Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de actuaría, física y matemáticas

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Matemáticas

P R E S E N T A :

América Guadalupe Analco Panohaya

Directora de tesis

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

Puebla, Pue., octubre 2019

Haz de tu vida una matemática, suma la alegría
resta el dolor
divide los problemas
y multiplica el amor.

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Dios por su infinito amor, por fortalecerme cada día y darme siempre una oportunidad de comenzar de nuevo.
"Y mirándolos Jesús, les dijo: Para los hombres esto es imposible; más para Dios todo es posible[1]."

A mis padres Arnulfo Analco Huitlotl y Juana Panohaya Cholula quiero darles las gracias por el amor y cariño que siempre me han dado, por enseñarme a nunca rendirme a no tirar la toalla, por levantarme y secar mis lágrimas cuando me he caído, gracias por ser mis padres, aunque a veces no coincidimos en todo me siento tan orgullosa, dichosa e inmensamente feliz de ser su hija, son los mejores ¡los amo!

Les doy las gracias a mis hermanas Carolina y Gina así como a mi hermano Gustavo porque siempre me han cuidado, dado mucho amor, me han consentido, apoyado, guiado, dado consejos, me han enseñado con mucho cariño son muy buenos hermanos, los amo mucho hermanitos.

He decidido no mencionar todos los nombres de los amigos y compañeros que hice en la carrera pues son varios y tuve temor de olvidar algunos ofendiéndolos de esta manera; sin embargo, no puedo dejar pasar algunos nombres para un agradecimiento especial les agradezco mucho a Gustavo, Mizza Mizza, Marquitos, Juan, Iván, Thor, Rubén, Toñito, David, Edgar, Cristhian, Ian, Roque, Andrés, Migue, Max, Neto, Rafa, Munive, Alberto, Luis Hoyos y Misael por siempre enseñarme, cuidarme, ayudarme, apoyarme, por su cariño, amistad, los quiero mucho.

También quiero agradecerle a Sinaí, Paola, Gaby, Jaz, Yenifer, Erika, Kary, Lupita, Liz, Diana, Mireya, Lore, Andy, Nadia, Itzel, Dara y Gloria por su apoyo, cariño, sus risas por todos los momentos que pasamos juntas, su amistad las quiero mucho.

Oliver quiero agradecerte por todo lo que me enseñaste, por tu cariño, espero que logres todos tus sueños y que seas muy feliz.

Julio quiero darte las gracias por todo el apoyo que me has dado, por tu gran paciencia, cariño, por enseñarme, cuidarme, por los momentos que hemos tenido tanto buenos como malos, por tus risas, tus abrazos ¡gracias amor!

Quiero agradecerle a José Guerrero, Gerardo Amaro, Paco Anaya y a Laurita por todo el apoyo que me han dado, su cariño, sus enseñanzas, su fe, estoy infinitamente agradecida.

A mi asesora, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, le agradezco la oportunidad que me ha dado de trabajar con usted, su tiempo que me ha brindado, la dedicación que le

[1](Mt 19:26 Nueva Traducción Viviente)

hemos puesto a este trabajo, gracias por sus consejos, apoyo, cariño, comprensión, gracias por motivarme cuando me hacía falta, por sus palabras de aliento, ¡gracias!

Quiero agradecerles a mis sinodales la Dra. María Araceli Juárez Ramírez, la Dra. Honorina Ruiz Estrada y el Dr. Israel Molina Lara por sus consejos, apoyo, por tomarse el tiempo necesario para revisar este trabajo, por todas sus enseñanzas.

Al Dr. Carlos Guillén Galván le agradezco el apoyo para la realización de mi tesis al compartirme su salón de clases.

Le agradezco al Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria por su infinita paciencia en el servicio social y su apoyo de manera incondicional.

A todos los profesores con lo que tuve el placer de tomar clase, ¡gracias! de todos me llevo algún consejo, una palabra de aliento, algún teorema, les agradezco cuando iban inspirados a clase y me transmitían el amor a las matemáticas, también agradezco cuando decían algún chiste hacían la clase más amena.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo se desea observar la comprensión del concepto de límite de una función en una variable real de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP). Para lo anterior usamos como cimiento la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) debido a que nos permite identificar las estructuras mentales y los mecanismos cognitivos relacionados con este concepto. También se tomaron las actividades de Pons (2014) y a partir de la aplicación de las mismas se analizaron y compararon los resultados en términos de la teoría.

Introducción

El cálculo es una materia que está presente en todos los programas de matemáticas de diferentes carreras, como por ejemplo, ingenierías, computación, entre otras. Un rasgo característico del cálculo es el alto nivel de abstracción, así como las dificultades que tienen los estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área. Por eso es importante investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. En este trabajo se desea observar la comprensión del concepto de límite de una función en una variable real de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP), debido a que se ha reportado por diferentes investigadores que este concepto es complejo para los estudiantes. Usaremos la teoría APOE porque nos permite identificar las estructuras y los mecanismos cognitivos relacionados con este concepto.

Nos hemos apoyado en los resultados de Cottrill, Dubinsky, Nichols, Thomas, Schwingendorf y Vidakovic (1996) y Pons (2014), debido a que en el trabajo de Cottrill et al. (1996) se presenta una descripción del concepto de límite de una función y Pons (2014) propone un conjunto de actividades para evaluar las estructuras y los mecanismos mentales que menciona Cottrill et al.(1996).

Cottrill et al.(1996) consideran que es necesario hacer un programa de investigación sobre cómo las personas aprenden el concepto del límite y así, crear estrategias pedagógicas que pueden ayudar a mejorar su aprendizaje.

Es por ello que usaron la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) para diseñar actividades en la computadora que ayudaran a los estudiantes a construir las estructuras mentales que plantearon previamente en su descripción teórica.

A través de esa investigación mostraron que el concepto de límite no es estático como se cree, por el contrario, tiene un esquema muy complicado respecto a su concepción dinámica y se requiere que los estudiantes tengan una concepción de cuantificación bien construida.

Otra investigación sobre el concepto de límite de una función, basada en la teoría APOE, fue la de Pons (2014). Esta se enfocó en identificar las características de los niveles de desarrollo del esquema de límite funcional y en analizar la influencia de las representaciones semióticas (Duval, 2006) en estudiantes de 16 a 18 años.

Nuestra investigación tiene como objetivo identificar las estructuras mentales y los mecanismos cognitivos que se hacen presentes en estudiantes de la FCFM, BUAP relacionados con el concepto de límite de una función después de estudiar el tema en un curso de Cálculo Diferencial; para alcanzar nuestro propósito diseñamos un cuestionario basado en las actividades de Pons (2014) y analizamos las respuestas de los estudiantes participantes.

La presentación de nuestro trabajo la hemos organizado en cuatro capítulos descritos a continuación:

- Capítulo 1. Marco teórico. En este apartado presentamos los pilares de la teoría APOE como lo es la abstracción reflexiva, los mecanismos y estructuras mentales necesarias para la comprensión de conceptos matemáticos. También presentamos el ciclo de la investigación de APOE y la descomposición genética que vamos a utilizar.

- Capítulo 2. Metodología. En este capítulo se describe el método seguido, los alumnos participantes y las actividades que se aplicaron con su respectiva justificación.

- Capítulo 3. Análisis de resultados. En este apartado presentaremos el análisis de las respuestas de los estudiantes, describiendo las estructuras y mecanismos mentales que se presentaron, así como las dificultades para resolver cada actividad.

- Capítulo 4. Conclusiones. En esta sección se presentan las conclusiones a las que llegamos una vez finalizado el análisis de los datos. Se determinan las concepciones de los estudiantes que participaron en el estudio y se comparan los resultados obtenidos con los de Cottrill et al. (1996) y Pons (2014).

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo estudiaremos las características esenciales de la teoría APOE, ya que es el cimiento de nuestra investigación.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) tiene como objetivo entender cómo se aprenden los conceptos matemáticos. Su origen está en el trabajo de Jean Piaget y fue creada por Dubinsky en la década de los 80; es una teoría constructivista.

La teoría nace cuando Dubinsky reflexionó sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas de educación superior, pero, ¿Qué es la abstracción reflexiva? La respuesta de Piaget consta de dos partes, la primera parte implica reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, en el sentido de reflejar éste y operaciones de un nivel o etapa cognitiva inferior a uno superior (es decir, de procesos a objetos). La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y operaciones, en esta etapa superior resulta que las operaciones se pueden convertir en contenido al cual le pueden aplicar nuevas operaciones (Piaget, 1973).

Esto condujo a Dubinsky a considerar que la abstracción reflexiva es una herramienta sólida para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos avanzados. Piaget no creía que las ideas más abstractas y generales provenían de extraer características comunes de un conjunto de objetos (Los objetos pueden ser mentales, no necesariamente físicos), consideraba que el desarrollo del conocimiento de un objeto requiere que el sujeto actué sobre él y viceversa, es decir, que el objeto y sujeto no pueden estar separados. Dichas ideas sientan las bases en las distinciones más sutiles, como lo son las acciones materiales y operaciones interiorizadas, ambas constituyen las diferencias entre las estructuras mentales de acción y proceso, así como los mecanismos mentales como la interiorización y la encapsulación que conducen a $A \to P \to O \to E$.

Dubinsky interpreta a las "acciones materiales" como las acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él. Dentro de la teoría APOE las "operaciones interiorizadas" de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual una acción física externa se reconstruye en la mente del sujeto en un proceso, es decir, se realiza la misma acción pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de como un proceso (acción interiorizada) se transforma en un objeto (operación en la cual, en etapas superiores se le pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

Dubinsky interpreta éstas situaciones como el desarrollo cognitivo que empieza con acciones, que son interiorizadas en los procesos y luego se encapsulan en objetos a los que se pueden aplicar nuevas acciones, todo ello forman un esquema; pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma $A \to P \to O \to E$. Sin embargo, aunque se presente en esta forma lineal, el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder dentro de las etapas.

1.1. Estructuras y mecanismos mentales

Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación-desencapsulación, inversión y generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas). La figura (1.1) ilustra la relación entre las estructuras y los mecanismos. A continuación presentamos una descripción de los mecanismos mentales:

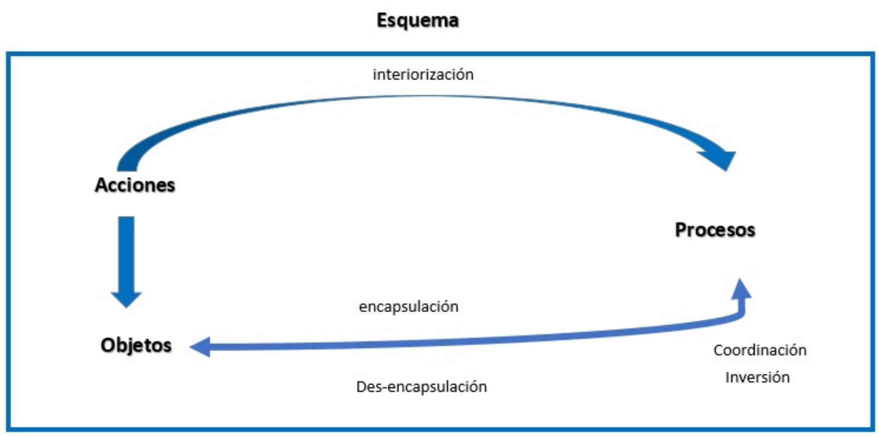


Figura 1.1: Teoría APOE (Arnon et al., 2014)

Interiorización: Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras el individuo pasa de tener ayudas externas para tener un control interno. El individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.

Coordinación: La coordinación consistente en tomar dos o más procesos para construir un nuevo proceso. Este nuevo proceso puede ser encapsulado como un objeto.

Encapsulación: Este mecanismo se da cuando uno ve al proceso como una totalidad, percibe las transformaciones que pueden actuar sobre esa totalidad y realmente puede construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación de uno), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. De manera general consiste en la conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (estructura estática).

Desencapsulación: Una vez que un individuo ha encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó, en otras palabras reinvertir el mecanismo. Así el individuo puede regresar al proceso siempre que lo desee.

Inversión: Cuando el proceso existe internamente, el estudiante es capaz de pensarlo de forma inversa (en el sentido de deshacerlo), con la creación de un nuevo proceso consistente en el inverso del proceso inicial.

Generalización: Se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.

Ahora presentamos una descripción específica de las estructuras mentales:

Acciones: Una acción es cualquier transformación física o mental para obtener otros objetos. Puede ser una respuesta de un sólo paso, como un reflejo físico, o el acto de recordar algún hecho de memoria. También puede ser respuesta a varios pasos, pero se caracteriza porque van seguidos unos de otros. Diremos que un estudiante posee una acción si realiza las transformaciones de un objeto dirigido externamente, la acción es externa debido a que cada paso de dicha transformación debe realizarse explícitamente y guiado por instrucciones externas, estableciendo una analogía se puede relacionar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo.

Un ejemplo de la concepción acción es resolver una ecuación imitando los pasos de una ecuación que se resolvió previamente.

Procesos: Es la estructura mental en la cual se realiza la misma operación que la acción sólo que totalmente en la mente del individuo, permitiendo que sea capaz de imaginar la realización de la trasformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita. Puede realizar la transformación sin la necesidad de llevar a cabo cada paso. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos. En algunos casos, esa coordinación hace nuevos procesos, en otros, los procesos están vinculados para formar un esquema.

Retomando el ejemplo anterior de acción, una concepción de proceso sería resolver la ecuación sin imitar el método para solucionar una ecuación similar.

Objeto: Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto, por tanto, el individuo posee una concepción objeto del concepto. El mecanismo de desencapsulación es tan importante como el de encapsulación, debido a que puede regresar al proceso que generó dicho concepto.

Un ejemplo de la concepción objeto es cuando el estudiante puede tomar dos o más funciones y componerlas obteniendo así una nueva función.

Esquemas: Un esquema se construye como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. Además, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continua debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Estas construcciones son la base de las estructuras matemáticas de un individuo, las cuales fundamentan la construcción de esquemas. Los esquemas no son estructuras estáticas, más bien, son dinámicas debido a que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas, con esto podemos decir que un esquema no es una estructura terminada, sino que está en constate desarrollo.

Un ejemplo de la concepción esquema para un espacio vectorial puede incluir n-tuplas y matrices como objetos y funciones como procesos. Todas estas estructuras pueden ser relacionadas por el hecho de que comparten algunas propiedades, como satisfacer un conjunto de Axiomas que definen un espacio vectorial.

1.2. Descomposición genética

Antes de comenzar con la descomposición genética propuesta para nuestra investigación, es necesario conocer lo que se entiende por descomposición genética.

Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes necesitan construir para aprender un concepto matemático específico. (Arnol et al. 2014, p.27) Como tal, una descomposición genética comienza como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores. Una descomposición hasta que no se prueba experimentalmente, es una hipótesis y se conoce como preliminar. Es posible que un concepto pueda constar de varias acciones diferentes, procesos y objetos, la descomposición genética puede incluir una descripción de cómo estas estructuras están relacionadas y organizadas dentro de una estructura mental más grande llamada esquema.

Cabe mencionar que una descomposición genética no explica qué pasa en la mente de una persona, más bien describe las estructuras que el estudiante necesita para construir el aprendizaje de un concepto. Una descomposición genética no es única, es decir, no proporciona una única forma en la que todos los estudiantes construyen un concepto matemático específico, su valor reside en que describe aquellas construcciones que se encuentran en los estudiantes y que son requeridas por la mayoría en el aprendizaje de un concepto.

Una descomposición genética puede ser diseñada por diferentes investigadores, para describir el aprendizaje de un concepto en particular.

Si estas descomposiciones genéticas son apoyadas por los estudios empíricos en las construcciones realizadas por los estudiantes, todas ellas podrían considerarse como razonables.

Además de ser un modelo teórico para la investigación, la descomposición genética puede guiar la instrucción de un concepto. En un diseño de enseñanza basado en la teoría APOE se proponen actividades para que los estudiantes trabajen colaborativamente y cada actividad está diseñada para fomentar la interiorización de acciones en procesos, para ayudar a la coordinación y la reversión de procesos, así como apoyar la encapsulación de procesos en objetos. También se busca la construcción de relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas previamente construidos.

Cuando los investigadores diseñan una descomposición genética, debe ser probada empíricamente, el análisis puede llevar a resultados mixtos. Algunas de las construcciones previstas en el análisis preliminar pueden faltar o ser diferentes de las propuestas. Cuando esto sucede, la descomposición genética necesita ser refinada para reflejar sus revisiones y así brindar una oportunidad para un análisis empírico adicional.

1.3. Descomposición genética del concepto de límite

En el estudio del concepto de límite, Cottrill et al. (1996) idearon una descomposición genética preliminar, basándose en su conocimiento de las matemáticas, la literatura educativa, su comprensión del concepto y su experiencia con los estudiantes.

Para esto los estudiantes completaron una secuencia de instrucciones dadas por la descomposición genética preliminar para después ser analizados y concluir la necesidad de un refinamiento.

La descomposición se divide en seis pasos. Los primeros tres describen las construcciones mentales involucradas en el desarrollo de una comprensión informal del concepto, y los últimos tres implican construcciones mentales asociadas con el desarrollo de un entendimiento formal. En general, una comprensión informal implica una concepción dinámica, es decir, los valores de una función se aproximan a un valor límite, a medida que los valores en el dominio se acercan a cierta cantidad. Un entendimiento formal se identifica típicamente con la definición de $\epsilon - \delta$.

A continuación veremos la descomposición genética preliminar.

Descomposición genética preliminar
P1 La Acción de evaluar la función f en pocos puntos, cada punto sucesivo o cercano a a
P2 Interiorización de la acción del paso uno a un único proceso en el cual $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a a
P3 Encapsulación del proceso del P2 así que el límite se vuelve un objeto para el cual las acciones pueden ser aplicadas.
P4 Reconstrucción del proceso del paso P2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto es introduciendo estimadores numéricos de las aproximaciones cercanas: $0 < \|x-a\| < \delta$ y $0 < \|f(x)-L\| < \epsilon$
P5 Aplicación de un esquema de cuantificación de 2 niveles para conectar el proceso descrito en P4, para la definición formal.
P6 Aplicación de una concepción completa $\epsilon - \delta$ para situaciones específicas

Tabla 1.1: Descomposición genética preliminar

Una comprensión informal es inicialmente dinámica. Para una función f en un punto de su dominio $x = a$, la determinación del límite comienza con la Acción de evaluar f en pocos puntos, cada uno sucesivamente más cerca de $x = a$. Usaremos la notación (Paso P1, P2, etc.) para referirnos a un paso de la descomposición genética preliminar. A medida que el individuo reflexiona sobre estas acciones, pueden ser interiorizadas en un proceso mental (Paso P2); es donde la concepción estática se convierte en una concepción dinámica. La encapsulación ocurre cuando el individuo ve al Proceso como un todo y percibe las transformaciones que pueden actuar sobre esa totalidad (Paso P3). La transición a un pensamiento más formal empieza en el (Paso P4), como el proceso construido en el (Paso P2) se reconstruye en términos de intervalos. La definición formal luego surge mediante la aplicación de un esquema de cuantificación de dos niveles (Paso P5) para el proceso reconstruido (Paso P4). El tratamiento de instrucción consistió en una unidad de 2 semanas que incluyó cinco tipos de actividades informáticas integradas en los temas habituales de aproximación, uno de límites laterales y el otro de aplicaciones del límite. Los alumnos realizaron gráficas, analizaron, escribieron programas cortos relacionados con lo informal, concepción dinámica y tareas completadas que implican la construcción y el análisis de $\epsilon - \delta$. El análisis de datos sugirió dos revisiones principales. La primera fue la adición de un paso que precede a la acción de evaluar una función en varios puntos (Paso R1); específicamente, el individuo evalúa un solo punto, que puede ser $x = a$ en lugar de una serie de puntos seleccionados que están sucesivamente más cerca de $x = a$. La segunda trata de la construcción de la concepción del Proceso, los investigadores descubrieron evidencia de una coordinación de dos Procesos: un proceso de dominio, en el que x se acerca a, y un proceso de rango, en que se acerca a L. Los dos procesos se coordinan a través de la función f. En otras palabras, la función f se aplica al Proceso de x acercándose a a para obtener el Proceso de $f(x)$ acercándose a L. Después de esos análisis y de la necesidad del refinamiento de Cottril, a continuación pondremos el refinamiento de la descomposición genética para el concepto de límite.

Refinamiento de la descomposición genética
R1 La Acción de evaluar la función f en un único punto x, considerado cercano, o igual al valor de a
R2 La Acción de evaluar la función f en unos puntos, cada punto sucesivo cercano a a
R3 Construcción de un esquema de un proceso coordinado: a) Interiorización de la acción del paso **R2** para construir un proceso dominio en el cual x se aproxima a a. b) Construcción de un proceso rango en el cual y se aproxima a L c) Coordinación de a) y b) vía f.
R4 Encapsulación del proceso del paso (R3c) así que el límite se convierte en un objeto al cual las acciones se pueden aplicar.
R5 Reconstrucción del proceso del paso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto es introduciendo estimadores numéricos de las aproximaciones cercanas: $0 < \|x - a\| < \delta$ y $0 < \|f(x) - L\| < \epsilon$
R6 Aplicación de un esquema de cuantificación de 2 niveles para conectar el proceso descrito en R5, para la definición formal.
R7 Aplicación de una concepción completa $\epsilon - \delta$ para situaciones específicas

Tabla 1.2: Descomposición genética refinada

Como se ha mencionado antes, “la idea de aproximación es el primer encuentro que los estudiantes tienen del concepto de límite a través de la noción dinámica de límite” (Cornu, 1991, p.153), y la vía por la cual el concepto de límite se usa para resolver problemas reales, apoyándose más en diversas propiedades intuitivas del concepto de límite que en la definición.

Pons (2014).

El límite como concepción dinámica.

La concepción dinámica de límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos (Pons, 2014, p. 101).

El límite como concepción métrica.

Hemos considerado como concepción métrica en términos de desigualdades aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x - a$ en valor absoluto se aproxima a 0, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x) - L$ en valor absoluto se aproxima a 0, y coordinarlos. (Pons, 2014, p. 102).

1.4. Ciclo de investigación de la teoría APOE

La investigación que se apoya en la teoría APOE tiene tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de enseñanza y observación, además de la verificación de datos.

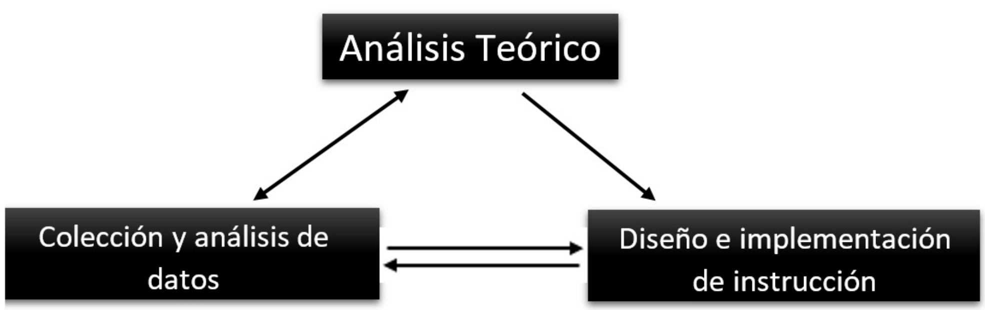


Figura 1.2: Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996)

Este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada y cercana a los conceptos matemáticos mediante su repetición.

- **Análisis Teórico**

  La investigación se inicia con un análisis teórico sobre el concepto matemático, en el cual se toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de algunos investigadores para establecer un camino viable en la construcción del concepto. "Este análisis, permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado" (Roa y Oktaç, 2008, p.35).

  Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto, para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante una descripción de las construcciones mentales y mecanismos mentales que un estudiante puede realizar para la construcción de su comprensión de un concepto matemático.

  Cabe señalar que una descomposición genética de un concepto no es única, ya que en ella dependen los caminos de construcción del concepto y de las estructuras definidas en los estudiantes. Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de los tres componentes del ciclo de la investigación, lo que permite documentarla con los datos empíricos y refinarla.

- **Diseño e implementación de la enseñanza**

  El análisis teórico conduce al diseño e implementación de la enseñanza, cuyas actividades están destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis.

  Actividades y ejercicios están encaminados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlos en procesos, encapsular procesos en objetos y la coordinación de dos o más procesos para la construcción de nuevos procesos.

  Una variedad de estrategias pedagógicas tales como aprendizaje cooperativo, resolución de problemas en grupo, e incluso algunas conferencias pueden ser altamente efectivas para ayudar a los alumnos a aprender las matemáticas en cuestión.

- **Colección y análisis de datos**

  La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo simplemente una hipótesis. El propósito del análisis de datos es responder dos preguntas:

  1) ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales descritas en la descomposición genética?

  2) ¿Qué tan bien aprenden los estudiantes el concepto matemático?

  Se utilizan diferentes tipos de instrumentos para investigar estas dos preguntas. Dependiendo de los objetivos del estudio particular, estos pueden incluir, cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (grabadas en audio y / o video), exámenes, y / o juegos de computadora. El diseño metodológico también puede incluir el aula.

  Observaciones, análisis de libros de texto y estudios históricos / epistemológicos. En todos estos casos, el análisis se triangula a través de la investigación colaborativa, mientras los investigadores negocian los resultados hasta llegar a un consenso sobre sus interpretaciones y / o implementando más de un instrumento de investigación para un estudio.

Capítulo 2

Metodología

Este trabajo sigue el método de investigación de la teoría APOE de la siguiente manera, se aplicó un cuestionario el cual tenía en cuenta el refinamiento de la descomposición genética realizada por Cottrill et al. (1996) para recabar datos que ofrecieran evidencias de las construcciones mentales y los mecanismos cognitivos, además de permitirnos hacer sugerencias para la enseñanza del concepto en estudio.

Los participantes en esta investigación fueron 56 estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas que cursaban la materia de CÁLCULO DIFERENCIAL durante el curso primavera 2019, estos estudiantes son de las carreras de Actuaría, Física Aplicada, Física, Matemáticas y Matemáticas Aplicadas. Además, tenían una semana de haber visto el tema del concepto de límite de una función en un punto.

A estos estudiantes se le aplicaron 6 actividades de la tesis de Pons (2014) las cuales fueron adaptadas al español de México.

Las actividades se aplicaron en dos sesiones, una de 60 minutos y la otra de 45 minutos, las cuatro primeras actividades tienen la característica de hacer referencia a la comprensión de la concepción dinámica del concepto de límite mientras que las otras dos actividades hacen referencia a la concepción métrica del concepto de límite en un punto.

2.1. Diseño del cuestionario

Actividad 1 A partir de la siguiente tabla, responde:									
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\cdots$	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	$\cdots$	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81
a) ¿A qué número se aproxima x?									
b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.									
d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta									

Tabla 2.1: Actividad 1

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es hacer evidente las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética. Es decir, lo que se espera es que:

a) A partir de observar los valores de la tabla, los estudiantes construyan un Proceso dominio en el cual x se aproxima a 3 (R3a).

b) A partir de las aproximaciones laterales, los estudiantes construyan un Proceso rango en el cual $f(x)$ se aproxima a 15 (R3b).

c) Que coordinen el Proceso dominio cuanto x tiende a 3, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 15 (R3c).

d) Que los estudiantes, a partir de la coordinación de los dos Procesos, mencionen que puede ser 15 el límite de la función cuando x se acerca a 3, pero no es posible afirmarlo porque solo se muestra una sucesión de números, sin embargo, se espera que ellos observen el comportamiento de aproximación (R4).

Actividad 2								
Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$								
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					$\cdots$				
a) Completa la tabla									
b) ¿A qué número se aproxima x?									
c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.									
e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta									

Tabla 2.2: Actividad 2

Esta actividad está presentada en el registro algebraico-numérico, su propósito es observar las estructuras y mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética cuando los estudiantes. Es decir, lo que se espera es que:

a) Calculan el valor de la función en modo algebraico, es decir, que realicen la acción de evaluar la función f en puntos cercanos a $x = 2$. (R2)

b) Construyen un Proceso dominio, en el cual x se aproxima a 2. (R3a)

c) Construyen un Proceso rango, es decir, que observen a qué número se aproximan los valores de $f(x)$ tanto por la derecha como por la izquierda y concluyan que se aproxima a 0.25 (R3b).

d) Relacionan ambas variables coordinando los dos Procesos rango y dominio (R3c).

e) A partir de la Coordinación entre los dos Procesos, rango y dominio, mencionen que puede ser 0.25 el límite de la función cuando x se acerca a 2 pero no es posible afirmarlo porque solo se muestra una sucesión de números, sin embargo, se espera que ellos observen el comportamiento de aproximación (R4).

Actividad 3									
A partir de la siguiente tabla, responde:									
x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	$\cdots$	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	$\cdots$	14.00003	14.0003	14.003	14.03
a) ¿A qué número se aproxima x?									
b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.									
d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta									

Tabla 2.3: Actividad 3

Esta actividad está representada en el registro numérico y su objetivo es evaluar si los estudiantes:

a) Construyen un Proceso dominio, en el cual x se aproxima a 4 (R3a).

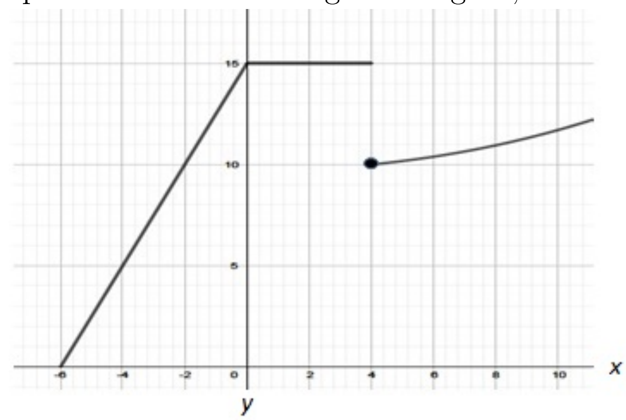
b) Construyen un Proceso rango para valores de $f(x)$ por la derecha y por la izquierda y observan que $f(x)$ tiene dos diferentes aproximaciones, es decir, por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 15.5 y por la derecha a 14 (R3b).

c) A partir de la tabla, son capaces de relacionar ambas variables coordinando dos Procesos rango y dominio (R3c).

d) A partir de la coordinación de los dos procesos dados en c), concluyan que el límite de la función no existe para x=4 (R4).

Actividad 4

De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:



a) Elige un valor para x, y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.
b) Cuando x tome los valores $3.9, 3.99, 3.999, \cdots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
c) Cuando x tome los valores $4.1, 4.01, 4.001, \cdots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.
e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta

Tabla 2.4: Actividad 4

Como en las actividades anteriores, el ejercicio 4 tiene el propósito de observar las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética, con la diferencia de que en esta actividad se les solicita construirlas en el registro gráfico. El objetivo de esta actividad es evaluar si los estudiantes:

a) Logran determinar el valor de la función en el punto que elijan. (Ra)

b) Coordinan el Proceso dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 15. (R3b)

c) Coordinan el Proceso dominio cuando x tiende a 4 por la derecha, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 10. (R3b)

d) Coordinan de manera conjunta los procesos construidos en los incisos b y c. (R3c)

e) Logren ver que el límite no existe, teniendo en cuenta que cuando x tiende a 4 los valores de la función $f(x)$ se aproximan a diferentes números por la izquierda y por la derecha. (R4)

Actividad 5									
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:									
x	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	$\cdots$	0.500001	0.50001	0.5001	0.501
$f(x)$	1.497003	1.499700	1.499970	1.499997	$\cdots$	1.500003	1.500030	1.500300	1.50300
$\|0.5 - x\|$	0.00100	0.00010	0.00001	0.000001	$\cdots$	0.000001	0.00001	0.00010	0.00100
$\|1.5 - f(x)\|$	0.00299	0.0003	0.00003	0.000003	$\cdots$	0.000003	0.00003	0.00030	0.00300
a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $\|1.5 - f(x)\|$, sea menor que 0.001?									
b) Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$? Justifique su respuesta									

Tabla 2.5: Actividad 5

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es observar las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a la concepción métrica del límite, es decir, los pasos 5 y 6 de la Descomposición Genética. El objetivo de esta actividad es evaluar si los estudiantes:

a) Realizan la acción de determinar la distancia a la que debe de estar x de 0.5 para que la distancia de $|1.5 - f(x)| < 0.001$ este es el paso (R5) de la descomposición genética.

b) En esta pregunta se pretende que los estudiantes observen que las diferencias en valor absoluto entre x y 0.5 se aproximan a 0 y que las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ y 1.5 también se aproximan a 0, entonces el límite de la función f es 1.5 (R6).

Actividad 6			
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:			
x	$f(x)$	$\|2.5 - x\|$	$\|3.5 - f(x)\|$
2.45	3.35000000	0.05	0.15
2.49	3.47000000	0.01	0.03
2.499	3.49700000	0.001	0.003
2.4999	3.49970000	0.0001	0.0003
2.49999	3.49997000	0.00001	0.00003
2.499999	3.49999700	0.000001	0.000003
...	...	...	...
2.500001	2.00000200	0.000001	1.499998
2.50001	2.00002000	0.00001	1.49998
2.5001	2.00020000	0.0001	1.4998
2.501	2.00200000	0.001	1.498
2.51	2.02000000	0.01	1.48
2.55	2.10000000	0.05	1.4
a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $\|3.5-f(x)\|$, sea menor que 0.001?			
b) Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2.5$? Justifique su respuesta			

Tabla 2.6: Actividad 6

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es promover las estructuras y los mecanismos mentales de la concepción métrica, es decir, los pasos 5 y 6 de la Descomposición Genética. El objetivo de esta actividad es evaluar si los estudiantes:

a) Realizan la acción de determinar la distancia a la que debe de estar x de 2.5 para que la distancia de $|3.5 - f(x)| < 0.001$ este es el paso (R5) de la descomposición genética.

b) Manifiestan la no existencia del límite, ya sea mediante la argumentación de aproximaciones laterales o mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y rango de la función, es decir, que los estudiantes vean que los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2.5 se aproximan a 0, cuando x se aproxima a 2.5. Se espera que observen que las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3.5 no se aproximan a cero, por lo tanto, podemos decir que la función no tiene límite en el punto determinado (R6).

2.2. Respuestas esperadas

Actividad 1								
A partir de la siguiente tabla, responde:								
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\cdots$	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	$\cdots$	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81

	Pregunta	**Respuesta esperada**
a)	¿A qué número se aproxima x?	x se aproxima a 3
b)	¿A qué número se aproxima $f(x)$?	$f(x)$ se aproxima a 15
c)	Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x	Conforme x se aproxima a 3, tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 15.
d)	Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta	Es posible que el límite de la función es 15, sin embargo, no es posible afirmarlo ya que en la tabla solo se muestra una sucesión de números.

Tabla 2.7: Respuesta esperada actividad 1

Actividad 2

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					$\cdots$				

	Pregunta	Respuesta esperada
a)	Completa la tabla	(ver tabla siguiente)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25	0.2506	0.2500	0.2500	$\cdots$	2.4999	0.24993	0.2493	0.249

	Pregunta	Respuesta esperada
b)	¿A qué número se aproxima x?	x se aproxima a 2
c)	¿A qué número se aproxima $f(x)$?	$f(x)$ se aproxima a 0.25
d)	Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x	Conforme x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 0.25
e)	Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta	Al parecer, el límite de la función es 0.25, pero no es posible afirmarlo porque en la tabla solo se muestra una sucesión de números.

Tabla 2.8: Respuesta esperada actividad 2

Actividad 3

A partir de la siguiente tabla, responde:

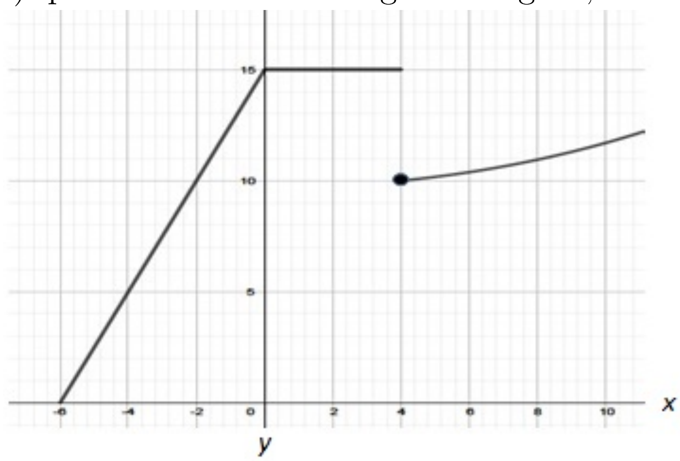
x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	$\cdots$	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	$\cdots$	14.00003	14.0003	14.003	14.03

	Pregunta	Respuesta esperada
a)	¿A qué número se aproxima x?	x se aproxima a 4
b)	¿A qué número se aproxima $f(x)$?	$f(x)$ tiene dos diferentes aproximaciones, por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 15.5 y por la derecha a 14.
c)	Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x	Cuando x tiende a 4 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 15.5, mientras que cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 14
d)	Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta	El límite no existe, ya que las aproximaciones laterales son distintas

Tabla 2.9: Respuesta esperada actividad 3

Actividad 4

De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:



	Pregunta	**Respuesta esperada**
a)	Elige un valor para x, y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.	Se espera que el estudiante elija algún valor en el eje horizontal y que dé el valor de $f(x)$ correspondiente.
b)	Cuando x tome los valores $3.9, 3.99, 3.999, \cdots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?	$f(x)$ se aproxima a 15
c)	Cuando x tome los valores $4.1, 4.01, 4.001, \cdots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?	$f(x)$ se aproxima a 10
d)	Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x	Cuando x tiende a 4 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 15 y cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ tiende a 10.
e)	Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta	El límite no existe, ya que las aproximaciones laterales son distintas.

Tabla 2.10: Respuesta esperada actividad 4

Actividad 5									
1. Observa la siguiente tabla y contesta las preguntas									
x	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	$\cdots$	0.500001	0.50001	0.5001	0.501
$f(x)$	1.497003	1.499700	1.499970	1.499997	$\cdots$	1.500003	1.500030	1.500300	1.50300
$\|0.5 - x\|$	0.00100	0.00010	0.00001	0.000001	$\cdots$	0.000001	0.00001	0.00010	0.00100
$\|1.5 - f(x)\|$	0.00299	0.0003	0.00003	0.000003	$\cdots$	0.000003	0.00003	0.00030	0.00300

	Pregunta	**Respuesta esperada**
a)	¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $\|1.5 - f(x)\|$, sea menor que 0.001?	Los valores de x a 0.5 deben de estar a 0.0001 de distancia.
b)	Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$? Justifique su respuesta	Dado que las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 0.5 se aproximan a 0 y los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y 1.5 también se aproximan a 0, entonces cuando x tiende a 0.5, el límite de la función f es 1.5

Tabla 2.11: Respuesta esperada actividad 5

Actividad 6			
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:			
x	$f(x)$	$\|2.5 - x\|$	$\|3.5 - f(x)\|$
2.45	3.35000000	0.05	0.15
2.49	3.47000000	0.01	0.03
2.499	3.49700000	0.001	0.003
2.4999	3.49970000	0.0001	0.0003
2.49999	3.49997000	0.00001	0.00003
2.499999	3.49999700	0.000001	0.000003
...	...	...	...
2.500001	2.00000200	0.000001	1.499998
2.50001	2.00002000	0.00001	1.49998
2.5001	2.00020000	0.0001	1.4998
2.501	2.00200000	0.001	1.498
2.51	2.02000000	0.01	1.48
2.55	2.10000000	0.05	1.4
	Pregunta	**Respuesta esperada**	
a)	¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $\|3.5 - f(x)\|$, sea menor que 0.001?	No existe tal cercanía. Pues existe 0.0001 tal que $\|2.5 - x\| \leq 0.0001$ y $\|3.5 - f(x)\| \geq 1.4998$ lo cual es mayor que 0.001	
b)	Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2.5$? Justifique su respuesta	El límite no existe ya que las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3.5 no se aproximan a cero (R5).	

Tabla 2.12: Respuesta esperada actividad 6

Capítulo 3

Resultados

Para mostrar los resultados se enumeraron a los estudiantes con la letra E seguida del número correspondiente, por ejemplo, E1,E2, etc. Además, especificaremos qué mecanismos y qué estructuras del refinamiento de la descomposición genética hecha por Cottrill et al. (1996) muestran los estudiantes y se dan algunos ejemplos.

3.1. Resultados de las actividades de la concepción dinámica

Actividad 1

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\cdots$	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	$\cdots$	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81

a) **¿A qué número se aproxima x?**

En esta pregunta todos los estudiantes respondieron “3”, es decir, construyeron un Proceso dominio, en el cual x se aproxima a 3, lo cual corresponde al paso (R3a) de la descomposición genética.

b) **¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$?**

Todos los estudiantes respondieron "15", es decir, lograron construir un Proceso rango en el cual $f(x)$ se aproxima a 15, lo cual corresponde al paso (R3b) de la descomposición genética.

c) **Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.**

Esta pregunta generó una variedad de respuestas las cuales dividiremos en tres grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 64.28 % de los estudiantes, los cuales describieron el comportamiento de ambas variables mediante sus aproximaciones laterales.

Es importante aclarar que aunque todos estos estudiantes respondieron como se mencionó anteriormente, vamos a hacer algunas subdivisiones, ya que algunos estudiantes detallaron más su respuesta.

- El 50 % escribió: "es 15. Cuando nos aproximamos a 3 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 15; cuando x se aproxima a 3 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 15."
- El 5.35 % escribió " $\lim_{x \to 3} f(x) = 15$ porque cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15".
- El 5.35 % escribió: "se puede aproximar a 15 tanto como uno quiera sin nunca serlo". Estos estudiantes tienen una concepción de aproximación como un proceso infinito que no termina, la cual corresponde con la noción de infinito potencial.

Ellos lograron coordinar los procesos rango y dominio y construyeron una concepción dinámica del límite de una función, lo cual corresponde al paso (R3c) de la descomposición genética.

Segundo grupo

Este segundo grupo corresponde al 30.33 % de los estudiantes quienes relacionaron ambas variables a partir de ciertas propiedades de la función, algunas de estas son: continuidad, si la función es creciente o decreciente y algunos crearon una expresión algebraica.

- El 14.28 % de los estudiantes relacionaron ambas variables de manera algebraica de la siguiente forma:
- $f(x) = 5x$
- $f(x) = x^2 + 2x$

  Estos estudiantes describen el comportamiento de $f(x)$ con relación de la variable x creando una expresión algebraica que reproduce, de manera aproximada, a los valores de la tabla.
- El 10.71 % escribió "$f(x)$ va aumentando conforme x aumenta".
- El 3.57 % escribió "la función es creciente o decreciente".
- El 1.78 % escribió "la función es continua y tiende a 15 cuando $x = 3$"

  Estos alumnos respondieron usando propiedades de la función que han conocido previamente, ya que al describir una función es común mencionar su crecimiento o decrecimiento, continuidad, etc.

Tercer grupo

Este tercer grupo consta del 5.35 % estudiantes los cuales no contestaron.

d) **Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta.**

Las respuestas a esta pregunta serán divididas en tres grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 71.42 % de los estudiantes, los cuales justificaron la existencia del límite a partir de las aproximaciones laterales o a través de los límites laterales.

- El 35.71 % escribió "$\lim_{x\to 3} f(x) = 15$ ya que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 15 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$"
- El 35.71 % respondió "$\lim_{x\to 3} f(x) = 15$ es el límite porque cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15".

Es decir, estos estudiantes construyeron un Proceso mental en el cual sé proponen a "15" como el límite, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c) de la descomposición genética.

Segundo grupo

Este segundo grupo corresponde al 24.98 % de los estudiantes, quienes manifestaron la existencia del límite sin haber justificado su respuesta, algunos lo encontraron a partir de evaluar la expresión algebraica que previamente habían creado, sus respuestas las veremos a continuación:

* El 8.92 % respondió que el límite es "15".
* El 7.14 % escribió "$\lim_{x\to 3} f(x) = 15$"
* El 7.14 % de los alumnos encontró el límite con la expresión que habían hallado anteriormente. A continuación veremos como ejemplo la respuesta de E36.

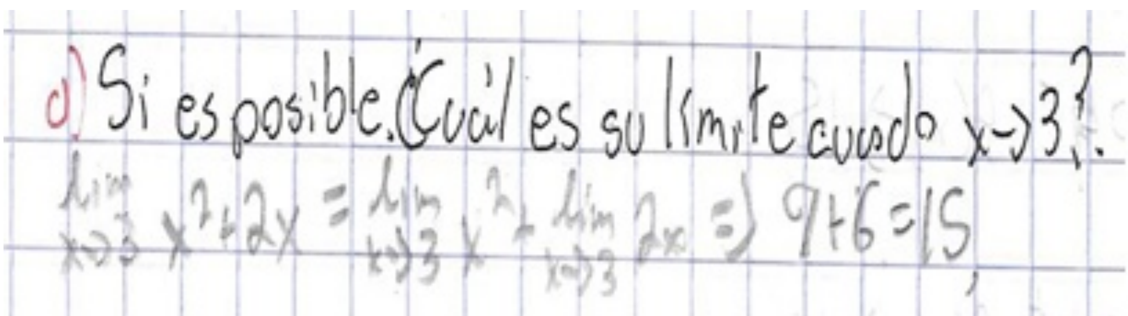


Figura 3.1: Respuesta de E36

* El 1.78 % que corresponde a E5 escribió: "Un límite no se asigna a un valor en específico. Más bien se refiere a los valores de una función siempre se acerca más y más a un número sin llegar a él." Este alumno piensa que siempre te puedes aproximar al número, pero nunca alcanzarlo, esto puede indicar que tiene una concepción del límite como un proceso infinito que no termina, la cual corresponde con la noción de infinito potencial.

Tercer grupo

Este tercer grupo consta del 3.57 % los estudiantes que no respondieron nada.

Representación numérica		
Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Construcción de un Proceso dominio (R3a)	100 %	Todos los estudiantes escribieron "3", podemos concluir que construyeron un proceso dominio, ya que notaron que los valores de x se aproximaban a 3 tanto por la izquierda como por la derecha.
Construcción de un Proceso rango (R3b).	100 %	Todos los estudiantes respondieron "15". Podemos concluir que construyeron un proceso rango.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	64.28 %	Algunos estudiantes respondieron esta pregunta usando conceptos previos o creando una regla de correspondencia, etc., sin embargo; el 64.28 % respondieron coordinando ambos procesos.
Concepción Proceso en el cual se propone a 15 como el límite, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	71.24 %	La mayoría de los estudiantes justificaron la existencia del límite a través de la coordinación de los procesos en el dominio y en el rango.

Tabla 3.1: Estructuras mentales actividad 1

Actividad 2

Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					$\cdots$				

a) **Completa la tabla**

Todos los estudiantes completaron correctamente la tabla, es decir, realizaron correctamente la Acción de evaluar la función f en puntos, lo cual corresponde al paso (R2) de la descomposición genética.

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25	0.2506	0.2500	0.2500	$\cdots$	2.4999	0.24993	0.2493	0.249

b) **¿A qué número se aproximan los valores de x?**

En esta pregunta todos los estudiantes respondieron que a 2, es decir, construyeron un Proceso dominio en el cual x se aproxima a 2, lo cual corresponde al paso (R3a) de la descomposición genética.

c) **¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$?**

Casi todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ se aproxima a $\frac{1}{4}$, sin embargo, un estudiante respondió que $f(x)$ se aproximaba a 0.26, de ahí que 55 estudiantes lograron construir un Proceso rango, en el cual $f(x)$ se aproxima a $\frac{1}{4}$, lo que corresponde al paso (R3b) de la descomposición genética.

d) **Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.**

Esta pregunta tiene varias respuestas las cuales dividiremos en 4 grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del estudiante E48 el cual describió el comportamiento usando vecindades, a continuación veremos su respuesta:

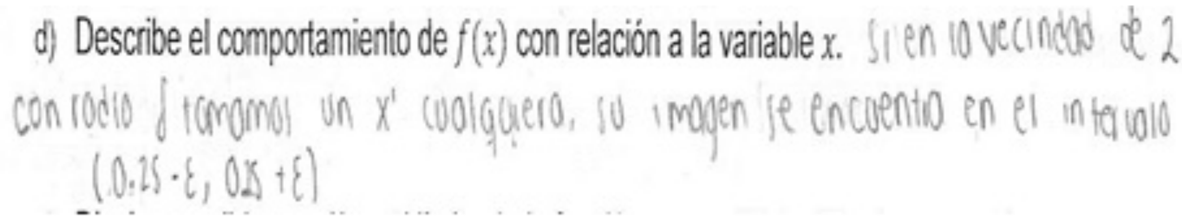

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x. Si en la vecindad de 2 con radio δ tomamos un x' cualquiera, su imagen se encuentra en el intervalo $(0.25-\varepsilon, 0.25+\varepsilon)$

Figura 3.2: Respuesta de E48

Este estudiante ha logrado hacer el paso (R5) de la descomposición genética, que corresponde a la reconstrucción del Proceso del paso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.

Segundo grupo

Este segundo grupo consta del 62.5 % de los estudiantes los cuales describieron el comportamiento de ambas variables respecto a sus aproximaciones laterales.

- El 55.35 % "cuando x tiende a 2 por la izquierda o por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 0.25."
- El 7.14 % respondió que "cuando x tiende a 2 el límite de la función es 0.25".

Los estudiantes mencionados anteriormente, lograron coordinar los procesos rango y dominio, lo cual corresponde al paso (R3c) de la descomposición genética.

Tercer grupo

El tercer grupo corresponde al 33.91 % de los estudiantes, los cuales relacionaron ambas variables a partir de los conocimientos previos o características que notaron de la función:

* El 17.85 % respondió que "$f(x)$ va disminuyendo conforme aumenta x"

* El 10.71 % respondió que “en -2 es asintótico.” Además los estudiantes E8 y E51 dibujaron la gráfica de la función y E8 añadió: “En 2 hay un hueco” e hizo un dibujo representando esto.

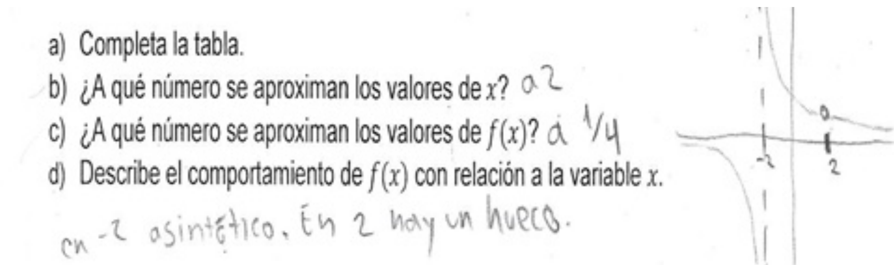


Figura 3.3: Respuesta de E8

* El 5.35 % respondió que “Es una hipérbola, indeterminada en $x = 2$”

Cuarto grupo

El cuarto grupo que corresponde al 1.78 % que no escribió nada.

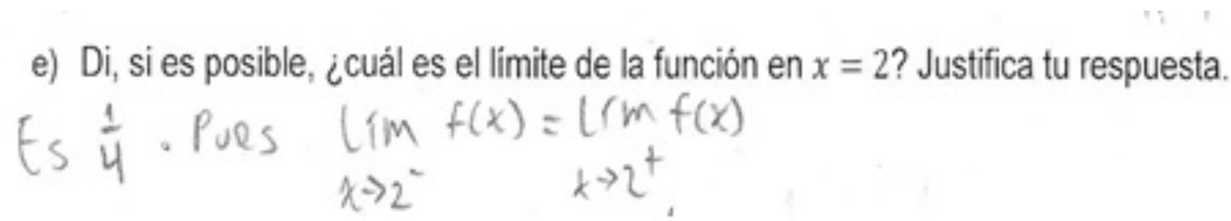
e) **Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta.**

Dividiremos en tres grupos las respuestas de los estudiantes.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 39.28 % de estudiantes, los cuales encontraron el límite de la función a través de los límites laterales.

- El 39.28 % mencionó que “el límite es 0.25 ya que los límites laterales coinciden”, ejemplo E8


e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifica tu respuesta.

Es $\frac{1}{4}$. Pues $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

Figura 3.4: Respuesta de E8

Ellos lograron coordinar los procesos rango y dominio y construyeron una concepción dinámica del límite de una función, lo cual corresponde al paso (R3c) de la descomposición genética.

Segundo grupo

El segundo grupo corresponde al 21.42 % de los estudiantes los cuales piensan que el límite es un número que debe ser alcanzado y no lo conciben como una aproximación infinita.

* El 21.42 % escribió que "No es posible porque la función se indefine cuando $x = 2$".

Tercer grupo

Este grupo corresponde al 39.28 % de los estudiantes los cuales no dan evidencia de haber construido los Proceso porque solamente evaluaron o mencionan que el límite es 0.25

- El 28.57 % simplificó la función dada y la evaluó en $x = 2$, para concluir que su límite es 0.25.
- El 10.71 % simplemente escribió "0.25".

Representación algebraico-numérica		
Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Acción de evaluar la función f en pocos puntos cada vez más cercanos a 2. (R2)	100 %	Todos los estudiantes completaron correctamente la tabla, es decir, los estudiantes poseen la concepción Acción.
Construcción de un Proceso dominio (R3a)	100 %	Todos contestaron que x se aproxima a 2, en otras palabras, todos los estudiantes construyeron el proceso dominio.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	98.21 %	La mayoría de los estudiantes logro construir el proceso rango y observan que $f(x)$ se aproxima a 0.25
Coordinación de ambos procesos (R3c)	64.28 %	Más de la mitad de los estudiantes lograron coordinar ambos procesos y el estudiante E48 ha logrado hacer el paso (R5) de la descomposición genética, que corresponde a la reconstrucción del proceso del paso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.
Concepción Proceso en el cual se propone a 0.25 como el límite, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	39.28 %	Aunque más de la mitad de los estudiantes propusieron a 0.25 como el límite, solamente el 39.28 % lo hizo a partir de las aproximaciones laterales.

Tabla 3.2: Estructuras mentales actividad 2

Actividad 3

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	$\cdots$	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	$\cdots$	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) **¿A qué número se aproxima x?**

Dado que todos los estudiantes contestaron que a 4, podemos decir que todos los alumnos construyeron un Proceso dominio en el cual x se aproxima a 4 (R3a).

b) **¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$?**

Como todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ tiende a dos números diferentes, podemos concluir que realizaron el Proceso rango en el cual $f(x)$ tiende a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha.

c) **Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.**

A esta pregunta dieron varias respuestas, las cuales vamos a dividir en tres grupos.

Primer grupo

El primer grupo consta del 76.78 % de los estudiantes, los cuales describieron el comportamiento respecto a sus aproximaciones laterales.

- El 76.78 % respondió que “la función tiene diferentes aproximaciones laterales y dan sus respectivos valores”. Ejemplo E17.

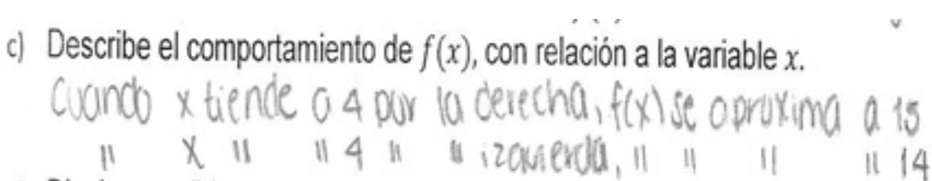

c) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x.
Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) se aproxima a 15
" x " " 4 " " izquierda, " " " " 14

Figura 3.5: Respuesta de E17

Los estudiantes mencionados anteriormente respondieron a partir de la coordinación de ambos procesos realizados en el inciso a) y b).

Segundo grupo

El segundo grupo tiene al 21.41 % de los estudiantes, los cuales describieron el comportamiento de ambas variables mencionando que la función es continua o creciente y algunos no encuentran alguna relación.

* El 8.92 % dice que "la función crece o decrece".
* El 5.35 % dice que "la función no es continua en 4".
* El 3.57 % menciona que no encuentra ningún comportamiento.

Tercer grupo

Este tercer grupo consta del 3.57 % de los estudiantes, los cuales no respondieron nada.

d) **Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta.**

Las respuestas a esta pregunta las dividiremos en dos grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 83.92 % de los estudiantes, los cuales a partir de la tabla se dieron cuenta que el límite de la función no existía en $x = 4$ debido a que las aproximaciones laterales se aproximaban a dos números diferentes.

- El 83.92 % llegó a la conclusión de que "el límite no existe ya que los límites laterales no coinciden".

Estos estudiantes construyeron un Proceso mental en el cual, a partir de la coordinación de los procesos del paso (R3c) notaron que el límite no existe.

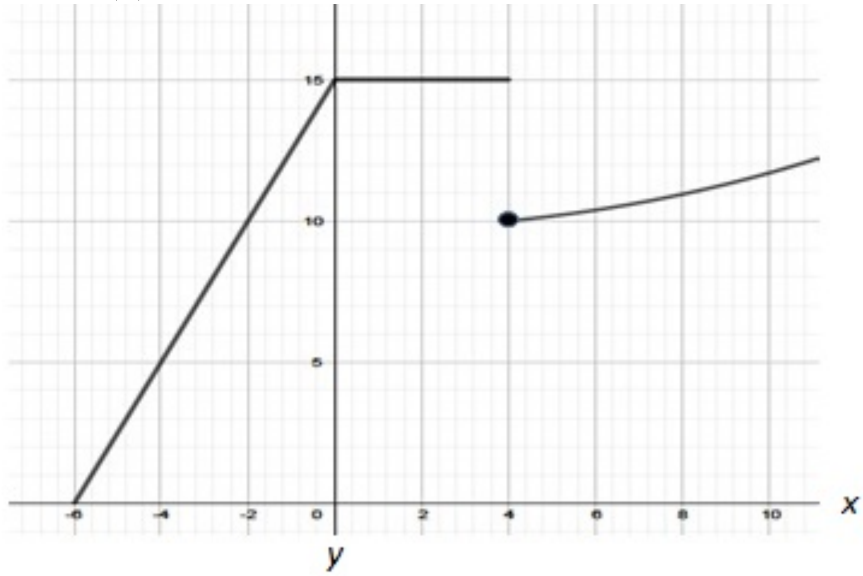
Segundo grupo

Este segundo grupo está compuesto por el 16.06 % de los estudiantes, quienes aún no logran coordinar por completo el inciso a) y b) que corresponde al R3 de nuestra descomposición genética, dado que algunos estudiantes daban como respuesta ambos límites laterales o un valor especifico.

* El 10.71 % da como límite los dos límites laterales.
* El 3.57 % da un valor al límite.
* El 1.78 % no escribió nada

Representación numérica		
Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Construcción de un proceso dominio a un número determinado (R3a)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que x se aproxima es a 4, es decir, los estudiantes construyeron un proceso dominio.
Construcción de un proceso rango a un número determinado (R3b)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ tiende a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha, es decir, lograron construir un Proceso rango.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	82.14 %	La mayoría de los estudiantes muestra haber coordinado ambos procesos de aproximación, aunque hubo algunos estudiantes que relacionaron las variables por alguna propiedad.
Concepción Proceso al mencionar que el límite no existe a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	83.92 %	La mayoría de los estudiantes mencionó que el límite no existia ya que las aproximaciones laterales no coinciden.

Tabla 3.3: Estructuras mentales actividad 3

Actividad 4
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:


a) **Elige un valor para x, y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.**

Todos los alumnos lograron determinar el valor de la función en un punto, es decir, asociaron correctamente un valor en el dominio con su respectivo valor en el rango.

b) **Cuando x tome los valores $3.9, 3.99, 3.999, \ldots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?**

Debido a que todos los estudiantes respondieron que cuando x tiende a 4 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 15, es decir, si $x \to 4^-$, entonces $f(x) \to 15$, podemos decir que coordinaron el Proceso dominio con el Proceso rango.

c) **Cuando x tome los valores $4.1, 4.01, 4.001, \cdots$ ¿A qué número se aproxima $f(x)$?**

Puesto que todos los estudiantes respondieron que cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ tiende a 10, es decir, $x \to 4^+$ entonces $f(x) \to 10$ podemos decir que coordinaron el Proceso dominio con el Proceso rango.

d) **Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.**

Las respuestas a estas preguntas las dividiremos en tres grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 35.71 % de los estudiantes los cuales describieron el comportamiento de ambas variables a partir de sus aproximaciones laterales.

- El 35.71 % de los estudiantes describe el comportamiento de la función respecto a sus aproximaciones laterales, es decir, "Cuando x tiende a 4 por la izquierda $f(x)$ tiende a 15 sin embargo cuando x tiende a 4 por la derecha $f(x)$ tiende a 10"

  Los estudiantes mencionados anteriormente respondieron coordinando los procesos realizados en el inciso b) y c).

Segundo grupo

Este segundo grupo corresponde al 62.5 % de los estudiantes, los cuales parece ser que: describen adecuadamente el comportamiento de la función pero no dan evidencias de concebir las aproximaciones ni de coordinarlas, debido a que respondieron a partir de la gráfica en términos de intervalos, continuidad y algunos otros encontraron la regla de correspondencia.

* El 19.64 % dice que "es una función a trozos y dan los intervalos de cómo se comporta la función". Ejemplo E10.

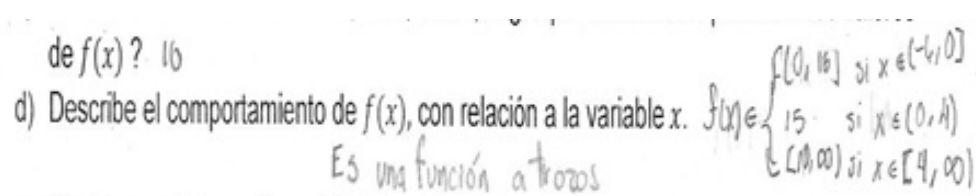


Figura 3.6: Respuesta de E10

* El 17.85 % dice que "$f(x)$ no es continua en $x = 4$".

* El 17.85 % dice que "$f(x)$ es creciente en $[-6, 0]$, constante en $[0, 4)$ y creciente en $(4, \infty)$".

* El 7.14 % dice que “La función aumenta linealmente en los valores negativos de 0 a 4 se mantiene igual y a partir de 4 decrece a 10 para aumentar lentamente”.

Tercer grupo

Este tercer grupo consta del 1.78 % el cual no respondió nada.

e) **Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta.**
Las respuestas a esta pregunta la dividiremos en 2 grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 87.5 % de los estudiantes a quienes les ayudó que la actividad estuviera dada en el registro gráfico debido a que la mayoría respondió que las aproximaciones laterales no coincidían y por tanto el límite no existe.

- El 87.5 % dijo que “el límite de la función no existe ya que los límites laterales no coinciden”. Ejemplo E20


e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifica tu respuesta.
No existe porque los límites laterales no coinciden.

Figura 3.7: Respuesta de E20

Estos estudiantes construyeron un Proceso mental en el cual a partir de la coordinación de los procesos del paso (R3c) notaron que el límite no existe.

Segundo grupo

Este segundo grupo corresponde al 10.89 % de los estudiantes y respondieron a partir de los límites laterales o dando un valor al límite.

- El 7.14 % dio los límites laterales.
- El 3.57 % dio un valor para el límite.

Registro gráfico

Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Acción de evaluar la función f en un único punto (R1a)	100 %	Todos los alumnos lograron determinar el valor de la función en un punto, es decir, asociaron correctamente un valor en el dominio con su respectivo valor en el rango.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ se aproxima a 10.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ se aproxima a 15.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	35.71 %	Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes respondieron coordinando ambos procesos, por otro lado, los demás estudiantes respondieron con alguna propiedad o encontrando alguna regla de correspondencia etc.
Concepción Proceso al mencionar que el límite no existe a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	87.5 %	La mayoría de los estudiantes mencionó que el límite de la función no existe y lo justificaron a través de los límites laterales o de las aproximaciones laterales.

Tabla 3.4: Estructuras mentales actividad 4

3.2. Resultados de las actividades de la concepción métrica

Actividad 5									
1. Observa la siguiente tabla y contesta las preguntas									
x	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	$\cdots$	0.500001	0.50001	0.5001	0.501
$f(x)$	1.497003	1.499700	1.499970	1.499997	$\cdots$	1.500003	1.500030	1.500300	1.50300
$\|0.5 - x\|$	0.00100	0.00010	0.00001	0.000001	$\cdots$	0.000001	0.00001	0.00010	0.00100
$\|1.5 - f(x)\|$	0.00299	0.0003	0.00003	0.000003	$\cdots$	0.000003	0.00003	0.00030	0.00300

a) **¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $|1.5 - f(x)|$, sea menor que 0.001?**

Las respuestas a esta pregunta las vamos a dividir en dos grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 44.65 % de los estudiantes quienes escribieron sus respuestas en términos de un intervalo, aproximaciones laterales o dando un valor específico.

- El 21.42 % escribió "0.0001"

- El 14.28 % escribió "$|0.5 - f(x)| < 0.0001$"

- El 5.35 % escribió "La diferencia debe ser menor o igual a 0.0001"

  Los estudiantes mencionados anteriormente lograron hacer el paso (R5) de la descomposición genética que corresponde a la reconstrucción del Proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.

- El 3.57 % escribió "La distancia de x a 0.5 debe ser menor o igual a 0.0001"

Segundo grupo

Este segundo grupo consta del 55.35 % de los estudiantes los cuales dieron su respuesta en términos de x y no a partir de la distancia que debe de haber entre x y 0.5

- El 48.21 % escribió la respuesta como la del estudiante E31, es importante mencionar que de ese 48.21 % el 7.14 % para llegar a esa respuesta partieron de la desigualdad $|0.5 - x| < 0.0001$ después la desarrollaron y así obtuvieron un intervalo de x. Puede ser que esto les haya sucedido porque es común que se pregunte en términos de x y no de distancia.

X	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	...	0.500001	0.50001	0.5001	0.501
f(x)	1.497003	1.499700	1.499970	1.499997	...	1.500003	1.500030	1.500300	1.503003
|0.5-x|	0.00100	0.00010	0.00001	0.000001	...	0.00000	0.00001	0.00010	0.00100
|1.5-f(x)|	0.0029973	0.0003000	0.0000300	0.0000030	...	0.0000030	0.0000300	0.0003000	0.0030027

a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $|1.5 - f(x)|$, sea menor que 0.001? 0.5001 > X > 0.499
x debe de estar en el intervalo

Figura 3.8: Respuesta de E31

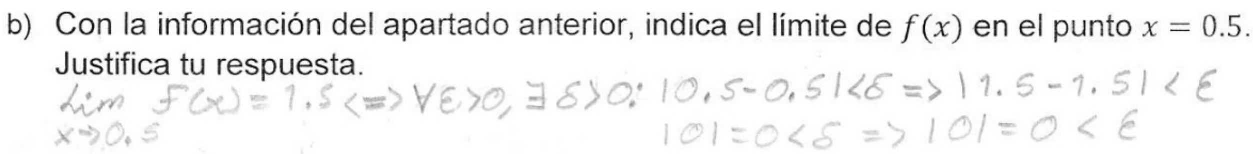
- El 1.78 % escribió "x tiende que valer 0.499 por la izquierda y 0.501 por la derecha"
- El 1.78 % $x = 0.499, 0.4999, 0.500001, 0.50001$
- El 1.78 % escribió "A partir de $x < 0.4999$"
- El 1.78 % escribió "$\{min 3, 3.3 \times 10^{-4}\}$"

b) **Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$? Justifique su respuesta**

Esta pregunta tiene varias respuestas las cuales vamos a clasificar en tres grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del estudiante E34 el cual ha logrado interiorizar la concepción métrica del concepto de límite, logrando el paso (R5) de la descomposición genética. Además ha sido capaz de reconstruir un Proceso en la concepción métrica pasando por la reconstrucción de la concepción dinámica, y utiliza los cuantificadores para establecer la definición formal $\epsilon - \delta$ lo cual corresponde al paso (R6).


b) Con la información del apartado anterior, indica el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$. Justifica tu respuesta.

$\lim_{x\to 0.5} f(x) = 1.5 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: |0.5 - 0.5| < \delta \Rightarrow |1.5 - 1.5| < \epsilon$

$|0| = 0 < \delta \Rightarrow |0| = 0 < \epsilon$

Figura 3.9: Respuesta de E34

Segundo grupo

Este segundo grupo consta del 74.99 % de los estudiantes quienes respondieron mencionando los límites laterales y las aproximaciones laterales.

* El 58.92 % respondió “el $\lim_{x\to 0.5} f(x) = 1.5$ ya que $\lim_{x\to 0.5^-} f(x) = 1.5 = \lim_{x\to 0.5^+} f(x) = 1.5$”
* 15.51 % respondió verbalmente “El límite es 1.5 ya que tanto por la izquierda como por la derecha el límite tiende a ser 1.5”

Estos estudiantes no dan evidencia de que hayan construido la concepción métrica del límite pero si han construido el paso (R3c) de la descomposición genética.

Tercer grupo

El tercer grupo pertenece al 23.19 % de los estudiantes los cuales no encontraron el límite o lo hallaron a partir de crear una función para relacionarlos o no justificaron la existencia de este.

- 14.28 % escribió $\lim_{x\to 0.5} f(x) = 1.5$ sin justificarlo.
- El 5.35 escribió “ El límite no existe $\lim_{x\to 0.5} f(x) = 1.4999$ y $\lim_{x\to 0.5} f(x) = 1.50003$” los límites centrales no coinciden el límite central entonces no existe.
- El 1.78 % escribió “El límite de $f(x)$ es 1.5 ya que no encontramos valores de $f(x)$, $|0.5 - x|, |0.5 - f(x)|$en $x = 0.5$ ya que ahí se indetermina.
- El 1.78 % escribió $\lim_{x\to 0.5} 3x = 1.5$ donde hay un $\epsilon = 0.001$ esto se encuentra con el mín $\{\delta_1, \delta_2\}$

Registro numérico		
Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Reconstrucción del Proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. (R5)	44.64 %	Casi la mitad de los estudiantes lograron reconstruir el proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.
Concepción Proceso en el cual se propone a 1.5 como el límite a partir de la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función (R5).	No hay evidencia	Los estudiantes propusieron a 1.5 como el límite de la función y la mayoría justifico su respuesta en términos de los límites laterales, es decir, lograron el paso (R3c) de la descomposición genética pero no dan evidencia de haber construido la concepción métrica.

Tabla 3.5: Estructuras mentales actividad 5

Actividad 6			
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:			
x	$f(x)$	$\|2.5 - x\|$	$\|3.5 - f(x)\|$
2.45	3.35000000	0.05	0.15
2.49	3.47000000	0.01	0.03
2.499	3.49700000	0.001	0.003
2.4999	3.49970000	0.0001	0.0003
2.49999	3.49997000	0.00001	0.00003
2.499999	3.49999700	0.000001	0.000003
...	...	...	...
2.500001	2.00000200	0.000001	1.499998
2.50001	2.00002000	0.00001	1.49998
2.5001	2.00020000	0.0001	1.4998
2.501	2.00200000	0.001	1.498
2.51	2.02000000	0.01	1.48
2.55	2.10000000	0.05	1.4

a) **¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $|3.5 - f(x)|$, sea menor que 0.001?**

Esta pregunta tiene una gran variedad de respuestas, las cuales vamos a dividir en tres grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 12.5 % de los estudiantes los cuales respondieron usando una desigualdad

* El 12.5 % escribió "$|2.5 - x| \leq 0.001$ por la izquierda".

Estos estudiantes realizaron el paso (R5) de la descomposición genética, es decir, realizaron la reconstrución del paso (R3c) en términos de desigualdades.

Segundo grupo

Este segundo grupo corresponde al 37.5 % de los estudiantes que respondieron parcialmente o solamente dieron un valor en específico. La mayoría de los estudiantes no se percataron que cuando x se acerca a 2.5 por la derecha, nunca se satisface que $|3.5 - f(x)| < 0.001$.

Las respuestas las veremos a continuación:

- El 1.78 % escribió "La diferencia $|3.5 - f(x)| < 0.001 \Rightarrow 0.001 > -3.5 + f(x) > -.001 \Rightarrow |2.5 - x| = 0.0001$"

* El 1.78 % escribió "2.4999 "

* El 1.78 % escribió "Será el $\text{mín}\{1, 0.001\}$ "

- El 1.78 % escribió "Si $|2.5 - x| < 0.001$ entonces $|3.5 - f(x)| < 0.001$"

- El 1.78 % escribió "No puede ser mayor a un intervalo de 0.001 unidades"

- El 1.78 % escribió "0.000003"

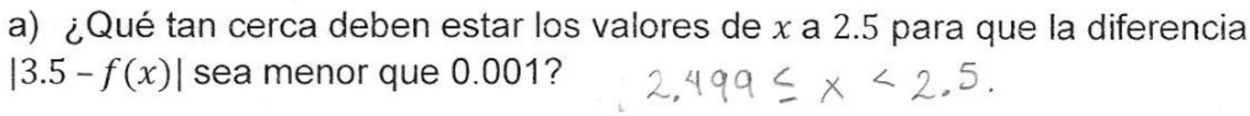
* El 26.78 % respondió "0.0001 "

Tercer grupo

Este tercer grupo corresponde al 50.04 % de los estudiantes que respondieron en términos de la variable x

- El 44.64 % respondió “$2.4999 \leq x < 2.5$"

  Ejemplo E27.



a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $|3.5 - f(x)|$ sea menor que 0.001? $2.499 \leq x < 2.5$.

Figura 3.10: Respuesta de E27

* El 3.57 % respondió “ $x\epsilon[2.4999, 2.5001]$”

- El 1.78 % escribió “la distancia de x a 2.5 debe ser menor o igual a 0.0001”

* El 1.78 % respondió $|x - 2.5| < 0.003$ pero x no puede ser mayor a 2.5

- El 1.78 % escribió “Cuando $x > 0.003$ y $x > 2.051$"

b) **Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2.5$? Justifique su respuesta**

Esta pregunta tiene varias respuestas las cuales vamos a dividir en dos grupos.

Primer grupo

Este primer grupo consta del 79.3 % de los estudiantes quienes respondieron mencionando los límites laterales.

- Para el 79.3 % “ No existe, porque por la izquierda el límite tiende a 3.5 y por la derecha el límite tiende a 2, por lo tanto el límite no existe.”

  Los alumnos mencionados anteriormente lograron interiorizar la concepción dinámica del concepto de límite, es decir, lograron el paso (R3c) de la descomposición genética pero no dan evidencia de haber construido la concepción métrica; ellos no mencionaron las distancias entre los términos de las sucesiones y los números de interés.

Segundo grupo

Este segundo grupo consta del 21.42 % de los estudiantes los cuales aún no han logrado las construcciones mentales necesarias para concluir que no existe el límite.

* El 16.08 % $\lim_{x\to 2.5^-} f(x) = 3.5$ y $\lim_{x\to 2.5^+} f(x) = 2$
* El 1.78 % escribió “ $\lim_{x\to 2.5^-} f(x) = 3.5 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : \exists\delta > 0 : |2.5 - 2.5| < \delta \Rightarrow |3.5 - 3.5| < \epsilon$”
* Para el 1.78 % “No existe, hay un salto en la secuencia con una gran diferencia”
* Para el 1.78 % “No existe”

Registro numérico		
Estructuras mentales	**Número de Estudiantes**	**Observaciones**
Reconstrucción del Proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. (R5)	12.5 %	Del 100 % de los estudiantes, solamente el 12.5 % lograron reconstruir el proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades, ya que la mayoría expresó su respuesta en términos de la variable x o solo observaban una aproximación lateral.
Concepción Proceso, en donde se prueba que el límite no existe a partir de la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función (R5).	No hay evidencia	Los alumnos lograron interiorizar la concepción dinámica del concepto de límite, es decir, lograron el paso (R3c) de la descomposición genética pero no dan evidencia de haber construido la concepción métrica; ellos no mencionaron las distancias entre los términos de las sucesiones y los números de interés.

Tabla 3.6: Estructuras mentales actividad 6

3.3. Análisis de resultados

En las actividades que hacen referencia a la concepción dinámica del concepto de límite se observó que todos los estudiantes respondieron a qué valores se aproximaban las variables x y $f(x)$ respectivamente, es decir, lograron construir un Proceso dominio y un Proceso rango. Sin embargo, al momento de pedirles que describieran el comportamiento de $f(x)$ con respecto a la variable x las respuestas variaban, en algunas ocasiones las relacionaban a partir de conocimientos previos, creaban alguna regla de correspondencia o daban características que notaban en la función o en la tabla.

Lo que pudimos observar es que la representación semiótica influyó al momento de que los estudiantes relacionaron ambas variables ya que el registro que más se les facilitó fue el numérico, después el algebraico-numérico y finalmente el gráfico. Además, influyó el hecho de que las aproximaciones laterales coincidieran o no en el rango. Por ejemplo, en la actividad tres, la no coincidencia provocó que el 82.14 % de los estudiantes relacionaran ambas variables a partir de coordinar los Procesos que se dan en el dominio y en el rango respectivamente, mientras que cuando las aproximaciones laterales coincidían el 64.28 % respondían como se mencionó anteriormente. Por otro lado, en el registro gráfico, solo el 37.5 % de los estudiantes relacionó ambas variables a partir de coordinar los Procesos que se dan en el dominio y en el rango, ya que, al ver la gráfica, casi todos respondieron en términos de intervalos o encontrando la regla de correspondencia o viendo la continuidad de la función.

A diferencia de la pregunta anterior, al momento de preguntarles por el límite de la función, el registro gráfico fue en el que la mayor parte de los estudiantes respondieron que no existía y lo argumentaron a partir de las aproximaciones laterales o de los límites laterales; después siguió el registro numérico donde se notó que influyó la coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango. En la actividad uno el 71.24 % de los estudiantes respondieron cuál era el límite, mientras que en la actividad tres, como las aproximaciones laterales no coincidían, el 83.92 % de los estudiantes respondieron que el límite no existía y lo argumentaron a partir de las aproximaciones laterales.

En el registro algebraico-numérico el 83.92 % de los estudiantes lograron coordinar los dos procesos y construyeron la concepción dinámica del límite de una función en un punto, sin embargo, el hecho de que la función dada en este ejercicio era racional provocó que algunos estudiantes dijeran que el límite no existía porque se indefine la función.

Las actividades cinco y seis hacen referencia a la concepción métrica del límite de una función. En el primer ítem de ambas actividades observamos que la mayoría de los estudiantes respondieron en términos de la variable x y no de la distancia, esto pudo suceder porque estamos acostumbrados a responder en términos de incógnitas; algunos estudiantes escribían la desigualdad, pero al momento de concluir su respuesta la escribían en términos de x.

Al momento de preguntarles por el límite de la función, gran parte de los estudiantes respondió a partir de las aproximaciones laterales o límites laterales, ellos no usaron el argumento de que la diferencia en valor absoluto de $f(x)$ y L tiende a cero cuando la de x y a tiende a cero, lo cual sugiere que en clase se deben de hacer ejercicios similares a estos que les ayuden a construir la concepción métrica del límite. También se debe analizar si la pregunta permitió que respondieran sin mencionar las distancias y que por tanto debería reformularse. Es importante mencionar que cuando ven que los valores de la función se aproximan a distintos números, los alumnos tienen claro que el límite no existe.

Capítulo 4

Conclusiones

A partir del análisis de las respuestas a las actividades y la descomposición genética propuesta por Cottrill et al. (1996) logramos identificar algunos de los mecanismos y estructuras mentales que los estudiantes participantes construyeron después de haber estudiado el tema en un curso de Cálculo Diferencial.

Los estudiantes participantes en esta investigación lograron construir la concepción Acción del límite de una función y los Procesos dominio y rango. Los que participaron en la de Pons (2014) también construyeron la concepción Acción y la de Proceso en el dominio, pero tuvieron dificultades para construir el Proceso rango, en especial cuando los valores de $f(x)$ se aproximaban a dos números diferentes.

También reportamos que más de la mitad de los estudiantes encuestados lograron coordinar los Procesos dominio y rango, lo cual difiere de los resultados obtenidos por Cottrill et al. (1996) y Pons (2014) ya que ellos reportaron que a sus estudiantes se les dificultó relacionar ambos Procesos.

En las actividades que tratan sobre la concepción métrica, casi todos respondieron en términos de la variable x y no en términos de distancia, lo cual pudo suceder porque están acostumbrados a responder en términos de x y no de distancia. Estos resultados coinciden con los de Pons (2014) y Cottrill et al. (1996) en cuanto a que los estudiantes tienen dificultades para realizar la coordinación métrica en términos de desigualdades ya que que solo unos pocos estudiantes van más allá de la coordinación de los dos procesos de aproximación debido a la problemática utilización de las desigualdades.

La mayoría de los estudiantes construyeron un Proceso mental en el cual proponen a un número como el límite o determinan que el límite no existe, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c) de la descomposición genética pero no en términos del paso (R5). Esto no permitió evaluar si estos estudiantes logran o no coordinar las aproximaciones en términos de distancia. Por lo tanto, sugerimos rediseñar la pregunta del inciso b de las actividades 5 y 6.

En esta investigación vimos como influyeron las diferentes representaciones semióticas y nos percatamos de que en este grupo, el registro gráfico favoreció la determinación de la no existencia del límite cuando las aproximaciones en el rango no coincidían; mientras que el registro numérico les favoreció para relacionar ambas variables. Lo anterior difiere de los resultados de Pons (2014) ya que a sus estudiantes se les facilitó más el registro gráfico para relacionar ambas variables.

4.1. Sugerencias Pedagógicas

A partir de los resultados obtenidos se concluye que es necesario diseñar y aplicar actividades que favorezcan la construcción de la concepción métrica. Las dos actividades que se aplicaron en este grupo no permitieron observar la estructura Proceso de la concepción métrica, por lo que deben de re-formularse. Además, se debe dar la oportunidad de trabajar en varios registros semióticos ya que estos complementan las construcciones del concepto límite de una función. Como una continuación de este trabajo recomendamos consultar el trabajo de Swinyard y Larsen (2012), en el cual refinan los últimos pasos de la descomposición genética de Cottril (1996) para describir la construcción del límite funcional hasta su definición formal.

Bibliografía

Arnon, I., Cottrill, L., Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York, USA: Springer.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*.Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 153–166.

Cottrill, L., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.*La Gaceta De La RSME*, 9 (1), 143–168.

Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education* (pp. 79–87). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Pons, J.(2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (tesis doctoral). Universidad De Alicante. España

Swinyard, C., Larsen S., (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*. 43(4), 465-493.