



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TEORÍA WAVELET EN FUSIÓN DE IMAGENES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ANA KAREN TOXQUI TOXQUI

DIRECTOR DE TESIS:

MAT. JAIME BADILLO MÁRQUEZ

PUEBLA, PUE. PRIMAVERA 2022

DEDICATORIA

A mi familia, maestros y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Extiendo mi gratitud a aquellas personas que hicieron posible la realización de este trabajo, quienes con su apoyo, dedicación y cariño me acompañaron durante este proceso. De manera especial quiero agradecer a mi maestro y amigo Mat. Jaime Badillo Márquez quien fue mi profesor en varias clases y motor de ánimos para explorar las matemáticas, por su motivante y valiosa asesoría como director de tesis, por los invaluable conocimientos que compartió conmigo, por proveer en cada clase un ambiente abierto de aprendizaje y colaboración con el cual me guió a través de cada una de las etapas de este proyecto para alcanzar los resultados que buscaba.

A mi papá Enrique Toxqui Tecuanhuey por su incansable y valioso apoyo como padre, quien con cariño me ayudo a afrontar los diferentes retos que se me presentaron, por motivarme a seguir estudiando y mostrarme de distintas formas su amor y orgullo por mi, por su apreciable compañía y amistad que siempre marcó la diferencia.

A mi hermano Miguel quien fue durante muchas ocasiones mi confidente y amigo, agradezco la paciencia y enorme cariño con el que siempre me escucho.

A mis compañeros y amigos por la compañía y amistad brindada que hizo de los años de licenciatura una experiencia enriquecedora.

A todos ustedes gracias.

INTRODUCCIÓN

Las Wavelets también llamadas ondeletas son funciones con requerimientos matemáticos específicos que se utilizan para representar funciones o datos, de esta manera, el Análisis Wavelet tiene como principio descomponer una señal o función en diferentes componentes ofreciendo así una transformada flexible que proporciona una descomposición de resolución múltiple, lo que a su vez permite una representación matemática económica e informativa de muchos objetos de interés. El análisis de una función (descomponer una función en sus partes) es conocido desde el Análisis de Fourier para funciones periódicas, sin embargo, el Análisis Wavelet permite mucha más precisión en dicha tarea debido a su versatilidad ya que permite decodificar casi cualquier tipo de datos a través de las diferentes familias que existen con diferentes formas y escalas para así adaptarse a las diversas formas de una onda. Sus ventajas sobre la Transformada de Fourier y la Transformada de Fourier Corta son significativas, además los vínculos y puntos en común entre ambas teorías continúan generando actividad de investigación interdisciplinaria entre matemáticos, físico e ingenieros.

La Teoría Wavelet es un área de las matemáticas de reciente creación, surgió a principios del siglo XX siendo Alfréd Haar uno de los principales precursores al proponer la primera base Wavelet nombrada en su honor base de Haar. Fue hasta la década de los ochenta cuando las Wavelets tuvieron un impulso adicional debido a la innovación tecnológica alcanzada en la década y a los trabajos de Stephane Mallat quien estableció la relación de los filtros de cuadratura, así como los algoritmos piramidales que sirven para comprender el análisis de resolución múltiple y las bases ortonormales de las Wavelets, así como aplicaciones en procesamiento de señales. Más tarde la teoría sería ampliamente explorada por Yves Meyer cuyos trabajos en Teoría Wavelet se convertirían en fundamentales para el desarrollo de esta

y por los cuales le otorgaron el premio Abel en 2017. Es necesario mencionar que uno de los principales logros de la nueva teoría se alcanzó gracias a Ingrid Daubechies dado que construyó un conjunto de Wavelets madre de soporte compacto que generan bases ortonormales de funciones, mismas que llevan su nombre, dicha construcción es quizá la más elegante y en la actualidad es pilar de las aplicaciones de las Wavelets, siendo fundamentales a la hora de desarrollar aplicaciones en fusión de imágenes. Sus aportes matemáticos en el área le permitieron obtener diversos reconocimientos como el Premio Nemmers en Matemáticas de 2012.

Las Wavelets han revolucionado el estudio de los fenómenos ondulatorios complejos en el procesamiento de imágenes, las comunicaciones y los flujos de datos científicos, siendo de esta manera uno de los pocos descubrimientos matemáticos con más influencia en la actual sociedad tecnológica, entre sus aplicaciones más relevantes se encuentra la compresión JPEG 2000, el estudio de señales obtenidas de eventos geológicos, la eliminación de ruido en imágenes, señales de sonido y flujo de datos en general, la identificación de pinturas originales de Vicent van Gogh, el estudio de señales cardiacas, análisis de señales de ondas gravitacionales, análisis numérico, computación gráfica, minería de datos, visión artificial, entre otras, extendiendo así su aplicación a múltiples áreas del conocimiento humano. Esto ha permitido el desarrollo de paquetes de software que contienen algoritmos rápidos y eficientes para realizar la Transformada Wavelet. El objetivo general de este trabajo es desarrollar los conceptos de la Teoría Wavelet que intervienen en la fusión de imágenes mediante análisis de resolución múltiple, para esto se realiza un estudio de la Transformada Wavelet unidimensional y se analiza la teoría de producto tensorial que permite extender la Transformada Wavelet a otras dimensiones; para fines de procesamiento de imágenes basta con desarrollar la dimensión dos, finalmente se pretende obtener una implementación computacional en Matlab para la fusión de dos imágenes utilizando la Transformada Wavelet Haar que muestre de forma visual la viabilidad de esta técnica.

El problema de la fusión de imágenes es relevante debido a la información que aporta sobre ciertos eventos y los múltiples usos que se le dan a las imágenes fusionadas, en la actualidad existen métodos de fusión de imágenes que no implementan la transformada Wa-

velet. La implementación de la Transformada Wavelet en la fusión de imágenes se ve limitada por el hecho de que para acceder a ella es necesario poseer conocimientos previos en procesamiento de señales, así como conocimientos de análisis matemático, en particular análisis de Fourier. Muchos documentos, libros y artículos especializados en el tema son demasiado teóricos, de manera que es difícil precisar las conexiones entre las diversas partes que componen la Teoría Wavelet y en ocasiones no brindan información clara de los procedimientos para alcanzar ciertos objetivos, esta tesis aporta una visión general y clara de la teoría a través de los fundamentos matemáticos de la misma basados en el análisis matemático.

En el capítulo 1 se realiza un análisis de la transformada de Fourier y la transformada de Fourier corta a fin de mostrar las limitaciones que tiene en el análisis de señales de una dimensión.

En el capítulo 2 se estudia la Transformada Wavelet en una dimensión iniciando con el estudio de la Transformada Wavelet Continua, se analiza los beneficios que ofrece en comparación con la Transformada de Fourier corta, posteriormente se presenta la transformada inversa que será usada para la reconstrucción de señales, más adelante se estudia el concepto de análisis de resolución múltiple y se ofrece la demostración de identidades que son útiles en la Teoría Wavelet, finalmente se estudia la Transformada Wavelet Discreta en tres diferentes interpretaciones.

En el capítulo 3 se muestra el algoritmo rápido Wavelet, el cual consta de dos subalgoritmos, uno de descomposición y otro de reconstrucción con los cuales se realiza el análisis y reconstrucción de una señal en una dimensión.

En el capítulo 4 se estudian los fundamentos del producto tensorial para ser utilizado como herramienta en la construcción de Wavelets de dos dimensiones, finalmente se da de forma explícita la representación matricial de la Transformada Wavelet Discreta en dos dimensiones de forma matricial.

El capítulo 5 explora la técnica de fusión de imágenes mediante el uso de Wavelets, en esta se muestra cómo se obtiene la descomposición en los diferentes detalles: horizontales, verticales y diagonales, finalmente se muestra la fusión de dos imágenes usando la Wavelet Haar en un nivel de descomposición dos.

Finalmente el capítulo 6 muestra las conclusiones obtenidas durante la realización de esta tesis.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	2
INTRODUCCIÓN	3
Limitaciones del Análisis de Fourier	10
Teoría Wavelet unidimensional	13
Transformada Wavelet Continua (TWC)	13
Transformada Wavelet Discreta (TWD)	19
Análisis de Resolución Múltiple (ARM)	22
Descomposición y reconstrucción de funciones en $L^2(\mathbb{R})$	62
Algoritmo de descomposición	63
Algoritmo de reconstrucción	65
Producto tensorial en la Teoría Wavelet	66
Definición y propiedades del producto tensorial	66
Cambio de coordenadas en el producto tensorial	72
Producto tensorial en espacios de funciones	73
Producto tensorial en espacio de funciones en la Teoría Wavelet	75
Fusión de imágenes	79
Imágenes digitales	79
Registro de imágenes	80
Proceso de fusión	81
Implementación algorítmica en Matlab	84

Conclusiones y perspectivas	102
Apéndice	104
Transformadas de Fourier	104
Transformada Wavelet Continua	105
Referencias	108

Índice de figuras

1	Diagrama del funcionamiento de la Transformada de Fourier	11
2	Diagrama del funcionamiento de la Transformada de Fourier con Ventana .	12
3	Diagrama del funcionamiento de la Transformada Wavelet	15
4	Espacios de aproximación y detalle	23
5	La Wavelet Haar	25
6	Diagrama del proceso de fusión de imágenes	80
7	Diagrama del proceso de fusión con Wavelets	82
8	Descomposición en detalles horizontales, verticales y diagonales	83
9	Representación del algoritmo de descomposición en nivel 2	84
10	Imagen original 'Cameraman'	91
11	Parte de baja resolución L	91
12	Parte de alta resolución H	92
13	Transformada Wavelet aplicada a columnas LL, aproximación gruesa . . .	92
14	Transformada Wavelet aplicada a columnas HL, detalles horizontales . . .	92
15	Transformada Wavelet aplicada a columnas LH, detalles verticales	93
16	Transformada Wavelet aplicada a columnas HH, detalles diagonales	93
17	Descomposición al nivel 2 de la imagen cameraman"	94
18	Transformada cuadrada aplicada a una imagen	94

19	Camerman	99
20	CuadroMagico	100
21	Fusión de dos imagenes mediante Matlab	100
22	Imagen fusionada de salida	101

Limitaciones del Análisis de Fourier

En siguiente sección se trabajará con funciones en el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$, además se denotarán por $t \in \mathbb{R}$ al tiempo y $\xi \in \mathbb{R}$ a la frecuencia.

El análisis de Fourier permite realizar el análisis y síntesis de una función (señal) mediante el uso de funciones exponenciales complejas, las cuales forman una base ortogonal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$, esto se logra a través de la Transformada de Fourier, la cual es una transformación integral de carácter global.

Definición 1. *Se define la Transformada de Fourier mediante la fórmula:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi \cdot t} dt$$

la cual es invertible y cuya inversa se obtiene mediante:

$$f(t) = \check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi$$

Se entiende a la Transformada de Fourier como una herramienta para realizar análisis de tiempo-frecuencia, es decir, para examinar las señales en el dominio del tiempo el cual muestra cómo la señal cambia en el tiempo y en el dominio de frecuencia donde se aprecia qué parte de la señal se encuentra dentro de cierta banda de frecuencia dada en un rango de frecuencias. Contar con ambos dominios ofrece la posibilidad de entender mejor la señal ya que mientras en el dominio del tiempo se analiza la amplitud de la señal, en el dominio de frecuencia es posible identificar los componentes de frecuencia (componentes espectrales) de la señal.

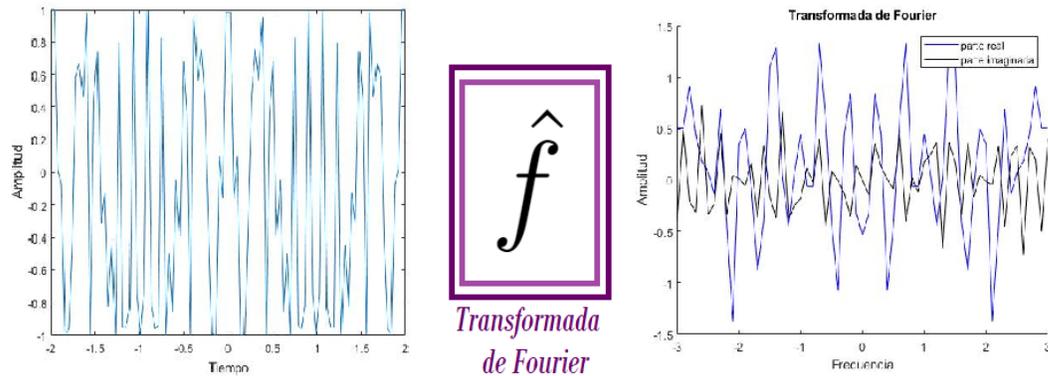


Figura 1: Diagrama del funcionamiento de la Transformada de Fourier

A pesar de los buenos resultados que ofrece el análisis de Fourier para el análisis y procesamiento de señales posee limitaciones importantes como: mostrar desempeño deficiente en el estudio de señales no estacionarias, la incapacidad de detectar singularidades en las señales y la pérdida de información de tiempo en el dominio de frecuencia.

Nótese que para el cálculo de \hat{f} es necesario el conocimiento de f sobre todo el dominio por lo que es imposible realizar un análisis en tiempo real, es decir, no se puede calcular \hat{f} a medida que se desarrolla f .

A fin de resolver algunas de las deficiencias del análisis de Fourier se realizó una adaptación de la Transformada de Fourier para analizar solo una sección pequeña de la señal a la vez, a esta técnica se le conoce como Transformada de Fourier con ventana (TFV) o Transformada de Fourier de tiempo corto (STFT).

Definición 2. Una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ es una función ventana si satisface $tg \in L^2(\mathbb{R})$

Definición 3. Se define la Transformada de Fourier con ventana (TFV) mediante la fórmula:

$$T_{g,t}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} \overline{g(t-b)} dt$$

Donde g es una función ventana que es trasladada a lo largo del eje del tiempo para el parámetro b .



Figura 2: Diagrama del funcionamiento de la Transformada de Fourier con Ventana

En breve la Transformada de Fourier con ventana (TFV) será la transformada de Fourier aplicada a la señal de estudio $f(t)$ delimitada por la ventana en cuestión. De esta manera la TFV permite recuperar la información de tiempo como de frecuencia de una señal, sin embargo, la precisión de dicha información está determinada por el tamaño de la ventana; el cual es el mismo para todas las frecuencias.

Para la detección de frecuencias altas es conveniente una ventana corta y para frecuencias bajas es adecuado una ventana larga, de manera que privilegiar la elección de la ventana basada en las frecuencias provee una resolución de tiempo menor. Concretamente la TFV no permite obtener una buena resolución en el tiempo y en la frecuencia de manera simultánea, esto debido al vínculo que existe con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Para los análisis donde una escala predeterminada no se adapta a las distintas frecuencias de una función es necesario realizar otro tipo de análisis tiempo-frecuencia como lo es el análisis Wavelet que no depende de la escala.

Teoría Wavelet unidimensional

El Análisis Wavelet es entendido como un análisis de las fluctuaciones de una función f en todas las escalas, ya que dicho análisis permite un análisis local de la función así como la descripción de los efectos que las escalas tienen sobre ella.

Transformada Wavelet Continua (TWC)

Definición 4. Dada una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$ que satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

es posible obtener mediante traslaciones y dilataciones las funciones:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

de esta manera se define la Transformada Wavelet Continua (TWC) de f como:

$$(W_{\psi}f(t))(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

Usualmente la función ψ recibe el nombre de Wavelet madre, $\psi_{a,b}$ son nombradas Wavelets y a , b son la escala y posición respectivamente.

Teorema 1. La Transformada Wavelet continua de una función f posee las siguientes propiedades:

i) *Linealidad*

$$(W_\psi(cf + g)(t))(a, b) = c(W_\psi f(t))(a, b) + (W_\psi g(t))(a, b) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

ii) *Traslación*

$$(W_\psi f(t - c))(a, b) = (W_\psi f)(a, b - c) \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

iii) *Escalamiento*

$$(W_\psi(d^{1/2}f(dt)))(a, b) = (W_\psi f(t))(da, db) \quad \forall d > 0$$

Demostración. i)

$$\begin{aligned} (W_\psi(cf + g)(t))(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (cf + g)(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} cf(t) + g(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= |a|^{-1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} cf(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right] \\ &= |a|^{-1/2} \left[c \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right] \\ &= c|a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt + |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= c(W_\psi f(t))(a, b) + (W_\psi g(t))(a, b) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} (W_\psi f(t - c))(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - c) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \overline{\psi\left(\frac{(v+c)-b}{a}\right)} dv \quad \text{donde } v = t - c \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \overline{\psi\left(\frac{v - (b-c)}{a}\right)} dv \\ &= (W_\psi f)(a, b - c) \end{aligned}$$

iii) Sea $d > 0$;

$$\begin{aligned}
 (W_\psi(d^{1/2}f(dt)))(a,b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d^{1/2}f(dt)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt \\
 &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{1/2}}{d}f(v)\overline{\psi\left(\frac{\frac{v}{d}-b}{a}\right)}dv \quad \text{donde } v = dt \\
 &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d^{-1/2}f(v)\overline{\psi\left(\frac{v-db}{da}\right)}dv \\
 &= d^{-1/2}|a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\overline{\psi\left(\frac{v-db}{da}\right)}dv \\
 &= |da|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\overline{\psi\left(\frac{v-db}{da}\right)}dv \\
 &= (W_\psi f(t))(da, db)
 \end{aligned}$$

□

En comparación con el análisis de Fourier los Wavelets ofrecen información importante para el análisis de una función como se verá a continuación.

En los casos donde ψ y $\hat{\psi}$ son funciones ventana la Transformada Wavelet Continua permite realizar un análisis de tiempo-frecuencia a través de una ventana tiempo-frecuencia, en dicha ventana el ancho es determinado por una ventana de tiempo y el largo por una ventana de frecuencia, esta ventana de tiempo frecuencia tiene un área constante en cada sección en la que se realiza el análisis de la función.



Figura 3: Diagrama del funcionamiento de la Transformada Wavelet

Dado que se satisface $a = \frac{1}{\omega}$ donde a es la escala y ω la frecuencia de f , se tienen las siguientes implicaciones:

Escalas pequeñas \implies frecuencias altas \implies Wavelets estirados

Escalas grandes \implies frecuencias pequeñas \implies Wavelets comprimidos

Otra de las ventajas que se tiene consiste en poder identificar discontinuidades de la función a analizar mediante su Transformada Wavelet Continua debido a que $(W_\psi f)(a, b)$ solo depende de los valores de f alrededor de una posición b y cuyo largo es proporcional a a .

Definición 5. Dada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ un Wavelet madre se define la condición de admisibilidad como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} < +\infty$$

y es denotada por C_ψ

Lema 1 (Fórmula de Parseval para transformadas Wavelets). Sea ψ una Wavelet básica.

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{dad b}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle$$

se cumple para cualquiera $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, donde C_ψ es la condición de admisibilidad y $\langle f, g \rangle$ es el producto interno de f y g .

Demostración. Por la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) |a|^{1/2} e^{ibx} \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \\ &= (2\pi)^{1/2} F\{|a|^{1/2} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{(W_\psi g)(a, b)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} |a|^{1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \overline{g(t) \hat{g}(y)} |a|^{1/2} e^{-iby} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= (2\pi)^{1/2} \overline{F\{|a|^{1/2} \hat{g}(x) \hat{\psi}(ax)\}}(-b). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi}f)(a, b) \overline{(W_{\psi}g)(a, b)} \frac{dadb}{a^2} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\{\hat{f}(x)\overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b) \overline{F\{\hat{g}(x)\overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b)} \frac{dbda}{a} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} |\hat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{a}, \end{aligned}$$

por la fórmula de Parseval para la Transformada de Fourier

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(ax)|^2 \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} dx,$$

por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(wx)|^2}{|w|} dw \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \\ &= C_{\psi} \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

□

Teorema 2 (Calderon, Grossman, Morlet). *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una Wavelet. Entonces para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ las siguientes relaciones se cumplen:*

$$f(t) = \frac{a}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi}f)(a, b) |a|^{1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(W_{\psi}f)(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}. \quad (2)$$

La última expresión se puede reescribir como:

$$\|f\|_{L^2} = \|W_{\psi}f(a, b)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left(\frac{1}{C_{\psi}}\right).$$

Demostración. Para alguna $g \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 C_\psi \langle f, g \rangle &= \langle W_\psi f, W_\psi g \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{dadb}{a^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{(a,b)}(t)} dt} \frac{dadb}{a^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{(a,b)}(t) \frac{dbda}{a^2} g(t) dt, \\
 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{(a,b)}(t) \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle
 \end{aligned}$$

o sea que

$$\left\langle C_\psi f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle = 0, \text{ para toda } g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto

$$C_\psi f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{(a,b)} \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{dbda}{a^2} = 0$$

□

Teorema 3. *Dada ψ una Wavelet madre que satisface la condición de admisibilidad, la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser recuperada de su TWC mediante la formula:*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

Dicha formula será entendida como la Transformada Wavelet Inversa de f en forma implícita.

La posibilidad de recuperar la señal original después de aplicar la TWC permite concluir que el Análisis Wavelet es una generalización del análisis de Fourier y que la transformada de Fourier con Ventana se generaliza en la TWC.

Transformada Wavelet Discreta (TWD)

Discretización de la Transformada Wavelet

En la Transformada Wavelet Continua (TWC) se consideró la familia:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

con ψ admisible. Por conveniencia en la discretización se restringirá a a valores positivos solamente, así la condición de admisibilidad se convierte en:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

El proceso de discretización consistirá en discretizar los parámetros a, b comenzando con el parámetro a para posteriormente hacer la ubicación de b proporcional a la escala a . Para el parámetro de dilatación a se considera $a = a_0^m$, $m \in \mathbb{Z}$ y el paso de dilatación $a_0 \neq 1$ fijo, por comodidad se asume que $a_0 > 1$.

Cuando $m = 0$ parece natural discretizar el parámetro b tomando solo múltiplos enteros de un $b_0 > 0$ fijo de manera que $\psi(t - nb_0)$ “cubra” la recta completa. Para diferentes valores de m el ancho de $a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t)$ es a_0^m veces el ancho de $\psi(t)$, a fin de asegurar que los Wavelets discretizados en el nivel m “cubra” la recta de la misma manera que $\psi(t - nb_0)$ se elige $b = nb_0 a_0^m$, de esta manera se obtiene:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2} \psi\left(a_0^{-m} t - nb_0\right) \quad (*)$$

donde:

- $m \in \mathbb{Z}$: es el parámetro de dilatación discreto
- $n \in \mathbb{Z}$: es el parámetro de traslación discreto
- a_0 : es el parámetro de paso de dilatación fijo
- b_0 : es el parámetro de paso de traslación fijo

Cabe mencionar que la elección apropiada de a_0 , b_0 depende de la Wavelet ψ . Para poder considerar (*) como la transformada wavelet discreta es necesario asegurar:

1. Dada una función f los coeficientes $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ caracterizan completamente a la función.
2. Dada una función f puede ser escrita como una superposición de bloques de construcción elementales $\psi_{m,n}$.

En el caso de la Transformada Wavelet Continua (TWC) ambas condiciones se cumplen por el Lema 1 vía la resolución de la identidad, al menos si ψ es admisible. De manera que para satisfacer las condiciones 1. y 2. es necesario obtener una “condición de admisibilidad discreta”. Para esto considérese el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$ el cual es un espacio topológico de Hilbert.

Para que las funciones pueden “caracterizarse” por medio de sus coeficientes Wavelets $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ basta que se satisfaga

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}; \langle f_1, \psi_{m,n} \rangle = \langle f_2, \psi_{m,n} \rangle \implies f_1 \equiv f_2$$

o su equivalente

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}; \langle f, \psi_{m,n} \rangle = 0 \implies f = 0$$

Además es necesario asegurar que la reconstrucción de f es numéricamente estable desde los coeficientes $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$, esto es, siempre que la sucesión $(\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es “cercana” a $(\langle f_2, \psi_{m,n} \rangle)_{m,n \in \mathbb{Z}}$, entonces las funciones f_1 y f_2 son a su vez “cercanas”.

Estabilidad numérica de TWD

Considere además del espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$, el espacio de sucesiones $l^2(\mathbb{Z}^2)$ con la topología l^2 , en la cual la distancia entre las sucesiones $c^1 = (c_{m,n}^1)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ y $c^2 = (c_{m,n}^2)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ está dada por:

$$\|c^1 - c^2\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |c_{m,n}^1 - c_{m,n}^2|^2$$

esto implícitamente asume que las sucesiones $(\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ están en $l^2(\mathbb{Z})$, i.e, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\sum_{m,n} |\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle|^2 < \infty$, que en la práctica no es un problema. Como se verá más adelante cualquier Wavelet ψ con cierto decaimiento en el tiempo y la frecuencia tal que $\int \psi(x)dx = 0$ y cuales quiera $a_0 > 1$ $b_0 > 0$ llevan a

$$\sum_{m,n} |\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.1.2)$$

Asúmase (sin especificar restricciones sobre $\psi_{m,n}$) que (3.1.2) se cumple. La interpretación de cercanía en $l^2(\mathbb{Z})$ permite interpretar el requerimiento de estabilidad de la siguiente manera; *siempre que $\sum_{m,n} |\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle|^2$ sea pequeña, $\|f\|^2$ será pequeña.*

En particular existe $\alpha < +\infty$ tal que

$$\sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq 1 \implies_{(*)} \|f\|^2 \leq \alpha$$

Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ arbitraria, defínase

$$\tilde{f} = \left| \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \right|^{-1/2} f$$

entonces por (*) se cumple que

$$\sum_{m,n} |\langle \tilde{f}, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq 1 \implies \|\tilde{f}\|^2 \leq \alpha$$

De manera que al ser $\|\tilde{f}\|^2 \leq \alpha$ se obtiene que

$$\left[\sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \right]^{-1} \|f\|^2 \leq \alpha$$

o

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \quad (3.1.3)$$

para algún $A = \alpha^{-1}$. De manera que (3.1.3) es equivalente al requerimiento de estabilidad pues si es valida para toda f , entonces la distancia $\|f_1 - f_2\|$ no puede ser arbitrariamente

grande si $\sum_{m,n} |\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle - \langle f_2, \psi_{m,n} \rangle|^2$ es pequeña.

Obsérvese que al combinar las expresiones (3.1.2) y (3.1.3) se obtiene que;

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \exists A > 0, B < +\infty \text{ tales que; } A\|f\|^2 \leq |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.1.4)$$

Esto es, el conjunto $\{\psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ constituye un marco. El lector interesado puede consultar (Daubechies, 1992) para discurrir en las condiciones necesarias y suficientes de una Wavelet ψ bajo las cuales la familia discreta $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ satisface las desigualdades anteriores para todas las funciones en $L^2(\mathbb{R})$

Para fines de la tesis se realizará el estudio de una subclase importante de Wavelets que surgen de estructuras particulares en $L^2(\mathbb{R})$ la cual es nombrada análisis de resolución múltiple. Estas Wavelets producen familias discretas (marcos) que serán bases ortonormales para el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Análisis de Resolución Múltiple (ARM)

Definición 6. *Un Análisis de Resolución Múltiple (ARM) de $L^2(\mathbb{R})$ es una sucesión de subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:*

- i) $V_j \subseteq V_{j+1}$ (anidación creciente)
- ii) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ (Densidad de la unión en $L^2(\mathbb{R})$)
- iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ (Separación)
- iv) $f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ (Propiedad de escalamiento)
- v) $\exists \varphi \in V_0$ función de escalamiento cuyos trasladados $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal de V_0 (Existencia de función de escalamiento).

Los espacios $\{V_j\}$ serán nombrados espacios de aproximación.

Observación 1. *La condición iv) muestra que los espacios V_j son versiones escalonadas de un espacio inicial V_0*

Definición 7. Dado un ARM con espacios de aproximación $\{V_j\}$ es posible definir la familia de subespacios $\{W_j\}$ de manera que W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , esto es;

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \text{ con } W_j \perp V_j$$

Los espacios $\{W_j\}$ serán referidos como espacios de detalle.

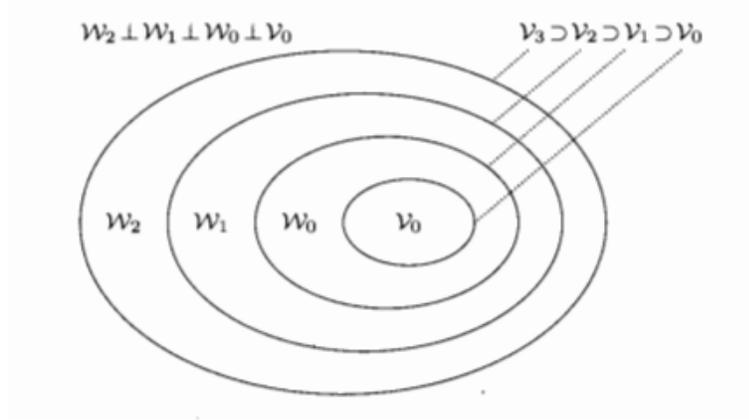


Figura 4: Espacios de aproximación y detalle

Teorema 4. Dado $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un ARM, los espacios de detalle $\{W_j\}$ satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $f(t) \in W_j \iff f(2t) \in W_{j+1}$
- ii) $W_j \perp W_k, \quad j \neq k$
- iii) $W_j \perp V_k, \quad k \leq j$
- iv) $V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{j-1}$
- v) $V_j = \bigoplus_{-\infty}^{j-1} W_j$
- vi) $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j$

Demostración. i) Debido a la descomposición de V_{j+1} se tiene que $f(t) = (f_1 + f_2)(t)$ con $f_1 \in V_j$ y $f_2 \in W_j$. Dado que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un ARM se satisface $f(2t) = (f_1 + f_2)(2t) = f_1(2t) + f_2(2t)$ es elemento de V_{j+2} puesto que la descomposición de f es única se tiene que $f_2 \in W_{j+1}$

ii) Suponga sin pérdida de generalidad que $j < k$, dado que $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$, donde $j + 1 \leq k$ se tiene que $W_j \subseteq V_k$ y $W_k \perp V_k$ con lo que $W_j \perp W_k$.

□

Ejemplo 1 (La Wavelet Haar). *Wavelet Haar*

Definición 8. *La Wavelet Haar es la función*

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \in [0, 1/2) \\ -1, & \text{para } t \in [1/2, 1] \\ 0, & \text{en otro punto} \end{cases}$$

y si

$$\chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \in [0, 1] \\ 0, & \text{otra parte} \end{cases}$$

entonces

$$H(t) = \chi_{[0,1)}(2t) - \chi_{[0,1)}(2t - 1)$$

puesto que $\chi_{[0,1)}(2t) = \begin{cases} 1, & 2t \in [0, 1) \\ 0, & \text{otra parte} \end{cases}$

$$\chi_{[0,1)}(2t - 1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq 2t - 1 < 1 \\ 0, & \text{otra parte} \end{cases}$$

la familia $\{2^{j/2}H(2^j(t - k))\}_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}}$ se denotará como $H_{j,k}(t) := 2^{j/2}H(2^j t - k)$ y definimos la familia de intervalos $\{I_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ donde

$$I_{j,k} = [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j}] \subseteq \text{supp } H_{j,k} = [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j}]$$

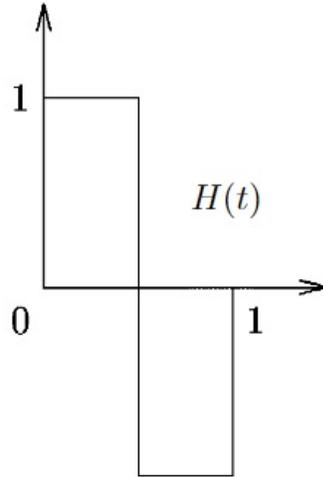


Figura 5: La Wavelet Haar

que se divide naturalmente en niveles, consistiendo el j -ésimo nivel de intervalos cuya longitud es 2^{-j} .

$$\text{long } I_{j,k} = \text{long} \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right) = \frac{k+1}{2^j} - \frac{k}{2^j} = \frac{1}{2^j} = 2^{-j}$$

Las siguientes propiedades de los intervalos diádicos serán utilizadas

1. Dos intervalos diádicos no se superponen ó uno está contenido en el otro, esto es:

a) $I_{j,k} \cap I_{j',k'} = \emptyset$ ó

b) $I_{j,k} \subseteq I_{j',k'}$ ó

c) $I_{j',k'} \subseteq I_{j,k}$

2. Si uno de los intervalos está estrictamente contenido en el otro, entonces está contenido en la mitad izquierda o la mitad derecha, esto es:

Si $I_{j',k'} \subseteq I_{j,k}$ entonces

$$I_{j',k'} \subseteq \left[\frac{k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}} \right) \quad \text{ó} \quad I_{j',k'} \subseteq \left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j} \right)$$

ya que el punto medio de $I_{j,k}$ es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2^j} + \frac{k+1}{2^j} \right) = \frac{2k+1}{2^{j+1}}$$

3. Para los soportes de $H(t)$ se tienen propiedades similares. Salvo que cuando la intersección en a) en un mismo nivel, los intervalos contiguos a izquierda y a derecha del soporte de $H_{j,k}$ para j fijo, por ser intervalos cerrados la intersección consistirá de solo un punto, lo que no afectará el valor de una integral cuyo valor es cero. en toda la recta y a la más distinta de cero en un punto.

Por ejemplo para $H(t) = H_{0,0}(t)$, $\text{Supp}H(t) = [0, 1]$

$$\text{Supp}H_{0,k-1}(t) = \text{Supp}H_{0,-1}(t) = [-1, 0]$$

$$\text{Supp}H_{0,k+1}(t) = \text{Supp}H_{0,1}(t) = [1, 2]$$

entonces $\text{Supp}H(t) \cap \text{Supp}H_{0,1}(t) = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$ y la integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H(t)H_{0,1}(t)dt &= \int_{-\infty}^1 H(t)H_{0,1}(t)dt + \int_1^{\infty} H(t)H_{0,1}(t)dt \\ &= \int_0^1 1 \cdot 0dt + \int_1^2 0 \cdot 1dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema 5. La familia $\{2^{j/2}H(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$

Demostración. $j > j'$, así usando la sustitución $u = 2^j t - k$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{j,k}(t) \overline{H_{j',k'}(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} 2^{j'/2} H(2^j t - k) H\left(\frac{2^{j'}(u - k)}{2^j} - k'\right) \frac{du}{2^j} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{(j'-j)/2} H(u) H\left(2^{(j'-j)}u - 2^{(j'-j)}k - k'\right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{s/2} H(t) H(2^s t - r) dt \end{aligned}$$

se tiene:

$$\text{i) } j = j' \quad \text{y } k = k'$$

$$\text{ii) } j = j' \text{ y } k \neq k'$$

$$\text{iii) } j' > j$$

Si i) Como $\text{Supp}H_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] = I_k$ con $\text{long}I_k = (k+1)2^{-j} - k2^{-j} = 2^{-j}k + 2^{-j} - k2^{-j}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{s/2} H(t) H(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)^2 dt \\ &= \int_0^1 1 dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii) $j = j'$ y $k \neq k'$ entonces $s = 0$ y $r \neq 0$ entonces $\text{Supp}H(2^s t - r) \cap \text{Supp}H(t) = \text{Supp}H(t - r) \cap \text{Supp}H(t) = \emptyset$ así

$$\begin{aligned} \langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^0 t(t) H(t - r) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii) Si $j' > j$ y $\forall r = 2^j k - k'$ entonces $s = j' - j > 0$

$$\text{I) } \text{Supp}H(2^s t - r) \cap \text{Supp}H(t) = \emptyset \text{ ó}$$

$$\text{II) } \text{Supp}H(t) \subseteq \text{Supp}H(2^s t - r) \text{ ó}$$

$$\text{III) } \text{Supp}H(2^s t - r) \subseteq \text{Supp}H(t) = [0, 1]$$

I) se tiene que $\text{Supp}H(2^s t - r) = [\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}]$ si $\frac{r}{2^s} \geq 1$ entonces $[\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}] \cap [0, 1] = \emptyset$, lo

mismo que si $\frac{r+1}{2^s} < 0$. Si $\frac{r}{2^s} \in [0, 1)$ y $1 \leq \frac{r+1}{2^s}$, entonces $2^{s/2}[1 - \frac{r}{2^s}] \leq 1/2^{s/2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{s/2} H(t) H(2^s t - r) dt \\
&= \int_{r/2^s}^{\frac{r+1}{2^s}} 2^{s/2} H(t) \cdot 1 dt \\
&= 2^{s/2} \int_{r/2^s}^{\frac{r+1}{2^s}} H(t) dt \\
&= 2^{s/2} \left[\int_{r/2^s}^1 H(t) dt + \int_1^{\frac{r+1}{2^s}} H(t) dt \right] \\
&= 2^{s/2} \int_{r/2^s}^1 1 dt + 0 \\
&= 2^{s/2} \left[1 - \frac{r}{2^s} \right] \\
&\leq \frac{1}{2^s}
\end{aligned}$$

II) $Supp H(t) \subseteq Sup H(2^s t - r)$ entonces $[0, 1) \subseteq [\frac{r}{2^s}, \frac{2r+1}{2^{s+1}})$ ó $[0, 1) \subseteq [\frac{2r+1}{2^{s+1}}, \frac{r+1}{2^s})$ así

$$\begin{aligned}
\langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{s/2} H(t) H(2^s t - r) dt \\
&= 2^{s/2} \int_{r/2^s}^{\frac{2r+1}{2^{s+1}}} H(t) \cdot 1 dt \\
&= 2^{s/2} \int_{r/2^s}^{\frac{2r+1}{2^{s+1}}} H(t) dt \\
&= 2^{s/2} \int_0^1 H(t) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

III) $\text{Supp}H(2^s t - r) \subseteq \text{Supp}H(t) = [0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned}
 \langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{s/2} H(t) H(2^s t - r) dt \\
 &= \int_{r/2^s}^{\frac{r+1}{2^s}} H(t) \cdot 1 dt \\
 &= \int_{r/2^s}^{\frac{r+1}{2^s}} H(t) dt \\
 &\leq \int_0^1 H(t) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

la demostración para el caso b) $j > j'$ se realiza de manera análoga, de esta manera se concluye que

$$\langle H_{j,k}, H_{j',k'} \rangle = \delta_{jj'}$$

□

Definición 9. Para cada $j, k \in \mathbb{Z}$ se define $\varphi_{j,k}(t)$ como

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k).$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se define el operador aproximación P_j para funciones $f(t)$ como:

$$P_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V_j$$

$$P_j f = \sum_k \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}.$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se define el operador detalle Q_j para funciones $f(t)$ como:

$$Q_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow W_j$$

$$Q_j f = P_{j+1} f(t) - P_j f.$$

Teorema 6. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_j .

Teorema 7. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM. Existe una sucesión $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de coeficientes h_k de $l^2(\mathbb{Z})$ que satisface la siguiente igualdad:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} h_k \varphi(2x - k) \text{ donde } h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle = 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx$$

Dicha igualdad recibe el nombre de relación de escalamiento, más aun se cumple:

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ donde } m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2\pi i k \omega}$$

Demostración. Puesto que $\varphi \in V_0 \subset V_1$ y $\{\varphi_{1,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\varphi_{1,k}(x) = 2^{1/2} \varphi(2x - k)$ es base ortonormal de V entonces

$$\varphi(x) = \sum_k \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle 2^{1/2} \varphi(2x - k)$$

así que definiendo

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$$

Se tiene que $h_k \in l_2(\mathbb{Z})$ ya que por la desigualdad de Bessel se sigue que

$$\sum |\langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle| \leq \|\varphi\|_2 < +\infty \text{ pues } \varphi \in L_2(\mathbb{R})$$

Además, tomando la Transformada de Fourier en $\varphi(x) = \sum_k h_k 2^{1/2} \varphi(2x - k)$ Se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \mathcal{F}(\varphi(x)) \\ &= \mathcal{F}\left(\sum_k h_k 2^{1/2} \varphi(2x - k)\right) \\ &= \sum_k h_k 2^{1/2} \mathcal{F}(\varphi(2x - k)) \\ &= \sum_k h_k 2^{1/2} \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-2\pi i \frac{\omega}{2} k} \\ &= \sum_k h_k \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{\omega}{2} k} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Definición 10. Dado $\varphi(t)$ función de escalamiento asociada a un ARM $\{V_j\}$.

Se define la sucesión $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ como filtro de escalamiento asociado con $\varphi(t)$ o filtro de aproximación gruesa. La función $m_0(\gamma)$ es llamada función auxiliar asociada con $\varphi(t)$.

Dentro de la literatura especializada en Wavelets es común encontrar la función φ presentada como $\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2t - k)$ donde $p_k = 2^{1/2} h_k$.

Teorema 8. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM, entonces las siguientes igualdades se satisfacen:

$$a) \varphi(2^{j-1}t - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2^j t - k)$$

$$b) \varphi_{j-1,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi_{j,k}$$

donde $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$

Demostración. a) Dado que $\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2t - k)$ sea $t = 2^{j-1}t - l$ entonces;

$$\begin{aligned} \varphi(2^{j-1}t - l) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2(2^{j-1}t - l) - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2^j t - 2l - k) \end{aligned}$$

haciendo $k' = 2l + k$ se tiene $k = k' - 2l$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi(2^{j-1}t - l) &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{k'-2l} \varphi(2^j t - k') \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2^j t - k) \end{aligned}$$

b) Se tiene que $\varphi_{j-1,l}(t) = 2^{1/2} \varphi(2^{j-1}t - l)$ así;

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1,l}(t) &= \varphi(2^{j-1}t - l) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2^j t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\varphi_{j-1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi_{j,k}$$

□

Teorema 9. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM. Entonces las siguientes igualdades se satisfacen:

1. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \bar{p}_k = 2\delta_{l,0}$
2. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$
3. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2$
4. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1$
5. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$
6. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{k-2n} = \delta(n)$

Demostración. 1. Dado que

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \varphi(2t - n)$$

sustituyendo t por $t - l$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(t - l) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \varphi(2(t - l) - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \varphi(2t - 2l - n) \end{aligned}$$

haciendo $k = 2l + n$ se tiene $n = k - 2l$, de manera que

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2t - k)$$

entonces;

$$\begin{aligned}
2\delta_{0,l} &= \langle \varphi(t-l), \varphi(t) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2t-k), \varphi(t) \right\rangle \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \left\langle \varphi(2t-k), \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{k'} \varphi(2t-k') \right\rangle \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_{k'}} \langle \varphi(2t-k), \varphi(2t-k') \rangle \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_{k'}} \delta_{k,k'} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad 1 &= \|\varphi\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{p}_k|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{p_k}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 \\
&\therefore 2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2
\end{aligned}$$

3. Por a) del teorema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2t-k) \text{ asi;} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2t-k) dt \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t-k) dt
\end{aligned}$$

haciendo $u = 2t - k$, $du = 2dt$ se tiene

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \\ \text{por lo tanto} \quad 1 &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \quad \text{es decir;} \quad 2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \end{aligned}$$

4. Considere en 1) $-l$ en lugar de l , es decir; $2\delta_{l,0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2(-l)} \bar{p}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k+2l} \bar{p}_k$ y sumando sobre l se tiene que

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_{l,0} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k+2l} \bar{p}_k \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+2l} \bar{p}_{2k} \right) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \bar{p}_{2k+1} \right) \end{aligned}$$

así remplazando l por $l - k$, se tiene

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l} \bar{p}_{2k} \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l+1} \bar{p}_{2k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l} \right) + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{p}_{2k+1} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l+1} \right) \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} \right|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Dividiendo esta suma en índices pares e impares se tendrá

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 2 \quad (2)$$

Ambas ecuaciones (1) y (2) tienen una única solución

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}$$

5.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} p_k = 2^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2^{1/2} 2 = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

6. Se sabe de 1 . que

$$\begin{aligned} 2\delta_{n,0} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2n} \overline{p_k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} \widetilde{p_{k-2n} \overline{p_k}} 2^{1/2} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2h_{k-2n} \overline{h_k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2\overline{h_{k-2n}} h_k \end{aligned}$$

asi;

$$\delta_{n,0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2n}}$$

□

Teorema 10. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM con filtro de aproximación gruesa $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Se define el filtro Wavelet ó de detalle $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ cuyos coeficientes se obtienen por medio de:

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$$

y la Wavelet $\psi(t)$ mediante:

$$\psi(t) = \sum_k 2^{1/2} g_k \varphi(2t - k)$$

entonces;

$$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

es una base Wavelet ortonormal en \mathbb{R} y para cualquier $J \in \mathbb{Z}$

$$\{\varphi_{J,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{J,k}(t)\}_{J,k \in \mathbb{Z}}$$

es una base ortonormal en \mathbb{R} .

Teorema 11. Sea $\{V_j, \varphi\}$ un ARM con filtro de escalamiento $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y filtro Wavelet $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ entonces se cumplen las siguientes igualdades:

1. $\sum_n g_n = 0$
2. $\sum_k g_k \overline{g_{k-2n}} = \delta_n$
3. $\sum_k g_k \overline{h_{k-2n}} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
4. $\sum_k \overline{h_{m-2k}} h_{n-2k} + \sum_k \overline{g_{m-2k}} g_{n-2k} = \delta_{n-m}$

Condiciones del filtro de espejo en cuadratura

Definición 11. Sea $\{V_j, \varphi\}$ un ARM con filtro de escalamiento $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, filtro Wavelet $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y función Wavelet $\psi(t)$. Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, se define para $k \in \mathbb{Z}$

$$c_{0,k} = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle$$

y para cada $j \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se definen los coeficientes de aproximación $c_{j,k}$ y coeficientes de detalle $d_{j,k}$ como:

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle \text{ y } d_{j,k} = \langle f, \psi_{-j,k} \rangle.$$

Teorema 12. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM con filtro de escalamiento $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y filtro Wavelet $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ se satisfacen las siguientes igualdades para cada $j \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$:

1. $\varphi_{j,k} = \sum_n h_{n-2k} \varphi_{j+1,n}$
2. $\psi_{j,k} = \sum_n g_{n-2k} \varphi_{j+1,n}$
3. $c_{j+1,k} = \sum_n c_{j,n} \overline{h_{n-2k}}$
4. $d_{j+1,k} = \sum_n c_{j,n} \overline{g_{n-2k}}$
5. $c_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n} h_{k-2n} + \sum_n d_{j+1,n} g_{k-2n}$

Demostración. Procedimiento iterativo de la función de escalamiento

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k &= \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \\ &= 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x-k)} dx\end{aligned}$$

y se tiene

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi(2x - k)$$

además $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_j . Así por el teorema 5.6 Bogges se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi(2^{j-1}x - l) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi(2^j x - k) \\ \Leftrightarrow \varphi_{j-1,l} &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi_{jk} (*)\end{aligned}$$

De manera que si $f_j \in V_j$

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$$

y $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ cuya base ortonormal es $\{\varphi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ entonces;

$$\begin{aligned}f_j &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k} \\ &= f_{j-1} + w_{j-1}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\langle f_j, \varphi_{j-1,l} \rangle &= \left\langle f_j, 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \varphi_{jk} \right\rangle \\ &= 2^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k-2l}} \langle f_j, \varphi_{jk} \rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle f_j, \psi_{j-1,l} \rangle &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} \langle f_j, \varphi_{j,k} \rangle \\ &= \left\langle f_j, 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^2 p_{1-k+2l} \varphi_{j,k} \right\rangle\end{aligned}$$

de manera que

$$\psi_{j-1,l} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} \varphi_{j,k} (*) (*)$$

1. Utilizando la igualdad $h_k = 2^{-1/2} p_k$ en (*) se tendrá

$$\varphi_{j-1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \varphi_{j,k}$$

2. Realizando en (*) (*) la sustitución de g_k y haciendo $1 - k + 2l = 1 - (k - 2l)$ se tiene

$$\psi_{j-1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \varphi_{j-k}$$

3. Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned} c_{j+1,k} &= \langle f, \varphi_{-j-1,k} \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_n h_{n-2k} \varphi_{-j,n} \right\rangle \\ &= \sum_n \overline{h_{n-2k}} \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle \\ &= \sum_n c_{j,n} \overline{h_{n-2k}} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} P_{-j} f(y) &= \sum_n \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle \varphi_{-j,n}(x) \\ &= \sum_n c_{j,n} \varphi_{-j,n}(x) \end{aligned} \quad (8.5)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} Q_{-j} f(x) &= \sum_n \langle f, \psi_{-j,n} \rangle \psi_{-j,n}(x) \\ &= \sum_n d_{j,n} \psi_{-j,n}(x) \end{aligned} \quad (8.6)$$

y como

$$P_{-j} f(x) = P_{-j-1} f(x) + Q_{-j-1} f(x)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum c_{j,n} \varphi_{-j,n}(x) &= \sum_n c_{j+1,n} \varphi_{-j-1,n}(x) + \sum_n d_{j+1,n} \psi_{-j-1,n}(x) \\
&= \sum_n c_{j+1,n} \sum_k h_{k-2n} \varphi_{-j,k}(x) + \sum_n d_{j+1,n} \sum_k g_{k-2n} \varphi_{-j,k}(x) \\
&= \sum_k \left[\sum_n c_{j+1,n} h_{k-2n} + \sum_n d_{j+1,n} g_{k-2n} \right] \varphi_{-j,k}(x)
\end{aligned}$$

y como $\sum_n c_{j,n} \varphi_{-j,n}(x) = \sum_k c_{j,k} \varphi_{-j,k}$ igualando los coeficientes respectivos, tenemos

$$c_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n} h_{k-2n} + \sum_n d_{j+1,n} g_{k-2n} \quad (8.7)$$

□

Teorema 13. Dado $\{V_j, \varphi\}$ un ARM con filtro de escalamiento $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y filtro Wavelet $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Se define el coeficiente de aproximación $a_{j,k}$ como:

$$a_{j,k} = 2^{j/2} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$$

y el coeficiente de detalle $b_{j-1,l}$ mediante:

$$b_{j-1,l} = 2^{(j-1)/2} \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle$$

entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

1. $a_{j-1,l} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k-2l}} a_{j,k} \iff c_{j+1,k} = \sum_n c_{j,n} \overline{h_{n-2k}}$
2. $b_{j-1,l} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} a_{j,k} \iff d_{j+1,k} = \sum_n c_{j,n} \overline{g_{n-2k}}$
3. $a_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} a_{j-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k+2l}} b_{j-1,l} \iff c_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n} h_{k-2n} + \sum_n d_{j+1,n} g_{k-2n}$

Demostración. 1. Suponga que $c_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \overline{h_{n-2k}}$ donde $c_{j,k} = \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle$ De esta manera se tiene

$$\begin{aligned}
c_{j+1,k} &= \langle f, \varphi_{-j-1,k} \rangle \\
&= 2^{\frac{j+1}{2}} 2^{-\frac{(j+1)}{2}} \langle f, \varphi_{-(j+1),k} \rangle \\
&= 2^{\frac{j+1}{2}} a_{-j-1,k} (*)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \overline{h_{n-2k}} &= \sum_n \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle \overline{h_{n-2k}} \\ &= \sum_n 2^{j/2} 2^{-j/2} \langle f_1 \varphi_{-j,n} \rangle \overline{h_{n-2k}} (*) (*) \end{aligned}$$

igualando (*) y (*) (*) se tiene

$$2^{\frac{j+1}{2}} a_{-j-1,k} = \sum_n 2^{j/2} a_{-j,n} h_{n-2k}$$

Cancelando $2^{1/2}$ se tiene

$$a_{-j-1,k} 2^{\frac{1}{2}} = \sum_n a_{-j,n} \overline{h_{n-2k}}$$

o

$$a_{-j-1,k} = 2^{-1/2} \sum_n a_{-j,n} \overline{h_{n-2k}}$$

Esto si y solo si:

$$\begin{aligned} a_{-j-1,k} &= 2^{-1/2} \sum_n a_{-j,n} 2^{-1/2} 2^{1/2} \overline{h_{n-2k}} \\ &= 2^{-1} \sum_n a_{-j,n} \overline{p_{n-2k}} \\ \therefore a_{-j-1,k} &= 2^{-1} \sum_n \overline{p_{n-2k}} a_{-j,n} \end{aligned}$$

El regreso se realiza de manera similar.

2. Suponga que $d_{j+1,k} = \sum_n c_{j,n} \overline{g_{n-2k}}$ donde

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{-j,k} \rangle.$$

Por un lado se tiene

$$\begin{aligned} d_{j+1,k} &= \langle f, \psi_{-(j+1),k} \rangle \\ &= 2^{\frac{j+1}{2}} 2^{-\frac{(j+1)}{2}} \langle f, \psi_{-(j+1),k} \rangle \\ &= 2^{\frac{j+1}{2}} b_{-(j+1),k} \end{aligned}$$

Por el lado contrario se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_n c_{j,n} \overline{g_{n-2k}} &= \sum_n \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle \overline{g_{n-2k}} \\
&= \sum_n \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle (-1)^{n-2k} \overline{\overline{h_{1-(n-2k)}}} \\
&= \sum_n 2^{j/2} 2^{-j/2} \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle (-1)^n h_{1-(n-2k)} \\
&= \sum_n 2^{j/2} a_{-j,n} (-1)^n h_{1-n+2k} \\
&= \sum_n a_{-j,n} (-1)^n 2^{-1/2} 2^{1/2} h_{1-n+2k}
\end{aligned}$$

es decir:

$$2^{(j+1)/2} b_{-(j+1),k} = \sum_n 2^{(j-1)/2} (-1)^n p_{1-n+2k} a_{-j,n}$$

Y cancelando 2^j se tendrá $2^{1/2} b_{-(j+1),k} = \sum_n 2^{-1/2} (-1)^n p_{1-n+2k} a_{-j,n}$. Por lo tanto $b_{-(j+1),k} = 2^{-1} \sum_n (-1)^n p_{1-n+2k} a_{-j,k}$ el reciproco se realiza de forma análoga.

3. Se tiene por un lado que $c_{j,k} = \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle = 2^{j/2} 2^{-j/2} \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle = 2^{j/2} a_{-j,n}$ mientras que en el lado contrario

$$\begin{aligned}
\sum_n c_{j+1,n} h_{n-2k} + \sum_n d_{j+1,n} g_{k-2n} &= \sum_n \langle f, \varphi_{-(j+1),n} \rangle h_{k-2n} + \sum_n \langle f, \psi_{-(j+1),n} \rangle g_{k-2n} \\
&= \sum_n 2^{j+1/2} 2^{-(j+1)/2} \langle f, \varphi_{-(j+1),n} \rangle h_{k-2n} + \sum_n 2^{j+1/2} 2^{-(j+1)/2} \langle f, \psi_{-(j+1),n} \rangle g_{k-2n} \\
&= \sum_n 2^{j+1/2} a_{-(j+1),n} h_{k-2n} + \sum_n 2^{\frac{j+1}{2}} b_{-(j+1),n} g_{k-2n}
\end{aligned}$$

igualando ambas expresiones, tenemos

$$2^{j/2} a_{-j,k} = \sum_n 2^{j+1/2} a_{-(j+1),n} h_{k-2n} + \sum_n 2^{j+1/2} b_{-(j+1),n} g_{k-2n}$$

Cancelando $2^{j/2}$ se tiene

$$a_{-j,k} = \sum_n a_{-(j+1),n} 2^{1/2} h_{k-2n} + \sum_n b_{-(j+1),n} 2^{1/2} g_{k-2n}$$

Por lo tanto

$$a_{-j,k} = \sum_n a_{-(j+1),n} p_{k-2n} + \sum_n (-1)^k \overline{p_{1-k+2n}} b_{-(j+1),n}$$

y recíprocamente.

□

Definición 12. Sea $(c_n)_n$ una señal

a) Dado $m \in \mathbb{Z}$ el operador desplazamiento τ_m está definido por:

$$\tau_m : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$\tau_m(c_n) = (c_{n-m})$$

b) El operador submuestreo \downarrow :

$$\downarrow : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(c_n) \longmapsto ((\downarrow c)_n)$$

donde

$$(\downarrow c)_n = (\downarrow)(c_n) := (c_{2n})$$

c) El operador sobremuestro \uparrow :

$$\uparrow : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(c_n) \longmapsto ((\uparrow c)_n)$$

donde

$$(\uparrow c)_n = (\uparrow)(c_n) := \begin{cases} c_{n/2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Definición 13. Dada una señal $(c_n)_n$, un filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ con filtro Wavelet $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Entonces los operadores de aproximación H y detalle G correspondientes a $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ están definidos por:

$$H : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$G : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(c_n)_n \longmapsto ((H_c)_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$(c_n)_n \longmapsto ((G_c)_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

donde:

$$(H_c)_k := \sum_n c_n \overline{h_{n-2k}} \text{ y } (G_c)_k := \sum_n c_n \overline{g_{n-2k}}$$

cuyos adjuntos H^* y G^* son:

$$H^* : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$G^* : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(c_n)_n \longmapsto ((H_c^*)_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$(c_n)_n \longmapsto ((G_c^*)_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

donde

$$(H_c^*)_k := \sum_n c_n h_{k-2n} \text{ y } (G_c^*)_k := \sum_n c_n g_{k-2n}$$

Proposición 1. *Dados los filtros $(\underline{h}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(\underline{g}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definidos mediante:*

$$\underline{h}_n := \overline{h_{-n}}$$

$$\underline{g}_n := \overline{g_{-n}}$$

para los operadores de aproximación H y detalle G se cumplen las siguientes igualdades:

a)

$$(H_c)_n = \downarrow (c * \underline{h})_n \text{ y } (G_c)_n = \downarrow (c * \underline{g})_n$$

Los operadores H y G son interpretados mediante submuestreo de la convolución con los filtros $(\underline{h}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(\underline{g}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ respectivamente

b)

$$(H_c^*)_n = (\uparrow c) * h_n \text{ y } (G_c^*)_n = (\uparrow c) * g_n$$

$(H_c^*)_n$ y $(G_c^*)_n$ se obtienen aplicando sobremuestro seguido de la convolución con $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ respectivamente.

c) Para cualesquiera señales $(c_n)_n$ y $(d_n)_n$ se satisface

$$\langle H_c, d \rangle = \langle c, H_d^* \rangle$$

y

$$\langle G_c, d \rangle = \langle c, G_d^* \rangle$$

Los operadores H^* y G^* son adjuntos formales de H y G .

Demostración.

a) Se tiene que

$$\begin{aligned} (c * \underline{h})_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \underline{h}_{n-k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{\overline{h_{-(n-k)}}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{h_{k-n}} \end{aligned}$$

entonces,

$$\downarrow (c * h)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{h_{k-2n}} = (H_c)_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$\begin{aligned} ((\uparrow c) * h)_k &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\uparrow c)_n h_{k-n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\uparrow c)_{2n} h_{k-2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\uparrow c)_{2n+1} h_{k-2n+1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\uparrow c)_{2n} h_{k-2n} \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\uparrow c)_n h_{k-2n}, \text{ pues } (\uparrow c)_n = 0 \text{ cuando } n \text{ es impar} \\ &= (H_c^*)_k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle H_c, d \rangle &= \sum_k (H_c)_k \overline{d_k} \\
&= \sum_k \left(\sum_n c_n \overline{h_{n-2k}} \right) \overline{d_k} \\
&= \sum_k \sum_h c_n \overline{d_k} \overline{h_{n-2k}} \\
&= \sum_k c_k \overline{(H^*d)_k} \\
&= \langle c, H^*d \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle G_c, d \rangle &= \sum_k (G_c)_k \overline{d_k} \\
&= \sum_k \left(\sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} \right) \overline{d_k} \\
&= \sum_k \sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} \overline{d_k} \\
&= \sum_n \sum_k c_n \overline{d_k} \overline{g_{n-2k}} \\
&= \sum_k \sum_n c_k \overline{d_n} \overline{g_{k-2n}} \\
&= \sum_k c_k \overline{\sum_n d_n g_{k-2n}} \\
&= \sum_k c_k \overline{(G^*d)_k} \\
&= \langle c, G^*d \rangle
\end{aligned}$$

□

Teorema 14. *Dados los filtros $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ definidos como (7.23) y sea I el operador identidad, entonces;*

a)

$$\sum_k h_k \overline{h_{k-2n}} = \sum_k g_k \overline{g_{k-2n}} = \delta_n \iff HH^* = GG^* = I$$

b) Para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_k g_k \overline{h_{k-2n}} = 0 \iff HG^* = GH^* = 0$$

c)

$$\sum_k \overline{h_{m-2k} h_{n-2k}} + \sum_k \overline{g_{m-2k} g_{n-2k}} = \delta_{m-n} \iff H^* H + G^* G = I$$

Demostración. Se comenzará probando que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2n}} = \delta_{0,n} \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} h_{k-2n} = \delta_{mn}$$

Tomando $k' = k - 2m$ se tiene $k = k' + 2n$ así,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2n}} &= \sum_{k' + 2m} h_{k'} \overline{h_{k' + 2m - 2n}} \\ &= \sum_{k' + 2m} h_{k'} \overline{h_{k' - 2(n-m)}} \\ &= \delta_{0(n-m)} \\ &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

recíprocamente tomando $k' = k - 2m$ se tiene $k = k' + 2m$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} \overline{h_{k-2n}} &= \delta_{m,n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h'_k \overline{h_{k'-2(m,n)}} \\ &= \delta_{0(n-m)} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
(H(H^*c))_{k'} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H^*c)_n \overline{h_{n-2k'}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [((\uparrow c) * h)_k] \overline{h_{n-2k'}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_{n-2k} \right] \overline{h_{n-2k'}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_k h_{n-2k} \overline{h_{n-2k'}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \overline{h_{n-2k'}} \right] \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{k,k'} \\
&= c_{k'} \text{ cuando } k = k'
\end{aligned}$$

Por lo que

$$[H(H_c^*)]_{k'} = c_{k'} \quad \forall k' \in \mathbb{Z}$$

así

$$HH^* = I$$

b)

$$\begin{aligned}
(H^*c)_k &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n h_{k-2n} = (\uparrow c * h)_k \\
(Gc)_k &= \sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} = \downarrow (c * \overline{g_{-k}})_k
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
[G(H^*c)]_{k'} &= \sum_k (H^*c)_k \overline{g_{k-2k'}} \\
&= \left[G \left(\sum_n c_n h_{k-2n} \right) \right]_{k'} \\
&= \sum_k \left(\sum_n c_n h_{k-2n} \right) \overline{g_{k-2k'}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
[H^* (H_c)_k]_m &= \left(H^* \sum_n c_n \overline{h_{n-2k}} \right)_m \\
&= \sum_m \left(\sum_n c_n \overline{h_{n-2k}} h_{m-2k} \right) \\
[G^* (G_c)]_m &= \left[G^* \left(\sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} \right) \right]_m \\
&= \sum_m \left(\sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} \right) g_{m-2k}
\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
[(H^* H + G^* G)]_c]_m &= \sum_m \sum_h c_n \overline{h_{n-2k}} h_{m-2k} + \sum_m \sum_n c_n \overline{g_{n-2k}} g_{m-2k} \\
&= \sum_n c_n \left[\sum_m \overline{h_{n-2k}} h_{m-2k} + \sum_m \overline{g_{n-2k}} g_{m-2k} \right] \\
&= c_m \\
&= (I_c)_m
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H^* H + G^* G = I$$

□

Lema 2. Dada una señal $(c_n)_n$ se satisfacen las siguientes condiciones:

$$a) \forall m \in \mathbb{Z} (\tau_m c)^\wedge (\omega) = e^{-2\pi i m \omega} \hat{c}(\omega)$$

$$b) (\downarrow c)^\wedge (\omega) = \frac{1}{2} [\hat{c}(\frac{\omega}{2}) + \hat{c}(\frac{\omega+1}{2})]$$

$$c) (\uparrow c)^\wedge (\omega) = \hat{c}(2\omega)$$

Lema 3. Dado un filtro $(h_k)_k, (g_k)_k, m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2\pi i k \omega}$ y $m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-2\pi i n \omega}$ para cualquier señal $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ se cumple:

$$(Hc)^\wedge (\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{c}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \hat{c}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$(Gc)^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{c}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \hat{c}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$(H^*c)^\wedge(\omega) = \sqrt{2}\hat{c}(2\omega)m_0(\omega)$$

$$(G^*c)^\wedge(\omega) = \sqrt{2}\hat{c}(2\omega)m_1(\omega)$$

Teorema 15. *Dados los filtros $(h_k)_k$, $(g_k)_k$, m_0 , m_1 como en el lema anterior y los operadores $H G H^* G^*$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a) $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \frac{1}{2})|^2 \equiv 1$
- b) $\sum_n h_n \overline{h_{n-2k}} = \delta_k$
- c) $H^*H + G^*G = I$
- d) $HH^* = GG^* = I$

Definición 14. *Dado un filtro $(h_k)_k$ y $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2\pi i k \omega}$. Entonces se dirá que el $(h_k)_k$ es un Filtro espejo en cuadratura (QMF) si satisface:*

- a) $m_0(0) = 1$
- b) $\forall \omega \in \mathbb{R}, |m_0(\frac{\omega}{2})|^2 + |m_0(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2})|^2 \equiv 1$

donde a) y b) reciben el nombre de condiciones de Filtro espejo en cuadratura (QMF).

La TWD como un QMF

Definición 15. *Sea $(h_k)_k$ un QMF, se define la TWD de una señal $(c_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ como:*

$$TWD : l^2(\mathbb{Z}^2) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^2)$$

$$c_{0,n} \mapsto \{d_{j,k}, 1 \leq j \leq J, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{c_{J,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

donde $J \in \mathbb{N}$ y debido a que

$$c_{j,n} \longmapsto c_{j+1,n}$$

$$Hc_j : l_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$Gc_j : l_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l_2(\mathbb{Z}) \qquad c_{j,n} \longmapsto d_{j+1,n}$$

se tendrá que

$$c_{j+1,n} = (Hc_j)_n \qquad d_{j+1,n} = (Gc_j)_n$$

Además se define la Transformada inversa mediante la fórmula:

$$c_{j,n} = (H^*c_{j+1})_n + (G^*d_{j+1})_n$$

Si $J = \infty$, entonces la TWD de $(c_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ es $\{d_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$.

La definición anterior es aplicable a señales que son infinitas, sin embargo, en el quehacer científico las implementaciones son llevadas a cabo mediante señales finitas. Es por esto que existen métodos para llevar una señal infinita a finita, entre los más usados se encuentran el de relleno cero y el método de periodización. A continuación se dará un resultado que permite aplicar la definición anterior al método de periodización.

Lema 4. Para algún $N \in \mathbb{N}$, sea $(c_n)_n$ una señal de periodo 2^N , sea $(h_k)_k$ un QMF, $(g_k)_k$ su filtro Wavelet y los operadores H, G, H^*, G^* . Entonces $(Hc)_k$ y $(Gc)_k$ son sucesiones bien definidas con periodo 2^{N-1} , además $(H^*c)_n$ y $(G^*c)_n$ a su vez están bien definidas con periodo 2^{N+1} .¹

La TWD como una transformación ortogonal

Dada una señal periódica de periodo $M = 2N$, su TWD puede ser entendida como una transformación lineal.

Considera la siguiente función:

$$W : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

¹Ver (Walnut, 2013)

$$c_0 = \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,M-2} \\ c_{0,M-1} \end{bmatrix} \mapsto \bar{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_J \\ c_J \end{bmatrix}$$

donde

$$d_j = \begin{bmatrix} d_{j,0} \\ d_{j,1} \\ \vdots \\ d_{j,2^{-j}M-1} \end{bmatrix} \text{ y } c_J = \begin{bmatrix} c_{J,0} \\ c_{J,1} \\ \vdots \\ c_{J,2^{-J}M-1} \end{bmatrix}$$

Esta función es una transformación lineal de \mathbb{R}^M a \mathbb{R}^M y $W \in M_{M \times M}(\mathbb{R})$ tal que

$$Wc_0 = \bar{d}$$

es la matriz que representa la TWD de la señal.

Observe que

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ \vdots \\ d_{1,\frac{M}{2}-1} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times 1}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ \vdots \\ d_{2,\frac{M}{4}-1} \end{bmatrix}_{\frac{M}{4} \times 1}, \quad \dots, \quad d_J = \begin{bmatrix} d_{J,0} \\ d_{J,1} \\ \vdots \\ d_{J,\frac{M}{2^J}-1} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2^J} \times 1}, \quad c_J = \begin{bmatrix} c_{J,0} \\ c_{J,1} \\ \vdots \\ c_{J,\frac{M}{2^J}-1} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2^J} \times 1}$$

de esta manera el tamaño de la matriz \bar{d} es siempre de $M \times 1$.

Observación 2. *Hasta el momento se ha hablado de las diferentes propiedades que tienen los operadores lineales de aproximación y detalle H y G respectivamente, debido al lema 23 al aplicar el operador H y G a una señal $(c_n)_n$ con periodo $M > 0$ se tendrá que tanto $(Hc)_n$ como $(Gc)_n$ tienen periodo $M/2$ por lo que dichos operadores serán entendidos como transformaciones lineales*

$$H : \mathbb{R}^M \mapsto \mathbb{R}^{M/2}$$

$$G : \mathbb{R}^M \mapsto \mathbb{R}^{M/2}$$

las cuales tienen representaciones matriciales H_M y G_M respectivamente de tamaño $M/2 \times M$. Dicho esto se considerará el siguiente arreglo matricial:

$$W_M := \begin{bmatrix} H_M \\ G_M \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Sea $(h_k)_k$ un filtro de escalamiento de longitud 4 con valores reales, es decir, $h(k) = 0$ siempre que $k < 0$ o $4 \leq k$.

Sea $g_k = (-1)^k h_{3-k}$ tal que si $k < 0$ o $4 \leq k$ y $M = 2^3 = 8$.

Con lo que $g = (g_0, g_1, g_2, g_3) = h_3, -h_2, h_1, -h_0$. Así es posible obtener las matrices H_8 , G_8 y M_8 :

$$H_8 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times M} \quad G_8 = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times M}$$

las matrices H_8 y G_8 tiene todas sus filas ortogonales ya que al realizar el producto interior interior entre cualesquiera filas i, j distintas se tendrá

$$\langle \text{fila}_i, \text{fila}_j \rangle = \sum_{k=0}^3 h_k h_{k-2} = 0$$

De esta manera se tiene que;

$$M_8 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}_{M \times M} = \begin{bmatrix} H_8 \\ G_8 \end{bmatrix}$$

Los operadores de aproximación y detalle adjuntos H^* y G^* serán representados matricialmente como los adjuntos de las matrices H_p y G_p , esto es;

$$W_M^* = \begin{bmatrix} H_M \\ G_M \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} H_M^* & G_M^* \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} W_M^* W_M &= \begin{bmatrix} H_M^* & G_M^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_M \\ G_M \end{bmatrix} \\ &= H_M^* H_M + G_M^* G_M \\ &= I_M \end{aligned}$$

donde I_M es la matriz identidad, de aquí que W_M es una matriz ortogonal.

El primer paso en la TWD para un M-vector c_0 esta dado por

$$W_M c_0 = \begin{bmatrix} \overline{d_1} \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ \vdots \\ d_{1, \frac{M}{2}-1} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1, \frac{M}{2}-1} \end{bmatrix}$$

El segundo paso esta dado por:

$$\begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} & 0 \\ 0 & W_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

puesto que

$$\begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} & 0 \\ 0 & W_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = I_{\frac{M}{2}} d_1 + W_{\frac{M}{2}} c_1 = d_1 + \begin{bmatrix} d_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ \vdots \\ d_{1,\frac{M}{2}-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

y en general el j -ésimo paso será

$$\begin{bmatrix} I_{(1-2^{-j})M} & 0 \\ 0 & W_{\frac{M}{2^j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{j-1} \\ c_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{j-1} \\ d_j \\ c_j \end{bmatrix}$$

El proceso para obtener la TWD puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$c_0 \xrightarrow{W_M} \begin{bmatrix} d_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} 0 \\ 0 W_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{j-1} \\ c_{j-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_{(1-2^{-j})M} 0 \\ 0 W_{\frac{M}{2^j}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{j-1} \\ d_j \\ c_j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N_1} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_{M-1} 0 \\ 0 W_1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \\ c_N \end{bmatrix} =$$

Así la matriz W tendrá la siguiente representación:

$$W = \begin{bmatrix} I_{M-1} & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{M-2^j M} & 0 \\ 0 & W_{2^{-j} M} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} & 0 \\ 0 & W_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} W_M$$

La cual es una matriz ortogonal debido a que es producto de matrices ortogonales.

Nota: Como W es ortogonal, sus renglones serán ortogonales, dichos renglones forman una base de \mathbb{R}^M , la cual será nombrada base Wavelet discreta de \mathbb{R}^M .

Observación: Es común encontrar en otras referencias como (Strang y Nguyen, 1996)

la matriz W como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & I_{M-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} W_{2^{-j}M} & 0 \\ 0 & I_{M-2^jM} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} W_{\frac{M}{2}} & 0 \\ 0 & I_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} W_M$$

, la cual no afecta el proceso de análisis sin embargo hace un reacomodo de los coeficientes, esto se puede ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. Dado el vector $v = (255, 224, 192, 159, 127, 95, 63, 32)^t$, se obtiene la TWD de v usando la Transformada de Haar como se muestra a continuación.

Como se mostró al inicio del capítulo se tiene que $h_0 = h_1 = \frac{1}{2}$ y cualquier otra $h_k = 0$, así se tendrán las matrices:

$$W_8 = \begin{bmatrix} H_8 \\ G_8 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De esta manera el primer paso de la TWD para el vector v esta dado por:

$$W_8 v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 255 \\ 224 \\ 192 \\ 159 \\ 127 \\ 95 \\ 63 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 239.5 \\ 175.5 \\ 111.0 \\ 47.5 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16.0 \\ 15.5 \end{pmatrix}$$

el vector resultante será nombrado v_1 . El paso dos y tres de la TWD se obtendrá con las matrices:

$$\begin{pmatrix} W_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así el paso dos será:

$$\begin{pmatrix} W_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 239.5 \\ 175.5 \\ 111.0 \\ 47.5 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16.0 \\ 15.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207.5 \\ 79.25 \\ 32.0 \\ 31.75 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16.0 \\ 15.5 \end{pmatrix}$$

cuyo vector resultante será v_2 , de esta manera el paso tres esta dado como:

$$\begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & I_6 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 207.5 \\ 79.25 \\ 32.0 \\ 31.75 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16.0 \\ 15.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143.375 \\ 67.125 \\ 32.0 \\ 31.75 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16.0 \\ 15.5 \end{pmatrix}$$

Dado que $W = \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & I_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} W_8$ se puede obtener la TWD de v mediante:

$$Wv = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 255 \\ 224 \\ 192 \\ 159 \\ 127 \\ 95 \\ 63 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143.375 \\ 64.125 \\ 32 \\ 31.75 \\ 15.5 \\ 16.5 \\ 16 \\ 15.5 \end{pmatrix}$$

La TWD como un cambio de coordenadas

Definición 16 (Transformada Wavelet Discreta.). *La Transformada Wavelet Discreta, o TWD, se define como el cambio de coordenadas de ϕ_1 a (ϕ_0, ψ_0) . Más generalmente, la TWD de nivel m se define como el cambio de coordenadas de ϕ_m a $(\phi_0, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1})$. En un m -ésimo nivel de la TWD será el cambio de coordenadas de*

$$(\phi_{m-k+1}, \psi_{m-k+1}, \psi_{m-k+2}, \dots, \psi_{m-1}) \text{ to } (\phi_{m-k}, \psi_{m-k}, \psi_{m-k+1}, \dots, \psi_{m-1})$$

también se llama etapa k -ésima. La *TWDI* (Transformada Wavelet Discreta Inversa) (en el m -ésimo nivel) se define como el cambio de coordenadas en sentido contrario.

Suponga que se tiene un vector de datos $\mathbf{v} = (v_l)_{l=0}^{2^K-1}$ de longitud 2^K . Se puede escribir en términos de 2^K vectores base φ_{0k}

$$\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{2^K-1} v_{k0} \varphi_{0k}$$

con coeficientes $\mathbf{v} = [v_{00}, \dots, v_{2^K-1}, 0]^t$, donde

$$v_{k0} = \langle \mathbf{v}, \varphi_{0k} \rangle = \mathbf{v}^t \varphi_{0k} = \sum_{l=0}^{2^K-1} v_l \varphi_{0k}(l).$$

Por lo tanto, la expansión debe entenderse como

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{2^K-1} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2^K-1} v_{k0} \begin{bmatrix} \varphi_{0k}(0) \\ \varphi_{0k}(1) \\ \vdots \\ \varphi_{0k}(2^K-1) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Considere $v = [9120]^t$, es decir, $K = 2$ y considera la Wavelet Haar, esto es $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y cualesquiera otros h_k son cero. Por eso $\varphi = (\delta_l)_{l=0}^{2^K-1}$ es el primer vector unitario y φ_{0k} es el k vector unitario.

Note que $\varphi_{0l}(k) = \delta_{k-l}$ y por lo tanto $v_{k0} = \langle \mathbf{v}, \varphi_{0k} \rangle = v_k$.

$$= 9 \begin{bmatrix} \varphi_{00}(0) \\ \varphi_{00}(1) \\ \varphi_{00}(2) \\ \varphi_{00}(3) \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \varphi_{01}(0) \\ \varphi_{01}(1) \\ \varphi_{01}(2) \\ \varphi_{01}(3) \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \varphi_{02}(0) \\ \varphi_{02}(1) \\ \varphi_{02}(2) \\ \varphi_{02}(3) \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} \varphi_{03}(0) \\ \varphi_{03}(1) \\ \varphi_{03}(2) \\ \varphi_{03}(3) \end{bmatrix}.$$

También se puede expandir en términos de

$$\varphi_{-1,k} \text{ y } \psi_{-1,k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, 2^{K-1} - 1$$

con coeficientes $\mathbf{v}_1 = (v_{k1})$ y $\mathbf{w}_1 = (w_{k1})$ dados por

$$v_{k1} = \langle \mathbf{v}, \varphi_{-1,k} \rangle \quad , \quad w_{k1} = \langle \mathbf{v}, \psi_{-1,k} \rangle .$$

Se puede calcularlos directamente evaluando los productos internos. Sin embargo, por el análisis anterior, también se pueden encontrar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_K^* \\ \mathbf{G}_K^* \end{bmatrix} \mathbf{v}_0 .$$

Por el ejemplo anterior

$$\mathbf{H}_2^* = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & & h_0 & h_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{G}_2^* = \begin{bmatrix} h_1 & -h_0 & & \\ & & h_1 & -h_0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{11} \\ w_{01} \\ w_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y se comprueba que esto da efectivamente la descomposición correcta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{10}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_{-1,0}(0) \\ \varphi_{-1,0}(1) \\ \varphi_{-1,0}(2) \\ \varphi_{-1,0}(3) \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_{-1,1}(0) \\ \varphi_{-1,1}(1) \\ \varphi_{-1,1}(2) \\ \varphi_{-1,1}(3) \end{bmatrix} + \frac{8}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_{-1,0}(0) \\ \psi_{-1,0}(1) \\ \psi_{-1,0}(2) \\ \psi_{-1,0}(3) \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_{-1,1}(0) \\ \psi_{-1,1}(1) \\ \psi_{-1,1}(2) \\ \psi_{-1,1}(3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{10}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{8}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El primer y segundo término, son los componentes de v a lo largo de $\varphi_{-1,0}$ y $\varphi_{-1,1}$. Juntos forman la parte de v que está en V_{-1} . Esto puede nuevamente dividirse y escribirse en términos de

$$\varphi_{-2,k} \text{ y } \psi_{-2,k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, 2^{K-2} - 1$$

que en este ejemplo es $\varphi_{-2,0}$ y $\psi_{-2,0} \rightarrow$ coeficientes v_{02} y w_{02} Esto es para el ejemplo dado por

$$\begin{bmatrix} v_{02} \\ w_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^* \\ \mathbf{G}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & -h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{11} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, explícitamente

$$\begin{bmatrix} v_{02} \\ w_{02} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y de hecho

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \varphi_{-2,0}(0) \\ \varphi_{-2,0}(1) \\ \varphi_{-2,0}(2) \\ \varphi_{-2,0}(3) \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} \psi_{-2,0}(0) \\ \psi_{-2,0}(1) \\ \psi_{-2,0}(2) \\ \psi_{-2,0}(3) \end{bmatrix} = \frac{6}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es igual a la suma de los dos primeros términos de la descomposición anterior. Así se ha escrito \mathbf{v} como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 6\varphi_{-2,0} + 4\psi_{-2,0} + \frac{8}{\sqrt{2}}\psi_{-1,0} + \frac{2}{\sqrt{2}}\psi_{-1,1} \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \frac{8}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que en este ejemplo simple no necesitábamos el ajuste de la matriz H

y G . Las dos transformaciones juntas dan el resultado $[v_{02}w_{02}w_{01}w_{11}]^t$ en términos de $[v_{00}v_{10}v_{20}v_{30}]^t$ como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{02} \\ w_{02} \\ w_{01} \\ w_{11} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{00} \\ v_{10} \\ v_{20} \\ v_{30} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definición 17 (El Algoritmo en Cascada.). *El algoritmo en cascada aplica un cambio de coordenadas para las funciones ϕ, ψ desde la base $(\phi_0, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ a la base ϕ_m , y usa las nuevas coordenadas como una aproximación a los valores de estas funciones.*

Descomposición y reconstrucción de funciones en $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección se examina el proceso de descomposición y reconstrucción de funciones, a su vez se da el algoritmo rápido Wavelet, el cual consiste de dos algoritmos, descomposición y reconstrucción, este algoritmo fue propuesto a finales de 1980 por Stephane Mallat, dicho algoritmo tuvo como aportación principal unificar la teoría matemática de las bases Wavelet con la teoría tradicional de Banco de filtros asociada al procesamiento de señales. El algoritmo es notablemente simple y su complejidad crece sólo linealmente con el tamaño de los datos, es de hecho menor que la Transformada de Fourier rápida. Durante este capítulo se discutirá el algoritmo solo para la Transformada Wavelet Discreta dicho algoritmo tiene como objetivo realizar la descomposición y reconstrucción de una señal a través de lo que es conocido en lenguaje de procesamiento de señales como una implementación en banco de filtros de 2 canales y un banco de filtros con reconstrucción perfecta. Debido a que hablamos de una implementación algorítmica es necesario considerar problemas como la iniciación de dicho algoritmo mismos que se discutirán al final del capítulo.

Una de las ventajas que proporciona el algoritmo es que si los coeficientes c_j de aproximación son conocidas los coeficientes c_{j-1} y d_{j-1} para la siguiente escala pueden ser deducidos casi de manera inmediata mediante una transformación simple, la cual consta de una convolución que es un filtro lineal seguido de un submuestreo diádico.

Algoritmo de descomposición

Este algoritmo permite realizar el análisis o descomposición de una señal lo que significa calcular los coeficientes de detalle y aproximación sobre los correspondientes espacios V_j y W_j , para esto considérese un análisis de resolución múltiple de $L^2(\mathbb{R})$, este algoritmo puede ser entendido como el proceso para pasar de una escala fina a una escala más gruesa.

Considere un espacio de aproximación V_j el cual se ajuste mejor a la información disponible para una función f . Tomando la relación de escalamiento:

$$\varphi(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} h_m \varphi(2t - m)$$

Asumiendo que existe una única solución, trasladando y escalando la variable t se tendrá:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} h_m \varphi(2(2^j t - k) - m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} h_m \varphi(2^{j+1} t - 2k - m)$$

haciendo un cambio de variable $n = 2k + m$ se obtendrá:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{1/2} h_{n-2k} \varphi(2^{j+1} t - n)$$

dado que $V_j = \text{gen}\{2^{j/2} \varphi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se sigue que:

$$f(t) \in V_{j+1} \Rightarrow f(t) = \sum_k c_{j+1,k} 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - k)$$

esto es; $f(t)$ es expresable en términos de las funciones de escalamiento para una escala $j + 1$ y esta representación no requiere el uso de las Wavelets, sin embargo note en la siguiente expresión para $f(t)$ que al considerar un nivel de escala más bajo j es necesario conocer los Wavelets

$$f(t) = \sum_n c_{j,n} 2^{j/2} \varphi(2^j t - n) + \sum_n d_{j,n} \psi(2^j t - n)$$

Si $\varphi_{j,k}(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$ son ortonormales o marcos estrechos el coeficiente de aproximación en

el nivel j puede ser calculado mediante

$$c_{j,k} = \sum_n c_{j-1,n} \overline{h_{n-2k}} \quad (4.1)$$

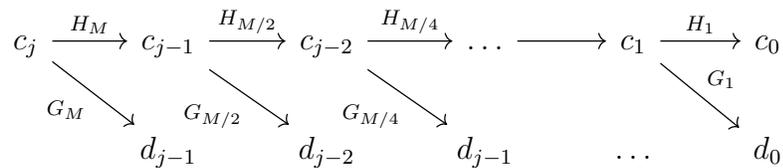
cuyo coeficiente de detalle relacionado es:

$$d_{j,k} = \sum_n c_{j-1,n} \overline{g_{n-2k}} \quad (4.2)$$

Así el algoritmo de descomposición parte de las ecuaciones (4.1) y (4.2), su función es descomponer la señal en los coeficientes de aproximación y detalle del nivel de escala menor, es decir de los espacios W_{j-1} y V_{j-1} .

El algoritmo de descomposición para la Transformada Wavelet Discreta de una función (señal) f de tamaño N produce 2 vectores de coeficientes en el primer paso: el coeficiente de aproximación c_{j-1} , el cual se obtiene mediante convolución de la función con un filtro pasabaja seguido de decimación y el coeficiente de detalle d_{j-1} se obtiene a su vez por medio de convulsión con la función, el cual es un filtro pasaalta seguido de decimación. Dicho paso produce que el tamaño de la función (señal) después de este primer paso sea $N/2$. Este primer paso es representado mediante un banco de filtros de dos bandas

y posee un desarrollo iterativo que se muestra en el siguiente diagrama:



En las aplicaciones prácticas el proceso de descomposición es finito, por lo que, el algoritmo proporciona una sucesión de coeficientes.

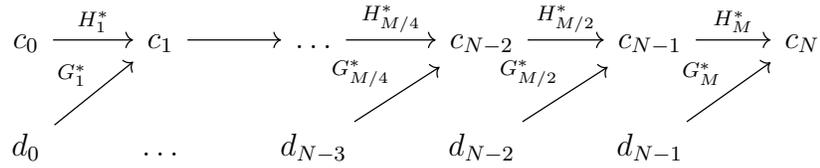
$$c_j \mapsto (d_j, d_{j-1}, d_{j-2}, \dots, d_0, c_0)$$

Algoritmo de reconstrucción

La operación realizada en proceso de descomposición es equivalente a una transformación en cascada de bases ortogonales por lo que la operación de reconstrucción es la adjunta a operación de descomposición, es decir, $f^j = f^{j+1} + g^{j+1}$. Así el algoritmo de reconstrucción está dado por la fórmula de la Transformada Wavelet inversa:

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= (H^* c_j)_k + (G^* d_j)_k \\ &= \sum_n c_{j,k} h_{k-2n} + \sum_n d_{j,n} g_{k-2n} \\ &= \sum_n [c_{j,k} h_{k-2n} + d_{j,n} g_{k-2n}] \end{aligned}$$

y está representado por el siguiente diagrama:



el cual se puede traducir a su forma matricial como:

$$W_N^{-1} = W_N^t = W_n^* = [H_M^* G_M^*]$$

Producto tensorial en la Teoría Wavelet

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la Transformada Wavelet puede ser entendida como un cambio de coordenadas para funciones de una variable, por lo que, aplicarlo directamente a dimensiones superiores requiere de consideraciones particulares. En este capítulo se estudiará una técnica eficiente para extender las representaciones unidimensionales a bidimensionales mediante el uso del producto tensorial. Este es considerado como una herramienta para construir funciones bidimensionales y filtros a partir de sus contrapartes unidimensionales. Usando productos tensoriales, uno puede construir operaciones en funciones bidimensionales que heredan propiedades de operaciones unidimensionales, además tienen la propiedad de ser computacionalmente eficientes.

El desarrollo bidimensional de la Teoría Wavelet a través del producto tensorial permitirá la implementación a imágenes.

Definición y propiedades del producto tensorial

Definición 18. *Dados $X \in \mathbb{R}^M, Y \in \mathbb{R}^N$, se define el producto tensorial de los vectores X, Y como:*

- $X \otimes Y \in M_{M \times N}$
- $(X \otimes Y)_{i,j} = x_i y_j = XY^t$

Ejemplo 5. Sean $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$X \otimes Y = XY^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \\ -12 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $X \otimes Y \neq Y \otimes X$, ya que

$$Y \otimes X = YX^t = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6. Sean $E_M = \{e_i\}_{i=0}^{M-1}$ y $E_N = \{e_j\}_{j=0}^{N-1}$ las bases canónicas de los espacios \mathbb{R}^M y \mathbb{R}^N respectivamente, entonces;

$$E_{M,N} = \{e_i \otimes e_j\}_{(i,j)=(0,0)}^{(M-1,N-1)}$$

es la base canónica del espacio de matrices $M_{M \times N}(\mathbb{R})$

Teorema 16. Dados $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^M$, $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N$, $a, b \in \mathbb{R}$ el producto tensorial

$$\otimes : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \longrightarrow M_{M \times N}$$

$$(X, Y) \longrightarrow X \otimes Y$$

satisface:

$$a) (aX_1 + X_2) \otimes Y_1 = a(X_1 \otimes Y_1) + (X_2 \otimes Y_1)$$

$$b) X_1 \otimes (bY_1 + Y_2) = b(X_1 \otimes Y_1) + (X_1 \otimes Y_2)$$

es decir; es una forma bilineal.

Demostración. a) $(aX_1 + X_2) \otimes Y_1 = (aX_1 + X_2)Y_1^t$

$$\begin{aligned} &= (aX_1)Y_1^t + X_2Y_1^t \\ &= a(X_1Y_1^t) + X_2Y_1^t \\ &= a(X_1 \otimes Y_1) + (X_2 \otimes Y_1) \end{aligned}$$

b) $X_1 \otimes (bY_1 + Y_2) = X_1(bY_1 + Y_2)^t$

$$\begin{aligned} &= X_1(bY_1^t + Y_2^t) \\ &= X_1(bY_1^t) + X_1Y_2^t \\ &= b(X_1Y_1^t) + X_1Y_2^t \\ &= b(X_1 \otimes Y_1) + (X_1 \otimes Y_2) \end{aligned}$$

□

Definición 19. Sean $S_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, $S_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, se define la transformación lineal:

$$S_1 \otimes S_2 : M_{M \times N}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{M \times N}(\mathbb{R})$$

mediante:

$$(S_1 \otimes S_2)(e_i \otimes e_j) = (S_1 e_i) \otimes (S_2 e_j) \quad \forall i, j : 0 \leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N - 1$$

A la transformación lineal $S_1 \otimes S_2$ se le llamará producto tensorial de las matrices S_1 y S_2 .

Observación: Del teorema fundamental del álgebra lineal se sabe que, para una base dada $\{b_i\}$ de un espacio V , el mapeo $T(b_i)$ determina de manera única una transformación lineal T ; así dado que $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ es una base para el espacio $M_{M \times N}(\mathbb{R})$, el producto tensorial de las matrices $S_1 \otimes S_2$ es único.

Ejemplo 7. Dadas las matrices $S_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que: $S_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ obtenga } (S_1 \otimes S_2)(e_i \otimes e_j) \quad \forall i, j : 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1.$$

$$S_1 e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$(S_1 \otimes S_2)(e_0 \otimes e_0) = (S_1 e_0) \otimes (S_2 e_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(S_1 \otimes S_2)(e_0 \otimes e_1) = (S_1 e_0) \otimes (S_2 e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(S_1 \otimes S_2)(e_1 \otimes e_0) = (S_1 e_1) \otimes (S_2 e_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(S_1 \otimes S_2)(e_1 \otimes e_1) = (S_1 e_1) \otimes (S_2 e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S_1 \otimes S_2)(e_2 \otimes e_0) = (S_1 e_2) \otimes (S_2 e_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S_1 \otimes S_2)(e_2 \otimes e_1) = (S_1 e_2) \otimes (S_2 e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 2. $(S_1 \otimes S_2)(x \otimes y) = (S_1 x) \otimes (S_2 y)$ para cuales quiera x, y

Demostración. $(S_1 \otimes S_2)(x \otimes y) = (S_1 \otimes S_2)((\sum_i x_i e_i) \otimes (\sum_j y_j e_j))$

$$= (S_1 \otimes S_2)(\sum_{i,j} x_i y_j (e_i \otimes e_j))$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j (S_1 \otimes S_2)(e_i \otimes e_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j (S_1 e_i) \otimes (S_2 e_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j (S_1 e_i) (S_2 e_j)^t$$

$$= S_1 (\sum_i x_i e_i) S_2 (\sum_j y_j e_j)^t$$

$$= (S_1 x) (S_2 y)^t$$

$$= (S_1 x) \otimes (S_2 y)$$

□

Teorema 17. Dadas $S_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, $S_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ transformaciones lineales, entonces

$$(S_1 \otimes S_2)X = S_1 X S_2^T \quad \forall X \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$$

En particular $S_1 \otimes S_2$ es la operación que aplica S_1 a las columnas de X y S_2 a los renglones resultantes.

Demostración. $(S_1 \otimes S_2)(e_i \otimes e_j) = S_1 e_i \otimes S_2 e_j$

$$= (S_1 e_i) (S_2 e_j)^T$$

$$= S_1 (e_i) (e_j)^T S_2^T$$

$$= S_1 (e_i \otimes e_j) S_2^T$$

De manera que $(S_1 \otimes S_2)X = S_1 X S_2^T$ para cualquier $X \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$ ya que la igualdad se cumple sobre la base $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ de $M_{M \times N}(\mathbb{R})$ □

Corolario 18.

$$(S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2) = (S_1 S_2) \otimes (T_1 T_2)$$

Demostración. Por el teorema anterior se tendrá:

$$\begin{aligned} (S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2)X &= (S_1 \otimes T_1)(S_2 X T_2^T) \\ &= S_1(S_2 X T_2^T)T_1^T \\ &= (S_1 S_2)X(T_2^T T_1^T) \\ &= (S_1 S_2)X(T_1 T_2)^T \\ &= (S_1 S_2) \otimes (T_1 T_2)X \end{aligned}$$

para cualquier $X \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$. □

Observación 3. Suponga que se desea aplicar la operación $(S_1 \otimes S_2)$ a una imagen. Se puede factorizar $(S_1 \otimes S_2)$ de la siguiente manera:

$$(S_1 \otimes S_2) = (S_1 \otimes I)(I \otimes S_2)$$

Además, del teorema 17 se sigue que:

$$(S_1 \otimes I)X = S_1 X$$

$$(I \otimes S_2)X = X S_2^T = (S_2 X^T)^T$$

de esta forma $S_1 \otimes I$ es operación de filtrado vertical, mientras que $(I \otimes S_2)$ es operación de filtrado horizontal.

Observación 4. Para matrices S_1, S_2, S_3, S_4 que son filtros, se tiene el siguiente resultado

$$(S_1 \otimes S_2)(S_3 \otimes S_4) = (S_3 \otimes S_4)(S_1 \otimes S_2)$$

como consecuencia del teorema anterior y dado que todos los filtros conmutan. Esto no se cumple en general ya que las matrices no siempre conmutan.

Cambio de coordenadas en el producto tensorial

Teorema 19. Dadas $\beta = \{v_i\}_{i=0}^{M-1}$, $\beta' = \{w_j\}_{j=0}^{N-1}$ bases de \mathbb{R}^M y \mathbb{R}^N respectivamente, entonces $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)=(0,0)}^{(M-1,N-1)}$ es una base de $M_{M \times N}(\mathbb{R})$. Dicha base será denotada por $\beta \otimes \beta'$.

Demostración. Suponga que $\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}(v_i \otimes w_j) = 0$, haciendo $h_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}w_j$ se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}(v_i \otimes w_j) = v_i \otimes \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}w_j \right) = v_i \otimes h_i$$

de manera que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}(v_i \otimes w_j) = \sum_{i=0}^{M-1} v_i \otimes h_i = \sum_{i=0}^{M-1} v_i h_i^T = \sum_{i=0}^{M-1} v_i (h_{0,k} \ h_{1,k} \ \dots \ h_{N-1,k}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{M-1} v_i h_{0,k} \ \sum_{i=0}^{M-1} v_i h_{1,k} \ \dots \ \sum_{i=0}^{M-1} v_i h_{N-1,k} \right) \end{aligned}$$

así, por la independencia lineal de β se tiene que $h_{0,k} = h_{1,k} = \dots = h_{N-1,k} = 0$, dado que esto se cumple para toda k se tiene que $h_i = 0$, de aquí que $\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}w_j = 0$ para todo j , de donde se sigue por la independencia lineal de la base β' que $a_{ij} = 0$ para cualesquiera i, j □

Definición 20 (Matriz Coordenada). Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=0}^{M-1}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_j\}_{j=0}^{N-1}$ bases de \mathbb{R}^M y \mathbb{R}^N , y sea $A \in L_{M,N}(\mathbb{R})$. Por la matriz de coordenadas de A en $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ nos referimos a la matriz $M \times N$ X (con componentes X_{kl}) tal que $A = \sum_{k,l} X_{k,l} (\mathbf{b}_k \otimes \mathbf{c}_l)$

El siguiente teorema muestra cómo el cambio de coordenadas en \mathbb{R}^M y \mathbb{R}^N se traduce en un cambio de coordenadas en el producto tensorial:

Teorema 20 (Cambio de coordenadas en producto tensorial). Sean $\beta_1 = \{b_{1i}\}_{i=1}^M$, $\alpha_1 = \{a_{1i}\}_{i=1}^M$ bases de \mathbb{R}^M y $\beta_2 = \{b_{2j}\}_{j=1}^N$, $\alpha_2 = \{a_{2j}\}_{j=1}^N$ bases de \mathbb{R}^N y $S_1 = [I]_{\beta_1}^{\alpha_1}$ $S_2 = [I]_{\beta_2}^{\alpha_2}$ matrices de cambio de coordenadas de β_1 a α_1 y de β_2 a α_2 respectivamente, tales que

$\beta_1 \otimes \beta_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2$ son bases de $M_{M \times N}(\mathbb{R})$. Si $X = [A]_{\beta_1 \otimes \beta_2}$ y $Y = [A]_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}$ entonces:

$$Y = S_1 X S_2^T$$

Demostración. Dado que cualquier cambio de coordenadas es lineal, es suficiente probar que se satisface en los básicos. Sean b_{1i} el i -ésimo vector de la base β_1 y b_{2j} el j -ésimo vector de la base β_2 , entonces se tiene que $b_{1i} = \sum_k (S_1)_{k,i} a_{1k}$ y $b_{2j} = \sum_l (S_2)_{l,j} a_{2l}$ de manera que:

$$\begin{aligned} b_{1i} \otimes b_{2j} &= [\sum_k (S_1)_{k,i} a_{1k}] \otimes [\sum_l (S_2)_{l,j} a_{2l}] \\ &= \sum_k \sum_l (S_1)_{k,i} (S_2)_{l,j} (a_{1k} \otimes a_{2l}) \\ &= \sum_k \sum_l (S_1)_{k,i} ((S_2)^T)_{j,l} (a_{1k} \otimes a_{2l}) \\ &= \sum_k \sum_l [S_1 e_i (e_j)^T S_2^T]_{k,l} (a_{1k} \otimes a_{2l}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $[b_{1i} \otimes b_{2j}]_{\alpha_1 \otimes \alpha_2} = S_1 (e_i \otimes e_j) S_2^T$ y puesto que $[b_{1i} \otimes b_{2j}]_{\beta_1 \otimes \beta_2} = e_i \otimes e_j$ se tiene que $Y = S_1 X S_2^T$

□

Producto tensorial en espacios de funciones

Definición 21. *Dados los espacios $\mathcal{U}_1 = \{f : [0, M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_2^2 = \int_0^M |f|^2 d\mu < +\infty\}$, $\mathcal{U}_2 = \{g : [0, N) \rightarrow \mathbb{R} \mid \|g\|_2^2 = \int_0^N |g|^2 d\mu < +\infty\}$ subespacios de $L_2([0, M))$, $L_2([0, N))$ respectivamente. Sean $f_1 \in \mathcal{U}_1$, $f_2 \in \mathcal{U}_2$, se define el producto tensorial de f_1 y f_2 como la función:*

$$\otimes : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}$$

$$(f_1, f_2) \mapsto (f_1 \otimes f_2)$$

donde

$$(f_1 \otimes f_2) : [0, M) \times [0, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$(f_1 \otimes f_2)(t_1, t_2) = f_1(t_1) f_2(t_2)$$

$f_1 \otimes f_2$ es también llamada la extensión separable de f_1 y f_2 . Se define el producto tensorial de los espacios $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ mediante:

$$\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = \text{gen}\{f_1 \otimes f_2\}_{f_1 \in \mathcal{U}_1, f_2 \in \mathcal{U}_2}$$

Proposición 3. El espacio $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ es espacio producto interior, con producto interior definido mediante:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2} : (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2) \times (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &= \int_0^N \int_0^M f(t_1, t_2)g(t_1, t_2)dt_1dt_2 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle &= \int_0^N \int_0^M (f_1 \otimes f_2)(t_1, t_2)(g_1 \otimes g_2)(t_1, t_2)dt_1dt_2 \\ &= \int_0^N \int_0^M f_1(t_1) f_2(t_2) g_1(t_1) g_2(t_2) dt_1dt_2 \\ &= \int_0^M f_1(t_1) g_1(t_1) dt_1 \int_0^N f_2(t_2) g_2(t_2) dt_2 \\ &= \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle \end{aligned}$$

□

Teorema 21 (Bases para productos tensoriales de espacios de funciones.). Si $\{f_i\}_{i=0}^{M-1}, \{g_j\}_{j=0}^{N-1}$ son bases de U_1 y U_2 respectivamente, entonces $\{f_i \otimes g_j\}_{(i,j)=(0,0)}^{(M-1,N-1)}$ es una base de $U_1 \otimes U_2$. Más aún, si las bases de U_1 y U_2 son ortogonales/ortonormales, entonces la base para $U_1 \otimes U_2$ es ortogonal/ortonormal.

Demostración. La prueba es similar a la del teorema 8 (Ryan): Si

$$\sum_{(i,j)=(0,0)}^{(M-1,N-1)} \alpha_{i,j} (f_i \otimes g_j) = 0,$$

se define $h_i(t_2) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{i,j} g_j(t_2)$. Se sigue que $\sum_{i=0}^{M-1} h_i(t_2) f_i = 0$ para cualquier t_2 , así que $h_i(t_2) = 0$ para cualquier t_2 , dada la independencia lineal de f_i . Se cumple además que $\alpha_{i,j} = 0$, por la independencia lineal de g_j . La ortogonalidad de la base se sigue de la

proposición 5 (eq 9.2 Ryan).

□

Definición 22 (Vector coordenado). Si $\mathcal{B} = \{f_i\}_{i=0}^{M-1}$ y $\mathcal{C} = \{g_j\}_{j=0}^{N-1}$, se define $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ como la base $\{f_i \otimes g_j\}_{(i,j)=(0,0)}^{(M-1,N-1)}$ para $U_1 \otimes U_2$. Se dice que la matriz X es el vector coordenado de f si

$$f(t_1, t_2) = \sum_{i,j} X_{i,j} (f_i \otimes g_j)(t_1, t_2),$$

donde $X_{i,j}$ son las entradas de X .

Teorema 22 (Cambio de coordenadas en productos tensoriales de espacios de funciones).

Sean U_1 y U_2 espacios de funciones y sean

- $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$ bases de U_1 , y S_1 la matriz de cambio de coordenadas de \mathcal{B}_1 a \mathcal{C}_1 , es decir, $[I_{U_1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_1}$.
- $\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2$ bases de U_2 , y S_2 la matriz de cambio de coordenadas de \mathcal{B}_2 a \mathcal{C}_2 , es decir, $[I_{U_2}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2}$.

Entonces $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ son bases para $U_1 \otimes U_2$, y si $X = [A]_{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}$, $\forall A \in M_{M \times N}$ es el vector coordenado en $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$, $Y = [A]_{\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2}$, $\forall A \in M_{M \times N}$ es el vector coordenado en $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$, entonces el cambio de coordenadas de $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ se obtiene como:

$$Y = S_1 X (S_2)^t$$

esto es

$$[A]_{\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2} = [I_{U_1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_1} [I]_{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2} ([I_{U_2}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2})^t$$

Producto tensorial en espacio de funciones en la Teoría Wavelet

Durante el desarrollo del capítulo se ha hecho mención de los espacios de funciones U_1, U_2 , en esta sección dichos espacios de funciones serán los espacios de aproximación y

detalle V_m y W_m para una Wavelet dada. En particular se pueden formar los productos tensoriales $\phi_{0,n_1} \otimes \phi_{0,n_2}$. Se asumirá que el primer componente ϕ_{0,n_1} tiene periodo M (de modo que $\{\phi_{0,n_1}\}_{n_1=0}^{M-1}$ es una base para el espacio del primer componente), mientras que el segundo componente ϕ_{0,n_2} tendrá periodo N (de modo que $\{\phi_{0,n_2}\}_{n_2=0}^{N-1}$ es una base para el espacio del segundo componente).

Cuando se hace mención de $V_0 \otimes V_0$ se referirá a un espacio MN -dimensional con base $\{\phi_{0,n_1} \otimes \phi_{0,n_2}\}_{(n_1,n_2)=(0,0)}^{(M-1,N-1)}$, donde las matrices coordenadas son de tamaño $M \times N$. Esta diferencia en la dimensión de los dos componentes se hace para permitir imágenes en las que el número de filas y columnas puede ser diferente.

Lema 5 (Base para V_m). *La dimensión de V_m es $2^m N$, y las funciones*

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n), \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, 2^m N - 1$$

formar una base ortonormal para V_m . Denotaremos esta base por ϕ_m . Cualquier función $f \in V_m$ se puede representar de manera única como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{2^m N - 1} c_{m,n} \phi_{m,n}(t).$$

Teorema 23 (Espacios de Resolución y Aproximación). *Sea f una función dada que es continua en el intervalo $[0, N]$. Dado $\epsilon > 0$, existe un entero $m \geq 0$ y una función $g \in V_m$ tal que*

$$|f(t) - g(t)| \leq \epsilon$$

para todo t en $[0, N]$.

Corolario 24 (Bases para espacios producto tensorial). *Sea φ una función de escalamiento y ψ una Wavelet madre, entonces los dos conjuntos producto tensorial están dados por:*

$$a) \phi_m \otimes \phi_m = \{\varphi_{m,n_1} \otimes \varphi_{m,n_2}\}_{n_1,n_2}$$

y

$$\begin{aligned}
 & (\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \\
 & = \{ \varphi_{m-1, n_1} \otimes \varphi_{m-1, n_2}, \\
 b) \quad & \varphi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2} \\
 & \psi_{m-1, n_1} \otimes \varphi_{m-1, n_2}, \\
 & \psi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2} \}_{n_1, n_2}
 \end{aligned}$$

son bases para $V_m \otimes V_m$. La base b) es ortogonal/ortonormal siempre que la primera lo sea.

Observación 5. Mientras que la descomposición Wavelet unidimensional V_m se divide en dos espacios V_{m-1} y W_{m-1} , la descomposición bidimensional divide a $V_m \otimes V_m$ en suma directa de cuatro espacios vectoriales.

Definición 23 (Espacio producto tensor). Se definen los siguientes espacios de $V_m \otimes V_m$:

- El espacio $W_{m-1}^{(0,1)} = \text{gen} \{ \varphi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2} \}_{n_1, n_2}$,
- El espacio $W_{m-1}^{(1,0)} = \text{gen} \{ \psi_{m-1, n_1} \otimes \varphi_{m-1, n_2} \}_{n_1, n_2}$,
- El espacio $W_{m-1}^{(1,1)} = \text{gen} \{ \psi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2} \}_{n_1, n_2}$.

los cuales son linealmente independientes y satisfacen

$$V_m \otimes V_m = (V_{m-1} \otimes V_{m-1}) \oplus W_{m-1}^{(0,1)} \oplus W_{m-1}^{(1,0)} \oplus W_{m-1}^{(1,1)}.$$

El producto tensorial $V_{m-1} \otimes V_{m-1}$ será llamado espacio de aproximación y $W_{m-1}^{(0,1)}$, $W_{m-1}^{(1,0)}$, $W_{m-1}^{(1,1)}$ espacios de detalle vertical, horizontal y diagonal respectivamente. El vector de coordenadas de

$$[A]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} = \sum_{n_1, n_2=0}^{2^{m-1}N} \left(c_{m-1, n_1, n_2} (\phi_{m-1, n_1} \otimes \phi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(0,1)} (\phi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(1,0)} (\psi_{m-1, n_1} \otimes \phi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(1,1)} (\psi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2}) \right)$$

en la base $(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})$ es la matriz, la cual será la matriz de la Transformación

mada Wavelet.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} c_{m-1,0,0} & \cdots & w_{m-1,0,0}^{(0,1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline w_{m-1,0,0}^{(1,0)} & \cdots & w_{m-1,0,0}^{(1,1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} [A]_{\phi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & [A]_{\phi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \\ \hline [A]_{\psi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & [A]_{\psi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \end{array} \right]$$

Dicha matriz se divide en cuatro submatrices:

- Los valores de c_{m-1} , es decir, las coordenadas para $V_{m-1} \oplus V_{m-1}$. Se ubican en la esquina superior izquierda.
- Los valores de $w_{m-1}^{(0,1)}$, es decir, las coordenadas para $W_{m-1}^{(0,1)}$. Se ubican en la esquina superior derecha.
- Los valores de $w_{m-1}^{(1,0)}$, es decir, las coordenadas para $W_{m-1}^{(1,0)}$. Se ubican en la esquina inferior izquierda.
- Los valores de $w_{m-1}^{(1,1)}$, es decir, las coordenadas para $W_{m-1}^{(1,1)}$. Se ubican en la esquina inferior derecha.

Los valores $w_{m-1}^{(i,j)}$ son como en la situación unidimensional, a menudo denominados coeficientes Wavelet.

Fusión de imágenes

Imágenes digitales

El término imagen se refiere a una función bidimensional de la luz y la intensidad, indicada por $f(x, y)$, donde x, y son las coordenadas espaciales y $f(x, y)$ la intensidad de la imagen en ese punto. Se denomina nivel de gris de la imagen en el punto $f(x, y)$ a la intensidad de una imagen monocromática f en las coordenadas (x, y) , dicho nivel de gris toma valores en el intervalo $[0, 255]$ al cual se le denomina escala de grises, donde 0 se considera como negro, mientras que 255 será blanco.

El proceso de digitalización de una imagen consiste en tomar la función de imagen $f(x, y)$ y digitalizarla tanto en sus coordenadas espaciales (x, y) como su amplitud $f(x, y)$, al primer proceso se le conoce como muestreo de la imagen mientras que al segundo cuantificación del nivel de gris.

De esta manera una imagen continua $f(x, y)$ se describe de forma aproximada por una serie de muestras igualmente espaciadas y organizadas en forma de una matriz $M \times N$, donde cada entrada de la matriz es una cantidad discreta.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{pmatrix}$$

Se entenderá que el valor $f(x, y)$ da la información de nivel de gris en el punto (x, y) . Así, desde un punto de vista matemático, una imagen digital será una matriz de tamaño $M \times N$ con valores entre 0 y 255.

El proceso de combinar varias imágenes de una entrada en una sola imagen de salida se conoce como fusión de imágenes donde cada imagen proporciona un elemento que contribuye a una interpretación global de la escena de interés. En la actualidad la investigación en fusión de imágenes se centra en la obtención de métodos eficientes para realizar la fusión.

La imagen obtenida tiene el fin de mejorar la información sobre el fenómeno o escena a analizar, de esta manera la fusión de imágenes se utiliza para ayudar a la toma de decisiones de situaciones complejas y generalmente mal formalizadas.

La fusión de imágenes se puede expresar mediante el siguiente diagrama:

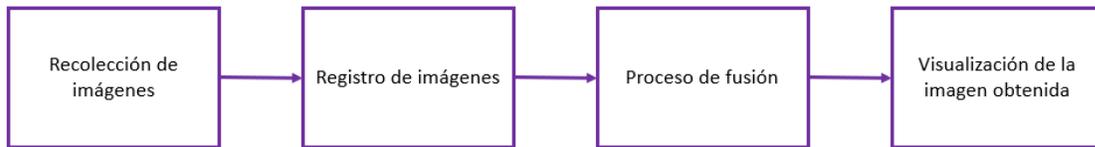


Figura 6: Diagrama del proceso de fusión de imágenes

Registro de imágenes

El registro de imágenes es el proceso de alinear dos o más imágenes de la misma escena. Este proceso implica designar una imagen como imagen de referencia, también denominada imagen fija, para posteriormente aplicar transformaciones geométricas o desplazamientos locales a las otras imágenes para que se alineen con la imagen de referencia. Las imágenes pueden estar desalineadas por una variedad de razones, algunas son las condiciones de la cámara o el contenido de la escena.

Existen diferentes enfoques para realizar el registro de imagen, los principales son: la aplicación interactiva de estimador de registro, registro automático de imágenes basado en la intensidad y el registro de puntos de control. Este último permite seleccionar entidades

comunes en cada imagen manualmente, es útil en aquellas situaciones donde:

- Se desea priorizar la alineación de entidades específicas en lugar de todo el conjunto de entidades detectadas mediante la detección automatizada de características.
- Las imágenes tienen patrones repetidos que proporcionan una asignación poco clara mediante la coincidencia automatizada de entidades.

El registro de puntos de control puede aplicar muchos tipos de transformaciones a la imagen en movimiento como transformaciones globales y transformaciones no rígidas, las primeras actúan sobre todo la imagen de manera uniforme que incluyen transformaciones geométricas afines proyectivas y polinómica, mientras que las transformaciones no rígidas actúan en regiones locales e incluyen transformaciones medias ponderadas por pieza lineales a locales.

Matlab permite realizar el registro de imágenes mediante registro de puntos de control, este proporciona herramientas para admitir la designación de puntos para determinar los parámetros de la forma necesaria para alinear la imagen con otra. La asignación de puntos se da al elegir un par de puntos en las imágenes que identifican la misma entidad, puntos de referencia, luego se deduce la asignación geométrica de las posiciones de estos puntos de control.

Proceso de fusión

A continuación se da una breve explicación del proceso de fusión de imágenes mediante el uso de Wavelets, consta de tres pasos y será explorado a detalle más adelante.

1. Descomponer las imágenes que serán fusionadas en la misma base Wavelet: Al igual que en las señales 1D se obtendrá la descomposición en una suma de señales ortogonales correspondientes a diferentes escalas de visualización o resolución por medio de la TWD

$$I = A_1 + D_1 = \dots = A_j + D_j + D_{j+1} + D_{j+2} + \dots$$

La descomposición se hace a lo largo de tres direcciones de los espacios de detalle, esto es:

$$A_{j+1} = A_j + D_j = A_j + [(D_h)_j + (D_r)_j + (D_d)_j]$$

donde D_h son los detalles horizontales, D_v los detalles verticales y D_d los detalles diagonales

- Realizar la fusión de imágenes por promedio simple:

Es una técnica básica y directa que permite que la fusión se almacene simplemente promediando los píxeles correspondientes en cada una de los detalles obtenidos, es decir:

$$(D_h)_f = \frac{(D_h)_1 + (D_h)_2}{2}$$

$$(D_v)_f = \frac{(D_v)_1 + (D_v)_2}{2}$$

$$(D_d)_f = \frac{(D_d)_1 + (D_d)_2}{2}$$

- Utilizar la Transformada Wavelet Discreta Inversa para construir la nueva imagen fusionada.

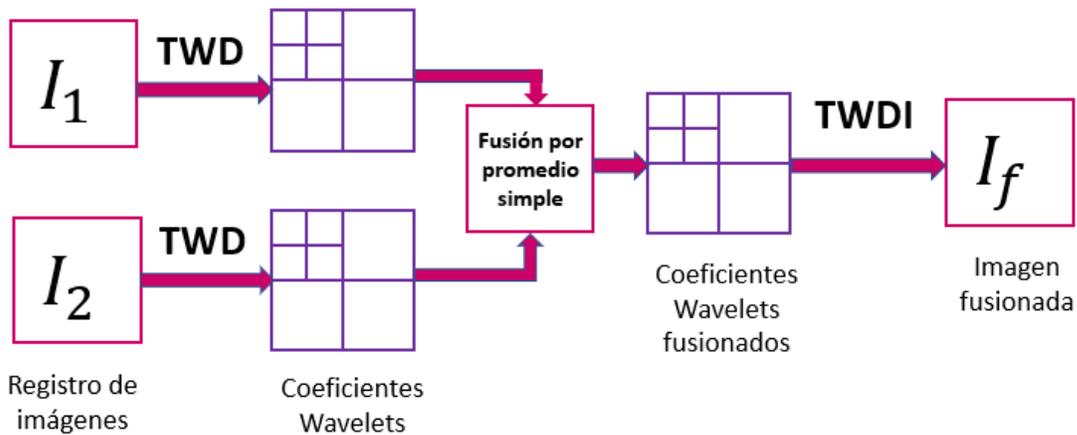


Figura 7: Diagrama del proceso de fusión con Wavelets

Descomposición

El algoritmo de descomposición para el caso de las imágenes (señales 2D) es similar en cierta medida al usado para señales 1D, como se vio en el capítulo anterior es posible descomponer una señal de un espacio bidimensional $V_m \otimes V_m$ haciendo uso del producto tensorial, con esto se obtendrán cuatro espacios vectoriales, uno de aproximación y tres de detalle correspondientes a los detalles verticales, horizontales y diagonales.

$$V_m \otimes V_m = (V_{m-1} \otimes V_{m-1}) \oplus W_{m-1}^{(0,1)} \oplus W_{m-1}^{(1,0)} \oplus W_{m-1}^{(1,1)}.$$

A continuación se muestra la descomposición de una imagen en los correspondientes espacios de detalle en un primer nivel.



Figura 8: Descomposición en detalles horizontales, verticales y diagonales

La matriz obtenida en el capítulo puede ser interpretada como sigue:

- En la esquina superior izquierda, se capturan variaciones lentas tanto en dirección vertical como horizontal, es decir, esta es una versión de baja resolución de la imagen.
- En la esquina superior derecha se capturan variaciones lentas en la dirección vertical, junto con cambios bruscos en la dirección horizontal.
- En la esquina inferior izquierda se capturan variaciones lentas en la dirección horizontal, junto con cambios bruscos en la dirección vertical.
- En la esquina inferior derecha se capturan cambios bruscos en ambas direcciones.

De manera que se puede ver como:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & (D_v)_1 \\ \hline (D_h)_1 & (D_d)_1 \end{array} \right)$$

Dicha interpretación matricial motiva la representación de los diferentes niveles de descomposición.

A_2	$(D_v)_2$	$(D_v)_1$
$(D_h)_2$	$(D_d)_2$	
$(D_h)_1$		$(D_d)_1$

Figura 9: Representación del algoritmo de descomposición en nivel 2

En el nivel 2, los coeficientes de detalle $(D_v)_1, (D_h)_1, (D_d)_1$ se preservan y los coeficientes de aproximación A_1 son descompuestos nuevamente

Implementación algorítmica en Matlab

Algoritmo de la Transformada Wavelet de una imagen en el nivel 2

La Transformada Wavelet Discreta representada como una transformación ortogonal para una señal c unidimensional usando la base de Haar se puede obtener de manera eficiente mediante $Wc = \bar{d}$ como se vio en el ejemplo 3 de la sección 2. Como se menciona al principio de este capítulo, una imagen es un arreglo matricial de tamaño $M \times N$, en el caso de las imágenes en blanco y negro se tendrán matrices cuadradas de tamaño 256×256 , el

proceso de obtener la TWD de una señal unidimensional puede ser interpretado como el proceso de obtener la TWD para una columna en específico, dicho esto a continuación se describen los pasos a seguir para obtener la TWD de una imagen I .

- Paso 1: Se obtiene la matriz W para obtener la TWD en el nivel dos como en el ejemplo 3 de la sección 2.
- Paso 2: Se aplica la matriz W a todas las columnas de la imagen I mediante el producto WI .
- Paso 3: Se transpone WI , de manera que $(WI)^t$ tendrá a en sus columnas a los renglones de WI .
- Paso 4: Se aplica la matriz W a $(WI)^t$.
- Paso 5: Se traspone el resultado final con lo que se tendrán filas transformadas y con ello la imagen transformada por W , I_{tr} , es decir;

$$I_{tr} = (W(WI)^t)^t = WIW^t$$

Dado que la matriz W es ortogonal se puede obtener la transformada inversa mediante $W^t I_{tr} W$.

Así podemos definir las aplicaciones siguientes:

$$T_{img} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$$

$$I \longmapsto WIW^t$$

$$T_{img}^{-1} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$$

$$J \longmapsto W^t JW$$

las cuales satisfacen:

$$\begin{aligned}
(T_{img}^{-1})(T_{img})(I) &= T_{img}^{-1}(T_{img}(I)) \\
&= T_{img}^{-1}(W I W^t) \\
&= W^t (W I W^t) W \\
&= (W^t W) I (W^t W) \\
&= I_M I I_M \\
&= I
\end{aligned}$$

El algoritmo descrito con anterioridad comienza aplicándose a cada columna de la matriz que representa a la imagen I sin embargo se puede comenzar aplicándose a cada una de las filas que componen la matriz, esto da como resultado una parte L de baja resolución y una parte H de alta resolución

$$\left[L \mid H \right]$$

posteriormente se aplica la transformada W en las columnas de este resultado, generando así el siguiente cuadrado

$$\left[\begin{array}{c|c} LL & LH \\ \hline HL & HH \end{array} \right]$$

donde LL serán los coeficientes de aproximación gruesa de la imagen, HH los detalles diagonales de la imagen mientras que HL serán los detalles horizontales y LH los detalles verticales. Esta aplicación es conocida como Transformada Cuadrada Wavelet

Proceso iterativo de la Transformada Wavelet para la descomposición

En la transformada cuadrada se tienen representación de la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} LL & LH \\ \hline HL & HH \end{array} \right]$$

Para pasar a un paso dos de descomposición solo se aplica la descomposición a la matriz correspondiente a LL . Así el segundo paso no se puede describir mediante operaciones de fila y columna en la imagen J resultado de la aplicación $T_{img}(I)$. Es necesario "sacar" la parte LL explícitamente y subdividir solo esta parte.

Definición 24. Dadas las matrices $X_m = [A]_{\phi_m \otimes \phi_m}$, $Y_m = A_m X_m A_m^t = [A]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} \in V_m \otimes V_m$, donde $A_m = [I_{V_m}]_{\phi_m}^{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})}$ y $\widetilde{V} := V_m \otimes V_m = (V_{m-1} \otimes V_{m-1}) \oplus W_{m-1}^{(0,1)} \oplus W_{m-1}^{(1,0)} \oplus W_{m-1}^{(1,1)}$ se definen las siguientes proyecciones ²:

$$Proy_{\widetilde{V}_{m-1}} : \widetilde{V}_m \longrightarrow \widetilde{V}_{m-1}$$

$$X_m \longmapsto X_{m-1} = H X_m H^t = [A \upharpoonright_{V_{m-1} \otimes V_{m-1}}]_{\phi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}}$$

$$Proy_{W_{m-1}^{(1,0)}} : \widetilde{V}_m \longrightarrow W_{m-1}^{(1,0)}$$

$$X_m \longmapsto w_{m-1}^{(1,0)} = H X_m G^t = [A \upharpoonright_{W_{m-1}^{(1,0)}}]_{\phi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}}$$

$$Proy_{W_{m-1}^{(0,1)}} : \widetilde{V}_m \longrightarrow W_{m-1}^{(0,1)}$$

$$X_m \longmapsto w_{m-1}^{(0,1)} = G X_m H^t = [A \upharpoonright_{W_{m-1}^{(0,1)}}]_{\psi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}}$$

$$Proy_{W_{m-1}^{(1,1)}} : \widetilde{V}_m \longrightarrow W_{m-1}^{(1,1)}$$

$$X_m \longmapsto w_{m-1}^{(1,1)} = G X_m G^t = [A \upharpoonright_{W_{m-1}^{(1,1)}}]_{\psi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}}$$

Donde H y G son los operadores de detalle y aproximación definidos en el capítulo 2

De esta manera se cumple para la matriz Wavelet lo siguiente:

²Las proyecciones anteriores son en termino del isomorfismo de $\widetilde{V}_m \approx \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ donde $k = \dim(V_m) = 2^{m-1}N$.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c} [A]_{\phi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & [A]_{\phi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \\ \hline [A]_{\psi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & [A]_{\psi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} [A]_{\phi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & [A]_{\phi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \\
&+ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [A]_{\psi_{m-1} \otimes \phi_{m-1}} & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & [A]_{\psi_{m-1} \otimes \psi_{m-1}} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} X_{m-1} & w_{m-1}^{(0,1)} \\ \hline w_{m-1}^{(1,0)} & w_{m-1}^{(1,1)} \end{array} \right] \quad (1) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} LL & LH \\ \hline HL & HH \end{array} \right] \\
&= [A]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})}
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $W = A_m$ es la matriz de la Transformada Wavelet aplicada columnas para una imagen digital A cuya matriz es X_m , esto es

$$\begin{aligned}
A &= X_m \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{2^m N} c_{m, n_1, n_2} (\phi_{m, n_1} \otimes \phi_{m, n_2}) + w_{m, n_1, n_2}^{(0,1)} (\phi_{m, n_1} \otimes \psi_{m, n_2}) + \\
&\quad w_{m, n_1, n_2}^{(1,0)} (\psi_{m, n_1} \otimes \phi_{m, n_2}) + w_{m, n_1, n_2}^{(1,1)} (\psi_{m, n_1} \otimes \psi_{m, n_2})
\end{aligned}$$

donde $A \in \widetilde{V}_m \subseteq L^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
T_{img}(I) &= W I W^t \\
&= Y_m \\
&= [A]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} \\
&= A_m X_m A_m^t \\
&= [I_{V_m}]_{\phi_m}^{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} [A]_{\phi_m \otimes \phi_m} [I_{V_m}]_{\phi_m}^{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})}
\end{aligned}$$

esto es

$$A = \sum_{n_1, n_2=0}^{2^{m-1}N} \left(c_{m-1, n_1, n_2} (\phi_{m-1, n_1} \otimes \phi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(0,1)} (\phi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(1,0)} (\psi_{m-1, n_1} \otimes \phi_{m-1, n_2}) + w_{m-1, n_1, n_2}^{(1,1)} (\psi_{m-1, n_1} \otimes \psi_{m-1, n_2}) \right)$$

es decir, en términos de vectores coordenados

$$\begin{aligned} X_m &= \text{Proy}_{\widetilde{V}_{m-1}}(X_m) + \text{Proy}_{W_{m-1}^{(0,1)}}(X_m) + \text{Proy}_{W_{m-1}^{(1,0)}}(X_m) + \text{Proy}_{W_{m-1}^{(1,1)}}(X_m) \\ &= X_{m-1} \oplus w_{m-1}^{(0,1)} \oplus w_{m-1}^{(1,0)} \oplus w_{m-1}^{(1,1)} \quad 3 \\ &= HX_m H^t + HX_m G^t + GX_m H^t + GX_m G^t \end{aligned}$$

De esta manera los coeficientes ahora están ordenados en matrices y se pueden calcular mediante recursión de las matrices X_{m-1} , $w_{m-1}^{(0,1)}$, $w_{m-1}^{(1,0)}$, $w_{m-1}^{(1,1)}$, esto es:

$$X_{m-1} = HX_m H^t \text{ Parte } LL$$

$$w_{m-1}^{(0,1)} = HX_m G^t \text{ Parte } LH$$

$$w_{m-1}^{(1,0)} = GX_m H^t \text{ Parte } HL$$

$$w_{m-1}^{(1,1)} = GX_m G^t \text{ Parte } HH$$

Estas formulas de recursión permiten pasar del espacio de aproximación \widetilde{V}_m a un espacio de resolución inferior \widetilde{V}_{m-1} y cada una de las matrices correspondientes a LL , LH , HL , HH posee la mitad del número de filas y la mitad del número de columnas de X_m por lo que cada una contiene una cuarta parte de la información.

Proceso iterativo de la Transformada Wavelet para la reconstrucción

$$[A]_{\phi_m \otimes \phi_m} = [I_{V_m}]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} [A]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1}) \otimes (\phi_{m-1}, \psi_{m-1})} \left([I_{V_m}]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})}^{\phi_m} \right)^t$$

$$T_{img}^{-1}(Y) = W^t Y W = X = B_m Y_m B_m^t, \quad B_m = [I_{V_m}]_{(\phi_{m-1}, \psi_{m-1})}^{\phi_m}$$

donde

$$Y = X_{m-1} \oplus w_{m-1}^{(1,0)} \oplus w_{m-1}^{(0,1)} \oplus \omega_{m-1}^{(1,1)}$$

entonces

$$\begin{aligned} T_{img}^{-1}(Y) &= W^t Y W \\ &= W^t \left(\left[\begin{array}{c|c} X_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & w_{m-1}^{(1,0)} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline w_{m-1}^{(0,1)} & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \omega_{m-1}^{(1,1)} \end{array} \right] \right) W \\ &= H^t X_{m-1} H + G^t w_{m-1}^{(1,0)} H + H^t w_{m-1}^{(0,1)} G + G^t w_{m-1}^{(1,1)} G \\ &= X_m \end{aligned}$$

esto es; la reconstrucción iterativa esta dada por

$$X_m = H^t X_{m-1} H + G^t w_{m-1}^{(1,0)} H + H^t w_{m-1}^{(0,1)} G + G^t w_{m-1}^{(1,1)} G$$

Ejecución en Matlab

Matlab es una de las mejores aplicaciones disponibles para el desarrollo de la Teoría Wavelet, esto debido a la capacidad computacional para generar datos así como para desplegarlos en una variedad de representaciones gráficas, dicho software posee un toolbox especializado para la aplicación de la Teoría Wavelet, debido a las múltiples aplicaciones de la teoría dicha herramienta es útil en la implementación en diferentes campos. Para el desarrollo del algoritmo explicado en la sección anterior se utilizó funciones de dicho toolbox las cuales simplificaron el proceso de programación del algoritmo.

El algoritmo permite realizar la descomposición de una imagen, la cual genera como salidas las representaciones gráficas de los coeficientes resultantes de la Transformada Wavelet de la imagen, los cuales serán de aproximación y detalles verticales, horizontales y diagonales, además el algoritmo permite iterarse sobre la imagen obtenida con los coeficientes de aproximación resultantes, logrando así un segundo nivel de Análisis Wavelet de

la imagen.

A continuación se muestra mediante un ejemplo la descomposición con la transformada cuadrada para una imagen '*Cameraman*'



Figura 10: Imagen original '*Cameraman*'

Se comienza aplicando la transformada Wavelet a las filas de la matriz correspondiente a la imagen digital '*Cameraman*', lo cual da como resultado una parte L de baja resolución (Figura 11) y una parte H de alta resolución (Figura 12).

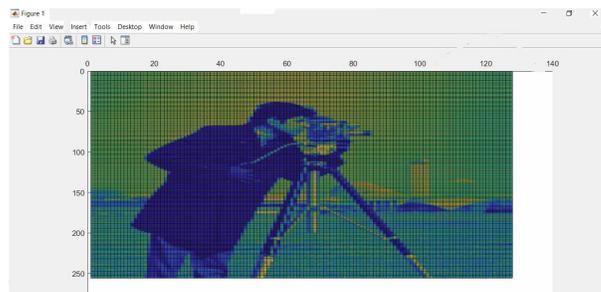


Figura 11: Parte de baja resolución L

Estas cambian de tamaño de manera que la imagen original de tamaño 256×256 se transforma en dos imágenes de tamaño 256×128 .



Figura 12: Parte de alta resolución H

Posteriormente se aplica la Transformada Wavelet a las columnas correspondientes a la parte L de baja resolución generando las imágenes LL (Figura 13) y HL (Figura 14) correspondientes a los coeficientes de aproximación y detalles horizontales.

Observe que estas nuevas imágenes cambian de tamaño, es decir, la imagen de tamaño

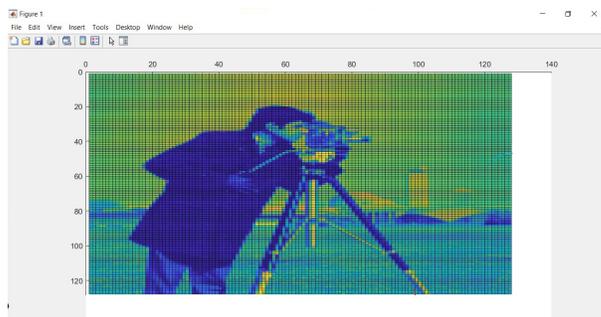


Figura 13: Transformada Wavelet aplicada a columnas LL, aproximación gruesa



Figura 14: Transformada Wavelet aplicada a columnas HL, detalles horizontales

256×128 se transformo en dos imágenes de tamaño 128×64 .

El siguiente paso consta de aplicar la Transformada Wavelet a las columnas de la parte H de alta resolución, generando las imágenes de tamaño 128×64 correspondientes a los detalles verticales LH (Figura 15) y diagonales HH (Figura 16).

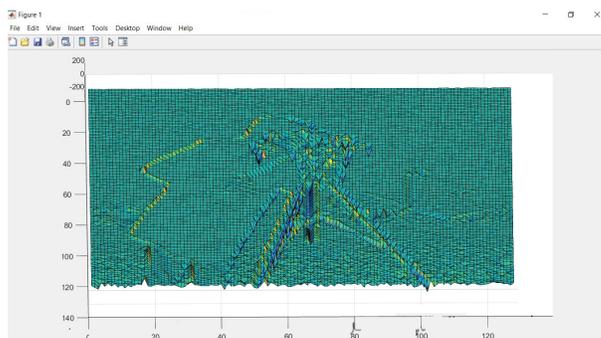


Figura 15: Transformada Wavelet aplicada a columnas LH, detalles verticales

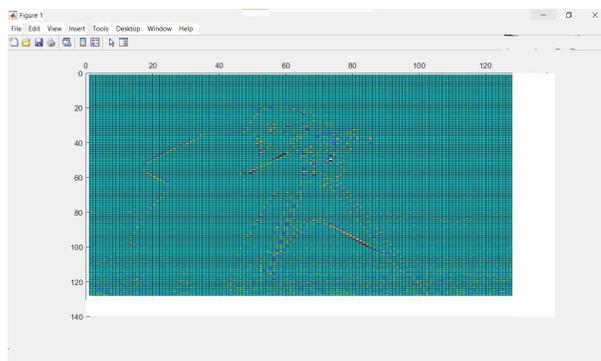


Figura 16: Transformada Wavelet aplicada a columnas HH, detalles diagonales

Finalmente para pasar un nivel de descomposición superior se aplica iteración sobre la imagen correspondiente a la aproximación gruesa LL realizando los pasos descritos anteriormente, la cual se representa en la figura 17.

El proceso de la transformada cuadrada aplicada a una imagen se puede apreciar en el diagrama dado en la figura 18.

A continuación se muestra el código que se implemento para la descomposición de la imagen.

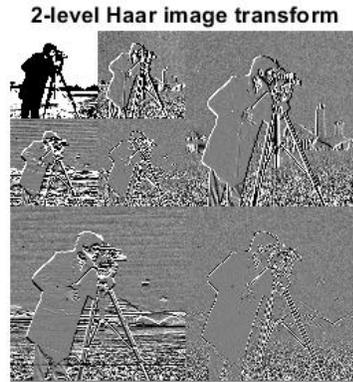


Figura 17: Descomposición al nivel 2 de la imagen "cameraman"

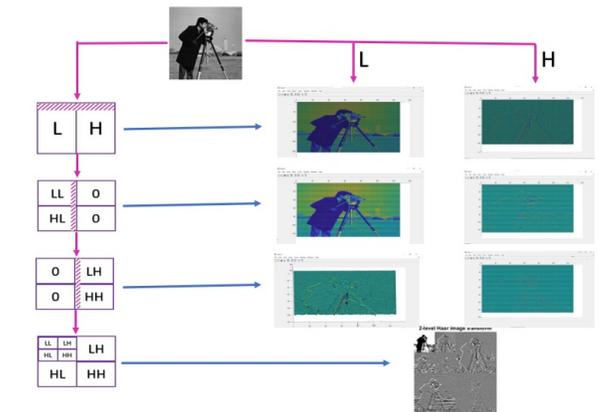


Figura 18: Transformada cuadrada aplicada a una imagen

```

ufg=imread('cameraman.tif'); %lee el archivo de imagen en una matriz
fg=double(ufg); %convertir a flotante
x=fg-mean(mean(fg));
[Nr,Nc]=size(fg);
tfg=zeros(Nr,Nc); %genera el espacio para el plano wavelet
%(A) =====
v=zeros(256,256);
%Inicia el analisis Wavelet-----
% Transformacion de imagen con wavelet Haar en el nivel 2
c=1/sqrt(2);
    
```

```

fg=x+v;
figure(1)
imshow(fg,[min(min(fg)),max(max(fg))]);
xfg=fg;
%Nivel 1-----
%Paso 1
N=256; M=128;
% Transformada wavelet de escala 1 de filas
lfg1=zeros(N,M); hfg1=zeros(N,M);
for nn=1:N,
auxL=fg(nn,1:2:N)+fg(nn,2:2:N);
auxH=fg(nn,1:2:N)-fg(nn,2:2:N);
lfg1(nn,1:M)=c*auxL; hfg1(nn,1:M)=c*auxH;
end;
%Paso 2
%Transformada wavelet de escala 1 de las columnas del paso anterior
llfg1=zeros(M,M); hlfg1=zeros(M,M);
hhfg1=zeros(M,M); lhfg1=zeros(M,M);
%Columnas de L
for nn=1:M,
auxL=lfg1(1:2:N,nn)+lfg1(2:2:N,nn);
auxH=lfg1(1:2:N,nn)-lfg1(2:2:N,nn);
llfg1(1:M,nn)=c*auxL; %image LL
hlfg1(1:M,nn)=c*auxH; %image HL
end;
%columnas de H
for nn=1:M,
auxL=hfg1(1:2:N,nn)+hfg1(2:2:N,nn);
auxH=hfg1(1:2:N,nn)-hfg1(2:2:N,nn);
lhfg1(1:M,nn)=c*auxL; %image LH

```

```

hhfg1(1:M,nn)=c*auxH; %image HH
end;
%se guarda en el plano Wavelet
tfg(1:M,M+1:N)=lhfg1;
tfg(M+1:N,1:M)=hlfgh1; tfg(M+1:N,M+1:N)=hhfg1;
%Nivel 2-----
fg=llfg1;
%Paso 1
N=128; M=64;
%Transformada wavelet de escala 1 de filas
lfg2=zeros(N,M); hfg2=zeros(N,M);
for nn=1:N,
auxL=fg(nn,1:2:N)+fg(nn,2:2:N);
auxH=fg(nn,1:2:N)-fg(nn,2:2:N);
lfg2(nn,1:M)=c*auxL; hfg2(nn,1:M)=c*auxH;
end;
%Paso 2
%Transformada wavelet de escala 1 de las columnas del paso anterior
llfg2=zeros(M,M); hlfg2=zeros(M,M);
hhfg2=zeros(M,M); lhfg2=zeros(M,M);
%columnas de L
for nn=1:M,
auxL=lfg2(1:2:N,nn)+lfg2(2:2:N,nn);
auxH=lfg2(1:2:N,nn)-lfg2(2:2:N,nn);
llfg2(1:M,nn)=c*auxL; %image LL
hlfg2(1:M,nn)=c*auxH; %image HL
end;
%columnas de H
for nn=1:M,
auxL=hlfg2(1:2:N,nn)+hlfg2(2:2:N,nn);

```

```

auxH=hfg2 (1:2:N,nn)-hfg2 (2:2:N,nn);
lhfg2 (1:M,nn)=c*auxL; %image LH
hhfg2 (1:M,nn)=c*auxH; %image HH
end;
%se guarda en el plano wavelet
tfg (1:M,1:M)=llfg2; tfg (1:M,M+1:N)=lhfg2;
tfg (M+1:N,1:M)=hlfg2; tfg (M+1:N,M+1:N)=hhfg2;
%(B) =====
% visualizacion del resultado del analisis-----
% Plano wavelet total
figure(3)
imshow(tfg,[-20 20]);
title('Transformada Wavelet Haar de la imagen en nivel 2');
surf(lhfg1)
surf(lhfg2)
surf(lfg1)
figure(4)
imshow(llfg2,[min(min(llfg2)),max(max(llfg2))]);
title('LL2, Transformacion Haar de la imagen');
figure(5)
title('LL2, Transformacion Haar de la imagen');
%=====

```

El siguiente código muestra al implementación para la reconstrucción de la imagen descompuesta.

```

%(C) =====
% Sintesis Wavelet-----
rfg=zeros(256,256); %espacio para la imagen
%recuperacion desde el nivel 2-----
%
```

```

N=128; M=64;
%recuperacion de L
for nn=1:M,
auxL (1:2:N)=llfg2 (1:M, nn)+hlf2 (1:M, nn);
auxL (2:2:N)=llfg2 (1:M, nn)-hlf2 (1:M, nn);
lfg2 (1:N, nn)=c*auxL; %imagen L
end;
%recuperacion de H
for nn=1:M,
auxH (1:2:N)=lhfg2 (1:M, nn)+hhfg2 (1:M, nn);
auxH (2:2:N)=lhfg2 (1:M, nn)-hhfg2 (1:M, nn);
hfg2 (1:N, nn)=c*auxH; %imagen H
end; %recuperacion del original
for nn=1:N,
auxL (1:2:N)=lfg2 (nn, 1:M)+hfg2 (nn, 1:M);
auxL (2:2:N)=lfg2 (nn, 1:M)-hfg2 (nn, 1:M);
rfg (nn, 1:N)=c*auxL; %imagen H
end;
llfg1=rfg;
%recuperacion desde el nivel 1-----
%
N=256; M=128;
%recuperacion de L
for nn=1:M,
auxL (1:2:N)=llfg1 (1:M, nn)+hlf1 (1:M, nn);
auxL (2:2:N)=llfg1 (1:M, nn)-hlf1 (1:M, nn);
lfg1 (1:N, nn)=c*auxL; %imagen L
end;
%recuperacion de L
for nn=1:M,

```

```

auxH(1:2:N)=lhfg1(1:M,nn)+hhfg1(1:M,nn);
auxH(2:2:N)=lhfg1(1:M,nn)-hhfg1(1:M,nn);
hfg1(1:N,nn)=c*auxH; %imagen H
end;

%recuperacion del original
for nn=1:N,
auxL(1:2:N)=lfg1(nn,1:M)+hfg1(nn,1:M);
auxL(2:2:N)=lfg1(nn,1:M)-hfg1(nn,1:M);
rfg(nn,1:N)=c*auxL'; %image H
end;

% visualizacion -----
figure(2)
imshow(rfg,[min(min(rfg)),max(max(rfg))]);
title('recuperacion del original ');

```

Por otro lado el software Matlab permite a través su Toolbox Wavelet en su App *Wavelet Analyzer* obtener la fusión de dos imágenes con la Transformada Haar y aplicando el promedio entre los coeficientes aproximación y detalles horizontales, verticales y diagonales de ambas imágenes.

De esta forma se realizó la fusión de las imágenes '*Cameraman*' y '*CuadroMagico*'



Figura 19: Cameraman

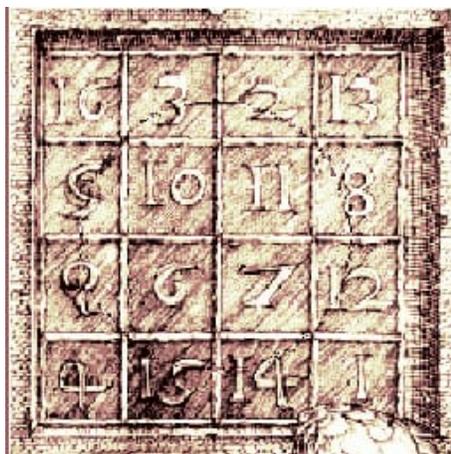


Figura 20: CuadroMagico

En la figura 21 se muestra el entorno donde se realiza la fusión y en la figura 22 la imagen fusionada de salida

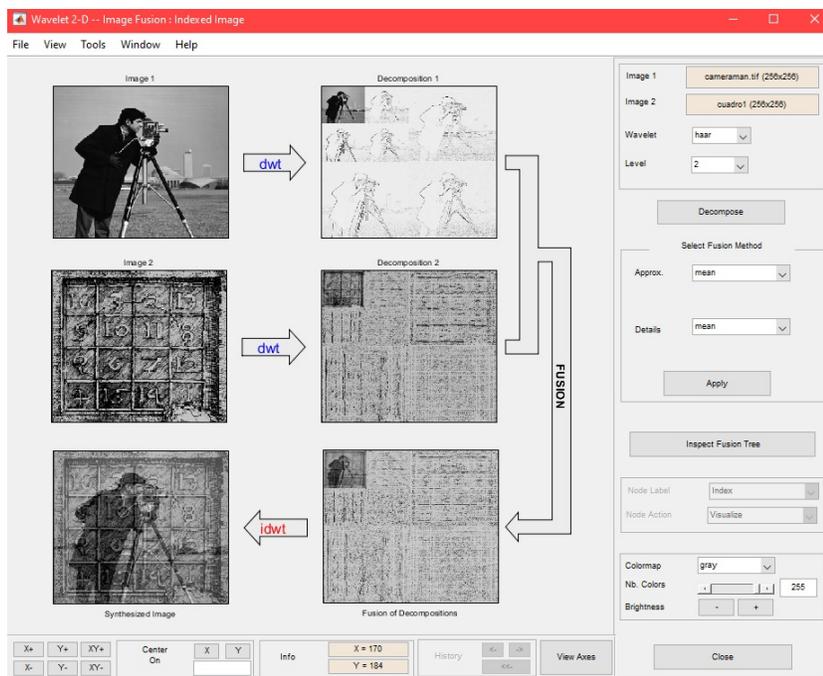


Figura 21: Fusión de dos imágenes mediante Matlab



Figura 22: Imagen fusionada de salida

Conclusiones y perspectivas

Durante el desarrollo del presente trabajo se abordó de manera eficiente la Teoría Wavelet analizando los principales temas que son necesarios en procesamiento de imágenes, entre los aportes realizados se proporcionaron las demostraciones que verifican las relaciones entre coeficientes de aproximación y detalle definidos de distintas maneras pero que son comunes en la literatura especializada, dando así claridad a las diferentes maneras de plantear una misma teoría, se proporcionó un enfoque detallado de las condiciones necesarias para obtener una Transformada Wavelet discreta que pudiera ser invertible y se mostró de manera precisa dos enfoques desde los cuales es interpretada la Transformada Wavelet Discreta. Se estudio el producto tensorial y se alcanzó de forma eficiente la extensión de una teoría unidimensional a bidimensional para así finalmente cumplir con el objetivo de este trabajo mostrando el Proceso de Fusión de imágenes mediante el uso de la Wavelet Haar.

En este trabajo solo se utilizó la Wavelet Haar, por lo que, el análisis de la fusión de imágenes con otras familias Wavelet, así como la exploración en otros niveles de descomposición son temas que pueden ser abordados en trabajos posteriores, esto debido a la riqueza teórica y de implementación algorítmica que posee la Teoría Wavelet, a su vez el planteamiento de considerar detalles en diferentes direcciones a las tratadas en esta tesis como son 15° , 105° , 75° , etc. es un tema de posible investigación futura.

Cabe mencionar que a pesar de las ventajas que ofrece la Transformada Wavelet comparada con la Transformada de Fourier, está posee a su vez limitaciones en el procesamiento de señales como lo es la ausencia de invarianza en los desplazamientos, ya que puede generar distorsiones en la salida de la fusión, por lo que la solución de dicha limitación es un tema

de estudio para trabajos futuros.

Apéndice

Transformadas de Fourier

Se define $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$, para $1 \leq p < \infty$ como el espacio de funciones $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ medibles tales que $|f|^p$ es integrable, en dicho espacio se define la seminorma para $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ como:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Así el espacio $L^p(\mathcal{X})$ será el espacio cociente de $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ con el subespacio de las funciones medibles y equivalentes a 0, es decir, el espacio de las clases de equivalencia con norma $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

De esta manera, dependiendo del conjunto \mathcal{X} y del valor de p se obtendrán distintos espacios de medida. A partir de esto se hará un breve estudio de la Transformada de Fourier para diferentes espacios.

	Transformada de Fourier	Transformada inversa de Fourier
$F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$	$F(\omega) = \langle e^{-i\omega t}, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ $\omega \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$	$f(t) = \langle e^{i\omega t}, F \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $\omega \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$
$F : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$	$F(z) = \langle z^k, f \rangle_{l^2(\mathbb{Z})}$ $F(e^{i\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\omega}$ $z \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = \langle z^{-n}, F \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ $f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\omega}) e^{in\omega} d\omega$ $z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}$
$F : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2_{2\pi}$	$F(\omega) = \langle e^{ik\omega}, f \rangle_{l^2(\mathbb{Z})}$ $\omega \in [-\pi, \pi], k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = \langle e^{-in\omega}, F \rangle_{L^2_{2\pi}}$ $\omega \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{Z}$
$F : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$	$F_k = \langle \frac{1}{N} e^{ikn\frac{2\pi}{N}}, f \rangle_{\mathbb{C}^N}$ $F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink\frac{2\pi}{N}}$ $(f_n)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ $k, n \in \{0, \dots, N-1\}$	$f_n = \langle e^{-ikn\frac{2\pi}{N}}, F \rangle_{\mathbb{C}^N}$ $f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink\frac{2\pi}{N}}$ $k, n \in \{0, \dots, N-1\}$
$F : L^2_T \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$	$F_k = \langle e^{ikt\frac{2\pi}{T}}, f \rangle_{L^2_T}$ $F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ikt\frac{2\pi}{T}} dt$ $k \in \mathbb{Z}, t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$	$f(t) = \langle e^{-ikt\frac{2\pi}{T}}, F \rangle_{l^2(\mathbb{Z})}$ $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k e^{ikt\frac{2\pi}{T}}$ $k \in \mathbb{Z}, t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

Transformada Wavelet Continua

En esta sección se define rigurosamente la Transformada Wavelet continua (CWT) de una función unidimensional y se analizan algunas de sus propiedades fundamentales. El CWT se puede definir como un mapeo W_g que depende de la especificación de una función auxiliar g denominada Wavelet de análisis. Dada una Wavelet de análisis específica g , la CWT puede pensarse en términos de la representación de una señal con respecto a la familia de Wavelets generada por g , es decir, todas sus versiones traducidas y dilatadas. Como se discutió anteriormente, existe una gran flexibilidad en la elección de analizar la Wavelet g .

Definición 25. Para un espacio de Hilbert \mathcal{H} , la TWC puede ser definida como un mapeo $W_g : \mathcal{H} \mapsto W_g(\mathcal{H})$ parametrizado por una función g . Más específicamente, la TWC es una

función unidimensional $f \in L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$\begin{aligned} W_g : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow W_g(L^2(\mathbb{R})) \\ f &\mapsto \langle f, \tau_t D_s g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

donde $\tau_t D_s g$ es una versión dilatada (por s) y trasladada (por t) de g dada explícitamente como

$$(\tau_t D_s, g)(\sigma) = s^{1/2} g(s(t - \sigma))$$

Por lo tanto, la TWC de una señal unidimensional es una función bidimensional de las variables reales tiempo t y escala $s \neq 0$ y se puede escribir como

$$(W_s f)(t, s) \triangleq (f, \tau_t D_s g) = (f * D_s \tilde{g})(t).$$

Teorema 25 (Propiedades). Sean a y b números reales arbitrarios y f, f_1 y f_2 funciones arbitrarias de $L^2(\mathbb{R})$. La TWC W_g , con respecto a una Wavelet de análisis admisible g , satisface las siguientes propiedades.

1. (Linealidad) $(W_g (af_1 + bf_2))(t, s) = a(W_g f_1)(t, s) + b(W_g f_2)(t, s),$
2. (Invarianza en el tiempo) $(W_g (\tau_b, f))(t, s) = (W_g f)(t - b, s),$ y
3. (Dilatación) $(W_g (D_a f))(t, s) = (W_g f)(at, a^{-1}s), a \neq 0$

Linealidad e Invarianza en el tiempo

La linealidad se hereda directamente del producto interno, mientras que la invarianza temporal puede verse en el hecho de que la TWC puede interpretarse en términos de un banco de ajustadores lineales temporales. La invarianza en el tiempo es una propiedad importante en términos de reconocimiento de patrones, ya que dicta que la Transformada Wavelet de una versión retardada de una señal es una versión retardada de su Transformada Wavelet. Esta propiedad se pierde para conjuntos de muestreo fijos (discretizaciones) en el plano de escala de tiempo y es especialmente problemática para la Transformada

Wavelet Discreta.

Dilatación

Para ver la propiedad de dilatación se escribe

$$(W_g(D_u f)) \langle t, s \rangle \triangleq (D_a f \cdot \tau_t D_s g) = (f, D_{a^{-1}, \tau_t} D_s g) - (f, \tau_{at} D_{u^{-1}} s g) = (W_g f)(at, a^{-1} s)$$

.

Teorema: (Transformada Wavelet Inversa) Sea $F \in W_g(L^2(\mathbb{R}))$, $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tal que

$$C \triangleq \int_{\mathbb{R}} |\gamma|^{-1} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty;$$

y $W_g^{-1} : W_g(L^2(\mathbb{R})) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ será definida como

$$\begin{aligned} W_{g^{-1}} F &\triangleq C^{-1} \int_{\mathbf{R}} F(\cdot, s) * (D_s g) ds \\ &= C^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} F(\sigma, s) (\tau_\sigma D_s g) ds d\sigma \end{aligned}$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $F = W_g f$ entonces $f = W_g^{-1} F$.

Transformada Wavelet Discreta

El término Transformada Wavelet Discreta (TWD) se utiliza para indicar un tipo especial de muestreo de la TWC que satisface las siguientes condiciones (bastante estrictas).

1. El conjunto de muestreo discreto de escala de tiempo debe ser la cuadrícula diádica Γ_D ;
2. la familia de Wavelets $\{\tau_t D_s g\}_{(t,s) \in \Gamma_p}$ debe formar una base ortonormal para el espacio de interés; y
3. la Wavelet de análisis debe tener un soporte compacto (por lo tanto, toda la familia tiene un soporte compacto).

Referencias

- Bogges, A., y Narcowich, F. (2001). *A first course in wavelets with fourier analysis*. Prentice Hall.
- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).
- Oppenheim, G., Misiti, M., Misiti, Y., y Poggi, J. (2013). *Wavelets and their applications*. Wiley.
- Ryan, Ø. (2019). *Linear algebra, signal processing, and wavelets - a unified approach: Matlab version*. Springer International Publishing.
- Strang, G., y Nguyen, T. (1996). *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press.
- Walnut, D. (2013). *An introduction to wavelet analysis*. Birkhäuser Boston.