'(0) = \frac{1}{3} \int_D (h - \langle \nabla_S h, \varphi\rangle)\; dS + \frac{1}{3} \int_D \left(2h - div_S\left(h\varphi^\top\right) + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top\right\rangle\right)\; dS$$

$$= \frac{1}{3} \int_D \left(3h - div_S\left(h\varphi^\top\right) - \langle \nabla_S h, \varphi\rangle + \left\langle \nabla_S h, \varphi^\top\right\rangle\right)\; dS =$$

$$\frac{1}{3} \int_D \left(3h - div_S\left(h\varphi^\top\right) - \left\langle \nabla_S h, \varphi^\perp\right\rangle\right)\; dS$$

$$= \frac{1}{3}\int_D \left(3h - div_S\left(h\varphi^\top\right)\right)\, dS = \int_D h\, dS - \frac{1}{3}\int_D div_S\left(h\varphi^\top\right)\, dS,$$

ya que $\left\langle \nabla_S h, \varphi^\perp \right\rangle = 0$. Ahora, por el teorema de la divergencia

$$\int_D div_S\left(h\varphi^\top\right)\, dS = \int_{\partial D} \left\langle h\varphi^\top, N\right\rangle dS,$$

con lo cual se obtiene que

$$V_D'(0) = \int_D h\, dS - \frac{1}{3}\int_{\partial D} \left\langle h\varphi^\top, N\right\rangle dS$$

Finalmente, debido a que $\varphi^\top$ y N son ortogonales se observa que

$$\int_{\partial D} \left\langle h\varphi^\top, \nu\right\rangle dS = 0,$$

por lo que

$$V_D'(0) = \int_D h\, dS. \tag{2.4.2}$$

Ejemplo 2.4.3.

1. *En el plano $\mathcal{P}$, con la variación normal del ejemplo 2.2.1, $Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \|(u,v)\| < r\}$, donde $r > 0$, y $R = \varphi[Q]$, la derivada del volumen evaluada en $t = 0$ es*

$$V_R'(0) = \int_R (u+v) dS = \xi \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-v^2}}^{\sqrt{r^2-v^2}} (u+v) du dv$$

$$= \xi \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-v^2}}^{\sqrt{r^2-v^2}} u\, du + v \int_{-\sqrt{r^2-v^2}}^{\sqrt{r^2-v^2}} du \right) dv$$

$$= \xi \int_{-r}^{r} \left(\left(\frac{r^2 - v^2 - (r^2 - v^2)}{2} \right) + 2v\sqrt{r^2 - v^2} \right) dv$$

$$= 2\xi \int_{-r}^{r} v\sqrt{r^2 - v^2} dv = 0. \quad \triangleleft$$

2. *Consideremos* $\mathbb{S}^2$ *con la variación normal del ejemplo 2.2.1 Si* $Q = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ *y* $R = \varphi_1[Q]$, *entonces*

$$V_R'(0) = \int_R c dS = c \int_R dS = cA_R(0) = 4c\pi. \quad \lhd$$

3. *Si* S *es una superficie de revolución, entonces la primera variación del volumen de* S *en* $t = 0$ *es*

$$V'(0) = \int_a^b \int_0^{2\pi} h(u,v) f(v) \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}\, dudv. \lhd \tag{2.4.3}$$

2.5. Segunda variación del área

Como se vio en la sección 2.2, la primera variación del área respecto al tiempo de una región en una superficie parametrizada es

$$A_D'(t) = \iint_Q \frac{-4hH + R'}{2\sqrt{1 - 4thH + R}} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Ahora vamos a calcular la segunda variación del área. Si calculamos la segunda derivada de la función a dada en (2.3.3) respecto de t, ésta queda como sigue:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{2R''\sqrt{1 - 4thH + R} - 2(\frac{1}{2})(-4hH + R')^2(1 - 4thH + R)^{-\frac{1}{2}}}{4(1 - 4thH + R)}$$

$$= \frac{R''\sqrt{1 - 4thH + R}}{2(1 - 4thH + R)} - \frac{(-4hH + R')^2(1 - 4thH + R)^{-\frac{1}{2}}}{4(1 - 4thH + R)}$$

$$= \frac{1}{2} R''(1 - 4thH + R)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(-4hH + R')^2(1 - 4thH + R)^{-\frac{3}{2}},$$

que por la ecuación (2.3.8), al ser evaluada en $t = 0$ se escribe como

$$\left.\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left(\frac{A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8}{EG - F^2}\right) - (2hH)^2,$$

donde las A_i's son las de las ecuaciones en (2.3.1).

Utilizando nuevamente el teorema 2.3.1, la segunda derivada de A en $t = 0$ queda como

$$A''_D(0) = \frac{d}{dt}\int_D \left.\frac{-4hH + R'}{2\sqrt{1 - 4thH + R}}\, dS\right|_{t=0} = \int_{\overline{Q}} \xi \left.\frac{\partial^2}{\partial x^2} a\right|_{t=0} dudv$$

$$= \iint_Q \xi \left[\left(\frac{A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8}{\xi^2}\right) - (2hH)^2\right] dudv,$$

esto es,

$$A''_D(0) = \int_D \left[\left(\frac{A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8}{\xi^2}\right) - (2hH)^2\right] dS \qquad (2.5.1)$$

Además,

$$\frac{A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}(A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8)$$

$$= \frac{1}{\xi^2}\big(E(h^2 \langle N_v, N_v\rangle + h_v^2) + 4h^2 eg + G(h^2 \langle N_u, N_u\rangle + h_u^2)$$
$$-2F(h^2 \langle N_u, N_v\rangle + h_u h_v) - 4h^2 f^2\big)$$

$$= \frac{1}{\xi^2}\left((Eh_v^2 - 2Fh_u h_v + Gh_u^2) + h^2(E\langle N_v, N_v\rangle - 2F\langle N_u, N_v\rangle + G\langle N_u, N_u\rangle) + 4h^2(eg - f^2)\right).$$

Sea $[\nabla_S h]_\beta = (r, s)$ el vector de coordenadas en la base $\beta = \{\varphi_u, \varphi_v\}$. Notemos primero que $\langle \nabla_S h, \varphi_u\rangle_S = h_u$. Entonces

$$h_u = \langle \nabla_S h, \varphi_u\rangle_S = \begin{pmatrix} r & s\end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ F & G\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ F\end{pmatrix}.$$

Análogamente,

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = h_v,$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} h_u & h_v \end{pmatrix}.$$

Posmultiplicando ambos lados por la matriz inversa tenemos

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_u & h_v \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1},$$

y al trasponer obtenemos

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix}.$$

Con estas observaciones obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{\xi^2}(Eh_v^2 - 2Fh_uh_v + Gh_u^2) = \frac{1}{\xi^2} \begin{pmatrix} h_uG - h_vF & h_vE - h_uF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_u & h_v \end{pmatrix} \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_u & h_v \end{pmatrix} \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} I \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_u & h_v \end{pmatrix} \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left\langle \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix}, \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \end{pmatrix} \right\rangle_S = \langle \nabla_S h, \nabla_S h \rangle_S = \|\nabla_S h\|^2 .$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones de 1.3.4. y de 1.3.6., podemos escribir los diferentes productos de los vectores de derivadas parciales de N respecto a u y v en términos de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental y los coeficientes de $DN(p)$. Esto queda de la siguiente manera:

$$\langle N_u, N_u \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle = a_{11}^2 E + 2a_{11}a_{21}F + a_{21}^2 G$$

$$= a_{11}(a_{11}E + a_{21}F) + a_{21}(a_{11}F + a_{21}G) = a_{11}e + a_{21}f,$$

$$\langle N_u, N_v \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \rangle = a_{11}a_{12}E + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})F + a_{21}a_{22}G$$

$$a_{11}(a_{12}E + a_{22}F) + a_{21}(a_{12}F + a_{22}G) = a_{11}f + a_{21}g,$$

$$\langle N_v, N_v \rangle = \langle a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \rangle = a_{12}^2 E + 2a_{12}a_{22}F + a_{22}^2 G$$

$$a_{12}(a_{12}E + a_{22}F) + a_{22}(a_{12}F + a_{22}G) = a_{12}f + a_{22}g.$$

Entonces

$$E\langle N_v, N_v \rangle - 2F\langle N_u, N_v \rangle + G\langle N_u, N_u \rangle = E(a_{12}f + a_{22}g) - 2F(a_{11}f + a_{21}g) + G(a_{11}e + a_{21}f)$$

$$= a_{12}Ef + a_{22}Eg - a_{11}Ff - a_{11}Ff - a_{21}Fg - a_{21}Fg + a_{11}Ge + a_{21}Gf$$

$$= a_{11}(Ge - Ff) + a_{21}(Gf - Fg) + a_{12}(Ef - eF) + a_{22}(Eg - fF) + F(-a_{11}f + a_{12}e - a_{21}g + a_{22}f)$$

$$= (EG - F^2)(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2) + F(-a_{11}f + a_{12}e - a_{21}g + a_{22}f),$$

y ya que

$$-a_{11}f + a_{12}e - a_{21}g + a_{22}f$$

$$= -a_{11}(a_{12}E + a_{22}F) + a_{12}(a_{11}E + a_{21}F) - a_{21}(a_{12}F + a_{22}G) + a_{22}(a_{11}F + a_{21}G)$$

$$= -a_{11}a_{12}E - a_{11}a_{22}F + a_{12}a_{11}E + a_{12}a_{21}F - a_{21}a_{12}F - a_{21}a_{22}G + a_{22}a_{11}F + a_{22}a_{21}G = 0$$

se obtiene que

$$\frac{1}{\xi^2}(E\langle N_v, N_v\rangle - 2F\langle N_u, N_v\rangle + G\langle N_u, N_u\rangle) = \frac{(EG - F^2)(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)}{EG - F^2}$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = \|B\|^2 .$$

Por lo tanto

$$\frac{A_1 + A_2 + A_4 - 2A_7 - A_8}{\xi^2} = \|\nabla_S h\|^2 + h^2\|B\|^2 + 4h^2K \tag{2.5.2}$$

También se tiene que

$$2K = 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}a_{21}) + (-a_{11}^2 + a_{11}^2 - a_{22}^2 + a_{22}^2)$$

$$= -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2) + [a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{22}(a_{11} + a_{22})]$$

$$= -\|B\|^2 + (a_{11} + a_{22})^2 = -\|B\|^2 + 4H^2 = -\|B\|^2 + (2H)^2,$$

o sea,

$$2K = -\|B\|^2 + (2H)^2 \tag{2.5.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.5.2 y 2.5.3 en la ecuación 2.5.1, el segundo miembro de dicha ecuación se reescribe como

$$\int_D \left[\left(\|\nabla_S h\|^2 + h^2 \|B\|^2 + 4h^2 K\right) - (2hH)^2\right] dS$$

$$= \int_D \left[\|\nabla_S h\|^2 + h^2 \|B\|^2 + 2h^2 \left(-\|B\|^2 + (2H)^2\right) - (2hH)^2\right] dS$$

$$= \int_D \left[\|\nabla_S h\|^2 - h^2 \|B\|^2 + 2(2hH)^2 - (2hH)^2\right] dS$$

$$= \int_D \left[\|\nabla_S h\|^2 - h^2 \|B\|^2 + (2hH)^2\right] dS.$$

Utilizando el inciso 2 del teorema 2.1.3 y despejando la norma al cuadrado de $\nabla_S h$:

$$\|\nabla_S h\|^2 = div_S(h \cdot \nabla_S h) - h \cdot \Delta_S h,$$

tenemos

$$\int_D \left[\|\nabla_S h\|^2 - h^2 \|B\|^2 + (2hH)^2\right] dS$$

$$= \int_D \left[div_S(h \cdot \nabla_S h) - h \cdot \Delta_S h - h^2 \|B\|^2 + (2hH)^2\right] dS$$

$$= \int_D div_S(h \cdot \nabla_S h)\, dS + \int_D \left[-h \cdot \Delta_S h - h^2 \|B\|^2 + (2hH)^2\right] dS.$$

Finalmente, puesto que

$$\int_D div_S(h \cdot \nabla_S h)\, dS = 0,$$

concluímos que la segunda variación del área tiene la forma:

$$A''_D(0) = -\int_D h \left(\Delta_S h + h \|B\|^2 - 4hH^2\right) dS. \tag{2.5.4}$$

Ejemplo 2.5.1.

1. *En el plano $\mathcal{P}$, calcularemos la segunda derivada de la función de área, evaluada en $t = 0$, para $x(u, v, t) = P_0 + uP_1 + vP_2 + t(u + v)\frac{P_1 \times P_2}{\|P_1 \times P_2\|}$,*

$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \|(u,v)\| < r\}$, donde $r > 0$, y $R = \varphi[Q]$. Sabemos, por el inciso (1) del ejemplo 1.4.9 que $\|B\| = H = 0$. Por otro lado, en el inciso (1) del ejemplo 1.3.1 vimos que E, F y G son constantes. Además, por el ejemplo 1.1.1 que φ_u y φ_v también son constantes, y ya que $h_u = h_v = 1$, se concluye que $\nabla_{\mathcal{P}} h$ es constante, de donde se sigue que $\Delta_{\mathcal{P}} h = 0$. Luego,

$$A_R''(0) = -\int_R (u+v)\,[0 + (u+v)0 + 4(u+v)0]\,dS = 0. \lhd$$

2. *Para $\mathbb{S}^2$ y la variación normal del ejemplo 2.2.1, ya que $h(u,v) = c$ es constante, $h_u = h_v = 0$. Entonces $\nabla_{\mathbb{S}^2} h = 0$ y $\Delta_{\mathbb{S}^2} h = 0$. Además, por el inciso (2) del ejemplo 1.4.9, $H = 1$ y $\|B\|^2 = 2$. Así,*

$$A''(0) = -\int_R c\,(0 + 2c + 4c)\,dS = -6c^2 \int_R dS = -6c^2 A[R] = -24\pi c^2. \lhd$$

Capítulo 3

Estabilidad de superficies regulares

En 1984, João Lucas Barbosa y Manfredo do Carmo probaron que las inmersiones de curvatura media constante no nula de variedades diferenciables n-dimensionales son estables siempre y cuando su imagen sea la esfera $\mathbb{S}^n$ (o algo isométrico a ella). En este capítulo introduciremos la herramienta necesaria para después enunciar y presentar una demostración del resultado para el caso de S^2 en $\mathbb{R}^3$.

3.1. Preliminares

En esta sección se establecen algunos resultados que serán necesarios para poder avanzar a la parte central de este trabajo. En concreto, daremos algunas definiciones y probaremos unos cuantos resultados a fin de poderlos usar en la sección 3.2. Empezaremos probando el siguiente lema, cuya utilidad se notará en breve (ver [1] pág. 341):

Lema 3.1.1. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable a trozos.*

1. *Si $\int_D f\, dS = 0$, entonces existe una variación normal que preserva el volumen* *cuyo vector de variación es fN.*

1a. *Si además $f = 0$ en ∂D, la variación fija la frontera.*

Demostración:

1. Definamos $\varphi(t, z) = \varphi_0 + (tf + zg)N$, donde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ es diferenciable a trozos, $g = 0$ en ∂D y $\int_D g\, dS \neq 0$. Sean $V_D(t, z)$ el volumen de $\varphi(t, z)$ y $c \geq 0$, y consideremos la ecuación

$$V_D(t, z) = c.$$

Notemos que

$$V_D(t, z) = \frac{1}{3} \int_D \langle \varphi_0 + tfN + zgN, N \rangle \; dS = \frac{1}{3} \int_D (\langle \varphi_0, N \rangle + tf + zg)\, dS.$$

Definamos la función $W(t, z) = V_D(t, z) - c$. Al derivar esta función respecto de t y de z se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, z)|_{(0,0)} = \frac{1}{3} \int_D f\, dS = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z} W(t, z)|_{(0,0)} = \frac{1}{3} \int_D g\, dS.$$

Entonces el gradiente de W es diferente de cero. Si (t, z) es tal que $W(t, z) = 0$, por el teorema de la función implícita, existe una única función x diferenciable en un intervalo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ tal que para cada $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $x(t) = z$ y $W(t, x(t)) = 0$.
Sea

$$\varphi_t = \varphi_0 + (tf + x(t)g)N.$$

Si $\varepsilon_1 = \text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$, entonces para cada $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $V_D(t, x(t)) = c$, es decir $V_D(t) = c = V(\varphi_t[Q]) = V_D(0)$, por lo que φ_t preserva el volumen. Además,

$$x'(0) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} W(t, z)|_{(0,0)}}{\frac{\partial}{\partial z} W(t, z)|_{(0,0)}} = \left(\frac{1}{3} \int_D f\, dS \right) \left(\frac{1}{3} \int_D g\, dS \right)^{-1} = 0,$$

por lo que

$$\frac{d}{dt}\varphi_t|_{t=0} = fN + x'(0)gN = fN.$$

1a. Si $f = 0$ en ∂D, entonces $\frac{d}{dt}\varphi_t|_{t=0} = 0$, por lo que para cada $p \in \partial D$ y $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $\varphi_t(p)$ es constante, es decir, para cada $p \in \partial D$ y $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $\varphi_t(p) = \varphi_0(p)$. Por tanto, φ_t fija la frontera. ■

Antes de abordar el siguiente resultado, daremos unas definiciones referentes a conceptos que será necesario utilizar para el desarrollo de esta sección (ver [1] pág. 342).

Definición 3.1.1. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$.*

a) *Definimos H_0 como*

$$H_0 = \frac{1}{A_D(0)} \int_D H dS$$

b) *Definimos la función $J_D : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ como*

$$J_D(t) = A_D(t) + 2H_0 V_D(t).$$

Profundicemos un poco respecto al inciso *b)*. La función J_D, de cierto modo, relaciona el área y el volumen de un dominio D sobre una superficie regular. Lo expuesto en el capítulo 2 indica que es diferenciable en un entorno lo suficientemente pequeño. Luego, cabe preguntarse para qué valores de t hallaremos un punto crítico de J_D.
De manera particular, el teorema que presentaremos a continuación nos provee de una equivalencia de condiciones para asegurar en qué circunstancias podemos hallar

un punto crítico para J_D en $t = 0$ (ver [1] pág. 342).

Teorema 3.1.2. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S$. Son equivalentes:*

a) *φ tiene curvatura media constante $H_0 \neq 0$*

b) *Para cada dominio relativamente compacto $D \subset S$ con frontera diferenciable y para cada variación $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^3$ que preserva el volumen y fija la frontera ∂D, $A'_D(0) = 0$*

c) *Para cada dominio relativamente compacto $D \subset S$ con frontera diferenciable y para cada variación que fija la frontera ∂D $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^3$, $J'_D(0) = 0$.*

Demostración:

($a \Rightarrow c$) Sabemos que $J_D(t) = A_D(t) + 2H_0V_D(t)$. Derivando y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$J'_D(0) = A'_D(0) + 2H_0V'_D(0) = -\int_D 2hH \, dS + 2H_0 \int_D h \, dS.$$

Ya que φ tiene curvatura media constante, $H = H_0$, obtenemos que

$$J'_D(0) = -\int_D 2hH_0 \, dS + 2H_0 \int_D h \, dS = -2H_0 \int_D h \, dS + 2H_0 \int_D h \, dS = 0.$$

Es decir, $J'_D(0) = 0$.

($c \Rightarrow b$) Ya que x preserva el volumen, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $V_D(t) = V_D(0)$, es decir, V_D es constante. Luego, $J_D(t) = A_D(t) + 2H_0V_D(0)$, por lo que al derivar obtenemos $J'_D(t) = A'_D(t)$. Por lo tanto, $A'_D(0) = J'_D(0) = 0$.

($b \Rightarrow a$) Supongamos que existe un punto $p_1 \in D$ tal que $(H - H_0)(p_1) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, $(H - H_0)(p_1) > 0$. Sea $H_1 : \overline{D} \to \mathbb{R}$ dada por $H_1 = H - H_0$.

Primeramente, observemos que

$$\int_D H - H_0 dS = \int_D H dS - \int_D H_0 dS = \int_D H dS - H_0 \int_D dS = A_D(0)H_0 - H_0 A_D(0) = 0.$$

Si para cada $\rho \in D$, $H_1(\rho) > 0$, entonces

$$0 < \int_D H_1 dS = \int_D (H - H_0)\, dS = 0,$$

una contradicción, por lo que existe $p_2 \in D$ tal que $(H - H_0)(p_2) < 0$.

Definamos los conjuntos

$$D^+ = \{\rho \in D :\ (H - H_0)(\rho) > 0\} \quad \text{y} \quad D^- = \{\rho \in D :\ (H - H_0)(\rho) < 0\}.$$

Estos conjuntos son abiertos en D, ya que H_1 es continua en $\overline{D}$, $H_1^{-1}[(0,\infty)] = D^+$ y $H_1^{-1}[(-\infty,0)] = D^-$, luego existen abiertos V_1 y V_2 en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que $D^+ = D \cap V_1$ y $D^- = D \cap V_2$. Evidentemente $p_1 \in V_1$ y $p_2 \in V_2$, por lo que existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_{r_1}(p_1) \subset V_1$ y $B_{r_2}(p_2) \subset V_2$. De ahí que $D \cap B_{r_1}(p_1) \subset D \cap V_1 = D^+$ y $D \cap B_{r_2}(p_2) \subset D \cap V_2 = D^-$.
También consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} Exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Utilizando todas estas observaciones, definiremos las funciones $\psi_1, \psi_2 : \overline{D} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\psi_1(\rho) = \frac{f\left(r_1 - \|\rho - p_1\|\right)}{f\left(\|\rho - p_1\| - \frac{r_1}{2}\right) + f\left(r_1 - \|\rho - p_1\|\right)}$$

y

$$\psi_2(\rho) = \frac{f\left(r_2 - \|\rho - p_2\|\right)}{f\left(\|\rho - p_2\| - \frac{r_2}{2}\right) + f\left(r_2 - \|\rho - p_2\|\right)}.$$

Entonces ψ_1 y ψ_2 son no negativas, $sop(\psi_1) \subset D^+$ y $sop(\psi_2) \subset D^-$. Además, para cada $\rho \in D^+$, $(\psi_1 + \psi_2)(\rho) = \psi_1(\rho)$, para cada $\rho \in D^-$, $(\psi_1 + \psi_2)(\rho) = \psi_2(\rho)$ y para cada $\rho \notin D^+ \cup D^-$, $(\psi_1 + \psi_2)(\rho) = 0$. Así que, integrando $(\psi_1 + \psi_2)H_1$ sobre D:

$$\int_D (\psi_1 + \psi_2)(o)(H - H_0)(o)\, dS = \int_{D^+ \cup D^- \cup D \setminus (D^+ \cup D^-)} (\psi_1 + \psi_2)(H - H_0)\, dS$$

$$= \int_{D^+} \psi_1(H - H_0)\, dS + \int_{D^-} \psi_2(H - H_0)\, dS + \int_{D \setminus (D^+ \cup D^-)} 0\, dS$$

$$= \int_{D^+} \psi_1(H - H_0)\, dS + \int_{D^-} \psi_2(H - H_0)\, dS. \tag{3.1.1}$$

Notemos que en D^+, $\psi_1 H_1$ es mayor que cero, por lo que la primera integral de (3.1.1) es un número positivo, digamos $c_1 > 0$. De manera similar, $\psi_2 H_2$ es menor que cero, por lo que la segunda integral es un número negativo, en D^-, digamos $c_2 < 0$. Si ahora definimos $\Psi_1 = \frac{\psi_1}{c_1}$ y $\Psi_2 = -\frac{\psi_2}{c_2}$, al utilizar tales funciones en las integrales de 3.1.1 en lugar de ψ_1 y ψ_2, obtenemos que

$$\int_{D^+} \Psi_1(H - H_0)\, dS + \int_{D^-} \Psi_2(H - H_0)\, dS = 1 + (-1) = 0,$$

y ya que Ψ_1 y Ψ_2 preservan las mismas propiedades que ψ_1 y ψ_2, podemos deducir que

$$\int_D (\Psi_1 + \Psi_2)(H - H_0)\, dS = 0. \tag{3.1.2}$$

Sea $h : D \to \mathbb{R}$ tal que $h(\rho) = (\Psi_1 + \Psi_2)(H - H_0)(\rho)$. Entonces, por (3.1.2), resulta que $\int_D h\, dS = 0$, y para cada $\rho \in \partial D$, $h(\rho) = 0$. Así, por el Lema 3.1.1, existe una variación normal $x^t : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ que preserva el volumen cuyo vector de variación es hN y que fija la frontera ∂D. Entonces, para x^t,

$$0 = A'_D(0) = -2\int_D hH\,dS \qquad \text{y} \qquad V'_D(0) = 0.$$

De estas dos igualdades se sigue que

$$\int_D h(H - H_0)\,dS = \int_D hH\,dS - H_0\int_D h\,dS = -\frac{1}{2}A'_D(0) - H_0V'_D(0) = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} 0 = \int_D h(H - H_0)\,dS &= \int_D (\Psi_1 + \Psi_2)(H - H_0)(H - H_0)\,dS \\ &= \int_D (\Psi_1 + \Psi_2)(H - H_0)^2\,dS > 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe $p \in D$ tal que $(H - H_0)(p) \neq 0$, es decir, para cada $p \in D$, $(H - H_0)(p) = 0$. Concluimos que $H - H_0 = 0$, o sea, $H = H_0$. ■

Recordemos que para una variación normal x, $x^0 = \varphi$. Luego, si para la función de área tenemos un punto crítico en $t = 0$, entonces $0 = A'_D(0) = A'[\varphi[Q]] = A'[D]$. Así pues, obtenemos que aquellas superficies con curvatura media constante son justamente las que nos permiten obtener puntos críticos tanto para la variación del área como para la variación de J_D.

El siguiente lema nos brinda una perspectiva distinta para J''_D, pues con él se verifica que en realidad, al evaluar en $t = 0$, $J''_D(0)$ será una función cuyo dominio será un conjunto de funciones. Es decir, el valor de $J''_D(0)$ dependerá de la función que escojamos para calcular su valor. Tales funciones son justamente las posibles funciones escalares h del vector normal (ver [1] pág. 343).

Lema 3.1.3. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada de curvatura* *media constante $H_0 \neq 0$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^3$ una variación que fija la frontera. Entonces $J''_D(0)$ depende únicamente de h y*

$$J''_D(0)(h) = -\int_D h\left(\Delta_S h + h\,\|B\|^2\right) dS. \quad \square \tag{3.1.3}$$

Definamos el conjunto

$$\mathfrak{F}_D := \left\{\, f : \overline{D} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es diferenciable a trozos, } (\forall p \in \partial D : f(p) = 0)\,,\ \int_D f\, dS = 0 \right\}. \tag{3.1.4}$$

Éste es un subconjunto del dominio de la segunda variación de J evaluada en $t = 0$, $J''_D(0)$. Como veremos a continuación, podemos garantizar un mínimo para la función de área siempre y cuando $J''_D(0)$ sea no negativa en $\mathfrak{F}_D$ (ver [1] pág. 344).

Teorema 3.1.4. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada de curvatura media constante $H_0 \neq 0$ y $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular. $A''_D(0) \geq 0$ para cada variación que preserva el volumen y fija la frontera ∂D si y sólo si para cada $f \in \mathfrak{F}_D$, $J''_D(0)(f) \geq 0$.*

Demostración:

(⇒) Supongamos que para cada variación que preserva el volumen y fija ∂D, $A''_D(0) \geq 0$. Sea $f \in \mathfrak{F}_D$. Por el Lema 3.1.1, existe una variación que preserva el volumen, fija la frontera, y cuyo vector de variación es fN. Luego, $V''_D(0) = 0$, por lo que $J''_D(0)(f) = A''_D(0) \geq 0$.

(⇐) Supongamos que para cada $f \in \mathfrak{F}_D$, $J''_D(0)(f) \geq 0$ y sea $x^t : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ una variación que preserva el volumen y fija la frontera, con componente normal $f_0 N$.

Ya que x^t fija la frontera, se tiene que $f_0 = 0$ en ∂D. Además, dado que preserva el volumen, $\int_D f_0\, dS = V_D'(0) = 0$. Luego, $f_0 \in \mathfrak{F}_D$, por lo que

$$0 \leq J_D''(0)(f_0) = A_D''(0) + 2H_0 V_D''(0) = A_D''(0),$$

es decir, $A_D''(0) \geq 0$. ■

La primera proposición del teorema 3.1.4 resulta ser la condición de un tipo particular de superficies. Presentamos tales superficies en la siguiente definición (ver [1] pág. 344).

Definición 3.1.2. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada con curvatura media constante distinta de cero tal que $\varphi[U] = S$ es orientable y $D \subset S$ un dominio regular relativamente compacto tal que ∂D es diferenciable.*

*a) D es **estable** si para cada variación que preserva el volumen y fija ∂D, $A_D''(0) \geq 0$.*

*b) φ es una **parametrización estable** si para cada dominio relativamente compacto D, D es estable.*

Usando el concepto de estabilidad en el teorema 3.1.4 se deduce sin mayor complicación el corolario siguiente (ver [1] pág. 344):

Corolario 3.1.5. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada de curvatura media constante $H_0 \neq 0$ y $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular. Entonces D es estable si y sólo si para cada $f \in \mathfrak{F}_D$, $J_D''(0)(f) \geq 0$.* □

Ejemplo 3.1.6.

1. *Veamos que en el plano $\mathcal{P}$, $D = \varphi[B_r(0)]$ es una superficie estable: Sea $h \in \mathfrak{F}_D$. Sabemos que $\|B\| = 0$. Además, para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\|\nabla_D h(u,v)\|^2 \geq 0$. Luego,*

$$J''_D(0)(h) = -\int_D (\|\nabla_D h(u,v)\|^2 + h(u,v)^2 \|B\|^2) dS = -\int_D \|\nabla_D h(u,v)\|^2 dS \geq 0. \qquad \triangleleft$$

Finalizamos esta sección probando un par de resultados que emplearemos en la sección siguiente para facilitar el trabajo que realizaremos en ella (ver [1] pág. 346 y 348).

Lema 3.1.7. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S$, $p \in S$ y $\{w_1, w_2\}$ una base ortonormal de $T_p(S)$.*

1. $\langle D_{w_1} D_{w_1}(N), N \rangle + \langle D_{w_2} D_{w_2}(N), N \rangle = -\|B\|^2$

2. Si φ tiene curvatura media constante, entonces $\sum_{i=1}^{2} \langle D_{w_i} D_{w_i}(N), w_k \rangle (p) = 0$, con $k = \overline{1,2}$

Demostración:

1. Sabemos que $\langle N, N \rangle = 1$, por lo que al calcular la derivada direccional en dirección de w_1 obtenemos $\langle D_{w_1}(N), N \rangle = 0$. Luego, al calcular nuevamente la derivada direccional llegamos a

$$\langle D_{w_1} D_{w_1}(N), N \rangle = -\langle D_{w_1}(N), D_{w_1}(N) \rangle . \tag{3.1.5}$$

Análogamente,

$$\langle D_{w_2} D_{w_2}(N), N \rangle = -\langle D_{w_2}(N), D_{w_2}(N) \rangle . \tag{3.1.6}$$

Sumando las ecuaciones 3.1.5 y 3.1.6 miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^{2} \langle D_{w_i} D_{w_i}(N), N\rangle = -\sum_{i=1}^{2} \langle D_{w_i}(N), D_{w_i}(N)\rangle . \tag{3.1.7}$$

Utilizando la base ortonormal, podemos escribir a $D_{w_1}(N)$ y $D_{w_2}(N)$ como una descomposición de Fourier de modo que

$$\begin{aligned} D_{w_1}(N) &= \langle D_{w_1}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_1}(N), w_2\rangle w_2 \qquad \text{y} \\ D_{w_2}(N) &= \langle D_{w_2}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_2}(N), w_2\rangle w_2, \end{aligned}$$

y sustituyendo en el segundo miembro de 3.1.7, y utilizando nuevamente el hecho de que $\{w_1, w_2\}$ es una base ortonormal, se obtiene

$$-\sum_{i=1}^{2} \left\langle \sum_{j=1}^{2} \langle D_{w_i}(N), w_j\rangle w_j, \sum_{k=1}^{2} \langle D_{w_i}(N), w_k\rangle w_k \right\rangle$$

$$\begin{aligned} &= -\langle \langle D_{w_1}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_1}(N), w_2\rangle w_2, \langle D_{w_1}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_1}(N), w_2\rangle w_2\rangle \\ &\quad -\langle \langle D_{w_2}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_2}(N), w_2\rangle w_2, \langle D_{w_2}(N), w_1\rangle w_1 + \langle D_{w_2}(N), w_2\rangle w_2\rangle \end{aligned}$$

$$= -\left(\langle D_{w_1}(N), w_1\rangle^2 + \langle D_{w_1}(N), w_2\rangle^2 + \langle D_{w_2}(N), w_1\rangle^2 + \langle D_{w_2}(N), w_2\rangle^2\right)$$

$$= -\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2\right) = -\|B\|^2 .$$

2. Ya que $\langle N, w_k\rangle = 0$, entonces $\langle D_{w_i}(N), w_k\rangle = -\langle N, D_{w_i}(w_k)\rangle$. Luego,

$$\langle D_{w_i} D_{w_i}(N), w_k\rangle + \langle D_{w_i}(N), D_{w_i}(w_k)\rangle = -\langle D_{w_i}(N), D_{w_i}(w_k)\rangle - \langle N, D_{w_i} D_{w_i}(w_k)\rangle .$$

Como $D_{w_i}(N)$ es un vector tangente y la componente tangente de $D_{w_i}(w_k)(p)$ es cero, se tiene que

$$\langle D_{w_i} D_{w_i}(N), w_k\rangle (p) = -\langle N, D_{w_i} D_{w_i}(w_k)\rangle (p).$$

Además, puesto que $\mathbb{R}^3$ es plano, $D_{w_i}D_{w_k}(w_i)(p) = D_{w_k}D_{w_i}(w_i)(p)$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{2}\langle D_{w_i}D_{w_i}(N), w_k\rangle(p) = -\sum_{i=1}^{2}\langle N, D_{w_k}D_{w_i}(w_i)\rangle(p) = -\left\langle N, D_{w_k}\left(\sum_{i=1}^{2}D_{w_i}(w_i)\right)\right\rangle(p).$$

Por otro lado,

$$\left\langle N, \sum_{i=1}^{2}D_{w_i}(w_i)\right\rangle = \langle N, D_{w_1}(w_1)\rangle + \langle N, D_{w_2}(w_2)\rangle$$

$$= -\left(\langle D_{w_1}(N), w_1\rangle + \langle D_{w_2}(N), w_2\rangle\right) = -(a_{11}+a_{22}) = -2H,$$

y puesto que H es constante,

$$\left\langle D_{w_k}(N), \sum_{i=1}^{2}D_{w_i}(w_i)\right\rangle = -\left\langle N, D_{w_k}\left(\sum_{i=1}^{2}D_{w_i}(w_i)\right)\right\rangle,$$

con lo cual

$$\sum_{i=1}^{2}\langle D_{w_i}D_{w_i}(N), w_k\rangle(p) = \left\langle D_{w_k}(N), \sum_{i=1}^{2}D_{w_i}(w_i)\right\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Lema 3.1.8. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada de curvatura media constante H_0 y tal que $\varphi[U] = S$, $p \in S$ y $\{w_1, w_2\}$ una base ortonormal de $T_p(S)$. Si $g = \langle\varphi, N\rangle$, entonces*

$$\Delta g = -2H_0 - \|B\|^2 g \tag{3.1.8}$$

Demostración:

Al calcular $\Delta g(q)$ tenemos

$$\Delta g(q) = \sum_{i=1}^{2}\left[D_{w_i}D_{w_i}(\langle\varphi, N\rangle)\right](q) = \sum_{i=1}^{2}D_{w_i}\left(\langle D_{w_i}(\varphi), N\rangle + \langle\varphi, D_{w_i}(N)\rangle\right)(q)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left[D_{w_i} \left(\langle w_i, N \rangle + \langle \varphi, D_{w_i}(N) \rangle \right) \right](q)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left[\langle D_{w_i}(\varphi), D_{w_i}(N) \rangle + \langle \varphi, D_{w_i} D_{w_i}(N) \rangle \right](q) = \sum_{i=1}^{2} \left[\langle w_i, D_{w_i}(N) \rangle + \langle \varphi, D_{w_i} D_{w_i}(N) \rangle \right](q)$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \langle D_{w_i}(w_i), N \rangle (q) + \sum_{i=1}^{2} \langle \varphi, D_{w_i} D_{w_i}(N) \rangle (q).$$

Ya que $\sum_{i=1}^{2} \langle D_{w_i}(w_i), N \rangle = -2H$ y, usando el Lema 3.1.7, $\sum_{i=1}^{2} \langle \varphi, D_{w_i} D_{w_i}(N) \rangle = -\|B\|^2 g$, se concluye la igualdad deseada. ■

3.2. Teorema de Barbosa-Do Carmo

En esta sección concentraremos las herramientas que hemos ido obteniendo a lo largo de este trabajo para validar el resultado que mencionamos en la introducción del mismo y al iniciar este capítulo. Así pues, enunciamos y presentamos una demostración del siguiente teorema (ver [1] pág. 349):

Teorema 3.2.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientable, compacta y conexa y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada con curvatura media constante distinta de cero y tal que $\varphi[U] = S$. Entonces φ es estable si y sólo si $S = \mathbb{S}^2$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Afirmación: si $p \in S$, entonces $2H^2 \leq \|B\|^2$ y $\|B\|^2 = 2H^2$ si y sólo si p es un punto umbilical.

En efecto: Sean k_1 y k_2 las curvaturas principales de S en p. Entonces $\|B\|^2 = k_1^2 + k_2^2$. Además,

$$\|B\|^2 - (2H)^2 = \|B\|^2 - 4H^2 = k_1^2 + k_2^2 - (k_1 + k_2)^2 = -2k_1 k_2.$$

Luego,

$$0 \leq (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 = \|B\|^2 - 2k_1k_2 = \|B\|^2 + \|B\|^2 - 4H^2$$

$$= 2\|B\|^2 - 4H^2, \tag{3.2.1}$$

de donde $2H^2 \leq \|B\|^2$. Ahora bien, si $2H^2 = \|B\|^2$, entonces $(k_1 - k_2)^2 = 0$, y por tanto $k_1 - k_2 = 0$, es decir, $k_1 = k_2$, por lo que p es un punto umbilical.

Recíprocamente, si p es un punto umbilical, entonces $k_1 = k_2$, por lo que $2\|B\|^2 - 4H^2 = 0$, de donde $2H^2 = \|B\|^2$. QDA

Sea $x^0[Q] = \varphi[Q] = S$ una superficie regular orientable, compacta, conexa y de curvatura media constante $H = H_0 \neq 0$ y $p_0 \in S$. Ya que S es compacto y al considerar $g = \langle \varphi, N \rangle$, por la fórmula integral de Minkowski (ver [6]) se tiene

$$\int_S gH\, dS = -\int_S dS.$$

Por otro lado, al integrar Δg y aplicar el Teorema de la divergencia 2.1.4, se obtiene

$$\int_S \Delta g\, dS = \int_S div_S(\nabla_S g) dS = \int_{\partial S} \langle \nabla_S g, N \rangle\, dS = 0.$$

Luego, dado que $H = H_0$ es constante, por el Lema 3.1.8, se tiene que

$$0 = -H_0 \int_S \Delta g dS = -\int_S H_0(-\|B\|^2 g - 2H_0) dS = -\int_S (-\|B\|^2 H_0 g - 2H_0^2) dS,$$

de donde

$$-\int_S \|B\|^2 H_0 g\, dS = \int_S 2H_0^2\, dS.$$

Si definimos $f = H_0 g + 1$, entonces $\int_S f dS = 0$, por lo que $f \in \mathfrak{F}_S$. Así pues, podemos evaluar $J_S''(0)(f)$. Notemos que

$$-f\Delta f - \|B\|^2 f^2 = -(H_0g+1)\Delta(H_0g+1) - \|B\|^2 (H_0g+1)^2$$

$$= -H_0(H_0g+1)\Delta g - \|B\|^2 (H_0^2g^2 + 2H_0g + 1)$$

$$= -H_0^2g(-2H_0 - \|B\|^2 g) - H_0(-2H_0 - \|B\|^2 g) - \|B\|^2 (H_0^2g^2 + 2H_0g + 1)$$

$$= 2H_0^3g + \|B\|^2 H_0^2g^2 + 2H_0^2 + \|B\|^2 H_0g - \|B\|^2 H_0^2g^2 - 2H_0 \|B\|^2 g - \|B\|^2$$

$$= 2H_0^3g - H_0 \|B\|^2 g + 2H_0^2 - \|B\|^2 = 2H_0^2(H_0g+1) - \|B\|^2 (H_0g+1)$$

$$= 2H_0^2 f - \|B\|^2 f.$$

Además, ya que φ es estable

$$0 \leq J_S''(0)(f) = -2H_0^2 \int_S f\, dS - \int_S \|B\|^2 f\, dS = -\int_S \|B\|^2 (H_0g+1)\, dS.$$

Así,

$$\int_S 2H_0^2\, dS = -\int_S H_0 \|B\|^2 g\, dS \geq \int_S \|B\|^2\ dS \geq \int_S 2H_0^2\, dS,$$

por lo que

$$\int_S \|B\|^2\ dS = \int_S 2H_0^2\, dS.$$

De esta igualdad, y usando (3.2.1), se puede deducir que $\|B\|^2 = 2H_0^2$, con lo cual, p_0 es un punto umbilical. Por tanto, S es totalmente umbilical. Por el Teorema 1.4.11 y ya que S es compacto, se concluye que $S = \mathbb{S}^2$.

(⇐) Sabemos que la esfera $\mathbb{S}^2$ es una superficie regular, orientable, compacta, conexa y con curvatura media constante distinta de cero. Resta probar que es una superficie estable.

Consideremos el operador $\Delta : \mathfrak{F}_{\mathbb{S}^2} \to \mathbb{R}$. Sabemos que Δ es una transformación lineal. Podemos pensar entonces en los valores propios de Δ, es decir, podemos pensar en las soluciones de $\Delta g = \mu g$, o bien, de

$$-\Delta g + \mu g = 0.$$

Sea $\mu_1(\mathbb{S}^2)$ el primer valor propio de $\mathbb{S}^2$. En [5] se prueba que

$$\mu_1(\mathbb{S}^2) = \acute{\imath}nf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla f\|^2 \, dS}{\int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS} : f \in \mathfrak{F}_{\mathbb{S}^2} \right\}.$$

Entonces, para cada $f \in \mathfrak{F}_{\mathbb{S}^2}$,

$$\mu_1(\mathbb{S}^2) \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla f\|^2 \, dS}{\int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS},$$

es decir,

$$\mu_1(\mathbb{S}^2) \int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS \leq \int_{\mathbb{S}^2} \|\nabla f\|^2 \, dS.$$

Por otro lado, $\mu_1(\mathbb{S}^2) = 2$ (ver [5]). Además, en por el ejemplo 1.4.9 $\|B\|^2 = 2$. Luego,

$$J''_{\mathbb{S}^2}(0)(f) = \int_{\mathbb{S}^2} \left[-f \left(\Delta f + \|B\|^2 f \right) \right] dS = \int_{\mathbb{S}^2} \left(\|\nabla f\|^2 + 2f^2 \right) dS$$

$$\geq \mu_1(\mathbb{S}^2) \cdot \int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS - 2 \int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS = 2 \int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS - 2 \int_{\mathbb{S}^2} f^2 \, dS = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^2$ es estable. ■

Capítulo 4

Hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$

En la teoría desarrollada en los primeros tres capítulos el trabajo se enfoca en superficies que localmente se comportan como $\mathbb{R}^2$. En este capítulo haremos un recorrido por los principales resultados de los capítulos precedentes, planteando esta vez el trabajo en superficies que localmente se comportan como $\mathbb{R}^n$. Los resultados se enuncian sin demostración, haciendo notar a la vez que la mayoría de ellos siguen los mismos procedimientos utilizados previamente.

4.1. Preliminares

Naturalmente, lo primero que necesitamos generalizar es el concepto de superficie regular. Veremos que la definición en más dimensiones es completamente análoga a la definición 1.1.1 o a la definición 1.2.1, sólo que nuestro objeto de estudio vivirá en $\mathbb{R}^{n+1}$. Con esto dicho, presentamos la definición de *hipersuperficie regular*:

Definición 4.1.1. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. S^n es una **hipersuperficie regular** si para cada punto $p \in S$, existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y una función $\varphi : U \to V \cap S$ tal* *que:*

i) *φ es diferenciable en U*

ii) *φ es un homeomorfismo*

iii) *Para cada $x \in U$, la derivada de φ en x es inyectiva. (Condición de regularidad)*

Para el concepto anterior (en ambientes más generales) también suele usarse la notación de M^n (o $\mathbb{M}^n$). Sin embargo, para mantener la coherencia del discurso, emplearemos la notación utilizada en la definición 4.1.1.
Ya que a partir del capítulo 2 hemos utilizado las superficies parametrizadas, es de pensarse que nuevamente haremos uso de tal idea, pero esta vez en más dimensiones:

Definición 4.1.2. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$.*

a) *φ es una **hipersuperficie parametrizada** si es diferenciable.*

b) *φ es una **hipersuperficie regular parametrizada** si es una superficie parametrizada y $D_\varphi(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es inyectiva.*

Teorema 4.1.1. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular y $p \in S^n$. Si $\varphi : U \to S^n$ es una parametrización tal que $p \in Im(\varphi)$, entonces $T_p(S^n)$ es igual a la imagen de la transformación $D_\varphi(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.* $\square$

Cabe aclarar que el conjunto $T_p(S)$ de la definición 1.1.5 cambia de nombre al trabajar en superficies de mayor dimensión. La razón es que el mismo "plano tangente" cambia de dimensión, pues se tiene un vector de derivadas parciales por cada coordenada en el dominio de φ, En general, la dimensión de $T_p(S^n)$ es n. Por tanto, cuando pensemos en $n \geq 3$, pensaremos también en las hipersuperficies y $T_p(S^n)$ será llamado *espacio tangente*.

Podemos observar que las propiedades descritas en la sección 1.1 siguen siendo válidas al considerar dimensiones mayores a 3. Asimismo, las definiciones y resultados enunciados en la sección 1.3 pueden generalizarse:

Definición 4.1.3. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular y $p \in S^n$. Definimos* ***la primera forma fundamental en p*** *como la función $I_p : T_p(S^n) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $w = r_1\varphi_{u_1}(q) + \cdots + r_n\varphi_{u_n}(q) \in T_p(S^n)$,*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2, \tag{4.1.1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Al igual que en los cálculos realizados inmediatamente después de la definición 1.3.1, si tenemos un vector $w \in T_p(S^n)$, la primera forma fundamental en w puede ser escrita como:

$$I_p(w) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \langle \varphi_{u_i}(q), \varphi_{u_i}(q) \rangle + 2 \sum_{\substack{k=2 \\ j<k}}^{n} r_j r_k \left\langle \varphi_{u_j}(q), \varphi_{u_k}(q) \right\rangle, \tag{4.1.2}$$

al separar los términos de la forma $\langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_i} \rangle$, y donde $\left\langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \right\rangle = \left\langle \varphi_{u_j}, \varphi_{u_i} \right\rangle$ y r_i son las funciones coordenadas al igual que en el Capítulo 1. No obstante, a diferencia de las observaciones hechas posterior a la definición 1.3.1, donde utilizamos las letras E, F y G para representar los coeficientes de la primera forma fundamental, en este caso ocuparemos la notación

$$g_{ij}(q) = \left\langle \varphi_{u_i}(q), \varphi_{u_j}(q) \right\rangle, \tag{4.1.3}$$

donde $g_{ij} = g_{ji}$. De este modo, una manera más sencilla de escribir la primera forma fundamental con los coeficientes es:

$$I_p(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_i r_j g_{ij}(q), \tag{4.1.4}$$

o bien:

$$I_p(w) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(q) & g_{12}(q) & \dots & g_{1n}(q) \\ g_{21}(q) & g_{22}(q) & \dots & g_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(q) & g_{n2}(q) & \dots & g_{nn}(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \tag{4.1.5}$$

Denotaremos a esta matriz como

$$P_I = \begin{bmatrix} g_{11}(q) & g_{12}(q) & \dots & g_{1n}(q) \\ g_{21}(q) & g_{22}(q) & \dots & g_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(q) & g_{n2}(q) & \dots & g_{nn}(q) \end{bmatrix},$$

de tal modo que ahora podemos escribir a la primera forma fundamental a través de su matriz de manera más compacta

$$I_p(w) = [w]_{\partial\varphi}^T P_I [w]_{\partial\varphi}, \tag{4.1.6}$$

donde $[w]_{\partial\varphi}$ es el vector de coordenadas de w en la base $\partial\varphi = \{\varphi_{u_j} : j = \overline{1, n}\}$. Con todo esto, es posible generalizar las herramientas que nos permiten calcular longitudes y ángulos en superficies, a herramientas que nos permitan hacer lo mismo, esta vez para hipersuperficies:

Teorema 4.1.2. *Sea* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular,* $p \in S^n$ *y* $\varphi : U \to V \cap S^n$ *una parametrización local alrededor de* p*. Si* $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S^n$ *es una curva diferenciable, entonces la longitud de arco de* β *entre* 0 *y* t *es*

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i r_j g_{ij}(q)}\, dt. \quad \square \tag{4.1.7}$$

Teorema 4.1.3. *Sea* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular,* $p \in S^n$ *y* $\varphi : U \to V \cap S^n$ *una parametrización local alrededor de* p*. Si* $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S$ *son dos curvas diferenciables sobre* S^n *que se intersectan en* p*, Entonces el ángulo* $\theta \in [0, \pi]$ *entre ellas es*

$$cos(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i s_j g_{ij}(q)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i r_j g_{ij}(q)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_i s_j g_{ij}(q)}}. \qquad \square \tag{4.1.8}$$

Teorema 4.1.4. *Sea* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular,* $p \in S^n$ *y* $\varphi : U \to V \cap S^n$ *una parametrización local alrededor de* p*. Entonces el ángulo* $\theta \in [0, \pi]$ *entre las curvas coordenadas de* φ_{u_i} *y* φ_{u_j} *es*

$$cos(\theta) = \frac{g_{ij}(q)}{\sqrt{g_{ii}(q) g_{jj}(q)}}. \qquad \square \tag{4.1.9}$$

Corolario 4.1.5. *Sea* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular,* $p \in S^n$ *y* $\varphi : U \to V \cap S^n$ *una parametrización local alrededor de* p*. Entonces las curvas coordenadas* φ_{u_i} *y* φ_{u_j} *de* φ *son ortogonales si y sólo si* $g_{ij}(q) = 0$. $\square$

Las demostraciones de estos resultados son análogas al caso $n = 3$. En cambio, para medir el área la generalización requiere de algo más. En la sección 1.3 se ha ocupado el producto vectorial para poder calcular el área de una región. Nótese que en el teorema 1.3.8, el elemento de área es justamente el determinante de la matriz P_I. Esto no es coincidencia, ya que una forma de definir el producto vectorial es la siguiente:

Definición 4.1.4. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El* ***producto vectorial de u y v****, denotado por $u \times v$ o $u \wedge v$, es el único vector en $\mathbb{R}^3$ que cumple que para cada $w \in \mathbb{R}^3$,*

$$(u \wedge v) \cdot w = det \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

La ventaja de la definición 4.1.4 es que a partir de ella es más fácil generalizar el producto vectorial de n vectores, siguiendo el mismo esquema:

Definición 4.1.5. *Sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. El* ***producto vectorial de $\boldsymbol{u_1, \ldots, u_n}$****, denotado por $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$, es el único vector en $\mathbb{R}^{n+1}$ que cumple que para cada $w \in \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) \cdot w = det \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w \end{pmatrix}.$$

Con ello, la generalización para hallar el *área* de una región es posible:

Teorema 4.1.6. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una superficie regular, $p \in S^n$ y $\varphi : U \to V \cap S^n$ una parametrización local alrededor de p. Si $R \subset V \cap S^n$ es una región de S^n tal que* *para una región* $Q \subset U$, $\varphi[Q] = R$, *entonces el área de* R *es*

$$A(R) = \int \cdots \int_Q \sqrt{det(P_I)}\, du_i \ldots du_n. \tag{4.1.10}$$

También podemos abordar de modo más general los conceptos que luego nos permitieron definir la Segunda Forma Fundamental:

Definición 4.1.6. *Sea* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular.*

a) ***Una orientación de*** $\boldsymbol{S^n}$ *es una familia de parametrizaciones* $\Phi = \{\varphi_i : U_i \to S^n |$ *para cada* $i \in I, U_i$ *es un abierto de* $\mathbb{R}^n\}$ *tal que:*

   i) $S^n \subset \bigcup_{i \in I} Im(\varphi_i)$

   ii) *Si* $W_{ij} = \varphi_i[U_i] \cap \varphi_j[U_j]$, *para cada* $p \in Im(\varphi_i) \cap Im(\varphi_j)$, *el cambio de parámetro* $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}[W_{ij}] \to \varphi_j^{-1}[W_{ij}]$ *tiene determinante jacobiano mayor que cero en el punto* $q_i = \varphi_i^{-1}(p)$.

b) S^n *es* ***orientable*** *si existe una orientación de* S^n.

Definición 4.1.7. *Sean* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie orientable y* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *la esfera unitaria. Una* ***función de Gauss*** *es una función diferenciable* $N : S^n \to \mathbb{S}^n$ *tal que para cada* $p \in S$, $N(p)$ *es perpendicular a* $T_p(S^n)$.

Con esto, la definición de la Segunda Forma Fundamental sobre hipersuperficies se presenta así:

Definición 4.1.8. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular orientable y $p \in S^n$. La* ***segunda forma fundamental en p*** *es la función $II_p : T_p(S^n) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$II_p(w) = \langle w, D_N(p)(w) \rangle. \tag{4.1.11}$$

Asimismo, también se puede observar lo siguiente:

Corolario 4.1.7. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular y $p \in S^n$. Entonces existe una base ortonormal $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de $T_p(S^n)$ y $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tales que para cada $i = \overline{1, n}$, $D_N(p)(w_i) = k_i w_i$.* $\square$

Nuevamente podemos garantizar que hallaremos una base ortonormal de vectores propios para el operador de Weingarten. Por otro lado, ya que la dimensión del espacio tangente es mayor o igual a 3, habrá más de dos valores propios, por lo que globalmente no podríamos hablar de máximos y mínimos. Mas localmente, escogiendo un par de direcciones, sí que podemos hacer referencia a un máximo y un mínimo.

Teorema 4.1.8. *Sean $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ un operador lineal autoadjunto y $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \langle (x_1, \ldots, x_{n+1}), L(x_1, \ldots, x_{n+1}) \rangle$. Si w_i y w_j son dos vectores propios de L y $\mathcal{P}_{ij}$ el plano que generan, entonces*

1. *f es diferenciable.*

2. *Los valores propios k_i y k_j de L son los puntos extremos de $f|_{\mathcal{P}_{ij} \cap \mathbb{S}^n}$.*

Corolario 4.1.9. *Si φ_{u_i} y φ_{u_j} son dos vectores propios de $D_N(p)$ con valores propios k_i y k_j, entonces k_i y k_j son los valores extremos de $II_p|_{\mathcal{P}_{ij} \cap \mathbb{S}^n}$.* $\square$

Entonces la idea cobra cierto sentido inspirado en el enfoque original, por lo que se puede seguir hablando de direcciones y curvaturas principales:

Definición 4.1.9. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$, $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base ortonormal de $T_p(S)$ y $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tales que para cada $i = \overline{1, n}$, $D_N(p)(w_i) = k_i w_i$.*

a) *Los números k_i son llamados las **curvaturas principales en p**.*

b) *Los vectores w_i son llamados las **direcciones principales en p**.*

Además de esto, también es bastante fácil generalizar conceptos como la curvatura media, la gaussiana y la norma:

Definición 4.1.10. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular y $p \in S^n$.*

a) *La **curvatura gaussiana de S^n en p** es el número $K = det(DN(p))$.*

b) *La **curvatura media de S^n en p** es el número $H = \frac{1}{n} tr(DN(p))$.*

c) *Definimos la **norma de $B = DN(p)$** como $\|B\| = \sqrt{tr(BB^T)}$.*

Observación:

1. En términos de las curvaturas principales, se tiene que $K = \prod_{i=1}^{n} k_i$, $H = \frac{1}{n} \sum_{i=i}^{n} k_i$ y $\|B\| = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} k_i^2}$.

Ahora escribimos los coeficientes de la segunda forma fundamental como

$$l_{ij} = \left\langle \varphi_{u_i}, N_{u_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_{ij}, \tag{4.1.12}$$

donde a_{ij} son escalares que aparecen al escribir cada vector $N_{u_i} \in T_p(S^n)$ como combinación lineal de los vectores φ_{u_j}:

$$N_{u_i} = a_{1i}\varphi_{u_1} + a_{2i}\varphi_{u_2} + \ldots + a_{ni}\varphi_{u_n}. \tag{4.1.13}$$

Recordando que

$$\left\langle \varphi_{u_i}, N_{u_j} \right\rangle = \left\langle \varphi_{u_j}, N_{u_i} \right\rangle, \tag{4.1.14}$$

podemos expresar la segunda forma fundamental de la siguiente manera:

$$II_p(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} l_{ij}(q) \tag{4.1.15}$$

O bien, si denotamos la matriz de la segunda forma fundamental como

$$P_{II} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4.1.16}$$

podemos escribirla de manera compacta como

$$II_p(w) = [w]_{\partial\varphi}^T P_{II} [w]_{\partial\varphi}. \tag{4.1.17}$$

Utilizando todos los coeficientes a_{ij} construir la matriz de $DN(p)$:

$$DN(p) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \tag{4.1.18}$$

y dado que la matriz P_I es invertible, obtenemos la matriz inversa, cuyas entradas son

$$G_{ij} = (-1)^{i+j} \left| (P_I)_{ij} \right|. \tag{4.1.19}$$

Haciendo un proceso análogo al realizado en la sección 1.4, hallamos el valor de los coeficientes a_{ij}, dado por

$$a_{ij} = \frac{1}{det(P_I)} \sum_{k=1}^{n} l_{ik} G_{kj}. \tag{4.1.20}$$

También la definición producto interno en una hipersuperficie es una generalización para el producto interno en una superficie regular.

Definición 4.1.11. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$ y φ una parametrización local alrededor de p. Para dos vectores $w_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi_{u_i}(q), w_2 = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi_{u_i}(q) \in T_p(S^n)$ definimos el* ***producto interno de $\boldsymbol{w_1}$ con $\boldsymbol{w_2}$ sobre $\boldsymbol{S^n}$*** *como $\langle w_1, w_2 \rangle_{S^n} = \langle D_\varphi(q)(r_1, ..., r_n), D_\varphi(q)(s_1, ..., s_n) \rangle$.*

Con esto, se verifica que la relación entre la PFF y el producto interno se preserva en hipersuperficies:

Teorema 4.1.10. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$, φ una parametrización local alrededor de p y $w_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi_{u_i}(q), w_2 = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi_{u_i}(q) \in T_p(S^n)$. Entonces*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_{S^n} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(q) & g_{12}(q) & \dots & g_{1n}(q) \\ g_{21}(q) & g_{22}(q) & \dots & g_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(q) & g_{n2}(q) & \dots & g_{nn}(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}. \quad \square \tag{4.1.21}$$

Del mismo modo, tanto la derivada direccional sobre un campo como el gradiente, son sencillas de generalizar, ya que el único cambio es aumentar la dimensión de la superficie:

Definición 4.1.12. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $F : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial, $p \in S^n$, $w \in T_p(S^n)$ y $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^n$ una curva en S^n tal que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = w$. Definimos la* ***derivada direccional de F en la dirección de w*** *como*

$$D_w(F)(p) = (F \circ \beta)'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0}. \tag{4.1.22}$$

Definición 4.1.13. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$ y $f : S^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el* ***gradiente de f sobre la superficie S^n****, como la función $\nabla_{S^n}(f) : S^n \to T_p(S^n)$ tal que para cada $w \in T_p(S^n)$, $\langle \nabla_{S^n} f(p), w \rangle_{S^n} = Df(p)(w)$.*

Podemos dar una versión generalizada del Teorema 2.1.2, hallando las componentes del gradiente a través de la regla de Cramer:

Teorema 4.1.11. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$, φ una parametrización local alrededor de p y $f : S^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $(P_I)_i$ es la matriz que se obtiene al sustituir la columna i en la matriz P_I por el vector $\nabla_{S^n}(f)$, entonces*

$$\nabla_{S^n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{det((P_I)_i)}{det(P_I)} \varphi_{u_i}. \quad \square \tag{4.1.23}$$

Además, definimos la divergencia en hipersuperficies y enunciamos sus propiedades básicas, de la misma manera que en el capítulo 2 :

Definición 4.1.14. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$, $F : S^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal en $T_p(S^n)$. Definimos la **divergencia del campo F sobre la superficie S^n** como*

$$div_{S^n}(F) = \sum_{i=1}^{n} \langle D_{v_i}(F), v_i \rangle \tag{4.1.24}$$

Teorema 4.1.12. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $F, G : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ campos vectoriales $p \in S^n$, φ una parametrización local alrededor de p y $\{\varphi_{u_1} ..., \varphi_{u_n}\}$ una base local alrededor de p. Entonces:*

1. *$div_{S^n}(F + G) = div_{S^n}(F) + div_{S^n}(G)$.*

2. *Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $div_{S^n}(fF) = f div_{S^n}(F) + \langle \nabla_{S^n} f, F \rangle$.$\square$*

Teorema 4.1.13. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una superficie regular orientada, $D \subset S^n$ un dominio regular tal que $fr(D) = C$, $R = D \cup C$ y $F : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial diferenciable. Entonces*

$$\int_C \langle F, N \rangle \, ds = \int_R div_{S^n}(F) dS. \tag{4.1.25}$$

4.2. Variaciones normales

En la sección 2.2 se definen las variaciones normales como funciones $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ que cumplen ciertas características. Basta con hacer un mínimo ajuste para generalizar el concepto:

Definición 4.2.1. *Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, $p \in S^n$, $\varphi : U \to V \cap S^n$ una parametrización alrededor de p, $Q \subset U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, $h : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$.*

*a) Una **variación de $\boldsymbol{\varphi[\overline{Q}]}$** es una función $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x(u_1, ..., u_n, 0) = \varphi(u_1, ..., u_n)$.*

*b) x es una **variación normal de $\boldsymbol{\varphi[\overline{Q}]}$ determinada por $\boldsymbol{h}$** si x es una variación y $x(u_1, ..., u_n, t) = \varphi(u_1, ..., u_n) + th(u_1, ..., u_n)N(u_1, ..., u_n)$.*

La observación posterior a la definición 2.2.1 sigue siendo válida.
Igualmente, definimos variaciones que preservan el volumen y fijan la frontera:

Definición 4.2.2. *Sea $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ una variación tal que $x^0[Q] = \varphi[Q] = D$.*

*a) x **fija la frontera de D** si para cada $q \in \partial Q$ y cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x^t(q) = \varphi(q)$.*

*b) x **preserva el volumen** si para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $V_D(t) = V_D(0)$.*

4.3. Variaciones del área y del volumen

Los conceptos previos definidos ya para hipersuperficies dan la pauta para avanzar en los conceptos de "área" y "volumen" de regiones en ellas. Más aún, nos permiten hablar de las variaciones de dichas áreas y volúmenes para poder generalizar el Teorema de Barbosa-Do Carmo.

Teorema 4.3.1. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada y $Q \subset U$ un dominio tal $\varphi[Q] = D$. Si $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ es una variación normal que fija la frontera de D, entonces*

$$A'_D(0) = -\int_D 2hH dS. \quad \square \tag{4.3.1}$$

En este punto, no obstante, seguimos requiriendo de los lemas probados en la sección 2.4, en su versión para hipersuperficies:

Lema 4.3.2. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie parametrizada, $Q \subset U$ un dominio, $h : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ y $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ una variación normal.*
Entonces $\frac{\partial}{\partial t} \langle x^t, N \rangle |_{t=0} = - \langle \nabla_S h, \varphi \rangle + h$.

Definición 4.3.1. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie parametrizada tal que $\varphi[U] = S^n$ y $N : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo normal a φ.*

a) Definimos la **componente normal de** φ *como* $\varphi^{\perp} := \langle \varphi, N \rangle N$.

b) Definimos la **componente tangente de** φ *como* $\varphi^{\top} := \varphi - \varphi^{\perp}$.

Lema 4.3.3. *Sean* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie parametrizada,* $Q \subset U$ *un dominio,* $h : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ *y* $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *una variación normal. Entonces* $div_S(h\varphi^{\top}) - 2h = 2hH \langle \varphi, N \rangle + \left\langle \nabla_S h, \varphi^{\top} \right\rangle$.

Con todo esto, podemos dar una versión más general respecto a la variación del volumen:

Teorema 4.3.4. *Sea* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular parametrizada y* $Q \subset U$ *un dominio tal* $\varphi[Q] = D$. *Si* $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *es una variación normal que fija la frontera de* D, *entonces*

$$V_D'(0) = \int_D h dS. \quad \square \tag{4.3.2}$$

Además, también podemos dar una versión más general para la segunda variación del área:

Teorema 4.3.5. *Sea* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ *una hipersuperficie regular parametrizada y* $Q \subset U$ *un dominio tal* $\varphi[Q] = D$. *Si* $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *es una variación normal que fija la frontera de* D, *entonces*

$$A_D''(0) = -\int_D h \left(\Delta h + h \left\| B \right\|^2 - 4hH^2 \right) dS. \tag{4.3.3}$$

4.4. Teorema de Barbosa-Do Carmo

En esta sección, enunciaremos los resultados importantes del capítulo 3, esta vez para hipersuperficies regulares, a fin de tener el material necesario para la generalización del Teorema de Barbosa-Do Carmo. [1]
Comenzamos con este lema, cuyo antecedente en el capítulo 3 es el lema 3.1.1:

Lema 4.4.1. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S^n$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable a trozos.*

1. *Si $\int_D f\, dS = 0$, entonces existe una variación normal que preserva el volumen cuyo vector de variación es fN.*

1a. *Si además $f = 0$ en ∂D, la variación fija la frontera.*

Además, requerimos también de los conceptos de H_0 y de J_D:

Definición 4.4.1. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S^n$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $x : \overline{Q} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$.*

a) *Definimos H_0 como*

$$H_0 = \frac{1}{A_D(0)} \int_D H dS$$

b) *Definimos la función $J_D : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ como*

$$J_D(t) = A_D(t) + nH_0 V_D(t).$$

También enunciamos el teorema 3.1.2 de manera más general:

Teorema 4.4.2. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S^n$. Son equivalentes:*

a) *φ tiene curvatura media constante $H_0 \neq 0$*

b) *Para cada dominio relativamente compacto $D \subset S^n$ con frontera diferenciable y para cada variación $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^{n+1}$ que preserva el volumen y fija la frontera ∂D, $A'_D(0) = 0$*

c) *Para cada dominio relativamente compacto $D \subset S^n$ con frontera diferenciable y para cada variación que fija la frontera ∂D $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $J'_D(0) = 0$.*

Asimismo, debemos poder escribir J''_D como en el lema 3.1.3, cuando el término $(2hH)^2$ desaparece de la ecuación (4.3.5)

Lema 4.4.3. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada de curvatura media constante $H_0 \neq 0$, $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular y $x^t : \overline{Q} \to \mathbb{R}^{n+1}$ una variación que fija la frontera. Entonces $J''_D(0)$ depende únicamente de h y*

$$J''_D(0)(h) = -\int_D h\left(\Delta_S h + h\,\|B\|^2\right) dS. \quad \square \tag{4.4.1}$$

El conjunto $\mathfrak{F}_D$ se define del mismo modo que en 3.1.4 (a excepción de la dimensión en la que se trabaja). Entonces el siguiente teorema se enuncia de manera análoga al teorema 3.1.4:

Teorema 4.4.4. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada de curvatura media constante $H_0 \neq 0$ y $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular. $A''_D(0) \geq 0$ para cada variación que preserva el volumen y fija la frontera ∂D si y sólo si para cada $f \in \mathfrak{F}_D$, $J''_D(0)(f) \geq 0$.*

Ahora que hemos visto que todas estas herramientas se pueden enunciar de manera similar para el caso en que $n \geq 4$, pasaremos a definir la estabilidad. Esto permite enunciar el teorema 4.4.4 de manera más compacta, tal como pasó con el teorema 3.1.4:

Definición 4.4.2. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada con curvatura media constante distinta de cero tal que $\varphi[U] = S$ es orientable y $D \subset S$ un dominio regular relativamente compacto tal que ∂D es diferenciable.*

*a) D es **estable** si para cada variación que preserva el volumen y fija ∂D, $A''_D(0) \geq 0$.*

*b) φ es una **parametrización estable** si para cada dominio relativamente compacto D, D es estable.*

Corolario 4.4.5. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada de curvatura media constante $H_0 \neq 0$ y $Q \subset U$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi[Q] = D$ es un dominio regular. Entonces D es estable si y sólo si para cada $f \in \mathfrak{F}_D$, $J''_D(0)(f) \geq 0$.*

$\square$

Escribimos también las generalizaciones de los lemas 3.1.7 y 3.1.8:

Lema 4.4.6. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada tal que $\varphi[U] = S^n$, $p \in S^n$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortonormal de $T_p(S^n)$.*

1. $\sum_{i=1}^{n} \langle D_{w_i} D_{w_i}(N), N \rangle = - \|B\|^2$
2. *Si φ tiene curvatura media constante, entonces $\sum_{i=1}^{n} \langle D_{w_i} D_{w_i}(N), w_k \rangle (p) = 0$, con $k = \overline{1, n}$*

Lema 4.4.7. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada de curvatura media constante H_0 y tal que $\varphi[U] = S^n$, $p \in S^n$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortonormal de $T_p(S^n)$. Si $g = \langle \varphi, N \rangle$, entonces*

$$\Delta g = -nH_0 - \|B\|^2 G \tag{4.4.2}$$

Habiendo ya expresado todos los resultados importantes, de tal modo que nos son útiles para hipersuperficies, podemos pasar finalmente a enunciar el *"Teorema de Barbosa-Do Carmo para hipersuperficies regulares"*, haciendo mención de que el conjunto $\mathbb{S}^n$ es la *esfera* en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica inducida:

Teorema 4.4.8. *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular, orientable, compacta y conexa y $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie regular parametrizada con curvatura media constante distinta de cero. Entonces φ es estable si y sólo si $S^n = \mathbb{S}^n$.* $\square$

Apéndice A

Conexiones

El contenido de este apéndice puede revisarse en su mayoría en [3].

A.1. Símbolos de Christoffel

Sea S una superficie regular y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de $p \in S$. Sabemos que el conjunto $\{\varphi_u(q),\ \varphi_v(q),\ (N \circ \varphi)(q)\}$, con $N \circ \varphi = \varphi_u \times \varphi_v$ es una base para $\mathbb{R}^3$.
Podemos entonces escribir $\varphi_{uu},\ \varphi_{uv},\ \varphi_{vu}$, y φ_{vv} en términos de la base:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1 N \\
\varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2 N \\
\varphi_{vu} &= \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + L_3 N \\
\varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_4 N \\
N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\
N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v
\end{aligned}
\tag{A.1.1}
$$

Podemos calcular los coeficientes L_i de las ecuaciones de A.1.1. Sabemos que

$$e = \langle N_u, \varphi_u \rangle = -\langle \varphi_{uu}, N \rangle ,$$

que por la igualdad de φ_{uu} en A.1.1 queda como:

$$e = -\left\langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, N \right\rangle = -L_1,$$

es decir, $L_1 = -e$. Análogamente,

$$f = -\langle \varphi_{uv}, N \rangle = \left\langle \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N, N \right\rangle = -L_2,$$

$$f = -\langle \varphi_{vu}, N \rangle = \left\langle \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_3 N, N \right\rangle = -L_3 \quad \text{y}$$

$$g = -\langle \varphi_{vv}, N \rangle = \left\langle \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_4 N, N \right\rangle = -L_4,$$

por lo que $L_2 = L_3 = -f$ y $L_4 = -g$.

Definición A.1.1. *Sea S una superficie regular y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización local alrededor de $p \in S$. Llamamos* ***símbolos de Christoffel*** *a los coeficientes Γ_{11}^1, Γ_{11}^2, Γ_{12}^1, Γ_{12}^2, Γ_{21}^1, Γ_{21}^2, Γ_{22}^1 y Γ_{22}^2 de $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$, que se obtienen al escribir φ_{uu}, φ_{uv}, φ_{vu}, y φ_{vv} como combinación lineal de la base $\{\varphi_u(q),\ \varphi_v(q),\ N(p))\}$, respectivamente.*

Podemos obtener expresiones para calcular hallar los símbolos de Christoffel. Ya que

$$\frac{1}{2} E_u = \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = \left\langle \varphi_u, \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v - eN \right\rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F,$$

que

$$F_u - \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = \left\langle \varphi_v, \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v - fN \right\rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

y que $\langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \frac{1}{2}E_v$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 2×2:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \dfrac{1}{2}E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \dfrac{1}{2}E_v \end{cases}, \tag{A.1.2}$$

que al resolverse para Γ_{11}^1 y Γ_{11}^2 se tienen las expresiones

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u G - (2F_u - E_v)F}{2(EG - F^2)} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{(2F_u - E_v)E - E_u F}{2(EG - F^2)}. \tag{A.1.3}$$

De manera similar, obtenemos los siguientes sistemas para hallar los símbolos restantes:

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \dfrac{1}{2}G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \dfrac{1}{2}G_v \end{cases}, \tag{A.1.4}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \dfrac{1}{2}E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \dfrac{1}{2}G_u \end{cases} \quad \text{y} \tag{A.1.5}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{21}^1 E + \Gamma_{21}^2 F = \dfrac{1}{2}E_v \\ \Gamma_{21}^1 F + \Gamma_{21}^2 G = \dfrac{1}{2}G_u \end{cases}. \tag{A.1.6}$$

Del sistema A.1.4 tenemos las soluciones:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{(2F_v - G_u)G - G_v F}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v E - (2F_v - G_u)F}{2(EG - F^2)} \quad . \tag{A.1.7}$$

Por otro lado, ya que los sistemas A.1.5 y A.1.6 son en realidad el mismo, se tiene que:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_vG - G_uF}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{G_uE - E_vF}{2(EG - F^2)} \quad . \tag{A.1.8}$$

A.2. Derivada covariante

Definición A.2.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $V \subset S$ un abierto.*

a) *$F : V \to \mathbb{R}^3$ es un **campo vectorial** si para cada $p \in S$, $F(p) \in T_p(S)$.*

b) *F es **diferenciable en p** si para alguna parametrización φ alrededor de p, los componentes a y b de F en la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ son funciones diferenciables en p.*

c) *F es **diferenciable en V** si para cada $p \in V$, F es diferenciable en p.*

Definición A.2.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $V \subset S$ un abierto, $p \in V$ y $F : V \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Sean $w \in T_p(S)$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Sea $\hat{F}(t) := (F \circ \alpha)(t)$ Definimos **la derivada covariante en p de F relativa a w** como*

$$\frac{DF}{dt}(0) = \nabla_w F(p) := \left(\frac{d\hat{F}}{dt}(0)\right)^{\top} .$$

Daremos una expresión para la derivada covariante en término de los símbolos de Christoffel:
Para una parametrización $\varphi : U \to V \cap S$, $p \in S$ y $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable, sea $w \in T_p(S)$. Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es una curva, con $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $\alpha(0) = (u_0, v_0) = q$ y $\beta = \varphi \circ \alpha$ es tal que $\beta'(0) = w$, podemos calcular $\nabla_w F(p)$.
Ya que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\hat{F}(t) \in T_p(S)$, existen $a, b : U \to \mathbb{R}$ tales que $\hat{F}(t) = a(\alpha(t))\varphi_u(\alpha(t)) + b(\alpha(t))\varphi_v(\alpha(t))$. Al derivar respecto de t y evaluando en 0 obtenemos:

$$\frac{d\hat{F}}{dt}(0) = \frac{d}{dt}\left(a(\alpha(t))\varphi_u(\alpha(t)) + b(\alpha(t))\varphi_v(\alpha(t))\right)(0)$$

$$= a'(u_0, v_0)\varphi_u(u_0, v_0) + a(u_0, v_0)(u_0'\varphi_{uu}(u_0, v_0) + v_0'\varphi_{uv}(u_0, v_0))$$

$$+b'(u_0, v_0)\varphi_v(u_0, v_0) + b(u_0, v_0)(u_0'\varphi_{vu}(u_0, v_0) + v_0'\varphi_{vv}(u_0, v_0)). \qquad (A.2.1)$$

Por las ecuaciones (A.1.1), la ecuación (A.2.1) se reescribe como:

$$\frac{d\hat{F}}{dt}(0) = \left(a'(q) + a(q)u(q)'\Gamma_{11}^1(q) + a(q)v'(q)\Gamma_{12}^1(q) + b(q)u'(q)\Gamma_{21}^1(q) + b(q)v'(q)\Gamma_{22}^1(q)\right)\varphi_u(q)$$

$$+ \left(b'(q) + a(q)u'(q)\Gamma_{11}^2(q) + a(q)v'(q)\Gamma_{12}^2(q) + b(q)u'(q)\Gamma_{21}^2(q) + b(q)v'(q)\Gamma_{22}^2(q)\right)\varphi_v(q)$$

$$-\left(a(q)(u'(q)e(q) + v'(q)f(q)) + b(q)(u'(q)f(q) + v'(q)g(q))\right)N(q) \qquad (A.2.2)$$

Así, al tomar la componente tangente de la ecuación (A.2.2), la derivada covariante queda como:

$$\nabla_w F(p) = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{21}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)(q)\varphi_u(q)$$

$$+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{21}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)(q)\varphi_v(q). \qquad (A.2.3)$$

Teorema A.2.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización alrededor de p. Entonces*

$$\nabla_{\varphi_v}\varphi_u(p) = \nabla_{\varphi_u}\varphi_v(p). \qquad (A.2.4)$$

Demostración:

Definamos los campos $\bar{\varphi}_u, \bar{\varphi}_v : U \to \mathbb{R}^3$ tales que $\bar{\varphi}_u(p) = \varphi_u(\varphi^{-1}(p))$ y $\bar{\varphi}_v(p) = \varphi_v(\varphi^{-1}(p))$. Si definimos $\alpha_1(t) = q + te_1$, entonces $\beta_1(0) = p$ y $\beta_1'(0) = \varphi_u(q)$. Luego, derivando $\hat{\bar{\varphi}}_v(t)$ y evaluando en $t = 0$ se tiene:

$$\hat{\bar{\varphi}}_v'(0) = (\bar{\varphi}_v \circ \beta_1)'(0) = (\varphi_v \circ \alpha_1)'(t) = D\varphi_v(q)e_1 = \varphi_{vu}(q).$$

Ahora, al definir $\alpha_2(t) = q + te_2$ y derivar $\hat{\bar{\varphi}}_u(t)$ en $t = 0$, se obtiene:

$$\hat{\bar{\varphi}}_u'(0) = (\bar{\varphi}_u \circ \beta_2)'(0) = (\varphi_u \circ \alpha_2)'(t) = D\varphi_u(q)e_2 = \varphi_{uv}(q).$$

Ya que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, se concluye que $\nabla_{\varphi_v}\varphi_u(p) = \nabla_{\varphi_u}\varphi_v(p)$. ■

Teorema A.2.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\varphi : U \to V \cap S$ una parametrización alrededor de p. Si $i, k \in \{u, v\}$, entonces*

$$D_{\varphi_i} D_{\varphi_k} \varphi_i(p) = D_{\varphi_k} D_{\varphi_i} \varphi_i(p). \tag{A.2.5}$$

Demostración:

Sabemos que $D_{\varphi_i}\varphi_i(p) = \varphi_{ii}(q)$ y que $D_{\varphi_k}\varphi_i(p) = \varphi_{ik}(q)$. Definamos $\alpha_i, \alpha_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ como $\alpha_i(t) = q+te_i$ y $\alpha_k(t) = q+te_k$ y a $\bar{\varphi}_{ii}, \bar{\varphi}_{ik} : S \to \mathbb{R}^3$ como $\bar{\varphi}_{ii}(p) = \varphi_{ii}(\varphi^{-1}(p))$ y $\bar{\varphi}_{ik}(p) = \varphi_{ik}(\varphi^{-1}(p))$. Entonces $\beta_i(0) = \beta_k(0) = p$ y $\beta_i'(0) = \varphi_i(q)$ y $\beta_k'(0) = \varphi_k(q)$. Al derivar se obtiene:

$$D_{\varphi_k} D_{\varphi_i} \varphi_i(p) = D_{\varphi_k}\bar{\varphi}_{ii}(p) = (\bar{\varphi}_{ii} \circ \beta_k)(0) = (\varphi_{ii} \circ \alpha_k)'(t) = D\varphi_{ii}(q)e_k = \varphi_{iik}(q)$$

y

$$D_{\varphi_i} D_{\varphi_k} \varphi_i(p) = D_{\varphi_i}\bar{\varphi}_{ik}(p) = (\bar{\varphi}_{ik} \circ \beta_i)(0) = (\varphi_{ik} \circ \alpha_i)'(t) = D\varphi_{ik}(q)e_i = \varphi_{iki}(q).$$

Por último,

$$D_{\varphi_i} D_{\varphi_k} \varphi_i = \varphi_{iki} = (\varphi_i)_{ki} = (\varphi_i)_{ik} = \varphi_{iik} = D_{\varphi_i} D_{\varphi_k} \varphi_i,$$

como queríamos demostrar. ■

Bibliografía

[1] Barbosa, J. L., Do Carmo, M. (2012). Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. In Manfredo P. do Carmo–Selected Papers (pp. 221-235). Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] López, R. (2013). Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary. Springer.

[3] Do Carmo, M. P. (2016). Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition. Courier Dover Publications.

[4] Marsden, J. E., Tromba, A. J., Mateos, M. L. (2004). Cálculo Vectorial (5.a ed.). Pearson Educación.

[5] Shubin, M. A., Andersson, S., I. (2001). Pseudodifferential Operators and Spectral Theory. Springer-Verlag.

[6] Ros, A., Montiel, S., Babbitt, D. (2009). Curves and Surfaces;Graduate Studies in Mathematics: 69 (2.a ed.). Amer Mathematical Society.

[7] O'Neill, B. (2006). Elementary Differential Geometry, Revised 2nd Edition (2nd Revised ed.). Academic Press.

[8] Lee, J. M. (1997). Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature: 176 (1997.a ed.). Springer.

[9] Do Carmo, M. P. (2011). Superficies mínimas. IMPA.

[10] Rudin, W. (1980). Principios de análisis matemático (3.a ed.). McGraw-Hill.

[11] Hurtado Cruz, E. R. (2016). Cálculo diferencial e integral IV (1.a ed.). Facultad de Ciencias UNAM. http://sistemas.fciencias.unam.mx/ erhc/calculo4_2015_1/derivacion_de_integrales .pdf

[12] Lucas Saorín, P. (2019). Breve historia de la curvatura. Academia de Ciencias de la Región de Murcia. https://www.um.es/acc/wp-content/uploads/Discurso-BREVE_HISTORIA_web.pdf

[13] Tarrés Freixenet, J., Escribano, M. C., & Rojo Montijano, J. (2014, 1 octubre). La curvatura media y Sophie Germain. Pensamiento matemático, 4. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista _impresa/vol_IV_num_2/his_mat_germain.pdf