BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESPACIOS DE HÖLDER CON PESOS TIPO BERNSTEIN

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ÁLVARO HERNÁNDEZ CERVANTES

DIRECTOR DE TESIS:

PROF. DR., DR. SCIENT. MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ POZO

PUEBLA, PUE. JULIO DE 2013

Agradecimientos

- Cuando un sueño se hace realidad no siempre se le atribuye al empeño que pongamos en realizarlo. Detrás de cada sueño siempre hay personas que nos apoyan y que creen en nosotros. Son seres especiales que nos animan a seguir adelante en nuestros proyectos brindándonos, de diferentes maneras, su solidaridad. Es por ello que quiero agradecer de todo corazón y dedicar este pequeño trabajo a las personas más queridas en mi vida. A mis padres, Hedilberto y Maria Irma, quienes con esfuerzos y sacrificios siempre me apoyaron durante toda la carrera compartiendo sus sabios consejos. A mis hermanos, a cada uno de ellos, Sandra, Hedilberto, José y Ulises. Quienes mostraron siempre un apoyo y cariño incondicional en los momentos más difíciles de mi formación académica y moral. A Dios, por guiarme siempre por el buen camino de la vida y por darme una familia tan maravillosa, que sin todo esto no hubiese sido posible la culminación de esta etapa de mi vida.

- A mi director de tesis el Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, gracias por haber aceptado y dirigir este trabajo, por siempre confiar en mí, por la paciencia que me tuvo a lo largo de todo este proceso, y por todas las enseñanzas que compartió de buena manera conmigo. Al Dr. Slavisa V. Djordjevic, gracias por todo el apoyo que me brindó en los cursos que impartió hasta el desarrollo del pequeño trabajo que realizamos. Al M. C. José Nobel Méndez Alcocer por ayudar y mejorar este trabajo y por ser un buen compañero, nuevamente gracias y gracias a todas aquellas personas que no menciono pero que compartieron sus buenos consejos.

- A mis sinodales, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, M.C. Julio Erasto Poisot Macías y la M.C. Maria Guadalupe Raggi Cárdenas, quienes revisaron este trabajo y con sus críticas y comentarios lo favorecierón.

- Gracias director y sinodales por sus pacientes revisiones y correcciones.
- También quisiera agradecer a todos los profesores y profesoras con los cuales tuve el agrado de tomar sus cursos y que fuerón una etapa elemental de mi formación.
- Al cuerpo académico de análisis matemático, que me permitió participar en el seminario que organiza durante el tiempo en el cual estuve realizando este trabajo.
- Esta tesis fue desarrollada con apoyo de los proyectos SEP-VIEP "Análisis de Convergencia de Operadores (II parte), 2012" y "Aproximación e Integración, 2013".

Álvaro H. C.

TÍTULO: ESPACIOS DE HÖLDER CON PESOS TIPO BERNSTEIN
ESTUDIANTE: ÁLVARO HERNÁNDEZ CERVANTES

COMITÉ

DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA
PRESIDENTE

M.C. JULIO ERASTO POISOT MACÍAS
SECRETARIO

M.C. MARIA GUADALUPE RAGGI CÁRDENAS
VOCAL

PROF. DR., DR. SCIENT. MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ POZO
DIRECTOR DE TESIS

Índice general

Introducción

Esta tesis se inicia con la idea de extender la aproximación de Hölder a funciones integrables con peso sobre la recta real; con base a los resultados obtenidos por el Dr. José Margarito Hernández Morales en su tesis, para intervalos finitos ([Morales, 2012]). Pronto nos percatamos que para considerar ese problema de manera más profunda, debíamos estudiar primero los problemas de aproximación uniforme originados en ideas tempranas de Bernstein, como se verá en el desarrollo de la tesis.

Con estos objetivos futuros en mente, en esta tesis desarrollamos un estudio de aproximación uniforme de Hölder para funciones con peso de tipo Bernstein. Este tema es muy rico y conduce a problemas muy interesantes de aproximación. A continuación diremos grosso modo lo que se realizó en la tesis.

En el primer capítulo revisamos los conceptos de espacios de Hölder, módulo de continuidad, polinomios de Bernstein y splines, así como de teoremas clásicos para la aproximación en norma uniforme, además mencionamos las definiciones de conjuntos equilipschitzianos y sucesiones equilipschitzianas, algunas caracterizaciones de los primeros, así como el Teorema de Korovkin y su aplicación a la aproximación con polinomios de Bernstein, y el Teorema de Elliott.

En el segundo capítulo se define lo que es un peso de Bernstein y se dan ciertas condiciones necesarias y suficientes para que una función sea un tal peso, se plantea el problema de Bernstein en $\mathbb{R}_+$ y se dan algunas soluciones de las personas que han trabajado en ello.

El tercer capítulo es novedoso, se introduce lo que es un *peso de tipo Bernstein* ω, se plantea y demuestra un teorema de Aproximación uniforme con peso de tipo Bernstein mediante Splines, se definen los conceptos de función de Lipschitz local y función de Lipschitz y con ellos los de espacios $Lip^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_{+})$ y $lip^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_{+})$, se prueba que $Lip^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_{+})$ es un espacio lineal real normado de Banach, con la norma definida con la ayuda de la constante de Lipschitz. Por último se define el espacio $hol^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_{+})$, para el cual se demuestra un Teorema de Aproximación Uniforme en Norma de Hölder mediante Splines.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Hölder

En esta tesis modificaremos ligeramente la definición tradicional de funciones de Lipschitz o Hölder, para darle sentido a los espacios de Hölder sobre $\mathbb{R}_+$, con un peso tipo Bernstein. Por tal motivo, comenzaremos con algunas definiciones y resultados básicos de los espacios de Hölder clásicos.

1.1.1. Definición con norma uniforme

En esta tesis consideramos $\mathbb{R}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Definición 1.1. Si (X, d) y (Y, ρ) son espacios métricos no triviales, una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ se llama de Lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\rho(f(p), f(q)) \leq Md(p, q),$$

para todos los $p, q \in X$. El ínfimo de todos los M's es llamado el número de Lipschitz de f y aquí lo denotamos por $\theta(f)$. Además, si f es invertible y ambas f y f^{-1} son de Lipschitz, entonces decimos que f es bi-Lipschitz o una casi-isometría.

Alternativamente, $\theta(f)$ puede ser definido por

$$\theta(f) = \sup\left\{\tfrac{\rho(f(p),f(q))}{d(p,q)} : p, q \in X, p \neq q\right\}.$$

O de forma equivalente

$$\theta(f) = \sup\left\{\theta(f,\delta) : 0 < \delta\right\},$$

donde:

$$\theta(f,\delta) = \sup\left\{\frac{\rho(f(p),f(q))}{d(p,q)} : p,q \in X, 0 < d(p,q) \leq \delta\right\}.$$

De acuerdo a lo anterior, f es de Lipschitz si $\theta(f) < +\infty$, de otra forma (si $\theta(f) = \infty$) se dice que f no es de Lipschitz. Como se puede ver, la condición de Lipschitz simplemente establece que estas funciones expanden distancias por no más de un factor universal. Así, una función de Lipschitz con $0 \leq \theta(f) \leq 1$, es llamada una contracción, y expansiva si $1 < \theta(f) < \infty$. Es fácil ver que toda función de Lipschitz es uniformemente continua y la recíproca no es necesariamente cierta, como lo muestra la función $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [0,1]$.

Ejemplo 1.1. Si C es un subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico (X,d), entonces la función $f(p) = d(p,C)$ es de Lipschitz, de hecho es una contracción y además satisface $f(p) = 0$ si y sólo si $p \in C$.

Una ligera modificación de esta función proporciona una demostración constructiva del Lema de Urysohn para espacios métricos. Si C y D son subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio métrico X, entonces existe una función de Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$ que es cero sobre C y uno sobre D.

Proposición 1.1. ([Morales, 2012]). Sea (X,d) un espacio métrico y $0 < \alpha \leq 1$, entonces $d^\alpha(x,y) \doteq (d(x,y))^\alpha$ es también una métrica.

Definición 1.2. Si (X,d) es un espacio métrico, para $0 < \alpha \leq 1$, se denota por $X^\alpha \doteq (X, d^\alpha(x,y))$ al mismo conjunto X con la métrica $d^\alpha(x,y)$. Se denomina a X^α como un espacio métrico de Hölder si $0 < \alpha < 1$.

Una función de Lipschitz de X^α a Y, $0 < \alpha \leq 1$, es frecuentemente llamada de Hölder con exponente α. En la literatura especializada se utiliza Hölder o Lipschitz indistintamente. Por $\theta^\alpha(f)$ denotamos la constante de Lipschitz de orden $0 < \alpha \leq 1$ y por $Lip^\alpha(X,Y)$ al conjunto de todas estas funciones de Lipschitz de X^α a Y. Si $Y = \mathbb{R}$, simplemente escribiremos $Lip^\alpha(X)$.

Observación 1.1. Por mencionar algunas cosas para las cuales los espacios de Lipschitz son importantes, diremos que en el contexto de estos espacios hay algunas versiones de teoremas importantes en Análisis Funcional, así como de Topología. Por ejemplo : "Sean X, Y espacios métricos y $\overline{X}$,$\overline{Y}$ sus completaciones, respectivamente. Si $f : X \to Y$ es una función Lipschitz, entonces existe una única extensión también Lipschitz $f : \overline{X} \to \overline{Y}$"; [Weaver, 1999].

Observación 1.2. Se pueden también considerar espacios de Hölder (o de Lipschitz) de orden superior $Lip^{\alpha}(A)$ contenidos en los espacios $C(A)$ y $L_p(A)$, siendo $A = [a,b]$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, con $\mathbb{Z}$ el grupo de números enteros. Estos espacios están formados por aquellas funciones f para las cuales $\theta^{\alpha}(f) < +\infty$, donde $\theta^{\alpha}(\cdot)$ es el supremo de la familia de seminormas

$$\theta^{\alpha}(\cdot,\delta)_L = \sup\left\{\frac{\|\Delta_t^r(\cdot)\|_L}{|t|^{\alpha}} : 0 < |t| \leq \delta\right\};\text{ con } \delta > 0,$$

donde r es un número natural y Δ_t^r una diferencia de orden superior que precisaremos enseguida, L cualquiera de los espacios ya mencionados y $\|\cdot\|_L$ la norma en este espacio; [DeVore y Lorentz, 1993].

Denotaremos $f_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función trasladada, o sea $f_t(x) = f(x+t)$. El incremento $\Delta_t^r f$ se define por $\Delta_t^1 f(x) = \Delta_t f(x) = (f_t - f)(x)$, y los incrementos de orden superior $\Delta_t^R f = \Delta_t(\Delta_t^{R-1} f)$ por inducción. Para la definición de θ^{α} se toma $r = [\alpha]+1$; donde $[\cdot]$ representa la función parte entera.

Los espacios de Lipschitz típicos son aquellos formados por funciones $f : X \to F$, donde X es un espacio métrico, usualmente con infinitos elementos y sin puntos aislados (excepto, a veces, un punto aislado privilegiado para el desarrollo de la teoría, como en [Weaver, 1999]), F puede ser cualquiera de los campos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $0 < \alpha \leq 1$, y f satisface la siguiente condición equivalente ya mencionada

$$\theta(f) = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d^{\alpha}(x,y)} : x, y \in X, x \neq y\right\} < \infty.$$

De aquí se tiene el teorema siguiente de fácil demostración.

Teorema 1.1. Sea (X,d) un espacio métrico, $0 < \alpha \leq 1$ y $f, g \in Lip^{\alpha}(X,F)$, entonces

1. $\theta(af) = |a|\theta(f)$, para toda $a \in F$.
2. $\theta(f+g) \leq \theta(f) + \theta(g)$.

De este teorema se infiere que las funciones de Lipschitz forman un espacio lineal que denotaremos por $Lip^{\alpha}(X,F)$ y $\theta(f)$ es una seminorma en este espacio, que no es norma porque $\theta(f) = 0$ para cualquier función f constante. Debido a que $(Lip^{\alpha}(X,F), \theta(\cdot))$ no es un espacio normado, se puede considerar el subespacio lineal de funciones $f : X \to F$, módulo el conjunto de funciones constantes, de tal forma que $\theta(\cdot)$ sea una norma sobre el espacio cociente resultante (denotado de la misma forma, por un abuso de notación). Con lo anterior, se obtiene (Vea [Weaver, 1999]):

Proposición 1.2. $(Lip^{\alpha}(X,F), \theta(\cdot))$ es un espacio lineal normado.

Otra vía frecuente de definir una norma en $Lip^{\alpha}(X,F)$ es la siguiente; Si $Lip^{\alpha}(X,F)$ es un subespacio del espacio normado B, se define

$$\|f\|_{Lip^{\alpha}} = \|f\|_B + \theta(f).$$

Más aún, si B es de Banach, entonces $\left(Lip^{\alpha}(X,F), \|\cdot\|_{Lip^{\alpha}}\right)$ es un espacio de Banach.
En el caso típico de funciones continuas, se tendría

$$\|f\|_{Lip^{\alpha}} = \|f\|_{\infty} + \theta(f).$$

Existe una fuerte relación entre funciones Lipschitz reales y funciones Lipschitz complejas:

Afirmación 1.1. ([Weaver, 1999]). Sea X un espacio métrico y f una función Lipschitz de X a $\mathbb{C}$. Entonces

$$\text{máx}\left(\theta\left(Re(f)\right), \theta\left(Im(f)\right)\right) \leq \theta(f) \leq \sqrt{2}\,\text{máx}\left(\theta(Re(f)), \theta(Im(f))\right).$$

Resultando así, que $f : X \to \mathbb{C}$ esta en $Lip^{\alpha}(X,\mathbb{C})$ si y sólo si $Re(f)$ e $Im(f)$ están en $Lip^{\alpha}(X,\mathbb{R})$. Más aun:

$$Lip^{\alpha}(X,\mathbb{C}) = Lip^{\alpha}(X,\mathbb{R}) + iLip^{\alpha}(X,\mathbb{R}).$$

Por esta razón, aquí nos enfocamos a trabajar en espacios que son de tipo $Lip^{\alpha}(X, \mathbb{R})$, que para simplificar la notación escribiremos sólo $Lip^{\alpha}(X)$, o de otra forma conveniente cuando consideremos espacios funcionales pesados.

Podemos ver que para $0 < \alpha \leq 1$, la cerradura de $Lip^{\alpha}(X)$ en $C_B(X^{\alpha})$ (el espacio de funciones continuas y acotadas) consiste precisamente del espacio de funciones uniformemente continuas, y que si X es compacto, $Lip^{\alpha}(X)$ es denso en $C(X^{\alpha})$ con la norma del supremo ([Weaver, 1999]).

Como se ha mencionado, la constante de Lipschitz $\theta(f)$ es caracterizada de la manera siguiente:

$$\theta(f) = \sup\Big\{\theta(f, \delta) : \delta > 0\Big\},$$

donde:

$$\theta(f, \delta) = \sup\Big\{\tfrac{\rho(f(p), f(q))}{d(p,q)} : p, q \in X, 0 < d(p, q) \leq \delta\Big\}.$$

De importancia fundamental son los llamados espacios Lipschitz pequeños, que introducimos a continuación con la ayuda de $\theta(f, \delta)$.

Definición 1.3. Sea X un espacio métrico, $0 < \alpha \leq 1$ y $f \in Lip^{\alpha}(X)$. Entonces f es una función Lipschitz pequeña si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\Big(0 < d^{\alpha}(p, q) \leq \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(p) - f(q)| \leq \epsilon d^{\alpha}(p, q)\Big),$$

que es equivalente a

$$\theta^{\alpha}(f, \delta) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad \delta \to 0. \tag{1.1}$$

El espacio Lipschitz pequeño $lip^{\alpha}(X)$ es el formado por cada una de las funciones en $Lip^{\alpha}(X)$, que satisfacen (1.1).

Sea $0 < \alpha < 1$. Si tratamos de aproximar polinomialmente en $Lip^{\alpha}([0, 1]) \subset C[0, 1]$ o en $Lip^{\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R}_+) \subset C_{2\pi}(\mathbb{R}_+)$ encontraríamos que esto sólo es posible si $f \in lip^{\alpha}([0, 1])$ o $lip^{\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R}_+)$ respectivamente.

1.1.2. Módulo de continuidad θ^α

El módulo de continuidad $\omega(f,t)$ de una función f puede ser definido cuando f esta definida sobre un espacio métrico X, pero nosotros vamos a restringirnos para trabajar con $A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, [a,b]$ *o* $\mathbb{T}$. En este caso tenemos

$$\omega(f,t) \doteq \sup\Big\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \leq t, x, y \in A\Big\}; t \geq 0, \tag{1.2}$$

y

$$\omega(f,0) = 0.$$

Observe que si A es acotado entonces $\omega(f,t)$ es constante para $t \geq$diam A, y la función ω es continua en $t=0$ si y sólo si f es uniformemente continua sobre A. Por tal motivo es usual asumir que $f \in \widetilde{C}(A)$, es decir, que f pertenece al espacio de las funciones uniformemente continuas sobre A. Entonces $\omega(f,t)$ es finita para cada t fijo, ω es una seminorma, esto es, ω es subaditiva en f y homogénea positiva.

Recordemos que, si $(E, \|\|)$ es un espacio normado, $M \subset E$ no vacío y $f \in E$. Se define la mejor aproximación de f por elementos de M como

$$E_M(f) \doteq dist(f,M) \doteq \inf_{g\in M} \|f-g\|.$$

Además se conoce que si M es de dimensión finita siempre existe $g_f \in M$ tal que

$$dist(f,M) = \|f - g_f\|.$$

El módulo de continuidad ω es muy utilizado en teoría de la Aproximación para estimar la aproximación, por ejemplo, polinomial. Así, si $f \in C[0,1]$ y $P_n(f)$ son los elementos de mejor aproximación a f, se sabe que

$$\|f - P_n(f)\|_\infty = O\Big(\omega(f, 1/n)\Big),$$

es decir, existe $k \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$\|f - P_n(f)\|_\infty \leq k\Big(\omega(f,1/n)\Big), \quad para\ todo \quad n \geq N^*.$$

Un módulo de continuidad en general es una función real definida sobre $\mathbb{R}_+$ que tiene las propiedades siguientes:

(a) $\omega(t) \to \omega(0) = 0$, cuando $t \to 0$,

(b) ω es no-negativa y no-decreciente sobre $\mathbb{R}_+$,

(c) ω es subaditiva, es decir, $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$,

(d) ω es continua sobre $\mathbb{R}_+$.

Obviamente, (a) es una consecuencia de (d) y de que $\omega(0) = 0$.

La parte (c) se puede generalizar por inducción a

$$\omega(t_1 + t_2 + ... + t_n) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2) + ... + \omega(t_n),$$

y para $t = t_1 = t_2 = ... = t_n$.

$$\omega(nt) \leq n\omega(t).$$

También tenemos una desigualdad similar para un factor no-entero, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Z}$

$$\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\omega(t).$$

En realidad, tomando un entero n para el cual $n \leq \lambda < n + 1$, nosotros tenemos que

$$\omega(\lambda t) \leq \omega((n + 1)t) \leq (n + 1)\omega(t) \leq (\lambda + 1)\omega(t).$$

La idea de utilizar

$$\theta^\alpha(f, \delta) = \sup_{\substack{0<t\leq\delta \\ x,x+t\in A}} \frac{|f(x + t) - f(x)|}{t^\alpha},$$

como un módulo de continuidad, fue desarrollado en ([Bustamante y Jiménez, 1999]).

Un módulo de continuidad no puede ser muy pequeño en el sentido siguiente; si $f \in C(A)$, (con A como en los casos particulares definidos anteriormente) tal que $\frac{\theta(f,t)}{t} \to 0$, cuando $t \to 0$, entonces $f'(x) \equiv 0$ y por lo tanto f es una constante.

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es cóncava, si $\alpha f(x) + \beta f(y) \leq f(\alpha x + \beta y)$, para cada $x, y \in [a, b]$ y $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Una función cóncava $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la cual satisface $f(0) = 0$, tiene la propiedad de que $\frac{f(x)}{x}$ es decreciente, por que si $x < y$, entonces

$$\tfrac{x}{y} f(y) = \tfrac{y-x}{y} f(0) + \tfrac{x}{y} f(y) \leq f(x).$$

Si el módulo de continuidad ω no es cóncavo, este puede ser remplazado por un mayorante cóncavo. Primero tomemos la siguiente observación. Si L es alguna colección de funciones lineales (más general, cóncavas), entonces asumimos que la función sobre $\mathbb{R}_+$

$$\psi(t) \doteq \inf_{l \in L} l(t), \tag{1.3}$$

es finita (y cóncava). Esto puede ser utilizado como sigue. Sea ϕ una función sobre $\mathbb{R}_+$, y sea L la colección de todas las funciones lineales l, tal que $\phi(t) \leq l(t)$, para $t \in \mathbb{R}_+$; asumimos que $L \neq \emptyset$. De (1.3) observamos para $t > 0$, que

$$\overline{\phi}(t) \doteq \inf_{l \in L} l(t), \tag{1.4}$$

es una función cóncava con $\phi \leq \overline{\phi}$. Mas aún, si ψ es cóncava y $\psi(t) \geq \phi(t)$ para $t > 0$, entonces también $\psi(t) \geq \overline{\phi}(t)$, $t > 0$. Para probar esto, usamos que para cada punto $t_0 > 0$, existen derivadas laterales finitas $\psi'_+(t_0)$, $\psi'_-(t_0)$ y $\psi'_+(t_0) \leq \psi'_-(t_0)$. Si M es un número entre las derivadas, y l es la función lineal con pendiente M la cual interpola a ψ en t_0, entonces l es una función soporte lineal; esta satisface $l(t) \geq \psi(t)$ para todo t y $l(t_0) = \psi(t_0)$, al aplicar $\overline{\phi}$, tenemos la desigualdad $\overline{\phi}(t_0) \leq \psi(t_0)$. Esta desigualdad prueba que la función en (1.4) es el mínimo mayorante cóncavo de ϕ. Si ϕ es una función acotada con $\phi(0) = \phi_+(0) = 0$, entonces $\overline{\phi}$ también tiene esas propiedades.

Es posible demostrar que:

Lema 1.1. ([DeVore y Lorentz, 1993]). Si ω es un módulo de continuidad entonces el mínimo mayorante cóncavo $\overline{\omega}$ es también un módulo de continuidad y satisface para $t > 0$ que

$$\overline{\omega}(t) \leq 2\omega(t).$$

Observación 1.3. Uno puede definir el módulo de continuidad $\omega(f,t)_E$, para cada nuevo espacio invariante por traslación E, por ejemplo $L_p(A)$, $0 < p < \infty$, con A como en los casos particulares definidos anteriormente. Una notación usual es $A_h \doteq [a, b-h]$ si $A = [a,b]$, $0 < h < b-a$ y $A_h \doteq \emptyset$ si $h \geq b-a$. Otro posible caso $A_h \doteq A$, para $h > 0$. T_h, $h \in \mathbb{R}$, denota el operador traslación $T_h(f,x) \doteq f(x+h)$ y $\Delta_h \doteq T_h - I$ el operador diferencia, donde I es el operador identidad. Así el módulo de continuidad para $E = L_p(A)$ es entonces

$$\theta(f,t,A)_p \doteq \sup_{0\leq h\leq t} \|\Delta_h(f)\|_p(A_h). \tag{1.5}$$

$\theta(f,t,A)_p$ es un módulo de continuidad si $1 \leq p < \infty$, si $p = \infty$ y $f \in C(A)$ este módulo se reduce al módulo (1.2).

La definición siguiente fue introducida en [Bustamante y Jiménez, 1999] y extendida a los espacios L_p en [Jiménez y Martínez, 2001]. Los resultados se refieren a L_p, con $1 \leq p \leq \infty$, con el convenio usual de que $p = \infty$ designa el caso de funciones continuas.

Definición 1.4. Un conjunto no vacío G de funciones reales en un espacio de Lipschitz arbitrario $Lip^\alpha(L_p)$ es llamado equilipschitziano (en tal espacio) si

$$\theta^\alpha(G,\delta) \doteq \sup\left\{\theta^\alpha(g,\delta) : g \in G\right\} \to 0, \qquad \text{cuando} \qquad \delta \to 0.$$

Una sucesión (f_n) de funciones en $Lip^\alpha(L_p)$ es llamada equilipschitziana si lo es el conjunto $\{f_n : n = 1,2,3,....\}$.

Si el conjunto G es equilipschitziano en $Lip^\alpha(L_p)$, entonces $G \subset lip^\alpha(L_p)$. Si $G \subset lip^\alpha(L_p)$ y G es un conjunto finito, entonces G es equilipschitziano.

Teorema 1.2. (**Caracterización de convergencia de sucesiones en $\mathbf{lip}^\alpha(\mathbf{L_p})$**). Sea (f_n) una sucesión en $lip^\alpha(L_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ y f una función sobre X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Sea $f \in lip^\alpha(L_p)$ y $\|f_n - f\|_{Lip^\alpha(L_p)} \to 0$.

ii) La sucesión (f_n) es equilipschitziana en $Lip^\alpha(L_p)$ y $\|f_n - f\|_{Lip^\alpha(L_p)} \to 0$.

Corolario 1.1. Sea (f_n) una sucesión de funciones reales en $lip^{\alpha}(L_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, tal que

$$\sup\Big\{\theta^{\alpha}(f_n) : n = 1, 2, 3, ...\Big\} < \infty.$$

Además supongamos que existe $f \in C(A)$, (con A como en los casos particulares definidos anteriormente) para la cual $\|f_n - f\|_{\infty} \to 0$. Entonces $\|f_n - f\|_{Lip^{\beta}(L_p)} \to 0$, para cada $0 < \beta < \alpha$.

1.2. Polinomios de Bernstein

1.2.1. Definiciones

Definición 1.5. Para una función f definida sobre el intervalo cerrado $[0,1]$, la nueva función

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

es llamada el polinomio de Bernstein de orden n de la función f.

$B_n(f,x)$ es un polinomio en la indeterminada x de grado a lo más $n \in \mathbb{N}$. Fue introducido por S. Bernstein en 1912 para dar una simple y específica demostración del teorema de aproximación de Weierstrass. Si $f(x)$ es una función continua en $[0,1]$, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x),$$

uniformemente en $[0,1]$.

Para $n = 0, 1, 2, ...$ se definen los operadores lineales

$$\begin{aligned} B_n : C([0,1]) &\to P_n[x] \\ f \quad &\mapsto B_n(f). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ este operador es positivo (es decir, $B_n(f) \geq 0$, si $f \geq 0$), el operador es acotado y de norma 1, porque para $x \in [0,1]$,

$$B_n(1,x) \equiv 1. \tag{1.6}$$

Ahora veamos con detalles el cálculo de los $B_n(e_k)$, $e_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2$. Nosotros tenemos que si

$$p_{n,k}(x) \doteq \tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= nx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} \\ &= nx. \end{aligned}$$

Así

$$\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}(x) = nx, \tag{1.7}$$

también

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k}(x) &= n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} \\ &= n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 p_{n,k}(x) = n^2x^2 + nx(1-x). \tag{1.8}$$

De las fórmulas (1.6),(1.7) y (1.8) se deriva que

$$\begin{aligned}B_n(e_0) &= e_0.\\ B_n(e_1) &= e_1.\\ B_n(e_2) &= e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}.\end{aligned}$$

1.2.2. Teorema de Korovkin y su aplicación a los polinomios de Bernstein

Otro método aparentemente diferente para demostrar la densidad de los polinomios en el espacio de las funciones continuas con la norma uniforme, es el llamado teorema de Korovkin.

Teorema 1.3. (**Korovkin**,[Pinkus, 2005]). Sea (L_n) una sucesión de operadores lineales positivos de $C([0,1])$ en si mismo. Asumamos que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x^i) = x^i,$$

para $i = 0, 1, 2$. Y la convergencia es uniforme sobre $[0,1]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (L_n f)(x) = f(x),$$

uniformemente sobre $[0,1]$, para cada $f \in C([0,1])$.

Una inmediata aplicación del teorema de Korovkin, es una demostración de la convergencia de los polinomios de Bernstein $B_n(f,x)$ a f, para cada $f \in C([0,1])$. No obstante debe resaltarse que la demostración del teorema de Korovkin, esta inspirada en la aproximación de funciones continuas mediante los polinomios de Bernstein. Por eso decíamos que el método es sólo aparentemente diferente.

1.2.3. El teorema de Elliott

El teorema de Elliott garantiza o afirma que los polinomios de Bernstein están dominados en norma de Lipschitz. Este resultado será utilizado en nuestra tesis.

Teorema 1.4. ([Elliott, 1994]). Si $B_n(f,x)$ es el polinomio de Bernstein de orden a lo más n de $f \in Lip^\alpha([0,1])$, $0 < \alpha \leq 1$, entonces $\theta^\alpha(B_n(f)) \leq \theta^\alpha(f)$.

El resultado precedente es utilizado para la demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.5. ([Bustamante y Jiménez, 2001]). Si $\alpha \in (0,1)$ y $f \in lip^\alpha([0,1])$, entonces $\|(B_n f) - f\|_{Lip^\alpha} \to 0$, donde $(B_n(f))$ es la sucesión de polinomios de Bernstein de f.

Observe que el teorema anterior, se puede extender a funciones sobre cualquier otro intervalo finito sobre los reales. Esto se obtiene mediante un cambio de variable utilizando la biyección

$$\begin{aligned} \phi : [0,1] &\to [a,b] \\ x \quad &\mapsto \phi(x) = (1-x)a + xb. \end{aligned}$$

1.3. Splines

Las funciones Splines han demostrado ser muy efectivas para la Aproximación de funciones en diferentes modelos matemáticos . Existe una amplia bibliografía al respecto. Por ejemplo ([Massopust, 2010],[Prenter, 1975],[Schumaker, 1993],[Dahmen y Micchelli, 1987],[de Boor, 2001],[de Boor, 1976] y [C. de Boor y Riemenschneider, 1993]).

La idea general que conduce a la definición de Spline es la de una función polinomial a trozos que además, globalmente, es suave hasta un orden prefijado. Existen también otros tipos de funciones Splines como por ejemplo los llamados $B-$Splines que se forman a partir de una base de funciones que tienen soporte compacto. Pueden ser polinomios en varias variables o simplemente en una variable, y pueden tener valores prefijados.

En esta tesis construiremos Splines en una variable de la siguiente manera particular. Consideremos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Sean $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$ y sea X_m el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ dado por:

$$X_m = \{x_\nu : \nu = 0, 1, 2, ..., m; a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdot < x_m \leq b\}.$$

Los elementos x_ν serán llamados nodos y el conjunto X_m el conjunto de los nodos. Sea I un intervalo finito o infinito de extremos a y b con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, de manera que $X_m \subset I$.

Definición 1.6. Una función $S : I \to \mathbb{R}$ será llamada un Spline relativo a k, n y X_m, si satisface las dos condiciones siguientes:

1.) $S \in C^k(I)$,

2.) Para cada intervalo $J = (x_\nu, x_{\nu+1})$, $\nu = 0, 1, 2, ..., m-1$; o $J = (a, x_0)$, o $J = (x_m, b)$; si estos últimos no son vacíos, se tiene que $S|_J$ es un polinomio de grado a lo más n.

El conjunto de Splines se denotada mediante $S_k^n(X_m)$.

Observación 1.4. En la notación, $S_k^n(X_m)$ pudiese ocurrir que los nodos no estuvieran previamente definidos, que será lo que ocurra en esta tesis. En este caso se acostumbra a decir que es un Spline de nodos libres. Aunque, por supuesto, una vez definido un Spline quedarán definidos sus nodos. Igualmente podemos no acotar el grado de los polinomios. En estos casos imprecisos a priori denotaremos los Splines mediante $S_k^n(I)$ o $S_k(I)$.

Capítulo 2

El problema de Bernstein

El primer cuarto del siglo pasado fue un gran periodo para la Teoría de la Aproximación. En este tiempo, varios matemáticos lograron importantes avances en la disciplina. Entre ellos sobresalen los conocidos Stefan Bernstein y Dunham Jackson, pero también Müntz demuestra el Teorema de Aproximación por series de potencias $\{x^{\lambda_j}\}_{j=o}^{\infty}$ resolviendo asi un problema propuesto por Bernstein. Además, Faber introduce los polinomios y las series que hoy llevan su nombre y Szegö desarrolla la teoría de los polinomios ortogonales sobre el círculo unitario. Al final del primer cuarto de siglo, en 1924 Bernstein plantea un problema, conocido hoy en día como problema de aproximación de Bernstein, del cual derivan otros planteamientos. El problema en cuestión se plantea como sigue:

2.1. El problema de Bernstein en $\mathbb{R}_+$

Nosotros conocemos del Teorema de Weierstrass que podemos aproximar uniformemente por polinomios toda función continua sobre un intervalo compacto. Bernstein se preguntó sobre la existencia de resultados análogos en la recta real o en la semirecta real positiva. Revisaremos algunos resultados generales de la literatura sobre el tema, aunque por comodidad con frecuencia nos referiremos solamente al semi-eje real positivo.

Consideremos una función $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continua, $\omega(0) > 0$ y tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < \omega(x) < \infty \quad y \quad \forall n = 0, 1, 2, ..., \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\omega(x)} = 0. \tag{2.1}$$

De (2.1) se deriva que

$$\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty. \tag{2.2}$$

Debido a (2.2), asumiremos también que ω es estrictamente creciente –lo que según veremos no será relevante en cuanto a la veracidad de los resultados; pero que, sin embargo, facilita técnicamente algunas demostraciones.

Continuaremos ahora con la definición de peso de Bernstein. Nosotros denotaremos por C_ω el espacio de todas las funciones continuas f, con valores complejos o reales sobre $\mathbb{R}_+$ tales que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\omega(x)} = 0, \tag{2.3}$$

con la norma uniforme

$$\|f\|_{C_\omega} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{\omega(x)}. \tag{2.4}$$

Definición 2.1. Bernstein llamó a una función ω que satisface (2.1), una función peso si, además, cada $f \in C_\omega$ es aproximada por polinomios (con coeficientes complejos) en la norma (2.4).

C_ω es un espacio de Banach, que contiene todos los polinomios. Para cada peso ω el espacio C_ω contiene al subespacio C_0 de funciones f que cumplen $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

El espacio C_0 es denso en C_ω. Como las funciones continuas de soporte compacto son densas en C_0, entonces también son densas en C_ω. Las combinaciones lineales de $(x \pm ki)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$ junto con la función 1, son densas en C_ω.

Bernstein propuso ciertas condiciones necesarias y suficientes para caracterizar las funciones peso en el sentido por él definido. Si ω es una función peso y para todo $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \leq \omega_1(x)$, entonces también ω_1 es una función peso. Si $0 < c_1 \leq \omega_1(x)/\omega_2(x) \leq c_2$, entonces ω_1 y ω_2 simultáneamente son o no son funciones peso. Uno de los orígenes del concepto de función peso se debe a la teoría de polinomios ortogonales.

Los teoremas acerca de los polinomios de Laguerre y Hermite prueban que e^x y e^{x^2} son funciones peso sobre $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Sin embargo, esto no es el camino principal para la solución del problema de Bernstein, que resultó ser tan difícil como interesante.

2.2. Soluciones del Problema de Bernstein

Todas las soluciones conocidas del problema de Bernstein dependen de alguna manera de la teoría de funciones complejas. Como estos resultados aquí sólo tendrán un carácter divulgativo para completar la tesis, no profundizaremos en esa dirección.

Sea ω una función peso que satisface

$$\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \omega(x)}{1+x^2} dx = \infty. \tag{2.5}$$

Esta es una condición necesaria para que ω sea un peso de Bernstein; pero no suficiente si ω no se comporta regularmente de cierta manera que ahora esclareceremos.

Para ello tenemos que utilizar un funcional más complicado dado por

$$\lambda(\omega) = \sup_{P \in M_\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |P(x)|}{1+x^2} dx, \tag{2.6}$$

donde M_ω representa el conjunto de todos los polinomios complejos P de grado arbitrario, que se mayoran por ω:

$$|P(x)| \leq \omega(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La integral (2.6) existe incluso si P tiene ceros reales; y obviamente $\lambda(\omega) \leq \mu(\omega)$.

Propiamente Bernstein dio los primeros ejemplos significativos de funciones peso; diferentes soluciones completas del problema han sido dadas por Pollard [1953], Akhiezer y Bernstein [1953], y algo más tarde por Mergelyan [1956]. La solución de los segundos dos autores por lo general se cree que es la más satisfactoria. Necesitaremos el valor de ciertas integrales del tipo (2.6).

Sea $P(z)$ un polinomio sin ceros en el semiplano $Im\ z > 0$, y sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $Im\ c > 0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |P(x)| dx}{(x-c)(x-\overline{c})} = \frac{\pi}{Im\ c} \log |P(c)|. \tag{2.7}$$

En efecto, podemos restringir $\log P(z)$ en $Im\ z > 0$ a una de sus ramas principales. Si g tiene un cero simple en c, el residuo en $z = c$ de un cociente $f(z)/g(z)$, es $f(c)/g^{'}(c)$.

Podemos aproximar la integral (2.7) sobre una curva cerrada que consiste del intervalo $[-r, r]$, un semicírculo de radio r en el semiplano superior con r suficientemente grande, y de pequeños semicírculos con centros en los ceros reales de P. Por lo tanto, por el cálculo de residuos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log P(x)dx}{(x-c)(x-\overline{c})} = 2\pi\iota \frac{\log P(c)}{2\iota Im\ c} = \frac{\pi}{Im\ c} \log P(c),$$

y tomando las partes reales, obtenemos (2.7).

Para un polinomio arbitrario P tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |P(x)|}{1+x^2} dx \geq \pi \log |P(\iota)|. \tag{2.8}$$

Para obtener esto, factorizamos

$$P(z) = P_1(z)\Pi(z-a_j),$$

donde P_1 no tiene ceros en el semiplano superior y cada a_j cumple $Im\ a_j > 0$. Para P_1 se puede utilizar (2.7), con $c = \iota$ y para cada uno de los factores $z - a_j$, tenemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |x-a_j|}{1+x^2} dx = \pi \log |-\iota - a_j| \geq \pi \log |\iota - a_j|.$$

Uniendo estas relaciones, obtenemos (2.8).

Por N_ω denotamos el conjunto de polinomios P^* que no tienen ceros en $Im\ z \geq 0$ tal que

$$1 \leq |P^*(x)| \leq \sqrt{1+(\omega(0))^{-2}}\,\omega(x). \tag{2.9}$$

Lema 2.1. ([Lorentz y Makovoz, 1996]). Para cada polinomio $P \in M_\omega$ existe un polinomio $P^* \in N_\omega$ del mismo grado para el cual,

$$|P(x)| \leq |P^*(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

En el siguiente teorema mostramos una condición necesaria para que una función sea función peso;

Teorema 2.1. ([Lorentz y Makovoz, 1996]). Si ω es una función peso, entonces

$$\lambda(\sqrt{1+x^2}\omega) = \infty. \tag{2.11}$$

Esto implica que $\mu(\sqrt{1+x^2}\omega) = \infty$, por lo tanto $\mu(\omega) = \infty$.

Una condición suficiente para una función peso esta dada por:

Teorema 2.2. ([Lorentz y Makovoz, 1996]). Si $\lambda(\omega) = \infty$, entonces $\omega(x)/\sqrt{1+x^2}$, (y por lo tanto también ω) es una función peso.

Finalmente tenemos que

Teorema 2.3. (**Criterio de Pollard**,[Lorentz y Makovoz, 1996]).
Una función ω es una función peso si y sólo si $\mu(\omega) = \infty$ y si existe una sucesión (P_n) de polinomios y una constante $M > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \omega(x), \quad |P_n(x)| \leq M\omega(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

La prueba de este teorema y el teorema (2.1) implican que $\lambda(\omega) = \infty$ para cada función peso.

Teorema 2.4. (**Akhiezer y Bernstein**,[Lorentz y Makovoz, 1996]). Una función ω es una función peso si y sólo si $\omega(x)/\sqrt{1+x^2}$ es una función peso, si y sólo si $\lambda(\omega) = \infty$.

Como un ejemplo, tomemos las funciones $e^{|x|}$ y $ch\ x$. Ellas son comparables, debido a que su cociente se encuentra entre dos constantes no nulas. También satisfacen $\mu(\omega) = \infty$. Los polinomios P_n de (2.12) para $ch\ x$ se proporcionan por $P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{(2)!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Por lo tanto ambas son funciones peso.

Un poco más difícil es el tratamiento de las funciones $\omega(x) = \exp(|x|/\psi(x))$, donde:

$$\psi(x)\ es\ \log^{\alpha}(2+|x|)\ \ o\ \ \log(2+|x|)\log^{\alpha}(4+|x|). \tag{2.13}$$

Si $0 < \alpha < 1$, ω no es función peso, porque $\mu(\omega) < \infty$. Las funciones (2.13) son pares y satisfacen:

1) $0 < \psi(x) \to \infty$ para $x \to \infty$,

2) $B\psi(x) \leq \psi(\sqrt{x})$, $\quad x > 0$, $\quad$ para $\quad$ alguna $B > 0$ y

3) Para cada $\epsilon > 0$, $\psi(x)x^{-\epsilon} \to 0$, $\quad x \to \infty$.

El siguiente teorema muestra que $\omega(x) = \exp(|x|/\psi(x))$ es una función peso si $\alpha = 1$ en (2.13).

Teorema 2.5. Sea $x \in \mathbb{R}$, si $\psi(x) > 0$, es una función par creciente para todo $x \geq 0$, que satisface las condiciones (1),(2) y (3), entonces $\omega(x) = \exp(x/\psi(x))$ es una función peso si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(2^k)^{-1} = \infty. \tag{2.14}$$

Capítulo 3

Clases de Hölder con Pesos Tipo Bernstein

En este capítulo recogeremos nuestra contribución al estudio de la aproximación en los espacios de funciones continuas C_ω, definidas mediante pesos ω tipo Bernstein sobre $\mathbb{R}_+$.

Los resultados que expondremos van en dos direciones. Por definición, ω es un peso de Bernstein si los polinomios algebraicos (en este caso restringidos a $\mathbb{R}_+$), son densos en C_ω con la norma $\|\cdot\|_{C_\omega}$, así que la mayor parte de los trabajos iniciales en el estudio del problema de Bernstein, estuvierón dirigidos precisamente a encontrar condiciones necesarias o suficientes para determinar si una función ω es efectivamente un peso.

Pero los resultados de estas investigaciones no muestran como construir polinomios que aproximan una función dada en C_ω. Esta construcción es difícil; pero posible si aproximamos con Splines. Es por ello que primeramente abordaremos el problema de la aproximación uniforme en C_ω con Splines, mediante un procedimiento constructivo de aproximación.

Este método de aproximación no sólo tiene la ventaja de ser constructivo, sino que no se necesita a priori, que ω sea un peso de Bernstein, o sea, de la densidad de los polinomios en C_ω. Por ello trabajaremos con pesos que llamaremos de "Tipo Bernstein", más precisamente:

Definición 3.1. Una función $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se llamará de tipo Bernstein, si es continua, creciente, $\omega(0) > 0$ y satisface la condición (2.1). Es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < \omega(x) < \infty, \quad y \quad \forall n = 0, 1, 2, ..., \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\omega(x)} = 0.$$

Igualmente consideramos los espacios C_ω y la norma $\| \cdot \|_{C_\omega}$, definidos en (2.3) y (2.4).

Entonces ω es un peso de Bernstein, si es de tipo Bernstein y si los polinomios algebraicos son densos en $(C_\omega, \| \cdot \|_{C_\omega})$.

La segunda parte del capítulo esta dirigida a la definición de clases de Hölder en C_ω, y a la aproximación en normas hölderianas de estas clases, mediante Splines construidos de manera similar a lo expuesto en la sección (1.3).

La definición de funciones de Hölder sigue un planteamiento tradicional; pero algunas pequeñas modificaciones necesitan ser consideradas, según veremos. El ingrediente fundamental es la construcción de los Splines en la clase de los polinomios de Bernstein, que no sólo se definen constructivamente sino que reunen propiedades tan sobresalientes que los convierten en los polinomios más populares en los problemas relativos a la aproximación polinomial.

3.1. Aproximación Uniforme con Peso tipo Bernstein mediante Splines

Teorema 3.1. Sean ω un peso de tipo Bernstein y $f \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ podemos construir un Spline $S \in S_0(\mathbb{R}_+)$, tal que

$$\|f - S\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq C\epsilon,$$

donde:

$$C = \text{máx}(2, 1/\omega(0)).$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\frac{f(x)}{\omega(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall x \geq M \quad \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| \leq \epsilon.$$

Definimos polinomios de Bernstein de la manera siguiente:

Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \leq M$, tomamos un polinomio de Bernstein de grado N_m, que dependerá de m, f y ϵ, tal que

$$\forall x \in [m-1, m], \quad \left|B_{N_m}(f, x) - f(x)\right| \leq \epsilon.$$

Ahora construimos el Spline

$$S(x) = \begin{cases} B_{N_m}(f, x) & \text{si } x \in [m-1, m] \\ f(M) & \text{si } x \geq M. \end{cases}$$

Efectivamente, $S \in S_0(\mathbb{R}_+)$, debido a las propiedades de interpolación en los extremos de los polinomios de Bernstein,

$$B_{N_m}(f, m) = f(m) = B_{N_{m+1}}(f, m); \quad \text{si } m < M,$$

mientras que para todo $x \geq M$,

$$B_{N_M}(f, M) = f(M) = S(x).$$

Por otro lado, si $x \in [m-1, m]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_M(x) - f(x)}{\omega(x)}\right| &= \left|\frac{B_{N_m}(f,x) - f(x)}{\omega(x)}\right| \\ &\leq \left|\frac{B_{N_m}(f,x) - f(x)}{\omega(0)}\right| \leq \frac{\epsilon}{\omega(0)}.\end{aligned}$$

Si $x \geq M$, como $\omega(M) \leq \omega(x)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(x) - f(x)}{\omega(x)}\right| &= \left|\frac{f(M) - f(x)}{\omega(x)}\right| \\ &\leq \left|\frac{f(M)}{\omega(M)}\right| + \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.\end{aligned}$$

■

Nota 3.1. En esta demostración se toma un cambio de variable a partir de la biyección

$$\begin{aligned}[0,1] &\to [a,b] \\ t &\mapsto (1-t)a + tb,\end{aligned}$$

para trasladar la aproximación en $[a = m-1, b = m]$ al caso conocido de aproximación tipo Bernstein en $[0,1]$.

El grado máximo de los polinomios será $K = \text{máx}\{N_1, N_2, N_3, ..., N_M.\}$. Con la misma técnica empleada, se puede reducir el problema de aproximación a un sólo nodo correspondiente al punto M. El posible inconveniente, desde el punto de vista constructivamente práctico, es que el polinomio P que aproxima a la función dada f en $[0, M]$, podría tener un grado muy superior al grado máximo K de los polinomios utilizados en el primer método.

En efecto, al trasladar f a $[0,1]$, desde $[0, M]$ con $M \geq 1$, se tendría que si f_M esta trasladada

$$\omega\left(f_M, \tfrac{1}{M \cdot n}\right)_{C[0,1]} = \omega\left(f, \tfrac{1}{n}\right)_{C[0,M]}.$$

De aquí se deriva que utilizando una partición uniforme de longitud $1/n$ en $[0, M]$, se tendría $K \leq M$; pero el polinomio de Bernstein P para obtener la misma aproximación en $[0, M]$, podría llegar a ser de grado $\partial P = M \cdot n$.

Este método de variar el número de nodos debe tenerse presente para disminuir el grado de los polinomios.

3.2. Aproximación Uniforme en Norma de Hölder mediante Splines

En esta sección introducimos los espacios de Hölder con respecto a un peso de tipo Bernstein y estudiamos la aproximación mediante Splines en dichos espacios.

Recordemos que

$$C_0(\mathbb{R}_+) \doteq \{g \in C(\mathbb{R}_+) : g(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty\}.$$

Si $f \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$ y $g = \frac{f}{\omega}$, se tiene que $f = g\omega$ con $g \in C_0(\mathbb{R}_+)$ y, viceversa; con ello tendríamos el isomorfismo lineal

$$C_0(\mathbb{R}_+) \leftrightarrow C_\omega(\mathbb{R}_+)$$

$$g \leftrightsquigarrow f$$

donde:

$$\|g\|_{C_0(\mathbb{R}_+)} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| = \|f\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)}.$$

En lo sucesivo α y δ designan numeros en $(0, 1]$.

Definición 3.2. Diremos que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es localmente de Lipschitz (o de Hölder) de orden α si y sólo si para toda $x \in \mathbb{R}_+$, existe una vecindad $V = [a, b]$ de x, tal que $h \in Lip^\alpha(V)$ en el sentido usual. Denotaremos por $Lip^\alpha_{local}(\mathbb{R}_+)$ al conjunto de las funciones $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que son localmente de Lipschitz.

Observe que si $h \in Lip^\alpha_{local}(\mathbb{R}_+)$, entonces $h \in C(\mathbb{R}_+)$.

Por ejemplo, si tomamos el peso de Bernstein $\omega_0 = e^x$, entonces $\omega_0 \in Lip^\alpha_{local}(\mathbb{R}_+)$.

Sea ω un peso de tipo Bernstein y $h \in Lip^\alpha_{local}(\mathbb{R}_+)$.

Definamos

$$\theta_\omega^\alpha(h,\delta) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+ \\ 0<t\leq\delta}} \frac{|h_t(x)-h(x)|}{t^\alpha \omega(x)},$$

donde: $h_t(x) = h(x+t)$. Observe que $\theta_\omega^\alpha(h,\delta)$ es creciente en δ y que podría ser finito o infinito. Además, de la condición $h \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$, no se infiere que $h_t \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$, como lo demuestra el ejemplo $\omega(x) = \exp(x^2)$ y la función $h(x) = \exp(x^2)/(1+x)$.

Definición 3.3. Diremos que $h \in C_\omega(\mathbb{R}_+) \cap Lip_{local}^\alpha(\mathbb{R}_+)$ es de Hölder de orden α respecto del peso tipo Bernstein ω, y lo denotaremos por $h \in Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$, si y sólo si

$$\theta_\omega^\alpha(h) = \sup_{0<\delta\leq 1} \theta_\omega^\alpha(h,\delta) = \theta_\omega^\alpha(h,1) < \infty.$$

Teorema 3.2. Con las operaciones usuales, $Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$ define un espacio lineal real, sobre el cual $\theta_\omega^\alpha(\cdot)$ en una seminorma y con la norma

$$\|\cdot\|_{Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)} = \|\cdot\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} + \theta_\omega^\alpha(\cdot),$$

en un espacio de Banach.

Demostración:

Probaremos solamente la completitud, pues lo demás es sencillo.

Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_{Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)}$. Como $\|\cdot\|_{Lip_\omega^\alpha(R_+)} = \|\cdot\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} + \theta_\omega^\alpha(\cdot)$, claramente $\|\cdot\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq \|\cdot\|_{Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)}$ (pues $\theta_\omega^\alpha(\cdot) \geq 0$ por ser una seminorma), esto significa que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C_\omega(\mathbb{R}_+)$ y como $C_\omega(\mathbb{R}_+)$ es completo, $(f_n) \to f$ con $f \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$, es decir, $\|f_n - f\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \to 0$.

Así que sólo resta probar que $f \in Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$ y que $\theta_\omega^\alpha(f_n - f) \to 0$. Esto último quiere decir que $f_n - f \in Lip_{local}^\alpha(\mathbb{R}_+)$ y que para cada $\epsilon > 0$ dado, existe N natural, tal que para toda $n \geq N$.

$$\theta_\omega^\alpha(f_n - f) = \sup_{0<t\leq 1} \left\| \frac{(f_n)_t - f_t - f_n + f}{t^\alpha \omega} \right\|_\infty \leq \epsilon.$$

Para cualquier intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, se tiene que,

$$\theta^\alpha_{[a,b]}(f_n - f) \leq C\theta^\alpha_\omega(f_n - f) < \infty,$$

donde C es una constante que depende de $[a,b]$ y ω.

Utilizando los resultados clásicos para espacios de Lipschitz sobre intervalos finitos y siendo f_n de Lipschitz en $[a,b]$, se deduce igualmente que f y $f_n - f$ están en $Lip^\alpha_{local}(\mathbb{R}_+)$.

Demostremos ahora que para n suficientemente grande se tiene que,

$$\theta^\alpha_\omega(f_n - f) \leq \epsilon. \tag{3.1}$$

Como $\theta^\alpha_\omega(f_n - f_m)$ es de Cauchy existe N_1 tal que, si $n, m \geq N_1$, y $0 < t \leq 1$

$$\left\| \tfrac{(f_{n_t} - f_{m_t}) - (f_n - f_m)}{\omega} \right\|_\infty \leq \tfrac{\epsilon}{3} t^\alpha.$$

Fijemos arbitrariamente $n \geq N_1$.

Para demostrar (3.1) fijemos arbitariamente $t \in (0,1]$.
Tomemos N_2 que depende también de t, tal que, si $m \geq N_2$ se tenga

$$\|f_m - f\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq \tfrac{\epsilon}{3} t^\alpha.$$

Fijemos un m^* auxiliar tal que $m^* \geq \max(N_1, N_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|(f_{n_t} - f_t) - (f_n - f)\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} &\leq \|(f_{n_t} - f_{m^*_t}) - (f_n - f_{m^*})\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \\
&\quad + \|f_{m^*_t} - f_t\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} + \|f_{m^*} - f\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \\
&\leq \epsilon t^\alpha.
\end{aligned}$$

O sea, que para todo $n \geq N_1$

$$\theta^\alpha_\omega(f_n - f) = \sup_{0<t\leq 1} \left\| \frac{(f_n - f)_t - (f_n - f)}{t^\alpha} \right\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq \epsilon,$$

como se quería demostrar. De aquí también se implica que $(f_n - f) \in Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$.
Pero $Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$ es un espacio vectorial. Luego $f = f_n - (f_n - f) \in Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$ con lo cual finaliza la demostración.

■

Como en los espacios de Lipschitz usuales introduzcamos el subespacio de Banach de $Lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+})$, dado por

$$lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+}) \doteq \{f \in Lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+}) : \theta_{\omega}^{\alpha}(f,\delta) \to 0, \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0\},$$

donde como antes

$$\theta_{\omega}^{\alpha}(f,\delta) \doteq \sup_{0<t\leq\delta} \left\| \frac{f_t - f}{t^{\alpha}\omega} \right\|_{\infty} = \sup_{0<t\leq\delta} \left\| \frac{f_t - f}{t^{\alpha}} \right\|_{C_{\omega}(\mathbb{R}_{+})}.$$

Por construcción, $\theta_{\omega}^{\alpha}(f,\delta)$ es un módulo de continuidad en $lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+})$. La aproximación constructiva de funciones en $lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+})$ mediante Splines en $S_k(\mathbb{R}_{+})$, es un problema aparentemente difícil, si es que fuese posible resolverlo. Para mostrar algunas dificultades, veamos grosso modo un ejemplo. Dados $\omega, f \in lip_{\omega}^{\alpha}(\mathbb{R}_{+})$ y $\epsilon > 0$, si intentamos el método de aproximación relativamente simple de definir un polinomio (por ejemplo $B_n(f,x)$, de Bernstein) en $[0,M]$ y el Spline $S \in S_1(\mathbb{R}_{+})$ mediante:

$$S(x) = \begin{cases} B_n(f,x) & \text{si } x \in [0,M] \\ B_n^{'}(f,x)(x-M) + f(M) & \text{si } x \geq M, \end{cases}$$

podríamos obtener en el caso de polinomios de Bernstein $B_n(f,x)$ y con una utilización adecuada del teorema de Elliott, una mayoración de $B_n^{'}(f,x)$ en función de $\theta_{[0,M]}^{\alpha}(f)$.

Pero sólo sabemos que

$$\theta_{[0,M]}^{\alpha}(f)/\omega(M),$$

se mantiene acotado, por lo que

$$\theta_{[0,M]}^{\alpha}(f)x/\omega(x) \leq \epsilon,$$

que es una desigualdad necesaria para acotar $\theta_{\omega}^{\alpha}(S-f)$ en el proceso de aproximación, no se puede establecer a priori. Esto nos conduce a buscar una aproximación mediante Splines menos exigentes, es decir, con $S \in S_0(\mathbb{R}_{+})$ como en el caso uniforme.

Fijemos entonces la suposición relativamente más sencilla de que $S(x) = f(M)$ para $x \geq M$. En el cálculo de $\theta_{\omega}^{\alpha}(S-f)$ y para valores $x \geq M$, nos quedaría una expresión del tipo

$$R(M) = \sup_{\substack{x \geq M \\ 0<t\leq 1}} \frac{|\Delta_t f(x)|}{\omega(x)},$$

que estaría acotada por $\theta_\omega^\alpha(f) < \infty$, pero no necesariamente se cumplirá

$$R(M) \to 0 \quad \text{cuando} \quad M \to \infty,$$

como se necesitaría en el proceso de demostración para fijar previamente M en función de ϵ.

Profundizando en este problema, observamos que en el caso de aproximación polinomial en intervalos finitos, la condición $f \in lip^\alpha(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < 1$, es necesaria porque cualquier polionomio la satisface. De hecho aquí se necesita $f \in lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$ para tener $f \in lip^\alpha([0, M])$ y aproximar a f en norma de Hölder en ese intervalo. En efecto, para examinar si $f \in lip^\alpha([0, M])$; con el conocimiento previo de que $f \in lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$, basta tomar $\delta \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta_{[0,M]}^\alpha(f, \delta) &= \sup_{\substack{x\in[0,M] \\ 0<t\leq\delta}} \frac{|\Delta_t f(x)|}{t^\alpha} \\
&= \sup_{\substack{x\in[0,M] \\ 0<t\leq\delta}} \left(\frac{|\Delta_t f(x)|}{\omega(x)t^\alpha}\right) \cdot \omega(x) \\
&\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+ \\ 0<t\leq\delta}} \left(\frac{|\Delta_t f(x)|}{\omega(x)t^\alpha}\right) \cdot \omega(M) \\
&= \theta_\omega^\alpha(f, \delta)\omega(M) \to 0; \quad \textit{cuando} \quad \delta \to 0,
\end{aligned}$$

luego si $f \in lip_\omega^\alpha((R_+))$, entonces $f|_{[0,M]} \in lip^\alpha([0, M])$.

¿Qué sucedería para una aproximación polinomial en $lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$, atendiendo a valores altos de la variable x?

Veamos:

Sea P un polinomio y $0 < \alpha < 1$. Para $0 < t \leq 1$ se tiene aplicando el teorema del Valor Medio, que

$$\left|\frac{\Delta_t P(x)}{t^\alpha}\right| = |P^{'}(\xi)|t^{1-\alpha},$$

donde ξ es un punto entre x y $x+t$. Significa que, para todo polinomio P y $n \in \mathbb{N}$, si $\delta \leq 1$,

$$\theta^\alpha_{[n,n+1]}(P,\delta) \leq \theta^\alpha_{[n,n+1]}(P,1) \leq \|P^{'}\|_{[n,n+1]},$$

Pero $P^{'}$ es también un polinomio, luego por definición de peso tipo Bernstein ocurre que

$$\sup_{\substack{x\geq M \\ 0<t\leq 1}} \left|\frac{\Delta_t P(x)}{\omega(x)t^\alpha}\right| \to 0, \quad \textit{cuando} \quad M \to \infty. \tag{3.2}$$

Esto nos conduce a la definición siguiente:

Definición 3.4. Diremos que una función $f \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$ esta en la clase de Hölder pequeña (para diferenciar de la clase Lipschitz pequeña $lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$) y lo denotaremos por $f \in hol^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$, si $f \in lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$ y si

$$\sup_{\substack{x\geq M \\ 0<t\leq 1}} \frac{|\Delta_t f(x)|}{\omega(x)t^\alpha} \to 0, \quad \textit{cuando} \quad M \to \infty.$$

Debido a la propiedad (3.2) se tiene que si P es un polinomio, entonces $P \in hol^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$.

De manera más general, si $\mathbb{P}$ designa el espacio lineal de todos los polinomios algebraicos, y ω es un peso de tipo Bernstein, entonces

$$\mathbb{P} \subset hol^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+) \subset lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+) \subset Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+) \subset C_\omega(\mathbb{R}_+).$$

Por construcción, para aproximar polinomialmente en $\|\cdot\|_{Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)}$ una función f, se necesita que $f \in hol^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$. Esta propiedad, al menos para la aproximación mediante Splines, puede ser suficiente como lo muestra el teorema final siguiente.

Teorema 3.3. Sea $f \in hol^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $S \in S_0(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|S - f\|_{Lip^\alpha_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq \epsilon.$$

Demostración:

Sean $f \in hol^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_+)$ y $\epsilon^{'} > 0$ dados. Debemos primeramente seleccionar $M > 0$ para el cual se cumplan simultaneamente

(i) $\sup\limits_{x\geq M} \dfrac{|f(x)|}{\omega(x)} \leq \epsilon^{'}$, (posible pues $f \in C_{\omega}(\mathbb{R}_+)$),

(ii) $\sup\limits_{\substack{x\geq M\\ 0<t\leq 1}} \dfrac{|\Delta_t f(x)|}{\omega(x)t^{\alpha}} \leq \epsilon^{'}$, (posible pues $f \in hol^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_+)$).

En ([Bustamante y Jiménez, 2000]), se demuestra que si $f \in lip^{\alpha}([0, M])$ y si $\eta > 0$ es dado, entonces existe un polinomio de Bernstein $B_n(f, x)$ en $[0, M]$, tal que

$$\|B_n(f, x) - f\|_{Lip^{\alpha}([0,M])} \leq \eta.$$

Definimos una función S mediante

$$S(x) = \begin{cases} B_n(f, x) & \text{si } x \in [0, M] \\ f(M) & \text{si } x \geq M, \end{cases}$$

donde $B_n(f, x)$ esta dado por el teorema de Bustamante-Jiménez, con $\eta = \epsilon^{'}$.

Esta claro que $S \in S_0(\mathbb{R}_+)$ por construcción, con un único nodo en el punto M, donde S interpola a f por las propiedades de interpolación en los extremos del intervalo del polinomio de Bernstein.

Tenemos que

$$\|f - S\|_{C_{\omega}(\mathbb{R}_+)} = \text{máx}\left(\sup_{x\in[0,M]} \frac{|(f - S)(x)|}{\omega(x)}, \sup_{x\geq M} \frac{|(f - S)(x)|}{\omega(x)}\right).$$

Por un lado,

$$\sup_{x\in[0,M]} \frac{|(f - S)(x)|}{\omega(x)} \leq \frac{\|f - S\|_{Lip^{\alpha}_{[0,M]}}}{\omega(0)} \leq \frac{\epsilon^{'}}{\omega(0)}.$$

Por otro,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\geq M}\frac{|(f-S)(x)|}{\omega(x)} &= \sup_{x\geq M}\frac{|f(x)-f(M)|}{\omega(x)}\\
&\leq 2\sup_{x\geq M}\frac{|f(x)|}{\omega(x)}\\
&\leq 2\epsilon^{'}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|f-S\|_{C_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq 2\epsilon^{'} + \frac{\epsilon^{'}}{\omega(0)}. \tag{3.3}$$

Veamos ahora con $\theta_\omega^\alpha(f-S)$. Se tiene igualmente que

$$\theta_\omega^\alpha(f-S) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+\\ 0<t\leq 1}}\frac{|\Delta_t(f-S)(x)|}{\omega(x)t^\alpha} \leq \Lambda_1+\Lambda_2,$$

donde

$$\Lambda_1 = \sup_{\substack{x\in[0,M]\\ 0<t\leq 1}}\frac{|\Delta_t(f-S)(x)|}{\omega(x)t^\alpha},$$

y

$$\Lambda_2 = \sup_{\substack{x\geq M\\ 0<t\leq 1}}\frac{|\Delta_t(f-S)(x)|}{\omega(x)t^\alpha}.$$

Veamos que en Λ_1, si $x+t>M$, con $x\neq M$, y $S(x+t)=f(x+t)=f(M)$ y por tanto existe $\gamma>0$, tal que $x+\gamma=M$ y

$$\frac{|\Delta_t(S-f)(x)|}{\omega(x)t^\alpha} = \frac{|\Delta_\gamma(S-f)(x)|}{\omega(x)t^\alpha} \leq \frac{|\Delta_\gamma(S-f)(x)|}{\omega(x)\gamma^\alpha}.$$

O sea, que utilizando limites para tratar el caso $x=M$, deducimos que

$$\Lambda_1 \leq \sup_{\substack{x,x+t\in[0,M]\\ 0<t\leq 1}}\frac{|\Delta_t(S-f)(x)|}{\omega(x)t^\alpha}. \tag{3.4}$$

Por definición, si $g\in C_{[0,M]}$,

$$\theta^{\alpha}_{[0,M]}(g) = \sup_{\substack{x,x+t\in[0,M]\\ t\in\mathbb{R}_+}} \frac{|\Delta_t g(x)|}{t^{\alpha}}.$$

La condición $t \in \mathbb{R}_+$ puede cambiarse de inmediato por $t \in [0, M]$, pues si $x, x - t \in [0, M]$, con $t > 0$, definimos $y = x - t$ y $x = y + t$, para tener de inmediato

$$|f(x-t) - f(x)| = |f(y+t) - f(y)|,$$

mientras que, si $t > M$, obviamente $x + t \notin [0, M]$. Luego, para cualquier $g \in C_{[0,M]}$, se tiene

$$\theta^{\alpha}_{[0,M]}(g) = \sup_{\substack{x,x+t\in[0,M]\\ 0<t\leq M}} \frac{|\Delta_t g(x)|}{t^{\alpha}}.$$

Así que de (3.5) deducimos

$$\Lambda_1 \leq \theta^{\alpha}_{[0,M]}(S-f)/\omega(0) = \theta^{\alpha}_{[0,M]}(B_n(f,x)-f)/\omega(0) \leq \epsilon^{'}/\omega(0). \tag{3.5}$$

Para acotar Λ_2 utilizamos que $f \in hol^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_+)$.

En efecto, si $x \geq M$ y $0 < t \leq 1$, se tiene

$$|\Delta_t(S-f)(x)| = |f(M) - f(x+t) - f(M) + f(x)| = |\Delta_t f(x)|.$$

Luego por la desigualdad (ii) utilizada para definir M, se tiene que

$$\Lambda_2 \leq \epsilon^{'}. \tag{3.6}$$

De (3.3),(3.5) y (3.6) se tiene

$$\|S - f\|_{Lip^{\alpha}_{\omega}(\mathbb{R}_+)} \leq 3\epsilon^{'} + 2\epsilon^{'}/\omega(0) = c\epsilon^{'} \leq \epsilon,$$

si comenzaramos tomando $\epsilon^{'} = \epsilon/c$.

■

Conclusiones

Hemos introducido el concepto de peso tipo Bernstein, en $\mathbb{R}_+$ y dado ω en esta clase, también los espacios de $Lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$ y $lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$.

Para que una función $f \in C_\omega(\mathbb{R}_+)$ pueda ser aproximada polinomialmente en los subintervalos finitos de $\mathbb{R}_+$, en norma de Hölder, se necesita que $f \in lip_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$; pero para el intervalo $\mathbb{R}_+$ esta condición necesaria debe ser más exigente. Este análisis conduce a la definición de espacios de Hölder pequeños $hol_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$.

Finalmente, si $f \in hol_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$, hemos sido capaces de aproximar f en norma de Hölder mediante Splines en $S_0(\mathbb{R}_+)$ de manera constructiva.

Queda abierto un problema nuevo que parece interesante y difícil:
¿Si $f \in hol_\omega^\alpha(\mathbb{R}_+)$, podrá f aproximarse polinomialmente en la norma de Hölder?

Bibliografía

Bustamante, J. y Jiménez, M. A. (1999). *The Degree of Best Approximation in the Lipschitz Norm by Trigonometric Polynomials*. Aportaciones Matemáticas SMM, Serie Comunicaciones 25.

Bustamante, J. y Jiménez, M. A. (2000). *From Chebyshev to Hölder Approximation*. Aportaciones Matemáticas SMM, Serie Comunicaciones 27.

Bustamante, J. y Jiménez, M. A. (2001). *Trends in Hölder Approximation*. Marc Lassonde, Physica-Verlag.

C. de Boor, K. H. y Riemenschneider, S. (1993). *Box Splines*. Springer verlag, New York.

Dahmen, W. y Micchelli, C. A. (1987). *On theory and application of exponential splines, in Topics in Multivariate Approximation*. Academic Press, New York,.

de Boor, C. (1976). *Splines as linear combinations of B-Splines: A Surveys*. Approximation theory II, Academic Press, New York.

de Boor, C. (2001). *A practical Guide to Splines*. Springer verlag, New York.

DeVore, A. y Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*. Springer-Verlag,New York.

Elliott, D. (1994). *On the Hölder semi-norm of the remainder in polynomial approximation*. Bull. Austral. Math. Soc.

Jiménez, M. A. y Martínez, G. (2001). *Equilipschitzian sets of Hölder integrable functions*. Aportaciones Matemáticas SMM. Serie Comunicaciones, Nr. 29.

Lorentz, G. G. V. M. G. y Makovoz, Y. (1996). *Constructive Approximation(Advanced Problems)*. Springer-Verlag, New York.

Massopust, P. (2010). *Interpolation and Approximation with Splines and Fratals*. Oxford University Press, Inc.

Morales, J. M. H. (2012). *Espacios de Lipschitz con normas asimétricas*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Puebla, México.

Pinkus, A. (2005). *Density in Approximation Theory*. Department of Mathematics, Technion, Haifa, 32000, Israel.

Prenter, P. M. (1975). *Splines and Variational Principles*. John Wiley, New York.

Schumaker, L. L. (1993). *Spline Functions: Basic Theory*. Krieger Publishing Company.

Weaver, N. (1999). *Lipschitz Algebras*. World Scientific.

Índice alfabético