BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO INTRODUCTORIO A LOS ESPACIOS D

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

ANAYANSI ALITZEL HERNÁNDEZ REYES

DIRECTOR DE TESIS:

MANUEL IBARRA CONTRERAS

Puebla, Puebla, junio 2022

A las matemáticas;
por enseñarme el orden y la belleza,
pero sobretodo, la colectividad.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente a mi asesor, el maestro Manuel Ibarra Contreras, evidentemente por su dedicación, esfuerzo y paciencia para dirigir este trabajo, pero también por su labor como profesor en la facultad, no es para sorprenderse que muchísimas personas nos sintiéramos inspiradas por sus clases. Qué honor haber sido su alumna y aún más que haya sido mi asesor, fueron en verdad tiempos caóticos y de mucha incertidumbre y siempre le agradeceré que haya permanecido firme en los propósitos; lo logramos.

A mi tutor, el doctor Carlos Guillén Galván, por acompañarme y aconsejarme desde el primer día de la carrera, le agradezco su compromiso con la formación de las personas en la facultad que tuvimos el gusto de encontrarlo como profesor o tutor.

A mis sinodales, el maestro Armando Martínez García, el doctor David Herrera Carrasco y el doctor Agustín Contreras Carreto, que con sus observaciones hicieron que este trabajo quedará en su mejor versión para ser compartido, muchas gracias por su trabajo y dedicación.

A mi familia, no podría ni intentar enlistar todas las maneras en las que me han apoyado e impulsado para alcanzar esta y todas mis metas, siempre les estaré agradecida y en deuda, ojalá un día yo pueda darles aunque sea una pequeña fracción de todo lo que me han dado. Este logro también es por y para ustedes, las y los amo.

A todas las personas que me he cruzado en el camino, mis amistades de más de quince años, las más recientes, quienes estuvieron un instante, las personas que me han instruido en lo que sea que he deseado aprender, aquellas con quienes interactúo sólo por redes sociales; a los otros seres vivos que me han acompañado y a todas las cosas maravillosas que he presenciado. Ustedes me han visto crecer, reír, bailar, llorar, sufrir y celebrar; gracias por acompañarme y dejarme acompañarles.

También quiero agradecerme a mí misma, por no rendirme, por darme ánimos y apapachos cuando los necesitaba, por buscar siempre dónde poner mi corazón y mi trabajo para darlo todo, por seguir intentando cada día y por celebrar cada logro; pues, a celebrar.

Por último quiero agradecer a quien esté leyendo esto, espero te sea útil y que continuemos con esta tradición tan esencial en matemáticas de compartir y nutrir nuestras ideas con las de otras personas. Gracias por tu tiempo y atención.

Índice

Introducción **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Teoría de conjuntos 3
1.2 Topología 7

2 Resultados básicos de los espacios D **17**

2.1 Resultados misceláneos I 17
2.2 La (no) productividad de la propiedad D 20
2.3 Resultados misceláneos II 23

3 La línea de Sorgenfrey como un espacio D **29**

3.1 La línea de Sorgenfrey como un espacio separado por la izquierda generalizado 30
3.2 La línea de Sorgenfrey como un espacio ordenado generalizado 32

4 Espacios metrizables generalizados y la propiedad D **47**

5 Familias de conjuntos y la propiedad D **53**

Bibliografía **59**

Introducción

Los espacios D fueron introducidos formalmente por Eric Karel van Douwen y Washek Frantisek Pfeffer en el año 1979 [27]. A partir de este artículo han existido diversas publicaciones sobre ellos.

El estudio de los espacios D ha sido de gran interés en el área de topología por tener resultados inmediatos, resultados que los vinculan a otras clases de espacios también de gran importancia y resultados aún sin resolver; nosotros hemos decidido dedicar este trabajo a estudiarlos por lo accesible que pueden ser algunos de sus resultados para un amplio público: todos lo conceptos, demostraciones y técnicas están organizados y fueron escogidos para poder ser alcanzados después de un primer curso de topología y teoría de conjuntos.

Este trabajo fue una labor que realizamos con gran entusiasmo, sin embargo por supuesto que hubo dificultades al hacerlo, por mencionar algunas están la diversidad de técnicas en las pruebas, el delimitar qué resultados podían ser abarcados en un trabajo de este tipo, encontrar y reparar errores en pruebas y el dedicar el tiempo necesario a cada línea en este texto. Las o los lectores pueden encontrar también dificultades como estas al estudiar este o cualquier otro texto matemático; la incertidumbre nos debe impulsar y motivar, no debemos desistir de encontrar el camino que nos lleva a alcanzar el conocimiento que deseamos adquirir.

En el primer capítulo recordaremos algunos de los conceptos básicos que se ven en un primer curso de topología y teoría de conjuntos. En el capítulo 2 revisaremos algunos primeros resultados de los espacios D, para adentrarnos tanto en fondo como en forma a las demostraciones usuales en estos. Es a partir del tercer capítulo que revisamos algunos resultados de los espacios D en otros espacios conocidos u otras clases de espacios conocidos. En el capítulo tres revisamos a la línea de Sorgenfrey como un espacio D. En el capítulo cuatro hay algunos resultados sobre espacios D en los espacios metrizables generalizados y en el capítulo 5 analizamos a la propiedad D en familias de conjuntos y en sus operaciones, por ejemplo la unión.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se encuentran los conceptos topológicos y de teoría de conjuntos básicos que necesitaremos para estudiar los espacios D a través de los siguientes capítulos; si necesitamos herramientas más específicas se incluirán dentro de los correspondientes capítulos.

La recopilación siguiente es sólo un recordatorio de algunos conceptos y resultados que suelen verse en cursos básicos de topología y teoría de conjuntos, al ser un recordatorio no incluimos las pruebas de tales resultados; la intención es que quien lea este trabajo pueda volver a este capítulo para consultar y recordar un concepto o resultado en particular. Las precisiones sobre pruebas y definiciones pueden ser encontradas en [15] para la sección de teoría de conjuntos y en [12] para la sección de topología.

Comenzaremos con lo referente a teoría de conjuntos.

1.1 Teoría de conjuntos

A lo largo de este trabajo, el principio de inducción finita será de gran utilidad, por ejemplo para probar las propiedades de uniones numerables y ayudarnos en la construcción de conjuntos que forman una familia de cardinalidad numerable.

Teorema 1.1. *(*Principio de inducción finita*) Sea $P(n)$ una proposición para la cual n puede tomar cualquier valor entero positivo.*

Si:

- *$P(1)$ es verdadera y*
- *Si $P(n)$ es verdadera entonces $P(n+1)$ también es verdadera,*

entonces $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

Definición 1.2. *Sean X un conjunto y $\leq$ una relación en X. Decimos que $\leq$* ordena *(u ordena parcialmente) X o que es un* orden *(u orden parcial) para X si $\leq$ tiene las siguientes propiedades para x, y y z elementos en X:*

- *Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$. (transitividad)*
- *$x \leq x$. (reflexividad)*
- *Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$. (antisimetría)*

Definición 1.3. *Un* orden total *(u orden lineal) en un conjunto X es una relación binaria sobre X que ordena X y es total; es decir, si denotamos tal relación por $\leq$, para x, $y \in X$ se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.*

Definición 1.4. *Un* buen orden *sobre un conjunto A, es una relación de orden $\leq$ sobre A tal que todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.*

Observación 1.5. *Cualquier conjunto bien ordenado es totalmente ordenado, pues cada subconjunto de él con dos elementos, tiene mínimo.*

Definición 1.6. *Un* buen orden estricto *sobre un conjunto A es una relación de orden estricto $\prec$ sobre A cuya relación de orden asociada es una relación de buen orden sobre A.*

Definición 1.7. *Sean X un conjunto linealmente ordenado por $<$ y Y un conjunto linealmente ordenado por $<'$; decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$* preserva el orden *si $f(x) <' f(z)$ para $x, z \in X$ con $x < z$.*

Definición 1.8. *Sean X y Y conjuntos linealmente ordenados. Si existe una función que preserva el orden entre X y Y, decimos que X y Y son* similares.

Definición 1.9. *Un conjunto A es* transitivo *cuando todo elemento de A es subconjunto de A, es decir, A es transitivo si y sólo si para todo $x \in A$ se cumple que $x \subset A$.*

Definición 1.10. *Un* ordinal *es un conjunto transitivo A en el cual la relación de pertenencia $\in$ (restringida a A) define un buen orden estricto.*

Definición 1.11. *El sucesor de un conjunto A es el conjunto $S(A) = A \cup \{A\}$.*

Proposición 1.12. *(Proposición 9.3 de [15]) Si α es un ordinal, su sucesor también lo es, y lo denotamos como $\alpha + 1 = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.*

Definición 1.13. *Un número ordinal α se llama* ordinal sucesor *si para algún ordinal β, $\alpha = \beta + 1$. En caso de que no exista un ordinal β del cual α sea sucesor, entonces α se llama* ordinal límite.

Para los ordinales, también tenemos un principio de inducción.

Teorema 1.14. *(Teorema 9.19 de [15]) Principio de inducción transfinita.*

Sea $\boldsymbol{P}(x)$ una propiedad (posiblemente con parámetros). Supongamos que para todos los números ordinales α si $\boldsymbol{P}(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $\boldsymbol{P}(\alpha)$ se cumple para todos los ordinales α.

El axioma de elección y algunas de sus equivalencias son usados de manera frecuente en este trabajo. El axioma de elección postula que para cada familia de conjuntos no vacíos y ajenos por pares, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de tales conjuntos.

Axioma 1.15. ***(Axioma de Elección)***. *Para toda familia no vacía $\{X_s\}_{s\in S}$ de conjuntos no vacíos, existe una función f con dominio S y contradominio $\bigcup_{s\in S} X_s$ tal que $f(s) \in X_s$ para cada $s \in S$.*

Y ahora algunas de sus equivalencias en el siguiente teorema.

Teorema 1.16. *(Capítulo 8 de [15]) Las siguientes proposiciones son equivalentes al axioma de elección:*

- *Principio de buena ordenación de Zermelo: todo conjunto puede ser bien ordenado.*
- *Si un conjunto A es infinito, entonces A tiene la misma cardinalidad que $A \times A$.*
- *Tricotomía: dados dos conjuntos, éstos tienen la misma cardinalidad, o bien uno tiene una cardinalidad menor que el otro.*
- *Toda función sobreyectiva tiene una inversa por la derecha.*
- *Lema de Zorn: Si en un conjunto parcialmente ordenado no vacío todo subconjunto totalmente ordenado (cadena) posee cota superior, entonces existe al menos un elemento maximal.*
- *Teorema de Tychonoff: todo producto de espacios compactos es compacto.*
- *En la topología producto, la clausura de un producto de subconjuntos es igual al producto de sus respectivas clausuras.*

Definición 1.17. *Sean X y Y conjuntos. Decimos que X y Y son* equipotentes *si existe una función biyectiva entre X y Y.*

Observación 1.18. *Si usamos el teorema del buen orden a cada conjunto X podemos asignarle un número cardinal, este número es llamado* la cardinalidad *de X y se denota por $|X|$. La igualdad $|X| = |Y|$ ocurre si y sólo si X y Y son equipotentes.*

Observación 1.19. *i) Para un conjunto finito X la cardinalidad de X corresponde a la cantidad de elementos en X.*

ii) Si α es un número natural diremos que α es finito y en caso contrario se dirá que es infinito o transfinito.

Definición 1.20. *Un número ordinal es un* número cardinal κ *(o* cardinal *) si y sólo si cada vez que* $\beta \in \kappa$ *se tiene que* β *no es equipotente con* κ.

Observación 1.21. *Cada número natural es un número ordinal y cardinal.*

De aquí en adelante la relación de pertenencia entre dos ordinales α y β la escribiremos como "$<$", es decir $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$.

Definición 1.22. *Sea X un conjunto.*

i) *Diremos que X es numerable si* $|X| = |\mathbb{N}|$.

ii) *Diremos que X es a lo más numerable si* $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

iii) *Diremos que X es no numerable si* $|\mathbb{N}| < |X|$.

Definición 1.23. *Sean ω un ordinal transfinito y $(\alpha_\nu)_{\nu\in\theta}$ una sucesión transfinita de ordinales de longitud θ. Diremos que la sucesión $(\alpha_\nu)_{\nu\in\theta}$ es* creciente *si* $\alpha_\nu < \alpha_\mu$ *siempre que* $\nu < \mu < \theta$.

Definición 1.24. *Un cardinal infinito κ se llama* singular *si existe una sucesión transfinita creciente $(\alpha_\nu)_{\nu\in\theta}$ de ordinales $\alpha_\nu < \kappa$ cuya longitud θ es un ordinal límite menor que κ y $\kappa = \lim\limits_{\nu\to\theta} \alpha_\nu$. Un cardinal infinito que no es singular se llama* regular.

Definición 1.25. *Si θ es un ordinal límite y si $(\alpha_\nu)_{\nu\in\theta}$ es una sucesión creciente de ordinales, definimos $\alpha = \lim\limits_{\nu\to\theta} \alpha_\nu = sup\{\alpha_\nu : \nu < \theta\}$ y llamamos a α el* límite *de la sucesión creciente.*

Definición 1.26. *Si κ es un ordinal límite, un conjunto $C \subset \kappa$ es* cerrado *en κ si y sólo si para todo $\alpha < \kappa$, se cumple que si $sup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$, entonces $\alpha \in C$. Dicho de otra forma, si el límite de alguna sucesión de C es menor que κ, entonces el límite está también en C.*

Definición 1.27. *Si κ es un ordinal límite y $C \subset \kappa$, entonces C es* no acotado en κ *si para cualquier $\alpha < \kappa$ existe $\beta \in C$ tal que $\alpha < \beta$.*

Definición 1.28. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.*

a) *$A \subset P$ es* cofinal *en P si para todo $p \in P$ existe $a \in A$ tal que $p \leq a$.*

b) *Definimos la* cofinalidad *de P como el cardinal más pequeño κ tal que P contiene un subconjunto cofinal de cardinalidad κ.*

Teorema 1.29. *Sea α un ordinal límite. Un número ordinal λ es cofinal en α si y sólo si existe $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\lambda}$ sucesión de ordinales en α de longitud λ tal que $\alpha = \lim_{\nu\to\lambda} \alpha_\nu$. El ordinal $cof(\alpha)$ es el menor ordinal λ tal que λ es cofinal en α.*

Definición 1.30. *Si κ es un cardinal con cofinalidad no numerable y $S \subset \kappa$ tiene una intersección no vacía con cada conjunto cerrado y no acotado de κ, entonces S se denomina* conjunto estacionario *en κ.*

Teorema 1.31. *(*Lema de Fodor*) Si κ es un cardinal no numerable, S un subconjunto estacionario de κ y $f : S \longrightarrow \kappa$ es regresiva (es decir $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$, $\alpha \neq 0$), entonces existen $\gamma < \kappa$ y $S_0 \subset S$ estacionario tales que $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in S_0$.*

1.32. Hipótesis del continuo. No existe ningún conjunto A tal que su cardinal $|\mathrm{A}|$ cumpla: $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$.

1.2 Topología

Definición 1.33. *Un* espacio topológico *es un par (X,τ) donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:*

- *$\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.*
- *Si $U_1 \in \tau$ y $U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.*
- *Si $\mathscr{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathscr{A} \in \tau$*

En la definición anterior a la pareja (X,τ) se le llamará espacio *y si no hay lugar a confusión se escribirá simplemente X. A los elementos de X se les llamará* puntos *del espacio y a los subconjuntos de X que son elementos de τ se les llamará* conjuntos abiertos *o simplemente abiertos del espacio X.*

Observación 1.34. *Se sigue de la definición 1.33 que la intersección de cualquier familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Definición 1.35. *Sean X un conjunto y τ_1 y τ_2 topologías sobre X. Diremos que τ_1 es* más fina que *τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$.*

Definición 1.36. *Una familia $\mathscr{B} \subset \tau$ es llamada una* base *para un espacio topológico (X,τ) si cada subconjunto no vacío de X puede ser representado como la unión de una subfamilia de $\mathscr{B}$.*

Definición 1.37. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un conjunto $F \subset X$ es llamado* cerrado *en X si su complemento $X \setminus F$ es un abierto de X.*

Observación 1.38. *Por las leyes de De Morgan podemos inferir de la definición 1.33 que la familia C de conjuntos cerrados de un espacio X tiene las siguientes propiedades:*

- *$X \in \mathrm{C}$ y $\emptyset \in \mathrm{C}$.*
- *Si $F_1 \in \mathrm{C}$ y $F_2 \in \mathrm{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathrm{C}$.*
- *Si $\mathscr{A} \subset \mathrm{C}$, entonces $\bigcap \mathscr{A} \in \mathrm{C}$.*

Definición 1.39. *Para cualquier $A \subset X$ consideremos $\mathscr{C}_A$ la familia de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. La* cerradura *de A en X es el conjunto cerrado $\bigcap \mathscr{C}_A$, que denotaremos como $cl_X(A)$ o simplemente $cl(A)$ cuando no exista confusión de en qué espacio estamos considerando la cerradura del conjunto A.*

Teorema 1.40. *(Se puede consultar en la proposición 2.6 de [9]) Sea X un espacio topológico, se cumplen:*

- *Si $A \subset X$, $A \subset cl_X(A)$*
- *Un conjunto $A \subset X$ es cerrado $\iff A = cl_X(A)$.*
- *Si $A \subset B \subset X$, entonces $cl_X(A) \subset cl_X(B)$.*
- *Si $A, S \subset X$ y S es cerrado, entonces $A \subset S \iff cl_X(A) \subset S$.*

Definición 1.41. *El* interior *de un conjunto $A \subset X$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A. A este conjunto abierto lo denotaremos como $int_X(A)$ o simplemente $int(A)$ cuando no exista confusión.*

Teorema 1.42. *(Se puede consultar en las proposiciones 2.9 y 2.10 de [9]) Sea X un espacio topológico, se cumplen:*

- *Un conjunto $A \subset X$ es abierto $\iff A = int_X(A)$.*
- *Si $S \subset T \subset X$, entonces $int(S) \subset int(T)$*
- *Si $A, S \subset X$ y A es abierto, entonces $A \subset S \iff A \subset int(S)$.*

Definición 1.43. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $V \subset X$.*

1. *V es una vecindad de x si existe un conjunto abierto U, tal que $x \in U \subset V$. A la familia de vecindades de x la denotaremos como $\mathscr{V}(x)$.*
2. *Una familia $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}(x)$ es una base de vecindades para x en X si y sólo si para toda $V \in \mathscr{V}(x)$, existe $U \in \mathscr{V}$ tal que $U \subset V$.*

Observación 1.44.

1. *Las bases de vecindades de un punto $x \in X$ son suficientes para describir la topología local alrededor de x en X.*
2. *Para cada $x \in X$, $\mathscr{B}(x) = \{V \subset X : V \text{ es abierto y } x \in V\}$ es una base de vecindades de x. Más aún, si $\mathscr{B}$ es una base para el espacio X, $\mathscr{B}(x) = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ es una base de vecindades de x en X. Por esta razón, si así lo deseamos, podemos decir que las vecindades de un punto $x \in X$ son los conjuntos abiertos que tienen a x como elemento.*

Definición 1.45. *Un* espacio métrico *es un par (M, d) donde M es un conjunto (a cuyos elementos se les denomina puntos) y d es una función distancia (también llamada métrica) $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Esta función debe satisfacer las siguientes condiciones o propiedades de una distancia:

1. *$d(x, y) = 0 \iff x = y$*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)*

3. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdad triangular)*

De estas también se deduce: $d(x,y) \ge 0$ *(no negatividad).*

Definición 1.46. *Sea* (M,d) *un espacio métrico, y sean* $a \in M$ *y* $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$*. Se llama* bola abierta *centrada en a y de radio r, al subconjunto de M:* $\{x \in M : d(x,a) < r\}$*, denotado usualmente como* $B(a,r)$ *o como* $B_r(a)$*.*

Observación 1.47. *La distancia d del espacio métrico induce en M una topología, la que se obtiene al tomar como subconjuntos abiertos para la topología a todos los subconjuntos U que cumplen la siguiente condición: Para todo* $u \in U$ *existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $B(u,\varepsilon) \subset U$*. Y por tanto el espacio M es, a su vez, un espacio topológico.*

Dicha topología se denomina la topología inducida por la métrica d en M.

Definición 1.48. *Se dice que un espacio topológico* (X,τ) *es* metrizable *si existe una métrica* $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ *tal que la topología inducida por d es* τ*.*

Definición 1.49. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico y S un subconjunto de X. Diremos que* $x \in X$ *es un punto de acumulación de S si y solamente si para cualquier subconjunto U abierto en el espacio X que contenga al punto x se cumple que* $S \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$*.*

Teorema 1.50. *Todo subconjunto no numerable de* $\mathbb{R}$ *tiene un punto de acumulación.*

Definición 1.51. *El* conjunto derivado *de un subconjunto S es el conjunto de los puntos de acumulación de S.*

Definición 1.52. *Dado un espacio X, decimos que* $A \subset X$ *es un* subconjunto denso *en X si para toda* $x \in X$ *se cumple que* $x \in A$ *o x es punto de acumulación de A, es decir,* $X = cl_X(A)$*.*

Definición 1.53. *Sean X y Y espacios topológicos, y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función. f es una función* continua *en* $x_0 \in X$ *si y sólo si para todo abierto en Y, V con* $f(x_0) \in V$ *se cumple que existe U abierto en X con* $x_0 \in U$ *tal que* $f(U) \subset V$*. f es continua en X si y sólo si es continua en cada x en X.*

Recordemos que si (X,τ) es un espacio y $A \subset X$, entonces $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$ es una topología sobre el conjunto A. Llamamos a τ_A la *topología relativa sobre A* y al espaio (A,τ_A) se le llama *subespacio de X*.

También recordemos que si tenemos un conjunto X, un espacio topológico Y y una función $f : X \longrightarrow Y$ resulta interesante preguntarnos qué topología podemos definir sobre X para que la función f sea continua, claro que si le asignamos la topología discreta f será continua, entonces: ¿cuál es la mínima topología que podemos asignar a X que hace a f continua en X?

Pues bien, a continuación recordamos la respuesta general a esta pregunta.

Definición 1.54. *Sean* $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *una familia de espacios topológicos, X un conjunto y* $\mathscr{F} = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una familia de funciones. Si* ${}_{f_\alpha}\tau$ *es la menor topología sobre X que hace a cada* f_α *continua, entonces:*

- $\delta = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in I$ *y para toda* $\alpha \in I$ *se cumple con* $U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ *es una sub-base para* ${}_{\mathscr{F}}\tau$.

- ${}_{\mathscr{F}}\tau$ *es la única topología que satisface:*

  Para todo Z *espacio topológico y para todo* $g : Z \longrightarrow X : g$ *es continua si y sólo si para toda* $\alpha \in I : f_\alpha \circ g$ *es continua.*

A ${}_{\mathscr{F}}\tau$ *se le llama la* topología débil *(o inicial) sobre* X *inducida por* $\mathscr{F}$ *y* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.

Definición 1.55. *Sean* $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *una familia de espacios topológicos y* $Y = \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha = \left\{f : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} : \forall \alpha \in I(f(\alpha) \in X_\alpha)\right\}$ *se define para cada* $\alpha \in I$ *la* α*-ésima proyección como la función* $\Pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *tal que para toda* $f \in X$, $\Pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

Si $\mathscr{P} = \{\Pi_\alpha\}_{\alpha\in I}$, *entonces a* ${}_{\mathscr{P}}\tau$, *la topología débil inducida por* $\{(X_\alpha, \tau_X)\}_{\alpha\in I}$ *y* $\mathscr{P}$, *se le llama la* topología producto *sobre* X *y a la pareja* $(X, {}_{\mathscr{P}}\tau)$ *el producto topológico de* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Teorema 1.56. *(Se puede consultar en la proposición 4.15 de [9]) Sean* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ *una familia de espacios topológicos y para cada* $\alpha \in I$, $\mathscr{B}_\alpha$ *una base para* τ_α, *se cumple que:*

i) $\mathscr{U} = \{\pi_\alpha^{-1}(B_\alpha) : \alpha \in I$ *y* $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha\}$ *es una sub-base para la topología producto.*

ii) La colección de conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in I} B_\alpha$, *donde* $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ *para un conjunto finito de índices* F *y* $B_\alpha = X_\alpha$ *para cada* $\alpha \notin F$, *forman una base para la topología producto.*

Definición 1.57. *Sea* X *un espacio. Decimos que* $S \subset X$ *es discreto si para cada* $x \in S$ *existe* $U \in \mathscr{V}(x)$ *tal que* $S \cap U = \{x\}$.

Observación 1.58. *Un subespacio de un espacio discreto es también discreto.*

Ejemplos 1.59. *Los siguientes son ejemplos de espacios discretos:*

- *Si* X *es un conjunto,* $(X, \mathscr{P}(X))$ *es un espacio discreto.*

- $\mathbb{Z}$ *como espacio métrico con la distancia* $d(m,n) = |m - n|$.

- *El producto de dos espacios topológicos discretos, es un espacio discreto con la topología producto.*

Definición 1.60. *Una familia* $\{A_s\}_{s\in S}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *es* localmente finita (localmente discreta o discreta) en X *si para cada* $x \in X$ *existe una vecindad de x,* U *tal que el conjunto* $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ *es finito (tiene un solo elemento).*

Observación 1.61. *Notamos que una familia localmente discreta es una familia localmente finita.*

Definición 1.62. *Diremos que un subconjunto A, de un espacio topológico X es* localmente finito (localmente discreto o discreto) en X, *si la familia* $\{\{a\} : a \in A\}$ *es localmente finita (localmente discreta) en X.*

El siguiente teorema nos será muy útil para demostrar que un espacio topológico es espacio D.

Teorema 1.63. *(Teorema 1.1.11 de [12]) Sean X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una familia localmente finita y $F = \bigcup \mathscr{F}$. Si todos los elementos de $\mathscr{F}$ son cerrados, entonces F es un conjunto cerrado.*

Definición 1.64. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ función continua. f es un* homeomorfismo *si es uno a uno y la función inversa f^{-1} es continua. Decimos que dos espacios topológicos son* homeomorfos *si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Convención 1.65. *El hecho de que X y Y espacios topológicos sean homeomorfos lo denotaremos por $X \cong Y$.*

Ejemplos 1.66. *Para X y Y espacios topológicos. Los siguientes son ejemplos de homeomorfismos.*

- *La función identidad $id : X \longrightarrow X$.*

- *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es homeomorfo a R^n ya que $h : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $h((x, f(x))) = x$ es continua y $l : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$ dada por $l(x) = (x, f(x))$ es continua y es la función inversa de h.*

Teorema 1.67. *(Se puede consultar en el teorema 3.4 de [9]) Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- *f es continua en X.*

- *Para todo U abierto en Y, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X.*

- *Para todo F cerrado en Y, $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X.*

A continuación, enlistaremos algunos *axiomas de separación*.

Definición 1.68. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Decimos que X es un* espacio T_0 *si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto abierto en X, U, tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.*

2. *X es un* espacio T_1 *si para todo par de puntos distintos (x, $y \in X$), existen abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $x \notin U_y$, $y \notin U_x$.*

3. *X es un espacio T_2 o espacio Hausdorff si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

4. *X es* regular *o T_3 si y sólo si X es T_1 y para todo $F \subset X$ tal que F es cerrado y $x \notin F$, se cumple que existen U y V abiertos en X tales que $F \subset U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

5. *X es* completamente regular *si y sólo si X es T_1 y para todo $F \subset X$ tal que F es cerrado y $x \notin F$, se cumple que existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$.*

6. *X es* normal *si y sólo si X es T_1 y para cualesquiera F_1 y F_2 subconjuntos de X cerrados y disjuntos se cumple que existen U y V abiertos en X tales que $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Observación 1.69. *Para un espacio topológico X se cumple que:*

1. *X es un espacio T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado.*

2. *Si X es T_2, entonces es T_1.*

3. *Si X es Hausdorff, entonces todo subespacio finito de X es cerrado.*

Definición 1.70. *Sea X un espacio topológico. Si $Y \subset X$ es la intersección de una cantidad a lo más numerable de abiertos en X decimos que Y es un conjunto G_δ.*

Definición 1.71. *Sea X un espacio topológico. Si $Y \subset X$ es la unión de una cantidad numerable de cerrados en X decimos que Y es un conjunto F_σ.*

Definición 1.72. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* perfectamente normal *si es un espacio topológico normal y cada subconjunto cerrado de X es un G_δ-conjunto.*

Observación 1.73. *Un espacio topológico X es perfectamente normal si y sólo si cada subconjunto abierto de X es un F_σ-conjunto.*

Definición 1.74. *Sean X un conjunto y $A \subset X$. Decimos que una familia $\mathscr{A} = \{A\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X es una* cubierta *del conjunto A o que cubre al conjunto A, si $\bigcup \mathscr{A} \supset A$. Si X es un espacio topológico y cada conjunto A_s es abierto, decimos que $\mathscr{A}$ es una cubierta abierta de A.*

Definición 1.75. *Sea $\mathscr{A}$ una cubierta abierta de X un espacio topológico. Decimos que $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ es una* subcubierta *de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{B}$ es también una cubierta para A.*

Definición 1.76. *Sea $\mathscr{A} = \{A_\iota : \iota \in I\}$ una cubierta abierta de X un espacio topológico. Un* refinamiento de *$\mathscr{A}$ es una familia $\mathscr{B} = \{B_j : j \in J\}$ tal que para cada $j \in J$ existe un $\iota \in I$ tal que $B_j \subset A_\iota$.*

Definición 1.77. *Un espacio topológico X es* compacto *si X es Hausdorff y cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta abierta finita.*

Definición 1.78. *Un espacio topológico X es* paracompacto *si toda cubierta abierta admite un refinamiento localmente finito.*

Definición 1.79. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una familia en X. $\mathscr{F}$ es σ-*discreta *si es la unión de una cantidad numerable de familias discretas en X.*

Definición 1.80. *Un espacio topológico X es* subparacompacto *si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento σ-discreto y cerrado.*

Observación 1.81. *Un subespacio de un espacio subparacompacto es también subparacompacto.*

Definición 1.82. *Un espacio topológico X es* numerablemente compacto *si cada cubierta abierta de cardinalidad numerable de X tiene una subcubierta abierta finita.*

Teorema 1.83. *(Teorema 3.10.3 de [12]) Un espacio topológico Hausdorff es numerablemente compacto si y sólo si X cada subconjunto infinito de él tiene un punto de acumulación.*

Definición 1.84. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Llamamos* fibra *del elemento $y \in Y$ bajo f a la imagen inversa del singular $\{y\}$ bajo f.*

Definición 1.85. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función, a los elementos de la familia $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ los llamamos* fibras de f.

Definición 1.86. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.*

1. *f es* abierta *si para todo U abierto de X, $f(U)$ es abierto en Y.*

2. *f es* cerrada *si para todo H cerrado de X, $f(H)$ es abierto en Y.*

Definición 1.87. *Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es* perfecta *si f es cerrada, sobreyectiva y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto en X.*

Definición 1.88. *Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ con X y Y espacios topológicos es* casi perfecta *si es una función cerrada y si sus fibras son numerablemente compactas.*

Definición 1.89. *Sea X un espacio topológico. X es* separable *si tiene un subconjunto numerable que es denso en X.*

Definición 1.90. *Sea X un espacio topológico. X es* hereditariamente separable *si cada subconjunto Y de X es separable.*

Definición 1.91. *Sea X un espacio topológico. X es primero numerable si cada $x \in X$ tiene una base local de vecindades de cardinalidad numerable.*

Definición 1.92. *Sea X un espacio topológico. X es* localmente compacto *si cada $x \in X$ tiene una vecindad compacta. Es decir, para cada $x \in X$, existe U abierto en X y K compacto tal que $x \in U \subset K$*

Definición 1.93. *Sean X un espacio topológico. X es* localmente numerable *si cada $x \in X$ tiene una vecindad con cardinalidad numerable.*

Definición 1.94. *Sea X un espacio topológico. X es cero dimensional si es T_1, no vacío y tiene una base formada por conjuntos que son al mismo tiempo cerrados y abiertos.*

Definición 1.95. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una familia en X. Diremos que $\mathscr{F}$ es una familia* ajena *si cada que A,B son elementos de $\mathscr{F}$, entonces $A \cap B = \emptyset$.*

Definición 1.96. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una familia en X. $\mathscr{F}$ es* σ-ajena *si es la unión de una cantidad numerable de familias ajenas en X.*

Teorema 1.97. *(Teorema de metrización de Bing) Un espacio es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-discreta.*

Definición 1.98. *Un espacio topológico X es* Lindelöf *si toda cubierta abierta tiene una subcubierta abierta de cardinalidad numerable.*

Teorema 1.99. *Todo espacio regular Lindelöf es paracompacto.*[1]

Definición 1.100. *Si X es un conjunto con un orden total $\prec$, la* topología del orden *en X es la generada por la sub-base de "rayos abiertos" $(a,\rightarrow) = \{x : a \prec x\}$, $(\leftarrow, b) = \{x : x \prec b\}$ para todos a y b en X. Así, los intervalos abiertos $(a,b) = \{x : a \prec x \prec b\}$ junto con los rayos anteriores forman una base para la topología del orden en X.*

Una clase muy importante y amplia de espacios topológicos ordenados son los intervalos de ordinales $[0,\alpha)$ para cada número ordinal α.

Observación 1.101.

Si ω_1 es el primer numeral infinito no numerable, notemos que $\omega_1 = [0,\omega_1)$ con la topología del orden es numerablemente compacto, pero no compacto (ambas afirmaciones se encuentran en el ejemplo 43.9 de [25]). Por otro lado, $[0,\omega_1+1) = \omega_1+1 =$ [0, ω_1] es un espacio compacto (esto último se puede probar usando el ejercicio 3.12.3 (a) de [12]).

Definición 1.102. *Un* espacio ordenado generalizado *(abreviado espacio GO) es una tripleta, $(X,\tau,\preceq)$, donde $(X,\preceq)$ es un espacio linealmente ordenado y donde τ es una topología en X tal que:*

a) *$\lambda(\preceq) \subset \tau$, donde $\lambda(\preceq)$ es la topología generada por los intervalos abiertos determinados por $\preceq$.*

b) *Cada punto de X tiene una τ-base cuyos elementos son intervalos (posiblemente degenerados, es decir que podrían ser singulares de elementos de X) de X.*

Convención 1.103. *Cuando no exista confusión omitiremos hacer mención de τ y $\preceq$ y simplemente escribiremos: "Sea X un espacio ordenado generalizado".*

La siguiente construcción siempre produce un espacio GO[2].

[1] La demostración de este teorema se puede encontrar en la página 174 de [11].

[2] De hecho, cualquier espacio GO puede ser obtenido a través de esta construcción.[19]

Teorema 1.104. *Sea* $(X,\preceq)$ *un espacio linealmente ordenado, L, R e I subconjuntos disjuntos de X . Sea* τ *la topología en* X *que tiene la siguiente sub-base:* $\{\{x\} : x \in I\} \cup \{(\leftarrow, x] : x \in L\} \cup \{[x, \rightarrow) : x \in R\} \cup \lambda(\preceq)$. $(X, \tau, \preceq)$ *es un espacio ordenado generalizado.*

Ejemplos 1.105. *(Ejemplos 2.2 de [19]) Los siguientes son ejemplos de espacios ordenados generalizados:*

1. *Cualquier espacio topológico linealmente ordenado.*

2. *La línea de Sorgenfrey con* $X = R = \mathbb{R}$ *y* $L = I = \emptyset$.

3. *El espacio* $(X, \delta, \preceq)$ *donde* $(X, \preceq)$ *es cualquier conjunto linealmente ordenado y* δ *es la topología discreta en* X.

CAPÍTULO 2

RESULTADOS BÁSICOS DE LOS ESPACIOS D

2.1 Resultados misceláneos I

La noción de espacio D parece tener sus orígenes en cartas intercambiadas entre Eric Karel van Douwen y Ernest A. Michael a mitad de los años setentas [14]. Sin embargo, el primer artículo sobre espacios D fue escrito por los autores van Douwen y Washek Frantisek Pfeffer del año 1979 titulado "Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces" [27].

El objetivo de este capítulo es introducirnos a los espacios D a través de algunos de sus resultados básicos; pero aún más, a través de las pruebas de estos resultados, pues en ellas utilizamos técnicas y herramientas que nos serán de ayuda en el desarrollo de este trabajo.

El ser un espacio D es una propiedad de cubierta, así que primero debemos tener una forma de cubrir al espacio X para eso usaremos el concepto de asignación de vecindades.

Definición 2.1. *Una* asignación de vecindades *para un espacio topológico* (X,τ) *es una función* $\phi : X \longrightarrow \tau$ *tal que para cada* $x \in X$, $x \in \phi(x)$.

Convención 2.2. *De ahora en adelante nos referiremos a vecindades abiertas simplemente como vecindades.*

Definición 2.3. *Un espacio topológico* (X,τ) *es un* espacio D *si para cada asignación de vecindades* ϕ*, existe un subconjunto cerrado y discreto de* X*,* D*, tal que* $\phi(D) = \{\phi(d) : d \in D\}$ *cubre a* X.

Observación 2.4. *Algunos autores definen a los espacios D (por ejemplo [5]) como: Un espacio topológico* (X,τ) *es un* espacio D *si para cada asignación de vecindades* ϕ*, existe un subconjunto localmente finito (definición 1.62) en* X*,* $D \subset X$*, tal que* $\phi(D) = \{\phi(d) : d \in D\}$ *cubre a* X*. Notamos que si el espacio topológico es* T_1 *esta definición es equivalente a la anterior.*

Sólo con la definición podemos hacer algunas observaciones sobre los espacios D.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio topológico, si X es discreto, X es espacio D.*

Demostración. Sea X espacio topológico discreto. Sea ϕ asignación de vecindades para X. X es un conjunto cerrado y discreto y $\phi(X)$ cubre a X. Por lo tanto, X es un espacio D. ■

Teorema 2.6. *Los espacios compactos son espacios D.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio compacto y ϕ una asignación de vecindades para X, entonces ϕ es una cubierta abierta de X, así, existe una subcubierta abierta finita para X, llamémosla $\mathscr{C} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Para cada V_i con $i \in \{1,2,...,n\}$ elegimos una $x_i \in V_i$ tal que $\phi(x_i) = V_i$. El conjunto $\{x_i : i \in \{1,2,...,n\}\}$ es un conjunto cerrado por ser finito en un espacio Hausdorff y discreto, pues para cada $i \in \{1,2,...,n\}$ existe $W_i = V_i \setminus \{x_i : i \in \{1,2,...,n\}\} \cup \{x_i\}$ tal que $W_i \cap \{x_i : i \in \{1,...,n\}\} = \{x_i\}$. Además $X = \bigcup \phi(\{x_i : i \in \{1,2,...,n\}\})$. Por lo tanto X es un espacio D.

■

Teorema 2.7. *Los subespacios cerrados de espacios D son espacios D.*

Demostración. Dado X un espacio D y $S \subset X$ cerrado sea $\{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades para S. Para cada $x \in S, U_x = V_x \cap S$ para alguna V_x vecindad de x en X y para cada $x \in X \setminus S$ sea $V_x = X \setminus S$, $\{V_x : x \in X\}$ es una asignación de vecindades para X, entonces existe D un subconjunto cerrado y discreto de X tal que $\{V_x : x \in D\}$ cubre a X.

$D \cap S$ es cerrado y discreto en S. D es cerrado en X, por lo tanto $D \cap S$ es cerrado en S y si $x \in D \cap S$, en particular $x \in D$ por lo tanto existe $W_x \in \mathscr{V} x$ tal que $W_x \cap D = \{x\}$, entonces $W_x \cap D \cap S \subset \{x\}$ y $x \in W_x \cap D \cap S$, así $W_x \cap S$ es vecindad de x en S tal que $W_x \cap D \cap S = \{x\}$ y así $D \cap S$ es discreto en S. ■

Enseguida mostraremos un ejemplo que pruebe que la propiedad de ser espacio D no es una propiedad hereditaria y para ello necesitamos el siguiente resultado. Más aún, nuestro ejemplo mostrará la siguiente observación.

Observación 2.8. *Los subespacios abiertos de espacios D no necesariamente son espacios D.*

Ya sabemos que todo espacio compacto es numerablemente compacto, pero no es cierto que todo espacio numerablemente compacto sea compacto. Sin embargo en la clase de los espacios D este resultado es cierto.

Teorema 2.9. *Un espacio D que sea numerablemente compacto, es un espacio compacto*

Demostración. Sean (X,τ) un espacio D numerablemente compacto y $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de X; podemos construir a partir de $\mathscr{C}$ una asignación de vecindades, ϕ de la siguiente manera: a cada $x \in X$ le asignamos $U_x \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U_x$, así, $\phi : X \longrightarrow \mathscr{C} \subset \tau$ tal que $\phi(x) = U_x$ es una asignación de vecindades para X. Ahora, por ser X un espacio D, existe un subconjunto D cerrado y discreto tal que $\phi(D)$ cubre a X, D es un conjunto finito, pues si fuera infinito debería tener un punto de acumulación por el teorema 1.83 lo cual no ocurre al ser cerrado y discreto así, $\phi(D)$ es una subcubierta finita de $\mathscr{C}$ que cubre a X y por lo tanto, X es un espacio compacto. ■

Ahora sí, podemos probar la siguiente observación.

Observación 2.10. *La propiedad D no es hereditaria. Nuestro ejemplo es* $\omega_1 = [0,\omega_1)$ *con la topología del orden definida por la relación de pertenencia. Sabemos por el teorema 2.6 que* $\omega_1 + 1 = [0,\omega_1]$ *es un espacio D por ser compacto, sin embargo,* $\omega_1 \subset \omega_1 + 1$ *no es un espacio D, de serlo, al ser numerablemente compacto el teorema 2.9 nos diría que es un espacio compacto y sabemos que no lo es. Además* $\omega_1 = [0,\omega_1)$ *es un subconjunto abierto de* $[0,\omega_1]$ *así que con este ejemplo se demuestra también la observación 2.8.*

Hay más propiedades que no tienen los espacios D, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *La propiedad D no se preserva bajo imágenes continuas.*

Demostración. Tomando el ejemplo de la observación anterior, la función identidad $f : (\omega_1,\tau_d) \longrightarrow (\omega_1,\tau_o)$, donde τ_d es la topología discreta y τ_o es la topología del orden usual en ω_1, es continua. Sabemos que (ω,τ_d) es un espacio D, sin embargo, (ω_1,τ_o), como se muestra en la observación 2.10, no lo es. ■

Sin embargo, la propiedad D sí se preserva bajo funciones continuas y cerradas.

Teorema 2.12. *La imagen continua y cerrada de un espacio D es un espacio D.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función cerrada, continua y sobreyectiva y X espacio D. Si $\{U_y : y \in Y\}$ es una asignación de vecindades en Y, para cada $y \in Y$ y $x \in f^{-1}(y), V_x = f^{-1}(U_y)$ es abierto, pues f es continua y $x \in V_x$ pues $f(x) = y \in U_y$. Por lo tanto $\{V_x : x \in X\}$ es una asignación de vecindades en X.

Sea D un subconjunto cerrado y discreto de X tal que $\{V_x : x \in D\}$ cubre X, tal D existe pues X es espacio D.

Elegimos $D' \subset D$ como el conjunto de puntos escogidos de la siguiente manera: como para cada $y \in Y, \{d \in D : V_d \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$, elegimos un único x_y ahí; así $\{V_x : x \in D'\}$ también cubre a X. En efecto, para $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $x \in f^{-1}(y)$, entonces existe $x_0 \in D'$ tal que $V_{x_0} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ lo cual implica que $y \in f(V_{x_0})$ y en consecuencia $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(V_{x_0})) = V_{x_0}$ y $x \in f^{-1}(y)$ y así x pertenece a V_{x_0}.

D' sigue siendo cerrado y discreto. Efectivamente, si $x \in D'$ entonces $x \in D$ esto implica que existe $W_x \in \mathscr{V}(x)$ tal que $W_x \cap D = \{x\}$ y $W_x \cap D' = \{x\}$, así D' es discreto.

Notamos ahora que ningún punto de D' puede ser punto de acumulación de D' pues D' es discreto y si existiera $x \in X \setminus D'$ tal que para cada $W \in \mathscr{V}(x)$ se cumple que $W \cap D' \setminus \{x\} \neq \emptyset$ esto implicaría que $W \cap D \setminus \{x\} \neq \emptyset$ y así x sería un punto de acumulación de D pero D no tiene puntos de acumulación pues es discreto, por lo tanto, D' es cerrado.

La función $f|_{D'}$ es inyectiva, pues si $x_1, x_2 \in D'$ y $f(x_1) = f(x_2) = y$, entonces $x_1 = x_2 = x_y$.

Tenemos así que $f(D')$ es cerrado y discreto. Cerrado por ser la imagen de un conjunto cerrado bajo una función cerrada. Discreto pues si $y \in f(D')$, existe un único $x \in D'$ tal que $f(x) = y$, y así, existe $W \in \mathscr{V}(x)$ tal que $W \cap D' = \{x\}$.

El conjunto $X \setminus W$ es cerrado, $f(X \setminus W)$ es cerrado que contiene a todos los puntos de $f(D')$ excepto a y, por lo tanto $Y \setminus f(X \setminus W) = f(W)$ es abierto que contiene a y, además no tiene otros puntos de D', esta es la vecindad de y que buscamos.

También, $\{U_y : y \in f(D')\}$ cubre Y. Sea y en Y, entonces existe un único $\hat{x} \in D'$ tal que $f^{-1}(y) \subset V_{\hat{x}}$, así $y \in f(V_{\hat{x}}) = f(f^{-1}(U_{f(\hat{x})})) = U_{f(\hat{x})}$ y $y = f(\hat{x}) \in f(D')$.

Esto concluye la prueba. ■

2.2 La (no) productividad de la propiedad D

El verificar la productividad de la propiedad D no es una tarea sencilla, Borges y Wherly en [6] proponen un ejemplo para demostrar que el producto de dos espacios D no es, necesariamente, un espacio D; sin embargo en [1] Alas, Junqueira y Wilson comentan que hay un error en tal demostración y proponen un nuevo ejemplo. A continuación presentaremos el ejemplo de [1]; pero antes de hacerlo mencionamos que esta demostración requiere de funciones cardinales, tema del cual sólo daremos los conceptos básicos y ejemplos de algunas de estas importantes funciones que serán relevantes para nuestros propósitos, pero no profundizaremos en ellas. A quien desee conocer más sobre el tema le recomedamos consultar [12] o el capítulo I de [16].

Definición 2.13. *Una función cardinal es una función f de la clase de los espacios topológicos a la clase de los cardinales infinitos tal que si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $f(X) = f(Y)$*

Definición 2.14. *Sea X un espacio topológico. Definimos la función cardinal* amplitud *(denotada $s(X)$) como sigue: $s(X) = sup\{|D| : D$ es subconjunto discreto de $X\} + \omega$.*

Si $s(X) = \omega$, diremos que X tiene amplitud numerable.

Definición 2.15. *Sea X un espacio topológico. El* número de Lindelöf de *X (o grado de Lindelöf de X) se define como el menor cardinal κ tal que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad menor o igual a κ. El número de Lindelöf de X se denota como $L(X)$.*

Observación 2.16. *Sea X un espacio topológico, entonces X es Lindelöf si y sólo si $L(X) = \omega$.*

Definición 2.17. *Sea X un espacio topológico. La* extensión de X *(denotada por $e(X)$) se define como $e(X) = sup\{|D| : D$ es subconjunto cerrado y discreto de $X\} + \omega$.*

Lema 2.18. *Sea X un espacio topológico. Si $e(X) = \omega$ y X no es Lindelöf, entonces X no es espacio D.*

Demostración. Como X no es Lindelöf, existe $\mathscr{C} = \{V_x : x \in X\}$ una cubierta abierta que no tiene una subcubierta numerable. Si X fuera un espacio D, entonces existiría $D \subset X$ cerrado y discreto tal que $\{V_x : x \in D\}$ cubre a X, pero $e(X) = \omega$, así que D es numerable, por lo tanto $\{V_x : x \in D\}$ es una subcubierta numerable de $\mathscr{C}$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 2.19. *Sea X un espacio topológico. Definimos la* densidad de X *(denotada $d(X)$) como: $d(X) = mín\{|S| : S$ es subconjunto de X tal que $cl(S) = X\} + \omega$*

Observación 2.20. *Un espacio topológico X es separable (definición 1.89) si $d(X) = \omega$.*

Definición 2.21. *Una función cardinal ϕ es* monótona *si $\phi(Y) \leq \phi(X)$ para cada subespacio Y de X.*

Observación 2.22. *De las funciones cardinales definidas hasta ahora cardinalidad y amplitud son monótonas; densidad, extensión y el número de Lindelöf, no lo son.*

Definición 2.23. *Para cada función cardinal no monótona ϕ podemos introducir una nueva función cardinal: $h\phi$ definida por $h\phi(X) = sup\{\phi(Y) : Y \subset X\}$. Así obtenemos, por ejemplo, las nuevas funciones cardinales hd (*densidad hereditaria*) y hL (número de Lindelöf hereditario).*

Observación 2.24. *Sea X un espacio topológico. Si $hd(X) = \omega$, se dirá que X es hereditariamente separable y si $hL(X) = \omega$, entonces diremos que X es hereditariamente Lindelöf.*

Definición 2.25. *Sean X un espacio topológico y Φ una asignación de vecindades para X. X es* dualmente discreto *si existe $D \subset X$ discreto tal que $\bigcup\{\Phi(d) : d \in D\}$ cubre a X.*

Los siguientes lemas se utilizan en la demostración del teorema central de esta sección, las demostraciones de ambos resultados pueden encontrarse en [26].

Lema 2.26. *Si (X, τ) es un espacio hereditariamente separable y primero numerable de cardinalidad $\mathfrak{c}$, existe un espacio topológico $\Lambda(X) = (X, \lambda)$ tal que:*

1. *$\Lambda(X)$ es localmente compacto (1.92) y localmente numerable (1.93);*
2. *λ es más fina que τ;*
3. *si $\{F_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en $\Lambda(X)$ tal que $|\bigcap_{n\in\omega} F_n| < \mathfrak{c}$, entonces $|\bigcap_{n\in\omega} cl(F_n)| < \mathfrak{c}$.*

Además, X es perfectamente normal y tiene la propiedad de que cada conjunto cerrado y no numerable tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Así $\Lambda(X)$ es normal y numerablemente compacto.

Lema 2.27. *Si τ y σ son topologías en un conjunto X y $\sigma \subset \tau$, entonces $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ considerado como un subespacio de $(X,\tau) \times (X,\sigma)$ es homeomorfo a (X,τ). Adicionalmente, si (X,τ) es un espacio Hausdorff, $A \subset X$ y σ es una topologíka Hausdorff en A tal que $\tau|_A$ es más fina, entonces $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ es cerrado en $(X,\tau) \times (A,\sigma)$ y si D es un subespacio cerrado y discreto de $(A,\tau|_A)$, entonces $\Delta_D = \{(d,d) : d \in D\}$ es un subespacio cerrado y discreto de $(X,\tau) \times (A,\sigma)$.*

Convención 2.28. *Denotamos a $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana (la obtenida a partir de la métrica usual en $\mathbb{R}$) como $(\mathbb{R},\rho)$.*

Teorema 2.29. *La propiedad D no es productiva.*

Demostración. Para esta demostración usaremos un conjunto auxiliar S, subconjunto de $(\mathbb{R},\rho)$ tal que $|S \cap F| = |F \setminus S| = \mathfrak{c}$ para todo F subconjunto cerrado y no numerable de $(\mathbb{R},\rho)$. Tal conjunto existe, pues de no hacerlo significaría que para todo $S \subset (\mathbb{R},\rho)$, existe F subconjunto cerrado y no numerable de $(\mathbb{R},\rho)$ tal que $|S \cap F| \neq \mathfrak{c}$ o $|F \setminus S| \neq \mathfrak{c}$, así que en particular si nos fijamos en el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ como subconjunto de $(\mathbb{R},\rho)$, debería existir F subconjunto cerrado y no numerable de $(\mathbb{R},\rho)$ tal que $|F \cap \mathbb{I}| < \mathfrak{c}$ o $|\mathbb{I} \setminus F| < \mathfrak{c}$ y esto último no es posible, ya que el complemento de F es un conjunto abierto, así que intersecta a $\mathbb{I}$ en una cantidad no numerable de puntos. Denotamos por ρ_S a la topología euclidiana en S. (S,ρ_S) es espacio D por ser metrizable.

El teorema 3.1 de [4] afirma que suponiendo la hipótesis del continuo, existe una topología τ tal que $(\mathbb{R},\tau)$ es primero numerable, localmente compacto, hereditariamente separable, disperso (es decir, un espacio topológico T_1 para el cual cada subespacio no vacío tiene un punto aislado, cero dimensional y perfectamente normal que no es Lindelöf y además, τ es más fina que la topología euclidiana en $\mathbb{R}$, ρ. Y en [1] se afirma que la construcción efectuada en este teorema se puede realizar sobre (S,ρ_S) en lugar de sobre $(\mathbb{R},\rho)$, obteniendo así una topología τ para S tal que (S,τ) es primero numerable, localmente compacto, hereditariamente separable, disperso, cero dimensional y perfectamente normal que no es Lindelöf y $\tau \supsetneq \rho_S$.

Ahora, el espacio (S,τ) (que es el espacio $\Lambda(X)$ del lema 2.26) es un espacio primero numerable, localmente compacto, cero dimensional que no es Lindelöf y tiene la siguiente propiedad:

(A) Para todos los conjuntos numerables $V \subset S$ tales que $|cl_{(S,\rho_S)}(V)| = \mathfrak{c}$, V tiene un punto de acumulación en (S,τ).

Como (S,τ) no es Lindelöf y $s(S) \leq hd(S) = \omega$, (S,τ) no es dualmente discreto; sea σ la topología generada por $\rho \cup \tau$ sobre $\mathbb{R}$. Observemos que (S,τ) es un subespacio abierto de $(\mathbb{R},\sigma)$.

En el teorema 2.7 de [1] se prueba que $(\mathbb{R},\sigma)$ es espacio D y regular Lindelöf. El que $(\mathbb{R},\sigma)$ es un espacio D es probado como sigue:

Sea $\{O_y : y \in \mathbb{R}\}$ una asignación de vecindades abiertas para $(\mathbb{R},\sigma)$. Como $(\mathbb{R}\setminus S,\sigma_{\mathbb{R}\setminus S}) = (\mathbb{R}\setminus S,\rho_{\mathbb{R}\setminus S})$ y este último es un espacio D, existe $D_2 \subset \mathbb{R}\setminus S$ cerrado y discreto en $(\mathbb{R}\setminus S,\rho_{\mathbb{R}\setminus S})$ tal que $\mathbb{R}\setminus S \subset \bigcup\{O_y : y \in D_2\}$. Notamos que $\bigcup\{O_y : y \in D_2\} \in \rho$, así que $F = \mathbb{R}\setminus\bigcup\{O_y : y \in D_2\}$ es cerrado en $(\mathbb{R},\rho)$ y es subconjunto de S, así que es numerable. (F,σ_F) tiene cardinalidad numerable, es primero numerable y cero dimensional, de ahí que (F,σ_F) sea un espacio T_0 y $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$ sea un desarrollo fuerte para X, así que por el teorema de metrización de Moore (este teorema puede encontrarse en la página 330 de [12]), (F,σ_F) es metrizable, así que también es un espacio D, es decir, existe $D_1 \subset F$ discreto y cerrado en (F,σ_F) tal que $F \subset \bigcup\{O_y : y \in D_1\}$. $D_1 \cup D_2$ es un subconjunto cerrado en $(\mathbb{R},\sigma)$ por ser la unión de subconjuntos cerrados de $(\mathbb{R},\sigma)$ (cada uno lo es por ser subconjunto cerrado de subconjuntos cerrados de $(\mathbb{R},\sigma)$). Probemos ahora que $D_1 \cup D_2$ es discreto en $(\mathbb{R},\sigma)$, esto es porque S es abierto en $(\mathbb{R},\sigma)$ y $D_1 \subset S$, ningún punto de D_1 puede pertenecer a la cerradura de D_2; y como $D_1 \subset \mathbb{R}\setminus\bigcup\{O_y : y \in D_2\}$, ningún punto de D_2 pertenece a la cerradura de D_1. Por lo tanto $(\mathbb{R},\sigma)$ es un espacio D.

Por el lema 2.27 $\{(x,x) : x \in S\}$ es cerrado en el producto topológico $(\mathbb{R},\sigma)\times(\mathbb{R},\tau)$ y es homeomorfo a (S,τ). Por lo tanto, bastará probar que (S,τ_S) no es un espacio D. Debido a que (S,τ_S) no es Lindelöf por el lema 2.18, basta probar que tiene extensión numerable. Sea $B \subset S$ cerrado en (S,τ) y no numerable. Si $V \subset B$ es numerable, entonces $cl_\rho(V)$ es un cerrado en $(\mathbb{R},\rho)$, así que $|cl_\rho(V)\cap S| = \mathfrak{c}$ y $cl_{\rho_S}(V) = cl_\rho(V)\cap S$, lo que implica que $|cl_{\rho_S}(V)| = |cl_\rho(V)\cap S| = \mathfrak{c}$, así que aplicando (A), V tiene un punto de acumulación en (S,τ) y por lo tanto B tiene un punto de acumulación en (S,τ) y así, podemos concluir que (S,τ) no tiene subespacios cerrados y discretos no numerables, lo cual implica que $e((S,\tau)) = \omega$. Concluimos que (S,τ) no es un espacio D. Por otro lado, $(\mathbb{R},\sigma)$ y $(\mathbb{R},\tau)$ son espacios D y si $(\mathbb{R},\sigma)\times(\mathbb{R},\tau)$ fuese espacio D, como (S,τ) es un subespacio cerrado de tal producto, entonces, por el teorema 2.7, (S,τ) tendría que ser un espacio D y ya probamos que no lo es. Por lo tanto, $(\mathbb{R},\sigma)\times(\mathbb{R},\tau)$ no es un espacio D. ■

Continuemos ahora con algunos otros resultados básicos de los espacios D.

2.3 Resultados misceláneos II

Teorema 2.30. *Sean X un espacio topológico y $Y,Z \subset X$ ajenos con Y abierto y Z cerrado. Si Y y Z son espacios D y $X = Y \cup Z$, entonces X es un espacio D.*

Demostración. Construiremos dos conjuntos y veremos que su unión es un conjunto cerrado y discreto en X.

Sean X,Y y Z como en la hipótesis. Sea Φ una asignación de vecindades para X, $\Phi(Y)$ es una asignación de vecindades para Y, por lo tanto, existe D_Y cerrado y discreto en Y tal que $\{\Phi(y) : y \in D_Y\}$ cubre a Y. Así, para cada $y \in Y$, existe $V_y \cap Y$, vecindad de y en Y (con V_y vecindad de y en X) tal que $V_y \cap Y \cap D_Y = \{y\}$, notamos que $V_y \cap Y$ es una vecindad de y en X que sólo tiene puntos de Y, pues Y es abierto en X. La familia $\{\{y\} : y \in D_Y\}$ es una familia localmente discreta de elementos cerrados, por lo tanto, su unión, D_Y es un conjunto cerrado en X. Y D_Y es discreto en X.

También $\Phi(Z)$ es una asignación de vecindades para Z, por lo tanto, existe D_Z cerrado y discreto en Z tal que $\{\Phi(z) : z \in D_Z\}$ cubre a Z. Como Z es cerrado, D_Z es cerrado en X. Además, para cada $z \in Z$, existe $V_z \cap Z$ vecindad de z en Z con V_z vecindad de z en X tal que $V_z \cap Z \cap D_Z = \{z\}$.

Ahora, supongamos que para alguna $z \in D_Z$ se cumple que toda vecindad de z en X tiene puntos de D_Y. Como Y y Z son disjuntos, z es punto de acumulación de D_Y, lo cual es una contradicción, pues al ser D_Y cerrado y discreto en X, no tiene puntos de acumulación. Así, no existe tal z.

Por lo tanto, para todo $z \in D_Z$ existe una vecindad de z en X, U_z que no contiene puntos de D_Y, así, $V_z \cap U_z$ es una vecindad de z en X que no contiene puntos de D_Y ni puntos de D_Z distintos de z.

Así, finalmente, $D_Y \cup D_Z$ es un conjunto cerrado y discreto de X y $\Phi(D_Y \cup D_Z)$ cubre X.

■

Teorema 2.31. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es perfecta y sobreyectiva y Y es espacio D, entonces X también lo es.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta de X en un espacio D, Y y $\{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades para X. Al ser f sobreyectiva, podemos escribir a cada $y \in Y$, como $y = f(x)$ para alguna $x \in X$, así, para cada $y \in Y$ tenemos que $f^{-1}(f(x))$ es un compacto por ser f perfecta y $\{U_x : x \in f^{-1}(f(x))\}$ es cubierta abierta, entonces existe una subcubierta abierta finita, es decir, existen $i(x) \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_{i(x)} \in f^{-1}(f(x))$ tales que $f^{-1}(f(x)) \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_{i(x)}}$.

Elijamos la preimagen de un conjunto abierto en Y, U_x^* tal que $f^{-1}(f(x)) \subset U_x^* \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_{i(x)}}$ de la siguiente manera: notamos que $U_x^* = f^{-1}\left(Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)\right)$ es un abierto en X tal que $f(x) \in Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)$ ya que $f^{-1}(f(x)) \subset \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}$. Y así, contiene a $f^{-1}(f(x))$ pues para cada $z \in f^{-1}(f(x)), f(z) = f(x)$.

Y si $z \in U_x^*$, entonces $f(z) \notin f\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)$ y esto implica que $f(z) \notin Y \setminus f\left(\bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)$, así, $f(z) \in f\left(\bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)$ y así tenemos que $z \in f^{-1}(f(z)) \subset f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)\right) \subset \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}$

Sea $\varphi : Y \to X$ función tal que $\varphi(y) \in f^{-1}(y)$.

Sea $\{V_y : y \in Y\}$ la asignación de vecindades definida por $V_y = f(U_{\varphi(y)}^*) = f\left(f^{-1}\left(Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)\right)\right) = Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{i(x)} U_{x_m}\right)$, por ser f sobreyectiva.

Como Y es espacio D, podemos considerar a D un subconjunto cerrado y discreto de Y tal que $\{V_y : y \in D\}$ cubre Y. Sea $D^* = \bigcup\{\{x_1, x_2, ..., x_{i(x)}\} : y \in D$ y $x = \varphi(y)\}$

Probaremos que D^* es cerrado y discreto, pero antes demostremos que $\{f^{-1}(y) : y \in D\}$ es una colección discreta de conjuntos compactos.

Si $x \in X$, entonces $f(x) = y$; consideremos los siguientes casos:

1. Si $f(x) = y$ para algún $y \in D$, entonces existe $W_y \in \mathscr{V}(y)$ tal que $W_y \bigcap D = \{y\}$ por ser D discreto y si existe $u \in f^{-1}(W_y) \bigcap f^{-1}(z)$ para algún $z \in D, z \neq y$, entonces $f(u) \in W_y$ y $f(u) = z$, por lo tanto $z \in W_y \bigcap D$,lo cual es una contradicción. Así $f(W_y)$ es vecindad de x tal que $|f^{-1}(W_y) \bigcap \{f^{-1}(y) : y \in D\}| = 1$.

2. Si $f(x) \neq y$ para todo $y \in D$, entonces existe $y \in D$ tal que $f(x) \in V_y$, como D es cerrado y discreto, entonces no tiene puntos de acumulación, en particular $f(x)$ no es punto de acumulación de D, por lo tanto existe $W_{f(x)} \in \mathscr{V}(f(x))$ tal que $D \cap W_{f(x)} \setminus \{f(x)\} = \emptyset$ y $f(x)$ no está en D, por lo tanto $D \cap W_{f(x)} = \emptyset$ y sea $W = W_{f(x)} \cap V_y \neq \emptyset$ pues ambos tienen a $f(x)$ y si existe $u \in f^{-1}(W_{f(x)} \cap V_y) \cap f^{-1}(z)$ esto implica que $f(u) \in W_{f(x)}$ y $f(u) = z$ y así $z \in W_{f(x)}$, llegando de nuevo a una contradicción.

   Ahora notemos que $D^* \cap f^{-1}(y)$ es finito para cada $y \in D$ ya que por cómo elegimos a los $x_1, x_2, ..., x_{i(x)}$ con $x = \varphi(y)$ en $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y)$ intersecta a D^* en estos puntos.

   Además, si $z \in D^* \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{i(x)}\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z = x_{i(x_0)}$ con $x_0 = \varphi(w) \in f^{-1}(w)$ con $w \in D \setminus \{y\}$, entonces $f(x_0) = w$ así, se cumple que $x_{i(x_0)} = z \in f^{-1}(w)$, como consecuencia $f(z) = w \neq y$ concluimos así que $z \notin f^{-1}(y)$. Por lo tanto, $D^* \cap f^{-1}(y)$ es finito para cada $y \in D$.

Probemos ahora que D^* es cerrado y discreto:

a) Sea $d \in D^*, d \in f^{-1}(y)$ para algún $y \in D$, como $\{f^{-1}(y) : y \in D\}$ es un familia discreta, así que existe $U \in \mathscr{V}(d)$ tal que $U \subset f^{-1}(y)$ y como $f^{-1}(y) \cap D^*$ es un conjunto finito, también lo es $D^* \cap U$, por lo cual existen $j \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, x_2, ..., x_j\} \subset f^{-1}(y)$ tales que $D^* \cap U = \{x_1, ..., x_j\}$ y así $U^* = U \setminus \{x_1, ..., x_j\} \cup \{d\}$ es vecindad abierta de d tal que $U^* \cap D^* \setminus \{d\} = \emptyset$. Por lo tanto, D^* es discreto.

b) Sabemos que $D^* \cap f^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$ y que $\mathscr{D} = \{D^* \cap f^{-1}(y) : y \in D\}$ es una familia discreta de conjuntos cerrados, así que $D^* = \bigcup \mathscr{D}$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto, como D^* es cerrado y discreto y $\{U_x : x \in D^*\}$ cubre a X, concluimos que X es un espacio D.

■

Corolario 2.32. *Si X es espacio D y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es espacio D.*

Demostración. La proyección $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ es una función perfecta:

- Es continua por la definición de topología producto.

- Es cerrada pues si $Z \subset X \times Y$ es cerrado y $x_0 \in X \setminus \pi_1(Z)$ para cada $y \in Y$ se cumple que $(x_0, y) \notin Z$ y Z cerrado, entonces existe un conjunto abierto en $X \times Y$, $U_y \times V_y$ tal que $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset X \times Y \setminus Z$. La familia de conjuntos abiertos $\{V_y : y \in Y\}$ cubre a Y, así, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ tales que $\{V_{y_1}, ..., V_{y_n}\}$ cubre a Y. Si $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$, entonces U es vecindad de x_0, pues para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $U_{y_i} \in \mathscr{V}(x_0)$ y además $U \cap P(Z) = \emptyset$. Si existiera $(x, y) \in Z$ con $\pi_1(x, y) = x \in U$, entonces $y \in V_{y_i}$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$ y $x \in U \subset U_{y_i}$, concluimos que $(x, y) \in (U_{y_i} \times V_{y_i}) \cap Z$, lo cual es una contradicción.

  Por lo tanto el complemento de Z es abierto y, así, Z es cerrado.

- Si $x \in X, p^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ es compacto ya que Y es compacto, y el producto de conjuntos compactos es compacto.

  Y así, como $X \times Y$ es la preimagen de un espacio D bajo una función perfecta, $X \times Y$ es espacio D.

■

Teorema 2.33. *Si X es la unión numerable de subespacios D y cerrados, entonces X es espacio D.*

Demostración. Sean $X = \bigcup\limits_{n<\omega} F_n$ donde F_n es subespacio D cerrado de X y $\{U_x : x \in X\}$ asignación de vecindades para X.

Sea D_1 subconjunto cerrado y discreto de F_1 tal que $\mathscr{D}_1 = \{U_x : x \in D_1\}$ cubre a F_1. Como $\{U_x : x \in F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1\}$ cubre a $F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1$ y este es un subconjunto cerrado de F_2, $F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1$ es espacio D. Sea D_2 subconjunto cerrado y discreto de $F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1$ tal que $\mathscr{D}_2 = \{U_x : x \in D_2\}$ cubre a $F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1$.

Probemos que $D_2^+ = D_1 \cup D_2$ es subconjunto cerrado y discreto de $F_1 \cup F_2$. Como D_1 es cerrado en F_1, entonces $D_1 = S_1 \cap F_1$ para algún S_1 cerrado en X; por lo tanto, D_1 es cerrado en X por ser la intersección finita de cerrados en X y así, es cerrado en cualquier subespacio en el que esté contenido, en particular en $F_1 \cup F_2$, análogamente D_2 es cerrrado en $F_1 \cup F_2$ y así $D_1 \cup D_2$ es cerrado en $F_1 \cup F_2$.

Notamos que D_1 y D_2 son disjuntos, pues $D_2 \subset F_2 \setminus \cup\mathscr{D}_1$, entonces $D_2 \subset X \setminus D_1$ así, dado $x \in D_1 \cup D_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in D_1$, como D_1 es discreto, existe $U \in \mathscr{V}(x)$ tal que $U \cap D_1 = \{x\}$ y así, $U \cap X \setminus D_2$ es vecindad de x tal que $U \cap X \setminus D_2 \cap (D_1 \cup D_2) = (U \cap X \setminus D_2 \cap D_1) \cup (U \cap X \setminus D_2 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cup \emptyset = \{x\}$. Por lo tanto, D_2^+ es discreto.

$\mathscr{D}_1$ cubre a F_1 y $\mathscr{D}_2$ cubre a F_2 sin los puntos posiblemente ya cubiertos por $\mathscr{D}_1$, por lo tanto $\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$ cubre a $F_1 \cup F_2$.

Inductivamente, como $\{U_x : x \in F_n \setminus \bigcup\mathscr{D}_{n-1}^+\}$ cubre $F_n \setminus \bigcup\mathscr{D}_{n-1}^+$ (un cerrado de F_n) elegimos un cerrado discreto D_n de $F_n \setminus \cup\mathscr{D}_{n-1}^+$ tal que $\{U_x : x \in D_n\}$ cubre a $F_n \setminus \cup\mathscr{D}_{n-1}^+$

Como en el caso anterior se puede probar que $D_n^+ \cup D_n$ es un cerrado discreto de $F_1 \cup ... \cup F_n$ tal que $\mathscr{D}_n^+ = \mathscr{D}_{n-1}^+ \cup \mathscr{D}_n$ cubre a $F_1 \cup ... \cup F_n$.

Si $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$, entonces D es cerrado y discreto en X. Para probarlo veamos que $\mathscr{A} = \{D_n : n < \omega\}$ es una familia localmente finita.

Sea $x \in X$. Sea $n \in \omega$ el menor elemento de ω tal que $x \in F_n$, como $\mathscr{D}_n$ cubre a $F_n \setminus \cup\mathscr{D}^+_{n-1}$ sea $z \in D_n$ tal que $x \in U_z, U_z$ no contiene a ningún elemento de $\bigcup_{m>n} D_m$ pues $\forall m > n : D_m \subset X \setminus \bigcup\mathscr{D}^+_n$, por lo tanto U_z intersecta a lo más a $D_1 \cup \ldots \cup D_n$ y así $\{D_n : n < \omega\}$ es localmente finita y, por lo tanto, D, su unión, es un cerrado en X por el teorema 2.7.

Y D también es discreto, pues si $x \in D$, entonces $x \in D_n$ para algún $n \in \omega$ y para $m \neq n, x \notin D_m$ y notamos que $\mathscr{A} \setminus \{D_n\}$ sigue siento una familia localmente finita, por lo tanto $C = \bigcup(\mathscr{A} \setminus \{D_n\})$ es cerrado, sea $W \in \mathscr{V}(x)$ tal que $W \cap D_n = \{x\}$, entonces $W \cap X \setminus C$ es vecindad de x tal que $(W \cap (X \setminus C)) \cap D = \{x\}$.

Así, hemos encontrado un subconjunto D cerrado y discreto en X tal que $\{U_x : x \in D\}$ cubre a X, ya que cada $\mathscr{D}_n$ cubre a F_n. Por lo tanto, X es un espacio D.

■

Recordemos que en un espacio topológico X, un conjunto F_σ es la unión numerable de conjuntos cerrados en X así que usando los teoremas 2.33 y 2.7 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.34. *Si X es un espacio D y $F \subset X$ es un conjunto F_σ, entonces F es un espacio D.*

Corolario 2.35. *[2] Si (X,τ) es T_1 y $F \subset X$ es la unión de una familia σ-localmente finita de subespacios D cerrados en X, entonces $(F, \tau|_F)$ es un espacio D.*

Demostración. Sean X un espacio topológico y $\mathscr{F} = \bigcup\{\mathscr{F}_n : n < \omega\}$ donde para cada $n < \omega$, $\mathscr{F}_n$ es una familia localmente finita de conjuntos cerrados en X y cada uno de ellos es un espacio D. Probaremos que $F = \bigcup\mathscr{F}$ es un espacio D. Para ello notemos que, por el teorema 2.33, $C_n = \bigcup\mathscr{F}_n$ es un espacio D. Ahora, como $\mathscr{F}_n$ es localmente finita, por el teorema 1.63, C_n es un conjunto cerrado de X. Así que aplicando otra vez el teorema 2.33 se tiene que $F = \bigcup C_n$ es un espacio D.

■

CAPÍTULO 3

La línea de Sorgenfrey como un espacio D

En 1948 Robert Sorgenfrey dio un ejemplo de un espacio paracompacto cuyo producto consigo mismo no es paracompacto, debido a la relevancia topológica de tal espacio, es ahora conocido como la línea de Sorgenfrey. Entre sus bondades está que no es difícil de introducir en un primer curso de topología como un ejemplo más de un espacio topológico debido a que su conjunto asociado es el de los números reales y tiene una base formada por intervalos semiabiertos; es por eso que resulta fascinante que su estudio permanezca actual incluso siendo sujeto de problemas aún abiertos.

Como si esto fuera poco, la línea de Sorgenfrey es un espacio D y como tal tiene propiedades que nos parecen interesantes y relevantes, por lo que hemos decidido incluir algunas de ellas en el presente estudio.

Definición 3.1. *Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los intervalos en $\mathbb{R}$ de la forma $[x,r)$, donde $x,r \in \mathbb{R}$, $x < r$ y r es un número racional. Al conjunto de los números reales con la topología generada por $\mathscr{B}$ se le conoce como* la línea de Sorgenfrey*, S, y a $\mathscr{B}$ como la base canónica de S.*

Observación 3.2. *Los elementos de la base canónica de la línea de Sorgenfrey son cerrados y abiertos.*

Teorema 3.3. *La línea de Sorgenfrey es un espacio regular.*

Demostración. Para separar un punto x de un conjunto cerrado F notamos que hay un intervalo $[x,y)$ cuya intersección con F es vacía pues $S \setminus F$ es abierto. ■

Teorema 3.4. *La línea de Sorgenfrey es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Es el ejemplo 3.8.14 en [12]. ■

Dado que todo espacio Lindelöf regular es paracompacto (teorema 1.99), obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *La línea de Sorgenfrey es un espacio paracompacto.*

Otra de las propiedades que tiene el espacio en el que nos enfocamos en este capítulo la enunciaremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *La línea de Sorgenfrey es hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. La prueba es el ejercicio 3.8.A.(c) en [12]. ■

Corolario 3.7. *La línea de Sorgenfrey es hereditariamente paracompacto.*

3.1 La línea de Sorgenfrey como un espacio separado por la izquierda generalizado

El objetivo de esta sección es probar que todo espacio separado por la izquierda generalizado es un espacio D. Como consecuencia de ello tendremos que en particular toda potencia finita de la línea de Sorgenfrey es un espacio D.

Definición 3.8. *Un espacio X es llamado un* espacio separado por la izquierda generalizado *(abreviado "GLS" por sus siglas en inglés) si existe una relación reflexiva y binaria $\preceq$ en X llamada relación GLS tal que:*

1. *Todo subconjunto cerrado y no vacío tiene un elemento $\preceq$-minimal.*
2. *El conjunto $\{y \in X : x \preceq y\}$ es abierto para cada $x \in X$.*

Teorema 3.9. *[27] Todo espacio separado por la izquierda generalizado es un espacio D.*

Demostración. Sean X un espacio GLS con relación $\preceq$ y φ una asignación de vecindades de X. Definamos la nueva asignación de vecindades ψ para X como: $\psi(x) = \{y \in \varphi(x) : x \preceq y\}$ (que es una abierto por ser la intersección de dos abiertos: $\{y \in X : x \preceq y\}$ y $\varphi(x)$).

Para probar que X es un espacio D basta con construir un cerrado discreto D tal que $\bigcup \psi(D) \supset X$ (pues cada $\psi(x) \subset \varphi(x)$).

Por el teorema de Zermelo (teorema 1.16), si $|\{\psi(y) : y \in X\}| = \gamma$, podemos ordenar las vecindades, así podemos escribirlas como $\{\psi(x_\eta)\}_{\eta<\gamma}$.

Con recursión transfinita construimos $\{x_\epsilon : \epsilon < \gamma\}$ tal que para cada $\epsilon < \gamma$, x_ϵ cumpla que x_ϵ es $\preceq$-minimal en $A_\epsilon = X \setminus \bigcup\{\psi(x_\eta) : \eta < \epsilon\}$. La construcción es de la siguiente forma: $A_0 = X \setminus \bigcup\{\psi(x_\eta) : \eta < 0\} = X$ elegimos x_0 ahí, $A_1 = X \setminus \bigcup\{\psi(x_\eta) : \eta < 1\} = X \setminus \psi(x_0)$, elegimos x_1 ahí. Una vez elegidos los x_η con $\eta < \epsilon$ tomamos $x_\epsilon \in A_\epsilon$. Si existe $\epsilon < \gamma$ tal que $A_\epsilon = \emptyset$, entonces notemos que podemos elegir para cada $\delta > \epsilon$ $x_\delta = x_\epsilon$ así que si $\eta < \epsilon$ entonces $x_\eta \neq x_\epsilon$ y $A_\delta = \emptyset$ para $\delta > \epsilon$.

Sea α el ordinal en el que termina la construcción porque $A_\alpha = \emptyset$.

Ahora, $A_\alpha = X \setminus \bigcup\{\psi(x_\eta) : \eta < \alpha\}$ y si $D = \{x_\epsilon : \epsilon < \alpha\}$, entonces $\bigcup \psi(D) = \bigcup\{\psi(x_\eta) : \eta < \alpha\} = X \setminus A_\alpha = X$.

Falta probar que D es cerrado y discreto. Basta con probar que $\psi(x)\cap D=\{x\}$ para todo $x\in D$, pues $\bigcup\psi(D)=X$.

Sea $\epsilon<\alpha$. Como $x_\epsilon\in X\setminus\bigcup\{\psi(x_\eta):\eta<\epsilon\}$ no está en ningún $\psi(x_\eta)$ con $\eta<\epsilon$. Por lo tanto existe $\eta\geq\epsilon$ tal que $x_\epsilon\in\psi(x_\eta)$ lo cual implica que $x_\epsilon\in\varphi(x_\eta)$ y así $x_\eta\preceq x_\epsilon$.

Ambos, x_η y x_ϵ pertenecen a A_ϵ, ya que $\psi(x_\eta)\notin\{\psi(x_\beta):\beta<\epsilon\}$ (si perteneciera sería uno de ellos, pero son distintos), por lo tanto $x_\eta\in X\setminus\bigcup\{\psi(x_\beta):\beta<\epsilon\}=A_\epsilon$, por lo tanto $x_\eta=x_\epsilon$, pues x_ϵ es $\preceq$-minimal en A_ϵ, esto implica que $D\cap A_\epsilon=\{x_\epsilon\}$. Por lo tanto D es discreto.

Y si $y\in X\setminus D$, $y\in X\setminus\psi(x)$ para algún $x\in D$ y $\{x\}$ es cerrado (asumimos T_1), entonces $V=\psi(x)\cap X\setminus\{x\}$ es vecindad de y tal que $V\cap D\setminus\{y\}=\emptyset$, lo que implica que y no es punto de acumulación de D. Por lo tanto, D es cerrado.

■

Lema 3.10. *Toda potencia finita de S es un espacio separado por la izquierda generalizado.*

Para probar este resultado necesitaremos las siguientes proposiciones auxiliares:

(a) Sea $\preceq$ una relación binaria, reflexiva y transitiva en un espacio X tal que para cada $\preceq$-cadena no vacía K en X, existe $m\in cl(K)$ con $m\preceq x$ para cada $x\in K$. Entonces cada subconjunto cerrado, no vacío de X tiene elemento $\preceq$-minimal.

Probemos esto. Sea F un cerrado no vacío de X, para cada $\preceq$-cadena K en F no vacía existe $m\in cl(K)$ con $m\preceq x$ para cada $x\in K$, como F es cerrado, $m\in F$.

Dada una relación $\preceq$ transitiva y reflexiva podemos convertirla en una relación antireflexiva aRb si y sólo si $b\preceq a$, entonces si K es una $\preceq$-cadena y este m es cota superior, por el lema de Zorn (teorema 1.16), existe un elemento R-maximal, es decir, $\preceq$-minimal.

(b) $H=S\cap[0,\infty)$ y S son homemorfos.

Lo son por admitir ambos una cubierta abierta numerable de copias de $S\cap[0,1)$.

Lo anterior podemos verlo de la suguiente manera: Podemos encontrar un homeomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ ambos con la topología discreta, a saber, $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que

$$f(n)=\begin{cases}2z & \text{si } z\geq 0\\ -2z-1 & \text{si } z<0\end{cases},$$

por lo tanto podemos encontrar un homeomorfismo entre $[z,z+1)$ como subespacio de S y $[f(z),f(z+1))$ para cada $z\in\mathbb{Z}$ que sería

$$\phi_z(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\geq 0\\ -2x-1 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Pues bien, el homeomorfismo entre S y H está dado por $\phi=\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}}\{f_z\}$.

Demostración del Lema 3.10. Consideremos entonces H en lugar de S. Definamos una relación binaria, reflexiva y transitiva $\preceq$ en H^n con $n \in \mathbb{N}$ como:

- $x \preceq y$ si $x_i \leq y_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.
- $\{y \in H_n : x \preceq y\}$ es abierto en H_n para cada $x \in H_n$.

Sea $K \subset H_n$ una $\preceq$-cadena y definimos $m = (m_i) \in H_n$ como $m_i = inf\{x_i : x \in K\}$, entonces $m \preceq x$ y como K es una $\preceq$-cadena y ya que cada coordenada de m es el ínfimo de $\{x_i : x \in K\}$, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x \in K$ tal que $m_i \leq x_i \leq m_i + \varepsilon$ para $1 \leq i \leq n$, en consecuencia $m \in cl(K)$ por esto y por la proposición auxiliar (a), $\preceq$ es relación GLS (que para cada x en H_n el conjunto $\{y \in H_n : x \preceq y\}$ sea abierto se aseguró en la definición de $\preceq$). ∎

Teorema 3.11. *Toda potencia finita de S es espacio D.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema 3.9 y el lema 3.10. ∎

3.2 La línea de Sorgenfrey como un espacio ordenado generalizado

De los ejemplos 1.105 sabemos que la línea de Sorgenfrey es espacio ordenado generalizado. Ahora Lutzer, en [20], prueba que *para un espacio ordenado generalizado, son equivalentes ser paracompacto y ser espacio D*. Para probar esta equivalencia usaremos el siguiente teorema de [28]:

Teorema 3.12. [1]

En un espacio ordenado generalizado X las siguientes propiedades son equivalentes:

a) X es paracompacto

b) Si C es un subespacio cerrado de X, entonces existen conjuntos discretos y cerrados T y E, tales que T está bien ordenado con el orden en X y E está bien ordenado bajo el orden inverso de X (es decir, el que se define para a y b en X como $a \succeq b$ si $b \preceq a$); además $T \cup E \subset C$ y si $x \in C$, entonces existen $t \in T$ y $e \in E$ tales que $t \preceq x \preceq e$.

c) Ningún subespacio cerrado de X es homeomorfo a un subconjunto estacionario (definición 1.30) de un cardinal no numerable regular.

Como ya se comentó, en [20] encontramos la siguiente equivalencia.

Teorema 3.13. *En un espacio ordenado generalizado X son equivalentes las siguientes propiedades:*

[1] Hemos citado el teorema sólo con las equivalencias que necesitamos para probar el resultado que nos interesa.

- *X es paracompacto.*
- *X es espacio D.*

Revisemos ahora una definición y un lema que nos serán de ayuda en la demostración del teorema anterior.

Definición 3.14. *Diremos que un subconjunto T de un espacio GO, X, es cerrado por la derecha si el conjunto $\bigcup\{(\leftarrow, t] : t \in T\}$ es un subconjunto cerrado de X y diremos que T es cerrado por la izquierda si $\bigcup\{[t, \rightarrow) : t \in T\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Ejemplo 3.15. *Consideremos el espacio ω, para cada $n \in \omega$ tenemos que el conjunto $\{0, 1, ..., n-1, n\}$ es cerrado por la derecha en ω.*

Observación 3.16. *Con las condiciones para T en la definición anterior se sigue que T no es cerrado a la derecha si y sólo si hay un punto de acumulación, r, de T tal que $T \subset (\leftarrow, r)$.*

Lema 3.17. *Si X es un espacio GO paracompacto y $U \subset X$ es cerrado por la derecha, entonces existe un subespacio cerrado y discreto $D \subset X$ que está bien ordenado por el orden en X, cumple que $D \subset U$ y dada cualquier $u \in U$, existe $d \in D$ que cumple $u \leq d$.*

Demostración. Sea $T = \bigcup\{(\leftarrow, u] : u \in U\}$. T es cerrado en X por ser U cerrado por la derecha. Así que por b) del teorema 3.12, existe un subconjunto cerrado $E \subset X$ que está bien ordenado por el orden de X, que cumple $E \subset T$ y tiene la propiedad de que si t es un elemento de T, entonces existe $e \in E$ tal que $t \leq e$. En un primer caso, notamos que T contiene un punto final derecho si y sólo si U contiene un punto final derecho, de existir llamamos a este punto r y definimos $D = \{r\}$.

Ahora supongamos que ni T ni U tienen punto final derecho; sea κ la cofinalidad de E, podemos asumir que $E = \kappa$ reemplazando a E, de ser necesario, por un subconjunto cofinal. Sea $e(0)$ el primer punto de E y $u(0)$ un punto de U tal que $e(0) < u(0)$. Sea $e(1)$ el primer punto de E tal que $u(0) < e(1)$. Por recursión sobre κ podemos escoger puntos $e(\alpha)$ y $u(\alpha)$ para cada $\alpha < \kappa$ tales que si $\alpha < \alpha' < \kappa$, entonces $e(\alpha) < u(\alpha) < e(\alpha')$. Sea $D = \{u(\alpha) : \alpha < \kappa\}$. D es cofinal en U y además es cerrado y discreto por cómo agregamos elementos de E que es cerrado y discreto. ■

Ahora sí, comencemos la prueba del teorema 3.13. Haremos ambas implicaciones por separado.

Demostración del teorema 3.13. Primero probaremos la siguiente implicación que enunciamos como un teorema.

Teorema 3.18. *Si X es un espacio GO con la propiedad D, entonces X es paracompacto.*

Demostración. Supongamos que X es espacio GO con la propiedad D, pero no es paracompacto; entonces por c) del teorema 3.12 existe T, un subconjunto estacionario de un cardinal regular no numerable, κ, tal que T se encaja en X como un subespacio cerrado, es decir T es homeomorfo a un subespacio cerrado de X. Se sigue del lema 2.7 que T tiene la propiedad D por ser un subespacio cerrado de X. Ahora consideremos T con su topología del orden en el espacio ordinal $[0,\kappa)$. Para cada $x \in T$ los conjuntos $\gamma(x) = T \cap [0,x]$ forman una asignación de vecindades para T al tener a x como elemento y ser abiertos; esto último pues el conjunto $[0,x]$ es el conjunto $[0,x+1)$ en el espacio que estamos considerando. Como T es espacio D, existe un subconjunto $D \subset T$ que es discreto y cerrado en T tal en $T \subset \bigcup\{\gamma(x) : x \in D\}$. Además, D es cofinal en T ya que si $u \in T$ es tal que $x < u$ para todo $x \in D$, al ser las vecindades de la forma $\gamma(x) = T \cap [0,x]$ ninguna de ellas podría contener a tal u, contradiciendo el hecho de que todo elemento de T pertenece a $\bigcup\{\gamma(x) : x \in D\}$.

Ahora veamos que D también es un conjunto estacionario en κ, para esto sea A un subconjunto cerrado y no acotado de κ. Los conjuntos A y D se intersectan por ser ambos cerrados y no acotados en κ; para ver esto, construimos sucesiones en D y A de la siguiente forma: como primer elemento elegimos a α un elemento de A, ahora como D es cofinal, existe un elemento, δ_0 tal que $0 \leq \delta_0$ y como A es no acotado, existe α_0 tal que $\delta_0 < \alpha_0$ continuamos eligiendo elementos de D y A de esta manera. Así, para D y A tenemos sucesiones de ordinales en κ. El límite de estas sucesiones debe ser menor que κ (pues κ es un ordinal de cofinalidad κ), así existe el límite de ambas y coincide por cómo las hemos construido. Además al ser conjuntos cerrados, ambos contienen a tal límite, así, tienen intersección no vacía. Esto prueba que D es estacionario en κ.

Además, para cada $x \in D$, existe un punto $a(x)$ de κ tal que $a(x) < x$ y $D \cap (a(x), x] = \{x\}$. Ya que κ, D y a cumplen con las hipótesis del lema de Fodor 1.31 podemos obtener dos puntos en D, u y v tales que $u < v$ y $a(u) = a(v)$.

Y $a(v) < u < v$ de tal forma que $(a(v), v] \cap T$ contiene a u y a v, contradiciendo nuestra elección de $a(v)$. Así que el conjunto estacionario T no puede tener la propiedad D, esta contradicción prueba que X debe ser paracompacto. $\square$

Para la implicación restante del teorema 3.13 necesitaremos conceptos y resultados auxiliares que expondremos a continuación.

Convención 3.19. *Sea $f : A \to B$ una función y C un subconjunto de A, denotaremos por $f^*(C)$ a $\bigcup\{f(c) : c \in C\}$.*

Recordemos que para un conjunto ordenado $(X,<)$, $C \subset X$ es convexo si para x y y elementos de C se cumple que $(x,y) \subset C$ y que si $A \subset X$, entonces A se puede escribir como la unión de conjuntos convexos maximales y ajenos dos a dos; a estas últimas se les llaman las componentes convexas de A en X. En caso de que $A = X$ simplemente se les llaman las componentes convexas de X. Por lo tanto, cada $x \in X$ pertenece a una única componente convexa de X a la que llamamos la componente convexa de x en X.

Definición 3.20. *Dada una asignación de vecindades convexa, γ, para un espacio GO X y un subconjunto $Y \subset X$ con la propiedad de que $\gamma(y) \subset Y$ cada que $y \in Y$, decimos que el par (D,δ) es* γ-aceptable para el conjunto Y *si:*

a) $D \subset Y$ y para cada $x \in D$, $x \in \delta(x) \subset \gamma(x)$ y $\delta(x)$ es un subconjunto convexo abierto de X.

b) Para cada $x \in D$, existen a lo más dos puntos en el conjunto $N(x) = \{z \in D \setminus \{x\} : \delta(x) \cap \delta(z) \neq \emptyset\}$.

c) Para cada $x \in Y$, si $\gamma(x) \cap \delta^*(D) \neq \emptyset$, entonces $x \in \delta^*(D)$.

Lema 3.21. *Supongamos que (D,δ) es γ-aceptable para $Y \subset X$, entonces:*

a) $\delta^*(D)$ es cerrado y abierto en Y;

b) D es cerrado y discreto en Y.

Demostración.

- δ^* es la unión de conjuntos abiertos $\delta(x)$ con $x \in D$, por lo tanto es abierto en X y así es abierto en Y, pues $\delta^*(D) \cap Y$ es un conjunto abierto en Y. Para ver que es cerrado en Y, elijamos $p \in Y \setminus \delta^*(D)$, $\gamma(p)$ es una vecindad abierta de p y por c) de la definición 3.20 $\gamma(p)$ y $\delta^*(D)$ deben ser disjuntos. Así, $\delta^*(D)$ es cerrado en Y.

- Para ver que D es discreto con la topología relativa heredada de Y, sea $d \in D$ y consideremos el abierto $\delta(d)$, por b) de la definición 3.20, el conjunto $N(d) = \{x \in D \setminus \{d\} : \delta(x) \cap \delta(d) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos puntos, así que $U = \delta(d) \setminus N(d)$ es una vecindad abierta de d tal que $U \cap D = \{d\}$.

También D es cerrado en $\delta^*(D)$, pues si $x \in \delta^*(D) \setminus D$, elegimos $d \in D$ con $x \in \delta(d)$; $N(d)$ definido como antes es tal que $\delta(d) \setminus (\{d\} \cup N(d))$ es una vecindad abierta de x que no intersecta a D y por lo tanto, el complemento de D en $\delta^*(D)$ es abierto. Y así, D es cerrado en Y. □

En el siguiente lema si $x \in X$ y $A \subset X$, denotaremos $A < x$ al hecho de que $a < x$ para cada $a \in A$, la notación $y < A$ se define análogamente.

Lema 3.22. *Sea γ una asignación de vecindades convexas para un espacio GO paracompacto X y sea Y un subespacio abierto y cerrado de X con la propiedad de que si $y \in Y$, entonces $\gamma(y) \subset Y$. Fijemos un $p \in Y$, entonces existe un par (D,δ) γ-aceptable para el conjunto Y que verifica $p \in D$.*

Demostración. Definimos de manera recursiva $\{B(n) : n \in \omega\}$ sucesión de subconjuntos de $Y \cap [p,\rightarrow)$ y una función β en $B = \cup\{B(n) : n \in \omega\}$ tales que:

1. Para cada $x \in B$, $\beta(x)$ es un subconjunto abierto y convexo de X con $x \in \beta(x) \subset \gamma(x)$ y $\beta(x) \subset Y$.

2. $B(0) = \{p\}$ y $\beta(p) = \gamma(p)$.

3. Cada $B(n)$ es un subespacio cerrado y discreto de X que está bien ordenado por el orden de X.

4. Si $y \in B(n)$ y $z \in B(n+1)$, se cumple que $y < z$.

5. Si $y < z$ y ambos son elementos de B, entonces $\beta(y) \subset (\leftarrow, z)$ y $\beta(z) \subset (y, \rightarrow)$.

6. Si $x \geq p$ es un punto de Y y si $\gamma(x) \cap \beta^*(B) \neq \emptyset$, entonces $x \in \beta^*(B)$.

Así, comenzamos definiendo $B(0) = \{p\}$. Supongamos que los subconjuntos $B(0)$, $B(1)$, ..., $B(n)$ de Y ya han sido definidos, de tal manera que se satisfagan 3. y 4. de la lista anterior. Si $B(n)$ tiene elemento mayor $q(n)$, definimos $B'(n) = \gamma(q(n))$, de lo contrario $B'(n) = B(n)$. Definamos un conjunto $B"(n)$ como $B"(n) = \{t \in Y : t > B'(n)$ y $\gamma(t) \cap B'(n) \neq \emptyset\}$. Y definimos $B(n+1)$ como sigue: si $B"(n)$ contiene un punto final derecho $b"$, sea $B(n+1) = \{b"\}$; si $B"(n)$ no tiene punto final derecho, pero es cerrado por la derecha, entonces por el lema 3.17, existe $B(n+1)$ un subconjunto cerrado y discreto de X tal que está bien ordenado por el orden en X y es un subconjunto cofinal en $B"(n)$; en un tercer caso, si $B"(n)$ no es cerrado por la derecha, existe un único punto $r(n+1) \in X$ tal que $r(n+1)$ es punto de acumulación de $B"(n)$ y cumple que $B"(n) \subset (\leftarrow, r(n+1))$, $r(n+1)$, es elemento de Y, por ser Y cerrado en X y $r(n+1)$ punto de acumulación de un subjconjunto de Y. Además, para $\gamma(r(n+1))$ vecindad abierta de $r(n+1)$, podemos elegir un punto $e(n+1) \in \gamma(r(n+1)) \cap B"(n)$ con $e(n+1) < r(n+1)$; en este último caso definimos $B(n+1) = \{e(n+1), r(n+1)\}$. Los conjuntos $B(0), ..., B(n), B(n+1)$ cumplen 3. y 4. así que la definición por recursión de la familia $\{B(n) : n \in \omega\}$ está completa.

Hagamos notar ahora las siguientes observaciones sobre los conjuntos anteriores que necesitaremos después:

Observación 3.23. *Si $B(n) \neq \emptyset$, entonces $B'(n) \neq \emptyset$. Sin embargo $B"(n)$ sí podría ser el conjunto vacío y $B"(n) = \emptyset$ si y sólo si $B(n+k) = \emptyset$ para cada $k > 0$. Veamos que esto último es cierto.*

Si $B"(n) = \emptyset$ significa que $\{t \in Y : t > B'(n)$ y $\gamma(t) \cap B'(n) \neq \emptyset\} = \emptyset$, así que queda en el segundo caso, ya que en los otros casos necesitamos elementos en $B"(n)$) y $\emptyset$ cumple las condiciones, así que $B(n+1) = \emptyset$ y aplicando lo mismo, por recursión, $B(n+k) = \emptyset$ con $k > 0$. Completando una de las implicaciones.

Ahora para la implicación restante, supongamos que $B(n+k) = \emptyset$, con $k > 0$, pero que no se cumple $B"(n) = \emptyset$, entonces $B"(n)$ tiene al menos un elemento. El único caso en el que no tenemos explícitamente los elementos de $B"(n)$ es en el segundo, pero al tener $B"(n)$ un elemento, $\emptyset$ no es cofinal en él. Así que en cualquier caso $B(n+1) \neq \emptyset$ contradiciendo nuestra hipótesis.

Observación 3.24. *El conjunto $B(n+1)$ tiene 0, 1, 2 o un número infinito de puntos. Veamos, como se hizo notar en la observación anterior $B(n+1) = \emptyset$ sólo* *cuando $B''(n)$ es vacío. $B(n+1)$ tiene un sólo punto cuando tal punto es el punto final de $B''(n)$. $B(n+1)$ tiene dos puntos sólo cuando $B(n+1) = \{e(n+1), r(n+1)\}$, en la situación en la que $B''(n)$ no es cerrado por la derecha. En cualquier otro caso, $B(n+1)$ debe ser un subconjunto cofinal infinito de $B''(n)$ ya que si $B(n+1)$ fuera finito, al ser cofinal, $B''(n)$ tendría punto final derecho, que es un caso que ya cubrimos.*

Observación 3.25. *El único caso en el que $B(n+1)$ no es un subconjunto de $B''(n)$ es cuando $B(n+1) = \{e(n+1), r(n+1)\}$, es decir, cuando $B''(n)$ no es cerrado por la derecha. Sin embargo, recordemos que elegimos a $e(n+1) < r(n+1)$ y $e(n+1) \in B''(b)$. Así que es cierto que: si $u < v$ son puntos de $B(n+1)$, entonces $u \in B''(n)$ y el primer punto de $B(n+1)$ pertenece a $B''(n)$.*

Observación 3.26. *Si $x \in B''(n)$, entonces existe $y \in B(n+1)$ tal que $x \leq y$. En el caso en el que $B(n+1)$ es cofinal en $B''(n)$ esto es claro, de igual manera cuando $B''(n)$ tiene elemento mayor, en otro caso, tenemos la condición $B''(n) \subset (\leftarrow, r(n+1))$ y como $r(n+1)$ es punto de acumulación de $B''(n)$, podemos encontrar para cada $x \in B''(n)$ tal y.*

Ahora que hemos definido los conjuntos $B(n)$, definamos la función β en el conjunto $B = \bigcup\{B(n) : n \in \omega\}$ como sigue: para cada x en B, las propiedades 3. y 4. obligan al conjunto $(\leftarrow, x] \cap B$ a ser cerrado y discreto en X, esto es porque para cada $y \in (\leftarrow, x] \cap B$ $y \in B(n_0)$ para algún $n_0 \in \omega$, así que existe una vecindad de y, V_y tal que $V_y \cap B(n_0) = \{y\}$, así que $U = V_y \setminus \bigcup\{B(n) : n \in \{0, 1, ..., n_0 - 1, n_0 + 1\}\}$ es vecindad de y en $(\leftarrow, x] \cap B$ tal que $U \cap (\leftarrow, x] \cap B = \{y\}$. Así que el conjunto $M(x) = X \setminus (B \setminus \{x\})$ es vecindad de x en X. Sea β' la componente convexa con respecto a X del punto x en el conjunto $M(x)$. Definimos entonces $\beta(x) = \gamma(x) \cap \beta'(x)$, así, $\beta(x)$ es un abierto convexo que contiene a x y es subconjunto de $\gamma(x)$; como $x \in B \subset Y$, se cumple que $\beta(x) \subset \gamma(x) \subset Y$, así que la propiedad 1. se satisface.

Para ver que 2. se satisface, consideramos el punto $p \in B(0)$, entonces $B'(0) = \gamma(p)$, así que $B''(0) = \{t \in Y : t > \gamma(p)$ y $\gamma(t) \cap \gamma(p) \neq \emptyset\}$. Si $B(1) \neq \emptyset$, su primer punto $b(1)$ está en $B''(0)$ como lo hicimos notar en la observación 3.25 y $\gamma(p) < b(1)$ por 4. Así que como $\beta'(p)$ es el mayor convexo que contiene a p, tenemos que $\gamma(p) \subset \beta'(p) \subset \beta(p)$ y por 1 sabemos que $\beta(p) \subset \gamma(p)$; por lo tanto $\beta(p) = \gamma(p)$. Veamos el caso restante: si $B'(1) = \emptyset$, entonces $B(n) = \emptyset$ para cada $n > 0$ (por la observación 3.23) así que p es el único punto de B y así $M(p)$ resulta ser todo X. Entonces $\beta'(p) = X$ y de nuevo $\beta(p) = \gamma(p)$. Así ya hemos probado que la propiedad 2. se cumple.

Las propiedades 3. y 4. fueron procuradas en la construcción recursiva de los conjuntos $B(n)$. Para verificar 5. notamos que si y y z son puntos de B con $y < z$, entonces $X \setminus (B \setminus \{y\}) \subset (\leftarrow, z) \cup (z, \rightarrow)$ así que la componente convexa de y en $X \setminus (B \setminus \{y\})$ está contenida en $(\leftarrow, z)$, pero entonces $\beta(y) = \beta'(y) \cap \gamma(y) \subset (\leftarrow, z)$ y, similarmente, $\beta(z) \subset (y, \rightarrow)$.

Observación 3.27. *Sea $y \in B$ fijo, si z y w son puntos de B con $y < z < w$, entonces $\beta(y) \subset (\leftarrow, z)$ y $\beta(w) \subset (z, \rightarrow)$ así que $\beta(y) \cap \beta(w) = \emptyset$. Se sigue que existe a lo más un punto z en $B \cap (y, \rightarrow)$ con $\beta(y) \cap \beta(z) \neq \emptyset$ pues si existiera z' con $y < z'$ si $y < z < z'$ por lo dicho anteriormente ocurriría $\beta(y) \cap \beta(z') = \emptyset$. Y por esta razón tampoco ocurre $y < z' < z$ pues entonces la intersección de $\beta(z)$ y $\beta(y)$ sería vacía. De manera análoga existe a lo más un punto $z \in B \cap (\leftarrow, y)$ con $\beta(y) \cap \beta(z) \neq \emptyset$, de tal manera que el conjunto $\{z \in B \setminus \{p\} : \beta(z) \cap \beta(p) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más un punto pues no consideramos puntos en $(\leftarrow, p)$.*

Nos falta verificar la propiedad 6., esto requiere varios pasos. Fijemos un punto $x \in Y \cap [p, \rightarrow)$ y supongamos que $\gamma(x) \cap \beta^*(B) \neq \emptyset$, a fin de obtener una contradicción.

Supongamos que:

$$(\#) \qquad x \text{ no está en } \beta^*(B).$$

Afirmación 3.28. *Algún punto $z \in B$ cumple $x \leq z$.*

Para probarlo, supongamos que no, es decir:

$$(\#\#) \qquad B \subset (\leftarrow, x)$$

como $\gamma(x) \cap \beta^*(B) \neq \emptyset$, podemos elegir un $n \in \omega$ y $b \in B(n)$ tal que $\gamma(x) \cap \beta(b) \neq \emptyset$ y por (##) tenemos que $b < x$.

Las siguientes dos afirmaciones (3.29 y 3.30) son auxiliares para probar la afrimación 3.28.

Afirmación 3.29. *$x > B'(n)$.*

Si ocurre $B'(n) = B(n)$ esto se sigue de (##), así que supongamos que $B'(n) \neq B(n)$, entonces $B(n)$ debe tener elemento mayor $q(n)$ y $B'(n) = \gamma(q(n))$. Notamos que por (##), $q(n) < x$. Ya que si ocurriese que para algún $w \in B'(n)$, $x \leq w$, entonces por la convexidad de $\gamma(q(n))$, $x \in \gamma(q(n))$ ya que x está entre dos puntos de $\gamma(q(n))$; pero entonces $B(n+1) \neq \emptyset$ y por la observación 3.25, el primer punto de $B(n+1)$, c, debe pertenecer a $B''(n)$. Así que c cumple $B'(n) < c$, por lo tanto $w < c$. Al combinar estas desigualdades obtenemos $x > c > w \geq x$, lo cual es una contradicción. Así que $B''(n)$ es vacío y así $B(n+k) = \emptyset$ para toda $k > 0$ por lo tanto $q(n)$ que era el punto final de $B(n)$ es también el punto final de B, pues los siguientes $B(n)$ son vacíos. Así, $[q(n), \rightarrow)$ resulta ser un convexo respecto a X en $M(q_n) = X \setminus (B \setminus \{q(n)\})$, pues al ser $q(n)$ el último punto de B,

$[q(n), \rightarrow)$ no contiene puntos de B, por esto tenemos que $[q(n), \rightarrow) \subset \beta'(q(n))$ ya que $\beta'(q(n))$ es el convexo más grande que contiene a $q(n)$ y, entonces, $x \in \gamma(q(n))$; por lo tanto $x \in \gamma(q(n)) \cap \beta'(q(n)) = \beta(q(n)) \subset \beta^*(B)$ lo cual contradice (#). Concluimos entonces que no puede ocurrir que $x \leq w$ para ninguna $w \in \gamma(q(n))$ y así $x > B'(n)$.

Afirmación 3.30. $\gamma(x) \cap B'(n) \neq \emptyset$.

Si $B'(n) = B(n)$, entonces $B(n)$ no tiene punto final derecho así que para b (como la elegimos justo antes de la afirmación 3.29), algún $c \in B(n)$ cumple $b < c$ así que de 5. se sigue que $\beta(b) \subset (\leftarrow, c)$. Además $\gamma(x)$ es convexa y su intersección con $\beta(b)$ es no vacía; esto junto con el hecho en (##) de que $c < x$ implica que $c \in \gamma(x) \cap B(n) = \gamma(x) \cap B'(n)$.

Si $B'(n) \neq B(n)$, entonces $B(n)$ tiene un punto final derecho $q(n)$, además sabemos que $b \in B(n)$ y así por (##), $b \leq q(n) < x$. Veamos los dos casos posibles:

> ***Caso 1.*** *Si $b = q(n)$, $\beta(b) = \beta(q(n)) \subset \gamma(q(n)) = B'(n)$, esta última igualdad por tener $B(n)$ elemento mayor, así que $B'(n) \cap \gamma(x) \supset \beta(b) \cap \gamma(x) \neq \emptyset$ como se quería probar.*
>
> ***Caso 2.*** *Si $b < q(n)$, entonces 5. muestra que $\beta(b) \subset (\leftarrow, q(n))$, tenemos entonces que $b < q(n) < x$, además $\beta(b) \cap \gamma(x)$ es un convexo no vacío, por lo que existe un b_0 tal que b_0 está en $\beta(b) \cap \gamma(x)$, en particular, b_0 está en $\beta(b)$ y $\beta(b) \subset (\leftarrow, q(n))$ así que $b_0 < q(n)$ y $q(n) < x$, tanto b_0 como x son puntos de $\gamma(x)$, por lo tanto, la convexidad de $\gamma(x)$ arroja que $q(n) \in \gamma(x)$. Así que $q(n)$ es un punto en $\gamma(q(n)) \cap \gamma(x) = B'(n) \cap \gamma(x)$, como se quería probar.*

Si combinamos las afimaciones 3.29 y 3.30 tenemos que $x \in B''(n)$ por la definición de $B''(n)$, así que $B(n+1) \neq \emptyset$ y por la observación 3.26, algún $c \in B(n+1)$ cumple $x \leq c$; pero eso es imposible, pues $c \in B$ y por (##) sabemos que $B \subset (\leftarrow, x)$. Así queda demostrada la afirmación 3.28.

La afirmación 3.28 muestra que el conjunto $T = \{s \in B : x \leq s\}$ es no vacío. Recordando que B está bien ordenado por el orden en X, sea z el primer elemento de T.

Afirmación 3.31. $x \in \beta'(z)$.

De (#) sabemos que $x \notin B$, así que $x < z$ (elegimos a z tal que $x \leq z$, pero z sí es un elemento de B), la minimalidad de z en T significa que todo punto en el conjunto cerrado y discreto $B \cap (\leftarrow, z)$ está por debajo (en el sentido del orden) de x, así que podemos elegir un conjunto abierto y convexo U que contiene a x y z y que cumple $U \cap (B \cap (\leftarrow, z)) = \emptyset$. Recordemos que z es el primer punto de T; si fuera el punto final de B, entonces $x \in U \cup [z, \rightarrow) \subset \beta'(z)$

ya que $U \cup [z, \to)$ es un convexo que tiene a z, probando así que x es elemento de $\beta'(z)$. Si z no es el punto final de B, sea w el primer punto de B que está por encima de z, entonces $V = U \cup (z, w)$ es un subconjunto convexo de X que está contenido en $X \setminus (B \setminus \{z\})$ y contiene a z y a X. Así que $V \subset \beta'(z)$ por el argumento del caso anterior y así, $x \in V \subset \beta'(z)$, como se quería probar.

Afirmación 3.32. $x \in \gamma(z)$

Elijamos $k \in \omega$ tal que $z \in B(k)$, como $p \leq x < z$, sabemos que $z \notin B(0)$ así que $k \geq 1$ y $B(k-1)$ está definido y es no vacío (pues si lo fuera, $B(k) = \emptyset$).

Si $\gamma(z) \cap B \cap (\leftarrow, z) \neq \emptyset$, sea $c \in \gamma(z) \cap B$ con $c < z$. Por la minimalidad de z en el conjunto T, tenemos que $c < x < z$ y por la convexidad de $\gamma(z)$, $x \in [c, z] \subset \gamma(z)$, lo que se quería probar.

Ahora supongamos que:

$$\text{(\#\#\#)} \qquad \gamma(z) \cap B \cap (\leftarrow, z) = \emptyset$$

entonces z debe ser un punto de $B''(k-1)$, pues por la observación 3.25 la única manera en la que $z \notin B''(k-1)$ es cuando $B''(k-1)$ no es cerrado por la derecha y z es su punto final derecho que denotamos $r(k)$ cuando construimos los conjuntos $B(n)$; pero en este caso hay un punto $e(k) \in \gamma(z) \cap B''(k-1)$, por lo tanto $z > B'(k-1)$ y $B(k-1) \cap \gamma(z) \neq \emptyset$. Si ocurriera que $B'(k-1)$ no tiene punto final derecho q, entonces $B'(k-1) = B(k-1)$ y así $B''(k-1) = \{t \in Y : t > B'(k-1)$ y $\gamma(t) \cap B'(k-1) \neq \emptyset\}$ y z está en $B''(k-1)$, así que $B(k-1) \subset (\leftarrow, z)$ y $\gamma(z) \cap B(k-1) \neq \emptyset$; como $B(k-1) \subset B$ esto nos dice que $\gamma(z) \cap B \cap (\leftarrow, z) \neq \emptyset$, lo que contradice (###), así que $B'(k-1) = \gamma(q)$. Como $q \in B(k-1)$, $q < z$, así que por la minimalidad de z en T, tenemos que $q < x < z$. Afirmamos que z es el primer elemento de $B(k)$, para probarlo supongamos que no es así, es decir, que algún $w \in B(k)$ cumple $k < z$; por la observación 3.25 $w \in B''(k-1)$, así que $w > B'(k-1) = \gamma(q)$, además $q < z$ y $\gamma(q) \cap \gamma(z) \neq \emptyset$, la convexidad de $\gamma(q)$ y $\gamma(z)$ obliga a que $w \in [q, z] \subset \gamma(q) \cup \gamma(z)$, pero $w > \gamma(q)$, así que $w \in \gamma(z)$, esto quiere decir que $\gamma(z)$ contiene un punto de $B \cap (\leftarrow, z)$, lo cual contradice (###), así que z es el primer punto de $B(k)$, como resultado de esto q y z son puntos adyacentes en B, q siendo el último punto de $B(k-1)$ y z el primero de $B(k)$, por lo tanto $x \in (q, z) \subset \beta'(q) \cap \beta'(z)$, además $\gamma(q) \cap \gamma(z) \neq \emptyset$ así que por la convexidad de γ, tenemos que $x \in (q, z) \subset \gamma(q) \cup \gamma(z)$. Si $x \in \gamma(q)$, entonces $x \in \gamma(z) \cap \beta'(z) = \beta(z)$, cado una de estas posibilidades contradicen (#) y así, queda demostrada la afirmación 3.32.

Combinando las afirmaciones 3.28 y 3.31 concluimos que $x \in \beta'(z) \cap \gamma(z) = \beta(z) \subset \beta^*(B)$, lo cual contradice (#), así que 6. es cierto.

De manera análoga encontramos conjuntos $A(n) \subset Y \cap (\leftarrow, p]$ y una función α definida en $A = \bigcup \{A(n) : n \in \omega\}$ tales que:

1') Para cada $x \in A$, $\alpha(x)$ es un conjunto abierto y convexo de X con $x \in \alpha(x) \subset \gamma(x)$ y $\alpha(x) \subset Y$.

2') $A(0) = \{p\}$ y $\alpha(p) = \gamma(p)$.

3') Cada $A(n)$ es un subespacio cerrado y discreto de X que está bien ordenado bajo el orden inverso de X.

4') Si $y \in A(n)$ y $z \in A(n+1)$, se cumple que $z < y$.

5') Si $y < z$ y ambos son elementos de A, entonces $\alpha(y) \subset (\leftarrow, z)$ y $\alpha(z) \subset (y, \rightarrow)$.

6') Si $y \leq p$ es un punto de Y y si $\gamma(y) \cap \alpha^*(A) \neq \emptyset$, entonces $y \in \alpha^*(A)$.

Ahora sea $D = A \cup B$. Definimos $\delta(x) = \alpha(x)$ si $x \in A$ y $\delta(x) = \beta(x)$ si $x \in B$. Como $A \cap B = \{p\}$, las propiedades 2. y 2') prueban que δ está bien definida.

Falta verificar que (D, δ) es γ-aceptable para el conjunto Y. De la construcción de D y δ podemos ver que (D, δ) satisface el inciso a) de la definición 3.20. Para verificar que el inciso b) se satisface, notamos que si $x \in A$ y $y \in B$ son distintos de p, entonces $\delta(x) \cap \delta(y) = \alpha(x) \cap \beta(y) \subset (\leftarrow, p) \cap (p, \rightarrow) = \emptyset$, para puntos en $D \setminus \{p\}$ el inciso b) se sigue de 5. y 5'); sólo nos resta verificar que b) se cumpla para el punto p, pero por 5. y 5') sabemos que existe a lo más un punto $x \in (A \setminus \{p\})$ y a lo más un punto $y \in (B \setminus \{p\})$ tales que $\delta(x) \cap \delta(p) \neq \emptyset$ y $\delta(y) \cap \delta(p) \neq \emptyset$, como se requiere para b) de la definición 3.20. Por último, para c) de la definición 3.20, supongamos que $y \in Y$ y $\gamma(y) \cap \delta^*(D) \neq \emptyset$, como $\delta^*(D) = \alpha^*(A) \cup \beta^*(B)$, se sigue de 6. y 6') que $y \in \alpha^*(A) \cup \beta^*(B) = \delta^*(D)$. Y así, probamos que (D, δ) es γ-aceptable para Y. □

Definición 3.33. *Para una asignación de vecindades abiertas γ para un espacio topológico X, sea $\mathscr{P}(\gamma) = \{(E, \mu) : (E, \mu)$ es γ- aceptable para $X\}$. Definamos $(\preceq)$ en $\mathscr{P}(\gamma)$ como $(E, \mu) \preceq (F, \nu)$ si $E \subset F$ y μ y ν coinciden en E.*

Lema 3.34. *$\mathscr{P}(\gamma)$ tiene elemento maximal.*

La prueba de este lema se hace aplicando el lema 3.22 con $Y = X$, viendo que $\mathscr{P}(\gamma)$ es no vacío y que cada subcolección linealmente ordenada de $\mathscr{P}(\gamma)$ tiene cota superior en $\mathscr{P}(\gamma)$; luego, por el lema de Zorn, podemos encontrar un elemento maximal para $\mathscr{P}(\gamma)$.

Lema 3.35. *Si (E, μ) es un elemento maximal de $\mathscr{P}(\gamma)$, entonces $\mu^*(E) = X$.*

Demostración. Supongamos que (E, μ) es un elemento maximal de $\mathscr{P}(\gamma)$ pero $\mu^*(E)$ no cubre a X. Elijamos $p \in X \setminus \mu^*(E)$. Como (E, μ) es un par γ-aceptable para X, se sigue que $\gamma(p) \cap \mu^*(E) = \emptyset$. Sea $Y = \bigcup\{\gamma(t) : t \in X$ y $\gamma(t) \cap \mu^*(E) = \emptyset\}$. Tenemos que $p \in Y$.

Afirmamos que Y cumple las hipótesis del lema 3.22. Veamos:

Sea $y \in Y$, entonces existe $t \in X$ tal que $\gamma(t) \cap \mu^*(E) = \emptyset$ y $y \in \gamma(t)$. Si $\gamma(y) \cap \mu^*(E) \neq \emptyset$, entonces tendríamos que $y \in \mu^*(E)$ y, así, $y \in \gamma(t) \cap \mu^*(E) = \emptyset$, por lo tanto, $\gamma(y) \cap \mu^*(E) = \emptyset$ por lo que $\gamma(y)$ es también uno de los uniendos de Y y así, se cumple que $\gamma(y) \subset Y$.

Ahora, Y es abierto en X por ser la unión de conjuntos abiertos. Para probar que Y es cerrado veamos que $Y = X \setminus \mu^*(E)$. Sea $y \in Y$. Como vimos anteriormente $\gamma(y) \cap \mu^*(E) = \emptyset$ así que $y \in X \setminus \mu^*(E)$. Para probar la segunda contención sea $z \in X \setminus \mu^*(E)$, $\gamma(z) \cap \mu^*(E) = \emptyset$ ya que (E, μ) es aceptable y, así, $z \in \gamma(z) \subset Y$. Así que $Y = X \setminus \mu^*(E)$ que es un cerrado en X.

Ahora usamos el lema 3.22 para encontrar (D, γ) un par γ-aceptable para Y. Sea $F = D \cup E$ y definimos ν en F como $\nu(x) = \mu(x)$ si $x \in E$ y $\nu(x) = \delta(x)$ si $x \in D$, δ definida como antes de la definición 3.33. Y ν está bien definida, pues $D \cap E \subset Y \cap \mu^*(E) = \emptyset$.

Probemos ahora que (F, ν) es γ-aceptable para X. El inciso a) de la definición 3.20 se cumple por cómo construimos (F, ν). Para ver que el inciso b) se cumple, notamos que si $y \in D$ y $z \in E$, entonces $\nu(y) = \delta(y) \subset Y$ y $\nu(z) = \mu(z) \subset \mu^*(E)$, así que $\nu(y) \cap \mu(z) = \emptyset$; por lo tanto, por cómo se define Y, cada vez que $y \in D$ y $z \in F$ implique que $V(y) \cap V(z) \neq \emptyset$, se tendrá que $z \in D$.

(D, δ) es γ-aceptable para Y, así, por el inciso b) de 3.20, existen a lo más dos puntos z en $D \setminus \{y\}$ tales que $\delta(x) \cap \delta(z) \neq \emptyset$. Así que hay a lo más dos de tales puntos en $F \setminus \{y\}$. Un argumento similar puede aplicarse cuando $y \in E$. Así, verficamos el inciso b) de 3.20.

Para verificar el inciso c) de la definición 3.20 sea $x \in X$ tal que $\gamma(x)$ intersecta a $\nu^*(F)$. Distinguimos dos casos: $\gamma(x) \cap \mu^*(E) \neq \emptyset$ o $\gamma(x) \cap \delta^*(D) \neq \emptyset$. En el primer caso, como (E, μ) es γ-aceptable para X, tenemos que $x \in \mu^*(E) \subset \nu^*(F)$, como queríamos probar. Si suponemos $\gamma(x) \cap \mu^*(E) = \emptyset$, entonces $x \in Y$ y $\gamma(x) \cap \delta^*(D) \neq \emptyset$, así que por ser (D, δ) γ-aceptable para Y tenemos que $x \in \delta^*(D) \subset \nu^*(F)$ como queríamos probar.

Así, hemos probado que $(F, \nu) \in \mathscr{P}$ y como $p \in F \setminus E$, (E, μ) es estrictamente menor que (F, ν) respecto al orden en $\mathscr{P}(\gamma)$, lo cual es imposible pues (E, μ) es un elemento maximal de $\mathscr{P}(\gamma)$. Esta contradicción prueba que $\mu^*(E) = X$, como lo aseveramos.

□

Continuación de la demostración del teorema 3.13. Recordemos que faltaba una implicación que, como la anterior, enunciamos como un teorema.

Teorema 3.36. *Todo espacio GO paracompacto es un espacio D.*

Demostración. Sea X un espacio ordenado generalizado paracompacto y γ una asignación de vecindades para X. De ser necesario, reemplazamos a $\gamma(x)$ por su componente convexa que contiene a x, así, podemos asumir que cada $\gamma(x)$ es convexo en X para cada $x \in X$. Usamos el lema 3.22 para encontrar un elemento de $\mathscr{P}(\gamma)$ y luego el lema 3.34 para encontrar un elemento maximal $(E,\mu) \in \mathscr{P}(\gamma)$, de acuerdo con el lema 3.35, $\mu^*(E) = X$ y por el lema 3.21, E es un subconjunto cerrado y discreto de X; además $\mu(x) \subset \gamma(x)$ para cada $x \in X$, así que $X = \bigcup\{\gamma(x) : x \in E\}$, lo cual implica que X es un espacio D. □

Los teoremas 3.18 y 3.36 concluyen la prueba del teorema 3.13.

■

Teorema 3.37. *La línea de Sorgenfrey es un espacio D hereditario.*

Demostración. Del corolario 3.5 sabemos que la línea de Sorgenfrey es un espacio paracompacto. Y, de nuevo, por los ejemplos 1.105 sabemos que es un espacio ordenado generalizado; estas propiedades son hereditarias en la línea de Sorgenfrey ya que el ser espacio GO lo es para cualquier espacio topológico (se menciona en el teorema 8 de [3]) y la paracompacidad lo es por el corolario 3.7. Así, cualquier subespacio de la línea de Sorgenfrey es un espacio GO paracompacto, por lo tanto, por el teorema 3.13, cualquier subespacio de la línea de Sorgenfrey es un espacio D. Es decir, la propiedad D es hereditaria en la línea de Sorgenfrey. ■

Para concluir este capítulo a continuación probaremos que no sólo S, la línea de Sorgenfrey, tiene la propiedad de ser hereditariamente un espacio D, sino que también cualquier producto finito de S consigo mismo es un espacio D.

Convención 3.38. *Al espacio Euclidiano de n dimensiones con $n \in \mathbb{N}$ lo denotamos por E_n.*

Convención 3.39. *Sea $n \in \mathbb{N}$, denotaremos el producto de n copias de la línea de Sorgenfrey como S_n.*

Teorema 3.40. *[10] Cada subespacio de S_n es un espacio D.*

Para la demostración de este teorema necesitaremos algunas definiciones y tres lemas técnicos auxiliares, de los que omitimos la prueba por considerar que los detalles técnicos de estos escapan del enfoque tomado en este trabajo, sin embargo las pruebas de ellos se encuentran en [10].

Definición 3.41. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $U \subset S_n$, $p = (p_k) \in U$ e $i \in \mathbb{N}$ definimos $U(p,i) \subset U$ al que llamamos una* región *de U de la siguiente manera: sea $e = (e_k) \in E_n$ tal que $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ cumple que e_k es el mayor múltiplo entero de 2^{-i} que es menor a la correspondiente coordenada de p.*

Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $U(p,i) = \{q = (q_k) \in U : \forall k \in \{1,\dots,n\} : e_k < q_k < p_k\}$.

Observación 3.42. *Las regiones forman una base abierta para S_n.*

Demostración. Probemos que lo son para $n = 1$.

Sea $[a,b) = U$ un elemento de la base canónica de S, $i = 1$, elegimos $p = \frac{a+b}{2} \in U$, así e es el mayor múltiplo entero de 2^{-1} tal que es menor que $\frac{a+b}{2}$, si $e < a$, como

$2^{-x} < 2^{-y}$ cuando $y < x$ con $x, y \in \mathbb{N}$ y por cómo elegimos e, podemos elegir $i \in \mathbb{N}$ para que $a \leq e < \frac{a+b}{2} < b$ y así $U(p,i) \subset [a,b)$.

Por lo tanto, las regiones forman una base para S.

Ahora, como para $n \in \mathbb{N}$ el producto de n bases de un espacio topológico forma una base para el espacio producto de n copias de tal espacio, como se declaró en el teorema 1.56, entonces también tenemos una base para S_n. ■

Definición 3.43. *Una función f definida en U se llama* asignación centrada *en U si y sólo si para cada punto p en U se cumple que $f(p) = U(p,i)$ donde $U(p,i)$ es una región de U e $i \in \mathbb{N}$, el menor de tales $i \in \mathbb{N}$ es llamado el f-*índice *de p y se denota $i_{f(p)}$. Definimos, así, el f-*índice *de $M \subset U$ como el ínfimo del conjunto $\{i_{f(p)} : p \in M\}$ y lo denotamos $i_{f(M)}$.*

Lema 3.44. *Sea n un entero positivo mayor que 1, y supongamos que cada subespacio del producto topológico de menos de n copias de la línea de Sorgenfrey es un espacio D. Si f es una asignación centrada para U, un subespacio del producto topológico de n copias de la línea de Sorgenfrey y B es un subconjunto cerrado de U tal que ninguno de sus puntos en el interior del valor de f en otro punto en B, entonces hay un subconjunto $D \subset B$ discreto en U tal que $f(D)$ cubre B.*

Lema 3.45. *Sea n un entero positivo mayor que 1, y supongamos que f es una asignación centrada para U, subespacio del producto topológico de de n copias de la línea de Sorgenfrey.*

Si T es subconjunto de U cuyos puntos tienen un f-índice en común y si la cerradura de T en U está cubierta por los interiores de los f-valores de los puntos en T, entonces existe D, subconjunto numerable de T y discreto en U, tal que la unión de los interiores de los f-valores de los puntos en D es la unión de los interiores de los f-valores de los puntos en T

Lema 3.46. *Sea n un entero positivo mayor que 1, y supongamos que cada subespacio del producto topológico de menos de n copias de la línea de Sorgenfrey es un espacio D. Si f es una asignación centrada en U, subespacio del producto topológico de n copias de la línea de Sorgenfrey y M es un subconjunto cerrado de U que contiene un subconjunto T cuyos puntos tienen un f-índice común que no es mayor que el f-índice cualquier punto en $M \setminus T$, entonces hay un subconjunto de M, D discreto y cerrado en U tal que $f(D)$ cubre T.*

Demostración del teorema 3.40. Supongamos que el teorema es falso, sea n el menor entero positivo para el cual existe un subespacio U en el producto topológico de n copias de la línea de Sorgenfrey el cual no es un espacio D. Como la línea de Sorgenfrey sí es un espacio D hereditario por el teorema 3.37, tenemos que $n > 1$.

Sea g una asignación de vecindades para U tal que ningún discreto y cerrado D en U cumple que $g(D)$ cubre a U.

Como las regiones de U forman una base para U, podemos escoger para cada $p \in U$ un entero positivo i tal que $U(p,i)$ es subconjunto de $g(p)$ y definir $f(p)$ como

$U(p,i)$. f es asignación centrada en U tal que ningún discreto y cerrado D en U cumple que $f(D)$ cubre a U.

Sea $M(1) = U$ y $m(1)$ el menor entero en $i_f(M(1))$. Definimos $T(1)$ como el conjunto de puntos en $M(1)$ cuyo f-índice es $m(1)$. Por el lema 3.46 existe un subconjunto de $M(1)$, $D(1)$, discreto y cerrado en U tal que $f(D(1))$ cubre $T(1)$ y $f(D(1))$ no cubre U.

$M(2)$ es el cerrado $M(1) \setminus \bigcup f(D(1))$.

Sea $m(2)$ el menor entero en $i_f(M(2))$. Sea $T(2)$ el conjunto de puntos en $M(2)$ cuyo f-índice es $m(2)$, de nuevo, por el lema 3.46, existe $D(2)$, subconjunto discreto de $M(2)$ en U, tal que $f(D(2))$ cubre $T(2)$, $m(1) < m(2)$ y la unión de $f(D(1))$ y $f(D(2))$ cubre a todos los puntos de U cuyo f-índice no es mayor que $m(2)$. Esta unión no cubre U.

De esta manera, definimos $\{D(i) : i \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} f(D_i) \supset \{x \in U : i_f(\{x\}) \leq m(n)\}$ y
- $U \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} f(D_i) \neq \emptyset$.

Si $D = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D(i)$, entonces por construcción $f(D) \supset U$. Además D es discreto en U, pues para cada punto $d \in D$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $d \in D(i)$ y así existe una vecindad $V \subset U$ tal que $V \cap D(i) = \{d\}$; si $W = V \cap (U \setminus \bigcup\limits_{j\neq i} D(j))$, entonces W es un abierto en U tal que $W \cap D = \{d\}$. Además, D es cerrado en U, pues $Cl_U(D) = Cl_U(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D(i))$ y al ser $\{D(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia discreta, tenemos que $Cl_U(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D(i)) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Cl_U(D(i))$, como para cada $i \in \mathbb{N}$ $D(i)$ es cerrado, obtenemos la igualdad siguiente $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Cl_U(D(i)) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D(i) = D$.

Por lo tanto, f es una asignación centrada en U y D es un cerrado y discreto tal que $U \subset f(D)$ lo cual es una contradicción.

Concluimos así que cada subespacio de S_n es un espacio D. ■

CAPÍTULO 4

ESPACIOS METRIZABLES GENERALIZADOS Y LA PROPIEDAD D

Los espacios metrizables, junto con los espacios compactos, ocupan una posición central en la topología, ambas clases de espacios han sido generalizadas de numerosas y diversas maneras.

Los espacios metrizables generalizados se estudian para comprender mejor a los espacios metrizables, pero también para encontrar clases más amplias en las que resultados importantes sigan siendo válidos.

No existe un consenso sobre lo que debería ser un espacio metrizable generalizado, aunque Burke y Lutzer escribieron una lista de condiciones que podrían servir como definición, pero enfatizaron la dificultad de encontrar una lista de condiciones que sean aceptadas por todos [17]. Para los fines del presente trabajo un espacio topológico es un espacio metrizable generalizado si pertenece a una clase de espacios topológicos que contiene a la clase de los espacios metrizables.

En este capítulo revisamos resultados sobre la propiedad D en tres clases de espacios metrizables generalizados: los M-espacios, los p-espacios y los espacios semiestratificables. Comenzaremos hablando de la clase de los espacios semiestratificables, iniciando con la definición de los espacios en esta.

Definición 4.1. *Un espacio topológico X es semiestratificable si a cada abierto $U \in \tau_X$ se le puede asignar una sucesión $\{F(U,n)\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados de X tales que:*

- $\bigcup_{n\in\omega} F(U,n) = U$.
- *Si $U \subset V$, se cumple que $F(U,n) \subset F(V,n)$ para cada $n \in \omega$.*

Teorema 4.2. *Los espacios semiestratificables son espacios D.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico semiestratificable. Por la definición 4.1 para cada $U \in \tau$ podemos asignar una sucesión $\{F(U,n)\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados de X tales que:

- $\bigcup\limits_{n\in\omega} F(U,n) = U$
- $F(U,n) \subset F(V,n)$ cada que $U \subset V$ donde $\{F(V,n)\}_{n\in\omega}$ es la sucesión asignada a V.

Y sea $\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades para X. Para cada $n \in \omega$ definamos $\mathscr{U}_n = \{U_x : x \in F(U_x,n)\}$ y $X_n = \{x \in X : U_x \in \mathscr{U}_n\}$.

Antes de continuar con la prueba revisemos la siguiente observación.

Observación 4.3. *Notamos que sin pérdida de generalidad podemos considerar a $\{F(U,n)\}_{n\in\omega}$ una sucesión creciente de conjuntos. Esto definiendo por recursión finita nuevos $F(U,n)$ de la siguiente manera:*

- $\hat{F}(U,0) = F(U,0)$
- $\hat{F}(U,1) = F(U,0) \cup F(U,1) = \hat{F}(U,0) \cup F(U,1)$

  .

  .

  .
- $\hat{F}(U,n) = F(U,0) \cup F(U,1) \cup \ldots \cup F(U,n-1) \cup F(U,n) = \hat{F}(U,n-1) \cup F(U,n)$

Veamos que estos conjuntos siguen cumpliendo las propiedades que tenían los originales: $U \subset V$, de ahí que $F(U,n) \subset F(V,n)$, así $\hat{F}(U,n) = F(U,0) \cup F(U,1) \cup \ldots \cup F(U,n-1) \cup F(U,n) \subset F(V,0) \cup F(V,1) \cup \ldots \cup F(V,n-1) \cup F(V,n) = \hat{F}(V,n)$ y $\bigcup\limits_{n\in\omega} \hat{F}(U,n) = \bigcup\limits_{n\in\omega} (F(U,0) \cup F(U,1) \cup \ldots \cup F(U,n-1) \cup F(U,n)) = \bigcup\limits_{n\in\omega} F(U,n) = U$.

Continuando con la demostración, se cumple que $X_j \subset X_{j+1}$, ya que $F(U_x,j) \subset F(U_x,j+1)$, tenemos entonces que $X_j \subset X_{j+1}$. Además, $X = \bigcup\limits_{j<\omega} X_j$; es claro que $\bigcup\limits_{j<\omega} X_j \subset X$ pues son subconjuntos de X, también, si $x \in X$, sea U_x la vecindad asignada a x, como $U_x \in \tau$, existe $\{F(U,n)\}_{n\in\omega}$ tal que $U_x = \bigcup\limits_{n\in\omega} F(U,n)_{n\in\omega}$, entonces existe $n_0 \in \omega$ que cumple que $x \in F(U_x,n_0)$ y así $U_x \in \mathscr{U}_{n_0}$, lo que implica que $x \in X_{n_0} \subset \bigcup\limits_{j<\omega} X_j$, de ahí la igualdad.

Sea j_0 el menor elemento de ω tal que $\mathscr{U}_{j_0}$ (y por consecuencia X_{j_0}) es no vacío, (existe, pues $x \in X$ implica que existe U_x tal que $x \in U_x$ y $U_x = \bigcup\limits_{n\in\omega} F(U_x,n)$ es decir, existe $n_0 \in \omega$ para el que se cumple $x \in F(U_x,n_0)$ y esto implica que $\mathscr{U}_{n_0}$ es no vacío).

Vamos a ver que existe γ_0 un ordinal tal que podemos definir una sucesión $\{U_{x_\alpha}\}_{\alpha<\gamma_0}$ tal que para cada $\alpha < \gamma_0$, $U_{x_\alpha} \in \mathscr{U}_{j_0}$ y

i) $\alpha < \beta < \gamma_0$ implica $x_\beta \notin U_{x_\alpha}$

ii) $X_{j_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$.

Primero elegimos $x_0 \in F(U_x, j_0)$ para algún $x \in X_{j_0}$, nos fijamos en U_{x_0}. Si $X_{j_0} \subset U_{x_0}$ termina la construcción y si no, elegimos $x_1 \in X_{j_0} \setminus U_{x_0}$. Una vez que se tengan elegidos los x para un ordinal η. Si $X_{j_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha<\eta} U_{x_\alpha}$, entonces $\eta = \gamma_0$ y se termina la construcción. Si no, elegimos $x_\eta \in X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\eta} U_{x_\alpha}$. Así, aseguramos que si $\alpha < \beta < \gamma_0$, entonces $x_\beta \notin U_{x_\alpha}$ por la manera en la que construimos el conjunto de puntos en X_{j_0} y que $X_{j_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$, pues estamos cubriendo todas las x en X_{j_0}.

Y así, hemos construido $D_0 = \{x_\alpha : \alpha < \gamma_0\}$ y afirmamos que es un conjunto cerrado y discreto en X. Probémoslo:

Si $z \in \overline{D_0}$, $z \in \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$, esto porque si $x \in D_0$, entonces $x = x_\alpha$ para algún $\alpha < \gamma_0$, lo cual implica que $x \in U_{x_\alpha}$ y así, $x \in \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$, además $D_0 \subset F\left(\bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}, j_0\right)$ que es un cerrado, así que $D_0 \subset \overline{D_0} \subset F\left(\bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}, j_0\right) \subset \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$ y $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$ es un abierto.

Sea α_0 el menor elemento de γ_0 tal que $z \in U_{x_{\alpha_0}}$, entonces $V = U_{x_{\alpha_0}} \setminus F(\bigcup\limits_{\alpha<\alpha_0} U_{x_\alpha}, j_0)$ es una vecindad abierta de z y de x_{α_0}, z está en V pues está en $U_{x_{\alpha_0}}$ y no está en el conjunto que estamos quitando, x_{α_0} está ahí pues está en $U_{x_{\alpha_0}}$ y no está en el conjunto que estamos quitando por la condición i), así hay que probar ahora que ningún otro punto de D_0 está en V; para x_α con $\alpha < \alpha_0$, por la condición i), se cumple que $x_\alpha \notin U_{x_{\alpha_0}}$ y para x_α con $\alpha_0 < \alpha$, elegimos x_α tal que $x_\alpha \notin U_{x_{\alpha_0}}$. Así, V es tal que $V \cap D_0 = \{x_{\alpha_0}\}$, por lo tanto, $z = x_{\alpha_0}$ y así, z es elemento de D_0, esto implica que D_0 es cerrado. Lo anterior también muestra que D_0 es discreto.

Continuando, si $X'_0 = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$, sea j_1 el menor elemento de ω tal que $X_{j_1} \setminus X'_0 \neq \emptyset$ y sea $\hat{\mathscr{U}}_{j_1} = \{U_x \in \mathscr{U}_{j_1} : x \in X_{j_1} \setminus X'_0\}$, de nuevo por inducción transfinita elegimos $U_{x_\alpha} \in \hat{\mathscr{U}}_{j_1}, \alpha < \gamma_1$ tal que:

i) $\alpha < \beta < \gamma_1$ implica $x_\beta \notin U_{x_\alpha}$ y

ii) $X_{j_1} \setminus X'_0 \subset \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_1} U_{x_\alpha}$.

Y de nuevo tendremos un $D_1 = \{x_\alpha : \alpha < \gamma_1\}$ un subconjunto cerrado y discreto de X.

Y si $X'_1 = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_1} U_{x_\alpha}$ tenemos que $X_{j_1} \subset X'_0 \cup X'_1$, ya que cuando $x \in X_{j_1}$, si ocurre que $x \in X'_0$ esto es cierto y si no, quiere decir que $x \in X_{j_1} \setminus X'_0$, lo cual implica que $x \in \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_1} U_{x_\alpha} = X'_1$.

Antes de continuar notemos que $X_{j_0} \subset \bigcup\left\{U_x : x \in \bigcup\limits_{k=0}^{0} D_k\right\} = \bigcup\{U_x : x \in D_0\} = \bigcup\{U_{x_\alpha} : \alpha < \gamma_0\} = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma_0} U_{x_\alpha}$ por la condición i) y $X_{j_1} \subset \bigcup\{U_x : x \in \bigcup\limits_{k=0}^{1} D_k\} = \bigcup\{U_x : x \in D_0 \cup D_1\} = \bigcup\{U_{x_\alpha} : \alpha < \gamma_0 \text{ o } \alpha < \gamma_1\} = X'_0 \cup X'_1$, por la observación de la segunda construcción. También notamos que $D_1 \cap \left(\bigcup \left\{ U_x : x \in \bigcup_{k=0}^{0} D_k \right\} \right) = \emptyset$ pues $D_1 \cap X_0' = \emptyset$ ya que elegimos los puntos de D_1 de tal forma que $X_{j_1} \setminus X_0' \subset \bigcup_{\alpha<\gamma_1} U_{x_\alpha}$.

Luego, por inducción finita, podemos encontrar $j_i \in \omega$ y D_i tales que

1. $D_i \subset X_{j_i}$,

2. $X_{j_i} \subset \bigcup \left\{ U_x : x \in \bigcup_{k=0}^{i} D_k \right\}$ y

3. $D_{i+1} \cap \left(\bigcup \left\{ U_x : x \in \bigcup_{k=0}^{i} D_k \right\} \right) = \emptyset$

Para concluir, si $D = \bigcup_{i\in\omega} D_i$, entonces $\{U_x : x \in D\}$ cubre a X por 2., pues dado $x \in X$ tomamos el menor $n_0 \in \omega$ tal que $x \in X_{n_0}$, de los conjuntos X_n definidos al principio, después el mínimo j_i tal que $X_{n_0} \subset X_{j_i}$ y así, $x \in X_{j_i}$ concluimos que x pertenece a alguna U_{x_α} con $x_\alpha \in D_i \subset D$.

Sólo falta probar que D es un subconjunto cerrado y discreto de X. Para ver esto, sean $z \in X$ y n el entero más pequeño tal que z pertenece a alguna U_{x_α} con $x_\alpha \in D_n$, tomamos x_α el primer elemento tal que $z \in U_{x_\alpha}$.

Recordemos que $\bigcup_{k=0}^{n} D_k$ es un conjunto cerrado de X, entonces $V = (U_{x_\alpha} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} D_k\}) \cup \{x_\alpha\}$ es una vecindad de z, es abierto pues estamos intersectando dos abiertos y uniendo el único punto de U_{x_α} que hemos quitado, así que obtenemos un conjunto abierto. El punto z está ahí pues está en U_{x_α} y no está en ningún U_{x_β} con $x_\beta \in \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$, estamos quitando también D_n, pero si $z \in D_n$, como x_α es el primer punto para el cual $z \in U_{x_\alpha}$, entonces $z = x_\alpha$, sin embargo unimos su singular así que z seguiría en V. Y, explícitamente, $x_\alpha \in V$.

Además V no puede contener puntos de D distintos de x_α, V no contiene puntos de $\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$ (excepto x_α pues lo agregamos) pues es subconjunto de su complemento, y no puede contener puntos de $\bigcup_{k\in\omega\setminus\{0,1,\ldots,n\}} D_k$ pues $V \subset U_{x_\alpha}$ así que por 3. los D_i siguientes no tienen puntos de $\bigcup\{U_x : x \in D_k\}$. Así que V es tal que $V \cap D = \{x_\alpha\}$. Esto muestra que D es discreto y que D es la unión de una familia localmente discreta así, es cerrado en X. Por lo tanto, X es un espacio D. ■

Como todo espacio métrico es un espacio semiestratificable, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4. *Los espacios métricos son espacios D.*

Definición 4.5. *1. Definimos $St(S,\mathscr{U})$, la* estrella *de un conjunto S con respecto a la colección de conjuntos $\mathscr{U}$, como $St(S,\mathscr{U}) = \bigcup\{U \in \mathscr{U} : S \cap U \neq \emptyset\}$. Si $S = \{x\}$, escribimos $St(x,U)$.*

2. *Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ cubiertas de un conjunto X, la cubierta $\mathscr{U}$ es el* refinamiento estrella *de $\mathscr{V}$ si y sólo si para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $V \in \mathscr{V}$ tal que $St(U,\mathscr{U}) \subset V$.*

Definición 4.6. *Sea X un espacio topológico. Una sucesión de cubiertas abiertas de X, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$, es normal si y sólo si para cada $n \in \omega$, $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento estrella de $\mathscr{U}_n$.*

A continuación daremos la definición de M-espacio, sin embargo, por resultar más conveniente para nuestros fines, en este trabajo usaremos una equivalencia que se presenta como el lema 4.9.

Definición 4.7. *[18] Un espacio topológico X es un M-espacio si existe una sucesión normal $\{U_i\}$ de cubiertas abiertas de X tales que para cada $x \in X$ y cualquier sucesión $\{x_i\}$ en X, $\{x_i\}$ tiene un punto de acumulación en X cuando $x_i \in st(x,U_i)$.*

Teorema 4.8. *[22] Un espacio topológico X es un M-espacio si y solamente si existe una función casi perfecta y sobreyectiva $f : X \longrightarrow M$ con M un espacio metrizable.*

Corolario 4.9. *Si X es un espacio topológico paracompacto, entonces X es un M-espacio si y sólo si X es la imagen perfecta de un espacio métrico.*

Demostración. Sabemos que los espacios paracompactos y numerablemente compactos son compactos (teorema 5.1.20 de [12]) y que la preimagen perfecta de un espacio paracompacto es un espacio paracompacto (teorema 5.1.35 de [12]), así que el corolario se sigue del teorema 4.9. ■

Definición 4.10. *Un espacio completamente regular X es un p-*espacio *o espacio emplumado si existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n<\omega}$ de familias de subconjuntos abiertos en la compactación de Stone-Čech de X, βX, que cubren a X tales que para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $st(x,U_n) \subset X$. La sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ es llamada un plumaje de X.*

Teorema 4.11. *Los p-espacios (o M-espacios) paracompactos son espacios D.*

Demostración. Cuando X es un espacio paracompacto es espacio M si y sólo si X es un espacio p (corolario 3.20 de [13]) y esto si y sólo si X es la imagen inversa de un espacio metrizable bajo una función perfecta, así, el corolario 4.9 completa la prueba. ■

Teorema 4.12. *Recordemos que dado un espacio topológico X se verifican las siguientes afirmaciones:*

(1) Si X es numerablemente compacto y espacio D, X es compacto, como vimos en el teorema 2.9.

(2) Si X es numerablemente compacto y subparacompacto, X es compacto (teorema 3.5 de [8]).

Teorema 4.13. *Sea X un M-espacio, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *X es paracompacto.*

b) *X es espacio D.*

c) *X es subparacompacto*

d) *X es métrico refinable, es decir, para cada cubierta abierta de X, $\mathscr{U}$, existe un espacio métrico M y una función continua $f : X \longrightarrow M$ tal que $\{f^{-1}(y) : y \in M\}$ refina $\mathscr{U}$.*

Demostración. Sea X, M y $f : X \longrightarrow M$ como en el teorema 4.9.
Veamos:

a) $\Longrightarrow$ b)] Esta implicación es el teorema anterior, 4.11.

b) $\Longrightarrow$ a)] Las fibras de f son preimagenes de singulares (que son cerrados en M) bajo una función continua por lo que son cerrados en X que es un espacio D, así que las fibras son espacios D, además son numerablemente compactas, así que por (1) del teorema 4.12, son compactas, así, la función f es perfecta; el espacio M al ser métrico es paracompacto y la paracompacidad en invariante bajo preimagen de funciones perfectas, concluimos que X es paracompacto.

c) $\Longrightarrow$ b)] Ya que M es paracompacto y M-espacio por ser un espacio métrico, por el corolario 4.11, es espacio D.

Ahora, al ser las fibras de f numerablemente compactas y subparacompactas, por (2) del teorema 4.12, son compactas; por lo tanto, f es pefecta y así X es también espacio D al ser la imagen inversa del espacio D, M.

b) $\Longrightarrow$ c)] las fibras de f son subconjuntos cerrados de un espacio D, por lo tanto son espacios D, además son numerablemente compactas, por lo tanto son compactos de nuevo por (1) del teorema 4.12, por lo tanto, f es perfecta. Como M es metrizable es subparacompacto y la subparacompacidad es invariante bajo la imagen inversa de funciones perfectas así que X es subparacompacto como sabemos del teorema 2 de *A note on subparacompact spaces* de D. Buhagiar y S. Lin [7].

En las dos implicaciones restantes omitiremos las pruebas pues consideramos que los conceptos y técnicas que en ellas se usan se alejan suficiente de lo relacionado con espacios D en este trabajo; no obstante damos las referencias en donde encontrar tales demostraciones.

Que d) implica a) lo podemos ver del teorema 2.2 de [24]. Y el teorema 1 de [23] prueba que a) implica d).

Así, concluimos la prueba.

■

CAPÍTULO 5

FAMILIAS DE CONJUNTOS Y LA PROPIEDAD D

Frecuentemente nos es útil ver a un conjunto como la unión de otros. En este capítulo exploramos algunos resultados relacionados con la propiedad D, cuando conjuntos como el espacio topológico o la base son tales que resultan de una unión de este tipo. Antes de entrar de lleno en esas propiedades necesitamos recordar algunos conceptos.

Definición 5.1. *Sea X un espacio topológico, decimos que una familia $\mathscr{F}$ es* punto-numerable *si para cada $x \in X$ se cumple que existen a lo más una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{F}$ que tienen a x como elemento.*

Definición 5.2. *Sea X un espacio topológico. Una base $\mathscr{B}$ es* punto-numerable *si para cada $x \in X$ se cumple que existen a lo más una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{B}$ que contienen a x.*

Definición 5.3. *Sea X un espacio topológico. Una base $\mathscr{B}$ es* σ-ajena *si es unión numerable de bases ajenas formadas por subconjuntos no vacíos, es decir $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $A, B \in \mathscr{B}_n$, entonces $A \cap B = \emptyset$.*

Definición 5.4. *Sea X un espacio topológico. Una base $\mathscr{B}$ es* σ-discreta *si es unión numerable de bases discretas formadas por subconjuntos no vacíos, es decir $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ se cumple que existe una vecindad de x tal que intersecta a lo más a un elemento de $\mathscr{B}_n$.*

Definición 5.5. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se dirá que A es localmente finito si para todo $x \in X$ existe $V \in \mathscr{V}(x)$ que tiene a lo más una cantidad finita de elementos de A, es decir $\{\{x\} : x \in A\}$ es una familia localmente finita.*

Teorema 5.6. *Sean X espacio topológico de cardinalidad κ y ϕ una asignación de vecindades. Si la familia $\phi(X)$ es punto-numerable, entonces existe un subconjunto localmente finito en X, $D \subset X$ tal que $X = \bigcup_{d \in D} \phi(d)$.*

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $\Phi_x = \{U \in \phi(X) : x \in U\}$. Como $\phi(X)$ es punto-numerable, cada Φ_x es numerable, así que para cada $x \in X$ podemos escribir $\Phi_x = \{U_x(l) : l \in \mathbb{N}\}$ y también ordenando a X podemos escribirlo como $X = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ con γ un ordinal y $|\gamma| = \kappa$. Por recursión transfinita definiremos subconjuntos numerables D_α.

- **Paso** 0. Sea $D_0 = \{x_0\}$
- **Paso** α. Supongamos que para cada $\beta < \alpha$, D_β ya está definido. Construiremos D_α por recursión finita.

  Durante la recursión finita, una vez que elijamos un d_n en el paso n, necesitaremos regresar a d_n infinitas veces. Para asegurar que d_n es considerado las veces necesarias acordamos regresar a él en los pasos p^n donde p es un número primo.

  - *sub-paso 1.* Tomemos $d_1 = x_\eta$ donde $\eta = min\{\varepsilon < \gamma : x_\varepsilon \notin W$ y $W = \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta\}\}$. Si no existe tal d_1, $D_\alpha = \emptyset$ y terminamos ambas construcciones.
  - *sub-paso n.*
    a) Si n es divisible por al menos dos números primos distintos. Sea $d_n = x_\eta$ donde $\eta = min\{\varepsilon < \gamma : x_\varepsilon \notin W \cup \phi(d_1) \cup ... \cup \phi(d_{n-1})\}$.
    b) Si $n = p^m$ para algún primo p y un entero $m \geq 1$, tomamos el primer $U \in \Phi_{d_m}$ que satisface el siguiente requisito (α, n):
    Existe $d_n \in X \setminus (W \cup \phi(d_1) \cup ... \cup \phi(d_{n-1}))$ tal que $U = \phi(d_n)$.
    Sin importar si d_n existe o no, nos movemos al siguiente paso de la recursión finita.

  Sea D_α el conjunto de todos los d_n definidos en el proceso de sub-recursión.

Si $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha < \gamma\}$, probaremos que $X = \bigcup\limits_{d \in D} \phi(d)$. Evidentemente, $\bigcup\limits_{d \in D} \Phi(d) \subset X$, así que consideremos $x_\alpha \in X$ para algún $\alpha < \gamma$. Probaremos que $x_\alpha \in \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\xi : \xi \leq \alpha\}\}$.

La prueba de esto la haremos por inducción transfinita. Para $\alpha = 0$, el conjunto $\bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\xi : \xi \leq \alpha\}\}$ es en realidad $\left\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\xi : \xi \leq 0\}\right\}$; sabemos que $\phi(x_0)$ tiene a x_0 como elemento por ser ϕ asignación de vecindades. Ahora supongamos que si $x_0 \in \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\xi : \xi \leq \alpha\}\}$ la fórmula anterior se satisface para cada ordinal $\beta < \alpha$, y si $x_\alpha \notin \phi(d)$ para cada $d \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$, entonces $x_\alpha \notin W = \bigcup\limits_{d \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta} \Phi(d)$, esto implica que $x_\alpha = d_1 \in D_\alpha$, así, $x_\alpha \in \Phi(d_1) \subset \bigcup\{\Phi(d) : d \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta\}$.

Ahora veamos que D es localmente finito en X. Sean $x \in X$ y α el primer ordinal tal que $x \in \bigcup \phi(D_\alpha)$ y sea n el primer sub-paso del paso α tal que $x \in \phi(d_n)$.

Por la construcción $\phi(d_n)$ separa a x de todos los $d \in D$ escogidos después del sub-paso n del paso α (ya que después tomamos puntos que no han sido cubiertos).

Como sólo hay una cantidad finita de d escogidos en el paso α antes de d_n, si probamos que x puedes ser separado de $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$ esto probaría que D es localmente finito.

Probemos que $\phi(d_n)$ no intersecta a $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$. Supongamos que sí, entonces existe $d_m \in D_\beta$, para algún $\beta < \alpha$, tal que $d_m \in \phi(d_n)$ y así, $\phi(d_n) \in \Phi_{d_m}$.

Este elemento $d = d_m$ fue elegido en algún sub-paso m del paso β. Entonces en cada subpaso p^m con p primo $\phi(d_n(\alpha))$ satisface el requisito (β, p^m) (como en b) del sub-paso n).

Y algún p^m debe ser el primero para el que se satisface, así, $\phi(d_n(\alpha)) \in \Phi_{d_m}$ y $U = \phi(d_n(\alpha)) = \phi(d^{p^m})$.

Por lo tanto, $x \in \phi(d^{p^m})$, lo cual sería una contradicción, pues entonces x sería cubierto en el paso $\beta < \alpha$.

Y así, $\phi(d_n(\alpha))$ separa a x de todos los d escogidos antes del paso α.

Por lo tanto D satisface la conclusión del teorema.

■

Teorema 5.7. *Todo espacio con una base $\mathscr{B}$ punto-numerable es un espacio D.*

Demostración. Sean X un espacio topológico con $\mathscr{B}$ una base punto-numerable y ϕ una asignación de vecindades para X. Como $\mathscr{B}$ es base de X, para cada $x \in X$ podemos elegir $\psi(x) \in \mathscr{B}$ tal que $x \in \psi(x) \subset \phi(x)$. Así ψ es una asignación de vecindades para X y la familia $\psi(X)$ punto-numerable pues $\mathscr{B}$ es punto-numerable.

Por el teorema 5.6, existe un subconjunto localmente finito (o cerrado y discreto) D, en X tal que $\psi(D)$ cubre X y así $\phi(D)$ también cubre X. Por lo tanto X es un espacio D. ■

Corolario 5.8. *Si un espacio regular X es la unión de una familia numerable γ de subespacios densos y metrizables, entonces X es un espacio D.*

Demostración. Sea γ una familia numerable de subespacios de X que son densos y metrizables tal que $X = \bigcup\gamma$. Sabemos que un espacio es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-discreta (teorema 1.97) además, una base σ-discreta es también σ-ajena; pues de no serlo existirían al menos dos elementos de la base que se intersectan, eso nos diría que para cualquier vecindad de cada punto en tal intersección esa vecindad intersecta al menos a esos dos elementos, lo cual contradice que la base sea σ-discreta. Por lo tanto cada $Y \in \gamma$ tiene una base $\mathscr{B}_Y$ que es σ-ajena.

Para cada $V \in \mathscr{B}_Y$, fijamos a un abierto $U(V)$ de X tal que $U(V) \bigcap Y = V$ (por ser V abierto en Y, existe tal $U(V)$). Para cualesquiera elementos disjuntos V_1 y V_2 de $\mathscr{B}_Y$, los conjuntos $U(V_1)$ y $U(V_2)$ son disjuntos porque Y es denso en X pues si $U(V_1) \cap U(V_2) \neq \emptyset$, al ser un abierto no vacío en X, como Y es denso, intersecta a Y y por lo tanto $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, la familia $\mathscr{P}_Y = \{U(V) : V \in \mathscr{B}_Y\}$ es σ-ajena también.

Además, ya que X es regular, para cada $y \in Y$, la familia $\mathscr{P}_Y$ contiene una base local de X en y, así que $\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_Y : Y \in \gamma\}$ es una base σ-ajena de X. Para aplicar el teorema 5.7 basta notar que para cada $x \in X$ y cada $Y \in \gamma$ existen a lo más una cantidad numerable de elementos en $\mathscr{P}$ tienen a x como elemento, de tal manera que $\mathscr{P}$ es punto-numerable para X.

■

Finalizaremos este capítulo probando el siguiente teorema.

Teorema 5.9. *Suponga que $X = \bigcup\{X_i : i = 1, ..., n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si X es regular y X_i tiene una base σ-ajena de abiertos en X, para cada $i = 1, ..., n$, entonces X es espacio D.*

Para probar este resultado necesitamos dos resultados técnicos.

Lema 5.10. *Sea Z espacio topológico tal que $Z = \bigcup\{X_i : 1, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_i = cl_Z(X_1) \cap cl_Z(X_i) \cap (X_1 \cup X_i)$, para cada $i = 2, ..., n$, entonces $Z_1 = \bigcup\{Y_i : i = 2, ..., n\}$ es cerrado en Z.*

Demostración. Sea $y \in cl(Z_1)$, entonces $y \in cl(Y_i)$ para algún i con $2 \leq i \leq n$, recordando que para A y B subconjuntos de un espacio topológico $cl(A \cap B) \subset cl(A) \cap cl(B)$, tenemos que: $y \in cl(cl(X_1) \cap cl(X_i) \cap (X_1 \cup X_i)) \subset cl(X_1) \cap cl(X_i)$, entonces $y \in cl(X_1)$ y $y \in cl(X_i)$. También $y \in X_k$ para algún $1 \leq k \leq n$.

Consideramos dos casos:

- Si $k = 1$, entonces $y \in Y_i = cl(X_1) \cap cl(X_i) \cap (X_1 \cup X_i) \subset Z_1$.
- Si $2 \leq k \leq n$, entonces $y \in cl(X_1) \cap cl(X_k) \cap ((X_1 \cup X_k)) = Y_k \subset Z_1$.

Por lo tanto $y \in Z_1$. En consecuencia Z_1 es cerrado en Z.

■

Lema 5.11. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si $X = Y \cup Z$, donde los subespacios Y y Z tienen bases σ-ajenas (en sí mismos) y X es regular, entonces el subespacio $cl_Z(Y) \cap cl_Z(Z)$ también tiene una base σ-ajena.*

Demostración. Fue establecido en la prueba del teorema 1.1 de la referencia [21] ■

Demostración del Teorema. 5.9. Haremos la prueba por inducción finita.

- Para n = 1 se cumple pues toda base σ-ajena es punto numerable y por el teorema 5.7, todo espacio con una base punto-numerable es un espacio D.
- Supongamos ahora que se cumple para cualquier cantidad de subespacios menor a n. Para cualesquiera i y j tales que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ e $i \neq j$, sea $Y_{i,j} = cl(X_i) \cap cl(X_j) \cap (X_i \cup X_j)$. Por el lema 5.10, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto definido como $Z_j = \bigcup\{Y_{i,j} : i \neq j, 1 \leq i \leq n\}$ es cerrado en X. Además, tanto X_i como X_j tienen bases σ-ajenas, así por el lema 5.11 $cl(X_i) \cap cl(X_j)$

también tiene una y $cl(X_i)\cap cl(X_j)\cap(X_i\cup X_j)\subset cl(X_i)\cap cl(X_j)$, así que $Y_{i,j}$. también tiene una base σ-ajena.

De esta forma Z_j es la unión de menos de n espacios con bases σ-ajenas. Por la hipótesis de inducción Z_j es un espacio D, para cada $j=1,...,n$, por lo tanto, como cada Z_j es cerrado en X, el subespacio $Z=\bigcup\{Z_j : j=1,...,n\}$ de X es un espacio D por el teorema 2.33.

Ahora consideremos la familia $\mu=\{V_i : 1\le i\le n\}$ donde $V_i=X_i\setminus Z$. Notemos que si $x\in V_i$ con $i\neq j$, entonces $x\in X_i$ y $x\notin Z$ así que, en caso de que $x\in cl(V_j)$ se tendría que $x\in X_i\cap cl(V_j)\cap(X_i\cup X_j)\subset Y_{i,j}\subset Z$ lo cual no puede ocurrir; por lo tanto $x\notin cl(V_j)$ lo que implica que $x\notin V_j$ y esto implica que $V_i\cap V_j=\emptyset$ para cada $i\neq j$. Además, dado que $X\setminus Z$ es abierto y $V_i=(X\setminus Z)\cap X_i$, entonces V_i es abierto así que concluimos que μ es una familia de conjuntos abiertos y ajenos por pares. Como, por hipótesis, cada X_i tiene una base σ-ajena, entonces $X\setminus Z=\bigcup(X_i\setminus Z)$ también la tiene, lo que implica que $X\setminus Z$ es un espacio D.

Por lo tanto como $X=Z\cup(X\setminus Z)$, Z es cerrado, $X\setminus Z$ es abierto y ambos son espacios D concluimos, por el teorema 2.30, que X es un espacio D.

■

Corolario 5.12. *Si X es un espacio regular y es la unión de una familia finita de subespacios metrizables, entonces X es un espacio D.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alas, O.T., Junqueira, L.R. and Wilson, R.G., “Dually discrete spaces”, *Topology and its Applications*, vol. 155, pp. 1420–1425, 2008.

[2] Alas,O.T., Tkachuk,V.V. and Wilson,R.G., “Addition Theorems, D-spaces and dually discrete spaces”, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 50, no. 1, pp. 113–124, 2009.

[3] Bennet, H.R. and Hosobuchi, M., “Quasi-G_δ-diagonals and weak σ-spaces in GO-spaces”, *Tsukura J. Math.*, vol. 18, no. 2, pp. 497–503, 1994.

[4] Bešlagić, A., “Normality on products”, *The work of Mary Ellen Rudin, Madison, WI 1991, en: Ann. New York Acad. Sci*, vol. 705, pp. 17–46, 1993.

[5] Borges, C.R. and Wehrly, A.C., “A study of D-spaces”, *Topology Proceedings*, vol. 16, pp. 7–15, 1991.

[6] ——, “Correction: Another study of D-spaces”, *Questions and answers in Gen. Topology*, vol. 16, pp. 77–78, 1998.

[7] Buhagiar, D. and Lin, S., “A note on subparacompact spaces”, *Matematički Vesnik*, no. 52, pp. 119–123, 2000.

[8] Burke, D.K., “On Subparacompact Spaces”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 23, no. 3, pp. 655–663, 1969.

[9] Casarrubias, F. y Tamariz, A., *Elementos de Topología General*. Instituto de Matemáticas, 2019, ISBN: 9786073017800.

[10] De Caux, P., “Yet Another Property of the Sorgenfrey Line”, *Topology Proceedings*, vol. 6, pp. 31–34, 1981.

[11] Dugundji, J., “Second-countable Spaces; Lindelöf Spaces”, In. Topology. Allyn and Bacon, 1966, ISBN: 0-205-00271-4.

[12] Engelking, R.,
General Topology, revised and completed edition.
Berlin, Heldermann, 1989,
ISBN: 3-88538-006-4.

[13] Gruenhage, G.,
"Generalized Metric Spacess",
In.
Handbook of Set-Theoretic Topology. Elsevier Science Publishers B.V., 1984,
ISBN: 0444 86580 2.

[14] ——, "A survey of D-spaces",
Contemporary Mathematics, vol. 532, pp. 13–18, 2011.

[15] Hernández Hernández, F.,
Teoría de conjuntos, 3a. edición.
Aportaciones Matemáticas, 2011,
ISBN: 978-607-02-2276-4.

[16] Hodel, R. E.,
"Cardinal Functions I",
In.
Handbook of Set-Theoretic Topology. Elsevier Science Publishers B.V., 1984,
ISBN: 0444 86580 2.

[17] ——, "A History of Generalized Metrizable Spaces",
In.
Handbook of the History of General Topology. Springer, Dordrecht, 1998,
Vol. 2,
ISBN: 978-0-7923-5030-9.

[18] Lin, S. and Yun, Z.,
Generalized Metric Spaces and Mappings.
Atlantis Press, 2016,
ISBN: 978-94-6239-215-1.

[19] Lutzer, D.J.,
On generalized ordered spaces.
Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1971.

[20] ——, "Ordered topological spaces",
Surveys in General Topology, pp. 247–295, 1980.

[21] Michael, E. and Rudin, M.E., "Another note on Eberlein compacts",
Pacific J. Math. Soc., vol. 72, no. 2, pp. 497–499, 1977.

[22] Morita, K., "Products of normal spaces with metric spaces",
No. 154, pp. 365–382, 1964.

[23] Ponomarev, V.I., "On paracompact and finally-compact spaces",
Soviet Math., vol. 2, pp. 1510–1512, 1961.

[24] Reed, G.M. and Zenor, P.L., "Metrization of Moore spaces and generalized manifolds",
Fund. Math., no. 91, pp. 203–210, 1976.

[25] Steen, L.A. and Seebach, J.A.,
Counterexamples in Topology 2nd ed.
Springer-Verlag, 1978,
ISBN: 978-0-387-90312-5.

[26] van Douwen, E.K., "A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples",
Topology Appl., vol. 3, no. 47, pp. 179–201, 1992.

[27] van Douwen, E.K. and Pfeffer, W., "Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces",
Pacific J. Math., no. 81, pp. 371–377, 1979.

[28] van Dowen, E.K. and Lutzer, D.J, "A note on paracompactness in generalized ordered spaces",
Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 125, no. 4, pp. 1237–1245, 1997.