BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

"LA CATEGORÍA DE RETÍCULAS CUÁNTICAS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

ANA MARGARITA CARRANZA LOAIZA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. HUGO JUÁREZ ANGUIANO
DR. IVÁN MARTÍNEZ RUIZ

16 de agosto de 2013

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para hacer un reconocimiento a todas las personas que me han acompañado en esta compleja labor ofreciéndome el apoyo necesario para continuar. A mis padres, a quienes les estoy profundamente agradecida por la educación que me brindaron y de la cual me siento muy orgullosa, a mis hermanos porque nuestra relación de complicidad es enteramente insustituible, a mis amigos y a Jorge Herrera, a quien agradezco particularmente por su paciencia para ofrecerme siempre el aterrizaje de las ideas.

También debo expresar mi gratitud a los profesores que participaron en mi formación científica y a quienes les debemos que esta facultad siga andando, de manera muy especial a los profesores Ángel Contreras Pérez y Manuel Ibarra Contreras. Debo agradecer particularmente a mis directores de tesis, Iván y Hugo, por ofrecerme sus ideas y el indispensable apoyo para elaborar una investigación seria. Por supuesto debo reconocer el esfuerzo de mis sinodales, Agustín Contreras, David Villa y Francisco Marmolejo, y agradecerles que se hayan tomado el tiempo de revisar mi tesis, en especial a Francisco a quien le debo la elegancia y simplicidad de algunas demostraciones. También doy gracias a los autores de los artículos que fueron la base de esta tesis, especialmente a la profesora Beatriz Rumbos por hacernos el favor de proporcionarnos uno de ellos.

Resolver problemas y teorizar sobre ellos

Gian-Carlo Rota[1]

Los matemáticos se pueden dividir en dos clases: los que resuelven problemas y los que teorizan sobre ellos. La mayoría de los matemáticos es una mezcla de ambos tipos.

Para quienes resuelven problemas, el mayor logro matemático consiste en solucionar un problema que se haya dado por imposible. Poco importa si se trata de una solución chapucera; lo único que cuenta es que pueda ser la primera y que la demostración sea correcta. Cuando el resolvente de problemas da con la solución, pierde para siempre el interés por ella y oirá otras demostraciones nuevas y más simples con aires de condescendencia teñidos de aburrimiento.

Quien se dedica a resolver problemas es, en el fondo, un conservador. Para él las matemáticas consisten en una sucesión de retos a los que enfrentarse, una carrera de obstáculos consistentes en problemas. Los conceptos matemáticos necesarios para formular problemas matemáticos se aceptan tácitamente como eternos e inmutables.

La exposición matemática se considera una tarea inferior. Las teorías nuevas se reciben con grandes recelos, como intrusos que deben demostrar su valía planteando problemas provocadores antes de merecer atención. Al resolvente de problemas le molestan las generalizaciones, en especial aquellas cuyo triunfo pudiera trivializar la solución de uno de sus problemas.

Quienes resuelven problemas son un modelo que anhelan imitar los jóvenes matemáticos en ciernes. Cuando exponemos ante el público las conquistas de las matemáticas, nuestros flamantes héroes son los que resuelven problemas.

Para el teórico, el logro supremo de las matemáticas estriba en una teoría que de repente arroje luz sobre algunos fenómenos incomprensibles. El triunfo de las matemáticas no consiste en resolver problemas, sino en trivializarlos. El instante de gloria llega con el descubrimiento de una teoría nueva que, sin resolver ninguno

[1] Este fragmento aparece en *Demostrando a Darwin. La biología en clave matemática* de Gregory Chaitin, con la traducción de Dulcinea Otero-Piñeiro, Tusquets Editores México, 2013, págs. 15-17, extraído de *Indiscrete Thoughts* de Gian-Carlo Rota.

de los viejos problemas, los convierta en irrelevantes.

El teórico es, en el fondo, un revolucionario. Los conceptos matemáticos heredados del pasado se contemplan como ejemplos imperfectos de otros más generales pero aún por descubrir. La exposición matemática se considera un cometido más difícil que la investigación matemática.

Para el teórico, las únicas matemáticas que sobrevivirán serán las definiciones. Las grandes definiciones constituyen la aportación de las matemáticas al mundo. Los teoremas se toleran como un mal necesario porque desempeñan un papel de apoyo (o más bien, tal como admitiría a regañadientes un teórico, un papel esencial) para comprender las definiciones.

Es habitual que a los teóricos les cueste conseguir el reconocimiento de la comunidad matemática. Su consuelo reside en la certeza, confirmada o no por la historia, de que sus teorías perdurarán mucho tiempo después de que los problemas del día hayan caído en el olvido.

Si fuera ingeniero espacial y buscara un matemático para enviar un cohete al espacio, elegiría un resolvente de problemas. Pero si buscara un matemático para darle una buena formación a un hijo, optaría sin dudarlo por un teórico.

Introducción

Las retículas cuánticas surgen como una generalización de retículas ortomodulares y cuantales, dos conceptos que emergieron de la mecánica cuántica, es decir, de la lógica cuántica.

El concepto de lógica cuántica tiene su origen en 1936 cuando Garret Birkhoff y John von Neumann en su artículo "The logic of Quantum Mechanics" [3] notan que las proposiciones de dicha lógica se comportan como la retícula de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. Se observó que ese tipo de retículas proponían una nueva fundamentación para la lógica de la mecánica cuántica y a retículas de este tipo se les llamó retículas ortomodulares.

Debido a que en una retícula ortomodular la implicación definida de manera clásica no cumplía con ciertos criterios exigidos para una deducción por falta de distributividad, se utilizó una nueva implicación cuántica análoga a la clásica, la implicación de Sasaki. Así, con la conjunción cuántica & sugerida por Finch [8], podemos formular un sistema deductivo en la retícula ortomodular, de tal forma que se prueben teoremas de robustez y completitud en el sistema lógico cuántico resultante.

Por otra parte, de la mecánica cuántica y los locales también emergieron otras estructuras, los cuantales, cuando Mulvey[2] propuso usarlos para estudiar las C*-álgebras no conmutativas, además de que suponían podrían constituir los fundamentos para la mecánica cuántica. Los cuantales consistían en agregar una operación adicional no conmutativa a una retícula completa.

Este trabajo está basado en los artículos de Leopoldo Román y Beatriz Rumbos sobre lógica cuántica y retículas ortomodulares [16],[17],[18], principalmente en "Quantic Lattices", donde ellos proponen generalizar dos estructuras ya conocidas, cuantales y retículas ortomodulares.

Así, las retículas cuánticas funcionan como el puente para conocer, extender y transportar propiedades a retículas ortomodulares ya conocidas en cuantales, la estructura con mayor desarrollo en ese momento. La sorpresa fue que encontraron

[2]Para una exposición detallada sobre este tema se puede consultar la bibliografía que aparece en [20].

una tercera estructura completamente algebraica, que había tenido su origen de manera muy distinta a las anteriores, en cuanto a su independencia de la mecánica cuántica, pero que también cabía dentro de retículas cuánticas, la retícula de prerradicales de un anillo.

Las retículas de prerradicales constituyen un campo de estudio vigente en el área de teoría de anillos. Mediante las retículas cuánticas podemos conseguir una línea para desarrollar nuestra investigación, por ejemplo, sobre nociones de proyectividad e inyectividad ya conocidas en cuantales, como lo exponen Li Yong-ming, Zhou Meng y Li Zhi-hui en [24].

Acerca de la conjunción cuántica & en retículas ortomodulares, cabe mencionar que recientemente ha surgido el estudio de distintas operaciones “producto” en una retícula completa y dicha operación juega un papel fundamental en las estructuras mencionadas. Su importancia en retículas ortomodulares es inmediata debido al papel decisivo que desempeña para la formulación de un sistema deductivo lógico cuántico. Sin embargo, como veremos, en prerradicales podemos tener además una operación coproducto y obtener dos retículas cuánticas distintas.

Cabe aclarar que nuestro objetivo no es en manera alguna el estudio de conceptos cuánticos en el ámbito de la mecánica cuántica, aún cuando el sistema que estudiamos haya emergido de ella, nuestro interés está puesto en la estructura de las retículas cuánticas en sí mismas, independientemente de la interpretación física que puedan llegar a tener. Incluso, tampoco es de nuestro interés la discusión acerca de si la lógica cuántica es en verdad una lógica, o preguntas de caracter filosófico como la cuestión de si es la lógica más apropiada para el razonamiento[3].

En el capítulo de preliminares exponemos el concepto de retícula en términos categóricos así como su enfoque algebraico. En el capítulo de retículas ortomodulares hacemos la exposición de dicha estructura, puntualizando las dos operaciones introducidas con el propósito de obtener un sistema deductivo, y por supuesto exhibimos el ejemplo de los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. En el capítulo de cuantales estudiamos las propiedades más relevantes para el estudio de dicha estructura, los morfismos entre cuantales y los cuantales como categoría

[3]Esta cuestión ya fue examinada por Hilary Putnam y puede revisarse el artículo “Is logic empirical?” de Guido Bacciagaluppi en *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic*, 49-78, (2009).

de álgebras. En el capítulo 4 describimos la estructura de retícula de los prerradicales, especificando sus átomos y coátomos, y estableciendo las propiedades del anillo R en términos de la estructura R-Pr. Las tres estructuras expuestas hasta aquí constituyen una retícula completa con una operación adicional, en el capítulo de retículas cuánticas lo que se propone es absorber las características comunes a cada una de ellas y generalizarlas en la categoría de retículas cuánticas. Finalmente en el Apéndice, hemos añadido el contexto base sobre el cual trabajaremos, la Teoría de Categorías y algunos conocimientos esenciales de Lógica para hacer comprensible el trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Retículas

En esta sección expondremos los conceptos que preparan el terreno para las secciones posteriores. Revisaremos las definiciones más comunes de retícula, entre ellas la de enfoque categórico e interpretamos algunas nociones categóricas en una retícula.

Definición 1.1. *Una **retícula** es un conjunto no vacío A con dos elementos distinguidos 0 y 1 y dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ tal que para todo $a, b, c \in A$:*

1. $a \vee b = b \vee a$ *y* $a \wedge b = b \wedge a$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ *y* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
3. $a \vee a = a = a \wedge a$
4. $0 \vee a = a = 1 \wedge a$
5. ***Absorción:***$a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$.

Observación 1.2. Para todo $a, b \in A : a \vee b = b$ si y sólo si $a \wedge b = a$.
En efecto, supongamos que $a \vee b = b$, entonces $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$ por la propiedad de absorción. Análogamente, si $a \wedge b = a$ entonces $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$.

Ejemplo 1.3. Dado $X \in \mathcal{U}$, $(\mathbb{P}(X), \cap, \cup)$ es una retícula.

Observación 1.4. Dada una retícula $(A, \vee, \wedge)$ podemos inducir su conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$, basta con definir la relación de orden $\leq$ como sigue. Para cada a,$b \in A$:

$$a \leqslant b \text{ si y sólo si } a \wedge b = a.$$

Equivalentemente podemos definirla como $a \vee b = b$.
La reflexividad de $\leq$ es clara por la propiedad (3) de la definición de retícula. Ahora supongamos que $a, b, c \in A$ y que $a \leq b$ y $b \leq a$. Esto implica que $a \wedge b = a$ y $b \wedge a = b$. Por tanto

$$a = a \wedge b = b \wedge a = b.$$

Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a.$$

Por tanto $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además 0 es el elemento mínimo y 1 el elemento mínimo del orden cuando 0 y 1 son los elementos distinguidos de la retícula.
Además, de $a = a \wedge (a \vee b)$ y $b = b \wedge (a \vee b)$ tenemos que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$. Ahora si $a \leq c$ y $b \leq c$ entonces $a \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$ y $b \vee c = (b \wedge c) \vee c = c$, luego $(a \vee c) \vee (b \vee c) = c \vee c = c$ entonces $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$ y tenemos por la ley de absorción $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c] = a \vee b$. Así $a \vee b \leq c$ y por tanto $a \vee b = \sup(a, b)$, el supremo de a y b. Con un razonamiento análogo tenemos que $a \wedge b = \text{ínf}(a, b)$ el ínfimo de a y b.
Inversamente, si tenemos un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ con elementos máximo 1 y mínimo 0 y para todo $a, b \in A$ existen $\sup(a, b)$ e $\text{ínf}(a, b)$, entonces $(A, \vee, \wedge)$ es una retícula donde 0 y 1 son los elementos distinguidos y además:

$$a \vee b = \sup(a, b) \quad y \quad a \wedge b = \text{ínf}(a, b)$$

La conmutatividad se cumple trivialmente pues

$$\text{ínf}(a, b) = \text{ínf}(b, a) \text{ y } \sup(a, b) = \sup(b, a).$$

Veamos la asociatividad. Sean $a, b, c \in A$. Como $a \wedge (b \wedge c) \leq a$ y $a \wedge (b \wedge c) \leq b \wedge c \leq b$ entonces $a \wedge (b \wedge c) \leq a \wedge b$ y como también se tiene que $a \wedge (b \wedge c) \leq b \wedge c \leq c$ entonces

$$a \wedge (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \wedge c. \tag{1.1}$$

Por otra parte, como $(a \wedge b) \wedge c \leq c$ y $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq b$ entonces $(a \wedge b) \wedge c \leq b \wedge c$ y como $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq a$ tenemos que

$$(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge (b \wedge c) \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) por la propiedad antisimétrica del orden $\leq$ tenemos que

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

La prueba de la asociatividad de $\vee$ es análoga a ésta utilizando las propiedades de supremo.
La idempotencia también es clara pues $\sup(a, a) = a = \inf(a, a)$. Para la propiedad de absorción basta con notar que $a \wedge b \leq b$ implica que $(a \wedge b) \vee b = b$, y como $a \leq a \vee b$ entonces $a \wedge (a \vee b) = a$.

Así tenemos una definición de retícula equivalente a la anterior usando el concepto de conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.5. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(A, \leq)$ *con elementos máximo y mínimo es una retícula si y sólo si para cada* $a, b \in A$ *existen* $\inf(a, b)$ *y* $\sup(a, b)$ *en* A*.*

Observación 1.6. Dado $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, al elemento mínimo de A se le denota comúnmente por 0 y al elemento máximo por 1.

Observación 1.7. Sean $(A, \vee, \wedge)$ una retícula y $a, b, c \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:

- $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$
- $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$
- Si $a \leqslant b, a \leqslant c$ entonces $a \leqslant b \wedge c$
- Si $a \leqslant c, b \leqslant c$ entonces $a \vee b \leqslant c$
- Si $a \leqslant c, b \leqslant d$ entonces $a \vee b \leqslant c \vee d$ y $a \wedge b \leqslant c \wedge d$

La definición categórica de retícula es la siguiente.

Definición 1.8. *Una retícula* L *es un conjunto parcialmente ordenado que, visto como una categoría, tiene productos y coproductos finitos.*

Observación 1.9. Veamos que la definición 1.1 de retícula es equivalente a 1.8. Supongamos que tenemos un conjunto parcialmente ordenado L con productos y coproductos finitos. Definamos para $x, y \in L$ las operaciones $\wedge, \vee : L \times L \to L$ como sigue:

$$x \wedge y := \text{producto de x con y}$$
$$x \vee y := \text{coproducto de x con y}$$
$$1 := \text{producto de la familia vacía}$$
$$0 := \text{coproducto de la familia vacía}$$

De las propiedades de producto y coproducto tenemos que 1 es el objeto terminal de L y 0 es el objeto inicial de L, pues dado cualquier elemento a en L, se cumple que $a \leq 1$ y $0 \leq a$.

1. La conmutatividad se sigue de que el producto (coproducto) de a con b es el mismo que el producto (coproducto) de b con a.

2. Para ver la asociatividad de $\wedge$ tomemos $x, y, z \in L$. Existen morfismos

$$x \wedge (y \wedge z) \to x \text{ , } x \wedge (y \wedge z) \to y \wedge z \text{ , } y \wedge z \to y$$

luego existe un morfismo composición $x \wedge (y \wedge z) \to y$, y por la propiedad del producto de x con y existe un único morfismo $x \wedge (y \wedge z) \to x \wedge y$, luego $x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y$. Como también existe un morfismo $y \wedge z \to z$ tenemos el morfismo composición $x \wedge (y \wedge z) \to z$. Por la propiedad del producto de $(x \wedge y)$ con z, existe un único morfismo $x \wedge (y \wedge z) \to (x \wedge y) \wedge z$, así que

$$x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z.$$

Similarmente tenemos morfismos

$$(x \wedge y) \wedge z \to x \wedge y \text{ , } (x \wedge y) \wedge z \to z \text{ , } x \wedge y \to x \text{ y } x \wedge y \to y,$$

así obtenemos el morfismo composición $(x \wedge y) \wedge z \to y$, así que existe un único morfismo $(x \wedge y) \wedge z \to y \wedge z$, y como también tenemos la composición $(x \wedge y) \wedge z \to x$, entonces por propiedad del producto existe un único morfismo $(x \wedge y) \wedge z \to x \wedge (y \wedge z)$, por consiguiente $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$. Por tanto

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z).$$

La asociatividad de $\vee$ es análoga usando las propiedades de coproducto.

3. Como $x \leq x$ entonces $x \leq x \wedge x$ por la propiedad del producto. Como $\wedge$ es producto, existe un morfismo proyección $x \wedge x \to x$, por tanto

$$x = x \wedge x.$$

Por otra parte, de $x \leq x$ tenemos que $x \vee x \leq x$, pero como $\vee$ es coproducto, $x \leq x \vee x$. Por tanto

$$x = x \vee x.$$

4. Sabemos que existe un morfismo de x en el coproducto $0 \vee x$ entonces $x \leq 0 \vee x$. Como $x \leq x$ y $0 \leq x$ entonces por la propiedad del coproducto existe un morfismo de $0 \vee x$ en x, y por tanto $0 \vee x = x$. Análogamente se verifica que $1 \wedge x = x$.

5. Como $x \leq x$ y $x \leq y \vee x$ entonces existe un único $r : x \to x \wedge (y \vee x)$, luego $x \leq x \wedge (y \vee x)$. De que $y \vee x \leq 1$ se sigue que $x \wedge (y \vee x) \leq x \wedge 1 = x$, por tanto

$$x = x \wedge (y \vee x).$$

Análogamente, $x \leq x$ y $x \wedge y \leq x$ implica que $x \vee (x \wedge y) \leq x \vee x = x$ y como $0 \leq x \wedge y$ y $x \leq x$ entonces $x = 0 \vee x \leq x \vee (x \wedge y)$, por tanto

$$x \vee (x \wedge y) = x.$$

Ahora sea L un conjunto con dos operaciones binarias $\wedge, \vee : L \times L \to L$ que satisfacen las condiciones $(1), (2), (3)$, (4) y (5) de la definición 1.1 de retícula. Definamos el orden $\leq$ en L como sigue. Para cada $a, b \in L$:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \wedge b = a \text{ (o equivalentemente } a \vee b = b)$$

Entonces $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
En efecto, sean $a, b, c \in L$, como $a \wedge a = a$ tenemos que $\leq$ es reflexiva. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a \wedge b = a$ y $a \wedge b = b$ lo cual implica que $a = a \wedge b = b$ y por tanto $a = b$. Ahora si $a \leq b$ y $b \leq c$ tenemos que $a \wedge b = a$ y $b \wedge c = b$ entonces

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a,$$

por tanto $a \leq c$.
Ahora veamos que en $(L, \leq)$ hay productos y coproductos finitos. Dada una familia $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$ afirmamos que $\wedge_{i=1}^n a_i$ es el producto de la familia A y que $\vee_{i=1}^n a_i$ es el coproducto de A.
Basta ver que hay productos y coproductos binarios y lo anterior se cumple por inducción. Sean $a, b \in L$, entonces $a \wedge b \in L$ y como $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$ entonces $a \wedge b \leq b$. Análogamente $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$ entonces $a \wedge b \leq a$, por tanto existen morfismos $a \wedge b \to b$ y $a \wedge b \to a$. Ahora sea $q \in L$ tal que existen morfismos

$q_a : q \to a$ y $q_b : q \to b$ entonces $q \leq a$ y $q \leq b$ lo cual implica que $q \leq a \wedge b$ y por tanto existe $r : q \to a \wedge b$. Además r es único pues $Hom_L(q, a \wedge b) = \{*\}$ o $Hom_L(q, a \wedge b) = \emptyset$. Por tanto $a \wedge b$ es el producto de a con b.
Siguiendo un razonamiento similar tenemos que $a \vee b \in L$ y como $a \vee (a \vee b) = a \vee b$ y $(a \vee b) \vee b = a \vee b$ tenemos que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ y por tanto existen morfismos $a \to a \vee b$ y $b \to a \vee b$. Ahora si existe $q \in L$ tal que hay morfismos $q_a : a \to q$ y $q_b : a \to q$ entonces $a \leq q$ y $b \leq q$ luego $a \vee b \leq q$, es decir, existe un único morfismo $a \vee b \to q$. Por tanto $a \vee b$ es el coproducto de a con b.
Finalmente debemos considerar el caso para una familia vacía de objetos, el producto de una familia vacía debe ser un objeto 1 en la categoría tal que para cualquier otro objeto $a \in L$, exista exactamente un morfismo de a en 1, este objeto es el elemento máximo de la retícula L, ya que se cumple que $a \leq 1$ para todo $a \in L$. De manera dual si consideramos el coproducto de la familia vacía, debe ser un objeto 0 en L tal que para cualquier elemento $a \in L$ exista un morfismo del coproducto 0 en a, es decir que $0 \leq a$, dicho objeto 0 es el elemento mínimo de L. Así el producto y el coproducto de la familia vacía son los objetos final e inicial respectivamente de L.

Definición 1.10. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con elemento mínimo 0 y elemento máximo 1.*

1. *Un elemento $a \in A$, $a \neq 0$, se llama* ***átomo*** *si no existe $b \in A$ tal que $0 < b < a$.*

2. *Un elemento $a \in A$, $a \neq 1$, se llama* ***coátomo*** *si no existe $b \in A$ tal que $a < b < 1$.*

Definición 1.11. *Sea $(A, \vee, \wedge)$ una retícula, entonces*

1. *la retícula es* ***completa*** *si y sólo si para todo $B \subseteq A$ existen $\sup(B)$ e $\text{ínf}(B)$.*

2. *la retícula es* ***distributiva*** *si y sólo si se satisfacen:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

3. *la retícula es* ***modular*** *si y sólo si para cada $a, b, c \in A$:*

$$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Definición 1.12. *Dada una retícula $(A, \vee, \wedge)$ con elemento mínimo 0 y elemento máximo 1, decimos que A es **atómica** (respectivamente **coatómica**), si para cada $b \in A$, con $b \neq 0$ (respectivamente $b \neq 1$), existe un átomo (coátomo) $a \in A$ tal que $a \leq b$ (respectivamente $b \leq a$).*

Definición 1.13. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con elementos máximo 1 y mínimo 0. Una **ortocomplementación** en A es una función $\perp\colon A \to A$ tal que para cada $a, b \in A$:*

- $a \leqslant b$ *si y sólo si* $b^{\perp} \leqslant a^{\perp}$
- $(a^{\perp})^{\perp} = a$
- $a^{\perp} \vee a = 1$
- $a^{\perp} \wedge a = 0$.

Observación 1.14. Si A es una retícula que admite una ortocomplementación se llama retícula ortocomplementada.

Observación 1.15. Si tomamos una retícula ortocomplementada A, las propiedades (1) y (2) nos dicen que la función $\perp\colon A^{op} \to A$ es una involución preservadora de orden. Así, tenemos un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados y por tanto los ínfimos (supremos) que existen en A^{op} se preservan en A como supremos (ínfimos), pues A y A^{op} tienen los mismos objetos pero el orden se invierte, con lo cual se cumple para todo $a, b \in A$:

$$(a \vee b)^{\perp} = a^{\perp} \wedge b^{\perp} \quad y \quad (a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \vee b^{\perp}.$$

Definición 1.16. *Un **álgebra Booleana** $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, \perp)$ es una retícula ortocomplementada que satisface la propiedad distributiva*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Definición 1.17. *Una retícula ortocomplementada A se denomina ortomodular si cumple para cada $a, b \in A$*

$$\textit{si } a \leq b \textit{ entonces } b = a \vee (a^{\perp} \wedge b)$$

Proposición 1.18. *Sea A una retícula ortocomplementada. Son equivalentes:*

1. *A es ortomodular.*

2. *Si* $x \leq y$ *y* $x^{\perp} \wedge y = 0$ *entonces* $x = y$.

Demostración. $(1) \implies (2)]$ Sea A ortomodular y supongamos que $x \leq y$ y $x^{\perp} \wedge y = 0$. Entonces

$$y = x \vee (x^{\perp} \wedge y) = x \vee 0 = x.$$

$(2) \implies (1)]$ Sea $x \leq y$, entonces $x^{\perp} \wedge y \leq y$ luego $x \vee (x^{\perp} \wedge y) \leq y$. Además

$$(x \vee (x^{\perp} \wedge y))^{\perp} \wedge y = x^{\perp} \wedge (x^{\perp} \wedge y)^{\perp} \wedge y = (x^{\perp} \wedge y) \wedge (x^{\perp} \wedge y)^{\perp} = 0.$$

Por hipótesis $x \vee (x^{\perp} \wedge y) = y$, y por tanto A es ortomodular. $\square$

Observación 1.19. Una proposición equivalente al hecho de que una retícula ortomodular A sea un álgebra Booleana es la propiedad:

$$\forall a, b \in A : a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp}).$$

Se puede consultar [12] para más propiedades sobre retículas ortomodulares. Cuando para $a, b \in A$ se cumple $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$ se dice que a conmuta con b y se denota por aCb. En una retícula ortomodular esta relación es simétrica.

Definición 1.20. *Si* B *es una retícula ortocomplementada (respectivamente retícula ortomodular o álgebra Booleana) y* $C \subseteq B$*, diremos que* C *es una* ***subálgebra*** *de* B*, si* C *es cerrada bajo las operaciones* $\vee$, $\wedge$ *y* $\perp$ *y contiene al* 0 *y al* 1.

Definición 1.21. *Si* A *es un conjunto no vacío y* L *es una retícula, se define el álgebra determinada por* A*, denotada por* $\Gamma(A)$ *como*

$$\Gamma(A) = \bigcap \{\mathbb{B} : \mathbb{B} \text{ es subálgebra Booleana de } L \text{ y } A \subseteq \mathbb{B}\}$$

Definición 1.22. *Sea* $(A, \vee, \wedge)$ *una retícula ortocomplementada,* a *y* b *en* A *son* ***compatibles*** *si y sólo si* $\Gamma(\{a, b\})$ *es una subálgebra Booleana de* A.

Teorema 1.23. *Sea* $(A, \vee, \wedge)$ *una retícula ortocomplementada.* A *es ortomodular si y sólo si para* $a \leq b$*,* a *y* b *son compatibles.*

Demostración. Sea A ortomodular y $a \leq b$. Notar que

$$\Gamma(\{a, b\}) = \{0, 1, a, b, a^{\perp}, b^{\perp}, a^{\perp} \wedge b, a \vee b^{\perp}\},$$

ya que $a^{\perp} \vee b = 1$, $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$, $a \wedge b^{\perp} = 0$, $a^{\perp} \wedge b^{\perp} = b^{\perp}$ y $a^{\perp} \vee b^{\perp} = a^{\perp}$.
Por tanto $\Gamma(\{a, b\})$ es una subálgebra de A.
Resta ver que $\Gamma(\{a, b\})$ es distributiva. Sólo haremos tres casos y los demás son análogos.

- Como
$$a^\perp \wedge b \leq a^\perp \leq a^\perp \vee b$$
entonces
$$a^\perp \vee (a^\perp \wedge b) = a^\perp = a^\perp \wedge (b \vee a^\perp) = (a^\perp \vee a^\perp) \wedge (a^\perp \vee b).$$

- $$(a^\perp \wedge b) \wedge (a \vee b^\perp) = 0 = 0 \vee 0 = (0 \wedge b) \vee (a^\perp \wedge 0) = [(a^\perp \wedge b) \wedge a] \vee [(a^\perp \wedge b) \wedge b^\perp]$$

- $$b^\perp \wedge (a \vee b^\perp) = b^\perp = (b^\perp \wedge a) \vee b^\perp = (b^\perp \wedge a) \vee (b^\perp \wedge b^\perp)$$

Por otra parte sean $a \leq b$ entonces
$$a \vee (a^\perp \wedge b) = (a \vee a^\perp) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b = b.$$
Por tanto, A es ortomodular. $\square$

1.2. Adjunción en retículas

En la teoría de categorías un concepto de gran importancia es la adjunción y en los siguientes capítulos los funtores adjuntos serán la noción central. Para tener una mayor comprensión de ellos, analizaremos algunos conceptos del tema dentro de las retículas.

Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores, del teorema 7.40, sabemos que F es adjunto izquierdo a G, lo cual se escribe como $F \dashv G$, si existe una biyección, natural en las variables A y B, entre el conjunto de morfismos $f : A \to GB$ en la categoría $\mathcal{C}$ y los morfismos $f^* : FA \to B$ en $\mathcal{D}$.

Dada una adjunción $F \dashv G$, para cada A en $\mathcal{C}$ tenemos el morfismo
$$\eta_A : A \to GFA$$
que corresponde al morfismo $id_{FA} : FA \to FA$ en $\mathcal{D}$. La naturalidad de la asignación $f \mapsto f^*$ nos proporciona la transformación natural $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, la unidad de la adjunción. Además, de la demostración del teorema 7.40, como para

cada $f : A \to GB$ tenemos que $f^* = f^* \circ id_{FA}$, podemos obtener $f = G(f^*) \circ \eta_A$, es decir, podemos recuperar la biyección $f^* \mapsto f$ a partir del funtor G y la transformación natural η.

También tenemos el dual de η, la counidad $\varepsilon : FG \Rightarrow id_D$, tal que

$$\varepsilon_B = id^*_{GB} : FGB \to B$$

y se cumple que $f^* = \varepsilon_B \circ F(f)$, Además η y ε satisfacen las identidades triangulares:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G(\varepsilon)"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F(\eta)"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Es decir, una condición necesaria y suficiente para que $F \dashv G$ es que las transformaciones naturales η y ε satisfagan las identidades triangulares.

Ahora revisemos este concepto cuando las categorías son retículas. Si tenemos los conjuntos parcialmente ordenados A, B y $f : A \to B$, $g : B \to A$ son funciones preservadoras de orden, es decir, funtores (como se expone en 7.15), para demostrar que $f \dashv g$ basta demostrar que para todo $a \in A$ y $b \in B$, $f(a) \leq b$ si y sólo si $a \leq g(b)$, esta condición lo que nos dice es que siempre que existe un morfismo $f(a) \to b$ en B tenemos otro morfismo $a \to g(b)$ en A, es decir, hay una biyección entre los conjuntos de morfismos $A(a, g(b))$ y $B(f(a), b)$, y como sabemos esta biyección es natural tanto en a como en b de forma trivial. Así por el teorema 7.40 se concluye que $f \dashv g$.

Tenemos una condición más para adjunciones. Sean f y g como las suponemos arriba, $f \dashv g$ si y sólo si para todo $a \in A$ y $b \in B$ se cumplen las desigualdades:

$$a \leq gf(a) \quad \text{y} \quad fg(b) \leq b.$$

En efecto, si $f \dashv g$ y tomamos $a \in A$ y $b \in B$, entonces con el morfismo $f(a) \to f(a)$ obtenemos el morfismo $a \to gf(a)$, es decir, $a \leq gf(a)$ y el morfismo $g(b) \to g(b)$ nos da el morfismo $fg(b) \to b$ y así $fg(b) \leq b$. Ahora, si las desigualdades se cumplen para cada $a \in A$ y $b \in B$ entonces obtenemos automáticamente las transformaciones η y ε pues $id_{f(a)} = \eta^*_a$ y $\varepsilon_b = id^*_{g(b)}$. Las identidades triangulares se cumplen trivialmente porque en un conjunto parcialmente ordenado basta con que se de la existencia de los morfismos para que el diagrama conmute.

Más aún, cuando dichas desigualdades se cumplen entonces

$$fgf = f \quad \text{y} \quad gfg = g$$

pues como f preserva el orden tenemos de la primera desigualdad que $f(a) \leq fgf(a),$ y para $f(a) \in B$ por la segunda desigualdad obtenemos que $fgf(a) \leq f(a)$, consiguiendo por antisimetría que $fgf = f$. La otra igualdad se obtiene de forma análoga.

De lo anterior se puede concluir que f y g son una biyección entre los subconjuntos $\{a \mid a = gf(a)\}$ de A y $\{b \mid b = fg(b)\}$ de B.

Una observación más para finalizar. El teorema del funtor adjunto 7.52 exige para que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tenga adjunto izquierdo, F debe preservar límites y además satisfacer la condición del conjunto solución establecida en 7.50. Dualizando tenemos que F^{op} tiene adjunto derecho si y sólo si preserva colímites y satisface la condición dual del conjunto solución.

En el caso en el cual las categorías son retículas, la condición del conjunto solución se satisface trivialmente pues ya se trabaja de por sí con conjuntos, entonces para mostrar que un funtor, en nuestro caso una función preservadora de orden, tiene adjunto izquierdo, basta con asegurarnos que preserva ínfimos, que son los límites en esta categoría como vimos en 1.9. De manera dual, para ver que un funtor tiene adjunto derecho es suficiente ver que el funtor preserva los colímites, es decir, los supremos en las retículas.

Capítulo 2

Retículas Ortomodulares

Las retículas ortomodulares se han asociado comúnmente a la lógica cuántica porque las proposiciones para un sistema cuántico corresponden a los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert y éste constituye una retícula ortomodular, como veremos en seguida. Una retícula de Hilbert no sólo no es distributiva, tampoco es modular cuando el espacio de Hilbert es de dimensión infinita. La modularidad es una propiedad importante porque comprende la necesidad de establecer coherencia conceptual entre diferentes objetos cuánticos, esto es, lógica cuántica, probabilidad cuántica y mecánica cuántica.

Definición 2.1. *Una retícula completa $(A, \leq)$ se llama **ortomodular** si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Existe una **ortocomplementación** $\perp: A \to A$ tal que para cada $a, b \in A$:*
   - $a \leqslant b$ *si y sólo si* $b^{\perp} \leqslant a^{\perp}$
   - $(a^{\perp})^{\perp} = a$
   - $a^{\perp} \vee a = 1$ *donde* 1 *es el elemento máximo de la retícula*
   - $a^{\perp} \wedge a = 0$ *donde* 0 *es el elemento mínimo de la retícula*
2. ***Modularidad débil**: Para cada $a, b \in A$: si $a \leq b$ entonces $b = a \vee (b \wedge a^{\perp})$.*

Observación 2.2. Equivalentemente podemos definir la modularidad débil como:

$$a \leq b \text{ implica que } a = b \wedge (a \vee b^{\perp}).$$

Observación 2.3. Las retículas ortomodulares se caracterizan por satisfacer, debido a la modularidad débil, la ecuación

$$a \vee (a^\perp \wedge (a \vee b)) = a \vee b$$

porque siempre se cumple que $a \leq a \vee b$.
De manera dual tenemos

$$a \wedge b = a \wedge (a^\perp \vee (a \wedge b)).$$

Esta se cumple porque $a^\perp \leq a^\perp \vee b^\perp = (a \wedge b)^\perp$ entonces

$$a^\perp \vee b^\perp = a^\perp \vee (a \wedge (a^\perp \vee b^\perp)).$$

Por tanto

$$a \wedge b = ((a \wedge b)^\perp)^\perp = a \wedge (a^\perp \vee (a \wedge b)).$$

Aún cuando no se cumple la modularidad, la modularidad débil es suficiente para obtener muchos resultados importantes como veremos a continuación.

2.1. La implicación de Sasaki

Cuando vamos a trabajar dentro de una cierta lógica pretendemos introducir una implicación que nos permita realizar deducciones sintácticas a partir de ésta. Es decir, queremos que se satisfaga algún tipo de teorema de deducción. Para convertir una retícula ortomodular en un modelo para un sistema lógico (en nuestro caso, lógica cuántica) es necesario definir una implicación adecuada, en el sentido de que satisfaga ciertos criterios necesarios para tener un método de deducción, debido a que la implicación definida de manera clásica no los cumplía, entre ellos, el hecho de que $a \leq b$ si y sólo si $a \to b = 1$. Después de un proceso durante el cual se propusieron diversas implicaciones, se encontró que la mejor elección para dicha implicación es la llamada *implicación de Sasaki*, definida como sigue: si a, b pertenecen a la retícula $(A, \leq)$,

$$a \to b = (a \wedge b) \vee a^\perp.$$

Hardgree probó que la implicación de Sasaki satisface ciertos criterios básicos implicativos, y Finch por su parte demostró que tiene adjunto izquierdo (ver Apéndice). Además, cuando la retícula es distributiva, de hecho, la implicación de Sasaki es igual a $a^\perp \vee b$. Ahora veamos la caracterización de la implicación de Sasaki.[1]

[1]Para esta sección se pueden consultar las referencias [8], [7], [16], [17], [18] y [19].

Lema 2.4. *Sean* $(A, \vee, \wedge)$ *una retícula ortomodular y*

$$\longrightarrow : A \times A \to A, \;\; \oplus : A \times A \to A$$

dos operaciones binarias que satisfacen la siguiente condición:
Si $a, b, c \in A$ *entonces* $a \oplus b \leq c$ *si y sólo si* $a \leq b \to c$*.*
Entonces para todo $x \in A$*, la función* $x \longrightarrow$ _ $: A \to A$ *es preservadora de orden.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$. Entonces por hipótesis
$x \longrightarrow a \leq x \longrightarrow b$ si y sólo si $(x \longrightarrow a) \oplus x \leq b$.
Es claro que $(x \longrightarrow a) \oplus x \leq a$ y como $a \leq b$ entonces $(x \longrightarrow a) \oplus x \leq b$ y por tanto $x \longrightarrow a \leq x \longrightarrow b$. □

Observación 2.5. Este lema se cumple en cualquier conjunto parcialmente ordenado. Más aún, se concluye que no existe otra forma de definir una implicación en una retícula ortomodular de tal manera que el teorema de la deducción se cumpla, esto es, siempre que la siguiente condición se cumpla:
Dados $a, b, c \in A$ entonces: $a \wedge b \leq c$ si y sólo si $a \leq b \to c$.

El siguiente lema se cumple para cualquier retícula con conjunciones finitas.

Lema 2.6. *Sean* $(A, \vee, \wedge)$ *retícula ortomodular y* $\longrightarrow : A \times A \to A$ *una operación binaria que satisface las siguientes condiciones. Dados* $a, b, c \in A$*:*

1. $a \leq b$ *si y sólo si* $a \longrightarrow b = 1$
2. *Existe una operación binaria* $\oplus : A \times A \to A$ *tal que*

$$a \oplus b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \longrightarrow c$$

entonces $a \longrightarrow (a \wedge b) = a \longrightarrow b$*.*

Demostración. La condición (2) nos dice que $b \longrightarrow$ _ tiene adjunto izquierdo _ $\oplus\, b$, por el teorema 7.41, $b \longrightarrow$ _ preserva límites, por tanto

$$a \longrightarrow (a \wedge b) = (a \longrightarrow a) \wedge (a \longrightarrow b) = 1 \wedge (a \longrightarrow b) = a \longrightarrow b.$$

□

Finalmente la implicación de Sasaki queda caracterizada por el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Sea $(A, \vee, \wedge)$ una retícula ortomodular y $\longrightarrow: A \times A \to A$ una operación binaria que satisface las siguientes condiciones para $a, b, c \in A$:*

1. $a \leq b$ *si y sólo si* $a \longrightarrow b = 1$,
2. *existe una operación binaria* $\oplus : A \times A \to A$ *tal que*

$$a \oplus b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \longrightarrow c,$$

3. *siempre que* a, b *son compatibles en* A*, entonces* $a \longrightarrow b = a^{\perp} \vee b$.

Entonces $\longrightarrow$ *es la implicación de Sasaki, es decir,* $a \longrightarrow b = a^{\perp} \vee (a \wedge b)$.

Demostración. Por el lema anterior, $a \longrightarrow (a \wedge b) = a \longrightarrow b$. De la condición (3), como $a \wedge b$ es compatible con a, tenemos que

$$a \longrightarrow (a \wedge b) = a^{\perp} \vee (a \wedge b).$$

□

2.2. La conjunción cuántica &

En términos categóricos, el teorema de la deducción equivale al hecho de que la implicación tenga adjunto izquierdo cuando es vista como funtor.

Cuando trabajamos en álgebras Booleanas o en álgebras de Heyting sabemos que para cualesquiera a, b y c en la retícula se cumple que:

$$a \wedge b \leqslant c \text{ si y sólo si } a \leqslant b \to c.$$

Esto se debe a la distributividad en dichas retículas y, en términos categóricos, esto nos dice que _ $\wedge\, b$ es adjunto izquierdo a $b \longrightarrow$ _ para todo b en la retícula. Sin embargo, dentro de las retículas ortomodulares la operación $\wedge$ no se comporta exactamente como la conjunción lógica respecto a $\to$, así que Finch sugirió cambiar la conjunción por &, donde _&b es precisamente el adjunto izquierdo a la implicación de Sasaki.

Esta nueva conjunción cuántica satisface la relación a & $b \leq c$ si y sólo si $a \leq b \to c$ para todo a, b, c en la retícula.

Definición 2.8. *Sean* $(A, \vee, \wedge, \perp)$ *una retícula ortomodular y* $a, b \in A$. *Se define* $a\&b$ *de la siguiente forma:*

$$a\&b = (a \vee b^{\perp}) \wedge b.$$

Veamos ahora que en efecto & "tiene un buen comportamiento" con respecto a $\rightarrow$, al satisfacer los criterios básicos de la implicación.

Proposición 2.9. *Sean* $(A, \vee, \wedge, \perp)$ *una retícula ortomodular y* $a, b, c \in A$, *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si* $a \leq b$ *entonces* $a\&c \leq b\&c$
2. $a\&b \leq c$ *si y sólo si* $a \leq b \rightarrow c$
3. $a \leq b$ *si y sólo si* $a \rightarrow b = 1$
4. $(a \rightarrow b)\&a \leq b$
5. $a\&(a \rightarrow b) \leq a \wedge b$
6. $b^{\perp}\&(a \rightarrow b) \leq a^{\perp}$
7. $b^{\perp}\&a = (a \rightarrow b)^{\perp}$

Demostración. 1. Supongamos que $a \leq b$, entonces $a \vee c^{\perp} \leq b \vee c^{\perp}$, luego

$$a\&c = (a \vee c^{\perp}) \wedge c \leq (b \vee c^{\perp}) \wedge c = b\&c.$$

2. $(\Rightarrow)$ Si $a\&b \leq c$, entonces $(a \vee b^{\perp}) \wedge b \leq c \wedge b$, luego por la propiedad ortomodular

$$a \vee b^{\perp} = [(b^{\perp} \vee a) \wedge b] \vee b^{\perp} \leq (c \wedge b) \vee b^{\perp}.$$

Así, $a \leq b \rightarrow c$.
$(\Leftarrow)$Notemos que:

$$(b \rightarrow c)\&b = [(b \wedge c) \vee b^{\perp}]\&b = \{[(b \wedge c) \vee b^{\perp}] \vee b^{\perp}\} \wedge b = [(b \wedge c) \vee b^{\perp}] \wedge b = b \wedge c.$$

Por tanto, si $a \leq (b \rightarrow c)$, entonces

$$a\&b \leq (b \rightarrow c)\&b = b \wedge c \leq c.$$

3. Notar que:

$$1\&a = (1 \vee a^{\perp}) \wedge a = (0 \wedge a)^{\perp} \wedge a = 0^{\perp} \wedge a = 1 \wedge a = a.$$

   Por tanto, $a = 1\&a \leq b$ si y sólo si $1 \leq a \to b$ si y sólo si $1 = a \to b$.

4. A partir de (2) se obtiene que $(a \to b)\&a \leq b$ si y sólo si $a \to b \leq a \to b$, pero esto último siempre ocurre.

5. $a\&(a \to b) \leq a \wedge b$ si y sólo si $a \leq (a \to b) \to (a \wedge b)$, pero $(a \to b) \to (a \wedge b) = [(a \to b) \wedge (a \wedge b)] \vee (a \to b)^{\perp} = \{[(a \wedge b) \vee a^{\perp}] \wedge (a \wedge b)\} \vee (a \to b)^{\perp} = (a \wedge b) \vee (a \to b)^{\perp} = (a \wedge b) \vee [(a \wedge b)^{\perp} \wedge a] = a$.
   La última igualdad se obtiene aplicando la modularidad débil ya que $a \wedge b \leq a$. Así, concluimos que

$$a\&(a \to b) \leq a \wedge b.$$

6. $b^{\perp}\&(a \to b) \leq a^{\perp}$ si y sólo si $b^{\perp} \leq (a \to b) \to a^{\perp}$, pero $(a \to b) \to a^{\perp} = [(a \to b) \wedge a^{\perp}] \vee (a \to b)^{\perp} = \{[(a \wedge b) \vee a^{\perp}] \wedge a^{\perp}\} \vee [(a \wedge b)^{\perp} \wedge a] = a^{\perp} \vee [(a^{\perp} \vee b^{\perp}) \wedge a] = a^{\perp} \vee b^{\perp}$.
   La última igualdad se da porque $a^{\perp} \leq a^{\perp} \vee b^{\perp}$ implica por modularidad débil que

$$a^{\perp} \vee [(a^{\perp} \vee b^{\perp}) \wedge a] = a^{\perp} \vee b^{\perp}.$$

   Como siempre se cumple que $b^{\perp} \leq a^{\perp} \vee b^{\perp}$ tenemos que $b^{\perp}\&(a \to b) \leq a^{\perp}$.

7. $b^{\perp}\&a = (b^{\perp} \vee a^{\perp}) \wedge a = (b \wedge a)^{\perp} \wedge a = [(a \wedge b) \vee a^{\perp}]^{\perp} = (a \to b)^{\perp}$.

□

Las propiedades anteriores muestran como el par $(\&, \to)$ nos provee de un sistema de deducción. La propiedad (2) es de específica importancia porque implica la validez del teorema de la deducción, en el sentido de que

$$((a_1\&a_2)\&...\&a_{n-1})\&a_n \leq b \text{ si y sólo si } ((a_1\&a_2)\&...)\&a_{n-1} \leq a_n \to b.$$

Las propiedades (4) y (5) no son más que el *modus ponens*, pues de hecho (5) implica que $a\&(a \to b) \leq b$. Además la propiedad (6) nos dice que trabajamos en una lógica no intuicionista.

Como consecuencia inmediata de las definiciones de $\&$ y $\longrightarrow$ se tienen las siguientes afirmaciones:

1. $a \to 0 = a^\perp$
2. $a\&b = 0$ si y sólo si $a \leq b^\perp$
3. $0 \to a = 1 = a \to 1$
4. $1\&a = a = a\&1$
5. $a\&0 = 0 = 0\&a$
6. $a\&a^\perp = 0 = a^\perp\&a$
7. $a\&b \leq b$
8. $a\&a = a$
9. $a \wedge b \leq a\&b$

Y por la propiedad (2) de la proposición (2.2) (es decir, por adjunción, ver Apéndice) se cumple que para cada $b \in A$ y $\{a_i\}_i \subseteq A$:

$$(\vee_i a_i)\&b = \vee_i(a_i\&b) \;\; y \;\; b \to \wedge_i a_i = \wedge_i(b \to a_i).$$

Así, incluso cuando la retícula no sea necesariamente distributiva con la conjunción usual $\wedge$, la nueva conjunción $\&$ distribuye supremos arbitrarios por la izquierda.

Un hecho interesante sobre & que la hace diferir de la conjunción usual $\wedge$ es que no necesariamente es conmutativa ni asociativa y que de cumplirse alguna de estas dos condiciones, se implica que se estará trabajando en un álgebra Booleana, como lo mostramos en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.10. *Sea $(A, \vee, \wedge, \perp)$ una retícula ortomodular. Si para cada $a, b \in A : a\&b = b\&a$ entonces $\& = \wedge$ y por tanto A es un álgebra Booleana.*

Demostración. Supongamos que para $a, b \in A$, $a\&b = b\&a$ entonces $a\&b \leq b$ y $b\&a \leq a$, es decir, $a\&b \leq a$ y $a\&b \leq b$, por tanto $a\&b \leq a \wedge b$ y como $a \wedge b \leq a\&b$, se tiene que $a\&b = a \wedge b$.
Como $a \wedge \_ = a\&\_$ y $a\&\_$ preserva colímites por tener adjunto derecho entonces

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

y por tanto A es álgebra Booleana. $\square$

Proposición 2.11. *Sea* $(A, \vee, \wedge, \perp)$ *una retícula ortomodular, entonces la operación & es asociativa si y sólo si* A *es un álgebra Booleana.*

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Supongamos que & es asociativa y sean $a, b \in A$. Afirmamos que

$$a \longrightarrow b^{\perp} = (a\&b)^{\perp}.$$

Como

$$(a \longrightarrow b^{\perp})\&a = \{[(a \wedge b^{\perp}) \vee a^{\perp}] \vee a^{\perp}\} \wedge a = [(a \wedge b^{\perp}) \vee a^{\perp}] \wedge a = a \wedge b^{\perp} \leq b^{\perp}$$

y

$$b^{\perp}\&b = (b^{\perp} \vee b^{\perp}) \wedge b = b^{\perp} \wedge b = 0,$$

entonces

$$(a \longrightarrow b^{\perp})\&(a\&b) = [(a \longrightarrow b^{\perp})\&a]\&b \leq b^{\perp}\&b = 0.$$

Por tanto

$$a \longrightarrow b^{\perp} \leq (a\&b)^{\perp}.$$

Por otra parte, observe que dado x en A tal que $x\&(a\&b) = 0$ entonces por la asociatividad de & $(x\&a)\&b = 0$ si y sólo si $x\&a \leq b^{\perp}$. Así $x \leq a \longrightarrow b^{\perp}$, es decir,

$$(a\&b)^{\perp} \leq a \longrightarrow b^{\perp}.$$

Por tanto obtenemos que

$$a \longrightarrow b^{\perp} = (a\&b)^{\perp}.$$

Por otra parte, $a \longrightarrow b^{\perp} = (a \wedge b^{\perp}) \vee a^{\perp} = (b\&a)^{\perp}$.
Por tanto, para cada $a, b \in A$ tenemos que $b\&a = a\&b$. De la proposición anterior, A es un álgebra Booleana.
$(\Longleftarrow)$ Supongamos que A es álgebra Booleana entonces para todo $a, b \in A$,

$$a\&b = (a \vee b^{\perp}) \wedge b = (a \wedge b) \vee (b^{\perp} \wedge b) = (a \wedge b) \vee 0 = a \wedge b,$$

por tanto $\& = \wedge$ y así & es asociativa.

$\square$

2.3. Subespacios cerrados de un espacio de Hilbert

Los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert forman una retícula ortomodular. Sea H un espacio vectorial con un producto interior denotado por $\langle , \rangle$. Sabemos que podemos obtener la norma $\| \cdot \|_{\langle , \rangle}$ inducida por el producto interior haciendo $\|x\|_{\langle , \rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ y también inducimos una métrica d sobre H de la forma $d(x, y) = \|x-y\|_{\langle , \rangle}$. Cuando esta métrica es completa, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy es convergente en H, decimos que H con el producto interior $\langle , \rangle$ es un espacio de Hilbert.

Sea H un espacio de Hilbert. Un subespacio vectorial M de H es completo si para cada sucesión de Cauchy γ_m en M que converge a $x \in H$ se cumple que $x \in M$. Note que si M es un subespacio cerrado de H entonces M es completo.

Si M y N son subespacios de H, definimos

$$M + N = \{x + y | x \in M, y \in N\}$$

y

$$M^{\perp} = \{x \in H | \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\}$$

Denotemos por $\mathcal{C}(H)$ el conjunto de subespacios cerrados de H. Definimos en $\mathcal{C}(H)$ la conjunción de M y N para M, $N \in \mathcal{C}(H)$ como

$$M \wedge N = M \cap N$$

y la disyunción $M \vee N$ como el subespacio cerrado de H más pequeño que contiene a $M \cup N$, que siempre existe, es decir,

$$M \vee N = \cap\{K \in \mathcal{C}(H) | M \cup N \subseteq K\}$$

Equivalentemente podemos definirlo como

$$M \vee N = \overline{M + N}$$

donde $\overline{M + N}$ denota la cerradura de la suma. En efecto, sea $K \in \mathcal{C}(H)$ tal que $M \cup N \subseteq K$ entonces $M + N \subseteq K$ luego $\overline{M + N} \subseteq K$ pues K es cerrado. Además $M \cup N \subseteq \overline{M + N}$ y $\overline{M + N} \in \mathcal{C}(H)$ y por tanto

$$\overline{M + N} = \cap\{K \in \mathcal{C}(H) | M \cup N \subseteq K\}.$$

Observe que $M+N \subseteq M \vee N$ y que $M^\perp$ son subespacios cerrados. Cuando M o N son de dimensión finita se cumple que $M+N = M \vee N$.

Denotemos por $0 := \{0\}$ el menor elemento en $\mathcal{C}(H)$ y por $1 := H$ el mayor elemento en $\mathcal{C}(H)$.

Entonces $(\mathcal{C}(H), \vee, \wedge, \perp, 0, 1)$ es una retícula ortomodular. En efecto, el orden parcial en $\mathcal{C}(H)$ está dado por la inclusión de conjuntos. Como $\mathcal{C}(H)$ es cerrado respecto a intersecciones entonces $\mathcal{C}(H)$ es una retícula completa.

Veamos que $\perp$ es una ortocomplementación. Sean M y $N \in \mathcal{C}(H)$. Si $M \subseteq N$ entonces se cumple que $N^\perp \subseteq M^\perp$ pues si $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$ entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in N$. $M \wedge M^\perp = 0$ pues si $x \in M \wedge M^\perp$ entonces en particular $\langle x, x\rangle = 0$ lo cual implica que $x = 0$. Ahora veamos que $M \subseteq M^{\perp\perp}$, tomemos $x \in M$ y sea $y \in M^\perp$ entonces en particular para $x \in M$ tenemos que $\langle y, x\rangle = 0$ luego $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{0} = 0$ (donde $\overline{z}$ denota al conjugado complejo de z) y así $x \in M^{\perp\perp}$. Para mostrar la igualdad $M = M^{\perp\perp}$ tomemos $z \in M^{\perp\perp}$, por el teorema 3.7 de la referencia [2] existen únicos $w \in M^\perp$ y $y \in M$ tales que $z = w+y$, entonces $w = z-y \in M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$ luego $z = y \in M$. Finalmente veamos que $M \vee M^\perp = 1$. Es claro que $M \vee M^\perp \subseteq H$. Ahora tomemos $x \in H$ por el teorema 3.7 citado anteriormente podemos expresar $x = p + q$ con $p \in M$ y $q \in M^\perp$, luego

$$H \subseteq M + M^\perp \subseteq \overline{M + M^\perp} = M \vee M^\perp.$$

Veamos la modularidad débil, para ello usaremos una proposición equivalente (ver (1.18)). Supongamos que $M \subseteq N$ y que $M^\perp \wedge N = 0$. Para ver que $M = N$ tomemos $n \in N$, podemos encontrar $p \in M$ y $q \in M^\perp$ tales que $n = p+q$, luego $q = n - p \in M^\perp \cap N$ entonces $q = 0$ y por tanto $n = p \in M$. Así $M = N$ y por tanto $\mathcal{C}(H)$ es ortomodular.

Además el espacio de Hilbert H es de dimensión finita si y sólo si la retícula $\mathcal{C}(H)$ es modular, pero para un espacio H arbitrario sólo se satisface la modularidad débil.

Capítulo 3

Cuantales

El término *cuantal* es creado por Mulvey [20] como una combinación de lógica cuántica y local, cuando propuso usar los cuantales para el el estudio de C*-álgebras no conmutativas y que suponía debería servir como preparación para los fundamentos de la mecánica cuántica.

Los locales (o marcos), retículas completas que representan el enfoque algebraico más adecuado de los espacios topológicos, son ejemplos particulares de cuantales y gran número de construcciones en cuantales se motivaron en el intento de generalizar ideas de la teoría de locales.

Entre otros ejemplos de cuantales están las álgebras booleanas completas, varias retículas de ideales de anillos y el conjunto potencia de un semigrupo.

Además de la aplicación de los cuantales a la teoría de ideales de anillos y las C*-álgebras, también aparecen en el análisis de semánticas de la lógica lineal, sistema lógico desarrollado por Girard que fundamenta la ciencia computacional teórica.

Un trabajo más reciente sobre cuantales es el realizado por Joyal y Tierney [11] sobre una teoría para los topos que inicia con un estudio sobre cuantales unitarios conmutativos (vistos como monoides conmutativos en la categoría de Sup-Retículas) y módulos sobre dichos cuantales. Por otra parte, Mulvey y Nawaz [14] trabajan aspectos de teoría de topos de cuantales idempotentes y la noción de estructura cuántica de un topos. Artículos recientes tratan con construcciones de categorías de gavillas sobre un cuantal idempotente.

Cuando queremos considerar una categoría cuyos objetos sean retículas completas tenemos dos formas para considerar nuestros morfismos, una es considerando funciones que preserven ínfimos y supremos arbitrarios, o bien, considerar funciones que sólo preserven supremos. Tenemos así dos categorías bastante diferentes, la última es una categoría algebraica, se llama categoría de Sup-Retículas y se denota por SL.

Los locales (marcos) pueden pensarse como una generalización de la retícula de conjuntos abiertos de un espacio topológico, estas retículas son los marcos y locales, sus objetos son los mismos, la distinción surge cuando se hace la elección de los morfismos.

Un local puede caracterizarse como un cuantal idempotente derecho conmutativo, y los locales nos interesan por sus interacciones con los cuantales cuyas construcciones motivará el desarrollo de resultados análogos en cuantales.

Definición 3.1. *Un **marco** L es una retícula completa tal que para cada $a \in L$ y $\{b_\alpha\} \subseteq L$:*

$$a \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha) = \bigvee_\alpha (a \wedge b_\alpha)$$

Como $a \wedge \_ : L \to L$ preserva supremos arbitrarios entonces tiene adjunto derecho (ver Apéndice) que es denotado por

$$a \longrightarrow \_ : L \to L$$

entonces para todo $a, b, c \in L$ se cumple

$$a \wedge b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \longrightarrow c.$$

Los marcos también son llamados álgebras de Heyting completas. Un morfismo de marcos será un morfismo que preserve supremos arbitrarios, además de $\wedge$ y 1. La categoría Frm es la categoría de marcos con sus morfismos. La categoría dual de Frm es la categoría de locales Loc en la cual los morfismos son los adjuntos derechos de los morfismos de marcos que siempre existen porque preservan supremos arbitrarios. Cuando no estamos interesados en los morfismos sino únicamente en objetos se usará marco y local indistintamente. En adelante no haremos esta distinción y nos refererimos a esta categoría por locales (ver [10]). Como ejemplo inmediato de local se tiene a la retícula $O(X)$ de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X.

3.1. La categoría de cuantales

Definición 3.2. *Un **cuantal** es una retícula completa Q con una operación binaria asociativa $\&$ que satisface para cada $a \in Q$:*

$$a\&(\vee_\alpha b_\alpha) = \vee_\alpha(a\&b_\alpha)$$

y

$$(\vee_\alpha b_\alpha)\&a = \vee_\alpha(b_\alpha\&a).$$

Observación 3.3. Note que $a\&\_$ y $\_\&a$ son funciones preservadoras de orden, es decir, funtores ya que $b \leq c$ si y sólo si $b \vee c = c$ entonces $a\&c = a\&(b \vee c) = (a\&b) \vee (a\&c)$ si y sólo si $a\&b \leq a\&c$.
Similarmente $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$ entonces $b\&c = (a \vee b)\&c = (a\&c) \vee (b\&c)$ luego $a\&c \leq b\&c$. Además

$$a\&0 = a\&(\vee_{i\in\emptyset} b_i) = \vee_{i\in\emptyset}(a\&b_i) = 0 \text{ y } 0\&a = (\vee_{i\in\emptyset} b_i)\&a = \vee_{i\in\emptyset}(b_i\&a) = 0.$$

Como $a\&\_$ y $\_\&a$ preservan supremos (colímites) arbitrarios tienen adjuntos derechos que denotaremos por $a \longrightarrow_r \_$ y $a \longrightarrow_l \_$ respectivamente. Entonces por adjunción tenemos:

$$a\&c \leq b \text{ si y sólo si } c \leq a \rightarrow_r b$$
$$c\&a \leq b \text{ si y sólo si } c \leq a \rightarrow_l b$$

Algunas propiedades básicas de estas operaciones son las siguientes.

Proposición 3.4. *Sea Q un cuantal y $a, b \in Q$. Entonces*

1. $a\&(a \rightarrow_r b) \leq b$
2. $(a \rightarrow_l b)\&a \leq b$
3. *Si* $a \leq b$ *entonces* $c \rightarrow_r a \leq c \rightarrow_r b$ *y* $c \rightarrow_l a \leq c \rightarrow_l b$
4. *Si* $a \leq b$ *entonces* $b \rightarrow_l c \leq a \rightarrow_l c$ *y* $b \rightarrow_r c \leq a \rightarrow_r c$
5. $b \rightarrow_r (a \rightarrow_r c) = (a\&b) \rightarrow_r c$
6. $a \rightarrow_l (b \rightarrow_l c) = (a\&b) \rightarrow_l c$
7. $a \rightarrow_r (b \rightarrow_l c) = b \rightarrow_l (a \rightarrow_r c)$

8. $a\&(a \to_r b) = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = a\&c$
9. $(a \to_l b)\&a = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = c\&a$
10. $a \to_r (a\&b) = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = a \to_r c$
11. $a \to_l (b\&a) = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = a \to_l c$
12. $(b \to_l a) \to_r a = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = c \to_r a$
13. $(b \to_r a) \to_l a = b$ *si y sólo si existe* $c \in Q$ *con* $b = c \to_l a$

Demostración.

1. Note que $a\&(a \to_r b) \leq b$ si y sólo si $a \to_r b \leq a \to_r b$.
2. $(a \to_l b)\&a \leq b$ si y sólo si $a \to_l b \leq a \to_l b$.
3. Supongamos que $a \leq b$. Se verifica que $c \to_r a \leq c \to_r b$ si y sólo si $c\&(c \to_r a) \leq b$, pero esto último se cumple porque $c\&(c \to_r a) \leq a \leq b$. Análogamente $c \to_l a \leq c \to_l b$ si y sólo si $(c \to_l a)\&c \leq b$, y esto se cumple porque $(c \to_l a)\&c \leq a \leq b$.
4. Supongamos que $a \leq b$. Note que $b \to_l c \leq a \to_l c$ si y sólo si $(b \to_l c)\&a \leq c$, esto siempre se cumple porque $\&\_$ es preservadora de orden entonces

   $$(b \to_l c)\&a \leq (b \to_l c)\&b \leq c$$

   Por otra parte, también tenemos que $b \to_r c \leq a \to_r c$ equivalentemente $a\&(b \to_r c) \leq c$ y lo anterior se cumple porque

   $$a\&(b \to_r c) \leq b\&(b \to_r c) \leq c.$$

5. $b \to_r (a \to_r c) \leq b \to_r (a \to_r c)$ si y sólo si $b\&(b \to_r (a \to_r c)) \leq a \to_r c$ equivalentemente $a\&(b\&(b \to_r (a \to_r c))) \leq c$, es decir,

   $$(a\&b)\&(b \to_r (a \to_r c)) \leq c$$

   si y sólo si $b \to_r (a \to_r c) \leq (a\&b) \to_r c$.
   Por otra parte, $(a\&b) \to_r c \leq (a\&b) \to_r c$ es equivalente a

   $$a\&b\&((a\&b) \to_r c) \leq c$$

   si y sólo si $b\&((a\&b) \to_r c) \leq a \to_r c$, o bien,

   $$(a\&b) \to_r c \leq b \to_r (a \to_r c).$$

   Concluimos

   $$b \to_r (a \to_r c) = (a\&b) \to_r c.$$

6. $a \to_l (b \to_l c) \leq a \to_l (b \to_l c)$ equivale a $(a \to_l (b \to_l c))\&a \leq b \to_l c$ si y sólo si $((a \to_l (b \to_l c))\&a)\&b \leq c$, o bien, $a \to_l (b \to_l c) \leq (a\&b) \to_l c$.
   Por otro lado, $(a\&b) \to_l c \leq (a\&b) \to_l c$ si y sólo si $((a\&b) \to_l c)\&a\&b \leq c$ que es equivalente a $((a\&b) \to_l c)\&a \leq b \to_l c$ si y sólo si $(a\&b) \to_l c \leq a \to_l (b \to_l c)$. Por tanto
$$a \to_l (b \to_l c) = (a\&b) \to_l c.$$

7. $a \to_r (b \to_l c) \leq a \to_r (b \to_l c)$ si y sólo si $a\&(a \to_r (b \to_l c)) \leq b \to_l c$, equivalentemente $a\&(a \to_r (b \to_l c))\&b \leq c$, o bien,
$$(a \to_r (b \to_l c))\&b \leq a \to_r c$$
   si y sólo si $a \to_r (b \to_l c) \leq b \to_l (a \to_r c)$.
   Y $b \to_l (a \to_r c) \leq b \to_l (a \to_r c)$ si y sólo si $(b \to_l (a \to_r c))\&b \leq a \to_r c$ lo que equivale a $a\&(b \to_l (a \to_r c))\&b \leq c$, es decir,
$$a\&(b \to_l (a \to_r c)) \leq b \to_l c$$
   si y sólo si $b \to_l (a \to_r c) \leq a \to_r (b \to_l c)$.
   Se concluye que
$$a \to_r (b \to_l c) = b \to_l (a \to_r c).$$

8. Supongamos que existe $c \in Q$ tal que $a\&c = b$, o bien, $a\&c \leq b$ implicando que $c \leq a \to_r b$. Usando (1) tenemos
$$b = a\&c \leq a\&(a \to_r b) \leq b,$$
   concluyendo que
$$a\&(a \to_r b) = b.$$

9. Supongamos que existe $c \in Q$ tal que $c\&a = b$ luego $c\&a \leq b$ luego $c \leq a \to_l b$, de lo cual se sigue que
$$b = c\&a \leq (a \to_l b)\&a \leq b,$$
   por tanto
$$(a \to_l b)\&a = b.$$

10. Supongamos que existe $c \in Q$ tal que $b = a \to_r c$ entonces $b \leq a \to_r c$ y por consiguiente $a\&b \leq c$. Por tanto

$$a \to_r (a\&b) \leq a \to_r c = b,$$

y como $a\&b \leq a\&b$ entonces $b \leq a \to_r (a\&b)$. Así que

$$a \to_r (a\&b) = b.$$

11. Sea $c \in Q$ tal que $b = a \to_l c$ luego $b \leq a \to_l c$ de lo cual tenemos que $b\&a \leq c$ y por tanto

$$a \to_l (b\&a) \leq a \to_l c = b,$$

y por otra parte $b\&a \leq b\&a$ implica que $b \leq a \to_l (b\&a)$. Concluimos que

$$a \to_l (b\&a) = b.$$

12. Sea $c \in Q$ tal que $b = c \to_l a$, tenemos que $b \leq c \to_l a$ y por consiguiente $c\&b \leq a$ entonces $c \leq b \to_l a$. Así deducimos que

$$(b \to_l a) \to_r a \leq c \to_r a = b,$$

y como $b \to_l a \leq b \to_l a$ si y sólo si $(b \to_l a)\&b \leq a$ si y sólo si

$$b \leq (b \to_l a) \to_r a$$

concluyendo

$$(b \to_l a) \to_r a = b.$$

13. Sea $c \in Q$ tal que $b = c \to_l a$. Entonces $b \leq c \to_l a$, es decir, $b\&c \leq a$, así $c \leq b \to_r a$ y por tanto

$$(b \to_r a) \to_l a \leq c \to_l a = b$$

y como $b \to_r a \leq b \to_r a$ si y sólo si $b\&(b \to_r a) \leq a$ si y sólo si

$$b \leq (b \to_r a) \to_l a.$$

Y finalmente

$$(b \to_r a) \to_l a = b.$$

$\square$

Definición 3.5. *Un cuantal Q es conmutativo si y sólo si para cada $a, b \in Q$ se tiene que $a\&b = b\&a$.*

Observación 3.6. Q es conmutativo si y sólo si para cada $a, b \in Q$ se cumple que $a \rightarrow_r b = a \rightarrow_l b$.
En efecto, supongamos que Q es conmutativo. Note que $a \rightarrow_r b \leq a \rightarrow_l b$ si y sólo si $(a \rightarrow_r b)\&a \leq b$ si y sólo si $a\&(a \rightarrow_r b) \leq b$ lo cual siempre se cumple por (1) de la proposición (3.4).
Por otra parte, $a \rightarrow_l b \leq a \rightarrow_r b$ si y sólo si $a\&(a \rightarrow_l b) \leq b$ si y sólo si $(a \rightarrow_l b)\&a \leq b$ y por (2) de la proposición (3.4) siempre es cierta. Así que

$$a \rightarrow_r b = a \rightarrow_l b.$$

Ahora supongamos que para cada $a, b \in Q$ se cumple que $a \rightarrow_l b = a \rightarrow_r b$. $b\&a \leq b\&a$ si y sólo si $b \leq a \rightarrow_r (b\&a) = a \rightarrow_l (b\&a)$ si y sólo si $a\&b \leq b\&a$.
Análogamente, $a\&b \leq a\&b$ si y sólo si $b \leq a \rightarrow_l (a\&b) = a \rightarrow_r (a\&b)$ si y sólo si $b\&a \leq a\&b$. Por tanto

$$a\&b = b\&a.$$

Definición 3.7. *Sean Q un cuantal, $a \in Q$ y T el elemento máximo de Q.*

1. *a es derecho si y sólo si $a\&T \leq a$.*
2. *a es izquierdo si y sólo si $T\&a \leq a$.*
3. *a es bilateral si y sólo si a es izquierdo y derecho.*
4. *a es estrictamente derecho si y sólo si $a\&T = a$.*
5. *a es estrictamente izquierdo si y sólo si $T\&a = a$.*
6. *a es idempotente si y sólo si $a\&a = a$*
7. *Un elemento $1 \in Q$ es una unidad izquierda si y sólo si para cada $a \in Q$, $1\&a = a$.*
8. *Un elemento $1 \in Q$ es una unidad derecha si y sólo si para cada $a \in Q$, $a\&1 = a$.*
9. *Un elemento $1 \in Q$ es una unidad si y sólo si es unidad derecha y unidad izquierda.*

Definición 3.8. *Sea Q un cuantal.*

1. *Q es derecho (estrictamente derecho) si y sólo si cada $a \in Q$ es derecho (estrictamente derecho).*
2. *Q es izquierdo (estrictamente izquierdo) si y sólo si cada $a \in Q$ es izquierdo (estrictamente izquierdo).*
3. *Q es bilateral si y sólo si cada $a \in Q$ es bilateral.*
4. *Q es idempotente si y sólo si cada $a \in Q$ es idempotente.*
5. *Q es unitario derecho (unitario izquierdo) si y sólo si Q tiene una unidad derecha (unidad izquierda) 1.*
6. *Q es unitario si y sólo si Q tiene una unidad 1.*

Observación 3.9. Sea Q un cuantal.

1. Si Q es idempotente y derecho entonces es estrictamente derecho ya que para $a \in Q$ tenemos
$$a = a\&a \leq a\&T \leq a.$$
Tenemos un resultado análogo en el caso izquierdo.
2. Q es derecho si y sólo si para $a \in Q$, $T = a \to_r a$. Es claro pues $a\&T \leq a$ si y sólo si $T \leq a \to_r a$ si y sólo si $T = a \to_r a$.
3. Si Q es derecho entonces para cada $a, b \in Q$, $a\&b \leq a$ pues por la observación anterior $b \leq a \to_r a = T$ si y sólo si $a\&b \leq a$.
4. Si Q es estrictamente derecho entonces es unitario derecho con $T = 1$.

Examinamos sólo algunas propiedades que son relevantes para nosotros sobre cuantales pero se pueden consultar más resultados en [5].

Proposición 3.10. *Sea Q un cuantal estrictamente derecho. Entonces para a y $b \in Q$ se cumple:*

1. *$a\&b \leq a$*
2. *Si $a \leq c$ y $b \leq c$ entonces $a\&b \leq c$.*

   Si Q además es idempotente tenemos que:

3. $a \leq b$ *entonces* $a = a\&b$.
4. $a\&b\&c = a\&c\&b$.

Demostración. 1. Como & preserva el orden, $a\&b \leq a\&1 = a$.

2. $a\&b \leq c\&b \leq c\&c \leq c\&1 = c$.
3. $a = a\&a \leq a\&b$ y se cumple por (1) que $a\&b \leq a$ entonces
$$a = a\&b.$$
4. $a\&b\&c = a\&(b\&c)\&(b\&c) \leq a\&1\&c\&b\&1 = a\&c\&b$ y
$$a\&c\&b = a\&(c\&b)\&(c\&b) \leq a\&1\&b\&c\&1 = a\&b\&c.$$

□

Corolario 3.11. *En un cuantal idempotente Q para $a, b \in Q$ se cumple que:*
$$a \wedge b \leq a\&b.$$

Demostración. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ entonces
$$a \wedge b = (a \wedge b)\&(a \wedge b) \leq (a \wedge b)\&b \leq a\&b.$$

□

Observación 3.12. En un cuantal idempotente derecho Q, si $\&$ es conmutativa entonces $\& = \wedge$ pues de 3.10 tenemos que para $a, b \in Q$, $a\&b \leq a$ y $a\&b = b\&a \leq b$ luego $a\&b \leq a \wedge b$, y por el corolario anterior se tiene la igualdad.

Ejemplo 3.13. Cualquier local es un cuantal con la operación $\& = \wedge$. Además es conmutativo, idempotente y unitario. Además cualquier cuantal idempotente, conmutativo y unitario constituye un local pues $\& = \wedge$ y preserva supremos arbitrarios.

Ejemplo 3.14. Cualquier retícula completa L puede convertirse en un cuantal derecho e idempotente tomando para cada $x, y \in L$ con $y \neq 0$, $x\&y = x$ y $x\&0 = 0$. En efecto, sea $\{b_\alpha\} \subseteq Q$. Si $\{b_\alpha\} \neq \{0\}$ entonces $\sup_\alpha\{b_\alpha\} \neq 0$ luego
$$a\& \sup_\alpha\{b_\alpha\} = a = \sup_\alpha\{a\} = \sup_\alpha\{a\&b_\alpha\}.$$

Si $\{b_\alpha\} = \{0\}$ entonces $\sup_\alpha\{b_\alpha\} = 0$ y por tanto

$$a\& \sup_\alpha\{b_\alpha\} = a\&0 = 0 = \sup_\alpha\{0\} = \sup_\alpha\{a\&0\}.$$

La preservación de supremos a izquierda se sigue con un razonamiento similar.
Es claro que L con las operaciones anteriores es un cuantal derecho pues dado $a \in L$, $a\&T = a$. Por otra parte si $a \neq 0$, $a\&a = a$ y $0\&0 = 0$, por tanto es idempotente.

Ejemplo 3.15. Sea M un semigrupo multiplicativo y $\mathbb{P}(M)$ el conjunto potencia de M. Si $A \subseteq M$ y $B \subseteq M$ sea

$$A\&B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si $\{B_i\} \subseteq \mathbb{P}(M)$ entonces $A\&(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i(A\&B_i)$ ya que si tomamos $ab_i \in A\&(\bigcup_i B_i)$ entonces $a \in A$ y existe un i tal que $b_i \in B_i$ luego ab_i está en $\bigcup_i(A\&B_i)$; análogamente si tomamos un elemento x en $\bigcup_i(A\&B_i)$ entonces existe i tal que $x = ab_i$ con $a \in A$ y $b_i \in B_i$ luego $x \in A\&(\bigcup_i B_i)$. De manera similar tenemos $(\bigcup_i B_i)\&A = \bigcup_i(B_i\&A)$. Por tanto $\mathbb{P}(M)$ es un cuantal. Este ejemplo es importante cuando se estudian los cuantales de Girard.

Ejemplo 3.16. Una $\vee$-semiretícula o monoide conmutativo S, es un conjunto parcialmente ordenado donde cada subconjunto finito tiene supremo $\vee$ y existe un menor elemento 0 definido como $0 := \vee\emptyset$. La operación $\vee$ es asociativa, conmutativa, idempotente y además para cada $a \in S$ tenemos que $a \vee 0 = a$.
Sea S una $\vee$-semiretícula con una multiplicación binaria asociativa que distribuye supremos finitos y en donde el elemento máximo T actúa como una unidad. Denotemos por $Id(S)$ el conjunto de ideales I de S, en el sentido de ideal de una semiretícula, es decir, I es un subconjunto de S tal que

1. I es una $\vee$-sub-semiretícula, esto es, $0 \in I$ y si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$; y

2. I es un conjunto minimal, es decir, si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $b \in I$.

Entonces S es un cuantal. Si I y J son ideales de S entonces $I\&J$ es el ideal de S generado por los elementos ab con $a \in I$ y $b \in J$. Si $\{I_\alpha\}$ es una familia de ideales de S entonces $\sup_\alpha\{I_\alpha\}$ es el ideal generado por $\cup_\alpha I_\alpha$. Esto generaliza a los ideales de una retícula distributiva relacionados con la noción de local coherente que motivaría un estudio sobre cuantales coherentes.

Definición 3.17. *Sean P y Q cuantales.*

1. *Una función $f : P \to Q$ es un **homomorfismo de cuantales** si f preserva supremos arbitrarios y preserva también la operación $\&$.*

2. *Si P y Q son unitarios entonces $f : P \to Q$ es un homomorfismo unitario si f es un homomorfismo de cuantales que cumple $f(1_P) = 1_Q$, donde 1_P y 1_Q son respectivamente las unidades de P y Q.*

Note que un homomorfismo unitario de cuantales unitarios es un homomorfismo de monoides en la categoría SL de Sup-Retículas.
Como un homomorfismo $f : P \to Q$ preserva supremos arbitrarios, se sigue por el teorema del funtor adjunto (ver Apéndice) que tiene adjunto derecho $f_* : Q \to P$. Veremos algunas formas de relacionar f con f_*.

Proposición 3.18. *Sea $f : P \to Q$ un homomorfismo de cuantales. Entonces para $a \in P$ y $b \in Q$:*

$$f_*(f(a) \to_r b)) = a \to_r f_*(b)$$

y

$$f_*(f(a) \to_l b)) = a \to_l f_*(b)$$

Demostración. Tenemos que $f_*(f(a) \to_r b)) \leq a \to_r f_*(b)$ si y sólo si

$$a\&f_*(f(a) \to_r b)) \leq f_*(b).$$

Por adjunción lo anterior equivale a $f(a\&f_*(f(a) \to_r b)) \leq b$ si y sólo si

$$f(a)\&f(f_*(f(a) \to_r b)) \leq b.$$

Pero por adjunción sabemos que para cada $c \in Q$, $f(f_*(c)) \leq c$ por tanto

$$f(a)\&f(f_*(f(a) \to_r b)) \leq f(a)\&(f(a) \to_r b) \leq b,$$

y así

$$f_*(f(a) \to_r b)) \leq a \to_r f_*(b).$$

Ahora note que $a \to_r f_*(b) \leq f_*(f(a) \to_r b))$ si y sólo si $f(a \to_r f_*(b)) \leq f(a) \to_r b$ si y sólo si $f(a)\&f(a \to_r f_*(b)) \leq b$ si y sólo si $f(a\&(a \to_r f_*(b)) \leq b$ y por adjunción es equivalente a $a\&(a \to_r f_*(b)) \leq f_*(b)$, lo cual siempre se cumple por la proposición (3.4). Por tanto tenemos que para cualquier $a \in P$ y $b \in Q$

$$f_*(f(a) \to_r b)) = a \to_r f_*(b).$$

La segunda igualdad se sigue con un razonamiento similar al reemplazar $\to_r$ por $\to_l$. $\square$

3.2. Cuantales como categorías de álgebras

Denotemos por **Quant** la categoría de cuantales y homomorfismos y **UnQuant** la categoría de cuantales unitarios y homomorfismos unitarios. La siguiente proposición exhibirá una propiedad de adjunción de la construcción $\mathbb{P}(M)$ del ejemplo (3.15), donde M es un monoide y $\mathbb{P}(M)$ es el conjunto potencia de M equipado con una estructura de cuantal. Si **Mon** denota la categoría de monoides junto con homomorfismos de monoides, existe un funtor que olvida U : **UnQuant** → **Mon**. Note que $\mathbb{P}(M)$ es un cuantal unitario donde la unidad es $\{1\}$ con 1 la unidad del monoide M.

Proposición 3.19. *Existe un funtor $\mathbb{P}$: **Mon** → **UnQuant** que es adjunto izquierdo al funtor que olvida U : **UnQuant** → **Mon**.*

Demostración. Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de monoides, entonces defínase $\mathbb{P} : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ tal que para cada $A \subseteq M$, $\mathbb{P}(f)(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$. Del ejemplo (3.15) $\mathbb{P}(M)$ y $\mathbb{P}(N)$ son cuantales, entonces $\mathbb{P}(f)$ es homomorfismo unitario de cuantales.
En efecto, sea $\{B_\alpha\} \subseteq \mathbb{P}(M)$ entonces $y \in \mathbb{P}(f)(\bigcup_\alpha B_\alpha)$ si y sólo si existe $x \in \bigcup_\alpha B_\alpha$ tal que $y = f(x)$ si y sólo si existe α_i tal que $x \in B_{\alpha_i}$ y $y = f(x)$ si y sólo si existe α_i tal que $y \in \mathbb{P}(f)(B_{\alpha_i})$ si y sólo si $y \in \bigcup_\alpha \mathbb{P}(f)(B_\alpha)$. Por tanto

$$\mathbb{P}(f)(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha \mathbb{P}(f)(B_\alpha).$$

Por otra parte, para $A, B \subseteq M$, $y \in \mathbb{P}(f)(A\&B)$ si y sólo si existen $ab \in A\&B$ tal que $f(ab) = y$, como f es homomorfismo de monoides esto equivale a que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $f(a)f(b) = y$ si y sólo si $f(a) \in \mathbb{P}(f(A))$ y $f(b) \in \mathbb{P}(f(B))$ si y sólo si $y \in \mathbb{P}(f)(A)\&\mathbb{P}(f)(B)$ por tanto

$$\mathbb{P}(f)(A\&B) = \mathbb{P}(f)(A)\&\mathbb{P}(f)(B).$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(f)(\{1_M\}) = \{f(a) : a \in \{1_M\}\} = \{f(1_M)\} = \{1_N\}.$$

Con esta definición sobre morfismos podemos ver a $\mathbb{P}$ como un funtor. Para probar la adjunción, dado un morfismo $f : M \to Q$ en **Mon** con Q un cuantal unitario, definamos $\bar{f} : \mathbb{P}(M) \to Q$ tal que para $A \subseteq M$, $\bar{f}(A) = \sup\{f(a) \mid a \in A\}$. Veamos que $\bar{f}$ es homomorfismo unitario de cuantales.

$$\bar{f}(1_{\mathbb{P}(M)}) = \bar{f}(\{1_M\}) = \sup\{f(a) \mid a \in \{1_M\}\} = \sup\{f(1_M)\} = f(1_M) = 1_Q.$$

Además $\bar{f}(A\&B) = \sup f(A\&B) = \sup(f(A)\&f(B)) = \sup f(A)\& \sup f(B) = \bar{f}(A)\&\bar{f}(B)$.
Finalmente, sea $\{B_\alpha\} \subseteq \mathbb{P}(M)$,

$$\bar{f}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \sup f(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \sup \bigcup_\alpha f(B_\alpha) = \bigcup_\alpha \sup f(B_\alpha) = \bigcup_\alpha \bar{f}(B_\alpha).$$

Por tanto $\bar{f}$ es homomorfismo unitario de cuantales. La unicidad es clara porque en retículas los morfismos son únicos. $\square$

Capítulo 4

Prerradicales

Los prerradicales surgen del estudio de anillos de cocientes. Los anillos de cocientes tienen su origen en la construcción del anillo de fracciones mediante la cual le añadimos inversos multiplicativos a un anillo. Cuando R es un dominio entero conmutativo el anillo de cocientes es el campo de fracciones o campo de cocientes Q. Este campo de fracciones se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

1. Para cada $q \in Q$, existe $s \in R$ con $s \neq 0$ tal que $qs \in R$

2. Q es el anillo maximal sobre R que cumple (1).

La construcción de Q puede extenderse al caso cuando R es un anillo conmutativo arbitrario y tenemos S un conjunto multiplicativamente cerrado sin divisores de cero de R. En este caso se define el anillo de fracciones $Q = R[S^{-1}]$ que consta de todas las parejas (r, s) con $r \in R$, $s \in S$ y tal que $(r, s) = (t, u)$ si y sólo si existe $v \in S$ tal que $vur = vst$. Este anillo resultante Q satisface la condición (1) con la propiedad adicional de que $s \in S$ y por supuesto (2).

Para el caso en que R es un anillo no conmutativo se define de la misma forma que en el caso anterior un anillo derecho de fracciones $R[S^{-1}]$ pero se asume que S satisface la condición: para cada $r \in R$ y para cada $s \in S$ existen $b \in R$ y $t \in S$ tales que $rt = sb$. Así cada elemento en S es invertible en $R[S^{-1}]$.

En particular cuando S consiste de todos los elementos sin divisores de cero de R, la condición anterior se llama condición de Ore y $R[S^{-1}]$ se llama anillo de cocientes derecho de R[1].

Los cocientes de R-módulos están en correspondencia biyectiva con la clase de subconjuntos de R multiplicativamente cerrados que cumplen la condición de Ore, que a su vez está en correspondencia biunívoca con las topologías lineales en R que cumplen cierta propiedad adicional (Topologías de Gabriel). Estas topologías se relacionan con las asignaciones $\tau : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ que satisfacen:

1. $\tau(M) \leq M$
2. Para todo morfismo $f : M \to N$ de R-módulos: $f(\tau(M)) \leq \tau(f(M))$
3. Idempotencia: $\tau(\tau(M)) = M$
4. Para $N \leq M$, $\tau(N) = \tau(M) \cap N$.

donde $\leq$ denota la inclusión como R-Módulos.

Tratar con estructuras que sólo cumplen (1) y (2) es trabajar con prerradicales, es decir, un prerradical τ de R asigna a cada R-módulo M, un subobjeto $\tau(M)$, de tal forma que cada morfismo $M \to N$ induce una restricción, en otras palabras, un prerradical es un subfuntor del funtor identidad. En este capítulo nos interesará seguir un trabajo iniciado en el año 2000 (ver [6]) donde se estudia a los prerradicales como estructura de retícula.

Antes de comenzar cabe señalar que muchos conceptos de la teoría de Conjuntos pueden ser extendidos a clases que no son conjuntos y cuya justificación descansa en la axiomática de von Neumann- Bernays- Gödel entre ellos el de clase parcialmente ordenada; en este contexto, llamamos retícula grande a una clase parcialmente ordenada que cumple las propiedades de retícula.

En lo sucesivo R será un anillo asociativo con identidad y con R-Mod nos referimos a la categoría de R-módulos izquierdos y morfismos de módulos. Para los detalles sobre conceptos de teoría de Módulos referimos a la bibliografía [1] y [22].

[1]Se puede consultar [22] para una exposición más amplia de esta introducción.

4.1. La estructura de retícula de los prerradicales

Definición 4.1. *Un **prerradical** en R es un funtor $\tau : R$-Mod $\to R$-Mod que cumple:*

1. *Para cada $M \in R$-Mod, $\tau(M) \leq M$*
2. *Para cada morfismo de R-módulos $f : M \to N$ se tiene que*

$$f(\tau(M)) \leq \tau(f(M))$$

esto es, el siguiente diagrama está bien definido y es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tau(M) & \hookrightarrow & M \\ {\scriptstyle f\restriction_\tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \tau(N) & \hookrightarrow & N \end{array}$$

Observación 4.2. R-Pr denota la clase de todos los prerradicales en R. De la definición tenemos que los prerradicales son subfuntores del funtor identidad. Por otra parte, todo prerradical τ es preservador de orden pues si $N \leq M$ entonces tenemos el morfismo inclusión $i : N \to M$ y por la parte (2) de la definición, la inclusión se restringe $i \restriction_\tau : \tau(N) \to \tau(M)$.

Observación 4.3. Hay un orden parcial natural en R-Pr dado por:

$$\sigma \leq \tau \text{ si y sólo si para cada } M \in R\text{-Mod: } \sigma(M) \leq \tau(M).$$

donde este último denota la inclusión de R-módulos.
En efecto $\leq$ es orden parcial. Sea $M \in R$-Mod y $\sigma, \tau, \rho \in R$-Pr, entonces $\sigma(M) \leq \sigma(M)$, por tanto $\sigma \leq \sigma$. Ahora si $\sigma \leq \tau$ y $\tau \leq \sigma$, entonces para todo $M \in R$-Mod, $\sigma(M) \leq \tau(M)$ y $\tau(M) \leq \sigma(M)$ esto implica que $\tau(M) = \sigma(M)$ para cualquier M en R-Mod, por tanto $\sigma = \tau$. Finalmente, si $\sigma \leq \tau$ y $\tau \leq \rho$ entonces para cada $M \in R$-Mod: $\sigma(M) \leq \tau(M)$ y $\tau(M) \leq \rho(M)$ entonces es claro que $\sigma(M) \leq \rho(M)$ y por tanto $\sigma \leq \rho$.

Definición 4.4. *Existen cuatro operaciones en R-Pr, $\vee, \wedge, \circ$, y $(:)$ definidas de la siguiente manera. Para cada $M \in R$-Mod y para $\sigma, \tau \in R$-Pr:*

1. $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$

2. $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$

3. $(\sigma \circ \tau)(M) = \sigma(\tau(M))$

4. $(\sigma : \tau)(M)$ *es un submódulo de* M *que satisface :*

$$(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$$

   Observe que si $P_\sigma : M \to M/\sigma(M)$ *es el epimorfismo canónico entonces*

$$(\sigma : \tau)(M) = P_\sigma^{-1}(\tau(M/\sigma(M)))$$

   Para cualquier clase C $\subseteq R$*-Pr*

5. $\wedge\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}\}$ *está dado por* $\wedge\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}\}(M) = \cap\{\sigma(M) \mid \sigma \in \mathrm{C}\}$

6. $\vee\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}\}$ *está dado por* $\vee\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}\}(M) = \Sigma\{\sigma(M) \mid \sigma \in \mathrm{C}\}$

A la operación $\circ$ se le conoce como producto y a la operación : como coproducto.

Observación 4.5. La operación coproducto $(\tau : \sigma)(M)$ cumple que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(\tau : \sigma)(M) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "P_\tau"] \\
\sigma(M/\tau(M)) \arrow[r, hook, "i"'] & M/\tau(M)
\end{tikzcd}$$

donde P_τ y π son las proyecciones canónicas a los cocientes respectivos, es un producto fibrado.

Proposición 4.6. *Si* $\tau, \sigma \in R$*-Pr, entonces* $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\sigma \circ \tau$, $\tau : \sigma \in R$*-Pr.*

Demostración. Sean $M \in R$-Mod y $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos. Veamos que $\tau \wedge \sigma$ es prerradical. Es claro que $(\tau \wedge \sigma)(M) = \tau(M) \cap \sigma(M) \leq M$ pues $\tau(M)$ y $\sigma(M)$ son submódulos de M. Por otra parte, sea $a \in \tau(M) \cap \sigma(M)$, entonces como τ es prerradical tenemos que

$$f(a) = f \restriction_\tau (a) \in \tau(N)$$

y como σ es prerradical

$$f(a) = f\restriction_\sigma (a) \in \sigma(N),$$

por tanto

$$f(a) \in \tau(N) \cap \sigma(N) = (\tau \wedge \sigma)(N),$$

y así

$$f((\tau \wedge \sigma)(M)) \leq (\tau \wedge \sigma)(N).$$

Ahora veamos que $\tau \vee \sigma$ es prerradical. $(\tau \vee \sigma)(M) = \tau(M) + \sigma(M) \leq M$ pues $\tau(M), \sigma(M) \leq M$. Sea $a \in \tau(M) + \sigma(M)$ entonces es de la forma $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in \tau(M)$ y $a_2 \in \sigma(M)$, luego

$$f(a_1) = f\restriction_\tau (a_1) \in \tau(N)$$

y

$$f(a_2) = f\restriction_\sigma (a_2) \in \sigma(N),$$

así

$$f(a) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \in \tau(N) + \sigma(N)$$

y por tanto

$$f((\tau \vee \sigma)(M)) \leq (\tau \vee \sigma)(N).$$

Para ver que $\sigma \circ \tau$ es prerradical note que como $\tau \in R$-Pr entonces $\tau(M) \leq M$ y como $\sigma \in R$-Pr tenemos que $\sigma(\tau(M)) \leq \tau(M) \leq M$. Por último, basta notar que $f(\sigma(\tau(M))) \leq \sigma(f(\tau(M)))$ y $f(\tau(M)) \leq \tau(f(M))$. Como σ preserva el orden tenemos que

$$\sigma(f(\tau(M))) \leq \sigma(\tau(f(M))) = (\sigma \circ \tau)(f(M)).$$

Finalmente veamos que $\tau : \sigma$ es prerradical. Sean $M, M' \in R$-Mod y $f : M \to M'$. Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(\tau : \sigma)(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f\restriction_{\tau:\sigma}"'] & M \arrow[d, "f"] \\
(\tau : \sigma)(M') \arrow[r, hook] & M'
\end{tikzcd}$$

Para M' tenemos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
(\tau:\sigma)(M') \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"'] & M' \arrow[d, "P'_\tau"] \\
\sigma(M'/\tau(M')) \arrow[r, hook] & M'/\tau(M')
\end{tikzcd}$$

Si π y P'_τ son proyecciones canónicas a los respectivos cocientes y

$$\begin{array}{c}\hat{f} : M/\tau(M) \to M'/\tau(M') \\ a+\tau(M) \mapsto f(a)+\tau(M')\end{array}$$

entonces por la propiedad universal del producto fibrado anterior existe

$$r : (\tau:\sigma)(M) \to (\tau:\sigma)(M')$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\tau:\sigma)(M) \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "f\circ i"] \arrow[ddr, "\sigma(\hat{f})\circ\pi"'] & & \\
& (\tau:\sigma)(M') \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & M' \arrow[d, "P'_\tau"] \\
& \sigma(M'/\tau(M')) \arrow[r, hook] & M'/\tau(M')
\end{tikzcd}$$

de tal manera que $r = f\restriction_{\tau:\sigma}$ y así $(\tau:\sigma)$ es prerradical. $\square$

Observación 4.7. Notar que a pesar de que C puede ser una clase propia, $\{\sigma(M) : \sigma \in C\}$ es un conjunto para cada $M \in R$-Mod, pues $\sigma(M) \subseteq M$.

Proposición 4.8. *Para $\sigma, \tau \in R$-Pr se cumple:*

$$\sigma\circ\tau \leq \sigma\wedge\tau \leq \sigma\vee\tau \leq (\tau:\sigma)$$

Demostración. En efecto, para cada $M \in R$-Mod es claro que

$$\sigma(M)\cap\tau(M) \leq \sigma(M) \text{ y } \sigma(M)\cap\tau(M) \leq \tau(M),$$

con lo cual $\sigma(M) \cap \tau(M) \leq \sigma(M) + \tau(M)$. Por tanto

$$\sigma \wedge \tau \leq \sigma \vee \tau.$$

Veamos que $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M) \cap \tau(M)$. Como $\tau \in R$-Pr, $\tau(M) \leq M$ entonces $\sigma(\tau(M)) \leq \tau(M)$; como σ también es prerradical, por (2) de la definición de prerradical se obtiene que $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M)$. Por tanto $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M) \cap \tau(M)$ y así

$$\sigma \circ \tau \leq \sigma \wedge \tau.$$

Por último, observe que tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M) \arrow[dr, dashed, "r_1"] \arrow[drr, "i"] \arrow[ddr, "\sigma(P_\tau)"'] & & \\
& (\tau:\sigma)(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, "P_\tau"] \\
& \sigma(M/\tau(M)) \arrow[r, hook] & M/\tau(M)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tau(M) \arrow[dr, dashed, "r_2"] \arrow[drr, "i"] \arrow[ddr, "0"'] & & \\
& (\tau:\sigma)(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, "P_\tau"] \\
& \sigma(M/\tau(M)) \arrow[r, hook] & M/\tau(M)
\end{tikzcd}$$

pues para $a \in \sigma(M)$ se cumple que

$$P_\tau \circ i(a) = P_\tau(a) = a + \tau(M) = \sigma(P_\tau(a)) = i \circ \sigma(P_\tau)(a)$$

y para $a \in \tau(M)$ tenemos

$$P_\tau \circ i(a) = a + \tau(M) = \tau(M) = i(\tau(M)) = i \circ 0(a),$$

y los morfismos r_1 y r_2 son inclusiones. Por tanto $\sigma(M) + \tau(M) \leq (\tau : \sigma)(M)$ y así $\sigma \vee \tau \leq (\tau : \sigma)$. $\square$

Las cuatro operaciones anteriores son asociativas y preservan el orden, $\wedge$ y $\vee$ son conmutativas pero $\circ$ y $:$ no necesariamente lo son.

Observación 4.9. R-Pr con las operaciones $\wedge$ y $\vee$ forman una retícula.
Ya sabemos que R-Pr es un conjunto parcialmente ordenado. Sean $\sigma, \tau \in R$-Pr y veamos que $\sigma \wedge \tau = \text{ínf}\{\sigma, \tau\}$ y que $\sigma \vee \tau = \sup\{\sigma, \tau\}$.
Es claro que $\sigma \wedge \tau \leq \sigma$ y que $\sigma \wedge \tau \leq \tau$. Sea $\eta \in R$-Pr tal que $\eta \leq \sigma$ y $\eta \leq \tau$, entonces para todo R-módulo M, $\eta(M) \subseteq \sigma(M)$ y $\eta(M) \subseteq \tau(M)$. Por tanto

$\eta(M) \subseteq \sigma(M) \cap \tau(M)$ y así $\eta \leq \sigma \wedge \tau$.
Por otra parte, sea $a \in \sigma(M)$ entonces $a = a + 0 \in \sigma(M) + \tau(M)$ luego $\sigma(M) \subseteq \sigma(M) + \tau(M)$. Similarmente podemos ver que $\tau(M) \subseteq \sigma(M) + \tau(M)$. Por tanto $\sigma \leq \sigma \vee \tau$ y $\tau \leq \sigma \vee \tau$.
Ahora si $\eta \in R$-Pr tal que $\sigma \leq \eta$ y $\tau \leq \eta$, entonces para todo R-módulo M tenemos que $\sigma(M) \subseteq \eta(M)$ y $\tau(M) \subseteq \eta(M)$. Sea $a_\sigma + a_\tau \in \sigma(M) + \tau(M)$, entonces $a_\sigma \in \sigma(M) \subseteq \eta(M)$ y $a_\tau \in \tau(M) \subseteq \eta(M)$ y por tanto $a_\sigma + a_\tau \in \eta(M)$. Así $\sigma \vee \tau \leq \eta$.

Definición 4.10. *Un submódulo $N \leq M$ se llama **completamente invariante** si y sólo si para cada endomorfismo $f : M \to M$ se cumple que $f(N) \leq N$.*

Tenemos dos clases de prerradicales especialmente importantes.

Definición 4.11. *Sea N un submódulo completamente invariante de M, se definen los prerradicales α_N^M y ω_N^M como sigue. Para cada $K \in R$-Mod:*

$$\alpha_N^M(K) = \Sigma\{f(N) : f \in Hom_R(M, K)\}$$

$$\omega_N^M(K) = \cap\{f^{-1}(N) : f \in Hom_R(K, M)\}$$

Proposición 4.12. *α_N^M y ω_N^M son prerradicales.*

Demostración. Para $K \in R$-Mod, $\alpha_N^M \leq K$ ya que para cada $f \in Hom_R(M, K)$, $f(N) \leq K$ y $\omega_N^M \leq K$ porque para cada $f \in Hom_R(K, M)$, $f^{-1}(N) \leq K$.
Sea $f : K \to L$ y veamos que $f(\alpha_N^M(K)) \leq \alpha_N^M(L)$. Tomemos $a \in \alpha_N^M(K)$ entonces para $i \in \{1, ..., n\}$ existen $f_i \in Hom_R(M, K)$ tal que $a = b_1 + ... + b_n$ con $b_i \in f_i(N)$ para cada i. Definamos para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$h_i := f \circ f_i : M \to L$$

entonces para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f(b_i) \in f(f_i(N)) = h_i(N)$, luego

$$f(a) = f(b_1) + ... + f(b_n) \in h_1(N) + ... + h_n(N),$$

así $f(a) \in \alpha_N^M(L)$ y por tanto $f(\alpha_N^M(K)) \leq \alpha_N^M(L)$. Ahora tomemos $f : K \to L$ y $a \in \omega_N^M(K)$ entonces se cumple que para cada $g : K \to M$, $a \in g^{-1}(N)$. Sea $h : L \to M$. Como $f : K \to L$ entonces $h \circ f : K \to M$ luego $(h \circ f)(a) \in N$ y por tanto

$$f(\omega_N^M(K)) \leq \omega_N^M(L).$$

$\square$

Observación 4.13. Para cada $\sigma \in R$-Pr y $M \in R$-Mod, $\sigma(M)$ es un submódulo completamente invariante de M. En efecto, tomemos $f : M \to M$ entonces

$$f(\sigma(M)) \leq \sigma(f(M)) \leq \sigma(M).$$

Observación 4.14. Si $M \in R$-Mod y N es un submódulo completamente invariante de M entonces

$$\alpha_N^M(M) = \Sigma\{f(N) : f \in Hom_R(M, M)\} \leq N,$$

pues cada $f(N) \leq N$ porque N es completamente invariante.
Como $1_M \in Hom_R(M, M)$ entonces $N = 1_M(N) \leq \alpha_N^M(M)$ por tanto

$$\alpha_N^M(M) = N.$$

También tenemos que

$$\omega_N^M(M) = \cap\{f^{-1}(N) : f \in Hom_R(M, M)\} \geq N$$

pues para cada f, $N \leq f^{-1}(N)$.
Como $1_M \in Hom_R(M, M)$ entonces $\omega_N^M(M) \leq 1_M^{-1}(N) = N$ y por tanto

$$\omega_N^M(M) = N.$$

Proposición 4.15. *Sean $M \in R$-Mod, $\sigma \in R$-Pr y N un submódulo completamente invariante de M. Entonces $\sigma(M) = N$ si y sólo si $\alpha_N^M \leq \sigma \leq \omega_N^M$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma(M) = N$, sean $K \in R$-Mod y $a \in \alpha_N^M(K)$ entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existen $f_i \in Hom_R(M, K)$ tales que

$$a = b_1 + ... + b_n$$

donde para cada i, $b_i \in f_i(N) = f_i(\sigma(M)) \leq \sigma(f_i(M)) \leq \sigma(K)$, por tanto $a \in \sigma(K)$ y así

$$\alpha_N^M(K) \leq \sigma(K).$$

Por otra parte, tomemos $g : K \to M$ entonces

$$\sigma(K) = \sigma(g^{-1}(M)) \leq g^{-1}(\sigma(M)) = g^{-1}(N),$$

intersectando a cada $g^{-1}(N)$ tenemos $\sigma(M) \leq \omega_N^M(K)$.
Ahora supongamos que $\alpha_N^M \leq \sigma \leq \omega_N^M$ y veamos que $\sigma(M) = N$. De la observación anterior tenemos que:

$$N = \alpha_N^M(M) \leq \sigma(M) \leq \omega_N^M(M) = N,$$

y por tanto

$$\sigma(M) = N.$$

□

Proposición 4.16. *Sean* $\tau \in R$*-Pr,* $M \in R$*-Mod y para cada* $\alpha \in I$*,* $M_\alpha \leq M$*. Entonces*

1. $\tau(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha \in I} \tau(M_\alpha)$
2. $\tau(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} \tau(M_\alpha)$

Demostración.

1. Para cada $\alpha \in I$ el siguiente diagrama conmuta por ser τ prerradical:

$$\begin{tikzcd}
\tau(\prod\limits_{\alpha \in I} M_\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, "P_\alpha\restriction_\tau"'] & \prod\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \arrow[d, "P_\alpha"] \\
\tau(M_\alpha) \arrow[r, hook] & M_\alpha
\end{tikzcd}$$

es decir, para cada $\alpha \in I$ tenemos un morfismo

$$\tau(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \to \tau(M_\alpha)$$

entonces por la propiedad del producto existe un único morfismo

$$\tau(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \to \prod_{\alpha \in I} \tau(M_\alpha)$$

y por tanto

$$\tau(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha \in I} \tau(M_\alpha).$$

2. Para cada $\alpha \in I$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
\tau(M_\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, "i_\alpha\restriction_\tau"'] & M_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"] \\
\tau(\bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha) \arrow[r, hook] & \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del coproducto, existe un morfismo único

$$\bigoplus_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha)\to\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha)$$

y por tanto

$$\bigoplus_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha)\leq\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha).$$

Por otra parte, sea $X=(X_\alpha)_{\alpha\in I}\in\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha)$ como

$$\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha)\hookrightarrow\tau(\prod_{\alpha\in I}M_\alpha)\hookrightarrow\prod_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha)$$

por la parte 1, entonces para cada α, $X_\alpha\in\tau(M_\alpha)$, pero para casi todo $\alpha\in I$ salvo un número finito $X_\alpha=0$, por tanto $X\in\bigoplus_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha)$ y así

$$\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha)\leq\bigoplus_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha).$$

Concluimos que

$$\tau(\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha)=\bigoplus_{\alpha\in I}\tau(M_\alpha).$$

□

Teorema 4.17. *Sea $\tau\in R$-Pr. Entonces $\tau=1$ si y sólo si $\tau(R)=R$.*

Demostración. Es claro que si $\tau=1$ entonces $\tau(R)=R$.
Supongamos que $\tau(R)=R$ y sea $M\in R$-Mod con $x\in M$. Definamos el morfismo $f_x:R\to M$ tal que $f_x(r)=rx$. Entonces existe un epimorfismo $f:\bigoplus_{x\in M}R\to M$ luego $f(\bigoplus_{x\in M}R)=M$, por tanto

$$M=f(\bigoplus_{x\in M}R)=f(\bigoplus_{x\in M}\tau(R))=f(\tau(\bigoplus_{x\in M}R))\leq\tau(f(\bigoplus_{x\in M}R))=\tau(M).$$

Así que $M\leq\tau(M)\leq M$ luego $\tau(M)=M$ para cada $M\in R$-Mod, por tanto

$$\tau=1.$$

□

Para seguir estudiando las propiedades sobre prerradicales son necesarias ciertas propiedades sobre módulos que puntualizamos a continuación.

Definición 4.18. *Un módulo S es simple si sus únicos submódulos son $\bar{0}$ y S.*

R-Simp denotará un conjunto de representantes de todos los R-módulos simples.

Teorema 4.19. *Sea $M \in R$-Mod no cero finitamente generado. Entonces todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo maximal. En particular, M tiene submódulos maximales.*

Demostración. Sea K un submódulo propio de M. Como M es finitamente generado, existen $x_1, ..., x_n \in M$ tales que

$$M = K + Rx_1 + ... + Rx_n.$$

Además podemos suponer que n es el mínimo número de elementos que necesito para generar a M, entonces $L = K + Rx_2 + ... + Rx_n$ es un submódulo propio de M.
Consideremos $\mathcal{P}$ la colección de todos los submódulos propios de M que contienen a L. Note que $\mathcal{P} \neq \emptyset$ pues $L \in \mathcal{P}$. Además $N \in \mathcal{P}$ si y sólo si $L \subseteq N$ y x_1 no pertenece a N.
$\mathcal{P}$ hereda el orden parcial de $Sub(M)$. Veamos que toda cadena de $\mathcal{P}$ tiene una cota superior. Sea $\mathcal{A}$ una cadena de $\mathcal{P}$ y $N = \bigcup \mathcal{A}$. Entonces tenemos que:

- N es submódulo propio de M. En efecto, sean $a, b \in R$, $n, m \in N$ y veamos que $an + bm \in N$. Como $n, m \in N$, existen $N_1, N_2 \in \mathcal{A}$ tal que $n \in N_1$ y $m \in N_2$, pero $\mathcal{A}$ es cadena entonces $N_1 \leq N_2$ o $N_2 \leq N_1$. Supongamos que $N_1 \leq N_2$ entonces $n, m \in N_2$, luego $an + bm \in N_2 \subseteq N$ y así $N \leq M$. Ahora si $N = M$ entonces $x_1 \in N$ luego existe $K \in \mathcal{P}$ tal que $x_1 \in K$ lo cual no puede suceder. Por tanto N es submódulo propio de M.

- $L \leq N$ porque $L \in \bigcup \mathcal{A}$.

- N es cota superior de $\mathcal{A}$ porque $N = \bigcup \mathcal{A}$.

Por el Lema de Zorn, $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximal N'. Por tanto N' es el submódulo maximal de M que contiene a L.
En particular M siempre tiene submódulos maximales pues $\bar{0}$ es submódulo propio de M. $\square$

4.2. Propiedades del anillo en términos de la retícula R-Pr

Para ofrecer una mejor comprensión de los siguientes resultados recordamos algunas definiciones sobre teoría de módulos. Para los detalles sobre ciertas afirmaciones consultar referencia [1].

Definición 4.20. *Sean M y K R-módulos y N un submódulo de M. Entonces:*

1. *N es **esencial** en M si para cada $L \leq M$ se cumple que si $N \cap L = \bar{0}$ entonces $L = \bar{0}$.*

2. *Un monomorfismo $f : K \to M$ se llama **monomorfismo esencial** si $f(K)$ es submódulo esencial de M.*

3. *Un R-módulo E es **inyectivo** si para todo $f \in Hom_R(K, E)$ y para todo monomorfismo $g \in Hom_R(K, M)$ existe $h \in Hom_R(M, E)$ tal que $h \circ g = f$.*

4. *Una pareja (E, j) es una **cápsula inyectiva** de M si E es un R-módulo inyectivo y $j \in Hom_R(M, E)$ es un monomorfismo esencial. Denotaremos la cápsula inyectiva de M por $E(M)$.*

Observación 4.21. Para cada módulo existe una cápsula inyectiva y es única salvo isomorfismo (se puede consultar el teorema 18.10 de [1]). Note además que para todo $N \leq E(M)$ con $N \neq \bar{0}$ se cumple que $N \cap M \neq \bar{0}$.

Proposición 4.22. *Todo R-módulo M se encaja como submódulo de un producto de cápsulas inyectivas de módulos simples.*

Demostración. Sean $M \in R$-Mod y $m \in M$ con $m \neq 0$. Entonces $\langle m \rangle \leq M$ es finitamente generado, luego por la proposición anterior $\langle m \rangle$ tiene un submódulo maximal L y así $\langle m \rangle / L$ es simple. Sea $S_m := \langle m \rangle / L$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\langle m \rangle \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, "f_m"] \\
S_m \arrow[r, hook] & E(S_m)
\end{tikzcd}$$

Además $f_m(m) \neq 0$ pues $m \neq 0$. Por la propiedad del producto existe

$$M \hookrightarrow \prod_{m \in M \setminus \{0\}} E(S_m).$$

$\square$

Volviendo a nuestro estudio de prerradicales tenemos las siguientes propiedades.

Lema 4.23. *Sea $\sigma \in R$-Pr. Si para cada R-módulo simple S, $\sigma(E(S)) = 0$ entonces $\sigma = 0$.*

Demostración. Supongamos que para cada $S \in R$-Simp, $\sigma(E(S)) = 0$. Debemos ver que para $M \in R$-Mod, $\sigma(M) = 0$, pero por la proposición (4.22) sabemos que todo R-módulo M se encaja en el producto de cápsulas inyectivas de R-módulos simples, entonces tenemos:

$$\sigma(M) \hookrightarrow \sigma(\prod_{m \in M} E(S_m)) \hookrightarrow \prod_{m \in M} \sigma(E(S_m)) = 0$$

donde $E(S_m)$ es el submódulo simple descrito en la proposición (4.22). $\square$

Observación 4.24. Notar que si $K \leq N \leq M$ y K y N son submódulos completamente invariantes de M entonces

$$\alpha_K^M \leq \alpha_N^M \text{ y } \omega_K^M \leq \omega_N^M.$$

Teorema 4.25. *R-Pr es una retícula atómica y coatómica. El conjunto de átomos es*

$$\{\alpha_S^{E(S)} : S \in R - Simp\}$$

y el conjunto de coátomos es

$$\{\omega_I^R : I \ es \ ideal \ maximal \ de \ R\}.$$

Demostración. Para la primera parte tomemos $\sigma \in R$-Pr con $\sigma \neq 0$. Por el lema 4.23, existe $S \in R$-Simp tal que $\sigma(E(S)) \neq 0$. Como S es submódulo esencial de su cápsula inyectiva $E(S)$ y además $\sigma(E(S)) \leq E(S)$ con $\sigma(E(S)) \neq 0$ se cumple que $S \cap \sigma(E(S)) \neq 0$, pero $S \cap \sigma(E(S)) \leq S$ y S es simple, luego $S \cap \sigma(E(S)) = S$. Por tanto, $S \leq \sigma(E(S))$. Como S y $\sigma(E(S))$ son submódulos completamente invariantes de la cápsula inyectiva $E(S)$, entonces por la observación anterior

$$\alpha_S^{E(S)} \leq \alpha_{\sigma(E(S))}^{E(S)}$$

y por la proposición 4.15 tenemos que

$$\alpha_{\sigma(E(S))}^{E(S)} \leq \sigma,$$

por tanto

$$\alpha_S^{E(S)} \leq \sigma.$$

Ahora sea $\tau \in R$-Pr tal que $\tau < \alpha_S^{E(S)}$ y veamos que $\tau = 0$. Entonces

$$\tau(E(S)) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S.$$

Si $\tau(E(S)) = S$ entonces por la proposición 4.15 $\alpha_S^{E(S)} \leq \tau$ lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto $\tau(E(S)) < S$ con S simple, luego $\tau(E(S)) = 0$.
Por otra parte, tomemos $S' \in R$-Simp con $S' \ncong S$ y veamos que también se cumple $\tau(E(S')) = 0$. Tenemos que

$$\tau(E(S')) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S')).$$

Afirmamos que

$$\alpha_S^{E(S)}(E(S')) = \sum\{f(S) : f \in Hom_R(E(S), E(S'))\} = \bar{0}.$$

Supongamos que existe $f : E(S) \to E(S')$ tal que $f(S) \neq 0$. Como $E(S')$ es la cápsula inyectiva de S', entonces $S' \cap f(S) \neq 0$ y $S' \cap f(S) \leq S'$, luego $S' \cap f(S) = S'$ y por tanto $S' \leq f(S)$. Observe que $f(S)$ es simple pues $f(S) \cong S/Nuf \restriction_S$ y como S es simple y $f(S) \neq 0$ entonces $Nuf \restriction_S = 0$, así $f(S) \cong S$. Entonces $S' = f(S)$ pues $S' \neq 0$ por definición, obteniendo así que $S' \cong S$ lo cual es una contradicción. Por tanto, para cada $f : E(S) \to E(S')$ se tiene que $f(S) = 0$ y así $\alpha_S^{E(S)}(E(S')) = 0$. Así obtenemos que $\tau(E(S')) = 0$ para cada S' simple. Aplicando el lema 4.23 $\tau = 0$ y de esta forma $\alpha_S^{E(S)}$ es un átomo de R-Pr.

Para ver la segunda parte del teorema, sea $\sigma \in R$-Pr con $\sigma \neq 1$. Entonces $\sigma(R) \lneqq R$. Sea I un ideal maximal de R tal que $\sigma(R) \leq I$.
Primero note que I es un submódulo completamente invariante de R. Supongamos que existe $f : R \to R$ tal que $I < f(I)$. Como I es maximal entonces $f(I) = R$, luego existe $a \in I$ tal que $f(a) = 1$ pero $f(a) = f(a \cdot 1) = af(1)$, así que $1 = af(1) \in IR = I$ lo cual implica que $1 \in I$ y es una contradicción. Por tanto, debe suceder que para cualquier $f : R \to R$, $f(I) \leq I$, así que I es submódulo

completamente invariante de R.
Entonces por la observación anterior

$$\sigma \leq \omega^R_{\sigma(R)} \leq \omega^R_I.$$

Ahora tomemos $\tau \in R$-Pr tal que $\omega^R_I < \tau$, entonces

$$I = \omega^R_I(R) \leq \tau(R).$$

Si $I = \tau(R)$ entonces por la proposición 4.15 tenemos que $\tau \leq \omega^R_I$ lo que contradice nuestra suposición. Por tanto $I < \tau(R) \leq R$ y como I es maximal en R entonces $\tau(R) = R$ y por el teorema 4.17 $\tau = 1$, así ω^R_I es un coátomo de R-Pr. $\square$

Teorema 4.26. *Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-Pr, $\{\sigma_\alpha\}_\alpha \subseteq R$-Pr, $M \in R$-Mod. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. a*)* *(Ley Modular): $\sigma \leq \tau$ implica que $\sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$*

b*)* *Si $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ es una familia dirigida entonces $\tau \wedge (\vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha)$*

2. a*)* $(\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \wedge_\alpha(\sigma_\alpha \tau)$

b*)* $(\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \vee_\alpha(\sigma_\alpha \tau)$

c*)* $\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha = \wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)$

d*)* $(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)$

Demostración. Sea $M \in R$-Mod.

1. *a*) Supongamos que $\sigma(M) \leq \tau(M)$. Tomemos $a \in \sigma(M) + (\tau(M) \cap \eta(M))$, entonces $a = b + c$ con $b \in \sigma(M) \subseteq \tau(M)$ y $c \in \tau(M) \cap \eta(M)$. Entonces $a = b + c$ con $b, c \in \tau(M)$, luego $a \in \tau(M)$. Por otra parte, $a = b + c$ con $b \in \sigma(M)$, $c \in \eta(M)$ entonces $a \in \sigma(M) + \eta(M)$. Por tanto

$$a \in \tau(M) \cap (\sigma(M) + \eta(M)).$$

Ahora sea $a \in \tau(M) \cap (\sigma(M) + \eta(M))$, entonces $a = b + c$ con $b \in \sigma(M)$ y $c \in \eta(M)$, luego $c = a - b \in \tau(M)$ ya que $b \in \sigma(M) \subseteq \tau(M)$ y $a \in \tau(M)$, por tanto $c \in \tau(M) \cap \eta(M)$ así

$$a = b + c \in \sigma(M) + (\tau(M) \cap \eta(M)).$$

Por tanto, para cada $M \in R$-Mod:

$$\sigma(M) + (\tau(M) \cap \eta(M)) = \tau(M) \cap (\sigma(M) + \eta(M)),$$

luego

$$\sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \tau).$$

b) Sea $M \in R$-Mod y $a \in \tau(M) \cap (\sum_\alpha \sigma_\alpha(M))$ entonces $a \in \tau(M)$ y además $a = a_1 + ... + a_n$ con $a_i \in \sigma_{\alpha_i}(M)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ es una familia dirigida, existe $\beta \in I$ tal que para $i \in \{1, ..., n\}$ $\sigma_{\alpha_i} \leq \sigma_\beta$, luego $a \in \tau(M) \cap \sigma_\beta(M)$, por tanto

$$a \in \sum_\alpha (\tau(M) \cap \sigma_\alpha(M)).$$

Ahora tomemos $a \in \vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha)(M)$ entonces $a = b_1 + ... + b_n$ con $b_i \in \tau(M) \cap \sigma_{\alpha_i}(M)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $a \in \tau(M)$ y $a \in \sum_\alpha \sigma_\alpha(M)$, luego

$$a \in \tau(M) \cap \sum_\alpha \sigma_\alpha(M).$$

Por tanto

$$\tau \wedge (\vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha).$$

2. *a*) $((\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau)(M) = (\wedge_\alpha \sigma_\alpha)(\tau(M)) = \cap_\alpha \sigma_\alpha(\tau(M)) = \cap_\alpha \sigma_\alpha \tau(M) = (\wedge_\alpha(\sigma_\alpha \tau))(M)$.

   b) $((\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau)(M) = (\vee_\alpha \sigma_\alpha)(\tau(M)) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(\tau(M)) = \sum_\alpha \sigma_\alpha \tau(M) = (\vee\alpha(\sigma_\alpha \tau))(M)$.

   c) $(\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha)(M)/\tau(M) = \wedge_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \cap_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \cap_\alpha((\tau : \sigma_\alpha)(M)/\tau(M)) = (\cap_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)(M))/\tau(M) = (\wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)(M))/\tau(M)$.

   d) $(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha)(M)/\tau(M) = \vee_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \sum_\alpha((\tau : \sigma_\alpha)(M)/\tau(M)) = (\sum_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)(M))/\tau(M)) = (\vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)(M))/\tau(M)$.

$\square$

Observe que el producto preserva supremos de un lado y el coproducto preserva los ínfimos.

Para terminar la revisión de la estructura de retícula de R-Pr son necesarios algunos conceptos de teoría de módulos y anillos que precisamos en seguida.

Definición 4.27. *Un R-módulo M es semisimple si y sólo si*

$$M = \sum \{S \leq M : S \text{ es simple}\}$$

Definición 4.28. *Un anillo R es artiniano si toda cadena descendente de ideales de R, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ es finita.*

Teorema 4.29. *Todo anillo semisimple con unidad es artiniano.*

Demostración. Sea R un anillo semisimple con unidad y consideremos una cadena estrictamente descendente $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq L_3 \supsetneq ...$ de ideales de R. Como R es semisimple, R puede verse como una suma directa de ideales minimales $U_1, ..., U_k$ (ver proposición 3.4 de [23]). Si $L_1 \subsetneq R$, podemos encontrar $U_1, ..., U_{k_1}$ ideales minimales de R con $k_1 < k$ tales que

$$R = L_1 \oplus (U_1 \oplus ... \oplus U_{k_1}).$$

Como $L_2 \subsetneq L_1$, la suma $U_1 \oplus ... \oplus U_{k_1}$ no es maximal con respecto a $L_2 \cap (U_1 \oplus ... \oplus U_{k_1}) = 0$ ya que esto implicaría que

$$R = L_2 \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_{k_1} = L_1 \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_{k_1}$$

y por tanto $L_1 = L_2$. Por consiguiente,

$$R = L_2 \oplus (U_1 \oplus ... \oplus U_{k_2})$$

con $k_1 < k_2$. Después de un número finito de pasos llegamos a

$$R = L_n \oplus (U_1 \oplus ... \oplus U_{k_n}),$$

es decir, $L_n = 0$ y por tanto la cadena es finita. □

Teorema 4.30. *Sea R un anillo entonces son equivalentes:*

1. *R es semisimple.*

2. *Todo R-módulo M es semisimple.*

Demostración. Ver prueba en referencia [1], 13.9 página 155. □

Lema 4.31. *Si R es semisimple entonces R-Simp es finito.*

Demostración. Ver prueba en referencia [1], 13.7 página 154.

□

Teorema 4.32. *Son equivalentes:*

1. *R es anillo artiniano semisimple.*
2. *R-Pr es un álgebra booleana finita.*
3. *R-Pr es un álgebra booleana.*
4. *R-Pr es una retícula booleana grande.*
5. *Cada $\sigma \in R$-Pr satisface*

$$\sigma = \vee\{\alpha_S^{E(S)} : \alpha_S^{E(S)} \leq \sigma\}.$$

6. $1 = \vee\{\alpha_S^{E(S)} : S \in R - Simp\}$.
7. *Para cada $\sigma \in R$-Pr, existe $\mathcal{A} \subseteq R$-Simp tal que $\sigma = soc_{\mathcal{A}}$ donde*

$$soc_{\mathcal{A}}(M) = \sum\{S \leq M : S \cong T \in \mathcal{A}\}.$$

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$] Supongamos que R es artiniano semisimple entonces todo R-módulo M es semisimple y todo submódulo de M es semisimple, luego para cada $\sigma \in R-$Pr, $\sigma(M)$ es semisimple entonces

$$\sigma(M) = \Sigma\{S_i : S_i \; simple\}$$

Así, cada prerradical queda completamente determinado por sus valores en R-Simp, por tanto R-Pr es isomorfa como retícula a la retícula de subconjuntos de R-Simp, así tenemos que R-Pr es un álgebra Booleana finita.
$2) \Rightarrow 3)$] Es inmediato.
$3) \Rightarrow 4)$] Es inmediato.
$4) \Rightarrow 5)$] En cualquier retícula Booleana atómica, cada elemento es la unión de

los átomos que están por debajo de él y este hecho se extiende a retículas grandes.
$5) \Rightarrow 6)]$ Es claro porque cada prerradical se representa como el supremo de átomos, en particular 1.
$6) \Rightarrow 7)]$ Sea $\sigma \in R$-Pr. Si $\sigma = 0$ entonces para cada $S \in R$-Simp, $\sigma(E(S)) = 0$ por tanto $\sigma = \vee \alpha_S^{E(S)}$.
Si $\sigma \neq 0$ entonces existe $S \in R-$Simp tal que $\sigma(E(S)) \neq 0$. Sea

$$\mathcal{A} = \{S \in R - Simp : \sigma(E(S)) \neq 0\}.$$

Para cualquier R-módulo simple S, $\sigma(E(S)) \neq 0$ entonces $\alpha_S^{E(S)} \leq \sigma$, luego $\vee_{\mathcal{A}} \alpha_S^{E(S)} \leq \sigma$ y $\vee_{\mathcal{A}} \alpha_S^S = \vee_{\mathcal{A}} \alpha_S^{E(S)}$ pues $E(S) = S$.
Como $1 = \vee\{\alpha_S^{E(S)} : S \in R - Simp\}$ entonces $E(S') = \vee \alpha_S^{E(S)}(E(S')) = S'$. Luego

$$\sigma \leq 1 = \vee \alpha_S^{E(S)} = \vee \alpha_S^S.$$

Por tanto

$$\sigma = \vee \alpha_S^S = soc_{\mathcal{A}}.$$

$7) \Rightarrow 1)]$ Para $1 \in R-$Pr existe $A \subseteq R$-Simp tal que $1 = soc_A$ entonces

$$R = Soc_A(R) = \Sigma\{S \leq R : S \; es \; simple\}$$

entonces R es semisimple. Por el teorema (4.29), R es artiniano.

$\square$

Capítulo 5

Retículas cuánticas

Cuando estudiamos retículas conmúnmente podemos encontrar retículas que poseen tres operaciones binarias, la conjunción $\wedge$ y disyunción $\vee$ usuales y un producto denotado por $\&$. Un ejemplo de esto es la retícula de ideales de un anillo estudiada por Ward y Dilworth[1] en 1939 y para lo cual proponen el concepto de retícula residual. Cincuenta años más tarde Mulvey[2] y Borceux[3] reiniciaron dicho estudio bajo el nombre de *cuantal* (una retícula residual completa es un cuantal no necesariamente idempotente), suponiendo que debía estar relacionado a la lógica cuántica.

Por su parte Birkhoff y von Neumann [3] ya habían iniciado el estudio de la lógica cuántica en 1936, cuando mostraron que dado un sistema de mecánica cuántica S, el conjunto de proposiciones sobre S constituye una retícula ortomodular y como se vio en el capítulo 2, Finch [8] declara la existencia de una operación *producto* en dichas retículas.

Veremos que aunque cuantales y retículas ortomodulares comparten propiedades en común son claramente diferentes. En este capítulo vamos a construir una categoría que contiene como objetos tanto a las retículas ortomodulares como a los cuantales.

[1]WARD, M., DILWORTH, R.P. *Transactions of the American Mathematical Society*, 45, 335-354, (1939).

[2]MULVEY, C., *Communications at the meetings in Oberwolfach* Paris and Brighton, (1983).

[3]BORCEUX, F. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*1, 101-106, (1970).

5.1. Definiciones

Definición 5.1. *La categoría de retículas cuánticas $\mathcal{Q}$ se define como sigue:*

- *Un objeto de $\mathcal{Q}$ es una retícula completa $(Q, \leq)$ provista de una operación binaria $\& : Q \times Q \to Q$ que satisface:*

  (a) *Para cada $q \in Q$, $\_\&q : Q \to Q$ es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados.*

  (b) *Para cada $q \in Q$, $\_\&q$ tiene adjunto derecho $q \to \_$.*

- *Un morfismo de retículas cuánticas de Q_1 en Q_2 es una función $f : Q_1 \to Q_2$ tal que:*

  1. $f(1) = 1$.
  2. *Para cada familia $\{q_j\}_j \subseteq Q$, $f(\vee_j q_j) = \vee_j f(q_j)$.*
  3. *Para cada p, q en Q, $f(p)\&f(q) \leq f(p\&q)$.*

Observación 5.2. Si se cumple la igualdad en 3 entonces se dice que el morfismo es estricto. Por otra parte, observe que la adjunción significa que para cada p, q y r en Q, $p\&q \leq r$ si y sólo si $p \leq q \to r$.
Además, por el teorema del funtor adjunto (ver Apéndice) es claro que (b) puede sustituirse por:

(b') Para cada $p \in Q$ y $\{q_j\}_j \subseteq Q$, $(\vee_j q_j)\&p = \vee_j(q_j\&p)$.

Por la propiedad anterior tenemos que en cualquier retícula cuántica, $0\&q = 0$ y $q \to 1 = 1$ para todo $q \in Q$.

Definición 5.3. *Sea Q una retícula cuántica.*

(a) *Un elemento q en Q es:*

1. *idempotente si y sólo si $q\&q = q$.*
2. *derecho si y sólo si $q\&1 = q$.*
3. *izquierdo si y sólo si $1\&q = q$.*
4. *bilateral si y sólo si cumple (2) y (3).*

(b) *Q se dirá idempotente o derecha (izquierda, bilateral respectivamente) si para cada $q \in Q$ se cumple la propiedad correspondiente.*

(c) *Q es asociativa si y sólo si la operación $\&$ es asociativa.*

Lema 5.4. *Sea Q una retícula cuántica izquierda, entonces para todo $p, q \in Q$, $p \leq q$ si y sólo si $p \rightarrow q = 1$.*

Demostración. $1\&p = p \leq q$ si y sólo si $1 \leq p \rightarrow q$ si y sólo si $1 = p \rightarrow q$. □

5.2. Ejemplos

Ejemplo 5.5. Sea L una retícula ortomodular con $a\&b = (a \vee b^{\perp}) \wedge b$ para cada $a, b \in L$, donde $\perp$ denota la ortocomplementación. L es una retícula cuántica. (Este ejemplo se expuso en el capítulo 2).

Ejemplo 5.6. Cualquier local es una retícula cuántica si para cada a, b en la retícula, $a\&b = a \wedge b$ como se observó al inicio del capítulo 3.

Ejemplo 5.7. De la definición de cuantal y la proposición 3.4 en el capítulo 3 es inmediato que un cuantal es una retícula cuántica. Además un morfismo de cuantales es un morfismo de retículas cuánticas.

Ejemplo 5.8. Sean Q una retícula completa y $j : Q \rightarrow Q$ un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados tales que dado $q \in Q$, $\{p_i\}_i \subseteq Q$ se cumple que

$$(\vee_i p_i) \wedge j(q) = \vee_i (p_i \wedge j(q)).$$

Entonces $p\&q = p \wedge j(q)$ cumple para todo $q \in Q$ que si $a \leq b$ entonces

$$a\&q = a \wedge j(q) \leq b \wedge j(q) = b\&q,$$

y como

$$(\vee_i p_i)\&q = (\vee_i p_i) \wedge j(q) = \vee_i (p_i \wedge j(q)) = \vee_i (p_i \& q),$$

entonces $\_\&q$ tiene adjunto derecho y así Q es una retícula cuántica.
Note que en particular cuando Q es un local, $j : Q \rightarrow Q$ puede ser cualquier morfismo de conjuntos parcialmente ordenados.

Finalmente examinemos el último de los ejemplos de retícula cuántica ya estudiados en el presente trabajo.

Ejemplo 5.9. Consideremos la categoría R-Mod de R-Módulos, con R un anillo y $1 : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ el funtor identidad. Como ya sabemos, un prerradical sobre R-Mod es un subfuntor de 1. Denotaremos a los prerradicales de R-Mod por R-Pr; recordemos que podemos convertir esta clase en una retícula completa como sigue:
Dados σ y τ en R-Pr y $\{\sigma_i\}_i \subseteq R$-Pr, definimos el orden

$$\sigma \leq \tau \text{ si y sólo si para cada } A \in R\text{-Mod: } \sigma(A) \leq \tau(A).$$

Además para cada $A \in R$-Mod

$$(\wedge_i \sigma_i)(A) = \bigcap_i \sigma_i(A) \text{ y } (\vee_i \sigma_i)(A) = \sum_i \sigma_i(A)$$

Tenemos al menos dos formas de hacer a R-Pr una retícula cuántica: podemos definir $\sigma \& \tau = \sigma \circ \tau$, la composición de prerradicales, o bien, $(R\text{-Pr})^{op}$ es una retícula cuántica con la operación coproducto definida en el capítulo 4, $\sigma \& \tau = (\tau : \sigma)$ donde $(\tau : \sigma)$ cumple que para cada $A \in R$-Mod,

$$(\tau : \sigma)(A)/\tau(A) = \sigma(A/\tau(A)).$$

Para ambas elecciones de $\&$ se verifica que $\_\&\tau$ es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados que preserva supremos arbitrarios y también ínfimos. En efecto, sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-Pr y $A \in R$-Mod.

- Si $\sigma \leq \tau$, entonces

  $$(\sigma \& \eta)(A) = (\sigma \circ \eta)(A) = \sigma(\eta(A)) \leq \tau(\eta(A)) = (\tau \circ \eta)(A) = (\tau \& \eta)(A).$$

  Por otra parte,
  $((\sigma \vee \tau)\&\eta)(A) = (\sigma \vee \tau) \circ \eta(A) = \sigma(\eta(A)) + \tau(\eta(A)) = (\sigma \circ \eta)(A) + (\tau \circ \eta)(A) = ((\sigma \circ \eta) \vee (\tau \circ \eta))(A) = ((\sigma \& \eta) \vee (\tau \& \eta))(A)$
  y
  $((\sigma \wedge \tau)\&\eta)(A) = (\sigma \wedge \tau) \circ \eta(A) = (\sigma \wedge \tau)(\eta(A)) = \sigma(\eta(A)) \cap \tau(\eta(A)) = (\sigma \circ \eta)(A) \cap (\tau \circ \eta)(A) = ((\sigma \circ \eta) \wedge (\tau \circ \eta))(A)$.

- Si $\sigma \leq \tau$ entonces

  $$(\eta : \sigma)(A)/\eta(A) = \sigma(A/\eta(A)) \leq \tau(A/\eta(A)) = (\eta : \tau)(A)/\eta(A),$$

  luego

  $$(\eta : \sigma)(A) \leq (\eta : \tau)(A),$$

por tanto
$$\sigma\&\eta \leq \tau\&\eta.$$

Por otra parte,
$(\eta : (\sigma \vee \tau))(A)/\eta(A) = (\sigma \vee \tau)(A/\eta(A)) = \sigma(A/\eta(A)) + \tau(A/\eta(A)) = (\eta : \sigma)(A)/\eta(A) + (\eta : \tau)(A)/\eta(A) = ((\eta : \sigma) \vee (\eta : \tau))(A)/\eta(A)$,
luego
$$(\eta : (\sigma \vee \tau))(A) = ((\eta : \sigma) \vee (\eta : \tau))(A),$$

y así
$$(\sigma \vee \tau)\&\eta = ((\sigma\&\eta) \vee (\tau\&\eta)).$$

Análogamente se tiene que
$(\eta : (\sigma \wedge \tau))(A)/\eta(A) = (\sigma \wedge \tau)(A/\eta(A)) = \sigma(A/\eta(A)) \cap \tau(A/\eta(A)) = (\eta : \sigma)(A)/\eta(A) \cap (\eta : \tau)(A)/\eta(A) = ((\eta : \sigma) \wedge (\eta : \tau))(A)/\eta(A)$,
entonces
$$(\eta : (\sigma \wedge \tau))(A) = ((\eta : \sigma) \wedge (\eta : \tau))(A),$$

concluyendo que

$$(\sigma \wedge \tau)\&\eta = ((\sigma\&\eta) \wedge (\tau\&\eta)).$$

De la observación anterior podemos concluir que la categoría opuesta $(R\text{-Pr})^{op}$ también es una retícula cuántica cuando consideramos $\& = (:)$.

Observación 5.10. Note que una retícula ortomodular es idempotente y bilateral. Los cuantales son asociativos mientras que las retículas ortomodulares no necesariamente lo son como observamos en (2.2).

Observación 5.11. Podemos observar que R-Pr es una retícula cuántica bilateral asociativa con cualquiera de los dos productos que elijamos. Se cumple por propiedad general para cuando $\& := \circ$, veamos para el coproducto.
Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-Pr y $A \in R$-Mod.

$$((\sigma\&\tau)\&\eta)(A) = (\eta : (\sigma\&\tau))(A) = (\eta : (\tau : \sigma))(A),$$

donde
$$(\eta : (\tau : \sigma))(A)/\eta(A) = (\tau : \sigma)(A/\eta(A))$$

y
$$(\tau : \sigma)(A/\eta(A))/\tau(A/\eta(A)) = \sigma((A/\eta(A))/\tau(A/\eta(A))).$$

Por otra parte,

$$(\sigma\&(\tau\&\eta))(A) = ((\tau\&\eta) : \sigma)(A) = ((\eta : \tau) : \sigma)(A),$$

donde

$$((\eta : \tau) : \sigma)(A)/(\eta : \tau)(A) = \sigma(A/(\eta : \tau)(A))$$

y

$$(\eta : \tau)(A)/\eta(A) = \tau(A/\eta(A)).$$

Entonces

$$\frac{((\eta : \tau) : \sigma)(A)/(\eta : \tau)(A)}{\eta(A)} = \frac{((\eta : \tau) : \sigma)(A)/\eta(A)}{(\eta : \tau)(A)/\eta(A)} = \frac{((\eta : \tau) : \sigma)(A)/\eta(A)}{\tau(A/\eta(A))}$$

y

$$\frac{((\eta:\tau):\sigma)(A)/(\eta:\tau)(A)}{\eta(A)} = \frac{\sigma(A/(\eta:\tau)(A))}{\eta(A)} = \sigma(\frac{A/\eta(A)}{(\eta:\tau)(A)/\eta(A)}) = \sigma(\frac{A/\eta(A)}{\tau(A/\eta(A))}) = \frac{(\tau:\sigma)(A/\eta(A))}{\tau(A/\eta(A))}$$

luego

$$\frac{((\eta : \tau) : \sigma)(A)}{\eta(A)} = (\tau : \sigma)(A/\eta(A)) = \frac{(\eta : (\tau : \sigma))(A)}{\eta(A)},$$

se sigue que

$$((\eta : \tau) : \sigma)(A) = (\eta : (\tau : \sigma))(A),$$

y así

$$(\eta : \tau) : \sigma = \eta : (\tau : \sigma),$$

obteniendo que

$$\sigma\&(\tau\&\eta) = (\sigma\&\tau)\&\eta.$$

Veamos ahora que la retícula es bilateral. Como estamos en $(R\text{-Pr})^{op}$ debemos ver que

$$\sigma\&0 = \sigma = 0\&\sigma.$$

$$(0\&\sigma)(A) = (\sigma : 0)(A) = P_\sigma^{-1}(0(A/\sigma(A))) = P_\sigma^{-1}(0) = \sigma(A)$$

y

$$(\sigma\&0)(A) = (0 : \sigma)(A) = P_0^{-1}(\sigma(A/0(M))) = P_0^{-1}(\sigma(A)) = \sigma(A).$$

Si $\sigma \in R$-Pr es tal que $\sigma \circ \sigma = \sigma$ entonces a σ se le llama prerradical idempotente y si $(\sigma : \sigma) = \sigma$ entonces σ es llamado radical.

5.3. Algunas propiedades

Como observamos en el capítulo 2, en retículas ortomodulares la operación $\&$ podría interpretarse como una conjunción lógica no conmutativa. Cuando Q es ortomodular o un cuantal idempotente, $\&$ generaliza a $\wedge$ en el siguiente sentido: para $p, q \in Q$

$$p \wedge q \leq p\&q.$$

En retículas cuánticas se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.12. *Sea Q una retícula cuántica izquierda, para cada $p, q \in Q$,$p \wedge q \leq p\&q$ si y sólo si para cada $p, q \in Q$, $p \to q = p \to (p\&q)$.*

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Como $\_\&q$ es preservador de orden, $p\&q \leq 1\&q = q$ y $p \to \_$ también es preservador de orden entonces siempre se cumple

$$p \to (p\&q) \leq p \to q.$$

Por otra parte, $p \to q \leq p \to (p\&q)$ si y sólo si $(p \to q)\&p \leq p\&q$, pero $(p \to q)\&p \leq 1\&p = p$ y $p \to q \leq p \to q$ implica que $(p \to q)\&p \leq q$, por tanto

$$(p \to q)\&p \leq p \wedge q \leq p\&q$$

y así

$$p \to q = p \to (p\&q).$$

$(\Longleftarrow)$ Por el Lema (5.4) se tiene que $1 = (p \wedge q) \to q$ y por hipótesis $(p \wedge q) \to q = (p \wedge q) \to ((p \wedge q)\&q)$. Entonces

$$(p \wedge q) \to ((p \wedge q)\&q) = 1,$$

y por Lema (5.4) y el hecho de que $\_\&q$ preserva el orden tenemos que

$$p \wedge q \leq (p \wedge q)\ q \leq p\&q.$$

$\square$

En el caso de cuantales esto hace que $p\&\_$ sea un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados para cada $p \in Q$. Si tenemos una retícula cuántica bilateral Q que cumpla $p \wedge q \leq p\&q$, como es el caso de una retícula ortomodular, entonces esta propiedad implica que Q es un local, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.13. *Sea Q una retícula cuántica bilateral que satisface para cada $p, q \in Q$, $p \wedge q \leq p\&q$, entonces siempre que $p\&\_$ es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados para cualquier $p \in Q$, se tiene que Q es un local.*

Demostración. Sean $p, q \in Q$, tenemos que $p\&q \leq 1\&q = q$ y $p\&q \leq p\&1 = p$, entonces $p\&q \leq p \wedge q$ y por tanto $p \wedge q = p\&q$. Así, Q es un local porque $\_ \wedge q$ preservará supremos arbitrarios para todo $q \in Q$. □

Si Q es una retícula ortomodular, la propiedad anterior implica que Q es un álgebra Booleana.

Finalmente veamos un último ejemplo de retícula cuántica. Sea Q una $\vee$-retícula, es decir, los morfismos entre ella preservan a $\vee$, entonces la retícula de endomorfismos de Q, $End(Q)$ es una retícula cuántica si definimos las siguientes relaciones para f y $g \in End(Q)$:

$$f \leq g \text{ si y sólo si para cada } q \in Q \text{ se tiene que } f(q) \leq g(q)$$

$f \wedge g : Q \to Q$ es un morfismo tal que para cada $q \in Q$, $(f \wedge g)(q) = f(q) \wedge g(q)$

$f \vee g : Q \to Q$ es un morfismo que está dado para cada $q \in Q$ por:

$$(f \vee g)(q) = f(q) \vee g(q).$$

Y definimos la operación & como $f\&g = g \circ f$.
Entonces $(End(Q), \&)$ es una retícula cuántica. Como las definiciones de $\wedge$ y $\vee$ en $End(Q)$ son puntuales, las propiedades de retícula de $End(Q)$ se siguen de las propiedades de retícula de Q. Veamos que $End(Q)$ es cuántica.

(a) Sean $f, g, h \in End(Q)$ y supongamos que $g \leq h$. Entonces $(\_\&f)(h) = h\&f = f \circ h$ y $(\_\&f)(g) = g\&f = f \circ g$. Tomemos $q \in Q$, como f preserva el orden tenemos que

$$(f \circ g)(q) = f(g(q)) \leq f(h(q)) = (f \circ g)(q),$$

luego

$$g\&f \leq h\&f$$

y por tanto $\_\&f$ es morfismo de conjuntos parcialmente ordenados.

(b) Sea $f \in End(Q)$ y veamos que $\_\&f$ tiene adjunto derecho. Tomemos $\{g_i\}_i \subseteq End(Q)$ y sea $q \in Q$, entonces
$((\vee_i g_i)\&f)(q) = (f \circ (\vee_i g_i))(q) = f(\vee_i g_i(q)) = \vee_i(f(g_i(q))) = (\vee_i(f \circ g_i))(q) = (\vee_i(g_i\&f))(q)$,
por tanto $(\vee_i g_i)\&f = \vee_i(g_i\&f)$, es decir, $\_\&f$ preserva supremos arbitrarios.

Tomemos una retícula cuántica Q y consideremos la aplicación

$$f : Q \to End(Q)$$

$$b \longmapsto f_b$$

de tal forma que f_b está dada por $f_b(a) = a\&b$ para cada $a \in Q$. Como $\_\&b$ distribuye supremos arbitrarios para cada $b \in Q$, entonces f_b pertenece a $End(Q)$.
Si para todo $a \in Q$, $a\&\_$ tiene adjunto derecho entonces para $\{b_i\}_i \subseteq Q$, $f(\vee_i b_i) = f_{\vee_i b_i}$ y para cada $a \in Q$ se cumple que:

$$f_{\vee_i b_i}(a) = a\&(\vee_i b_i) = \vee_i(a\&b_i) = \vee_i(f_{b_i}(a)) = (\vee_i f_{b_i})(a) = (\vee_i f(b_i))(a)$$

y por tanto

$$f(\vee_i b_i) = \vee_i f(b_i).$$

Así que f es un morfismo de $\vee$-retículas.
Más áun, si Q es asociativa, entonces

$$f_{b\&c}(a) = a\&(b\&c) = (a\&b)\&c = f_c \circ f_b(a) = (f_b\&f_c)(a),$$

es decir, $f(b\&c) = f(b)\&f(c)$, así que f es un morfismo estricto de retículas cuánticas.
Denotemos por $E(Q)$ a la imagen de f en $End(Q)$ y por $\mathcal{QID}$ a la categoría de cuantales idempotentes derechos.

Teorema 5.14. *Sea Q un cuantal idempotente derecho. Entonces la correspondencia $\eta : \mathcal{QID} \to \mathcal{LOC}$ tal que a cada $Q \mapsto E(Q)$ nos proporciona un funtor de cuantales en locales.*

Demostración. Sea un cuantal idempotente derecho Q, entonces por la Proposición 3.10 para cada $a, b, c \in Q$ se cumple que $a\&b\&c = a\&c\&b$, por tanto,

$$f_b\&f_c = f_{b\&c} = f_{c\&b} = f_c\&f_b,$$

así que $f_b \& f_c = f_b \wedge f_c$ por la observación 3.12 y por tanto $E(Q)$ es un local. Por las últimas observaciones f es un morfismo de cuantales. Además, dado cualquier morfismo de cuantales $\phi : Q_1 \to Q_2$ entonces

$$\eta(\phi) := \alpha : E(Q_1) \to E(Q_2)$$

$$f_b \longmapsto f_{\phi(b)}$$

es un morfismo de locales. En efecto, sean $\{b_i\} \subseteq Q_1$ entonces

$$\alpha(\vee_i f_{b_i}) = \alpha(f(\vee_i b_i)) = f_{\phi(\vee_i b_i)} = f_{\vee_i \phi(b_i)} = \vee_i f(\phi(b_i)) = \vee_i f_{\phi(b_i)} = \vee_i \alpha(f_{b_i}),$$

y si $b, c \in Q_1$ entonces

$$\alpha(f_b \& f_c) = \alpha(f_{b\&c}) = f_{\phi(b\&c)} = f_{\phi(b)\&\phi(c)} = f_{\phi(b)} \& f_{\phi(c)} = \alpha(f_b) \& \alpha(f_c).$$

Así que η es un funtor. $\square$

Cuando Q es un cuantal idempotente derecho, se puede demostrar que la asignación $f : Q \to E(Q)$ es una reflexión, esto es, la inclusión de $\mathcal{LOC}$ en $\mathcal{QID}$ tiene adjunto izquierdo. Este es un hecho interesante porque podría aportar una caracterización de los subcuantales espaciales por medio de las ya existentes de sublocales espaciales. No entraremos en más detalles sobre esto porque sale del objetivo de este trabajo, sin embargo representa un posible campo de estudio a futuro.

Capítulo 6

Conclusiones

Los prerradicales constituyen el área más inexplorada, desde este punto de vista, de las tratadas aquí debido a su reaparición en las últimas décadas. Aún cuando el estudio de prerradicales tuvo su origen a mediados del siglo pasado, fue hasta el año 2000 cuando se empezó la investigación de la estructura de retícula de todos los prerradicales, llevada a cabo por un grupo de algebristas mexicanos encabezado por el Dr. Francisco Raggi.

En este momento las retículas cuánticas se convierten en el vínculo adecuado para explorar las estructuras menos conocidas, los prerradicales por ejemplo, haciendo uso del amplio conocimiento que ya se tiene de los cuantales. Un ejemplo de ello es la noción de objetos inyectivos y proyectivos ya analizada en la categoría de cuantales [1] que nos lleva a plantearnos el interrogante de si es posible conseguir caracterizaciones de dichos objetos en prerradicales o retículas ortomodulares.

Otro ejemplo de investigación vigente es el artículo "Distributive Quantales" de David Kruml, en donde se define una especie de distributividad para generalizar algunos resultados de locales a cuantales. La distributividad es una propiedad bastante necesaria en gran cantidad de resultados, por ejemplo sobre locales regulares compactos o espacialidad algebraica, propiedad que se pierde cuando hacemos la generalización no conmutativa de local, el concepto de cuantal, limitando la adopción de muchos resultados de locales [2].

[1] Para una caracterización de objetos inyectivos y proyectivos en cuantales se puede consultar la referencia [24]

[2] En [13] se propone el concepto de cuantal distributivo donde la carencia de distributividad se sustituye por un axioma extra.

Recorriendo un camino distinto al sugerido hasta ahora, podríamos retomar la exploración que hay en prerradicales sobre los conceptos de primos y coprimos e intentar establecer resultados análogos en retículas ortomodulares. Incluso existe un enfoque general a filtros de Gabriel en cuantales en [21], donde se generalizan resultados de una subrretícula de prerradicales a cuantales y quizás se puede pensar en hacer algo similar en retículas ortomodulares.

Estas son sólo algunas líneas que pueden seguirse y tampoco pretendemos ser exhaustivos, seguramente se nos han escapados muchas otras aplicaciones del estudio de las retículas cuánticas y los respectivos ejemplos aquí estudiados, lo único que pretendemos es dar una idea de cómo se puede emplear la generalización que aportan las retículas cuánticas.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Categorías

La teoría de Categorías estudia de manera abstracta las estructuras matemáticas y sus relaciones, presentando nuevas perspectivas sobre gran variedad de resultados ya conocidos y aportando mayor claridad en su estudio. Por otra parte, el grado de abstracción con el cual trabaja permite reconocer características que pasan desapercibidas cuando se trabaja dentro de la teoría que estudiamos.

En este apéndice se presentan los conceptos de Categorías referentes a un curso elemental y que consideramos esenciales para la lectura de este trabajo, sin embargo se puede consultar [4] y [9] para una exposición más detallada.

Definición 7.1. *Una **categoría** es una quíntuple* $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, dom, cod, \circ)$ *donde:*

i $\mathcal{O}$ *es un clase cuyos miembros se llaman* $\mathcal{C}-$*objetos,*

ii $\mathcal{M}$ *es una clase cuyos miembros se llaman* $\mathcal{C}-$*morfismos,*

iii dom *y* cod *son funciones de* $\mathcal{M}$ *en* $\mathcal{O}$ *(para* $f \in \mathcal{M}$*,* $dom(f)$ *se llama dominio de* f*, y* $cod(f)$ *se llama codominio de* f*),*

iv $\circ$ *es una función de*

$$\mathcal{D} = \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{M} \wedge dom(f) = cod(g)\}$$

en $\mathcal{M}$*, llamada ley de composición de* $\mathcal{C}$ *(*$\circ(f, g)$ *se escribe como* $f \circ g$ *y decimos que* $f \circ g$ *está definida si y sólo si* $(f, g) \in \mathcal{D}$*),* *tales que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si* $f \circ g$ *está definida entonces* $dom(f \circ g) = dom(g)$ *y* $cod(f \circ g) = cod(f)$*,*

2. *Si* $f \circ g$ *y* $g \circ h$ *están definidas,* $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$*,*

3. *Para cada* $\mathcal{C}-$*objeto* A *existe un* $\mathcal{C}-$*morfismo* e *tal que* $dom(e) = A = cod(e)$ *y*

   - *Si* $f \circ e$ *está definida,* $f \circ e = f$ *y*
   - *Si* $e \circ g$ *está definida,* $e \circ g = g$*,*

4. *Para cada par de* $\mathcal{C}-$*objetos* (A, B)*, la clase*

$$hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \mid f \in \mathcal{M}, dom(f) = A, cod(f) = B\}$$

   es un conjunto.

Observación 7.2. Dada una categoría $\mathcal{C}$,

1. La clase de $\mathcal{C}-$objetos se denota por $Ob(\mathcal{C})$ o $\mid \mathcal{C} \mid$.

2. La clase de $\mathcal{C}-$morfismos se denota por $Mor(\mathcal{C})$.

3. Generalmente se omite el subíndice para indicar la categoría en hom cuando el contexto es claro. $hom_{\mathcal{C}}$ también es denotada por $\mathcal{C}(A, B)$, y con $f : A \to B$ denotamos que $f \in \mathcal{C}(A, B)$.

4. El $\mathcal{C}-$morfismo e en (3) de la definición anterior es el único que satisface dichas propiedades, se llama $\mathcal{C}-$identidad o identidad de A y se denota por 1_A.

Definición 7.3. *Se dice que una categoría* $\mathcal{C}$ *es:*

1. ***Pequeña*** *si* $Ob(\mathcal{C})$ *es un conjunto.*

2. ***Finita*** *si* $Ob(\mathcal{C})$ *y* $Mor(\mathcal{C})$ *son conjuntos finitos.*

3. ***Discreta*** *si todos sus morfismos son identidades.*

Ejemplo 7.4. La categoría $\mathcal{CON}$ cuya clase de objetos es la clase $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos y para cada $A, B \in \mathcal{U}$, $\mathcal{CON}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B. $\mathcal{CON}$ se llama la categoría de conjuntos.

Ejemplo 7.5. La categoría $\mathcal{TOP}$ cuya clase de objetos es la clase de todos los espacios topológicos, y dados A y B espacios topológicos, $\mathcal{TOP}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de A en B. $\mathcal{TOP}$ se llama la categoría de espacios topológicos.

En este trabajo es de especial interés la categoría de conjuntos parcialmente ordenados para el estudio de las retículas.

Ejemplo 7.6. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ podemos verlo como una categoría $\mathcal{C}$ de la siguiente manera:

- $Ob(\mathcal{C}) = X$
- Para $x, y \in X$:
$$\mathcal{C}(x,y) = \begin{cases} \{*_x^y\} & \text{si} \quad x \leq y \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, $*_x^y : x \to y$ si y sólo si $x \leq y$. En este caso, $dom(*_x^y) = x$ y $cod(*_x^y) = y$. Dados $x, y, z \in X$, tales que $*_x^y$ y $*_y^z$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces la composición se define como sigue: $*_y^z \circ *_x^y = *_x^z$ que está bien definida porque $x \leq y \leq z$. Además es asociativa, pues si $x, y, z, w \in X$ son tales que $x \leq y \leq z \leq w$ se tiene que:

$$*_z^w \circ (*_y^z \circ *_x^y) = *_z^w \circ *_x^z = *_x^w = *_y^w \circ *_x^y = (*_z^w \circ *_y^z) \circ *_x^y$$

Por otra parte, dado $x \in X$, como " $\leq$ " es reflexiva existe $*_x^x$ tal que si $y \leq x \leq w$ entonces:
$$*_x^w \circ *_x^x = *_x^w \quad y \quad *_x^x \circ *_x^y = *_x^y.$$

Ejemplo 7.7. La **categoría de conjuntos parcialmente ordenados** es aquella cuyos objetos son los conjuntos parcialmente ordenados y cuyos morfismos son las funciones monótonas, es decir, dados A y B conjuntos parcialmente ordenados

$$hom((A, \leq_A), (B, \leq_B)) := \{f \mid f : A \to B \text{ función tal que si } x \leq_A y \text{ entonces } f(x) \leq_B f(y)\}$$

La composición es la usual de funciones. A esta categoría se le denota por $\mathcal{POS}$.

Ejemplo 7.8. Sea R un anillo con unidad. Una pareja (M, λ) es un R-módulo izquierdo si M es un grupo abeliano (con notación aditiva) y $\lambda : R \to End(M)$ es un homomorfismo de anillos cuando $M \neq \overline{0}$. Es decir, para cada $a \in R$, existe un homomorfismo $\lambda(a) : M \to M$ que cumple para cada $x, y \in M$ y $b \in R$:

1. $\lambda(a)(x+y) = \lambda(a)(x) + \lambda(a)(y)$
2. $\lambda(a+b)(x) = \lambda(a)(x) + \lambda(b)(y)$
3. $\lambda(ab)(x) = \lambda(a)(\lambda(b)(x))$
4. $\lambda(1)(x) = x$

En la práctica, se elimina la escritura de λ, pensando dicha operación como una multiplicación por escalar izquierda, y adoptando la notación ax para $\lambda(a)(x)$. De manera similar se define un R-módulo derecho.

R-*Mod* denota la categoría cuya clase de objetos son todos los R-**módulos izquierdos** y cuyos morfismos son los homomorfismos de R-módulos, es decir, para A y B $R-$módulos, $f \in Hom(A, B)$ si y sólo si f es un morfismo de grupos y además para $r \in R$ y $a \in A$ satisface que $f(ra) = rf(a)$. La ley de composición es la usual.

Definición 7.9. *Dada una categoría $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, dom, cod, \circ)$, su* ***categoría opuesta*** *o categoría* ***dual*** *es $\mathcal{C}^{op} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, cod, dom, *)$ donde $*$ está definido por*

$$f * g = g \circ f.$$

Observación 7.10. Dada una categoría $\mathcal{C}$

1. $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría.
2. $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.
3. $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{op}$ tienen los mismos objetos y morfismos, pero las funciones dominio y codominio se intercambian y las leyes de composición son la opuesta una de la otra.

La última definición permite definir para cualquier concepto categórico un concepto dual, y para cualquier afirmación categórica una afirmación dual. Si P es una propiedad en términos de objetos y morfismos de una categoría $\mathcal{C}$, la propiedad dual P^{op} es la correspondiente propiedad de $\mathcal{C}^{op}$.

Principio de dualidad para categorías *Si P es una proposición categórica que se verifica para todas las categorías, entonces P^{op} también se verifica para todas las categorías.*

Definición 7.11. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y f un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces:*

1. *f se llama **monomorfismo** en $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}-$monomorfismo, si para cada h y k morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $f \circ h = f \circ k$, se tiene que $h = k$.*

2. *f se llama **epimorfismo** en $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}-$ epimorfismo, si para cada h y k morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$.*

3. *f se llama **bimorfismo** en $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}-$bifmorfismo, si es un monomorfismo y un epimorfismo en $\mathcal{C}$.*

Observación 7.12. En las categorías $\mathcal{CON}$, $\mathcal{TOP}$, $\mathcal{POS}$ y $R-$*Mod* los monomorfismos son los morfismos que son inyectivos sobre los conjuntos subyacentes y los epimorfismos son los morfismos sobreyectivos sobre los conjuntos subyacentes.

Definición 7.13. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un **funtor** (o **funtor covariante**) de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ si satisface:*

1. *Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$,*

2. *Si $f : A \to B$ es un $\mathcal{C}-$morfismo, entonces $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un $\mathcal{D}-$morfismo,*

3. *F preserva la composición: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son $\mathcal{C}-$morfismos entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

4. *F preserva identidades: Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Observación 7.14. Cuando evaluamos un funtor F en algún objeto o morfismo comúnmente se omiten los paréntesis, es decir, $F(D) := FD$ y $F(f) = Ff$. Además el funtor identidad en una categoría $\mathcal{A}$ se denota por $1_{\mathcal{A}}$ o simplemente 1 cuando resulta claro de qué categoría hablamos.

Ejemplo 7.15. Los funtores entre dos conjuntos parcialmente ordenados son precisamente las funciones preservadoras de orden. Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados y $F : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ un funtor, entonces dados $a, b \in A$ tales que $a \leq_A b$ entonces hay un único morfismo $f : a \to b$, luego $F(f) : F(a) \to F(b)$ lo cual implica que $F(a) \leq_B F(b)$.
Ahora si tenemos una función preservadora de orden $\alpha : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ entonces dado un morfismo $f : a \to b$ en $(A, \leq_A)$ tenemos que $a \leq_A b$ luego $\alpha(a) \leq_B \alpha_(b)$, es decir, obtenemos un morfismo $\alpha(f) : \alpha(a) \to \alpha(b)$ en $(B, \leq_B)$.

Que α preserva la composición se sigue de manera análoga, pues si tomamos morfismos $f : a \to b$ y $g : b \to c$ esto implica que $a \leq_A b$ y $b \leq_A c$ entonces $a \leq_A c$ y como α preserva el orden $\alpha(a) \leq_B \alpha(c)$, y por otra parte también tenemos que $\alpha(a) \leq_B \alpha(b)$ y $\alpha(b) \leq_B \alpha(c)$, así que llegamos a lo mismo. Es claro que α preserva identidades pues como $a \leq_A a$ entonces $\alpha(a) \leq_B \alpha(b)$. Y así α es funtor.

Definición 7.16. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un* ***funtor contravariante*** *de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ si satisface:*

1. *Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$,*

2. *Si $f : A \to B$ es un $\mathcal{C}-$morfismo, entonces $F(f) : F(B) \to F(A)$ es un $\mathcal{D}-$morfismo,*

3. *F invierte la composición: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son $\mathcal{C}-$morfismos entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.*

4. *F preserva identidades: Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Ejemplo 7.17. Se llama categoría concreta a aquella en la cual los morfismos son funciones, es decir, para A y B objetos de la categoría, $hom(A, B) \subseteq \{f : A \to B \mid f \textit{es función}\}$. Para cualquier categoría concreta $\mathcal{C}$, hay un funtor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{CON}$ definido por:

- En objetos: Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, $U(A)$ es el conjunto subyacente,

- En morfismos: Dados A y B objetos en $\mathcal{C}$, y $f \in \mathcal{C}(A, B)$,

$$U(f) \in \mathcal{CON}(U(A), U(B)).$$

U se llama **funtor que olvida** o funtor subyacente sobre $\mathcal{C}$.

Definición 7.18. *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funtores. Una* ***transformación natural*** *de F a G es una tercia (F, η, G) donde $\eta : Ob(\mathcal{A}) \to Mor(\mathcal{C})$ es una función que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada objeto A en $\mathcal{A}$: $\eta(A) := \eta_A : F(A) \to G(A)$ es un $\mathcal{C}-$morfismo*

2. *Para cualquier $f : A \to A' \in Mor(\mathcal{A})$: $G(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(f)$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ A' & F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd}$$

Denotaremos la transformación natural como $\eta : F \Longrightarrow G$.

Definición 7.19. *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funtores.*

1. *Una transformación natural (F, η, G) se llama **isomorfismo natural** o equivalencia natural si para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$, η_A es $\mathcal{C}-$isomorfismo.*

2. *Se dice que F y G son **isomorfos naturalmente** o naturalmente equivalentes, lo cual se denota por $F \cong G$, si y sólo si existe un isomorfismo natural de F a G.*

Observación 7.20. Si $F, G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ son funtores, $\eta : F \Longrightarrow G$, $\epsilon : G \Longrightarrow H$ son transformaciones naturales, la composición de η con ϵ es el triple (F, λ, H) donde $\lambda : Ob(\mathcal{A}) \to Mor(\mathcal{C})$ y tal que para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$,

$$\lambda_A := \lambda(A) = \epsilon(A) \circ \eta(A) = \epsilon_A \circ \eta_A$$

Denotamos por $\epsilon \circ \eta$ a (F, λ, H). Además la composición de transformaciones naturales es asociativa.

Existe otra forma de operar transformaciones naturales denominado producto estrella.

Definición 7.21. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorías,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "H"] \arrow[r, shift right, "K"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

funtores y $\eta : F \Longrightarrow G$, $\delta : H \Longrightarrow K$ tranformaciones naturales. La transformación natural

$$\delta \star \eta : H \circ F \Longrightarrow K \circ G$$

se define para cada A objeto en $\mathcal{A}$ como $(\delta \star \eta)_A : HFA \to KGA$ con

$$(\delta \star \eta)_A = (\delta \star \eta)(A) := \delta_{G(A)} \circ H(\eta_A) = K(\eta_A) \circ \delta_{F(A)}$$

Observación 7.22. El producto estrella es asociativo. Además si consideramos la transformación natural identidad sobre el funtor F, $1_F : F \Rightarrow F$ (abusando de la notación se escribe F en lugar de 1_F) y tomando también la transformación natural identidad en el funtor H, entonces tenemos:

$$(\delta \star F)_A = \delta_{F(A)} \circ H(1_F(A)) = \delta_{F(A)}$$

$$(H \star \eta)_A = 1_H(G(A)) \circ H(\eta_A) = H(\eta_A).$$

7.2. (Co) Conos (Co) Límite

Definición 7.23. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría,*

(1) *Un objeto **1** de $\mathcal{C}$, es **terminal** o final, si para cada objeto c en $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo de c a **1**.*

(2) *Un objeto **0** de $\mathcal{C}$ es **inicial**, cuando para cada objeto c en $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo de **0** a c.*

Ejemplo 7.24. En la categoría $\mathcal{CON}$ el conjunto vacío es el objeto inicial y cualquier singular es un objeto terminal.

Definición 7.25. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un **cono** de F es una pareja $(C, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ donde:*

1. *C es un objeto de $\mathcal{C}$*
2. *Para cada objeto D en $\mathcal{D}$, $p_D : C \to FD$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ de tal forma que dado $d : D \to D' \in Mor(\mathcal{D})$, se cumple que $p_{D'} = Fd \circ p_D$.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "p_D"'] \arrow[dr, "p_{D'}"] & \\ FD \arrow[r, "Fd"'] & FD' \end{tikzcd}$$

$$D \xrightarrow[d]{} D'$$

Definición 7.26. *Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor, un **cono límite** de F es un cono $(L, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ de F tal que para cada cono $(M, \{q_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ sobre F, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$:*

$$q_D = p_D \circ m.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "q_D"'] & L \arrow[d, "p_D"] \\ & FD \end{tikzcd}$$

Proposición 7.27. *Si un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ admite un cono límite éste es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Sean $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor y $(L, \{p_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ y $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ conos límite de F. Como L es límite existe $m : M \to L$ tal que el primer triángulo conmuta y como M también es límite, existe $m' : L \to M$ y se tiene la conmutatividad del segundo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "m'"] \arrow[dr, "p_D"'] & M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q_D"] & L \arrow[dl, "p_D"] \\ & FD & \end{tikzcd}$$

por tanto
$$p_D = q_D \circ m' = p_D \circ m \circ m'.$$

Además aplicando la definición de límite a L consigo mismo tenemos el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "1_L"] \arrow[dr, "p_D"'] & & L \arrow[dl, "p_D"] \\ & FD & \end{tikzcd}$$

y como 1_L es único tenemos que $m \circ m' = 1_L$. De manera análoga aplicando la definición a M consigo mismo obtenemos que $m' \circ m = 1_M$. Por tanto m es un isomorfismo y así $L \cong M$. $\square$

Proposición 7.28. *Si $(L, \{p_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es un límite del funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, dos morfismos $f, g : M \to L$ son iguales si y sólo si para cada objeto D en $\mathcal{D}$: $p_D \circ f = p_D \circ g$.*

Demostración. **(**$\Rightarrow$) Se sigue de la definición.

($\Leftarrow$**)** Sea $d : D \to D'$ morfismo en $\mathcal{D}$, entonces $p_{D'} \circ f = (Fd \circ p_D) \circ f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & L \arrow[d, "p_D"] \\ & L \arrow[dr, "p_{D'}"'] & FD \arrow[d, "Fd"] \\ & & FD' \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(M, \{p_D \circ f\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono de F. Como L es límite, existe un único $r : M \to L$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "r"'] \arrow[dr, "p_D \circ f"'] & L \arrow[d, "p_D"] \\
& FD
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "r"'] \arrow[dr, "p_D \circ f"'] & L \arrow[d, "p_D"] \\
& FD
\end{tikzcd}
$$

Por tanto $g = r = f$ y así $f = g$.

$\square$

Dualizando tenemos:

Definición 7.29. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un* ***cocono*** *de F es una pareja $(C, \{s_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ donde:*

1. *C es un objeto de $\mathcal{C}$*

2. *Para cada objeto D en $\mathcal{D}$, $s_D : FD \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ de tal forma que para cada $d : D' \to D \in Mor(\mathcal{D}) : s_{D'} = s_D \circ Fd$.*

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "d"] & & D' \\
FD \arrow[rr, "Fd"] \arrow[dr, "S_D"'] & & FD' \arrow[dl, "S_{D'}"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

Definición 7.30. *Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor, un* ***colímite*** *de F es un cocono $(L, \{s_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ de F tal que para cada cocono $(M, \{t_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ sobre F, existe un único morfismo $m : L \to M$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$:*

$$t_D = m \circ s_D.$$

Definición 7.31. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría.*

1. *$\mathcal{C}$ es* ***completa*** *cuando cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, tiene un cono límite.*

2. $\mathcal{C}$ *es* ***finitamente completa*** *cuando cada funtor* $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$*, con* $\mathcal{D}$ *una categoría finita tiene un cono límite.*

Definición 7.32. *Un funtor* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ***preserva límites*** *cuando para cada categoría pequeña* $\mathcal{D}$ *y cada funtor* $G : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$*, si el límite* $(L, \{P_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ *de* G *existe, entonces* $(FL, \{FP_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ *es el límite de* $F \circ G$*.*

Definición 7.33. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría y* $C \in Ob(\mathcal{C})$ *entonces al funtor*

$$\mathcal{C}(C, \_) : \mathcal{C} \to \mathcal{CON}$$

tal que para cada $X \in Ob(\mathcal{C}) : \mathcal{C}(C, \_)(X) := \mathcal{C}(C, X)$ *y para cada* $f : A \to B$ *morfismo en* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{C}(C, \_)(f) := \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$ *donde para cada* $g \in \mathcal{C}(C, A) : \mathcal{C}(C, f)(g) := f \circ g$ *se le llama* ***funtor representable covariante****, y al funtor*

$$\mathcal{C}(\_, C) : \mathcal{C} \to \mathcal{CON}$$

tal que a cada $X \in Ob(\mathcal{C}) : \mathcal{C}(\_, C)(X) := \mathcal{C}(X, C)$ *y para cada* $f : A \to B$ *morfismo en* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{C}(\_, C)(f) := \mathcal{C}(f, C) : \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$ *donde para cada* $g \in \mathcal{C}(B, C) : \mathcal{C}(f, C)(g) := g \circ f$ *se le llama* ***funtor representable contravariante****.*

7.3. Funtores adjuntos

Definición 7.34. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $B \in Ob(\mathcal{B})$. Una* ***reflexión*** *de B a través de F es un par (R_B, η_B) donde:*

1. *$R_B \in Ob(\mathcal{A})$ y $\eta_B : B \to F(R_B)$ es un morfismo de $\mathcal{B}$,*
2. *Si $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $b : B \to FA$ es un morfismo de $\mathcal{B}$, entonces existe un único morfismo $a : R_B \to A$ de $\mathcal{A}$ tal que $F(a) \circ \eta_B = b$.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "b"'] & FR_B \arrow[d, "F(a)"] & R_B \arrow[d, "a"] \\ & FA & A \end{tikzcd}$$

De manera dual tenemos:

Definición 7.35. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $B \in \mathcal{B}$. Una* ***correflexión*** *de B a través de F es un par (R_B, ϵ_B) donde:*

1. *$R_B \in Ob(\mathcal{A})$ y $\epsilon_B : F(R_B) \to B$ es un morfismo de $\mathcal{B}$,*
2. *Si $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $b : FA \to B$ es un morfismo de $\mathcal{B}$, entonces existe un único morfismo $a : A \to R_B$ de $\mathcal{A}$ tal que $\epsilon_B \circ F(a) = b$.*

Proposición 7.36. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $B \in Ob(\mathcal{B})$. Si B tiene una reflexión a través de F entonces ésta es única salvo isomorfismo.*

Demostración. Consideremos dos reflexiones (R_B, η_B) y (R'_B, η'_B) de algún objeto B en $\mathcal{B}$. Como (R_B, η_B) es una reflexión, existe un único morfismo $a : R_B \to R'_B$ tal que $F(a) \circ \eta_B = \eta'_B$, y como (R'_B, η'_B) también es reflexión existe un único $a' : R'_B \to R_B$ tal que $F(a') \circ \eta'_B = \eta_B$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "\eta'_B"'] & FR_B \arrow[d, shift left, "F(a)"] & R_B \arrow[d, shift left, "a"] \\ & FR'_B \arrow[u, shift left, "F(a')"] & R'_B \arrow[u, shift left, "a'"] \end{tikzcd}$$

Por tanto

$$F(a \circ a') \circ \eta'_B = F(a) \circ F(a') \circ \eta'_B = F(a) \circ \eta_B = \eta'_B = F(1_{R'_B}) \circ \eta'_B,$$

pero la factorización de η'_B es única, así que $a \circ a' = 1_{R'_B}$.
De igual manera se demuestra que $a' \circ a = 1_{R_B}$. Tenemos entonces

$$R_B \cong R'_B.$$

□

Proposición 7.37. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y supongamos que para cada objeto B en $\mathcal{B}$, existe una reflexión (R_B, η_B) , entonces existe un único funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ que satisface:*

1. *Para cada objeto B en $\mathcal{B}$: $R(B) = R_B$*
2. *$\{\eta_B : B \to F(RB)\}_{B \in Ob(\mathcal{B})}$ es una transformación natural.*

Demostración. Definimos $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ de la siguiente manera:

- Para cada objeto B en $\mathcal{B}$: $R(B) = R_B$
- Sea $a : B \to B'$, como (R_B, η_B) es una reflexión, existe un único morfismo $b : RB \to RB'$: tal que $F(b) \circ \eta_B = \eta_{B'} \circ a$. Sea $R(a) = b$.

Veamos que R es un funtor. Consideremos $a' : B' \to B''$.
$F(R(a') \circ R(a)) \circ \eta_B = FR(a') \circ FR(a) \circ \eta_B = FR(a') \circ F(b) \circ \eta_B = FR(a') \circ \eta_{B'} \circ a = F(b') \circ \eta_{B'} \circ a = \eta_{B''} \circ a' \circ a$,
por tanto

$$F(R(a') \circ R(a)) \circ \eta_B = \eta_{B''} \circ a' \circ a. \tag{7.1}$$

Por otra parte para $a' \circ a : B \to B''$ tenemos que:

$$FR(a' \circ a) \circ \eta_B = \eta_{B''} \circ a' \circ a \tag{7.2}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dd, bend right=60, "a' \circ a"'] & FR_B \arrow[d, "F(b)"] \arrow[dd, bend left=60, "FR(a' \circ a)"] \\
B' \arrow[r, "\eta_{B'}"] \arrow[d, "a'"'] & FR_{B'} \arrow[d, "F(b')"] \\
B'' \arrow[r, "\eta_{B''}"'] & FR_{B''}
\end{tikzcd}$$

(7.1) y (7.2) hacen conmutativo el mismo diagrama, pero los morfismos son únicos ya que la factorización de η_B es única, por tanto $R(a' \circ a) = R(a') \circ R(a)$.
Para $B \in Ob(\mathcal{B})$ por la propiedad de reflexión $F(R(1_B))$ hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "1_B"'] & FR_B \arrow[d, "FR(1_B)"'] \arrow[d, bend left=90, "F(1_{RB})"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & FR_B
\end{tikzcd}$$

Como F es funtor, $F(1_{RB}) \circ \eta_B = \eta_B \circ 1_B$, y como la asignación en morfismos es única, $1_{RB} = R(1_B)$.
La naturalidad de $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Longrightarrow F \circ R$ se tiene directamente de la forma en que se asignan los morfismos bajo R. ☐

Definición 7.38. *Un funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ se llama **adjunto izquierdo** a $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cuando existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Longrightarrow F \circ R$ tal que para cada objeto B en $\mathcal{B}$, (RB, η_B) es una reflexión de B a través de F, y se denota por $R \dashv F$.*

Definición 7.39. *Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se llama **adjunto derecho** a $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ cuando existe una transformación natural $\varepsilon : R \circ F \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ tal que para cada objeto A en $\mathcal{A}$, (FA, ε_A) es una correflexión de A a través de R, y se denota por $F \vdash R$.*

Teorema 7.40. *Consideremos dos funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$G \dashv F$*
2. *Existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Longrightarrow F \circ G$ y $\varepsilon : G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ tales que*

$$(F \star \varepsilon) \circ (\eta \star F) = 1_F \;\; y \;\; (\varepsilon \star G) \circ (G \star \eta) = 1_G$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\eta_F"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "F(\varepsilon)"] \\
& F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "G(\eta)"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "\varepsilon_G"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

3. *Para cada objeto A en $\mathcal{A}$ y para cada objeto B en $\mathcal{B}$, existe una biyección*

$$\Theta_{A,B} : \mathcal{A}(GB, A) \cong \mathcal{B}(B, FA)$$

y es natural en A y B.

4. $F \vdash G$

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$]Por definición existe $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Longrightarrow F \circ G$. Consideremos la reflexión de FA, (GFA, η_{FA}). Para 1_A existe un único morfismo $\varepsilon_A : GFA \to A$ tal que

$$F(\varepsilon_A) \circ \eta_{FA} = 1_{FA}. \tag{7.3}$$

Veamos que $\varepsilon : G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ es una transformación natural. Sea $a : A \to A'$ un morfismo en $\mathcal{A}$, como η es transformación natural se cumple que:

$$F(\varepsilon_{A'} \circ GFa) \circ \eta_{FA} = F\varepsilon_{A'} \circ FGFa \circ \eta_{FA} = F\varepsilon_{A'} \circ \eta_{FA'} \circ Fa = 1_{FA'} \circ Fa = Fa$$

y por (7.3) tenemos que:

$$F(a \circ \varepsilon_A) \circ \eta_{FA} = Fa \circ F\varepsilon_A \circ \eta_{FA} = Fa \circ 1_{FA} = Fa.$$

Como la factorización de η_{FA} es única tenemos que: $\varepsilon_{A'} \circ GFa = a \circ \varepsilon_A$, por tanto

$$\varepsilon : G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}.$$

Veamos ahora que para $B \in Ob(\mathcal{B})$ el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} GB \arrow[r, "G\eta_B"] \arrow[dr, "1_{GB}"'] & GFGB \arrow[d, "\varepsilon_{GB}"] \\ & GB \end{tikzcd}$$

Como η es natural tenemos:
$F(\varepsilon_{GB} \circ G\eta_B) \circ \eta_B = F\varepsilon_{GB} \circ FG\eta_B \circ \eta_B = F\varepsilon_{GB} \circ \eta_{FGB} \circ \eta_B = 1_{FGB} \circ \eta_B = \eta_B = F(1_{GB}) \circ \eta_B$.
Como la factorización de η_B es única, concluimos que $\varepsilon_{GB} \circ G\eta_B = 1_{GB}$ y por tanto el segundo triángulo conmuta.
$2) \Longrightarrow 3)$] Dado un morfismo $a : GB \to A$, definimos $\Theta_{A,B}(a)$ como la composición

$$B \xrightarrow{\eta_B} FGB \xrightarrow{Fa} FA$$

es decir, $\Theta_{A,B}(a) = Fa \circ \eta_B$ y para cada morfismo $b : B \to FA$, definimos $\Phi_{A,B}(b)$ como la composición

$$GB \xrightarrow{Gb} GFA \xrightarrow{\varepsilon_A} A$$

es decir, $\Phi_{A,B}(b) = \varepsilon_A \circ Gb$.
De la conmutatividad de los triángulos en (2) se sigue que $\Theta_{A,B}$ es una biyección ya que:

$$a = a \circ 1_{GB} = \varepsilon_A \circ GFa \circ G\eta_B = \varepsilon_A \circ G(Fa \circ \eta_B) = \Phi_{A,B}(Fa \circ \eta_B) = \Phi_{A,B} \circ \Theta_{A,B}(a)$$

y

$$\Theta_{A,B}(\Phi_{A,B}(b)) = \Theta_{A,B}(\varepsilon_A \circ Gb) = F(\varepsilon_A \circ Gb) \circ \eta_B = F\varepsilon_A \circ FGb \circ \eta_B = 1_{FA} \circ b = b.$$

Veamos que $\Theta_{A,B}$ es natural en A. Sea $f : A \to A'$ en $\mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}(GB, A)$, entonces

$$(\mathcal{B}(B, Ff) \circ \Theta_{A,B})(a) = \mathcal{B}(B, Ff)(Fa \circ \eta_B) = Ff \circ Fa \circ \eta_B$$

y

$$(\Theta_{A',B} \circ \mathcal{A}(GB, f))(a) = \Theta_{A',B}(f \circ a) = F(f \circ a) \circ \eta_B = Ff \circ Fa \circ \eta_B.$$

Por tanto, $\Theta_{A,B}$ es natural en A.
Resta ver que $\Theta_{A,B}$ es natural en B. Sea $g : B \to B'$ en $\mathcal{B}$ y $b \in \mathcal{A}(GB', A)$, entonces

$$(\Theta_{A,B} \circ \mathcal{A}(Gg, A))(b) = \Theta_{A,B}(b \circ Gg) = F(b \circ Gg) \circ \eta_B = Fb \circ FGg \circ \eta_B$$

y

$$(\mathcal{B}(g, FA) \circ \Theta_{A,B'})(b) = \mathcal{B}(g, FA)(Fb \circ \eta_{B'}) = Fb \circ \eta_{B'} \circ g = Fb \circ FGg \circ \eta_B.$$

Así que $\Theta_{A,B}$ también es natural en B.
$3) \implies 1)]$ Supongamos que para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$ y para todo $B \in Ob(\mathcal{B})$, hay una biyección

$$\Theta_{A,B} : \mathcal{A}(GB, A) \cong \mathcal{B}(B, FA)$$

natural en ambas variables, y tomemos $B \in Ob(\mathcal{B})$. Veamos que $(GB, \Theta_{Gb,B}(1_{GB}))$ es una reflexión para B. $GB \in Ob(\mathcal{A})$, además para $1_{GB} : GB \to GB$, $\Theta_{GB,B}(1_{GB})$:

$B \to FGB$ está en $\mathcal{B}$. Sea $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $b : B \to FA$, como $\mathcal{B}(B, FA) \cong \mathcal{A}(GB, A)$, existe un único morfismo $a : GB \to A$ tal que $\Theta_{A,B}(a) = b$.Como Θ es natural, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(GB,GB) \arrow[r, "\Theta_{GB,B}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(GB,a)"'] & \mathcal{B}(B,FGB) \arrow[d, "\mathcal{B}(B,Fa)"] \\
\mathcal{A}(GB,A) \arrow[r, "\Theta_{A,B}"] & \mathcal{B}(B,FA)
\end{tikzcd}$$

por tanto tenemos que:
$(Fa \circ \Theta_{GB,B})(1_{GB}) = (\mathcal{B}(B, Fa) \circ \Theta_{GB,B})(1_{GB}) = (\Theta_{A,B} \circ \mathcal{A}(GB, a))(1_{GB}) = \Theta_{A,B}(a \circ 1_{GB}) = \Theta_{A,B}(a) = b$.
Veamos que a es el único morfismo con la propiedad anterior. Sea $a' : GB \to A$ otro morfismo tal que $Fa' \circ \Theta_{GB,B}(1_{GB}) = b$, entonces
$\Theta_{A,B}(a') = \Theta_{A,B}(a' \circ 1_{GB}) = (\Theta_{A,B} \circ \mathcal{A}(GB, a'))(1_{GB}) = (\mathcal{B}(B, Fa') \circ \Theta_{GB,B})(1_{GB}) = (Fa' \circ \Theta_{GB,B})(1_{GB}) = b = \Theta_{A,B}(a)$,
luego $a = a'$. Así $\Theta_{GB,B}(1_{GB}) : B \to FGB$ es una reflexión de B y por tanto $G \dashv F$.
$3) \iff 4)$] Supongamos que

$$\mathcal{A}(GB, A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(B, FA)$$

Sea $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{op}$ y $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{op}$, entonces $\mathcal{A}^*(A, A') \cong \mathcal{A}(A', A)$ y $\mathcal{B}^*(B, B') \cong \mathcal{B}(B', B)$. Veamos que $F \vdash G$. Considerando categorías opuestas debemos ver que $F^* \dashv G^*$.
Como $1) \iff 3)$ podemos ver que $\mathcal{A}^*(A, G^*B) \cong \mathcal{B}^*(F^*A, B)$, pero como $G \dashv F$ por hipótesis, tenemos que:

$$\mathcal{A}^*(A, G^*B) \cong \mathcal{A}(GB, A) \cong \mathcal{B}(B, FA) \cong \mathcal{B}^*(F^*A, B)$$

Por tanto $F^* \dashv G^*$ si y sólo si $F \vdash G$.
Ahora supongamos que $F \vdash G$ entonces $G^* \dashv F^*$ entonces

$$\mathcal{A}(GB, A) \cong \mathcal{A}^*(A, G^*B) \cong \mathcal{B}^*(F^*A, B) \cong \mathcal{B}(B, FA)$$

si y sólo si $G \dashv F$. $\square$

A la transformación natural η del teorema anterior se le llama *unidad* de la adjunción y a ε se le denomina *counidad* de la adjunción.

Proposición 7.41. *Si el funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene adjunto izquierdo entonces F preserva todos los límites que existen en $\mathcal{A}$*

Demostración. Sea $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor donde $\mathcal{D}$ es una categoría pequeña y de tal forma que H tiene límite, digamos $(L, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$. Veamos que $(FL, \{Fp_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono límite de $F \circ H$.
*(i)*Es claro que $(FL, \{Fp_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono para $F \circ H$ pues F preserva conos.
(ii) Consideremos $(B, \{q_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ otro cono para $F \circ H$ y sea $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ el adjunto izquierdo de F. Entonces para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, $q_D : B \to FHD$ y por adjunción existe un único morfismo $r_D : GB \to HD$ en $\mathcal{A}$ y para cada morfismo $d : D \to D'$ en $\mathcal{D}$ tenemos que:
$r_{D'} = \Theta^{-1}_{HD',B}(q_{D'}) = \Theta^{-1}_{HD',B}(FHd \circ q_D) = (\Theta^{-1}_{HD',B} \circ \mathcal{B}(1_B, FHd))(q_D) = (\mathcal{A}(1_{GB}, Hd) \circ \Theta^{-1}_{HD,B})(q_D) = (\mathcal{A}(1_{GB}, Hd))(r_D) = Hd \circ r_D$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(GB, HD) \arrow[r, "\Theta_{HD,B}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1_{GB}, Hd)"'] & \mathcal{B}(B, FHD) \arrow[d, "\mathcal{B}(1_B, FHd)"] \\
\mathcal{A}(GB, HD') \arrow[r, "\Theta_{HD',B}"] & \mathcal{B}(B, FHD')
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $(GB, \{r_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono para H. Entonces existe un único morfismo $r : GB \to L$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D}) : p_D \circ r = r_D$ entonces

$$s := \Theta_{L,B}(r) : B \to FL.$$

Como Θ es natural, para cada objeto D en $\mathcal{D}$
$q_D = \Theta_{HD,B}(r_D) = \Theta_{HD,B}(p_D \circ r) = \Theta_{HD,B} \circ \mathcal{A}(GB, p_D)(r) = \mathcal{B}(1_B, Fp_D) \circ \Theta_{L,B}(r) = \mathcal{B}(1_B, Fp_D)(s) = Fp_D \circ s$,
y como Θ es biyectiva, s es el único con tal propiedad. Por tanto, $(FL, \{Fp_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es cono límite de $F \circ H$ y F preserva los límites. $\square$

Definición 7.42. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{CON}$ un funtor. Definimos la* ***categoría de elementos de F*** *denotada por $\mathcal{ELTS}(F)$, de la siguiente manera:*

1. *Los objetos de $\mathcal{ELTS}(F)$ son las parejas (A, a) donde $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $a \in FA$.*

2. *Un morfismo en $\mathcal{ELTS}(F)$, $f : (A, a) \to (B, b)$ es un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$ tal que $Ff(a) = b$.*

3. *La composicicón es como en $\mathcal{A}$.*

Definición 7.43. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. G se llama* ***funtor final*** *si y sólo si para cada categoría $\mathcal{A}$ y cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ se cumple que:*

1. *Si $(L, \{p_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es el límite de F entonces $(L, \{p_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ es el límite de $F \circ G$.*
2. *Si $(L, \{q_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ es el límite de $F \circ G$, entonces el límite de F también existe y es $(L, \{q_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$.*

Proposición 7.44. *Un funtor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es final si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, existe $C \in Ob(\mathcal{C})$ y existe $d : GC \to D$*
2. *Para cualesquiera objetos C, C' en $\mathcal{C}$, D en $\mathcal{D}$ y para cualesquiera morfismos $d : GC \to D$, $d' : GC' \to D$, existe un objeto C'' en $\mathcal{C}$ y existen morfismos $c : C'' \to C$ y $c' : C'' \to C'$ tal que*

$$d \circ Gc = d' \circ Gc'.$$

$$\begin{tikzcd}
 & GC \arrow[dr, "d"] & \\
GC'' \arrow[ur, "Gc"] \arrow[dr, "Gc'"'] & & D \\
 & GC' \arrow[ur, "d'"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor. Cada cono $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ en F induce un cono $(M, \{q_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ en $F \circ G$ (considerando las proyecciones únicamente a imágenes de objetos de $\mathcal{C}$).
Por otro lado, consideremos un cono $(M, \{r_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ de $F \circ G$. Veamos que éste induce un único cono $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ de F tal que $q_{GC} = r_C$.
Para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, por (1), existe $C \in Ob(\mathcal{C})$ y existe un morfismo $d : GC \to D$. Definimos $q_D = Fd \circ r_C$.

$$M \xrightarrow{r_C} FGC \xrightarrow{Fd} FD$$

Veamos que $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono para F. Primero demostremos que q_D no depende de C ni d. Sean $C' \in Ob(\mathcal{C})$ y $d' : GC' \to D$, por (2), existen c, c' morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $d \circ Gc = d' \circ Gc'$ y por tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & FGC \arrow[dr, "Fd"] & \\
M \arrow[ur, "r_C"] \arrow[r, "r_{C''}"] \arrow[dr, "r_{C'}"'] & FGC'' \arrow[u, "FGc"'] \arrow[d, "FGc'"] & FD \\
 & FGC' \arrow[ur, "Fd'"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular, $Fd \circ r_C = Fd' \circ r_{C'}$. Por tanto, para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, q_D está determinado de manera única. Si elegimos $d = 1_{GC}$, $q_{GC} = r_C$. Así, $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es el único cono sobre F que proviene de $(M, \{r_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$.
(1) Supongamos que $(L, \{p_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono límite para F y veamos que $(L, \{p_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ es un cono límite de $F \circ G$. Sea $(M, \{r_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ otro cono de $F \circ G$, entonces $(M, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es un cono para F tal que para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, $q_{GC} = r_C$. Pero $(L, \{p_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es límite para F, entonces existe un morfismo único $e : M \to L$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, $p_D \circ e = q_D$.
Particularmente, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, $p_{GC} \circ e = r_C$. Por tanto, $(L, \{p_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ es límite de $F \circ G$.
(2) Sea $(L, \{r_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ cono límite para $F \circ G$ y veamos que $(L, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es límite para F. Tomemos $(M, \{s_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ otro cono para F. De la parte ***(1)*** sabemos que $(L, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es único tal que $q_{GC} = r_C$ para $C \in Ob(\mathcal{C})$. Pero para $(M, \{s_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ cono de F, tenemos el cono inducido $(M, \{s_{GC}\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ de $F \circ G$, como $(L, \{r_C\}_{C\in Ob(\mathcal{C})})$ es límite de $F \circ G$, existe un único morfismo $e : M \to L$ tal que para cada objeto $C \in Ob(\mathcal{C})$, $s_{GC} = r_C \circ e$.
Sea $D \in Ob(\mathcal{D})$, por (1), existe $C \in Ob(\mathcal{C})$ y existe $d : GC \to D$, entonces $Fd : FGC \to FD$. Como$(M, \{s_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es cono de F, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "s_{GC}"'] \arrow[dr, "s_D"] & \\
FGC \arrow[r, "Fd"'] & FD
\end{tikzcd}$$

Por tanto $s_D = Fd \circ s_{GC}$. Además como $(L, \{q_D\}_{D\in Ob(\mathcal{D})})$ es cono de F, para

$GC \in Ob(\mathcal{D})$ tenemos:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "q_{GC}"'] \arrow[dr, "q_D"] & \\ FGC \arrow[r, "Fd"'] & FD \end{tikzcd}$$

Así

$$q_D = Fd \circ q_{GC} = Fd \circ r_C.$$

Luego para $e : M \to L$ se cumple que:

$$s_D = Fd \circ s_{GC} = Fd \circ r_C \circ e = q_D \circ e.$$

Veamos que e con dicha propiedad es único. Sea $m : M \to L$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D}) : s_D = q_D \circ m$. Entonces para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$:

$$q_D \circ e = q_D \circ m.$$

Luego $e = m$ y por tanto e es el único con tal propiedad. Así $(L, \{q_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es cono límite de F. $\square$

Proposición 7.45. *Sean $\mathcal{D}$ una categoría con productos fibrados y $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de $\mathcal{D}$ que satisface que para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, existe un objeto C en $\mathcal{C}$ y existe un morfismo $d : C \to D$, entonces $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor final.*

Demostración. Sea $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ el funtor inclusión. Entonces se cumple (1) de la proposición anterior. Veamos que se cumple (2).
Sean $C, C' \in Ob(\mathcal{C})$ y $D \in Ob(\mathcal{D})$, $d : i(C) \to D$ y $d' : i(C') \to D$. Veamos que existen $C'' \in Ob(\mathcal{C})$ y morfismos $C'' \to C$ y $C'' \to C'$ tales que:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, "d"] & \\ C'' \arrow[ur] \arrow[dr] & & D \\ & C' \arrow[ur, "d'"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos (P, p, q) el producto fibrado de (D, d, d'). Como $P \in Ob(\mathcal{D})$, existen C'' y $r : C'' \to P$, luego $d \circ p \circ r = d' \circ q \circ r$.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "d"] & \\
P \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & C'' \arrow[l, "r"'] \arrow[u, "p\circ r"'] \arrow[d, "q\circ r"] & D \\
 & C' \arrow[ur, "d'"'] &
\end{tikzcd}$$

$p \circ r$ y $q \circ r$ están en $\mathcal{C}$ porque $\mathcal{C}$ es plena en $\mathcal{D}$. Por tanto la condición (2) de la proposición anterior se cumple y así $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor final. $\square$

Corolario 7.46. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría con objeto inicial **0**, entonces $\{\mathbf{0}\} \hookrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor final.*

Demostración. Se sigue directamente de la proposición anterior porque $\{\mathbf{0}\}$ es subcategoría plena de $\mathcal{D}$ y como **0** es inicial, para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$ hay un morfismo $d : \mathbf{0} \to D$. $\square$

Corolario 7.47. *Considere una categoría $\mathcal{D}$ con objeto inicial **0** y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor. Para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, $\theta_D : \mathbf{0} \to D$, entonces F tiene límite y es $(F\mathbf{0}, \{F\theta_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior por el hecho de que $\{\mathbf{0}\} \hookrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor final y $(\mathbf{0}, \{\theta_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es su límite. $\square$

Observación 7.48. Dado un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, para cada $B \in Ob(\mathcal{B})$ definimos el funtor $\mathcal{B}(B, F\_) : \mathcal{A} \to \mathcal{CON}$ y su categoría de elementos $\mathcal{ELTS}(\mathcal{B}(B, F\_)) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ y $\phi_B : \mathcal{E}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}$ un funtor que olvida.

Proposición 7.49. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Entonces son equivalentes:*

1. *Para cada objeto B en $\mathcal{B}$ hay una reflexión a través de F*

2. *El funtor $\phi_B : \mathcal{E}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}$ tiene un límite que es preservado por F*

Demostración. $(1) \Longrightarrow (2)]$ Sea $B \in Ob(\mathcal{B})$ y consideremos su reflexión $(L, \alpha) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ a través de F, entonces $\alpha : B \to FL$, $\alpha \in \mathcal{B}(B, FL)$ y $L \in Ob(\mathcal{A})$.
Veamos que (L, α) es un objeto inicial en $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. Sea (M, β) objeto en $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, $M \in Ob(\mathcal{A})$ y $\beta \in \mathcal{B}(B, FM)$. Como (L, α) es una reflexión para B, existe un único morfismo $P_{M,\beta} : L \to M$ tal que $FP_{M,\beta} \circ \alpha = \beta$, es decir,

$$\mathcal{B}(B, F\_)(P_{M,\beta}(\alpha)) = FP_{M,\beta}(\alpha) = \beta,$$

y por tanto

$$P_{M,\beta} : (L, \alpha) \to (M, \beta).$$

Así que $P_{M,\beta} \in Mor((\mathcal{E}_{\mathcal{B}}))$ y es único. Por tanto, (L, α) es un objeto inicial en $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.
Por el corolario anterior, ϕ_B tiene límite y F preserva límites por tener adjunto izquierdo.
$(2) \Longrightarrow (1)]$ Sea $(L, \{P_{(A,b)}\}_{(A,b) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})})$ el límite de ϕ_B, entonces

$$(FL, \{FP_{(A,b)}\}_{(A,b) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})})$$

es un límite para $F \circ \phi_B$, ya que F preserva el límite por hipótesis.
Para cada $(A, b) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ definimos

$$r_{(A,b)} := b : B \to FA.$$

Entonces $(B, \{r_{(A,b)}\}_{(A,b) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})})$ es un cono de $F \circ \phi_B$ pues para el morfismo $f : (A, b) \to (A', b')$ en $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, $f : A \to A'$ tal que $Ff(b) = b'$. Por tanto, existe un único morfismo $\alpha : B \to FL$ tal que

$$FP_{(A,b)} \circ \alpha = r_{(A,b)} = b.$$

Veamos que (L, α) es la reflexión de B a través de F. Sea $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $b : B \to FA$.
Entonces $FP_{(A,b)} \circ \alpha = b$.
Como $(L, \alpha) \in Ob(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})$, $FP_{(A,b)} \circ \alpha = b$. Notar que $P_{(A,b)} : L \to A$, $f \in Mor((\mathcal{E}_{\mathcal{B}}))$, $f : (A, b) \to (A', b')$ implica que $f : A \to A'$ y $\mathcal{B}(B, Ff)(b) = b'$.
Entonces $P_{(A,b)} : (L, \alpha) \to (A, b)$ y $FP_{(A,b)} \circ \alpha = \mathcal{B}(B, FP_{(A,b)})(\alpha) = b$. Así $P_{(A,b)} \in Mor(\mathcal{E}_{\mathcal{B}})$. Por la propiedad de límite el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "P_{(L,\alpha)}"'] \arrow[dr, "P_{(A,b)}"] & \\ (L, \alpha) \arrow[r, "P_{(A,b)}"'] & (A, b) \end{tikzcd}$$

Por tanto
$$P_{(L,\alpha)} \circ P_{(A,b)} = P_{(A,b)}.$$
Pero $(L, \{P_{(A,b)}\}_{(A,b)\in Ob(\mathcal{E}_\mathcal{B})})$ es un límite, entonces $P_{(L,\alpha)} = 1_L$. Sea $P : L \to A$ en $\mathcal{A}$ tal que $FP \circ \alpha = b$. Entonces $P : (L, \alpha) \to (A, b)$ está en $Mor(\mathcal{E}_\mathcal{B})$. De igual forma que en el diagrama anterior, $P_{(A,b)} = P \circ P_{(L,\alpha)} = P$.
Por tanto $P_{(A,b)}$ es la única flecha que factoriza a b a través de α. Así $\alpha : B \to FL$ es una reflexión y en consecuencia, F tiene adjunto izquierdo.

□

Definición 7.50. *Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ satisface la **condición del conjunto solución** con respecto a un objeto B en $\mathcal{B}$ si existe $S_B \subseteq Ob(\mathcal{A})$ tal que S_B es un conjunto y además para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ y para cada $b : B \to FA$, existe $A' \in S_B$ y existen morfismos $b' : B \to FA'$ y $a : A' \to A$: tales que*
$$F(a) \circ b' = b.$$

Observación 7.51. Esta definición es más débil que tener una reflexión. Por otra parte, si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor y $B \in Ob(\mathcal{B})$ tiene una reflexión a través de F, el conjunto de la definición anterior es $S_B = \{R_B\}$ donde (R_B, α_B) es la reflexión.

Teorema 7.52 (Del funtor adjunto)**.** *Sean $\mathcal{A}$ una categoría completa y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor, entonces son equivalentes:*

1. *F tiene adjunto izquierdo*

2. *Las siguientes condiciones se satisfacen:*

   - *F preserva límites*

   - *Para todo $B \in Ob(\mathcal{B})$, F satisface la condición del conjunto solución*

Demostración. $(1) \implies (2)]$ Ya sabemos que si F tiene adjunto izquierdo entonces preserva todos los límites existentes en $\mathcal{A}$, y por la observación anterior, para todo $B \in Ob(\mathcal{B})$, $S_B = \{R_B\}$ satisface la condición del conjunto solución.
$(2) \implies (1)]$ Por la proposición anterior, basta mostrar que $\phi_B : \mathcal{E}_\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tiene un límite. Sea $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ subcategoría de $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ tal que:

- Los objetos de $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ son parejas $(A, b) \in Ob(\mathcal{E}_\mathcal{B})$ con $A \in S_B$

- $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ es plena respecto a $\mathcal{E}_\mathcal{B}$.

Como S_B es un conjunto, $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ es pequeña. Entonces si i_B es la inclusión de $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ en $\mathcal{E}_\mathcal{B}$, $\phi_B \circ i_B$ tiene límite porque $\mathcal{A}$ es completa. Veamos que i_B es un funtor final. Como $\mathcal{A}$ es completa y el funtor $\mathcal{B}(B, F\_)$ preserva límites, entonces $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ es completa y por tanto tiene productos fibrados. Veamos que para todo objeto (A, b) en $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ existen $(A', b') \in Ob(\mathcal{L}_\mathcal{B})$ y $d : (A', b') \to (A, b)$. Sea $(A, b) \in Ob(\mathcal{E}_\mathcal{B})$, $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $b : B \to FA$, por la propiedad del conjunto solución, existe $A' \in S_B$, y existen morfismos $a : A' \to A$ y $b' : B \to FA'$ tales que $F(a) \circ b' = b$. Tomando $d = a$, $F(d) \circ b' = b$. Luego $d : (A', b') \to (A, b)$ y por tanto i_B es un funtor final y como $\phi_B \circ i_B$ tiene límite, entonces ϕ_B tiene límite. Por la proposición anterior, F tiene adjunto izquierdo. $\square$

7.4. Lógica

Una lógica L, es un lenguaje que consiste de proposiciones y reglas sobre ellas, llamadas axiomas y reglas de inferencia. Las proposiciones con las que trabajamos son las fórmulas bien formadas. Para el cálculo proposicional clásico o intuicionista, conmúnmente las conectivas primitivas son la negación $\neg$ y la implicación $\rightarrow$, y las demás conectivas son abreviaciones de estas.

Definición 7.53. *El cálculo proposicional intuicionista es aquel cuyos axiomas son:*

I1 $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

I2 $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \rho))$

I3 $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

I4 $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

I5 $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

I6 $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

I7 $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

I8 $\vdash (\varphi \rightarrow \rho) \rightarrow ((\psi \rightarrow \rho) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \rho))$

I9 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi)$

I10 $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

y con regla de inferencia modus ponens

$$\textit{si} \vdash \varphi \textit{ y} \vdash \varphi \rightarrow \psi \textit{ entonces} \vdash \psi$$

donde φ, ψ y ρ son fórmulas arbitrarias del lenguaje.

Definición 7.54. *El cálculo proposicional clásico es obtenido a partir del cálculo proposicional intuicionista añadiendo el axioma mejor conocido como Ley del Tercero Excluso, para toda fórmula φ:*

$$\vdash \varphi \vee \neg\varphi.$$

En el caso de la lógica cuántica, las conectivas primitivas son $\neg$ (negación) y $\vee$ (disyunción). Denotamos las proposiciones elementales o primitivas por $p_0, p_1, ...$. El conjunto de fórmulas bien formadas se define recursivamente como sigue:

1. p_j es fórmula bien formada para $j = 0, 1, 2, ...$
2. Si A es fórmula bien formada entonces $\neg A$ es fórmula bien formada.
3. Si A y B son fórmulas bien formadas entonces $A \vee B$ es fórmula bien formada.

Se define $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$. Además las operaciones de implicación son las siguientes:

$$A \rightarrow_0 B = \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow_1 B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \rightarrow_3 B = (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge (\neg A \vee B))$$

Como podemos observar, $\rightarrow_0$ es la implicación clásica y $\rightarrow_1$ es la implicación cuántica de Sasaki. Además definimos las operaciones de equivalencia como sigue:

$$A \equiv B := (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \equiv_0 B := (A \rightarrow_0 B) \wedge (B \rightarrow_0 A).$$

Definición 7.55. *Una prueba en* L*, es una sucesión* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *de fórmulas tal que para cada* $i \leq n$*,* α_i *es un axioma o una consecuencia directa de las fórmulas previas resultado de la aplicación de una regla de infrerencia.*
Dada una fórmula A *se dice que* A *tiene prueba si existe una prueba* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *donde* $\alpha_n = A$*.*

A partir de un conjunto de axiomas mediante reglas de inferencia, obtenemos otras expresiones llamadas teoremas. Los axiomas son también teoremas. Se utiliza un símbolo especial para denotar teoremas $\vdash$. La sentencia $\vdash A$, A es teorema quiere decir que A tiene prueba.

Definición 7.56. *Sea* Γ *un conjunto de fórmulas en* L*. Decimos que* φ *es consecuencia lógica de* Γ*, lo cual denotamos por* $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \varphi$*, o bien que* φ *se deduce de* Γ *en* T*, si existe una suceción de fórmulas* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *tales que* $\alpha_n = \varphi$ *y para cada* $i \leq n$*,* α_i *es axioma,* $\alpha_i \in \Gamma$ *o bien* α_i *es consecuencia de la aplicación de modus ponens de las fórmulas anteriores en la sucesión.*

Observación 7.57. A los elementos de Γ en la definición anterior se les llama hipótesis o premisas de la prueba. Cuando la teoría formal en la cual se está trabajando es clara, es común escribir $\Gamma \vdash \varphi$ en lugar de $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \varphi$. Además cuando Γ es un conjunto finito de la forma $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ se escribe $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash \varphi$ en lugar de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \varphi$.
Finalmente, si $\Gamma = \emptyset$ y φ es una fórmula entonces $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si φ es teorema.

Proposición 7.58. *Sean Δ y Γ conjuntos de fórmulas en T y φ una fórmula.*

1. *Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Delta \vdash \varphi$.*
2. *$\Delta \vdash \varphi$ si y sólo si existe $\Gamma \subseteq \Delta$ finito tal que $\Gamma \vdash \varphi$.*
3. *Si $\Gamma \vdash \varphi$ y para cada $\alpha \in \Gamma$, $\Delta \vdash \alpha$ entonces $\Delta \vdash \varphi$.*

A continuación presentamos el sistema axiomático de la lógica cuántica de Kalmbach por ser el más estudiado. La lógica cuántica, QL es definida como un lenguaje que consta de proposiciones y conectivas como presentamos antes y los siguientes axiomas y una regla de inferencia.

Axiomas

A1 $\vdash A \equiv A$

A2 $\vdash (A \equiv B) \rightarrow_0 ((B \equiv C) \rightarrow_0 (A \equiv C))$

A3 $\vdash (A \equiv B) \rightarrow_0 (\neg A \equiv \neg B)$

A4 $\vdash (A \equiv B) \rightarrow_0 ((A \wedge C) \equiv (B \wedge C))$

A5 $\vdash (A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

A6 $\vdash (A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C))$

A7 $\vdash (A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

A8 $\vdash (\neg A \wedge A) \equiv ((\neg A \wedge A) \wedge B)$

A9 $\vdash A \equiv \neg\neg A$

A10 $\vdash \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

A11 $\vdash (A \vee (\neg A \wedge (A \vee B))) \equiv (A \vee B)$

A12 $\vdash (A \equiv B) \equiv (B \equiv A)$

A13 $\vdash (A \equiv B) \to_0 (A \to_0 B)$

A14 $\vdash (A \to_0 B) \to_3 (A \to_3 (A \to_3 B))$

A15 $\vdash (A \to_3 B) \to_0 (A \to_0 B)$

Regla de Inferencia (*Modus Ponens*)

$$\textbf{R1} \text{ Si} \vdash A \text{ y} \vdash A \to_3 B \text{ entonces} \vdash B$$

Podríamos prescindir de A1, A11 y A15 porque pueden derivarse de los otros axiomas.
Sea F^* el conjunto de fórmulas bien formadas. Podemos usar las fórmulas bien formadas que contienen a $\neg$ y $\vee$ en L para construir un álgebra $\mathsf{F} = (\mathsf{F}^*, \neg, \vee)$, entonces en L se imponen un conjunto de axiomas y reglas de inferencia sobre F. Para el cálculo intuicionista la construcción es la siguiente. Definimos en F^* un orden de tal forma que para fórmulas α y β,

$$\alpha \leq \beta \text{ si y sólo si} \vdash \alpha \to \beta.$$

Este orden proporciona al conjunto de fórmulas F^* una estructura de conjunto parcialmente ordenado. Entonces podemos considerar el cociente del conjunto parcialmente ordenado F^* por la relación de equivalencia dada por: para cada $\alpha, \beta \in \mathsf{F}^*$

$$\alpha \equiv \beta \text{ si y sólo si} \vdash \alpha \to \beta \text{ y} \vdash \beta \to \alpha.$$

Entonces $(\mathsf{F}^*/\equiv, \leq)$ es una retícula, conocida como el álgebra de Lindembaum-Tarski. Para el cálculo proposicional intuicionista dicha álgebra es un álgebra de Heyting. En el caso del cálculo proposicional clásico, el álgebra de Lindembaum-Tarski es un álgebra Booleana.

Definición 7.59. *Llamamos a $\mathsf{M} = (\mathsf{L}, h)$ un modelo si L es un álgebra y $h : \mathsf{F}^* \to \mathsf{L}$ llamada valuación, es un morfismo de fórmulas F^* en L que preserva las operaciones $\neg$ y $\vee$.*

Cuando el conjunto base L de algún modelo pertenece a alguna clase de álgebras, digamos Booleanas, decimos informalmente que el modelo pertenece a álgebras booleanas. Como mencionamos anteriormente, para la lógica clásica un modelo es una retícula distributiva complementada, es decir, un álgebra booleana, para la lógica intuicionista es un álgebra de Heyting, mientras que para la lógica cuántica el modelo es una retícula ortomodular.

Definición 7.60. *Decimos que una fórmula $A \in \mathtt{F}^*$ es válida en el modelo $\mathtt{M}$ y escribimos $\models_{\mathtt{M}}$, si $h(A) = 1$ para todas las valuaciones h sobre el modelo, es decir, para toda h asociada al conjunto base $\mathtt{L}$ del modelo.*

Llamamos a una fórmula $A \in \mathtt{F}^*$ una consecuencia de $\Gamma \subseteq \mathtt{F}^*$ en el modelo $\mathtt{M}$ y escribimos $\Gamma \models_{\mathtt{M}} A$ si para toda valuación h, siempre que $h(X) = 1$ para todo $X \in \Gamma$ entonces $h(A) = 1$.

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de la Deducción.

Teorema 7.61. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que existe una prueba de $\alpha \to \beta$ a partir de Γ. Entonces por *modus ponens* existe una prueba de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, lo que significa que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.
($\Longrightarrow$) Sea $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n = \beta$ una prueba para β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ y probemos por inducción que para cada $i \leq n$, $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_i$. Entonces por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_1$, $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_2$,...,$\Gamma \vdash \alpha \to \delta_{n-1}$. Resta ver que $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$. Consideremos dos casos:

Caso 1: $\delta_j \in \Gamma$ o δ_j es axioma entonces $\Gamma \vdash \delta_j$. Por la proposición 7.58 tenemos $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Caso 2: δ_j es obtenido por aplicación de *modus ponens* de dos fórmulas precedentes, es decir, existe $\delta_{j_1} \in \{1, ..., n-1\}$ tal que δ_j es obtenido de δ_{j_1} y $\delta_{j_1} \to \delta_j$ por *modus ponens*. Por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_{j_1}$ y $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_{j_1} \to \delta_j$. Por tanto tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

$\square$

Los teoremas de robustez y completitud muestran que los teoremas que pueden obtenerse de los axiomas y la aplicación de la regla de inferencia son exactamente aquellos que son válidos. En la referencia [15] se ofrecen las pruebas a detalle de estos hechos.

Bibliografía

1. ANDERSON, F., FULLER, K. *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, New York, (1992).

2. BERAN,L. *Orthomodular Lattices. Algebraic Approach*, D. Reidel, Praga, (1985).

3. BIRKHOFF, G.D., VON NEUMANN, J., "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, 37, 823-843, (1936).

4. BORCEUX, F., *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

5. BORCEUX, F., "Quantales and their sheaves", *Order 3*, 61-87, (1986).

6. FERNÁNDEZ-ALONSO, R., RAGGI, F.,RÍOS,J., RINCÓN, H., SIGNORET, C. "The lattice structure of preradicals", *Comm. Alg.* 30(3), 1533-1544, (2002).

7. FINCH, P. D. "On the lattice structure of quantum logic", *Bull. Austral. Math. Soc.* 1, 333-340, (1969).

8. FINCH, P. D. "Quantum logic as an implication algebra", *Bull. Austral. Math. Soc.* 2, 101-106, (1970).

9. HERRLICH H., STRECKER G. E., *Category Theory*, Allyn and Barcon, Boston, (1973).

10. JOHNSTONE, P., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, (1982).

11. JOYAL, A., TIERNEY, M., "An Extension of the Galois Theory of Grothendieck", *Amer. Math. Soc. Memoirs*, 309, (1984).

12. KALMBACH,G. *Ortomodular Lattices*, Academic Press, New York, (1983).

13. KRUML D., “Distributive Quantales”, *Applied Categorical Structures* 11, 561-566, (2003).

14. NAWAZ, M., *Quantales: quantal sets, Ph.D. Thesis*, University of Sussex, (1985).

15. PAVICIC M, MEGILL N. D. “Is quantum logic a logic?”, *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic*, 23-47, (2009).

16. ROMÁN L., RUMBOS B. “Remarks on material implication in orthomodular lattices”, *Math. Rep. Acad. Sci.* X, 279-284, (1988).

17. ROMÁN L., RUMBOS B. “Quantic Lattices”, *International Journal of Theoretical Physics*, 30,1555-1563, (1991).

18. ROMÁN L., RUMBOS B. “Quantum Logic Revisited”, *Foundations of Physics*, 21, 727-734, (1991).

19. ROMÁN L., ZUAZUA R. “Quantum Implication”, *International Journal of Theoretical Physics*, 38,793-797, (1999).

20. ROSENTHAL, K. *Quantales and their applications*, Longman Scientific & Technical, New York, (1990).

21. ROSENTHAL, K. “A general approach to gabriel filtres on quantales”, *Communications in Algebra* 20(11), 3393-3409, (1992).

22. STENSTRÖM,B. *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, New York, (1975).

23. WISBAUER, R., Foundations of Module and Ring Theory, University of Düsseldorf, (1991).

24. YONG-MING L., MENG Z., ZHI-HUI L., “Projective and injective objects in the category of quantales”, *Journal of Pure and Applied Algebra* 176, 249-258, (2002).