Benemérita Universidad Autónoma
de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

LA DERIVADA SIMÉTRICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ANEL VÁZQUEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA

PUEBLA, PUE., **7 DE NOVIEMBRE DE 2013**

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, quienes fueron mi gran ejemplo de fortaleza y aunque están lejos de mi, siempre están presentes en mi corazón.

A mi abuelito Manuel por esas largas y tendidas pláticas que compartimos, las cuales tendré siempre muy presentes en mi corazón y por ese ejemplo de vida que seguiré con tanto orgullo y amor. A mi abuelita Jose que no me alcanzan las palabras para agradecerle todo lo que ha hecho por mi, por alentarme para realizar todos mis sueños, gracias por que en todos los logros que he tenido y tendré siempre estarás detrás de ellos.

A mi tía y a mis primos Luis, Cinthya y Cristo, mis hermanitos, por esas risas que hemos tenido, por el apoyo que me brindan y aunque hemos pasado momentos difíciles al final siempre sale esa pequeña luz que nos hace ser más fuertes como familia

Gracias a todos mis amigos por su compañía, sabiduría y consejos que me han regalado y por la ayuda que me brindaron al resolver los problemas que les planteaba en los lugares "menos esperados". Con ellos he formado una maravillosa amistad, especialmente a Eder que me ha apoyado durante toda mi carrera, dándome las mejores palabras de aliento para seguir adelante y no darme por vencida, por toda esa paciencia que me ha tenido. A todas aquellas personas que fui conociendo en el camino y con los cuales he hecho una linda amistad.

Agradezco a los profesores de la facultad que me impartieron clases para mi formación como matemática, en especial al Dr. Slavisa por tomarse el tiempo para revisar mi protocolo de tesis y darme sugerencias para la realización de este trabajo.

Gracias a mi tutor y director de tesis, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, que a lo largo de toda mi estadía universitaria me dio su ayuda incondicional, enseñanzas y consejos. Además le agradezco profundamente por aceptarme como su tesista, la paciencia que me tuvo y por dedicar parte de su tiempo para la mejora de este trabajo, fue un gran placer haber trabajado con usted.

A mis sinodales: M.C. Ma. Guadalupe Raggi Cárdenas, Dra. Patricia Domínguez Soto, y al M.C. Luis Ángel Gutíerrez Méndez por aceptar ser jurados y haberse tomado el tiempo para la revision de esta tesis, en particular a la M.C. Ma. Guadalupe Raggi Cárdenas, por apoyarme con las dudas que me surgieron en el programa de LaTeX y por el tiempo que nos ofreció en la revisión de esta tesis antes de ser terminada.

Índice general

Introducción

Durante nuestra formación matemática, la noción de derivada de una función es un concepto fundamental que tenemos muy presente en nuestros cursos de cálculo así como sus propiedades tales como: su relación con la continuidad, el álgebra de derivadas, El Teorema de Rolle, El Teorema del Valor Medio, criterios de máximos y mínimos, entre otras. Sin embargo, existen otros conceptos de "Derivada" que usualmente no se estudian en nuestros cursos y que los libros de cálculo y análisis no mencionan o los mencionan brevemente como son los conceptos de derivada simétrica, la derivada de Peano y la Ω-derivada, entre otras.

Nuestro interés sobre la derivada simétrica surgió a raíz de que este concepto y su relación con la derivada se presenta como ejercicio en [3], [9], [11], [12], [15], [16] y no se estudian más.

Realizamos una investigación bibliográfica y nos encontramos una amplia bibliografía sobre el tema [2], [4], [6], [13], [10], [7], [14]. Además nos encontramos que el concepto de derivada simétrica ya aparece en las investigaciones sobre el estudio de las series de Fourier y series trigonómetricas.

El objetivo general de esta tesis es realizar un estudio sistemático del concepto de derivada simétrica, así como la relación que existe con la derivada.

Nuestra guía para este estudio serán los resultados que conocemos para la derivada, se darán respuestas a las siguientes preguntas ¿Serán iguales ambas derivadas?, en caso de no serlo ¿Qué condiciones deberíamos agregar para que ambas derivadas sean iguales? ¿Existirá un Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica?

Por tal motivo, esta tesis está desarrollada de la siguiente manera: instroducción, 3 capítulos, conclusiones, perspectivas y bibliografía.

Descripción de los capítulos:

Capítulo 1: se presenta la teoría básica de la derivada: la definición de la derivada, el álgebra de fuciones diferenciables, el Teorema de Rolle, el Teorema de Valor Medio, máximos y mínimos, derivadas de orden superior.

Capítulo 2: se introduce la definición de la derivada simétrica, y se estudia la relación que éxiste con la derivada; es decir, veremos que toda función que tiene derivada implica que tiene derivada simétrica, pero que el recíproco en general no es verdadero. También se estudia el álgebra de las funciones con derivada simétrica.

Capítulo 3: se realiza un estudio del Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica. En particular, veremos que este teorema no es verdadero para la derivada simétrica, sin embargo se tiene un Casi-Teorema del Valor Medio. También se muestran algunas aplicaciones del Casi-Teorema del Valor Medio, basados en algunas que se conocen del Teorema del Valor Medio para la derivada. Además, usando este teorema presentaremos condiciones suficientes para que una función con derivada simétrica tenga derivada y además ambas derivadas coincidan.

Consideramos importante mencionar que se elaboró un artículo de divulgación sobre este tema con el título **Un Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica**, el cual fue publicado en *Matemáticas y sus aplicaciones I*, primera edición, capítulo 2, páginas $(13 - 21)$, Textos Científicos-BUAP (2011).

Capítulo 1

Preliminares

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del cálculo integral hasta llegar a conseguir que algunos problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo por los nuevos métodos y de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue esencialmente el hecho de poder fundir en uno el cálculo integral y la segunda rama importante del cálculo: El cálculo diferencial.

La idea central del cálculo diferencial es la noción de derivada. Igual que la integral, la derivada se originó de un problema de geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de las Matemáticas. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre Fermat, trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones.

Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo, la tangente ha de ser horizontal. Por lo tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce a la localización de las tangentes horizontales. Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente en un punto arbitrario de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias referentes a la noción de derivada.

A primera vista parece que no habrá conexión entre el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente en un punto de una curva. El primero que descubrió que estas dos ideas, en apariencia sin conexión, estaban intimamete ligadas, fue el maestro de Newton, Isaac Barrow $(1630-1677)$. Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación.

En este capítulo se presentarán algunas de las propiedades básicas de la derivada que son necesarias para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Derivada de una Función

Definición 1.1.1. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $x_o \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f es diferenciable en x_o, si*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \textit{existe.} \tag{1.1}$$

A este límite lo denotaremos como $f'(x_o)$.

Observación 1.1.2. También se dice que f es derivable en x_o, f tiene derivada en x_o o que f es diferenciable en x_o. Suele denotarse a la derivada en el punto x_o como $\dfrac{d}{dx} f(x_o)$, si $y = f(x)$ o como $D_x f(x_o)$.

Definición 1.1.3. *Diremos que la función f es derivable en I si existe $f'(x)$ para cualquier $x \in I$.*

Considerando $x - x_o = h$ en la Definición 1.1.1, obtenemos la siguiente expresión (equivalente) para la derivada de f en x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.2}$$

Durante el desarrollo del tema utilizaremos indistintamente las expresiones (1.1) y (1.2) según nos convenga en cada caso.

Observación 1.1.4. Geométricamente, el valor de la derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

Dos conceptos relacionados con el concepto de derivada de una función f son los de límites laterales, por la derecha y por la izquierda, de f en x.

Definición 1.1.5. *Sean I un intervalo abierto, $x \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función.*

a) La derivada por la derecha de f en x, denotada por $f'_+(x)$, está definida como
$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
cuando este límite existe.

b) La derivada por la izquierda de f en x, denotada por $f'_-(x)$, está definida como
$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
cuando este límite existe.

Observación 1.1.6. A partir de esta definición se deduce, que una función f definida en un intervalo abierto que contiene a x es diferenciable en x, si y sólo si, $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ existen y son iguales. De esto, se sigue que si $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ existen y no coinciden, la función no es derivable en x; en este caso a x se le denomina **punto anguloso** de f. Si alguno de los límites laterales (izquierdo o derecho) no existe, la función tampoco es derivable en dicho punto.

Definición 1.1.7. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y $x_o \in [a, b]$. Decimos que f es continua en x_o, si $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.*

Se demuestra a continuación que la continuidad de f en un punto x_o, es una condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de la derivada de f en x_o.

Teorema 1.1.8. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in I$, si f es diferenciable en x_o, entonces f es continua en x_o.*

Demostración. Para demostrar que f es continua en x_o, debemos probar que $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$. Llevamos a cabo esto, demostrando que la diferencia $f(x) - f(x_o) \to 0$, cuando $x \to x_o$.

Como f es derivable en x_o, sabemos que el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o).$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_o} [f(x) - f(x_o)] &= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o)\right] \\ &= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim_{x\to x_o} (x - x_o) \\ &= f'(x_o) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$, lo cual significa que f es continua en x_o.

■

Teorema 1.1.9. (Álgebra de derivadas) *[3, pág. 205]*
Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $x_o \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en x_o. Entonces

a) La función $f \pm g$ es derivable en x_o, y

$$(f \pm g)'(x_o) = f'(x_o) \pm g'(x_o).$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la función αf es derivable en x_o, y

$$(\alpha f)'(x_o) = \alpha f(x_o)'.$$

c) **(Regla del producto)** *La función fg es derivable en x_o, y*

$$(fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + g'(x_o)f(x_o).$$

d) **(Regla del cociente)** *Si $g(x_o) \neq 0$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_o, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}.$$

A continuación presentaremos un teorema sobre la derivación de funciones compuestas llamado **"Regla de la Cadena"**, este teorema nos proporciona una fórmula para la derivada de una función compuesta $(g \circ f)$.

Proposición 1.1.10. (Regla de la Cadena) *[3, pág. 208]*
Sean I, J intervalos en $\mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(J) \subseteq I$ y sea $x_o \in J$. Si f es derivable en x_o, y g es derivable en $f(x_o)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)$ es derivable en x_o, y

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o).$$

1.2. Valores Máximos y Mínimos

Una aplicación importante de la derivada es determinar dónde una función alcanza sus valores máximos y mínimos, en realidad, en cálculo hay dos significados de la palabra "máximo", y se distingue mediante los adjetivos **absoluto y relativo**. En esta sección veremos los valores extremos relativos, extremos absolutos y el Teorema del Valor Extremo.

Definición 1.2.1.

a) *Sea $x_o \in \mathbb{R}$. Entonces la* ϵ-**vecindad** *de x_o es el conjunto V_ϵ:=$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_o| < \epsilon\}$.*

b) *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y supongamos que $x_o \in A$, x_o se llama* **punto interior** *de A si existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(x_o; r) \subset A$. El interior de A, denotado por $int(A)$ o $\dot{A}$ es el conjunto de los puntos interiores de A.*

Definición 1.2.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función.*

a) *f tiene un* **valor máximo relativo (o local)** *en $x_o \in I$ si existe una* ϵ-**vecindad** *$V := V_\epsilon(x_o)$ de x_o tal que $f(x) \leq f(x_o)$ para $x \in V \cap I$.*

b) f tiene un **valor mínimo relativo (o local)** *en $x_o \in I$ si existe una* **ϵ-vecindad** *$V := V_\epsilon(x_o)$ de x_o tal que $f(x_o) \leq f(x)$ para $x \in V \cap I$.*

Observación 1.2.3. Se dice que la función f tiene un **extremo relativo (o local)** en x_o, si tiene un máximo relativo, o bien, un mínimo relativo en x_o.

Teorema 1.2.4. *[3, pág. 216]*

a) Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función, $x_o \in int(I)$, en el que f tiene un extremo relativo. Si la derivada de f en x_o existe, entonces $f'(x) = 0$.

b) Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que f tiene un extremo relativo en un punto interior x_o en I. Entonces $f'(x_o) = 0$ ó $f'(x_o)$ no existe.

Observación 1.2.5. El hecho que $f'(x_o) = 0$ no implica la existencia de máximo o mínimo local.

Veamos el siguiente ejemplo en donde el recíproco del Teorema 1.2.4 inciso b) no es verdadero.

Ejemplo 1.2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = x^3$.

Observamos que la derivada de f es $f'(x) = 3x^2$, y $f(0) = 0$. La función f no tiene extremo relativo en 0 ya que para cualquier $\delta > 0$, $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ tal que x_1, $x_2 \in (-\delta, \delta)$ que cumpla $f(x_1) < f(0) = 0$ y $f(x_2) > 0 = f(0)$.

Definición 1.2.7. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función.*

a) f tienen un valor **máximo absoluto** *en el intervalo I, si existe algún número $x_o \in I$ tal que, $f(x_o) \geq f(x)$, para toda $x \in I$. El número $f(x_o)$ es el valor máximo absoluto de f en el intervalo I.*

b) La función f tienen un **valor mínimo absoluto** *en el intervalo I si existe algún número $x_o \in I$ tal que, $f(x_o) \leq f(x)$, para toda $x \in I$. El número $f(x_o)$ es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo I.*

Observación 1.2.8. Un **extremo absoluto** de una función en un intervalo, es un valor máximo absoluto o valor mínimo absoluto de la función en el intervalo. Una función puede o no tener un extremo absoluto en un intervalo.

Teorema 1.2.9. (Teorema del Valor Extremo)*[16, pág. 203]*
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$, tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para toda $x \in [a, b]$.

1.3. El Teorema de Rolle y del Valor Medio

El Teorema del Valor Medio para derivadas es importante en cálculo porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse a partir de él. Antes de establecer el Teorema del Valor Medio, examinaremos uno de sus casos particulares, conocido como el Teorema de Rolle, a partir del cual puede deducirse el teorema general.

Teorema 1.3.1. (Teorema de Rolle)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a) = 0 = f(b)$, entonces existe al menos un punto x_o en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(x_o) = 0$.

Demostración. Consideremos dos casos.

Caso 1) f es una función constante.
Entonces $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$; y por tanto para cualquier $x_o \in (a, b)$, la derivada $f'(x_o) = 0$.

Caso 2) f es una función no constante.
Como f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces por Teorema 1.2.9, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$, tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para toda $x \in [a, b]$, observemos que $x_1 \in (a, b)$ ó $x_2 \in (a, b)$.

i) Si $x_1 \in (a, b)$, como x_1 es un valor mínimo absoluto, entonces es un mínimo relativo. Además, por ser f derivable en (a, b), se tiene que $f'(x_1) = 0$.

ii) Es análogo a *i*).

∎

Como una consecuencia del Teorema de Rolle, se obtiene el muy importante Teorema del Valor Medio.

Teorema 1.3.2. (Teorema del Valor Medio)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a,b). Entonces existe al menos un punto x_o en el intervalo abierto (a,b) tal que

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Consideremos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) \quad = \quad f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

Veamos que g cumple con las condiciones del Teorema 1.3.1

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a)\right] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \\ g(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right] \\ &= f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $g(a) = 0 = g(b)$.

Observamos que g es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b), entonces aplicando el Teorema 1.3.1 a la función g, existe $x_o \in (a,b)$ tal que

$$g'(x_o) = 0.$$

Observemos que la derivada de $g(x)$ está dada por:

$$g'(x) \quad = \quad f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por lo tanto

$$f'(x) \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

La expresión $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ puede interpretarse como la "pendiente media" de f en $[a,b]$, es decir, es el cociente de lo que aumenta f cuando la variable x pasa de a a b dividido entre lo que ha aumentado la variable. Lo que dice el Teorema del Valor Medio es que hay un punto en el intervalo donde la función toma el valor medio de su pendiente. La importancia de este teorema es que nos relaciona una magnitud global, la pendiente media, con una magnitud local, la derivada en un punto.

Observación 1.3.3. La interpretación geométrica del Teorema 1.3.2 es que existe un punto en la gráfica de la función $y = f(x)$ en el que la recta tangente es paralela al segmento de recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

El Teorema del Valor Medio permite obtener conclusiones acerca de la naturaleza de una función f a partir de la información sobre su derivada f'. El teorema siguiente es de este tipo. Pero antes definiremos algunos conceptos.

Definición 1.3.4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función.*

a) La función f es **creciente** *sobre I si siempre que $x,\ y \in I$ y $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$. Se dice que la función f es* **estrictamente creciente** *en I si para $x,\ y \in I$ y $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.*

b) La función f es **decreciente** *sobre I si siempre que $x,\ y \in I$ y $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$. Se dice que la función f es* **estrictamente decreciente** *en I si para $x,\ y \in I$ y $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.*

Teorema 1.3.5. *[1, pág 228] Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en intervalo abierto (a,b). Entonces:*

a) Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es **creciente** *en $[a,b]$.*

b) Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es **decreciente** *en $[a,b]$.*

c) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es **constante** *en $[a,b]$.*

El Teorema de Darboux establece que si una función f es derivable en todos los puntos de un intervalo I, entonces la función tiene la propiedad del valor intermedio. Esto significa que si f' asume los valores de A y B, entonces también asume todos los valores que están entre A y B. Resulta notable que las derivadas, que no necesariamente son funciones continuas, también poseen esta propiedad.

Teorema 1.3.6. (Teorema de Darboux) *[3, pág 224]*
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si k es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces existe al menos un punto x_o en (a, b) tal que $f'(x_o) = k$.

Observación 1.3.7. El Teorema de Darboux es una generalización del Teorema del Valor Intermedio.

Recordemos que el Teorema del Valor Intermedio dice

Teorema 1.3.8. (Teorema del Valor Intermedio de Bolzano)
[9, pág 82]
Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$, y z, un número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.

Definición 1.3.9. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, decimos que f es* **Lipschitz** *en I, si existe $M > 0$ tal que*

$$| f(x) - f(y) | \leq M \mid x - y \mid \text{ para toda } x, y \in I.$$

Teorema 1.3.10. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I, si existe $M > 0$ tal que*

$$| f'(x) | \leq M \text{ para toda } x, y \in I,$$

entonces f es Lipschitz.

1.4. Derivadas de Orden Superior

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en I, puede ocurrir que la función derivada f' sea derivable en algún punto x_o del intervalo I,en este caso diremos que f es dos veces diferenciable en x_o y la derivada de f'en x_o será denotada por $f''(x_o)$ y la llamaremos la segunda derivada de f en x_o. Por inducción se puede definir la derivada de orden $n \in \mathbb{N}$ de una función f en un punto x_o, en este caso se denota como $f^{(n)}(x_o)$. Igual que la derivabilidad de una función en un punto permite aproximar la función mediante un polinomio de grado menor o igual que uno, la existencia de la derivada n-ésima en un punto dará lugar a una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, llamado el polinomio de Taylor de la función f.

El Teorema de Taylor es un poderoso resultado que tiene múltiples aplicaciones, se puede considerar como una aplicación del Teorema del Valor Medio a derivadas de "órdenes superiores". En tanto que el Teorema del Valor Medio relaciona los valores de una función con su primera derivada, el Teorema de Taylor proporciona una relación entre los valores de una función y sus derivadas de órdenes superiores. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.4.1. *Si f tiene una derivada f' en I, y f' es a su vez diferenciable, representaremos su derivada como f'' y la llamaremos segunda derivada de f o derivada de segundo orden. Continuando de este modo, obtenemos funciones*

$$f, f', f'', f''', ..., f^{(n)},$$

cada una de las cuales es la derivada de las precedentes. A $f^{(n)}$ se le llama **derivada n-ésima** *o de orden n de f.*

Para que $f^{(n)}(x_o)$ exista en un punto x_o, debe existir $f^{(n-1)}(x_o)$ en una vecindad de x_o (o en una vecindad hacia un lado si x_o es un extremo del intervalo en el que esta definida f) y debe ser diferenciable en x_o. Como ha de existir $f^{(n-1)}(x_o)$ en una vecindad de x_o, $f^{(n-2)}$ debe ser diferenciable en esa vecindad.

Teorema 1.4.2. (Teorema de Taylor) *[9, pág. 120]*
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, tal que f y sus derivadas $f', f'', ..., f^{(n-1)}$

existen en I *y tal que* $f^{(n-1)}$ *es derivable en* $x_o \in I$. *Sea*

$$p_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n,$$

entonces

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_o)^n} = 0. \tag{1.3}$$

Capítulo 2

La Derivada Simétrica

2.1. Definición de Derivada Simétrica

Gráficamente podemos observar que la interpretación de la derivada y la derivada simétrica parecieran ser las mismas (Ver figura 2.1), pero mostraremos que desde el punto de vista analítico ambos conceptos no son equivalentes, es decir, que la derivada simétrica no cumple con algunas propiedades de la derivada.

En esta sección hablaremos de la derivada simétrica, daremos su definición y analizaremos la relación que tiene con la derivada.

Definición 2.1.1. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $x \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f tiene* **derivada simétrica** *en x, si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad \textit{existe.}$$

A este límite lo denotaremos como $f'_s(x)$.

Observación 2.1.2. A la derivada simétrica también se le conoce como la derivada de la Vallée Poussin o derivada de Peano simétrica.

Obsevemos que, debido a la simetría en el numerador del cociente que aparece en la definición de derivada simétrica, basta considerar que el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad existe.$$

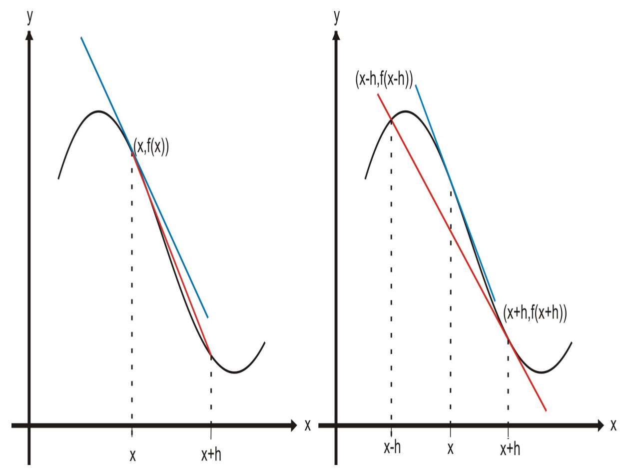

Figura 2.1: Representación gráfica de la derivada y derivada simétrica, respectivamente.

Observación 2.1.3. Si una función es simétricamente diferenciable en todo los puntos del intervalo, entonces diremos que tiene derivada simétrica en ese intervalo.

2.2. Relación con la Derivada

Teorema 2.2.1. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in I$. Suponemos que $f'_+(x_o)$ y $f'_-(x_o)$ existen, entonces f tiene derivada simétrica en x_o, y*

$$f'_s(x_o) = \frac{f'_+(x_o) + f'_-(x_o)}{2}.$$

Demostración. Por hipótesis existen $f'_+(x_o)$ y $f'_-(x_o)$. Veamos que existe

$f'_s(x_o)$. Tomemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-h)}{2h}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\\
&+ \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{-h}\\
&= \frac{f'_+(x_o)+f'_-(x_o)}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f'_s(x_o)=\frac{f'_+(x_o)+f'_-(x_o)}{2}$$

■

¿El recíproco es verdadero?, es decir, ¿Si existe la derivada simétrica $f'_s(x_o)$; entonces existen las derivadas $f'_+(x_o)$ y $f'_-(x_o)$? La respuesta es no, para eso veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} xsen\dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad x\neq 0,\\ \\ 0, & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

Examinemos si la función f tiene derivada simétrica en 0.

$$\begin{aligned}
f'_s(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\sin(\frac{1}{h})-[-h\sin(-\frac{1}{h}])}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\sin(\frac{1}{h})-h\sin(\frac{1}{h})}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada simétrica de f en cero existe y es igual a cero.

Veamos ahora que f no tiene derivada por la derecha en cero.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h\sin(\frac{1}{h})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \sin(\frac{1}{h}), \end{aligned}$$

pero este límite no existe en cero. Por lo tanto f no tiene derivada por la derecha en el punto 0, análogamente se hace para la derivada por la izquierda en el punto cero.

Teorema 2.2.3. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x \in I$. Si f es diferenciable en x, entonces f es simétricamente diferenciable en x. Más aún,*

$$f'(x) = f'_s(x).$$

Demostración. Como f tiene derivada en x, entonces f'_+ y f'_- existen y son iguales, así por Teorema 2.2.1 se cumple que la derivada simétrica de f existe en x y además $f'_s(x) = f'(x)$.

■

El recíproco de este teorema no es verdadero, es decir, si f tiene derivada simétrica en un punto no necesariamente tiene derivada en ese punto, una muestra de ello es el ejemplo 2.2.2, otro ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 2.2.4. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =\mid x \mid$ (Ver figura 2.2), esta función tiene derivada simétrica en cero, pero no tiene derivada en cero.

Veamos que la función no tiene derivada en el punto cero.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

de (2.1) y (2.2) se concluye que f no tiene derivada en cero.

Ahora analicemos qué ocurre con la derivada simétrica en el punto cero.

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mid h \mid - \mid -h \mid}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es simétricamente diferenciable en 0.

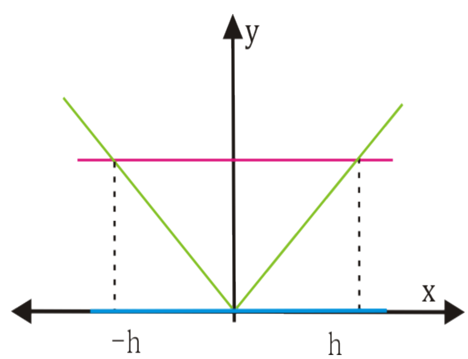

Figura 2.2: Gráfica de la función $f(x) = |x|$ y gráfica de la recta tangente a esta función en el punto $(0,0)$.

Observación 2.2.5. Al generalizar la definición de derivada a derivada simétrica se pierden algunas propiedades de la derivada como son: la continuidad, y la suavidad de las curvas y el Teorema del Valor Medio, entre otras.

Sabemos por nuestro conocimiento de la derivada que cada función diferenciable en un punto es continua en ese punto. Ahora nos preguntamos si lo mismo es cierto para una función con derivada simétrica.

Ejemplo 2.2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función tiene derivada simétrica en cero. Para ver esto, estudiemos el siguiente límite

$$\begin{aligned} f_s'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{h^2}}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es simétricamente diferenciable en $x = 0$, pero no es continua en cero. Este ejemplo ilustra que una función discontinua en un punto puede tener derivada simétrica en ese punto. Como sabemos esto no ocurre con las funciones diferenciables.

Definición 2.2.7. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una* **función par** *si satiface que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Observación 2.2.8. Las funciones de los Ejemplos 2.2.2, 2.2.4 y 2.2.6 son funciones pares.

Teorema 2.2.9. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par. Entonces f tiene derivada simétrica en el punto* 0.

Demostración. Como f es una función par, se tiene que $f(h) - f(-h) = 0$, luego $\dfrac{f(h) - f(-h)}{2h} = \dfrac{0}{2h}$, entonces $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(-h)}{2h} = 0$, es decir

$f_s'(x) = 0$.

■

El siguiente ejemplo nos muestra que la funcion de Dirichlet tiene derivada simétrica para cada punto en los racionales pero no para cada punto en los irracionales.

Ejemplo 2.2.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Veamos que efectivamente existe la derivada simétrica para $x \in \mathbb{Q}$.

Si $h \in \mathbb{Q}$, entonces $x + h \in \mathbb{Q}$ y $x - h \in \mathbb{Q}$.

Si $h \in \mathbb{I}$, entonces $x + h \in \mathbb{I}$ y $x - h \in \mathbb{I}$, entonces en cualquier caso

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 0.$$

Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 0.$$

Por lo tanto la derivada simétrica de f existe en x y es igual a 0.

Ahora veamos que f no tiene derivada simétrica para $x \in \mathbb{I}$.

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $\{q_n\}$ de números racionales tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Sea $h_n = q_n - x$, entonces $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ y $h_n \in \mathbb{I}$.

Entonces

$$\begin{aligned} f_s'(x) &= \lim_{h_n\to 0}\frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+(q_n-x))-f(x-(q_n-x))}{2h_n} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(q_n)-f(2x-q_n)}{2h_n} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-0}{2h_n} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h_n}. \end{aligned}$$

Pero este límite no existe. Luego f no tiene derivada simétrica en x.

En los siguientes ejemplos presentamos dos funciones que tienen discontinuidad de salto finito en un punto, es decir que los límites laterales derecho e izquierdo existen y son distintos. El primer ejemplo no tiene derivada simetrica en el salto y el segundo tiene derivada simetrica en el salto.

Ejemplo 2.2.11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ -1, & \text{si} \quad x < 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función tiene un salto de discontinuidad finito en 0 y no tiene derivada simétrica en cero, como veremos a continuación

$$\begin{aligned} f_s'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1+1}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}, \end{aligned}$$

pero este límite no existe.

Ejemplo 2.2.12. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si} \quad x \in [-1, 0], \\ \\ x, & \text{si} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Esta función tiene un salto de discontinuidad finito en 0, tiene derivada por la derecha y por la izquierda, entonces por Teorema 2.2.1 existe la derivada simétrica.

2.3. Álgebra de Funciones Simétricamente Diferenciables

A continuación presentaremos el "comportamiento" de la derivada simétrica con respecto a las operaciones algebraicas de funciones y la composición de funciones.

Teorema 2.3.1. (Álgebra de derivadas) *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones simétricamente derivables en $x_o \in I$, y α un escalar. Entonces*

a) La función $f \pm g$ es simétricamente derivable en x_o y

$$(f \pm g)'_s(x_o) = f'_s(x_o) \pm g'_s(x_o).$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la función αf es simétricamente derivable en x_o y

$$(\alpha f)'_s(x_o) = \alpha f'_s(x_o).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} a) \quad (f \pm g)'_s(x_o) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \pm g)(x_o + h) - (f \pm g)(x_o - h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) \pm g(x_o + h) - [f(x_o - h) \pm g(x_o - h)]}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o - h)}{2h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x_o + h) - g(x_o - h)}{2h} \\ &= f'_s(x_o) \pm g'_s(x_o). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad (\alpha f)'_s(x_o) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(x_o+h)-(\alpha f)(x_o-h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(x_o+h)-\alpha f(x_o-h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \alpha\left[\frac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{2h}\right]\\
&= \alpha\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{2h}\\
&= \alpha f'_s(x_o).
\end{aligned}
$$

■

Sin embargo, la regla del producto no se cumple para funciones simétricamente diferenciables como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$
f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).
$$

Estas dos funciones son pares, por lo tanto tienen derivada simétrica en 0, sin embargo el producto no tiene derivada simetrica en 0, como veremos a continuación.

$$
\begin{aligned}
(fg)'_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)g(0+h)-[f(0-h)g(0-h)]}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)g(h)-[f(-h)g(-h)]}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\left(\frac{1}{h}\right)-\left[-h\cos\left(-\frac{1}{h}\right)\right]}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\left(\frac{1}{h}\right)+h\cos\left(-\frac{1}{h}\right)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\left(\frac{1}{h}\right)+h\cos\left(\frac{1}{h}\right)}{2h}.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$(fg)'_s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2h\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)}{2h} = \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{1}{h}\right).$$

Observemos que este límite no existe, así por tanto $(fg)'_s$ no existe en el punto 0. Pero si agregamos la condición de que ambas funciones sean continuas se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones con derivada simétrica y continuas en el punto x_o. Entonces la función fg tiene derivada simétrica en x_o y*

$$(fg)'_s(x_o) = f'_s(x_o)g(x_o) + g'_s(x_o)f(x_o).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(fg)'_s(x_o) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_o+h) - (fg)(x_o-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)g(x_o+h) - f(x_o-h)g(x_o-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)g(x_o+h) - f(x_o-h)g(x_o+h)}{2h} \\
&+ \frac{f(x_o-h)g(x_o+h) - f(x_o-h)g(x_o-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_o+h) - f(x_o-h)}{2h} g(x_o+h)\right] \\
&+ \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x_o+h) - g(x_o-h)}{2h} f(x_o-h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o-h)}{2h} g(x_o) \\
&+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x_o+h) - g(x_o-h)}{2h} f(x_o) \\
&= f'_s(x_o)g(x_o) + g'_s(x_o)f(x_o).
\end{aligned}$$

■

Otra regla que no se cumple para funciones simétricamente diferenciables es la Regla de la Cadena, para esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.4. Sean $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas por,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} + x, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

y $g(x) = |x|$.

Estas dos funciones tienen derivada simétrica en 0. Sin embargo, la función composición no tiene derivada simétrica en 0 como lo veremos a continuación. Veamos que la composición de estas dos funciones,

$$G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \mid x \sin \dfrac{1}{x} + x \mid, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

no tiene derivada simétrica en 0.

Sea $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - G(-h)}{2h} &= \frac{\mid h \sin(\frac{1}{h}) + h \mid - \mid -h \sin(-\frac{1}{h}) - h \mid}{2h} \\ &= \frac{\mid h[\sin(\frac{1}{h}) + 1] \mid - \mid h[-\sin(-\frac{1}{h}) - 1] \mid}{2h} \\ &= \frac{h\Big[\mid \sin(\frac{1}{h}) + 1 \mid - \mid \sin(\frac{1}{h}) - 1 \mid \Big]}{2h} \\ &= \frac{\mid \sin(\frac{1}{h}) + 1 \mid - \mid \sin(\frac{1}{h}) - 1 \mid}{2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Consideremos $\left\{ h_n = \dfrac{1}{n\pi} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces $h_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, luego de (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{G(h_n) - G(-h_n)}{2h_n} &= \frac{\mid \sin(n\pi) + 1 \mid - \mid \sin(n\pi) - 1 \mid}{2} \\ &= \frac{\mid 1 \mid - \mid 1 \mid}{2} = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(h_n) - G(-h_n)}{2h_n} = 0. \tag{2.4}$$

Ahora consideremos $\left\{h_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $h_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, luego de (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{|\sin((4n+1)\pi) + 1| - |\sin((4n+1)\pi) - 1|}{2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|1+1| - |1-1|}{2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(h_n) - G(-h_n)}{2h_n} = 1. \tag{2.5}$$

Luego de (2.4) y (2.5) se concluye que G no tiene derivada simétrica en 0.

2.4. Derivadas de Orden Superior

Así como el concepto de derivada de orden n de una función admite varias generalizaciones, también el concepto de derivada simétrica de orden n de una función admite varias generalizaciones. En esta sección veremos dos de ellas y para el caso de orden dos. El caso general se realiza de manera análoga y no lo haremos en este trabajo.

En esta sección presentaremos dos conceptos de segunda derivada simétrica de una función, veremos que no son equivalentes, su relación con la segunda derivada y algunas propiedades que tienen éstas.

Definición 2.4.1. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $x_o \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f tiene segunda derivada simétrica en x_o, si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) + f(x_o-h) - 2f(x_o)}{h^2} \quad \textit{existe.} \tag{2.6}$$

A este límite lo denotaremos como $f''_s(x_o)$.

El límite (2.6) se le conoce como **segunda derivada simétrica**, segunda derivada de Riemann o segunda derivada de Schwartz.

Teorema 2.4.2. *Sean I un intervalo abierto, $x_o \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si $f''(x_o)$ existe, entonces la segunda derivada simétrica existe y*

$$f''(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)+f(x_o-h)-2f(x_o)}{h^2}.$$

Demostración. Sean $x = x_o + h$ y $x = x_o - h$.

Aplicando (1.3), con $n = 2$ tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)-hf'(x_o)-\dfrac{h^2}{2!}f''(x_o)}{h^2} = 0, \tag{2.7}$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o-h)-f(x_o)-hf'(x_o)-\dfrac{h^2}{2!}f''(x_o)}{h^2} = 0. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se sigue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)+f(x_o-h)-2f(x_o)-h^2f''(x_o)}{h^2} = 0,$$

entonces

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_o+h)+f(x_o-h)-2f(x_o)}{h^2} - f''(x_o)\right] = 0,$$

así

$$f''(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)+f(x_o-h)-2f(x_o)}{h^2}.$$

■

Definición 2.4.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una* **función impar** *si satiface que $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.4.4. Si f es una función impar, entonces f tiene segunda derivada simétrica en el punto 0.

Ejemplo 2.4.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \\ -x^2, & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Es fácil demostrar que esta función es impar, por lo tanto tiene segunda derivada simétrica en cero, pero no existe la segunda derivada en cero, ya que la primera derivada está dada por,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \\ -2x, & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función no es diferenciable en cero. De acuerdo a la definición 1.4.1 del Capítulo 1, es natural definir la segunda derivada simétrica como:

Definición 2.4.6. *Sean I un intervalo abierto, $x_o \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ simétricamente diferenciable en I. Decimos que f tiene segunda derivada simétrica en x_o, y lo denotaremos por $f_s''(x_o)$, si*

$$f_s''(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f_s'(x_o + h) - f_s'(x_o - h)}{2h} \quad \textit{existe.} \tag{2.9}$$

Observemos que la existencia de (2.6) no implica la existencia de (2.9), ni la existencia de (2.9) implica la de (2.6). Para esto veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.4.7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ \\ -1, & \text{si} \quad x < 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función no tiene segunda derivada simétrica en el sentido de (2.9) en el punto 0, ya que no existe $f'_s(0)$, como veremos a continuación

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+1}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}, \end{aligned}$$

pero este límite no existe.

Ahora veamos que ésta si tiene segunda derivada simétrica en el sentido de (2.6) en el punto 0.

$$\begin{aligned} f''_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1-1-0}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.8. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Veamos que f es simétricamente diferenciable en cero.

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{2h} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $f'_s(0)=0$. Para $x\neq 0$, $f'_s(x)=0$. De este hecho, se sigue que f tiene segunda derivada simétrica en el sentido de (2.9) en el punto 0, sin embargo no tiene derivada simétrica en 0 en el sentido de (2.6), ya que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{4}{h^2}\ \text{ no existe .}$$

En el siguiente teorema, la definición de segunda derivada simétrica la tomamos en el sentido de la definición (2.6).

Teorema 2.4.9. *Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función y $x_o\in(a,b)$. Si f tiene segunda derivada simétrica en x_o y un máximo local en x_o, entonces $f_s''(x_o)\leq 0$.*

Demostración. Como f tiene un máximo local en x_o, existe $r>0$ tal que $(x_o-r,x_o+r)\subseteq(a,b)$ y $f(x_o)\geq f(x)$, para cada $x\in(x_o-r,x_o+r)$. Sea $|h|<\delta$. entonces

$$f(x_o+h)\leq f(x_o)\ \text{y}\ f(x_o-h)\leq f(x_o),$$

entonces,

$$\frac{f(x_o+h)+f(x_o-h)-2f(x_o)}{h^2}\leq 0.$$

De esta última desigualdad y del hecho de que $f_s''(x_o)$ existe, se tiene que $f_s''(x_o)\leq 0$.

∎

Capítulo 3

Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio

El Teorema del Valor Medio de Lagrange es un resultado muy importante en el Análisis. Joseph Lagrange $(1736-1813)$ presentó su Teorema del Valor Medio en su libro *"Theorie des funciones analytiques"* en 1797. Se recibió con un mayor reconocimiento cuando Augustin Louis Cauchy $(1789-1857)$ demostró su Teorema del Valor Medio en su libro *"Equationnes differentielles ordinaire"*. La mayoría de los resultados en el libro de Cauchy se establecieron mediante el Teorema del Valor Medio. Desde el descubrimiento del Teorema del Valor Medio de Lagrange, numerosos trabajos han aparecido directa o indirectamente relacionados con el Teorema de Lagrange.

En esta sección, se establece un Casi-Teorema del Valor Medio (en el sentido de Lagrange) para las funciones con derivada simérica. Demostraremos, además, que toda función continua cuya derivada simétrica tiene la propiedad de Darboux obedece el Teorema del Valor Medio de Lagrange.

El Teorema de Valor Medio Clásico no es cierto para derivadas simétricas como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.0.10. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x)=|x|$. Esta función no satisface el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-1, 2]$ (ver figura 3.1), si se considera a la derivada simétrica en lugar de la derivada.

$$f_s'(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La pendiente de la recta secante que une los puntos $(-1,1)$ y $(2,2)$ de la gráfica de f es:

$$\frac{f(2)-f(-1)}{3}=\frac{1}{3},$$

y $\frac{1}{3}$ no pertenece a la imagen de la función f, ya que la imagen de f es el conjunto $\{0,-1,1\}$, es decir, no existe $x \in$ [-1,2] tal que $f'_s(x)=\frac{1}{3}$.

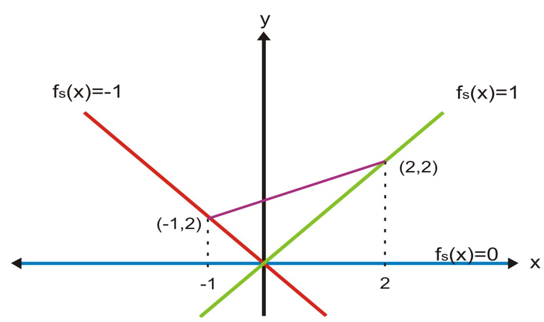

Figura 3.1: Gráfica de una función que no cumple con el Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica.

3.1. Un Casi-Teorema del Valor Medio para la Derivada Simétrica

Esta sección es la parte central de esta tesis, ya que estableceremos un Casi-Teorema del Valor Medio para funciones con derivada simétrica.

El siguiente lema debido a Aull [2] se usa en la prueba del llamado Casi-Teorema del Valor medio.

Lema 3.1.1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y simétricamente diferenciable en (a,b).*

a) Si $f(b)>f(a)$, entonces existe $\eta\in(a,b)$ tal que

$$f'_s(\eta)\geq 0.$$

b) Si $f(b) < f(a)$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'_s(\xi) \leq 0.$$

Demostración. Suponemos que $f(b) > f(a)$, sea k un número real tal que $f(a) < k < f(b)$. Consideremos el conjunto $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) > k\}$. A está acotado inferiormente por a, además como es un subconjunto de $\mathbb{R}$ distinto del vacío, ya que $b \in A$, entonces tiene ínfimo, digamos η. Primero probaremos que η es distinto de a y b, como η es el ínfimo de A, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que converge a η, luego como f es continua en η y $x_n \in A$, $(n \in \mathbb{N})$, entonces $f(\eta) \geq k$, por lo tanto $\eta > a$. Como f es continua en b y $f(b) > k$, existe $\delta > 0$ que cumple

$$\text{si } x \in (b-\delta, b] \text{ y } x \in [a,b], \text{ entonces } f(x) > k.$$

Sea $x \in (b-\delta, b]$ y $x \in [a,b)$, entonces $x \in A$ y por lo tanto $\eta \leq x < b$. Sea $(\eta - r, \eta + r)$ una vecindad de η contenida en $[a,b]$.

Ahora probaremos que $f'_s(\eta) \geq 0$. Lo haremos por contradicción. Como $f'_s(\eta) < 0$, existe $r > r_1 > 0$ tal que si $0 < h < r_1$, entonces

$$\frac{f(\eta+h) - f(\eta-h)}{2h} < 0. \tag{3.1}$$

Para cada, $0 < h < r_1$, se tiene que

$$f(\eta - h) \leq k. \tag{3.2}$$

Para cada $0 < h < r_1$, existe $0 < h_1 < r_1$, tal que

$$\eta + h_1 \in A, \text{ es decir, } f(\eta + h_1) > k. \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3)

$$\frac{f(\eta+h_1) - f(\eta-h_1)}{2h} \geq 0.$$

Lo cual es una contradicción con (3.1).

Análogamente se demuestra que si $f(a) > f(b)$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f'_s(\xi) \leq 0$.

■

3.2. Teorema de Rolle

El siguiente Teorema de Aull [2] es considerado como una versión del Teorema de Rolle para funciones simétricamente diferenciables.

Teorema 3.2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y simétricamente diferenciable en (a, b). Supongamos que*

$$f(a) = f(b) = 0,$$

entonces existen η y $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f_s'(\eta) \geq 0 \ \ y \ \ f_s'(\xi) \leq 0.$$

Demostración. Si $f \equiv 0$, entonces el teorema es obviamente cierto. Por tanto asumimos que $f \neq 0$. Como f es continua y $f(a) = f(b) = 0$, existen puntos x_1 y x_2 tal que

$$f(x_1) > 0 \text{ y } f(x_2) < 0 \tag{3.4}$$

ó

$$f(x_1) < 0 \text{ y } f(x_2) > 0 \tag{3.5}$$

ó

$$f(x_1) > 0 \text{ y } f(x_2) > 0 \tag{3.6}$$

ó

$$f(x_1 < 0 \text{ y } f(x_2) < 0. \tag{3.7}$$

Si la inecuación (3.1) es verdadera, entonces aplicando el Lema 3.1.1 a f en el intervalo $[a, x_1]$ se obtiene

$$f_s'(\eta) \geq 0,$$

para algún $x_o \in (a, x_1) \subset (a, b)$. De nuevo aplicando el Lema 3.1.1 a f en el intervalo $[a, x_2]$, obtenemos

$$f'_s(\xi) \leq 0,$$

para algún $y_o \in (a, x_2) \subset (a, b)$.

Los otros casos pueden ser manejados de manera similar y así la prueba del teorema esta completa.

■

Ahora, una vez demostrado el Lema 3.1.1 y el Teorema 3.2.1, podemos demostrar el Casi-Teorema del Valor Medio para funciones simétricamente diferenciables.

Teorema 3.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y simétricamente diferenciable en (a, b), entonces existen η y ξ $in(a, b)$ tales que*

$$f'_s(\eta) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_s(\xi).$$

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) \;=\; f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La derivada simétrica de $g(x)$ está dada por:

$$g'_s(x) \;=\; f'_s(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veamos que se cumplen las condiciones del Teorema 3.2.1

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a), \\ g(a) &= 0, \end{aligned}$$

y análogamente pasa con b, es decir $g(a) = 0 = g(b)$.

Aplicando de nuevo el Teorema 3.2.1 a g en el intervalo $[a,b]$ obtenemos:

$$g_s'(\eta) = f_s'(\eta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0,$$

$$g_s'(\xi) = f_s'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0,$$

es decir

$$f_s'(\eta) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$f_s'(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

entonces

$$f_s'(\eta) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_s'(\xi).$$

■

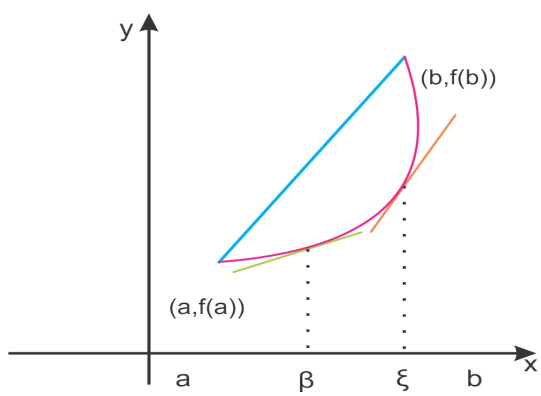

Figura 3.2: Ilustración del Teorema 3.2.2

Observemos que el Teorema 3.2.2 es análogo al Teorema del Valor Medio para funciones simétricamente diferenciables. Una pregunta "Natural" que surge es, ¿Qué condición o condiciones deben ser impuestas a la función f o a la derivada simétrica de f o a ambas para que el Teorema del Valor Medio se cumpla para funciones con derivada simétrica? La respuesta a esta pregunta es, que si la derivada simétrica de f tiene la Propiedad de Darboux, entonces se obtiene dicho teorema.

Definición 3.2.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f tiene la propiedad de Darboux si para cualesquiera η y $\xi \in [a,b]$ y un número k entre $f(\eta)$ y $f(\xi)$, se tiene que existe un número γ entre η y ξ tal que*

$$k = f(\gamma).$$

En el siglo XIX, algunos matemáticos, creían que la propiedad de Darboux era equivalente a la propiedad de la continuidad. En 1875, Darboux mostró que esta creencia no estaba justificada. Se puede demostrar que una función que tiene la propiedad de Darboux puede ser discontinua en todas partes. Además, también sabemos que si una función es diferenciable en un intervalo cerrado, entonces la derivada tiene la propiedad de Darboux, sin embargo es falso que si una función tiene derivada simétrica en un intervalo cerrado, entonces la derivada simétrica tenga la propiedad de Darboux, un ejemplo de este hecho es la función valor absoluto en un intervalo cerrado.

3.3. Teorema del Valor Medio

Como ya hemos mencionado la Propiedad de Darboux, ahora podemos enunciar el Teorema del Valor Medio para funciones simétricamente diferenciables.

Teorema 3.3.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y simétricamente diferenciable en (a,b). Si f'_s tiene la Propiedad de Darboux, entonces existe $\gamma \in (a,b)$ tal que:*

$$f'_s(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Por hipótesis, sabemos que f es continua en $[a,b]$ y simétricamente diferenciable en (a,b), entonces por el Casi Teorema del Valor Medio, existen η y $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$f'_s(\eta) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_s(\xi),$$

y como f'_s tiene la Propiedad de Darboux, para $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe un número γ entre η y ξ tal que $k = f'_s(\gamma)$, por lo tanto

$$f'_s(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

3.4. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

Ahora veremos que la derivada simétrica no tiene la siguiente propiedad: si $f_s' \equiv 0$, en un intervalo abierto I, entonces f es constante en I. Para esto veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ 3, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Calculemos su derivada simétrica, primero en 0

$$\begin{aligned} f_s'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{2h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $x \neq 0$, la derivada simétrica de f en x es 0, ya que f tiene derivada 0 en x.

Por lo tanto la derivada simétrica de esta función es igual a cero en cualquier intervalo que contenga al 0 , pero no es una función constante.

Ahora nos podemos preguntar lo siguiente: ¿Qué condiciones debe cumplir la función f para que su derivada simétrica sea igual a cero en un intervalo abierto I, entonces la función sea constante en I? El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para que esto ocurra.

Teorema 3.4.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y simétricamente diferenciable en (a, b). Si $f'_s \equiv 0$, entonces f es una función constante en $[a, b]$.*

Demostración. Sea x_1 y $x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$; como f es simétricamente diferenciable en (a, b) y continua en $[a, b]$, entonces por Teorema 3.2.2, existen η y $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'_s(\eta) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_s(\xi)$$

o lo que es lo mismo

$$f'_s(\eta)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq f'_s(\xi)(x_2 - x_1). \tag{3.8}$$

Dado que $f'_s(x) = 0$ para toda x, entonces $f'_s(\eta) = 0$ y $f'_s(\xi) = 0$, de (3.8) se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$.

Por consiguiente, f tiene el mismo valor en dos números cualesquiera x_1 y $x_2 \in [a, b]$. Esto quiere decir que f es constante en $[a, b]$

■

Proposición 3.4.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y simétricamente diferenciable en (a, b). Entonces*

a) *Si $f'_s(x) \geq 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en ese intervalo.*

b) *Si $f'_s(x) \leq 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en ese intervalo.*

Demostración. $a)$ Sea x_1 y $x_2 \in (a,b)$, con $x_1 < x_2$; como f es simétricamente diferenciable en (a,b) y continua en $[a,b]$, entonces por Teorema 3.2.2 aplicado a la función f, existen η y $\xi \in (x_1,x_2)$ tal que

$$f_s'(\eta) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f_s'(\xi),$$

entonces

$$f_s'(\eta)(x_2-x_1) \leq f(x_2)-f(x_1) \leq f_s'(\xi)(x_2-x_1). \tag{3.9}$$

Como $f_s'(x) \geq 0$ para toda x, y $x_1 < x_2$, entonces $f_s'(\eta)(x_2-x_1) \geq 0$ y usando la parte izquierda de (3.9) se tiene que $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Así la función f es creciente en (a,b).

La demostración del inciso $b)$ es similar.

■

El siguiente ejemplo muestra que no se cumple el Teorema 1.2.4 para funciones simétricamente diferenciables.

Ejemplo 3.4.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida como $f(x) = x- \mid 2x \mid$.

Observemos que

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \\ 3x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Veamos la derivada simétrica de f en el punto cero.

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h+3h}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{2h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Observemos que esta función es continua, así que nos preguntamos ¿Si existen algunas condiciones más que le tengamos que agregar a la función para que tengamos un terema análogo al Teorema 1.2.4?
Otra aplicación del Casi Teorema del Valor Medio, es el análogo del Tereorema 1.3.10.

Teorema 3.4.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y con derivada simétrica acotada en (a,b), entonces f es Lipschitz en $[a,b]$.*

Demostración. Como f'_s es acotada en (a,b) existe $M > 0$ tal que para cada $x \in (a,b)$

$$\mid f'_s(x) \mid \leq M. \tag{3.10}$$

Sean $x, y \in [a,b]$, con $x \neq y$, por el Teorema (3.2.2) existen η, ξ entre x y y tal que

$$f'_s(\eta) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_s(\xi). \tag{3.11}$$

Así de (3.10) y (3.11) se tiene que

$$\mid f(y)-f(x) \mid \leq M \mid y-x \mid .$$

■

Como las funciones simétricamente diferenciables no son necesariamente diferenciables, la pregunta a seguir sería, ¿Qué condiciones adicionales deben ser impuestas a la derivada simétrica de una función para que sea igual a la derivada? En esta sección mostraremos, por medio del Teorema del Valor Medio, que si f y f_s' ambas son continuas en el mismo intervalo, entonces f es diferenciable.

Teorema 3.4.6. *Sea f una función continua y simétricamente diferenciable en (a,b). Si f_s' es continua en (a,b), entonces $f'(x)$ existe para cada $x \in (a,b)$ y*

$$f'(x) = f_s'(x).$$

Demostración. Sea $x \in (a,b)$ elijamos h lo suficientemente pequeña para que $a < x+h < b$. Como f_s' es continua en $[a,b]$, por el Teorema 1.3.8 tiene la Propiedad de Darboux. Además, como f es continua y simétricamente diferenciable en (a,b), entonces por Teorema 3.3.1 existe $\gamma \in (a,b)$ entre x y $x+h$ tal que

$$f_s'(\gamma) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ahora aplicando el límite a ambos lados de la igualdad cuando $h \to 0$, y sabiendo que el límite del lado izquierdo de la igualdad existe, obtenemos:

$$f_s'(x) = f'(x).$$

■

Un resultado más fuerte es el siguiente Teorema.

Teorema 3.4.7. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $x_o \in (a,b)$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que f es simétricamente diferenciable en $(x_o - r, x_o + r)$ y f_s' es continua en x_o, entonces $f'(x_o)$ existe y $f'(x_o) = f_s'(x_o)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como f_s' es continua en x_o existe $\delta > 0$ tal que si

$$\begin{gathered} x \in (x_o - r, x_o + r) \text{ y } |x - x_o| < \delta, \text{ entonces} \\ f_s'(x_o) - \epsilon < f_s'(x) < f_s'(x_o) + \epsilon. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Sea $|h| < \delta$. Por 3.2.2 existen η y ξ entre x_o y $x_o + h$ tal que

$$f'_s(\eta) \leq \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leq f'_s(\xi) \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13) se tiene que

$$f'_s(x_o) - \epsilon < \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} < f'_s(x_o) + \epsilon.$$

Por lo tanto $f'(x_o)$ existe y $f'(x_o) = f'_s(x_o)$.

■

Conclusiones

En este trabajo presentamos y demostramos algunos resultados elementales sobre la derivada simétrica tales como, la suma de dos funciones simétricamete diferenciables es de nuevo una función simétricamente diferenciable.

Por otro lado, a diferencia de la derivada, la derivada simétrica no cumple con la regla del producto, es decir con el Ejemplo 2.3.2 mostramos a dos funciones simétricamente diferenciables cuyo producto no es una función simétricamente diferenciable. Sin embargo, si ambas funciones son continuas, entonces el producto es simétricamente diferenciable, de manera similar, la derivada simétrica, por medio del Ejemplo 2.3.4 no cumple con la Regla de la Cadena, mostramos mediante el Ejemplo 3.0.10 que el Teorema del Valor Medio no se cumple para funciones simétricamente diferenciables, demostramos un Casi- Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica, así como algunas aplicaciones de este, dimos condiciones necesarias para que tuvieramos un Teorema del Valor Medio para la derivada simétrica y por último se presentaron condiciones suficientes para que una función con derivada simétrica tenga derivada y que ambas derivadas sean iguales.

Perspectivas

Algunas perspectivas son las siguientes:

- Estudiar la derivada simétrica de funciones de varias variables.
- Estudiar la derivada simétrica de funciones que tiene como dominio a los números reales y contradominio a un espacio normado.
- Aplicaciones de la derivada simétrica.

Bibliografía

[1] Apostol T. M., *Cálculo con funciones de una variable con introducción al álgebra lineal*, Vol I, Segunda edición, Editoria Reverté, España, (1984).

[2] Aull C.F., The first symmetric derivative, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 74, Number 6, 708-711, (1967).

[3] Bartle R. and Sherbert D. R., *Introducción al Anális Matemático en una Variable*, Segunda edición, Editorial Limusa-Wiley & Sons., Mexico DF. (2004).

[4] Khintchine A., Recherches sur la structure des fonctions mesurables, *Fund. Math.*, Vol 9, 212-279, (1927).

[5] Larson L., Symmetric Real Analysis: A Survey, *Real Analysis Exch.*, Vol 9, Number 1, 154-178, (1983-1984).

[6] Larson L., The symmetric derivative, *Transactions of the American Mathematical Society.*, Vol. 277, Number 2, 589-598 (1983).

[7] Marcus S., Symmetry in the Simplest Case: The real Line, *Computers Math. Applic.*, Vol. 17, Number 1-3, 103-115, (1989).

[8] Minch R. A., *Applications of symmetric derivatives in mathematical programming*, *Mathematical Programming 1*, 307-320, (1971).

[9] Ortega J. M., *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Labor, S.A., (1993).

[10] Reich S., Schwartz differentiability and differentiability, *Mathematics Magazine*, Vol. 44, Number 4, 214-216, (1974).

[11] Ross A. K., *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*, Second edition, Springer-Verlag New York, Inc (1980).

[12] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition., Editorial McGraw-Hill Book Company, (1976).

[13] Sahoo P.K. and Riedel T. R., *Mean Value and Funcional Equations*, World Scientific, Publishing Co., Printed in Singapore by Uto-print (1998).

[14] Swetits J., A Note on Schwarz differentiability, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 75, Number 10, 1093-1095, (1968).

[15] Spivak M., *Cálculo Infinitesimal*, Segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona, (1992).

[16] Leithold Louis., *El Cálculo*, Septima edición, Oxford University Press-Harla México, (1998).