Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Un acercamiento al problema del subespacio invariante

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Alma Yasmin Luciano Gerardo

Director de tesis

Dr. Slavisa Djordjevic

Puebla, Pue. Mayo de 2018

Dedico la presente tesis a la memoria de
mamá Agus,
mi ejemplo a seguir.
Por sembrarme tantos anhelos y ganas de vivir,
tu valor me enseñó a luchar por lo que quiero,
tu amor me mostró un mundo hermoso
lleno de cosas por aprender
y tu ausencia, a valorar todo lo que tengo.
Recuerda que en este mundo existe alguien que te ama
y te tiene en su corazón y en su mente.

Agradecimientos

A mi asesor, Dr. Slavisa Djordjevic, por aceptar dirigir mi tesis, por todo el apoyo que me ha brindado, por los consejos con los que me ha guiado y porque es uno de los mejores profesores que he tenido en la facultad.

A mi jurado, Dr. Gabriel Kantún Montiel , Dr. Agustín Contreras Carreto y Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por tomorse el tiempo para leer ésta tesis y hacer la correciones necesarias a la misma.

A la Dra. Helena F. Carcedo, por sus valiosas aportaciones a esta tesis, por toda su amabilidad y grandes enseñanzas.

A los profesores que durante mi carrera me brindaron su conocimiento y a los cuales admiro por su desempeño especialmente al Lic. Celestino Soriano Soriano, al Dr. Agustín Contreras Carreto y al Dr. Gerardo Torres del Castillo a quienes no sólo admiro y respeto por su arduo trabajo sino también como personas.

A los tres mosqueteros, que desde que los conocí me apoyaron en las cuestiones académicas.
Kike: por todo el esmero con el que me ayudaste en la realización de esta tesis.
Ricardo: cada asesoría que me has dado ha sido fulminante (en especial en ésta tesis) y como amigo eres mucho mejor.
Iván: Fuiste el primero que me ayudó, incluso sin conocerme.

A mis hermanos, Dulce, Roque, Karen y John, que siempre han sido mis amigos incondicionales, con quienes he pasado las aventuras más grandiosas (las cuales podrían ser narradas en un libro alguna vez), y con quienes aprendí a amar la vida. Jamás me cansaré de agradecer que ustedes sean mis hermanos, los amo.

A mamá Rafa, usted siempre ha sido mi madre, le agradezco todos sus cuidados y amor. Gracias por enseñarme que es posible mejorar siempre y mostrarme esa enorme capacidad para amoldarse a un nuevo entorno. Usted fue educada en otra época pero definitivamente esto no le venda los ojos, está dispuesta a ver más allá, la quiero mucho mamá.

A mis tíos, Lupita (la persona más incondicinal y hermosa que conozco), Corazón (a quien admiro por su fuerza de voluntad y capacidad para ayudar a los demás), Armando (un tío que a mis hermanos y a mi nos ha ofrecido su mano incondicionalmente), Rosario (Chayito, creo que mamá nos encomendo contigo; Yas, no debes tomar coca antes de desayunar, Roque, no llegues tarde que preocupas a tus hermanas), Emilio (por ayudarnos cuando lo necesitamos), Jaime (porque estas presente mi vida desde que recuerdo, nos ayudado a mudarnos, me acompañaste cuando me presenté por primera vez en CONAFE y porque fuiste la mano derecha de mamá), Rosa (por mi bonita infancia a tu lado y por ayudarnos en todo lo que puedes), Víctor (por nuestro juego de

infancia), Eugenio (por ser un modelo a seguir) y Lulú (por regalarme un hermano) en quienes siempre he podido confiar y a quienes debo mucho, en especial poder terminar esta licenciatura, valoro todos sus consejos (creanme, los tomo siempre en cuenta).

A papá por aquellas ocasiones en las que me dio una alternativa, cuando era niña (ese pacto de la tienda de la esquina es algo que jamás podre olvidar), por los paseos en tractor y todos esos momentos familiares que pasamos juntos.

A David Silva, por ser mi Zen, quien pese a estar muy ocupado, escapa de su castillo para verme un momento, platicar y sonreír. Por toda la confianza que me otorgas, esa amistad entrañable que me has ofrecido y el apoyo en ésta tesis.

A mis amigos y colegas: Jonathan (el cometa dorado), Rubén (la función coseno), Erick y Alberto con quienes el cálculo y el álgebra fueron las materias más divertidas de la facultad.

A Rosana Gavito, José Antonio Medina, Gabi, Ros, Paula y Pepe por todo su apoyo a lo largo de mi carrera mientras viví con ustedes.

Al Lic. Antonio Gali, porque cuando más lo necesitaba me regaló una computadora, la cual me es muy útil, sin perdir pedir nada a cambio, más que la satisfacción de ayudar a alguien que trabaja mucho.

A Marco, Hugo, Phebe, Lana, David, Hernán, Osmart, Tania, Ángel y todos los que me dejaron un pedacito de su corazón y a los que yo les dí otro del mío.

¡Ustedes hacen genial este mundo!

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar
mediante el estudio
servirle de ayuda y ornato.”
Francis Bacon.

“Si la gente no piensa que
las matemáticas son simples,
es sólo porque no se dan
cuenta de lo complicada que es
la vida”
John Von Neumann

Índice general

Un acercamiento al problema del subespacio invariante

Alma Yasmin Luciano Gerardo

Mayo de 2018

Introducción

El problema del subespacio invariante es uno de los más conocidos y discutidos en las matemáticas, especialmente en el área de análisis funcional. El problema lo planteó John Von Neumann en los años 30 del siglo pasado y desde entonces tenemos sólo respuestas parciales, aunque muchos matemáticos han trabajado en su solución (entre ellos el mismo Neumann).

La motivación de este problema tiene sus raíces en la siguiente propiedad de un operador lineal en espacios de dimensión finita:
Sea T un operador continuo en un espacio vectorial V de dimensión n y sean λ_1,..., λ_m sus valores propios ($m \leq n$). Entonces, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, $Ker(T - \lambda_i I)$ es un subespacio invariante no trivial de tal suerte que V se puede descomponer como una suma directa de ellos.

La pregunta natural que surge de lo anterior es: ¿Será igualmente aplicable a un espacio de dimensión arbitraria? E inmediatamente nos preguntamos ¿Al menos podemos garantizar la existencia de un subespacio invariante?

Con el tiempo se fueron resolviendo casos de diferentes espacios vectoriales, como los de los espacios de Hilbert no separables, los espacios de Hilbert de dimensión finita, y los espacios de Banach. En este trabajo se discutirá el problema del subespacio invariante planteado de la siguiente manera:

¿Todo operador continuo definido en un espacio de Hilbert separable y

de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial?

El propósito de esta tesis es proporcionar una pequeña introducción a esta pregunta abierta y mostrar algunas soluciones parciales que se han obtenido. La tesis está organizada de la siguiente manera:

El capítulo 1 está formado por definiciones y algunos resultados de álgebra sobre espacios vectoriales y operadores, esto con la intención de proporcionar un primer acercamiento a los subespacios invariantes que abordaremos en el capítulo 3.

En el capítulo 2 se desarrolla la teoría para plantear el problema en espacios de Hilbert, y para trabajar con algunas soluciones parciales de éste en el capítulo 4. También se definen los espacios de Banach y de Hilbert, operadores acotados sobre ellos y se incluye un poco de teoría de la medida.

En el capítulo 3 nos cuestionamos la existencia de subespacios no triviales $T-$invariantes en espacios vectoriales. Primero hablamos de algunos subespacios $T-$invariantes y los casos en los que éstos no son triviales. En seguida examinamos los espacios vectoriales de dimensión finita y dividimos el problema en dos casos: sobre $\mathbb{C}$ y después sobre $\mathbb{R}$ (en los cuales no podemos asegurar la existencia de valores propios). Finalmente discutimos el caso de los espacios vectoriales de dimensión infinita.

Iniciamos el capítulo 4 redefiniendo el concepto de subespacio $T-$invariante en espacios con producto interior (normado). En seguida demostramos una caracterización de éstos. A continuación incluimos un ejemplo en el espacio completo $L^2[0,1]$, para dar paso al análisis en los espacios de Hilbert (Banach). Dedicamos la sección 4.3 al teorema de Lomonosov, debido a que durante un tiempo se especuló que era la solución. En la última sección se realiza un resumen de las respuestas parciales que nos conducen a la actual formulación del problema.

El Apéndice A está dedicado a conceptos de conjuntos que se utilizan en esta tesis.

En el Apéndice B recordamos cómo se define el determinante de una matriz.

En el Apéndice C se hace énfasis en el teorema espectral debido a que es la motivación de este problema.

Capítulo 1

Espacios vectoriales y operadores

En este capítulo se recuerda la teoría necesaria para el desarrollo de los siguientes capítulos, tomada de: [2], [6], [8], [10],[11], [12], [18]. La mayor parte de estos resultados no se prueban, por lo que es importante que el lector revise estos libros (u otros de su preferencia) para profundizar en los temas que a continuación se tratan.

1.1. Espacios vectoriales

La próxima definición, en los libros de álgebra, se da sobre cualquier campo K, pero los campos que usaremos en este texto sólo serán $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1. *Un conjunto no vacío V se dice que es un espacio vectorial sobre un campo K, si en V están definidas dos operaciones binarias, denotadas por + (llamada suma, que es una operación interior) y $\cdot$ (producto por un escalar, que es una operación exterior) tales que para cualesquiera $x, y, z \in V$ y cada α, $\beta \in K$ se cumple:*

V1) $x + y \in V$ *y* $\alpha \cdot x \in V$*;*

V2) $x + y = y + x$ *;*

V3) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *;*

V4) existen 0, 1 $\in V$ *tales que* $x + 0 = x$ *y* $1 \cdot x = x$*;*

V5) existe $-x \in V$ *tal que* $x + (-x) = 0$*;*

V6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$*;*

V7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$*;*

V8) $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$.

En adelante usaremos $\alpha \cdot x = \alpha x$, $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ y llamaremos a los elementos de V vectores.

Mostramos algunos espacios vectoriales.

Ejemplo 1.1.1. *El conjunto* $\{0\}$ *es el espacio vectorial nulo.*

Ejemplo 1.1.2. *Los campos* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *también son espacios vectoriales sobre los campos* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, *respectivamente.*

Nota 1.1.1. *El espacio vectorial* $\mathbb{C}$ *en ocasiones lo tratamos sobre* $\mathbb{R}$, *pero en esos casos lo mencionamos.*

Ejemplo 1.1.3. *En general, para cualquier campo* K, K^n *(para* $n \in \mathbb{N}$*) es un espacio vectorial.*

Nota 1.1.2. *Los elementos de* K^n *solemos escribirlos así:*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

donde cada $a_i \in K$.

Definición 1.1.2. *Una matriz de tamaño* $m \times n$ *con valores en el campo* K *es un arreglo rectangular de la forma:*

$$A_{mn} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde cada elemento a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ *pertenece a* K.

Ejemplo 1.1.4. *[6, pág. 8] El conjunto* $M_{m\times n}(K)$ *de matrices de* $m \times n$ *con valores en* K *es un espacio vectorial.*

Definición 1.1.3. *Un polinomio con coeficientes en un campo* K *es una expresión de la forma:*

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

donde n *es un entero no negativo y* $a_n, ..., a_0 \in K$.

Definición 1.1.4. *El grado de un polinomio es:*

I) -1 *si* $a_n = ... = a_0 = 0$.

II) *De otra forma se define el grado de un polinomio como el mayor exponente de* x *que aparece en la expresión*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

correspondiente a un coeficiente no nulo.

III) *Denotamos el grado de un polinomio* $p(x)$, *por* $gr\,(p(x))$.

Dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de potencias iguales son iguales.

Definición 1.1.5. *En el polinomio*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

cuando $a_n \neq 0$, a_n *se llama coeficiente principal.*

Ejemplo 1.1.5. *[6, pág. 9] Sean* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ *polinomios con coeficientes en el campo* K. *Supongamos que* $m \leq n$ *y definamos*

$$b_{m+1} = ... = b_n = 0.$$

Entonces $g(x)$ *se puede escribir como* $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x^i$. *Definimos*

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

y para cada $c \in K$,

$$cf(x) = \sum_{i=0}^{n} ca_i x^i.$$

Con estas operaciones, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en K, *que denotaremos con* $P(K)$, *es un espacio vectorial.*

Teorema 1.1.1. *[6, pág. 12] Sea* V *un espacio vectorial, entonces se cumple:*

I) *0v=0 para cada* $v \in V$.

II) *a0=0 para cada* $a \in K$.

Definición 1.1.6. *Si* V *es un espacio vectorial sobre* K *y si* $W \subseteq V$, *entonces* W *es un subespacio de* V *si bajo las operaciones de* V, W *forma un espacio vectorial sobre* K.

El siguiente resultado nos muestra una forma fácil de afirmar si W es un subespacio de V.

Teorema 1.1.2. *[6, pág. 17] Si* V *es un espacio vectorial sobre* K *y si* $W \subseteq V$, *entonces* W *es un subespacio de* V *siempre que*

I) $0 \in W$,

II) para cada w_1, $w_2 \in W$, *y cualesquiera* $\alpha, \beta \in K$, *se cumple que*

$$\alpha w_1 + \beta w_2 \in W.$$

En lo sucesivo, omitiremos varias veces que estamos trabajando en el espacio vectorial V sobre el campo K.

1.1.1. Bases y dimensión

Definición 1.1.7. *Sea* A *un subconjunto no vacío de* V, *y* $x \in V$. *Entonces* x *es una combinación lineal de* A, *si existen* $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in A$ *y* $\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ *tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Definición 1.1.8. *Sea* A *un subconjunto no vacío de* V, *el conjunto generado por* A, *denotado por* $gen\, A$, *es es el conjunto de todas las combinaciones lineales de* A.

Al generado por un único elemento w, lo escribiremos algunas veces simplemente como $gen\ \{w\}$ y el de un conjunto A como $gen\, A$ o también $gen\, \{x, y, ...\}$ si $A = \{x, y, ...\}$.

Cuando $A = \emptyset$, definimos $gen\, A := \{0\}$.

Teorema 1.1.3. *[6, pág. 30] El conjunto* gen A *es un subespacio de* V*.*

Definición 1.1.9. *El conjunto* A *genera a* V *si todo elemento de* V *puede escribirse como combinación lineal de elementos de* A*.*

Definición 1.1.10. *Dado un conjunto* $S = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$ *(con* $n \in \mathbb{N}$*), decimos que es linealmente dependiente si existen escalares* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *no todos ceros tales que:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

Definición 1.1.11. *El conjunto* S *es linealmente independiente si no es linealmente dependiente.*

Definición 1.1.12. *Una base del espacio vectorial* V *es un subconjunto finito linealmente independiente de* V *tal que cada vector en* V *es una combinación lineal de elementos del sistema.*

Definición 1.1.13. *Sea* V *un espacio vectorial. Una base ordenada para* V *es una base establecida con orden específico.*

Ejemplo 1.1.6. *Sea* V *un espacio vectorial tal que tenga a* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *como base ordenada. Entonces* $\{x_2, x_1, x_3\}$ *también es una base ordenada de V, pero son distintas como bases ordenadas.*

Definición 1.1.14. *Sea* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = A \subseteq X$*. Entonces,*

I) el conjunto A *es linealmente independiente sobre* K *si para todo subconjunto finito* $S = \{x_i, ..., x_j\}$ *de* A *es linealmente independiente.*

II) el conjunto A *es linealmente dependiente sobre* K *si no es linealmente independiente sobre* K*.*

Observación: Cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

Teorema 1.1.4. *[6, pág. 46] Cualesquiera dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.*

Ahora estamos listos para la siguiente definición:

Definición 1.1.15. *Sea V un espacio vectorial, dim V denota la dimensión de V, la cual está dada por:*

I) dim $V = 0$ si $V=\{0\}$,

II) dim $V < \infty$ (de dimensión finita) si dim $V = 0$ o existe una base con n elementos con $n \in \mathbb{N}$ (en tal caso, dim $V = n$),

III) V tiene dimensión infinita si no tiene dimensión finita.

A continuación se proporcionan algunos ejemplos para ilustrar la definición, en ellos el 0 y el 1 denotan al neutro aditivo y multiplicativo de K respectivamente.

Ejemplo 1.1.7. *K^n tiene dimensión n (con $n \in \mathbb{N}$), donde una base es* $\{(1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1)\}$.

Ejemplo 1.1.8. *$M_{m\times n}(K)$ (con $n, m \in \mathbb{N}$) es de dimensión mn. Una base es:*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{11} & 1_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 1_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 1_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 1_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 1_{mn} \end{pmatrix}\right\}.$$

Las bases anteriormente descritas se suelen llamar bases canónicas y se denotan por $e_1, ..., e_k$, donde k es el número de elementos de la base.

El siguiente ejemplo muestra que la dimensión de un espacio vectorial depende de su campo.

Ejemplo 1.1.9. *Sea $\mathbb{C}$ (espacio vectorial de los complejos),*

I) sobre el campo de los complejos, dim $\mathbb{C} = 1$ (una base es $\{1\}$);

II) sobre el campo de los reales (o visto como $\mathbb{R}^2$) , dim $\mathbb{C} = 2$ (una base es $\{1, i\}$).

Teorema 1.1.5. *[6, pág. 50] Sea V un espacio vectorial n-dimensional y W un subespacio de V. Entonces dim $W \leq n$. Más aún si, dim $W = n$, entonces $V = W$.*

Definición 1.1.16. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, ..., W_r$ subespacios de un espacio vectorial V. Definimos la suma de los subespacios como:*

$$\sum_{i=1}^{r} W_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} w_i \in V : w_i \in W_i \right\}.$$

Teorema 1.1.6. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, ..., W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. El subconjunto*

$$\sum_{i=1}^{r} W_i$$

es un subespacio de V.

Demostración. Ya que $0 \in W_i$ para cada $i = 1, ..., r$, se cumple que $0 \in \sum_{i=1}^{r} W_i$. Sean $x, y \in \sum_{i=1}^{r} W_i$ y $\alpha \in K$. Luego

I) $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ para algunos $x_i \in W_i$ con $i = 1, ..., r$.

II) $y = \sum_{i=1}^{r} y_i$ para algunos $y_i \in W_i$ con $i = 1, ..., r$.

De modo que $\alpha x + y = \sum_{i=1}^{r} \alpha x_i + y_i \in \sum_{i=1}^{r} W_i$. ■

Definición 1.1.17. *Sean $W_1, W_2, ..., W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. Escribiremos $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ y llamaremos a V la suma directa de $W_1, W_2, ..., W_k$ si*

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

y

$$W_i \bigcap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0\} \, para \, cada \, i (1 \leq i \leq k).$$

1.2. Operadores lineales

A continuación daremos la definición de un tipo función (véase el Apéndice A) definidas en espacios vectoriales que denominaremos operadores lineales.

Definición 1.2.1. *Sean V y W espacios vectoriales sobre K. La función $T : V \to W$ es un operador lineal si para cualesquiera $\alpha \in K$, x_1, $x_2 \in V$ se cumple que $\lambda T(x_1) + T(x_2) = T(\lambda x_1 + x_2)$.*

A los operadores lineales se les suele llamar transformaciones lineales.

Definición 1.2.2. *Sean V y W espacios vectoriales sobre K. Definimos*

$$L(V, W) = \{T \mid T : V \to W \, es \; un \; operador \; lineal\, \}.$$

Cuando $V = W$, escribimos $L(V)$. Nótese que $L(V)$ es un espacio vectorial, ya que I_V (el operador identidad) y $T = 0$ (operador nulo) son lineales y las demás propiedades se derivan de sus propiedades como funciones.

Definición 1.2.3. *Sea $T \in L(V, W)$.*

1. *La imagen de T es el subconjunto*

$$Im \, T := \{y \in W : existe \; x \in V \; tal \; que \; T(x) = y\}.$$

2. *El espacio nulo o kernel de T es el conjunto:*

$$Ker \; T := \{x \in V : T(x) = 0\}.$$

Teorema 1.2.1. *[6, pág. 68] Sea $T \in L(V, W)$, entonces,*

I) $Ker \; T$ es un subespacio de V,

II) $Im \; T$ es un subespacio de W.

1.2.1. Representación matricial

Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$, como sabemos, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ es base ordenada de $\mathbb{R}^2$, luego tenemos que se cumplen:

$$T(1, 0) = (1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2,$$
$$T(0, 1) = (1, -1) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2,$$

más aún, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cumple la siguiente condición para $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

dicho de otro modo, $Ax = T(x)$.

Este hecho es más que mera casualidad, veamos por qué sucede esto.

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo K, c=$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $d = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente, y $T \in L(V, W)$, entonces, $T(\alpha_j)$ está determinada por:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i, \tag{1.1}$$

donde $A_{1j}, ..., A_{mj}$ son los escalares de $T(\alpha_j)$ en la base ordenada c para cada $j \in \{1, ..., n\}$.

Además cada $y \in V$ es de la forma:

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j, \tag{1.2}$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
T(y) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\right) \text{ sustituyendo a } y\text{, ecuación 1.2.}\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j T\left(\alpha_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i\right) \text{ por la ecuación 1.1.}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_j A_{ij}\beta_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j A_{ij}\right)\beta_i.
\end{aligned}
$$

Definición 1.2.4. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo K, y $T \in L(V, W)$.*

I) El vector de coeficientes de y con respecto a la base ordenada c lo definimos como:

$$[y]_c := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

II) La matriz de coordenadas de $T(y)$ con respecto a la base ordenada d es:

$$[T(y)]_d := \begin{pmatrix} A_{11}x_1 & \cdots & A_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}x_1 & \cdots & A_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

cumple que $A[y]_c = [T(y)]_d$.

Resumiendo, tenemos:

Teorema 1.2.2. *[6, pág. 91] Sean V, W espacios vectoriales de dimensión n y m sobre el campo K, c y d bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada $T \in L(V,W)$, existe una matriz $m \times n$, A, cuyos elementos pertenecen a K, tal que para todo vector $y \in V$ se cumple $[T(y)]_d = A[y]_c$.*

La matriz A se llama matriz asociada a T, cuyas columnas $A_1, ..., A_n$ están dadas por $A_j = [T(\alpha_j)]_d$, $j = 1, ..., n$.

Más aún, A es un operador lineal denominado operador lineal asociado a A.

En este texto trabajaremos con operadores donde $W = V$, las cuales llamaremos operadores sobre V.

1.2.2. Rotación

Hablaremos de unos operadores particulares denominados rotaciones, pero lo haremos sólo para $\mathbb{R}^2$, pues en este texto es suficiente.

Definición 1.2.5. *Una rotación es un operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada está dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, y se denomina ángulo de rotación.

Definición 1.2.6. *Sea $(m,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Al conjunto L definido por $\{r(m,t) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$ lo llamaremos recta que pasa por el origen $\mathbb{R}^2$.*

Nota 1.2.1. *La recta L que pasa por el origen es un espacio vectorial de dimensión 1.*

Proposición 1.2.1. *Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen y T una rotación.*

I) Si $\theta = s\pi$ con $s \notin \mathbb{Z}$, $T(L) \nsubseteq L$.

II) Si $\theta = z\pi$ con $z \in \mathbb{Z}$, $L = T(L)$.

Demostración. Sea $g = (m, s)$ el vector generador de L.
I) Veamos que $T(g) \notin L$. Como T es una rotación, ocurre que:

$$\begin{aligned} T(g) &= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mcos(\theta) - tsen(\theta) \\ msen(\theta) + tcos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $T(g) \in L$, es decir, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$mcos(\theta) - tsen(\theta) = rm \tag{1.3}$$
$$msen(\theta) + tcos(\theta) = rt; \tag{1.4}$$

reacomodando tenemos:

$$mcos(\theta) - tsen(\theta) = rm, \tag{1.5}$$
$$tcos(\theta) + msen(\theta) = rt; \tag{1.6}$$

multiplicando por m a (1.5) y por t a (1.6):

$$m^2cos(\theta) - tmsen(\theta) = rm^2, \tag{1.7}$$
$$t^2cos(\theta) + tmsen(\theta) = rt^2, \tag{1.8}$$

de donde tenemos:

$$(m^2 + t^2)cos(\theta) = r(m^2 + t^2),$$

en consecuencia $r = cos(\theta)$; al sustituir en (1.6),

$$tr + msen(\theta) = tr.$$

En efecto, $sen(\theta) = 0$ lo que indica que $\theta = z\pi \in \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción, por tanto, $T(L) \nsubseteq L$.

II) Como z es un entero, tenemos que $sen(z\pi) = 0$ y los siguientes dos casos para $cos(z\pi)$.
Caso 1) Cuando z es par y por ello $cos(z\pi) = 1$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

T_1 es la identidad, por lo que cada recta es llevada a la misma recta, es decir, $T(L) = L$.
Caso 2) Cuando z es impar y por ello $cos(z\pi) = -1$.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Sea $r(m,s) \in L$, por consiguiente,

$$T(r(m,s)) = T(rm, rs) = (-rm, -rs) = -r(m,s) \in L;$$

en consecuencia, $T(L) \subseteq L$.

Por otro lado, para todo $r(m,s) \in L$ se cumple que:

$$T(-rm, -rs) = (rm, rs) = r(m,s).$$

Así, $L \subseteq T(L)$ ■

1.3. Valores propios

En este apartado continuamos trabajando con operadores lineales, pero incluiremos el estudio de unos vectores a los que se les asocia un escalar y que son de gran importancia en la teoría espectral.

Definición 1.3.1. *Sea $T \in L(V)$. El vector $v \in V \setminus \{0\}$ es un vector propio (eigenvector) de T si existe un escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$. El escalar λ es el valor propio (eigenvalor) correspondiente al vector propio v.*

Análogamente, si A es una matriz de $n \times n$ en un campo K, un elemento no nulo $v \in K^n$ se denomina vector propio de la matriz A, si v es un vector propio del operador asociado a A. Como en el párrafo anterior, el escalar λ se denomina valor propio de A correspondiente al vector propio v.

Definición 1.3.2. *Sean $T \in L(V)$ y λ un valor propio de T. Defínase a $E_\lambda := \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$. El conjunto E_λ se denomina el espacio* *propio (eigenespacio) de T correspondiente al valor propio λ. Como es de esperarse, por espacio propio asociado al valor propio λ de una matriz A entendemos el espacio propio correspondiente del operador asociado a A.*

Es importante notar que E_λ contiene al vector cero y a los vectores propios de T con respecto a λ.

Proposición 1.3.1. *Si v es un vector propio asociado a λ, entonces cualquier múltiplo x de v cumple que $T(x) = \lambda x$, más aún, si x no es cero, entonces es vector propio asociado a λ.*

Demostración. Sea $x = mv$ para algún $m \in K$; al aplicarle T a x, se obtiene:

$$T(x) = T(mv) = mT(v) = m(\lambda v) = (m\lambda)v = (\lambda m)m = \lambda(mv) = \lambda x.$$

Si $x \neq 0$, es evidente que x es un vector propio de T asociado a λ. ■

Proposición 1.3.2. *E_λ es un subespacio de V.*

Demostración. Sean x, $y \in E_\lambda$ y $\alpha, \beta \in K$. Se cumplen las siguientes igualdades :
$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$. Por consiguiente $\alpha x + \beta y \in E_\lambda$. Por tanto E_λ es un subespacio de V. ■

Obsérvese que:

$$E_\lambda := \{x \in V : T(x) = \lambda x\} = \{x \in V : T(x) - \lambda x = 0\} = Ker\ (T - \lambda I_V),$$

donde I_V es el operador identidad con respecto al espacio vectorial V.

Teorema 1.3.1. *[8, pág. 547] Sea $A \in M_{n\times n}(K)$. Entonces un escalar λ es un valor propio de A si y sólo si det $(A\text{-}\lambda I_n) = 0$, donde*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente concepto se define con el determinante de una matriz; si no recordamos cómo se determina esto, debemos ver el Apéndice B.

Definición 1.3.3. *Sea $A \in M_{n\times n}(K)$. El polinomio $f(\lambda) = det\,(A - \lambda I_n)$ es el polinomio característico de A.*

Cada vez que buscamos un valor propio, realmente estamos buscando un escalar λ tal que $f(\lambda) = 0$.

Teorema 1.3.2. *[6, pág. 249] Sea $A \in M_{nxn}(K)$.*

1. *El polinomio característico de A es de grado n.*

2. *A tiene a lo más n valores propios*

En consecuencia, si $T \in L(K^n)$, el polinomio característico de T es de grado n.

Capítulo 2

Operadores en espacios Hilbert

En el capítulo anterior hablamos de operadores lineales; en este capítulo se observan algunas propiedades en unos espacios vectoriales llamados espacios de Hilbert, en honor al matemático alemán David Hilbert (1862-1943), generalizados por Stefan Banach (1892-1941) en espacios que precisamente llevan su nombre.

Daremos los resultados en espacios de Banach, y como cada espacio de Hibert es un espacio de Banach, afirmaremos que cada resultado en los espacios de Banach es válido en los espacios de Hilbert.

2.1. Espacios normados

Primero hablemos de espacios que cuentan con una función llamada norma, que nos servirá para definir los espacios de Banach.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio vectorial sobre K (K=$\mathbb{R}$ o K=$\mathbb{C}$). La función $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ se llama norma en X si para cada x, $y \in X$ y para cualquier $t \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(N1) $\| x \| \geqslant 0$,

(N2) $\| x \| = 0 \iff x=0$,

(N3) $\| tx \| = | t | \, \| x \|$,

(N4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Si $\| \cdot \|$ es una norma en X, el par (X,$\| \cdot \|$) se llama espacio normado o espacio vectorial normado.

Ejemplo 2.1.1. *Los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son normados, a saber, con*

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

Definición 2.1.2. *Un subespacio A de un espacio normado X es un subespacio vectorial de X considerándolo como un espacio vectorial con la norma restringida a A.*

Definición 2.1.3. *Sean $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$*

a) *La **bola abierta** con centro en x y radio r es el conjunto: $B(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$.*

b) *La **bola cerrada** con centro en x y radio r es el conjunto: $\overline{B(x, r)} := \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$.*

Definición 2.1.4. *Un subconjunto A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un subconjunto abierto, si A es subespacio de X y para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.*

Definición 2.1.5. *Un subconjunto A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un subespacio abierto, si es abierto y es un subespacio de X.*

Definición 2.1.6. *Un subespacio B de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un subespacio cerrado si $X \setminus B = B^c$ es abierto.*

Definición 2.1.7. *Sea A un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, y $x \in X$. El punto x es un punto adherente de A si*

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ para toda } r \in \mathbb{R}^+.$$

La cerradura del conjunto A denotada por $\overline{A}$ es el conjunto de todos los puntos adherentes de A.

En particular $\overline{X} = X$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Teorema 2.1.1. *[16, pág. 29] Sea A un subconjunto de un espacio normado $(X, \| \cdot \|)$, entonces,*

1. *El conjunto $\overline{A}$ es cerrado. Más aún, $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

2. *A es cerrado si y sólo si* $A = \overline{A}$.

Definición 2.1.8. *Sea X un conjunto, una sucesión en X es una función* $f : \mathbb{N} \to X$, *que denotamos por* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, *donde cada* $x_i \in X$.

Definición 2.1.9. *Sea* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $(X, \|\cdot\|)$ *y* $x \in X$. *Diremos que la sucesión* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *converge a* x, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *de tal forma que para cada* $n \geq k$ *se cumple que* $\|x_n - x\| < \epsilon$. *En tal caso se escribe* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Teorema 2.1.2. *[16, pág. 55] Sea* $x \in X$, $x \in \overline{A}$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de elementos de A tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición 2.1.10. *Sea* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión; es de Cauchy si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *de tal forma que para cada* $m,n \geq k$ *se cumple que* $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.

Definición 2.1.11. *Un espacio normado es completo si toda sucesión de Cauchy converge.*

Definición 2.1.12. *Un subconjunto A de un espacio normado X es denso en X si* $\overline{A} = X$.

Definición 2.1.13. *El espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es separable si X contiene un subconjunto numerable denso en X.*

Definición 2.1.14. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Si*

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in G} U_\alpha \text{ y cada } U_\alpha \text{ un abierto en } X,$$

entonces decimos que la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in G}$ *es una cubierta abierta de A. Si* $G' \subseteq G$ *es tal que* $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in G'} U_\alpha$, *entonces decimos que la subfamilia* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in G'}$ *es una subcubierta de A. Si además* G' *es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una subcubierta finita de A.*

Definición 2.1.15. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Decimos que A es compacto si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.*

2.2. Operadores acotados y continuos

En los espacios normados podemos definir operadores continuos que son los operadores con los que trabajaremos en el Capítulo 4. La finalidad de esta sección es reunir algunos los resultados sobre éstos y su relación con los operadores acotados.

Con $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ denotamos dos espacios normados, pero varias veces prescindiremos de esta notación y escribiremos simplente X e Y.

Definición 2.2.1. *Sean $f : X \to Y$ una función, y $x_0 \in X$. Diremos que la función es continua en el punto x_0, si se cumple la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ tal que si $x \in X$, y $\|x - x_0\|_1 < \delta$, entonces $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < \epsilon$.*

Definición 2.2.2. *Sea $A \subseteq X$. Diremos que una función $f : X \to Y$ es continua en A si f es continua en cada punto de A; si $A = X$, diremos que f es continua en X.*

Definición 2.2.3. *Sean $f : X \to Y$ una función, y $x_0 \in X$. Diremos que la función es continua por sucesiones en el punto x_0 si f cumple la siguiente condición: para cada sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Teorema 2.2.1. *[16, pág. 65,67] Sean $f : X \to Y$ una función, y $x_0 \in X$. Son equivalentes:*

1. *f es continua en x_0.*
2. *f es continua en x_0 por sucesiones.*
3. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$.*

Teorema 2.2.2. *[16, pág. 66] Sean $f : X \to Y$ una función, y $x_0 \in X$. Son equivalentes:*

1. *f es continua en X.*
2. *Para cada abierto U de Y se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto.*

A continuación hablaremos de los operadores linales continuos y su relación con los operadores acotados.

Definición 2.2.4. *Sean $T \in L(X,Y)$.*

1. *T es continuo en X si es continuo como función.*

2. *T es acotado si existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\| T(x) \|_2 \leq r \| x \|_1$.*

Debemos tomar en cuenta que la definición de acotado no es la misma que usamos en cálculo. [1]

Teorema 2.2.3. *[12, pág. 97] Sea $T \in L(X,Y)$, entonces son equivalentes:*

1. *T es continuo en X,*

2. *T es acotado.*

Este teorema nos dice que el hecho de que T sea acotado equivale a cada afirmación hecha en los teoremas 2.2.1. y 2.2.2.

Definición 2.2.5. *Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ el conjunto de operadores acotados lo denotamos por:*

$$B(X,Y) := \{T \in L(X,Y) \mid T \text{ es acotado } \}.$$

Por el teorema anterior, $B(X,Y) = \{T \in L(X,Y) \mid T \text{ es continuo } \}$. Cuando $X = Y$, escribimos sencillamente $B(X)$.

Definición 2.2.6. *Sea $T \in B(X,Y)$, definimos la norma de T por:*

$\|T\| := \text{ínf}\{r \geq 0 : \|T(x)\| \leq r\|x\|, \forall x \in X\}$.

Proposición 2.2.1. *El conjunto $B(X)$ es un subespacio de $L(X)$.*

Demostración. Como $\|0\| \leq 0\|x\|$, $0 \in B(X)$. Sean $f, g \in B(X)$ y $\alpha \in K$. Luego existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $\|f(x)\| \leq r_1\|x\|$ y $\|g(x)\| \leq r_2\|x\|$.

$$\begin{aligned} \|(\alpha f + g)(x)\| &= \|\alpha f(x) + g(x)\| \ \ \forall x \in X \\ &\leq \|\alpha f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq |\alpha| r_1 \|x\| + r_2\|x\| \\ &= (|\alpha| r_1 + r_2)\|x\|. \end{aligned}$$

[1] Una función f es acotada si existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ para cada x en el dominio de f.

Por lo tanto $\alpha f + g \in B(X)$. ■

Proposición 2.2.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. El espacio vectorial $B(X)$ es un espacio normado con la norma definida anteriormente.*

Demostración. Sean $f, g \in B(X)$, y $\alpha \in K$,
N1) Se cumple que $\|f\| \geq 0$ por teorema anterior (el primer inciso).
N2) Si $f = 0$, se sigue que $\|f\| = \|0\| = 0$. Recíprocamente, si $\|f\| = 0$, existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\{r \geq 0 : \|f(x)\| \leq r\|x\|, \forall x \in X\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Como $0 \leq \|f(x)\| \leq r_n\|x\|$ para toda $x \in X$ se tiene que $\|f(x)\| = 0$ para toda $x \in X$, en consecuencia $f(x) = 0$ para toda $x \in X$.
N3) Cuando $\alpha = 0$, se cumple que $\|\alpha f\| = \|0\| = 0 = 0\|f\| = \alpha\|f\|$.

Ahora tomemos $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \inf\{r \geq 0 : \|\alpha f(x)\| \leq r\|x\|, \forall x \in X\} \\
&= \inf\{r \geq 0 : |\alpha|\|f(x)\| \leq r\|x\|, \forall x \in X\} \\
&= \inf\{r \geq 0 : \|f(x)\| \leq \frac{r}{|\alpha|}\|x\|, \forall x \in X\} \\
&= \inf\{|\alpha|s \geq 0 : \|f(x)\| \leq s\|x\|, \forall x \in X\} \\
&= |\alpha|\|f\|.
\end{aligned}$$

N4) Como $\{r \geq 0 : \|f(x)\| \leq r\|x\|, \forall x \in X\} + \{s \geq 0 : \|g(x)\| \leq s\|x\|, \forall x \in X\}$ está contenido en $\{q \geq 0 : \|\alpha(f + g)(x)\| \leq q\|x\|, \forall x \in X\}$, se cumple que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

Teorema 2.2.4. *[12, pág. 96] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si X es de dimensión finita, entonces $L(X) \subseteq B(X)$.*

Teorema 2.2.5. *[12, pág. 74] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Cualquier subespacio de dimensión finita de X es cerrado.*

Definición 2.2.7. *Sea $T \in B(X)$ con X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

1. *El espectro de T es $\sigma(T) :=\{\lambda \in \mathbb{C} :$ T-λI no es invertible $\}$.*
2. *Denotamos por $\sigma_p(T)$ al conjunto de valores propios.*

2.3. Espacios de Banach

Definición 2.3.1. *Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

Definición 2.3.2. *Sean* $(X, \|\cdot\|_1)$*,* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *espacios de Banach, y* $T \in L(X,Y)$*.* T *es compacto, si* $\overline{T(B(x,1))}$ *es compacto en* Y*.* $T \in B(X,Y)$*.*

Definición 2.3.3. *Sean* $(X, \|\cdot\|_1)$*,* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *dos espacios normados y* $\psi : X \longrightarrow Y$ *una función. Diremos que* ψ *es una isometría de* X *en* Y *si cumple la siguiente condición:*
$\|(\psi(x_1) - \psi(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|,$ *para cada* $x_1, x_2 \in X$*.*

Observación 2.3.1. *Si* ψ *es una isometría automáticamente es inyectiva y continua.*

Teorema 2.3.1. *[12, pág. 69] (Teorema de completitud) Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Entonces existe* $\hat{X}$ *espacio de Banach y una isometría* $\psi : X \longrightarrow W \subseteq Y$ *sobreyectiva tal que* $\overline{\psi(V)} = \hat{X}$*, donde* W *es un subespacio de* Y*.*

Definición 2.3.4. *El radio espectral* $r_\sigma(T)$ *de un operador* $T \in B(X)$ *en un espacio complejo de Banach es:*

$$r_\sigma(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Proposición 2.3.1. *[12, pág. 391] Sea* $T \in B(X,Y)$*, entonces*

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|}.$$

Teorema 2.3.2. *(Teorema de la Alternativa de Fredholm) Sea* X *dimensión infinita. Si* T *es compacto, entonces* $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$*.*

2.4. Álgebra

Definamos otra estructura sobre un espacio vectorial, el objetivo es definir esta estructura sobre un espacio normado.

Definición 2.4.1. *Un álgebra $\mathcal{A}$ sobre un campo K es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre K tal que para cada $x, y \in \mathcal{A}$ el producto $xy \in \mathcal{A}$ está bien definido y cumple las siguientes propiedades para cuales quiera $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in K$:*

1. *(xy)z=x(yz),*
2. *x(y + z) = (xy + yz),*
3. *(x + y)z=xz +yz,*
4. *α(xy)=(αx)y=x(αy).*

Si $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ se denomina real o compleja respectivamente.

Definición 2.4.2. *Un álgebra normada $\mathcal{A}$ es un espacio normado tal que es un álgebra para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$,*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

y si $\mathcal{A}$ tiene neutro multiplicativo e_1,

$$\|e_1\| = 1.$$

Definición 2.4.3. *Un álgebra de Banach es un álgebra normada que es completa considerándola como espacio normado.*

Ejemplo 2.4.1. *[12, pág. 396] El espacio de Banach $B(X)$ de todos los operadores acotados en un espacio de Banach complejo $X \neq \{0\}$ con la operación composición es un álgebra compleja.*

La siguiente teoría es introducida para poder incluir ejemplos que no se suelen tratar en los libros clásicos.

2.4.1. La integral de Lebesgue

La integral se remonta a la época en la que los griegos intentaban resolver el problema del área. El concepto formal de integral lo iniciaron Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Bernhard de Riemann (1826-1866), a esta integral se le suele llamar integral de Riemann. Sin embargo es una integral insuficiente para el análisis funcional. La extensión más significativa la realizó H. Lebesgue y es la que aquí trabajaremos.

Definición 2.4.4. *Sea X un conjunto arbitrario y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra en X si se cumple:*

a) $X \in \mathcal{A}$.

b) Si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

c) Si $A \in \mathcal{A}$, *entonces* $A^C \in \mathcal{A}$.

Definición 2.4.5. *La medida exterior de $E \subset \mathbb{R}$ es*

$$m^*(E) := \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \right\},$$

donde $I_n = (a_n, b_n), -\infty < a_n \leq b_n < \infty$, $\ell(I_n) = b_n - a_n$.

Notación: *Para facilitar la escritura, dado $E \subset \mathbb{R}$, usaremos*

$$L_E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

Como L_E es no-vacío y sus elementos son no-negativos, es claro que

$$0 \leq m^*(E) \leq \infty, \ E \subset \mathbb{R}.$$

Asimismo, eligiendo $a_n = b_n = 0$, resulta que $0 \in L_\emptyset$. Luego, $m(\emptyset) \leq 0$ y, en consecuencia,

$$m^*(\emptyset) = 0.$$

Sea $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Luego $L_B \subset L_A$ y, por lo tanto, $\text{ínf}\, L_A \leq \text{ínf}\, L_B$. Esto indica que

$$A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B).$$

Llamaremos monotonía a esta propiedad de la medida exterior.

Definición 2.4.6. *Sea E_n una famila numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$. La medida exterior m^* tiene la propiedad de ser $\sigma-$aditiva si*

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n), \text{ si } E_n \cap E_j = \emptyset,\ j \neq n.$$

Teorema 2.4.1. *[7, pág. 24] [$\sigma-$subaditividad] Sea $E_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces*

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Definición 2.4.7. *Diremos que $E \subset \mathbb{R}$ es (Lebesgue) medible si para cada $A \subset \mathbb{R}$ se cumple*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

La colección de todos estos conjuntos medibles se denotará por $\mathcal{M}$.

Teorema 2.4.2. *[7, pág. 27] La colección $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles es una $\sigma-$ álgebra y la restricción de m^* a $\mathcal{M}$ es $\sigma-$aditiva. Llamaremos a m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Definición 2.4.8. *Sea X un conjunto arbitrario, $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra en X, y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Si $\mu(\emptyset) = 0$ y μ es $\sigma-$aditiva en $\mathcal{A}$, diremos que μ es una medida en $(X, \mathcal{A})$.*

Definición 2.4.9. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $P(x)$ una condición que puede cumplir cada $x \in E$. Diremos que P se cumple "casi en todas partes" de E (lo cual abreviaremos por c.t.p) si el conjunto de $x \in E$ donde $P(x)$ no se cumple tiene medida cero.*

Ahora definimos el conjunto de reales extendidos como: $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición 2.4.10. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Diremos que f es (Lebesgue) medible si su dominio es medible y para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$\{x \in E : t < f(x)\}$$

es medible.

En adelante utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{M}(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}^*, f \text{ es medible } \}.$$

A continuación definiremos la integral de Lebesgue y tomaremos como conocida la integral de Riemman.

Definición 2.4.11. *Diremos que $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple si es medible y toma solamente un conjunto finito de valores.*

Sea $s : E \to \mathbb{R}$ es una función simple. Designemos por $c_1, ..., c_n$ los distintos valores que toma y hagamos

$$E_k = s^{-1}(c_k), k = 1, ..., n.$$

Notemos que cada E_k es medible y $E_k \bigcap E_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Luego, podemos expresar s en la forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Llamaremos a esta representación *representación canónica* de la función simple s.

Definición 2.4.12. *Sea $s : E \to \mathbb{R}$ una función simple no-negativa y $\sum\limits_{i=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ su representación canónica. Entonces, su integral es*

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k).$$

Definición 2.4.13. *Si $f \in \mathcal{M}(E)$ no-negativa, definimos su integral como*

$$\int_E f = sup\{\int_E s : 0 \leq s \leq f, s \ \ simple\}.$$

Observemos que

$$0 \leq \int_E f \leq \infty, \ f \in \mathcal{M}(E), \ f \geq 0.$$

Sea A un conjunto arbitrario y $f : A \to \mathbb{R}^*$. Una manera natural de representar $f = g - h$, siendo g y $h : A \to \mathbb{R}^*$ funciones no-negativas, es considerar $g = f_+$ y $h = f_-$, donde

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Llamaremos a f_+ parte positiva de f y a f_- parte negativa de f.

Teorema 2.4.3. *[7, pág. 84] Sea $f : E \to \mathbb{R}^*$. Entonces, f es medible si, y sólo si, f_+ y f_- lo son.*

Definición 2.4.14. *Sea $f \in \mathcal{M}(E)$.*

a) Si $\int\limits_E f < \infty$, definimos

$$\int\limits_E f := \int\limits_E f_+ - \int\limits_E f_-.$$

b) Diremos que f es integrable (o sumable), si

$$\int\limits_E f < \infty \text{ e } \int\limits_E f < \infty.$$

Teorema 2.4.4. *[7, pág. 73] Sea $f \in \mathcal{M}(E)$, entonces*

$$\int\limits_E f = 0 \text{ si y sólo si } f = 0 \text{ c.t.p.}$$

Teorema 2.4.5. *[7, pág. 74] Sean $f, g \in \mathcal{M}(E)$. Si $0 \leq g \leq f$, entonces*

$$\int\limits_E g \leq \int\limits_E f.$$

A continuación nos interesa mostrar la relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Teorema 2.4.6. *[7, pág. 97] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [a, b]$. Si f es Riemann integrable, entonces f es Lebesgue integrable y*

$$\int_a^b f = \int_E f,$$

donde la integral de la izquierda es en el sentido de Riemann y $E = [a, b]$.

Teorema 2.4.7. *[7, pág. 22] Sea I el intervalo $[a, b]$, entonces*

$$m^*(I) = \ell(I) = b - a.$$

Teorema 2.4.8. *[7, pág. 30] Sea $x \in \mathbb{R}$, la bola abierta $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}$ es medible.*

Proposición 2.4.1. *Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f = 0$ c.t.p. y f es continua, entonces $f = 0$.*

Demostración. Sea $A = \{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}$, luego $\mu(A) = 0$. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Sea $x \in A$, luego para $\epsilon = |f(x)|$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$.

Veamos que $B(x, \delta) \subseteq A$.
Sea $y \in B(x, \delta)$, luego $|f(x) - f(y)| < |f(x)|$, luego

$$|f(x)| - |f(y)| < |f(x)|,$$

así, $0 < |f(y)|$. Por lo tanto $f(y) \neq 0$, luego $B(x, \delta) \subseteq A$.

Por el Teorema 2.4.8, $B(x, \delta)$ es medible, pero entonces,

$$0 < \mu(B(x, \delta)) \leq \mu(A) = 0,$$

lo cual es una contradicción al Teorema 2.4.7.
Por lo tanto $A = \emptyset$. ■

2.5. Producto interno

La siguiente estructura la dotamos de una función $< \cdot, \cdot >$, llamada producto escalar, producto interno (p.i.) o producto interior sobre X y se dice que X es un espacio con producto interior o que X es un prehilbert.

Definición 2.5.1. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* K *y* $<\cdot,\cdot>: X \times X \to K$ *una función tal que para cualesquiera* x*,* y*,* z $\in V$ *y* $\alpha \in K$ *se satisfacen:*
(P1) $< x, x > \geq 0$*,*
(P2) $< x, x >= 0 \iff x = 0$*,*
(P3) $< \alpha x + y, z >= \alpha < x, z > + < y, z >$*,*
(P4) $< x, y >= \overline{< y, x >}$*.*

Nótese que el cero del que estamos hablando en la definición es el cero del campo y no del espacio vectorial.

Observación 2.5.1. *Sean* $x, y \in X$*. El conjugado de* $< y, x >$ *denotado por* $\overline{< y, x >}$ *es:*

1. *si* $K = \mathbb{C}$ *y* $< y, x >= a + bi$*, entonces* $\overline{< y, x >} = a - bi$*.*
2. *si* $K = \mathbb{R}$*, claramente* $< y, x >= \overline{< y, x >}$*.*

Proposición 2.5.1. *Sea* $(X, < \cdot >)$ *un espacio con p.i., entonces para cada* $x, y, z \in X$*:*

i) $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$*,*

ii) $< x, 0 >= 0$.

Demostración. Sean $x, y, z \in X$.
i)

$$\begin{aligned} < x, y + z > &= \overline{< y + z, x >} \\ &= \overline{< y, x > + < z, x >} \\ &= \overline{< y, x >} + \overline{< z, x >} \\ &=< x, y > + < x, z >; \end{aligned}$$

ii) $< x, 0 >=< x, 0 + 0 >=< x, 0 > + < x, 0 >$, luego $< x, 0 >= 0$. ■

Definición 2.5.2. *Sean* $(X, < \cdot >)$*, y* $x, y \in X$ *. Definimos*

$$Re| < x, y > | := \frac{1}{2}(< x, y > + \overline{< x, y >})$$

y lo llamamos la parte real de $< x, y >$*.*

Ejemplo 2.5.1. *Sea $C[0,1]$ el espacio de todas las funciones continuas. Definamos*

$$< f, g >:= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

El espacio $(C[0,1]), < \cdot >)$ es un espacio con producto interior.

Obsérvese que en este ejemplo hablamos de la integral de Lebesgue, pero concide con la integral de Riemann, ya que todas las funciones continuas son Riemman integrables.
Demostración. Sean $f, g, h \in C[0,1]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
(P1) $< f, f >= \int_0^1 f(x)^2dx \geq |\int_0^1 f(x)^2dx| \geq 0.$

(P2) Si $f = 0$, $< f, f >= \int_0^1 f(x)^2dx = 0$. Recíprocamente, si

$$\begin{aligned} 0 &=< f, f > \\ &= \int_0^1 f(x)^2dx \\ &= \int_0^1 |f(x)^2|dx. \end{aligned}$$

Entonces $f^2(x) = 0$ c.t.p., luego, por la Proposición 2.4.1 se tiene que $f^2(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$, lo que implica que $f(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$.

(P3)

$$
\begin{aligned}
< \alpha f + g, h > &= \int_0^1 (\alpha f(x) + g(x))\overline{h(x)}dx \\
&= \int_0^1 (\alpha f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)})dx \\
&= \alpha \int_0^1 (f(x)\overline{h(x)})dx + \int_0^1 (g(x)\overline{h(x)})dx.
\end{aligned}
$$

(P4) $< f, g >= \int_0^1 (f(x)\overline{g(x)})dx = \overline{< f, g >}$. ■

Teorema 2.5.1. *[12, pág. 136](Desigualdad de Schwarz). Si* $(X, < \cdot >)$ *es un espacio con producto interior, y* $\| \cdot \|$ *la norma asociada a este producto interior, entonces, para cualesquiera* $x, y \in X$,

$$| < x, y > | \leq \| x \| \| y \| .$$

Proposición 2.5.2. *Sea* $(X, < \cdot >)$ *un espacio con producto interior, entonces* $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ *definida por* $\| x \| := \sqrt{< x, x >}$ *para todo* $x \in X$ *es una norma en* X.

Demostración.- Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in K$,

(N1) $\| x \| = \sqrt{< x, x >} \geq 0$.

(N2) $0 = \| x \| = \sqrt{< x, x >} \iff 0 = < x, x > \iff x = 0$.

(N3) $\| \alpha x \| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} < x, x >} = |\alpha| \, \| x \|$.

(N4) Afirmamos que $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\| x + y \|^2 &= < x + y, x + y > \\
&= < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > \\
&= < x, x > + < x, y > + \overline{< x, y >} + < y, y > \\
&= \| x \|^2 + 2Re| < x, y > | + \| y \|^2 \\
&\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\
&= (\| x \| + \| y \|)^2.
\end{aligned}
$$

Sacando raíz de ambos lados terminamos. ■

La norma en la proposición anterior se llama norma asociada con el producto interior de X o inducida por el p.i. de X.

El resultado anterior es de suma importancia, pues dice que todo espacio con producto interior es un espacio normado. En particular, tenemos que $(C[0,1], \|\cdot\|)$ es un espacio normado con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.6. Espacios de Hilbert

Definición 2.6.1. *Todo espacio con producto interior que es completo con respecto a la norma asociada se llama espacio de Hilbert.*

Teorema 2.6.1. *[12, pág. 139] (Teorema de completitud para espacios de Hilbert) Sea $(X, <\cdot>)$ un espacio con producto interior. Entonces existe $\hat{X}$ espacio de Hilbert y una isometría $\psi : X \longrightarrow W \subseteq Y$ sobreyectiva tal que $\overline{\psi(V)} = \hat{X}$, donde W es un subespacio de Y.*

En la demostración de éste teorema tenemos que esta completación coincide con la completación de X como espacio normado visto en el Teorema 2.3.1.

El espacio $(C[0,1], \|\cdot\|)$ con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ no es completo, pero por el Teorema 2.6.1 existe una extensión de $C[0,1]$, donde cada sucesión de Cauchy converge con la norma anteriormente mencionada, que denotamos por $L^2[0,1]$. En conclusión $L^2[0,1]$ es un espacio de Hilbert.

Como cada espacio con producto interior es un espacio normado, la teoría desarrollada para los espacios normados es válida para los espacios con producto interior. Más aún, es correcto usar la teoría desarrollada para espacios de Banach en espacios de Hilbert.

Teminamos este capítulo con la siguiente frase de Stefan Banach [17].

Un matemático es una persona que
encuentra analogías entre teoremas;
es mejor matemático el que puede ver

analogías entre demostraciones y
el más grande matemático es aquel
que percibe analogías entre teorías.
Podemos imaginar que el estado sublime
para un matemático sería ver analogías
entre analogías.

Capítulo 3

Subespacios $T-$invariantes en espacios vectoriales

En el primer capítulo trabajamos con algunos subespacios interesantes como son E_λ y *gen* $\{x\}$. Ahora definiremos unos subespacios que incluyen a los mencionados y que son nuestro tema central.

3.1. Subespacios invariantes en espacios vectoriales

La definición de invariante proporcionada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales es:
"Propiedad o expresión matemática que no se altera por una transformación o por cierto tipo de transformaciones" [3].
Así que esperamos un subespacio "que no se altere" al aplicarle T.[1]
Veamos en el siguiente ejemplo a qué nos referimos.

Ejemplo 3.1.1. *Sea* $T \in L(\mathbb{R}^2)$ *definido por* $T(x, y) = (2x + 4y, x + 2y)$. *El subespacio* $M=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$ *"no cambia" al aplicarle* T.

Ya que $0 = 2(0)$, tenemos que $(0, 0) \in M$, por lo que M no es conjunto vacío.
Como para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (2y_1, y_1), (2y_2, y_2) \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(2y_1, y_1) + \beta(2y_2, y_2) &= (\alpha 2y_1, \alpha y_1) + (2\beta y_2, \beta y_2)\\ &= (2(\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha y_1 + \beta y_2) \in M,\end{aligned}$$

concluimos que M es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

[1] Recordar que a un operador lineal también se le llama tranformación lineal.

A continuación se aprecia una interesante propiedad que M cumple con respecto a T; sea $u \in M$, entonces $u = (2s, s)$ para algún $s \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} T(u) &= T(2s, s) = (2(2s) + 4s, 2s + 2s) \\ &= (8s, 4s) \\ &= (2(4s), 4s) \in M, \end{aligned}$$

como esto sucede para cada u en M, se sigue que $T(M) \subseteq M$.

Nos interesa definir un subespacio invariante, pero debemos tener cuidado, visto que esta propiedad depende de T.

Definición 3.1.1. *(Primer acercamiento) Sea $T \in L(V)$ y M un subespacio de V. M es T- invariante, si $T(M) \subseteq M$.*

En algunas ocasiones se le llama por comodidad subespacio invariante, pero en esos casos se supone que se sabe que se está hablando de un subespacio $T-$invariante.

Proposición 3.1.1. *El subespacio M es T-invariante si y sólo si para cada $x \in M$ se cumple que $T(x) \in M$.*

Demostración. Tomemos $x \in M$; ya que M es $T-$invariante, se sigue que $T(x) \in M$. Al contrario, tomemos $y \in T(M)$, luego existe $x \in M$ tal que $T(x) = y$, pero por hipótesis $T(x) \in M$. ■

La pregunta que surge es: ¿Un subespacio como éste existe para cada T? La repuesta es sí, y son precisamente los espacios $\{0\}$ y el mismo V, debido a que $T(0) = 0 \subseteq \{0\}$ y $T(V) \subseteq V$, a los cuales llamaremos espacios $T-$invariantes **triviales**.

Lo que nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Hay siempre subespacios invariantes no triviales? La respuesta es no, el siguiente ejemplo lo prueba.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x, y) = (y, -x)$. Como en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacios que no son triviales son las rectas que pasan por el origen, las cuales son de la forma $L = \{r(m, s) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R},\ \text{con } (m, s) \neq (0, 0)\}$, probaremos que L no es $T-$invariante.*

Demostración. Sea L una recta generada por $(m, s) \neq (0, 0)$, luego $T(m, s) = (s, -m)$. Supongamos que $(s, -m) \in L$, así, existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $(s, -m) = r_1(m, s)$, pero esto implica los dos siguientes casos:
I) $m \neq 0$
$-m = r_1 s = r_1(r_1 m) = (r_1)^2 m \Rightarrow -1 = (r_1)^2 \sharp$
II) $s \neq 0$
$s = r_1 m = r_1(-r_1 s) = -(r_1)^2 s \Rightarrow 1 = -(r_1)^2 \sharp$,
por tanto $(s, -m) \notin L$, es decir, $\mathbb{R}^2$ no tiene subespacios $T-$invariantes no triviales.

A continuación abordaremos el mismo problema pero de manera geométrica; T es una rotación (véase Definición 1.2.5), cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{3\pi}{2}) & -sen(\frac{3\pi}{2}) \\ sen(\frac{3\pi}{2}) & cos(\frac{3\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Por la Proposición 1.2.1, para cualquier recta L que pasa por el origen se cumple $T(L) \nsubseteq L$.

Explotemos el operador anterior, examinemos a T en los números complejos, o sea, $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(w, z) = (z, -w)$.

Como el polinomio característico de T es $\lambda^2 + 1$, i y $-i$ son sus valores propios, de los cuales los vectores $(1, i)$ y $(1, -i)$ son asociados; notemos que estos vectores generan espacios T-invariantes.

1) Sean $gen\ \{(1, i)\}$ subespacio de $\mathbb{C}^2$ y $m(1, i) \in gen\ \{(1, i)\}$, con $m \in \mathbb{C}$; ello implica que $T(m, mi) = (im, -m) = im(1, i)$, en consecuencia se cumple que $T(m, mi) \in gen\ \{(1, i)\}$. Por lo tanto $gen\ \{(1, i)\}$ es un subespacio T-invariante.

2) Sean $gen\ \{(1, -i)\}$ subespacio de $\mathbb{C}^2$, y $m(1, -i) \in gen\ \{(1, -i)\}$, con $m \in \mathbb{C}$; en consecuencia $T(m, -mi) = (-mi, -m) = im(1, -i)$, de ahí que $T(m, -mi) \in gen\ \{(1, -i)\}$, por tanto $gen\ \{(1, -i)\}$ es invariante bajo T.

Obsérvese que $gen\,\{(1, i)\} \neq gen\,\{(1, -i)\}$, porque $(1, i) \notin gen\ \{(1, -i)\}$.

En la Figura 3.1 se muestra la imagen de un vector $u \neq (0,0)$ bajo T y en la Figura 3.2, la imagen de una recta L bajo T, en esta ultima es evidente que T manda a L a otra recta, ya que a cada vector no nulo lo rota $\frac{3\pi}{2}$ (Como ya vimos en la Proposición 1.2.1, podemos encontrar otras rotaciones que mandan a L en sí misma, pero hablaremos de ellas más adelante).

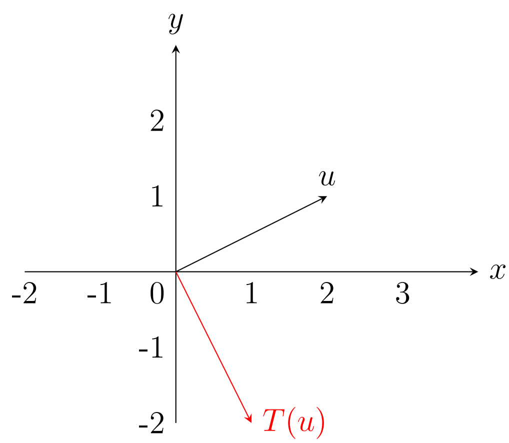

Figura 3.1: $T(u)$ se obtiene rotando u,un ángulo de $\frac{3\pi}{2}$

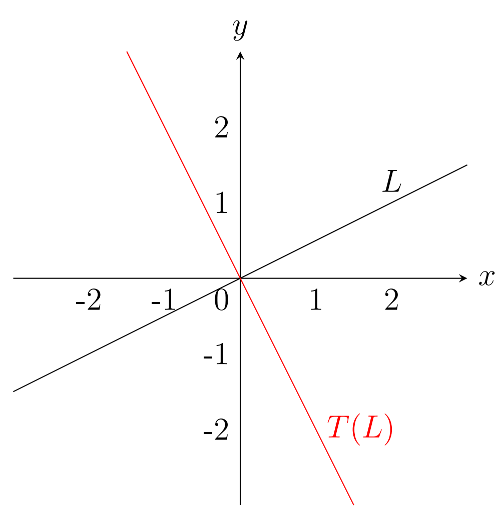

Figura 3.2: $T(L)$ es la imagen de la recta L bajo T

3.2. Algunos espacios T-invariantes

En seguida mostraremos unos ejemplos de subespacios $T-$invariantes donde asumimos que $T \in L(V)$.

Ejemplo 3.2.1. *$Ker\ T$ es $T-$invariante.*

Demostración. Si $y \in T(Ker\ T)$, existe $x \in Ker\ T$ tal que $T(x) = y$. De esta forma y=0, ya que $T(x) = 0$. Entonces $T(y) = T(0) = 0$, en otras palabras, $y \in Ker\ T$.
$\therefore T(Ker\ T) \subseteq Ker\ T.$■

Ejemplo 3.2.2. *$Im\ T$ es $T-$invariante.*

Demostración. Sea $y \in T(Im\ T)$, en consecuencia existe $x \in Im\ T$ tal que $T(x) = y$, es decir, $y \in Im\ T$.
$\therefore T(ImT) \subseteq ImT.$■

Ejemplo 3.2.3. *En el caso $T = 0$, se cumple que $Img\,T = \{0\}$ y $Ker\ T = V$, por lo que siguen coincidiendo con los triviales, más aún cualquier subespacio W de V es T-invariante, pues $T(W) = \{0\} \subseteq W$.*

Por tanto $Ker\ T$ e $Im\ T$ son subespacios T-invariantes y coinciden con los triviales si T es biyectivo o $T = 0$. Esto significa que hay más espacios T-invariantes que los triviales siempre que T no sea biyectivo o el operador cero.

A continuación mostramos uno de estos operadores.

Ejemplo 3.2.4. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - \frac{1}{2}y, -2x + y)$, como este operador lineal no es biyectivo (ya que $T(1, 2) = (0, 0)$ y $(5, 15) \notin Im\ T$), tenemos que los siguientes espacios invariantes no son triviales:*

1. *$Ker\ T = gen\{(1, 2)\}$*
   Sea $(x, y) \in Ker\ T$, entonces $x - (\frac{1}{2})y = 0$ y $-2x + y = 0$, así, $y = 2x$; la otra contención es inmediata del hecho de que $T(1, 2) = (0, 0)$. Como $dim\,(Ker\ T) = 1$, concluimos que:

$$Ker\ T \neq \{0\} \text{ y } Ker\ T \neq \mathbb{R}^2.$$

.

2. $Im\ T = gen\{(1,-2)\}$

a) *Sea $(m,-2m) \in gen\{(1,-2)\}$ y como $T(m,0) = (m,-2m)$, se cumple que $gen\{(1,-2)\} \subseteq Im\ T$.*

b) *Sea $(s,r) \in Im\ T$, en consecuencia existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x - (\frac{1}{2})y = s$ y $-2x + y = r$, luego multiplicando por dos la primera ecuación y sumando ambas ecuaciones se tiene que $0 = 2s + r$, por lo que $-2s = r$, entonces $(s,r) = (s,-2s)$, por tanto se cumple que $Im\ T \subseteq gen\{(1,-2)\}$.*

Como $dim\,(Im\ T) = 1$, concluimos que:

$$Im\ T \neq \{0\} \text{ y } Im\ T \neq \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 3.2.5. *Sean $T, U \in L(V)$ tales que $TU = UT$, entonces $Img\ U$ y $Ker\ U$ son espacios T-invariantes.*

Demostración.
i) Sea $x \in T(Img\ U)$, luego existen $w_1 \in Img\ U$ y $v_1 \in V$ tales que $T(w_1) = x$ y $U(v_1) = w_1$. En consecuencia,

$$x = T(w_1) = T(U(v_1)) = U(T(v_1)),$$

debido a que $T(v_1) \in V$ se cumple que $x \in Img(\ U)$.

ii) Sea $x \in T(Ker\ U)$, luego existe $n_1 \in Ker\ U$ tal que $T(n_1) = x$. De este modo $U(x) = U(T(n_1)) = T(U(n_1)) = T(0) = 0$; por la ecuación anterior, $x \in Ker\ U$. ■

Ejemplo 3.2.6. *Cada recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen es un subespacio $T-$invariante no trivial para la rotación, definida por:*

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} cos(\pi) & -sen(\pi) \\ sen(\pi) & cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Demostración. Con ayuda de la Proposición 1.2.1 afirmamos que cualquier recta L que pasa por el origen es un subespacio T-invariante (pues $T(L)$ sigue siendo la misma recta L). Por el modo como se ha definido L, $L \neq \{0\}$ y $L \neq \mathbb{R}^2$.■

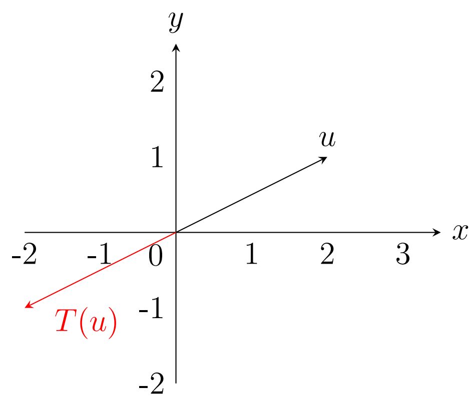

Figura 3.3: $T(u)$ se obtiene rotando u, un ángulo de π

El resultado anterior también es aplicable para la transformación identidad (que también es una rotación).
La Figura 3.3 muestra como actúa T en un vector no nulo.

Ejemplo 3.2.7. *Sean λ un valor propio de T y w uno de sus vectores asociados.*

I) gen $\{w\}$,

II) E_λ

son subespacios T-invariantes.

Demostración.
I) Tomemos $x \in T(gen\ \{w\})$ lo que implica que existe $s_1 \in K$ tal que $x = T(s_1 w) = s_1 T(w) = s_1(\lambda w) = (\lambda s_1)w \in gen\ \{w\}$. Por lo que $T(gen\ \{w\}) \subseteq gen\ \{w\}$.
II) Sea $x \in T(E_\lambda)$, así, existe $x_1 \in E_\lambda$: $x = T(x_1)$. Luego

$$T(x) = T(T(x_1)) = T(\lambda x_1) = \lambda T(x_1) = \lambda x.$$

Finalmente $T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$. ■

Observación 3.2.1. *Por la Proposición 1.3.1 se tiene que $gen\{w\} \subseteq E_\lambda$. Pero la dimensión de E_λ está dada por su número de vectores propios linealmente independientes, por lo que en general no son iguales.*

El siguiente ejemplo es uno esos casos particulares:

Ejemplo 3.2.8. *Sea* $T \in L(\mathbb{R}^3)$ *definido por*

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Como su polinomio característico es $f(x) = (x-3)^2(x-5)$, se tiene que $\lambda = 3$ es un valor propio de T. Pero $E_3 = gen\ \{(-1,0,1),(0,1,0)\}$ y $gen\ \{(-1,0,1)\}$ son distintos.

Proposición 3.2.1. *Sean* $T \in L(V)$ *que no es un múltiplo escalar del operador identidad y* λ *un valor propio de* T*. Entonces el subespacio* E_λ *es un subespacio* T*-invariante no trivial.*

Demostración. Ya tenemos que $Ker(T - \lambda I)$ es un espacio T-invariante de V por la Proposición 1.3.2. Por nuestra hipótesis existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, por lo que $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Luego como $T \neq \lambda I$ (ya que T no es múltiplo escalar de I), existe $v_1 \in V$ tal que $T(v_1) \neq \lambda v_1$, así que $v_1 \notin Ker(T - \lambda I)$, en consecuencia $Ker(T - \lambda I) \neq V$.

Teorema 3.2.1. *Sean* $T, U \in L(V)$ *tales que* $TU = UT$*, y supongamos que* U *no es un múltiplo escalar de la identidad. Si* λ *es un valor propio de* U*, entonces el subespacio* $Ker(U - \lambda I)$ *es un espacio* $T-$*invariante no trivial.*

Demostración. Sea $x \in Ker(U - \lambda I)$, luego

$$\begin{aligned} (U - \lambda I)(T(x)) &= U(T(x)) - \lambda T(x) \\ &= T(U(x)) - \lambda T(x) \\ &= T(\lambda x) - \lambda T(x) \\ &= \lambda T(x) - \lambda T(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Ker(U - \lambda I)$ es un espacio T-invariante.
Por nuestra hipótesis existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $U(v) = \lambda v$, por lo que $Ker(U - \lambda I) \neq \{0\}$. Luego, como $U \neq \lambda I$ (ya que U no es múltiplo escalar de I), existe $v_1 \in V$ tal que $T(v_1) \neq \lambda v_1$, así que $v_1 \notin Ker(U - \lambda I)$, en consecuencia $Ker(U - \lambda I) \neq V$.
Por lo tanto $Ker(U - \lambda I)$ es un espacio T-invariante no trivial. ■

Definición 3.2.1. *Sea $T \in L(V)$. Un subespacio W de V se llama subespacio T-cíclico si existe un elemento $x \in W$ tal que*

$$W := gen\ \{x, T\{x\}, T^2\{x\}, ...\}.$$

Solemos denotar a W por C_x. Y para nuestra conveniencia, $T^0(x) = x$.

Proposición 3.2.2. *C_x es un subespacio de V.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.3 tenemos que C_x efectivamente es un subespacio. ■

Proposición 3.2.3. *C_x es un subespacio $T-$invariante en V.*

Demostración. Sea $y \in T(C_x)$, por lo que existen $\alpha_0, ..., \alpha_n \in K$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$\begin{aligned} y &= T(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^{i+1}(x) \in C_x. \end{aligned}$$

Por tanto $T(C_x) \subset C_x$■.

Definición 3.2.2. *Sean $T \in L(V)$ y $x \in V$, x es un punto cíclico si $\overline{C_x} = V$.*

3.3. Resultados importantes en el caso de dimensión finita

En esta sección V es un espacio vectorial de dimensión finita, debido a que con este tipo de espacios podemos garantizar la existencia del polinomio característico, de bases y de algunas otras cosas más.

Teorema 3.3.1. *[6, pág. 314] Sea $T \in L(V)$ con V de dimensión finita. Si W es un subespacio T-invariante de V, entonces el polinomio característico de T_w divide al polinomio característico de T.Donde T_w es la restricción de T a W.*

Teorema 3.3.2. *[6, pág. 318] Sea $T \in L(V)$ con V de dimensión finita. Si*

1. *$V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$, donde W_i es un subespacio T-invariante de V para toda $i(1 \leq i \leq k)$,*

2. *$f_T(t)$ es el polinomio característico de T, y*

3. *$f_i(t)$ es el polinomio característico de $T_{W_i}(1 \leq i \leq k)$.*

Entonces,

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot ... \cdot f_k(t).$$

Teorema 3.3.3. *[6, pág. 315] Sea $T \in L(V)$ con V de dimensión finita y W el subespacio T-cíclico de V generado por $x \in V$. Si se cumple que $dim(W) = k \geq 1$ (y por tanto $x \neq 0$), entonces:*

a) $\{x, T(x), T^2(x), ..., T^{k-1}(x)\}$ es una base para W.

b) Si $-a_0, -a_1, ..., -a_{k-1}$ son los escalares dados por a) tales que

$$T^k(x) = -a_0x - a_1T(x) - ... - a_{k-1}T^{k-1}(x),$$

entonces $f(t) = (-1)^k(a_0 + a_1t + ... + a_{k-1}t^{k-1} + t^k)$ es el polinomio característico de T_W.

Definición 3.3.1. *Sea $f_T(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ el polinomio característico de T y $u \in V$, definamos $f_T(x)u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^i(u)$.*

Teorema 3.3.4. *[6, pág. 317] (Teorema de Cayley-Halmilton) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in L(V)$, entonces,*

$$f_T(x)u = 0 \in V \text{ para cada } u \in V.$$

Regresando a nuestro problema, el caso más simple en que podemos garantizar la existencia de subespacios $T-$invariantes no triviales es cuando existen valores propios.

Proposición 3.3.1. *Sea $T \in L(\mathbb{C}^n)$, si $n > 1$, entonces T tiene al menos un subespacio invariante no trivial (viendo a $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial).*

Demostración. Primero examinaremos si $n = 1$ (alguna razón debe tener nuestra restricción).
Ya que $dim\,\mathbb{C} = 1$, todos sus subespacios tienen dimensión 0 ó 1 por lo que son $\{0\}$ y $\mathbb{C}$, por ello no tiene espacios invariantes no triviales.
Ahora supongamos que $n > 1$, como $\mathbb{C}^n$ es de $dim\,n$ (por los Ejemplos 1.1.7, 1.1.9) T tiene una matriz asociada y por ende un polinomio característico. Por el teorema fundamental del álgebra, tiene al menos una raíz compleja, digamos s. Sea w un vector asociado a s, luego w no es cero debido a la definición de vector asociado).

Por el Ejemplo 3.2.7,$gen\ \{w\}$ es un espacio T-invariante.

Comparando las dimensiones de cada espacio, se concluye que $gen\ \{w\} \neq \mathbb{C}^n$ y $gen\ \{w\} \neq \{0\}$, pues es de dimensión 1. ∎

La mayoría de los resultados que hasta ahora hemos tratado tienen como premisa que V es de dimensión finita, y en este caso V se puede tratar como suma directa de restricciones a subespacios $T-$invariantes. Pero, ¿podemos concluir esto para espacios de dimensión infinita?, más aún, ¿existe al menos un subespacio T-invariante no trivial en V?

3.4. El caso de un espacio vectorial de dimensión infinita

Buscaremos este subespacio con la única característica de la contención (con el primer acercamiento a la definición 3.1.1).

Sea $T \in L(V)$ con V de dimensión infinita. Estudiemos los casos que surgen al pensar en cómo es el $Ker\ T$.

Caso 1) $Ker\,T \neq V$ y de $\{0\}$, entonces $Ker\ T$ (Ejemplo 3.2.1) es un espacio T-invariante no trivial.

Caso 2) $Ker\ T = V$, entonces $T(x) = 0$ para cada $x \in V$. Como $V \neq \{0\}$, existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $gen\ \{v\}$ es un subespacio invariante distinto de $\{0\}$ y distinto de V (ya que $dim\ gen\{v\} = 1$, y por el Ejemplo 3.2.3).

Caso 3) $Ker\ T = \{0\}$, tomemos $v \in V \setminus \{0\}$; por la Proposición 3.2.3, $C_{T(v)}$ es invariante y no es $\{0\}$, ya que $0 \neq T(v) \in C_{T(v)}$.

De esto surgen dos situaciones:
i) $v \notin C_{T(v)}$, se sigue que $C_{T(v)} \neq V$, por lo que éste es el subespacio que buscamos.
ii) $v \in C_{T(v)}$, entonces,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^{j_i}(v) \tag{3.1}$$

Nótese que el índice j denota la primera potencia de T que aparece en la combinación lineal (por ejemplo 1, 2 ,etc.), y el índice i es para renumerar.

Veamos ahora que $C_{T(v)} = gen\{v, T(v), T^2(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$. Una contención es clara, para la otra primero debemos probar que $C_{T(v)} \subseteq gen\{v, T(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$.

I) Es evidente que

$$\{T(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\} \subseteq gen\{v, T(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}.$$

II) Por la ecuación 3.1,

$$T^{j_n}(v) = v - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T^{j_i}(v), \tag{3.2}$$

luego $T^{j_n}(v) \in gen\{v, T(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$.

III) Sea s un natural mayor o igual que $j_n + 1$ y supongamos que existen $\beta_0, ..., \beta_{j_n - 1} \in K$ tales que:

$$T^s(v) = \beta_0 v + \sum_{i=1}^{j_n - 1} \beta_i T^i(v).$$

Probemos que $T^{s+1}(v) \in gen\,\{v, T(v), T^2(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$

$$\begin{aligned}
T^{s+1}(v) &= T(T^s(v)) \\
&= T(\beta_0 v + \sum_{i=1}^{j_n-1} \beta_i T^i(v)) \\
&= \beta_0 T(v) + \sum_{i=1}^{j_n-1} \beta_i T^{i+1}(v) \\
&= \beta_0 T(v) + \sum_{k=2}^{j_n} \beta_{k-1} T^k(v) \\
&= \beta_0 T(v) + \sum_{k=2}^{j_n-1} \beta_{k-1} T^k(v) + T^{j_n}(v) \\
&= \sum_{k=1}^{j_n-1} \beta_{k-1} T^k(v) + v + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T^{j_i}(v) \text{ por la ecuación 3.1} \\
&= \sum_{k=0}^{j_n-1} \delta_k T^k(v),
\end{aligned}$$

donde

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \beta_{j_i} + \alpha_i & \text{si } k = j_i \text{ para algún } i \in \{1, .., n\} \\ \beta_k & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Como cada $x \in C_{T(v)}$ es de la forma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i T^i(v)$, se cumple que

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T^i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\sum_{k=0}^{j_n-1} \delta_k T^k(v)) \\
&= \sum_{k=0}^{j_n-1} \delta_k (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i) T^k(v).
\end{aligned}$$

Así, $C_{T(v)} = gen\{v, T(v), T^2(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$.

A continuación tomaremos un conjunto linealmente independiente de $\{v, T(v), T^2(v), ..., T^{j_1}(v), ..., T^{j_{n-1}}(v)\}$ para conseguir una base de $C_{T(v)}$.

Tal conjunto lo elegimos de la siguiente manera:

1) $\sigma_1 = v$.

2) Nos fijamos si v y $T(v)$ son linealmente independientes.

   a) Si son l.i, entonces $\sigma_2 = T(v)$.

   Si v, $T(v)$ y $T^2(v)$ son linealmente independientes, entonces $\sigma_3 = T^2(v)$.

   Si $T^2(v)$ es l.d. de v o $T(v)$, no lo tomamos en cuenta y nos fijamos cómo es $T^3(v)$ con respecto a v y a $T(v)$;

   b) Si v y $T(v)$ son l.d., no tomamos en cuenta a $T(v)$;

   Si v y $T^2(v)$ son l.i., entonces $\sigma_2 = T^2(v)$;

   Si v y $T^2(v)$ son l.d., entonces no lo tomamos en cuenta y nos fijamos cómo es $T^3(v)$ con respecto a v.

Continuando con este proceso obtenemos el conjunto $\{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$ con $1 \leq r \leq j_n$.

Por tanto $\{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$ con $1 \leq r \leq j_n$ es una base de $C_{T(v)}$, es decir, $C_{T(v)}$ es finito. De donde $C_{T(v)} \neq V$.

Capítulo 4

El camino hacia el actual planteamiento del problema

4.1. Subespacios $T-$invariantes en espacios con producto interior

Hasta aquí, V no tiene ninguna otra característica que ser un espacio vectorial sobre K. Pero, ¿qué pasa si le agregamos una norma o un producto interno?

Definición 4.1.1. *(Subespacio $T-$invariante en espacios normados) (Subespacio $T-$invariante en espacios normados) Sean $T \in B(X)$ y A es un subespacio de X. A es un subespacio $T-$invariante (o A es un subespacio invariante sobre T) si:*

1. *A es cerrado en X.*
2. *$T(A) := \{T(x) : x \in A\} \subset A$.*

En el Capítulo 2 demostramos que cada producto interior induce una norma, por lo que un espacio $T-$invariante en un espacio con producto interior, es un subespacio $T-$invariante con respecto a la norma inducida.

Por el Teorema 2.2.5, para encontrar un subespacio $T-$invariante no trivial en los espacios de dimensión finita bastará encontrar un subespacio no trivial que cumpla la segunda condición.

En seguida damos una proposición para saber si un espacio con producto interior (espacio normado) tiene subespacios invariantes no triviales.

Proposición 4.1.1. *Sea $T \in L(X)$, X no tiene subespacios (cerrados) $T-$invariantes no triviales si y sólo si todo elemento no nulo de X es cíclico.*

Demostración. Sea $x_0 \in X \setminus \{0\}$, como X no tiene subespacios (cerrados) $T-$invariantes no triviales, y C_{x_0} es $T-$invariante se tiene que $C_{x_0} = X$.

Si suponemos que F es un subespacio (cerrado) $T-$invariantes no trivial, entonces podemos elegir $y \in F \setminus \{0\}$ tal que $C_y \subseteq F \subset X$, lo que implica que y no es cíclico. ■

4.2. Subespacios T-invariantes en espacios de Hilbert

Primero daremos un ejemplo de un subespacio invariante bajo un operador en un espacio de Hilbert.

Ejemplo 4.2.1. *Examinemos $L^2[0,1]$, el espacio de funciones cuadrado integrables con respecto a la medida de Lebesgue.*

Para cada $f \in L^2[0,1]$ definimos $(M_x f)(x) := xf(x)$.

Sea A un conjunto medible en $[0,1]$ con $0 < m(A) < 1$ y definamos $M_A := \{f \in L^2[0,1] : f = 0$ casi en todo $A\}$.

Veamos que M_A es un subespacio cerrado invariante no trivial para M_x.

Sea $f \in der\ M_A$, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subseteq M_A$ que converge a f, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq N$ se cumple que $(\int_0^1 |f(x) - f_m(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, luego

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|^2 &\leq \int_A |f(x)-f_m(x)|^2 + 2\int_A |f(x)-f_m(x)||f_m(x)| + \int_A |f_m(x)|^2 \\ &= \epsilon^2 + 0 + 0 \text{ ya que } A \subseteq [0,1] \text{ y } f_m \in M_A \\ &= \epsilon^2,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left(\int_A |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,\ \forall \epsilon > 0,$$

en consecuencia,

$$\left(\int_A |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 0,$$

de donde obtenemos que $f = 0$, es decir, $f \in M_A$.
$\therefore$ M_A es cerrado.

Sean $s \in M_A$ y $B_1 = \{x \in A : s(x) \neq 0\}$, por lo que $m(B_1) = 0$, luego $(M_x s)(x) = xs(x) = I(x)s(x)$ y

$$\begin{aligned}B &= \{x \in A : I(x)s(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in A : x \neq 0 \text{ y } s(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in A : x \neq 0\} \cap B_1 \subseteq B_1,\end{aligned}$$

por la monotonía $m(B) = 0$, por lo tanto, $Is \in M_A$.
$\therefore$ M_A es M_x-invariante.

Veamos que M_A no es trivial. Para esto:

1. Sea $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = c \neq 0$, como $g \in L^2[0,1] \backslash M_A$, se cumple que $L^2[0,1] \neq M_A$.

2. Sea $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

por lo tanto $h \in M_A$, es decir, $\{0\} \neq M_A$.
$\therefore$ M_A es un subespacio invariante no trivial.

La duda que surge: ¿Sucede lo mismo con todos lo espacios completos? Para responder a esta pregunta iniciamos nuestra aventura en los espacios de Hilbert (Banach).

También delimitamos los operadores con los que vamos a trabajar, a partir de ahora sólo trabajaremos con operadores acotados.

Observación 4.2.1. *En los espacios de dimensión finita, cada operador lineal es un operador acotado (por el Teorema 2.2.4).*

Definición 4.2.1. *Sea X un espacio de Hilbert (Banach) y $T \in B(X)$, definimos a Lat T como el conjunto de todos los espacios T-invariantes.*

Definición 4.2.2. *Sea $\mathcal{A}$ un subespacio de $B(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es transitivo si para todo $x \in X \setminus \{0\}$, el conjunto $\{R(x) : R \in \mathcal{A}\}$ es denso en X.*

Proposición 4.2.1. *[14, pág. 62] Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Entonces, $\mathcal{A}$ es transitiva si y sólo si no existe un subespacio invariante no trivial común para todo $A \in \mathcal{A}$, es decir, si y sólo si $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} Lat A = \{\emptyset, X\}$.*

4.3. El teorema de Lomonosov

A partir de aquí sólo trabajaremos con espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Definición 4.3.1. *Sea X un espacio de Hilbert (Banach), $T \in B(X)$, y W un subespacio K-invariante para cada operador K, que conmuta con T; llamaremos a este subespacio hiperinvariante para T.*

En 1973, Lomonosov presentó el resultado siguiente:

Teorema 4.3.1. *(Lomonosov) Sea X un espacio de Hilbert (Banach) de dimensión infinita y K un operador compacto distinto del operador cero, entonces existe un subespacio hiperinvariante para K.*

Al igual que el problema del subespacio invariante, el problema del subespacio hiperinvariante es una de las grandes incógnitas de nuestro tiempo, pero aquí nos interesaremos por el caso particular de los espacios invariantes.

Teorema 4.3.2. *(Lomonosov débil) Sean $T, S \in B(X)$ tal que T no es múltiplo escalar del operador identidad y S es un operador compacto distinto de cero. Si T conmuta con S, entonces T tiene un espacio invariante no trivial.*

La técnica de Víctor Lomonosov se basa en el teorema del punto fijo de Schauder, pero aquí examinaremos la demostración hecha por Hilden en 1997.

Demostración. Sean $T, S \in B(X)$ tal que T no es múltiplo escalar del operador identidad y S es un compacto distinto de cero, tales que T y S conmutan.

Podemos asumir que $\|S\| = 1$ (cuando $\|S\| \neq 1$ trabajamos con $\frac{1}{\|S\|}S$ y el resultado es el mismo) y que S no tiene valores propios (pues el caso en el que S tiene valores propios, ya lo resolvimos en la Proposición 3.2.1).

Como $\sigma(S) = \{0\}$ (por Teorema 2.3.2), se tiene que $r(S) = 0$. Por la fórmula del radio espectral se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| S^n \|} = 0. \tag{4.1}$$

Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} \| S^n \| = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, por la ecuación 4.1 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, entonces $\sqrt[n]{\| S^n \|} < \epsilon$.
Observaciones:

o1) $0 < \epsilon \leq 1$, entonces $\epsilon^n \leq \epsilon$ para $n \in \mathbb{N}$.

o2) $1 < \epsilon$, entonces $\epsilon^{n_1} < \epsilon^n$ cuando $n \geq n_1$.

Luego para ϵ^{n_1} existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$, entonces $\sqrt[n]{\| S^n \|} < \epsilon^{n_1}$. Tomemos $N = \max\{n_1, n_2\}$, así para $n \geq N$ se cumple que:

1) $0 < \epsilon \leq 1$, entonces $\| S^n \| < \epsilon^n \leq \epsilon$.

2) $1 < \epsilon$, entonces $\sqrt[n]{\| S^n \|} < \epsilon^{n_1} < \epsilon^n$, es decir, $\| S^n \| < \epsilon$.

Definamos $\mathcal{A} := \{T \in B(X) : TS = ST\}$, veamos que $\mathcal{A}$ no es transitiva.

Supongamos lo contrario, es decir, que $\mathcal{A}$ es transitiva.

1. Ya que $S \neq 0$, existe $x_1 \in X$ tal que $S(x_1) \neq 0$, luego existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{\|S(x_1)\|} < m$. Definamos $x_0 := mx_1 \in X$, así, $\|S(x_0)\| = |m|\|S(x_1)\| > \frac{1}{\|S(x_1)\|}\|S(x_1)\| = 1$. Por lo tanto $\| S(x_0) \|> 1$.

   Además, tenemos que $\| x_0 \|> 1$, ya que:
   $\| S(x_0) \|<\| S \|\| x_0 \|=\| x_0 \|$.

2. Sea $B(x_0, 1) = \{x \in X :\| x - x_0 \|< 1\}$
   Afirmamos:

   a') $0 \notin \overline{S(B(x_0, 1))}$.

   Supongamos que $0 \in \overline{S(B(x_0, 1))}$,entonces existe una sucesión $\{S(y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{S(B(x_0, 1))}$ con $y_n \in B(x_0, 1)$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S(y_n) = 0 \in X$.

   Por lo anterior, para $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, entonces $\|S(y_n)\| < \epsilon$; se sigue $\lim\limits_{n\to\infty} \|S(y_n)\| = 0 \in \mathbb{R}$.
   Como $S(x_0) = S(x_0 - y_n) + S(y_n)$, se cumple que

   $$\begin{aligned}\|S(x_0)\| &\leq \|S(x_0 - y_n)\| + \|S(y_n)\|,\\ &\leq \|S\|\|x_0 - y_n\| + \|S(y_n)\|,\\ &\leq 1 + \|S(y_n)\|,\end{aligned}$$

   entonces $\|S(x_0)\| \leq 1$, lo cual es una contradicción.
   Por lo tanto $0 \notin \overline{S(B(x_0, 1))}$.

   b') Dado que $B(x_0, 1)$ es acotado y S es compacto, $\overline{S(B(x_0, 1))}$ es compacto.

   c') Para cada operador T en $\mathcal{A}$, el conjunto

   $$T^{-1}(B(x_0, 1)) = \{x \in X : \|T(x) - x_0\| < 1\}$$

es abierto, pues $B(x_0,1)$ es abierto y T es continuo (por Teorema 2.2.2).

d') Para cada $T \in \mathcal{A}$, $0 \notin T^{-1}(B(x_0,1))$.
Supongamos lo contrario, es decir, que $0 \in T^{-1}(B(x_0,1))$, en consecuencia existe $y \in B(x_0,1)$ tal que $T(0) = y$, y como $T(0) = 0$ se tiene que $y = 0$, pero esto implica que $0 \in B(x_0,1)$, lo cual es una contradicción, pues $\|x_0\| > 1$.

e') $\bigcup\limits_{T\in\mathcal{A}} T^{-1}(B(x_0,1)) = X \setminus \{0\}$
La primera contención es inmediata usando la afirmación anterior.
Sea $x \in X \setminus \{0\}$, por hipótesis $\mathcal{A}$ es transitiva, luego se cumple que $\overline{\mathcal{A}(x)} = \overline{\{T(x) \in X : T \in \mathcal{A}\}} = X$.
En consecuencia $\mathcal{A}(x) \cap B(x_0,1) \neq \emptyset$, lo que implica que existe $T \in \mathcal{A}$ tal que $T(x) \in B(x_0,1)$, por lo que $x \in T^{-1}(B(x_0,1))$.

f') Existe una cubierta abierta finita para $\overline{S(B(x_0,1))}$.
Como $0 \notin \overline{S(B(x_0,1))}$, se tiene que $\overline{S(B(x_0,1))} \subseteq X \setminus \{0\}$, por el punto anterior $\bigcup\limits_{T\in\mathcal{A}} T^{-1}(B(x_0,1))$ es una cubierta abierta para $\overline{S(B(x_0,1))}$.
Debido a la compacidad de $\overline{S(B(x_0,1))}$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $A_1,...,A_n \in \mathcal{A}$ tales que:

$$\overline{S(B(x_0,1))} \subseteq \bigcup_{i\in\{1,...,n\}} A^{-1}(B(x_0,1)).$$

g') Para cada $m \in \mathbb{N}$, existen $A_{i_1},...,A_{i_m} \in \{A_1,...,A_{n-1},A_n\}$ con $i_1,...,i_m \in \{1,...,n\}$ tales que:

$$A_{i_m} \cdots A_{i_1} S^m(x_0) \in B(x_0,1).$$

i) m=1
Como $x_0 \in B(x_0,1)$, se cumple que $S(x_0) \in \overline{S(B(x_0,1))}$, luego existe $A_{i_1} \in \mathcal{A}$ con $i_1 \in \{1,...,n\}$ tal que $S(x_0) \in A_{i_1}^{-1}(B(x_0,1))$, es decir, $A_{i_1}S(x_0) \in B(x_0,1)$.

ii) Supongamos que nuestra hipótesis se cumple para m,

demostremos que se cumple para m+1.
Sean $A_{i_1},...,A_{i_m} \in \{A_1,...,A_n\}$ con $i_1,...,i_m \in \{1,...,n\}$ tales que:

$$A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m(x_0) \in B(x_0,1).$$

Luego $SA_{i_1}\cdots A_{i_m}S^m(x_0) \in \overline{S(B(x_0,1))}$, por lo que existe $A_{i_{m+1}} \in \mathcal{A}$ con $i_{m+1} \in \{1,...,n\}$ tal que:

$$SA_{i_1}\cdots A_{i_m}S^m(x_0) \in A_{i_{m+1}}^{-1}(B(x_0,1)),$$

dicho de otra forma, $A_{m+1}A_{i_m}\cdots A_{i_a}S^{m+1}(x_0) \in B(x_0,1)$.

h’) Definamos $c := \max\{\|A_1\|,...,\|A_n\|\}$. Entonces $c > 0$.
Si $c = 0$, se tiene que $0 = \|A_1\| = \cdots = \|A_n\|$, es decir, $0 = \underset{x\neq 0}{sup}\frac{\|A_i(x)\|}{\|x\|}$ para cada $i \in \{1,...,n\}$.
Sea $x \in X$ distinto de cero, luego $0 \leq \frac{\|A_i(x)\|}{\|x\|} \leq 0$, lo que implica que $A_i = 0$ para cada $i \in \{1,...,n\}$, se sigue que $A_{i_r} = 0$ para cada $r \in \{1,...,m\}$, lo que implica que $0 \in B(x_0,1)$, que es una contradicción.

i’) $\lim\limits_{m\to\infty}\|A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m(x_0)\| = 0$.
Como $c := \max\{\|A_1\|,...,\|A_n\|\}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m\| &\leq c^m\|S^m\|\\ &= \|(cS)^m\|.\end{aligned}$$

Ya que cS es compacto y no tiene valores propios (pues S no los tiene y $c > 0$) , se sigue que $r(cS) = 0$. Por la fórmula del radio:

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\| (cS)^m \|} = 0.$$

Luego, procediendo como antes, se sigue que

$$\lim_{m\to\infty}\| (cS)^m \|= 0.$$

Como

$$\begin{aligned}\|A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m(x_0)\| &\leq \|A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m\|\|x_0\|\\ &\leq \|(cS)^m\|\|x_0\|,\end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{m\to\infty}\|A_{i_m}\cdots A_{i_1}S^m(x_0)\| = 0.$$

3. Como $A_{i_m} \cdots A_{i_1} S^m(x_0) \in B(x_0, 1)$, por la última afirmación $0 \in \overline{S(B(x_0, 1))}$, pero esto es una contradicción.

Luego $\mathcal{A}$ no es transitiva.
Concluimos que existe un subespacio invariante no trivial para cada elemento de $\mathcal{A}$, particularmente para T.■

Este resultado tiene varias consecuencias, entre ellas las siguientes:

Proposición 4.3.1. *Sea $T \in B(X)$, podemos afirmar que X no tiene subespacios hiperinvariantes no triviales (cerrados) si y sólo si $\overline{A(x)} = X$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$.*

Teorema 4.3.3. *Sea T un operador que no es múltiplo escalar del operador identidad. Si T conmuta con un operador compacto distinto de cero, entonces T tiene un espacio hiperinvariante no trivial.*

Estos resultados los podemos encontrar en [4, pág. 7] y [19, pág. 95], respectivamente.

Da la impresión que el Teorema de Lomonosov dará paso a la solución general, sin embargo, en 1980, D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi y P. Rosental mostraron un operador que no cumple las condiciones de dicho teorema [9]. Un ejemplo de este hecho se encuentra en el libro [19, pág. 94].

4.4. Una formulación actual del problema

En 1930, Von Neumann planteó el problema en general y se presume que demostró, pero no publicó, que todo operador compacto en un espacio de Hilbert de dimensión infinita tiene subespacios invariantes no triviales.

En 1950, N. Aronszajn probó esta misma proposición (con proyecciones ortogonales) y en 1953, N.Aronszajn y K.T. Smith extendieron esta proposición a espacios de Banach.

Ya con esta extensión en mano, K.T. Smith, en 1963, preguntó si todo operador cuyo cuadrado es compacto tiene un subespacio invariante no trivial. Esta pregunta fue resuelta con técnicas de análisis no estándar por Bernstein y Robinson en 1966 y fue simplificada por P.R. Halmos el mismo año.
En 1973, Lomonosov sorprendió al mundo matemático con el Teorema 4.3.1.
En la escena aparece Por Enflo, mostrando un espacio de Banach que no tiene subespacios invariantes no triviales (1975).
En 1984, C.J. Read encontró otros ejemplos sin subespacios $T-$invariantes no triviales, el más simple lo encontró en ℓ^1, una simplificación de este resultado efectuada por A. M. Davie la podemos encontrar en [4, Cap. 3].

De esta manera, se desarrolló una gran teoría al intentar resolver la pregunta:

¿Todo operador definido en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial?

La motivación básica para el estudio e investigación dicho problema viene del interés de los matemáticos en poder expresar los espacios de Hilbert como suma de subespacios $T-$invariantes, como sucede en las estructuras de los operadores dados en el teorema espectral (véase el Apéndice C).

A continuación se resumen de los resultados obtenidos hasta el momento.

a) Si X es de dimensión finita,

   a) $dim\ X \leq 1$, no existe tal subespacio.

   b) $dim\ X = n > 1$
   Por el teorema fundamental del álgebra, existe un valor propio para T, digamos λ, y un vector w asociado a λ. Luego por el Teorema 2.2.5, cada subespacio de X es cerrado, en particular $gen\,\{w\}$.

b) Si X es de dimensión infinita y no es separable.
Sea $v \in X$ con $v \neq 0$. Veamos que $\overline{C_v}$ es un subespacio T-invariante. Sea $y \in T(\overline{C_v})$, entonces existe $x \in \overline{C_v}$ tal que $T(x) = y$. Luego existe una sucesión$\{x_m\} \subseteq C_v$ que converge a x, pero como T es acotado también es continuo, así, $\{T(x_m)\} \subseteq C_v$ converge a $T(x)$, lo que implica que $T(x) \in \overline{C_v}$. Por tanto $\overline{C_v}$ es un subespacio T-invariante, pero este espacio es separable por lo que no es X.

c) Finalmente, el caso interesante se plantea cuando X es de dimensión infinita y separable, en otras palabras:

¿Todo operador continuo definido en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial?

En 2013, Carl Cowen (Indiana University-Purdue University Indianapolis E.E.U.U.) y Eva Gallardo (Universidad Complutense de Madrid) presentaron una solución afirmativa al problema, sin embargo, se encontró la omisión de una afirmación.

¡Por lo que hasta el día de hoy seguimos en ascuas!

Apéndice A

Algunas propiedades de conjuntos

En esta sección se pretende allegar algunas ideas intuitivas y básicas de la teoría de conjuntos necesarias para la comprensión de esta tesis.
"*Por conjunto se entiende un agrupamiento en un todo de objetos que distingue con claridad nuestra intuición o nuestro pensamiento*" (G. Cantor[2]).

Definición A.0.1. *Empleamos el símbolo* $\aleph_0$ *para representar la cardinalidad de* $\mathbb{N}$*; en otras palabras,* $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Definición A.0.2. *Sean* X *y* Y *un par de conjuntos.*

I) Decimos que $|X| \leq |Y|$ *si existe una función inyectiva de* X *en* Y.

II) Si $|X| \leq |Y|$ *y* $|X| \neq |Y|$*, entonces escribimos* $|X| < |Y|$.

De esta manera, si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son números cardinales, la expresión $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ significa que al tomar conjuntos X e Y que satisfacen $|X| = \mathfrak{m}$ y $|Y| = \mathfrak{n}$, podemos encontrar una función inyectiva de X en Y. La expresión $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ significa, naturalmente, que para los conjuntos X e Y, podemos encontrar una función inyectiva de X en Y, pero no existe una función biyectiva entre X e Y.

Definición A.0.3. *Sea* X *un conjunto.*

(I) El conjunto X *es finito si* $|X| < \aleph_0$*. De lo contrario diremos que* X *es infinito.*

(II) Diremos que X *es numerable si* $|X| \leq \aleph_0$.

(III) *En el caso en que* $|X| = \aleph_0$, *se dice que* X *es infinito numerable .*

(IV) *Por un conjunto más que numerable entendemos un conjunto que no es numerable .*

Definición A.0.4. *Sean* X *y* Y *conjuntos no vacíos,* $B \subseteq Y$ *y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función. La imagen inversa de* B *en* X *bajo* f *es el subconjunto*

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : \text{ existe } y \in B \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Apéndice B

Determinante

El determinante es una operación sobre matrices cuadradas.

Definición B.0.1. *Sea* $A = \{x_n \in K : n \in \mathbb{N}\}$*, se entiende por permutación a las distintas formas que tenemos de ordenar ese conjunto.*

Ejemplo B.0.1. *Sea* $A = \{1, 2, 3\}$*, los conjuntos* $\{1, 2, 3\}$*,* $\{1, 3, 2\}$*,* $\{2, 1, 3\}$*,* $\{2, 3, 1\}$*,* $\{3, 1, 2\}$ *y* $\{3, 2, 1\}$ *son las permutaciones de* A*.*

Obsérvese que A tiene 6 permutaciones, como es de esperarse un conjunto con n elementos tiene $n! = n(n-1)\cdots 1$ permutaciones.

Definición B.0.2. *Una trasposición de una permutación es el cambio de orden entre dos elementos de una permutación.*

Ejemplo B.0.2. *Una trasposición de* $\{1, 2, 3\}$ *es* $\{1, 3, 2\}$*.*

Definición B.0.3. *El determinante de una matriz* A *de tamaño* $n \times n$ *con elementos de un campo* K *es:*

$$det\,(A) := \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{t_i} x_{1j_1} x_{1j_2} \cdots x_{1j_n},$$

donde $x_{1j_1}, x_{1j_2}, ..., x_{1j_n}$ *es una de las* $n!$ *permutaciones del conjunto* $\{1, ..., n\}$ *y* t_i *es el número de trasposiciones requeridas para ordenar la permutación* $x_{1j_1}, x_{1j_2}, ..., x_{1j_n}$ *en el orden* $\{1, ..., n\}$*.*

El siguiente resultado es muy útil cuando queremos calcular el determinante.

Teorema B.0.1. *(Desarrollo por cofactores) El determinante de una matriz* A *de tamaño* $n \times n$ *con elementos de un campo* K*, se puede calcular de la siguiente manera:*

I) Si n=1, entonces $det\,(A) = A_{11}$, *el único elemento de* A.

II) Si n=2, entonces $det\,(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

III) Si $n > 2$, *entonces el determinante de* A *se puede expresar como la suma de los productos de cada elemento de algún renglón o columna de* A *multiplicando por* ± 1 *veces el determinante de la matriz de* $(n-1) \times (n-1)$ *obtenida al eliminar de* A *el renglón y la columna que contienen el elemento en cuestión. La fórmula exacta es:*

$$det\,(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \cdot det\,(\overline{A_{ij}}).$$

(Si el determinante es evaluado a partir de los elementos del renglón i *de* A*) o bien:*

$$det\ (A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \cdot det\,(\overline{A_{ij}})$$

(Si el determinante es evaluado a partir de los elementos de la columna j *de* A*), donde* $\overline{A_{ij}}$ *es la matriz de* $(n-1) \times (n-1)$ *obtenida al suprimir el renglón* i *y la columna* j *de* A.

En las expresiones anteriores, el escalar $(-1)^{i+j} det(\overline{A_{ij}})$ *se llama cofactor del elemento* A_{ij}. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} detA &= 2\,det \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\,det \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + 3\,det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2(35 - 36) - 3(7 - 18) + 3(4 - 10) \\ &= 2(-1) - 3(-11) + 3(-6) \\ &= -2 + 33 - 18 \\ &= 13. \end{aligned}$$

Apéndice C

El teorema espectral

No siempre es posible encontrar valores propios cuando $K = \mathbb{R}$, por lo que se incluye esta sección para determinar cuándo sí se puede garantizar la existencia de por lo menos, un valor propio, para poder llegar al teorema espectral, que desempeña un papel importante en la motivación del problema del subespacio $T-$invariante.

En los resultados que a continuación se enuncian, $(X, < \cdot >)$ es un espacio con producto interior sobre K (donde $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{R}$).

C.1. Operadores normales y autoadjuntos

Definición C.1.1. *Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos de K. Definimos la adjunta (o transpuesta conjugada) de A como la matriz A^* de $n \times m$ tal que $(A^*)_{ij} := \overline{A_{ji}}$.*

Ejemplo C.1.1. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+2i \\ 2 & 3+4i \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-2i & 3-4i \end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

En los espacios vectoriales de dimensión finita podemos definir el operador adjunto de un operador T debido a que existe una matriz asociada a T (por el Teorema 1.2.2).

Teorema C.1.1. *[5, pág. 398] Sea $(X, < \cdot >)$ con X de dimensión finita sobre K, y sea $g : X \longrightarrow K$ un operador lineal. Entonces existe un vector único $y \in X$ tal que $g(x) =< x, y >$ para toda $x \in X$.*

Teorema C.1.2. *[5, pág. 398] Sea $(X, < \cdot >)$ con X de dimensión finita sobre K, y sea $T \in L(X)$. Entonces existe $T^* \in L(X)$ único tal que*

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) > \text{ para cualesquiera } x, y \in X,$$

al cual llamaremos operador adjunto.

Definición C.1.2. *Sean $(X, < \cdot >)$ y $T \in L(X)$. Decimos que T es normal si $TT^* = T^*T$. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $AA^* = A^*A$.*

Definición C.1.3. *Sean $(X, < \cdot >)$ y $T \in L(X)$. T se denomina operador autoadjunto (o Hermitiano) si $T = T^*$. Una matriz A de $n \times n$ es autoadjunta (o Hermitiana) si $A = A^*$.*

Nótese que si A tiene elementos reales, entonces A^* es sencillamente la transpuesta de A.

Teorema C.1.3. *[5, pág. 419] Sean $(X, < \cdot >)$ y $T \in L(X)$. Si λ es un valor propio de T, entonces λ es un número real.*

Teorema C.1.4. *[5, pág. 419] Sean $(X, < \cdot >)$ y $T \in L(X)$. Si X es de dimensión finita, entonces:*
a) Si $K = \mathbb{C}$, entonces T tiene un eigenvalor. (por el teorema fundamental del álgebra).
b) Si $K = \mathbb{R}$ y T es autoadjunto, entonces T tiene un valor propio real.

C.2. Espacios ortogonales

Definición C.2.1. *Sean $x, y \in X$. Los vectores x y y son ortogonales (perpendiculares) si $< x, y >= 0$, y se escribe $x \perp y$.*

Definición C.2.2. *Sea $(X, < \cdot >)$ un espacio con producto interior y $S \subseteq X$.*
El vector $x \in X$ es ortogonal a A si $x \perp a$ para todo $a \in A$, y se escribe $x \perp A$.

Ejemplo C.2.1. *El vector 0 es ortogonal a X, pues para cualquier $x \in X$ es cierto que: $< 0, x >=< 0_K 0, x >= 0_K < 0, x >= 0_K$.*

En este ejemplo adoptamos la notación 0_K para diferenciarlo del cero del espacio vectorial, pero en lo sucesivo, lo omitiremos.

Definición C.2.3. *Sean* $(X, < \cdot >)$ *y* S *un subconjunto de* X*. Definimos a* $S^{\perp}$ *como el conjunto de todos aquellos vectores de* X *que son ortogonales a todos los vectores de* S*; esto es,* $S^{\perp} := \{x \in X : < x, y >= 0 \text{ para toda } y \in S\}$*. A* $S^{\perp}$ *se le llama complemento ortogonal de* S*.*

Proposición C.2.1. $S^{\perp}$ *es un subespacio de* X*.*

Demostración. I) Evidentemente $0 \in S^{\perp}$.
II) Sean $x, y \in S^{\perp}$ y $\alpha, \beta \in K$, luego

$$\begin{aligned} < \alpha x + \beta y, s > &=< \alpha x, s > + < \beta y, s > \\ &= \alpha < x, s > + \beta < y, s >= 0 \end{aligned}$$

para todo $s \in S$. Así, $\alpha x + \beta y \in S^{\perp}$.■

C.3. Proyecciones ortogonales y el teorema espectral

Definición C.3.1. *Sea* $T \in L(X)$*,* T *es una proyección (en su rango* $Img\ (T)$*) si* $X = Img\ (T) \oplus Ker\ (T)$*.*

Definición C.3.2. *Sean* $(X, < \cdot >)$ *y* $T \in L(X)$ *una proyección. Decimos que* T *es una proyección ortogonal si* $Img\ (T)^{\perp} = Ker\ (T)$ *y* $Ker\ (T)^{\perp} = Img\ (T)$*.*

Teorema C.3.1. *[6, pág. 401] (El teorema espectral.) Sea* $(X, < \cdot >)$*, con* X *de dimensión finita. Supóngase que* T *es normal si* $K = \mathbb{C}$*, y que* T *es autoadjunta si* $K = \mathbb{R}$*. Si* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *son los distintos valores propios de* T*, sea* $W_i = E_{\lambda_i}$ *el espacio propio de* T *correspondiente al valor propio* $\lambda_i (1 \leq i \leq k)$ *y sea* T_i *la proyección ortogonal sobre* $W_i (1 \leq i \leq k)$*, entonces,*

a) $X = W_1 \oplus ... \oplus W_k$*.*

b) Si W_i' *es la suma directa de los subespacios* W_j*,* $j \neq i$*, entonces* $W_i^{\perp} = W_i'$*.*

c) $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$*.*

Referencias

[1] Juan J. Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras, and Ma. de Jesús López Toriz. *Introducción a las Estructuras Algebraicas*. Textos Científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[2] Fidel Casarrubias Segura and Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de la Topología General*. Intituto de Matemáticas UNAM, 2015.

[3] Real Acedemia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Vocabulario Científico Y Técnico*. ESPASA, 1996.

[4] Carlos Domingo. *Problema del subespacio invariante*. Universitat de Barcelona, 2011.

[5] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural, S.A., 1982.

[6] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 2003.

[7] Fernando Galaz. *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^N$. Oxford, 2002.

[8] Stanley I. Grossman and José Job Flores Godoy. *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill, 2012.

[9] D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi, and P. Rosenthal. An operator not satisfying lomonosov's hypothesis. *J. Funct. Anal., vol. 38, núm. 3*, 1980.

[10] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Álgebra Lineal*. Prentice Hall, 1973.

[11] Andrei Nikolaevich Kolmogorov, Sergei Vasilévich Fomin, and Carlos Vega. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* MIR, 1972.

[12] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. Wiley New York, 1989.

[13] Marcos Lopez García. El problema del subespacio invariante. *Miscelánea Matemática*, 2014.

[14] Rubén Martínez Avendaño. Una introducción al problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert, 9 2016.

[15] Pedro Ortega Pulido. Determinante. `https://www.uam.es/personal_pdi/economicas/portega/web-algebra/capitulo-3/teoria-3-2/3-2-determinante.htm`.

[16] Ma. Guadalupe Raggi, Juan Alberto Escamilla, and Francisco Javier Mendoza. *Introducción a la teoría de espacios métricos.* Textos Científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[17] Beata Randrianantoanina and Narcise Randrianantoanina. *Banach spaces and their applications in analysis.* Walter de Gruyter, 2006.

[18] Walter Rudin. *Functional Analysis.* Mc Graw Hill, 1991.

[19] Joel H. Shapiro. *A Fixed-Point Farrago.* Springer, 2016.

[20] Real Sociedad Matemática Española. Carl Cowen y Eva Gallardo presentan la solución afirmativa al "problema del subespacio invariante". `http://www.rsme.es/content/view/1199/1/`.

Índice alfabético