BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una revisión histórica de la ecuación cúbica como reflexión para su enseñanza.

Tesis para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Alma Rosa Fernández Ángel

Dirigido por: Lidia Aurora Hernández Rebollar y María Araceli Juárez Ramírez.

Junio 2012

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

El problema de la enseñanza de las matemáticas siempre ha sido un tema de interés para la educación en todos los niveles, y la búsqueda de alternativas para acercar y ayudar a la comprensión de los contenidos en todas las áreas de las matemáticas ha generado distintas propuestas didácticas. En este trabajo se ofrece un enfoque histórico en la enseñanza de las matemáticas buscando recrear el desarrollo histórico que llevó a la solución de la ecuación cúbica, con este enfoque se muestra una matemática necesaria para la vida cotidiana que se va robusteciendo en el transcurso de la historia de la humanidad, en donde se esclarece cómo la capacidad de pensar y de actuar, genera, en la madurez de esta historia el fortalecimiento de las ciencias, cuestiones que ahora las vemos en el aula, a veces con tintes de extraordinarios y mágicos.

La pregunta a resolver es: **¿Cómo aprovechar el desarrollo histórico de las matemáticas para desarrollar una clase, buscando mejorar el aprendizaje del tema?**

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la justificación se muestran los fundamentos teóricos que apoyan la propuesta de enfocar la enseñanza de las matemáticas en la historia, donde la historia tenga un enfoque didáctico, y no como objeto mismo de la enseñanza.

El capítulo uno es para realizar un recuento del desarrollo histórico de la solución de la ecuación cúbica, desde qué época surge hasta que surge el problema irreducible, el cual se trata en el capítulo dos donde se analiza cual es el conflicto en el que la época y los conocimientos limitados atoran momentáneamente más avances, sin embargo, este caso se logra resolver con otros avances.

El capítulo tres contiene una consecuencia del estudio de la ecuación cúbica. Se presentan algunos aspectos someros en relación al origen de los números imaginarios y su estudio. Esto permite mostrar cómo, en el desarrollo de algunos temas, van surgiendo otros conceptos o resultados de manera inesperada. Además, de que se muestra que podemos trabajar ampliamente esta alternativa para abarcar más temas según consideremos pertinente.

Por último, en el capítulo cuatro se presenta una propuesta de clase. En esta clase se parte de una anécdota histórica que ocurrió entre Tartaglia y Cardano en relación a la búsqueda de soluciones de la ecuación cúbica y se desarrolla el tema analizando las propuestas de solución y las fórmulas utilizadas.

JUSTIFICACIÓN.

La enseñanza de las matemáticas tiene una carga lógica y axiomática, como en Los Elementos de Euclides. Buscamos hacer una secuencia de definiciones y axiomas conocidos, como lo menciona Várrilly (1986): “El profesor está contento con el argumento "supongamos A; A implica B, B implica C, C implica *D*, luego D es cierto". El estudiante, en cambio, primero quiere saber por qué se quiere comprobar D, por cuál motivo se debe suponer A, y a quién se le ocurrió pensar que B implicaría C. Sin explicaciones de esta naturaleza, que reestructuran la materia en un orden pedagógico, el estudiante puede fácilmente obtener la impresión (muy difundida entre el público general) de que la matemática es un proceso de razonamiento mecánico sin contenido intuitivo” (Várrilly, 1986).

La matemática es el resultado de la necesidad humana; el comercio, la economía, la vida cotidiana hizo surgir el número, los símbolos, las operaciones. La investigación se va desarrollando cuando lo que se va conociendo hace que sea necesario algo más para cubrir esa necesidad. Los matemáticos son seres humanos curiosos que estuvieron en los momentos históricos adecuados.

Haciendo un recuento del desarrollo histórico que llevó a encontrar un resultado, se puede verificar que, en algunas ocasiones, no era lo que se estaba buscando, sin embargo, logró crecer la matemática en diferentes sentidos. Por otro lado, los conocimientos de cada época no eran suficientes para verificar algunos resultados.

Presentar el desarrollo histórico de los conceptos, mostrará al alumno que la matemática tiene un contexto real y necesario, el cual podrá sentir más cercano y apropiarse de los contenidos que en otro momento le resultaron vanos e insensatos, resultados de gente superdotada y sin aplicación verdadera.

Es claro que dar un enfoque histórico que no quede en lo meramente anecdotario, requiere de un esfuerzo por parte del docente así como una preparación más profunda. También es importante aclarar que la historia no es el fin en sí, sino una herramienta pedagógica para facilitar la actividad del estudiante.

Al proponer esta forma de manejo de la historia de las matemáticas en el salón de clase, se puede considerar lo que Fauvel (1991), citado por Sierra (2009), propone acerca del uso de la historia de las matemáticas en el aula:

i. Mencionar anécdotas matemáticas del pasado.
ii. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.
iii. Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a distintos conceptos que aprenden en clase.
iv. Impartir lecciones de historia de las matemáticas.
v. Idear ejercicios utilizados en textos matemáticos del pasado.
vi. Fomentar la creación de posters, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico.
vii. Realizar proyectos con un tema matemático local del pasado.
viii. Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas y métodos.
ix. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
x. Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
xi. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

Fauvel (1991), también menciona que la generación del conocimiento individual debe darse de la misma forma que la del conocimiento colectivo, además, que los hechos históricos muestran a los alumnos la relación que hay entre las matemáticas y otras disciplinas. Buscando con esto el cambio de la percepción de los alumnos hacia las matemáticas.

Entre los autores que proponen un método de enseñanza de las matemáticas con énfasis en la historia tenemos a Freudenthal, Bishop, Ernest, Arcavi, entre otros. Además de los ya mencionados anteriormente.

También vale la pena considerar que la National Council Of Teachers Of Mathematics (NCTM), considera la alternativa de la enseñanza de las matemáticas con apoyo de la historia.

En este trabajo, la propuesta es reconstruir la búsqueda de la solución general de la ecuación cúbica, haciendo énfasis en los matemáticos renacentistas en un recorrido por Luca Pacioli, Scipione del Ferro, Antonio del Fiore, Tartaglia, Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Bombelli. Analizando cuál fue la necesidad real por la que fueron surgiendo los resultados, esperamos que el alumno pueda notar qué motivó la creación de estos resultados.

CAPÍTULO I

LA ECUACION CÚBICA

El surgimiento de los pueblos da origen también a la organización de los pobladores para la adquisición de bienes para cubrir necesidades, y es por esto que surge el comercio. Los mercaderes inician sus actividades y con ello surge la necesidad de realizar cuentas, hacer recibos, llevar una contabilidad, llevar un sistema de medidas.

Un grupo de personas que pronto acumularon riquezas, iniciaron movimientos mercantiles, de los cuales necesitaron llevar un control de cuántas tierras tienen, cuánto compran, cuánto deben, cuánto venden, etc.

Los sumerios (3000 A.C.), la primera civilización que se conoce en Mesopotamia, inicia este tipo de actividades. La historia se va desarrollando con pueblos conquistados y pueblos vencedores, los cuales continuaran el desarrollo de actividades y de conocimientos necesarios para mantener el control de sus ganancias y riquezas Bautista (2002).

Aproximadamente en el 1700 a.C. en Babilonia, se pueden encontrar problemas algebraicos, donde asombrosamente se ha descubierto que ya se resolvían problemas que generaban ecuaciones bastante complicadas. Problemas como "Encontré una piedra, pero no la pesé. Después pesé 6 veces su peso, añadí 2 *gin* y añadí un tercio de un séptimo multiplicado por 24. Lo pesé. El resultado era 1 *ma-na*. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (un peso de un *ma-na* son 60 *gin*).

En notación moderna, llamaríamos *x* al peso buscado en *gin*. Entonces la pregunta nos dice que:

$$(6x+2)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\times 24(6x+2)=60$$

Estas ecuaciones eran resueltas extraordinariamente con las fórmulas conocidas actualmente, aunque los babilonios mencionaron el procedimiento pero no justificaron el resultado.

Posteriormente es un árabe, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi en el año 820, quien introduce la palabra “álgebra” como “al-jabr” que significa “sumar cantidades iguales a ambos miembros de la ecuación”, término que utiliza en su libro *Al-Kitab al-jbr w’al-mugabala* (Libro de compendio de cálculo por el método de completado y balanceado), donde explicaba métodos generales para resolver ecuaciones manipulando cantidades desconocidas, aunque tampoco usa símbolos, lo hace con palabras.

En estos descubrimientos se encuentra que los problemas que generaron estas ecuaciones resolvían necesidades que tenían los mercaderes principalmente.

Los griegos descubrieron cómo utilizar secciones cónicas para resolver algunas ecuaciones cúbicas. Donde no sabían el hecho general, sino que explotaban sus consecuencias en casos concretos, utilizando las cónicas como un nuevo tipo de “instrumento geométrico”.

Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* establece algunos teoremas, relativos a segmentos esféricos, que pueden ser entendidos como pertenecientes al “algebra geométrica". Así, en la proposición 4 del Libro II, se trata de cortar una esfera con un plano, de manera que los volúmenes de los segmentos obtenidos estén en una razón dada". Lo que muestra, desde una perspectiva algebraica, la resolución de la ecuación cúbica.
Sea *r* el radio de la esfera, *x* la distancia del centro de la esfera a la sección circular y *l/m* > 1 la razón dada. El volumen del segmento esférico mayor será

$$V = \frac{1}{2}\pi(r+x)(r^2-x^2) + \frac{1}{6}\pi(r+x)^3 = \frac{\pi}{3}(2r-x)(r+x)^3$$

Se tiene, por tanto, que

$$\frac{\pi}{3}(2r-x)(r+x)^3 \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = l \quad (l+m),$$

de donde

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3\frac{l-m}{l+m} = 0,$$

que es una ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$, siendo $p < 0$. Para que esta ecuación tenga solución es preciso que: $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$. Como se muestra más claro en el Renacimiento.

Arquímedes observa que el problema se puede transformar en otro de la forma $\frac{a-x}{c} = \frac{b^2}{x^2}$, que Arquímedes resuelve geométricamente mediante la intersección de una parábola $x^2 = \frac{b^2}{a}y$ y una hipérbola rectangular $(a-x)y = ac$.

Un ejemplo posterior de problema de la forma $x^3 + px + q = 0$ se encuentra, en el siglo III, en la obra de Diofanto, el problema 17 del libro VI de su obra *Arithmetica*, que puede traducirse algebraicamente en la ecuación:

$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$, de la que Diofanto da la raíz $x = 4$, sin precisar el modo en que la obtuvo. Ya que la ecuación se reduce a $x^3 + x = 4x^2 + 4$, pudiera ser que fuera de observar que: $x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$.

El persa Omar Khayyam, más conocido por su poema *Rubaiyat*, trabajó la misma línea de los griegos, completando y codificando esto. Alrededor de 1075 clasificó las ecuaciones cúbicas en 14 tipos, y demostró cómo resolver cada tipo utilizando cónicas en su obra *Sobre las demostraciones de los problemas de álgebra y comparación.* En este estudio se encontraron varias inconsistencias, aunque son defectos menores.

Khayyam resuelve primero las ecuaciones lineales y cuadráticas por métodos geométricos al estilo de Euclides y luego prueba que las cúbicas se pueden resolver mediante intersecciones de cónicas, creyendo que para las cúbicas era imposible dar soluciones aritméticas. Sus métodos geométricos son válidos para cualquier cúbica con alguna raíz positiva. Consideró los siguientes casos, siempre con coeficientes positivos:

- $a = x^3$
- $\begin{cases} x^3 + bx = a, \quad x^3 + a = bx, \quad bx + a = x^3, \\ x^3 + cx^2 = a, \; x^3 + a = cx^2, \; cx^2 + a = x^3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^3 + cx^2 + bx = a, \quad x^3 + cx^2 + a = bx, \quad x^3 + bx + a = cx^2 \\ x^3 = cx^2 + bx + a, \; x^3 + cx^2 = bx + a, \quad x^3 + bx = cx^2 + a \\ x^3 + a = cx^2 + bx \end{cases}$

Veamos un ejemplo, la ecuación del tipo $x^3 + Bx = C$, que se resuelve mediante la intersección de una parábola y un círculo (Figura 1).

Como B, $C > 0$, tomamos b y c tales que $B = b^2$ y $C = b^2c$, por lo que la ecuación queda $x^3 + b^2x = b^2c$.

Construye una parábola $x^2 = by$ de parámetro b.

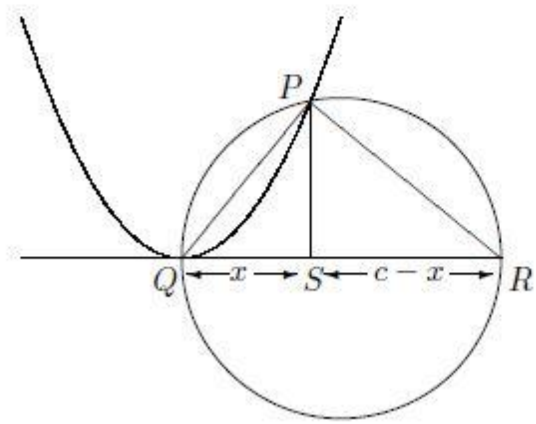


Figura 1

Traza el círculo de diámetro $c = QR$. La intersección de la parábola y el círculo es P. Traza la perpendicular PS a QR. Entonces $QS = x$ es la solución de la ecuación cúbica. En efecto: $x^2 = by = b * PS$, luego

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{PS}$$

QPR es un triangulo rectángulo y PS es media proporcional entre QS y SR (Euclides), luego

$$\frac{b}{PS} = \frac{PS}{c-x}$$

De aquí, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{x} = \dfrac{x}{PS} \\[2em] \dfrac{b}{PS} = \dfrac{PS}{c-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{b}{x} = \frac{x^2/b}{c-x} \Rightarrow \frac{x^3}{b} = bc - bx$$

Luego

$$x^3 = b^2c - xb^2$$

de donde

$$x^3 + xb^2 = b^2c.$$

Naturalmente, el procedimiento realmente usado era mucho más complejo, pues debía identificar en cada caso las cónicas en cuestión al considerar múltiples subcasos, atendiendo al signo de los coeficientes. Es importante destacar que en las soluciones geométricas de las ecuaciones cúbicas, dadas por los griegos, los coeficientes eran segmentos, mientras que aquí son números. De este modo, con Omar Khayyam empieza a cerrarse el abismo entre álgebra geométrica y álgebra numérica. El paso decisivo deberá esperar a Descartes y Fermat. (Pérez y Sánchez, 2007)

Las soluciones geométricas de la cúbica estaban muy bien, pero ¿podrían existir soluciones algebraicas que incluyan cosas tales como raíces cúbicas pero nada más complicado?

Los matemáticos de la Italia del Renacimiento hicieron uno de los más trascendentes avances en álgebra cuando descubrieron que la respuesta es afirmativa (Stewart, 2008).

En esta época renacentista podemos encontrar controversias y hechos insólitos en diferentes episodios. Sucedieron situaciones interesantes en la búsqueda de la solución de la ecuación de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, que además permitieron buenos avances en álgebra.

El siglo XV se caracterizó por el estudio generalizado del álgebra en Europa ya que se empezaron a difundir los escritos árabes. Todo esto ayudó a mejorar muchos métodos ya conocidos. Entonces, la ecuación $x^3 + px = q$ (como se conoce ahora) aun no tenía una forma de solucionarse. Luca Pacioli, encontró solo soluciones a casos particulares sin dar una demostración clara, por lo que decía que este problema era comparable con la cuadratura del círculo o con la trisección del ángulo.

Niccolo Fontana, mejor conocido como Tartaglia, a mediados del siglo XVI (1535), se da a conocer por los trabajos que realiza con los ingenieros del Arsenal de Venecia, donde anuncia que puede resolver cualquier ecuación de la forma $x^3 + px^2 = q$, después de encontrar la solución de un grupo de problemas que le envía un amigo.

Scipione del Ferro, es la primera persona que se sabe encontró la solución general de la ecuación cúbica, lo cual mantuvo oculto. Se atribuye a del Ferro un método para resolver el caso: $3x^3 + 18x = 60$.

Hoy se cree que del Ferro sólo podía resolver cúbicas de esa forma $x^3 + mx = n$, con m y n positivos.
Se sabe, que el caso general $y^3 - by^2 + cy - d = 0$
se reduce a este por medio del cambio lineal $y = x + b/3$
Obteniéndose la cúbica reducida anterior con los valores $m = c - \frac{b}{3}$

$$n = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b}{27}$$

(www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate).

En esta época era cotidiano que se generaran desafíos públicos entre matemáticos, para darse a conocer y generar el interés de alumnos que los contratarían. La fama les aseguraba un ingreso y una mejora en su vida.

Estando al borde de la muerte, del Ferro confió el secreto a su alumno Antonio María Fiore, quién presumía de conocer la fórmula maravillosa para resolver la ecuación cúbica y en 1535 desafió a Tartaglia quien estaba estudiando el mismo tipo de ecuaciones, pero descubrió más casos que los que podía resolver Fiore.

Aunque Fiore era un matemático más bien mediocre, confiaba en la *fórmula maravillosa* que poseía. El reto se llevó a cabo proponiendo 30 problemas cada cual a su oponente que debía resolver en un tiempo estipulado. Tartaglia abarcaba temas aritméticos, geométricos y algebraicos. En cambio Fiore solo conocía un tema: ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + px = q$.

Cuando se cumplió el tiempo determinado, Tartaglia había resuelto todos los problemas propuestos por del Fiore, pero éste no había podido dar respuesta a ninguna de las cuestiones propuestas por Tartaglia. Ni siquiera uno en el que se debía resolver una ecuación cúbica, para la que Tartaglia conocía un método particular.

¿Por qué del Fiore no supo resolver dicha ecuación cúbica? Posiblemente por lo siguiente:

Actualmente representamos todas las ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con $a, b. c, d \in \mathbb{R}$, pero en aquella época, como los números negativos no eran muy manejados, había tantas ecuaciones cúbicas como posibilidades hay de colocar cada uno de sus términos a un lado o al otro de la igualdad. Por ejemplo, $x^3 + px = q$ y $x^3 = px + q$ eran dos ecuaciones distintas, con métodos de resolución diferentes.

La notable victoria de Tartaglia mete a la historia a Cardano, quien está al tanto del evento, quien hasta ese momento creía que este problema no tenia solución pues conocía lo realizado por Pacioli en su obra Summa de 1494, donde se decía que no había solución, además de que también trató de resolverlas y no lo logró. Cardano le ofrece recomendarlo con el gobernador de Milán, a cambio de que le revelara el método de resolución de la cúbica, además de nombrarle en su obra *Ars Magna* como descubridor de la misma. A pesar de estas promesas Tartaglia no accedió a compartir su tesoro con Cardano.

Sin embargo, Tartaglia considera la posibilidad de mejorar su posición en Milán deja Venecia y comunica a Cardano su decisión, aunque no logra entrevistarse con el gobernador le entrega a Cardano sus fórmulas, en forma de poema para evitar que caiga en otras manos.

Cardano se dedica a estudiar la fórmula de Tartaglia junto con su ayudante Ludovico Ferrari. Poco después consigue resolver la cúbica en su forma general, es decir, de la forma $ax^3 + bx^2 + cx = d$, reduciéndola mediante una transformación a uno de los tres tipos anteriores.

Girolamo Cardano, en 1545 publica *Ars Magna*, presentando la solución general de la ecuación cúbica y la de la cuártica. Aunque sostiene que el método que publica es de Ferro y no de Tartaglia.

En 1546, Tartaglia publica su obra *Nuevos problemas e inventos* en donde cuenta su historia y denuncia que Cardano actuó de mala fe. Aunque Cardano nombró hasta tres veces a Tartaglia, éste se sintió traicionado por la publicación de su método de resolución.

Y entonces surge un problema: en ecuaciones en las cuales no se notaba diferencia con las demás se encontraban soluciones en las que se tenía una raíz cuadrada con radicando negativo (las que más adelante se llamarían *irreducibles*). Considerando que en esta época ni siquiera se trabajaba con los números negativos, este tipo de soluciones no se comprendía.

Es probable que por esa razón Cardano y Ferrari viajaran a Bolonia en 1542. Y es aquí donde debemos reconocer el papel importante de de Ferro. Pues realmente fue él quien encontró la fórmula de la resolución de la cúbica $x^3 + px = q$ (Tartaglia también encontró métodos de resolución, pero se cree que dichos métodos no fueron descubiertos totalmente por él, sino que la idea provenía de alguna fuente anterior; de hecho se sabe que Tartaglia tendía a atribuirse ciertas publicaciones suyas cuando en realidad no lo eran). Quien también compartió su descubrimiento con Annibale della Nave, su propio yerno, posiblemente solo para garantizar el futuro de su hija.

¿Por qué Scipione del Ferro no dio a conocer su descubrimiento? Si así lograría fama y fortuna. En aquella época los desafíos entre matemáticos eran muy habituales. A veces el prestigio era lo único en juego, pero en ocasiones llegaban a jugarse hasta la cátedra. Ser la única persona que conocía tal fórmula significaba tener un arma muy potente a la hora de afrontar dichas contiendas.

En la búsqueda de resolver las ecuaciones irreducibles Cardano y Ferrari encuentran la solución de la ecuación $x^3 + px = q$. Por lo que al publicarlo sintieron que no eran resultados de Tartaglia.

El *Ars Magna,* de Cardano, fue una revolución en su momento. Contenía una gran cantidad de avances, entre ellos el método de resolución de la cúbica y un método de resolución de la ecuación cuártica (mediante una transformación que la reducía a una cúbica) que descubrió Ferrari.

En adelante se hace una lucha por adjudicarse el descubrimiento de la solución entre Tartaglia y Cardano, donde también entra Ferrari, terminando en un duelo de 31 problemas a resolver que ambos se ofrecen, termina con el problema que no consideró y no pudo resolver Tartaglia, el caso irreducible.

Veamos ahora el desarrollo de la solución de la ecuación cúbica:

Consideremos la ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

Con $A \neq 0$, así, sin pérdida de generalidad dividimos entre A

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Se puede reducir fácilmente a la ecuación: $x^3 + px + q = 0$

Sustituimos por: $x = y - \frac{b}{3}$

$$(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0$$

$$y^3 - 3y^2\frac{b}{3} + 3y\frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27} + by^2 - 2y\frac{b^2}{3} + \frac{b^3}{9} + cy - c\frac{b}{3} + d = 0$$

$$y^3 + y\left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right) - \frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - c\frac{b}{3} + d = 0$$

$$y^3 + y\left(-\frac{b^2}{3} + c\right) + \frac{2b^3}{27} - c\frac{b}{3} + d = 0$$

Entonces, si hacemos: $p = c - \frac{b^2}{3}$ y $q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$

Se reduce a la ecuación: $y^3 + py - q = 0$

Sea $y = u + v$, donde en lugar de una incógnita consideraremos dos u y v, transformando el problema en otro con dos incógnitas.

Entonces: $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$

Reordenando y sacando un factor común:

se obtiene: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u) + 3uv(v) = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Cualquiera que sea la suma de los números $u+v$, siempre es posible pedir que el producto uv tenga un valor establecido de antemano.

Demos el valor $W = u + v$ y se exige que $Z = uv$ entonces, puesto que $W - u = v$, se obtiene:

$$Z = u(W-u)$$

Por lo que si u es solución de la ecuación de segundo grado:

$$u^2 - Wu + Z = 0$$

Como ya sabemos esta ecuación tiene dos raíces o soluciones ya sea ambas reales o complejas dadas por la fórmula:

$$u = -\frac{W}{2} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4} - Z}$$

Además vamos a considerar que $u+v$ es una raíz de la ecuación cúbica y convenimos que

$$3uv + p = 0$$

Esto es: $uv = -\frac{p}{3}$

con esta elección de *u* y *v* obtenemos dos igualdades (α):

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

$$3uv + p = 0$$

Así, encontrando los valores u y v que satisfagan este sistema de ecuaciones, el número $x = u + v$ será raíz de la ecuación.

De (α) tenemos:

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Si observamos detenidamente u^3 y v^3 satisfacen la ecuación de segundo grado:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{3} = 0$$

Si ahora la resolvemos por la fórmula general se obtiene:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{y} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

quedando:

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

y

$$v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y como una raíz es:

$$x = u + v$$

Así, resulta la famosa fórmula de Cardano que por lo que hemos conocido ya entenderemos por qué es llamada fórmula de Ferro-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Cardano explica esta fórmula en un poema que dice:

Quando che'l cubo con le cose appresso
se agguaglía a qualche número discreto
trovan dui altri differnti in esso.

Da poi terrai questo per consueto
che il lor producto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sottratti
varra la tua cosa principale.

Que traducido es:

Cuando está el cubo con las cosas preso
y se iguala a algún número discreto
busca otros dos que dieran en eso.
Después tú harás esto que te espeto
que su producto siempre sea igual
al tercio cubo de la cosa neto.
Después el resultado general
de sus lados cúbicos bien restados
te daría a ti la cosa principal.(Pérez y Sánchez,2007)

CAPÍTULO II

EL CASO IRREDUCIBLE

Al resolver las ecuaciones cúbicas con las fórmulas de Cardano, nos encontramos ante un hecho, que el discriminante sea menor que cero, es decir, si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, entonces la fórmula involucra la raíz cuadrada de un número negativo.

Este hecho fue abordado por primera vez por el ingeniero y arquitecto italiano Rafael Bombelli (1526-1572), un continuador de los trabajos de Cardano, quien explicó lo que estaba sucediendo en realidad con la fórmula de Cardano. En su Álgebra de 1572, presentó la cúbica $x^3=15x+4$. Si utilizamos el método de Ruffini, podemos determinar que una de las raíces es $x = 4$, y que nos quedaría la ecuación cuadrática $x^2+4x+1=0$, la cual al resolverla nos resultan las raíces $x=-2\pm\sqrt{3}$. Esto es, las tres soluciones de la ecuación son números reales. Sin embargo, si aplicamos las fórmulas de Cardano con p=15 y q=4, como $\frac{q^2}{4}=4\ y\ \frac{p^3}{27}=125$, entonces

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

La fórmula de Cardano da una solución que es la suma de dos raíces cúbicas de dos números complejos conjugados, a los que Cardano llamó “irreducibles” extendiéndolo a las ecuaciones cúbicas en las cuales aparecía un resultado tan extraño. Se llaman irreducibles porque al tratar de solucionar estas raíces negativas, se vuelven a generar otras raíces cuadradas negativas, como se explicará a detalle más adelante.

La revelación que tuvo Bombelli consistió en ver que esta extraña expresión que daba la fórmula de Cardano para *x* era real, pero estaba expresada en forma poco peculiar.

Bombelli hizo lo siguiente:

$$2+\sqrt{-121}=2+\sqrt{121(-1)}=2+11\sqrt{-1}$$

$$=8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}$$

$$= \left(2+\sqrt{-1}\right)^3$$

Pero si $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$, entonces tiene sentido decir que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-1}\right)^3} = 2+\sqrt{-1}$$

Análogamente $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = -2+\sqrt{-1}$ luego la raíz de $x^3 = 15x+4$ es:

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right) - \left(-2+\sqrt{-1}\right) = 4$

El razonamiento de Bombelli planteó enormes problemas: ¿Cómo se sabe por adelantado que $2+\sqrt{-1}$ va a ser raíz cúbica de $2+\sqrt{-121}$? Más adelante retomaremos este cuestionamiento.

En el caso irreducible significa que hay tres raíces reales, las cuales no es posible encontrarlas con los métodos conocidos en esa época.

Para estudiar la naturaleza de las raíces de $x^3 = px+q$, donde p y q son ambas no negativas, consideremos la función

$$f(x) = x^3 - px - q.$$

Calculando $f'(x) = 3x^2 - p$, vemos que la gráfica de $f(x)$tendrá tangentes con pendiente cero en $x = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}$, es decir, los máximos o mínimos locales de la cúbica reducida que puede llevarnos al caso irreducible se localizan simétricamente a ambos lados del eje vertical. Los valores de *f(x)* en estos extremos locales son, si los denotamos por M_1 y M_2,

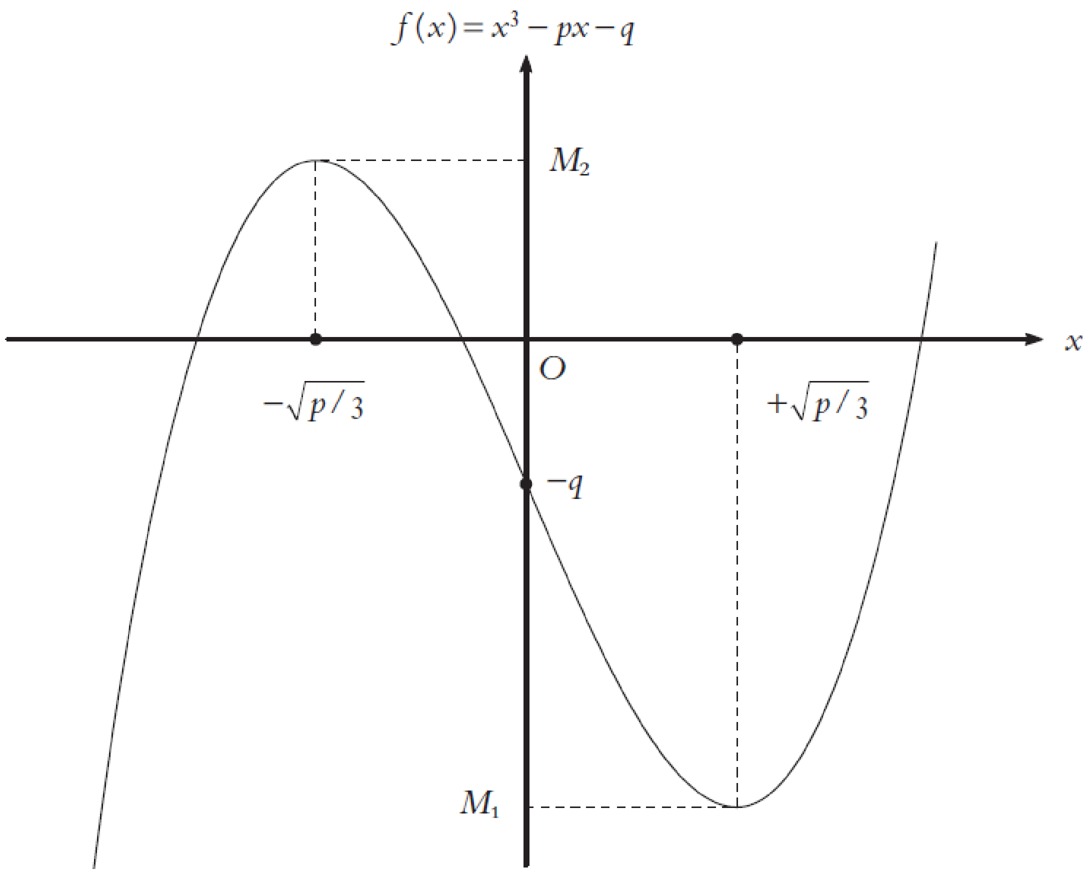
$$M_1 = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q, con\ x = +\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$M_2 = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q, con\ x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$$

El mínimo local $M_1 < 0$ (ya que p y q son no negativos), mientras que el máximo local M_2 puede tener uno u otro signo, dependiendo de los valores de p y q. Ahora, si hemos de tener tres raíces reales, *f(x)* debe cruzar el eje real tres veces, y esto ocurre sólo si $M_2>0$, como se muestra en la figura. Esto es, la condición para que todas las raíces sean reales, es

$$\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}-q>0, \qquad ó \quad \frac{4}{27}p^3>q^2, \quad o\ sea \quad \frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}<0$$

Pero ésta es precisamente la condición en la fórmula de Cardano que lleva a soluciones con números imaginarios. Así, el caso irreducible está asociado siempre con tres raíces de la cúbica f(x)=0. Como lo muestra la figura 2, estas tres raíces son tales que dos son negativas y una positiva.



Gráfica de $f(x)=x^3-px-q$, con p y $q\geq 0$.

Figura 2

Para explicar por qué son llamadas irreducibles estas ecuaciones, analizaremos el caso cuando el discriminante es menor que cero. Ocurre, en este caso, un fenómeno curioso: que $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ es un imaginario puro y los números

$$A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}} \qquad B=-\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$$

son complejos, de modo que las raíces de la ecuación $y^3+py+q=0$ siendo números reales, están dadas como las raíces cúbicas de números complejos.. Veamos esto, sea:

$$\sqrt[3]{A}=a+bi,$$

Una de las raíces cúbicas de A. Por ser B conjugado de A el número $a-bi$ será una de las raíces cúbicas de B y debe tomarse igual a $\sqrt[3]{B}$ para satisfacer la condición

$$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}=-\frac{p}{3}$$

Así: $\sqrt[3]{A}=a+bi$; $\sqrt[3]{B}=a-bi$,

Y de las fórmulas de Cardano se deduce que las raíces como:

$$y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \qquad \text{y} \qquad w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_1=2a$$

$$y_2=(a+bi)w+(a-bi)w^2=aw+bwi+aw^2-bwi^2$$

$$=a(w+w^2)+bi(w-w^2)=a\left(2\left(-\frac{1}{2}a\right)\right)+bi(2\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)=-a-b\sqrt{3}$$

De igual manera:

$$y_3=(a+bi)w^2+(a-bi)w=-a+b\sqrt{3}$$

son reales y además distintas. Es evidente que $y_2 \neq y_3$. Si $y_1 = y_2$ tendríamos:

$$y_2 = -a - b\sqrt{3} = 2a$$

$$-b\sqrt{3} = 3a \;\; entonces \quad b = -\frac{3}{\sqrt{3}}a$$

$$b = -a\sqrt{3}$$

De modo que:

$$\sqrt[3]{A} = a + \left(-a\sqrt{3}\right)i = a(1 - i\sqrt{3})$$

Pero entonces:

$$A = a^3(1 - i\sqrt{3})^3 = a\left(1 - 3i\sqrt{3} - 9 - i\sqrt{3}\right) = -8a^3$$

Que es un número real, lo que no es cierto. En la misma forma se demuestra que $y_1 \neq y_3$.

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Resolver la ecuación $y^3 - 3y + 1 = 0$

Aquí: $\quad p = -3 \quad q = 1$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = (-27)(4) + 27 = -108 + 27 = -81$$

$$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}} = \sqrt{\frac{81}{108}} = \sqrt{\frac{9^2}{9 * 4 * 3}} = \sqrt{\frac{9}{4 * 3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} * \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

Entonces:

$$A = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = w \qquad B = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = w^2$$

Por las fórmulas de Cardano:

$$y_1 = \sqrt[3]{w} + \sqrt[3]{w^2}$$

$$y_2 = w\sqrt[3]{w} + w^2\sqrt[3]{w^2}$$

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{w} + w\sqrt[3]{w^2}$$

Lo cual no puede calcularse directamente debido a las raíces cúbicas de los números imaginarios.

Si tratamos de encontrar $\sqrt[3]{w} = a + bi$

$$w = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3\text{i} = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\text{i}$$

Entonces: $a^3 - 3ab^2 = -\frac{1}{2}$ (1) $3a^2b - b^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

Despejando b^2 de (1):

$$-3ab^2 = -\frac{1}{2} + a^3 \quad = -\frac{1 + 2a^3}{2}$$

$$b^2 = \frac{1+2a^3}{2}\left(\frac{1}{3a}\right)$$

$$b^2 = \frac{1+2a^3}{6a} \qquad (\alpha)$$

Sustituyendo en (2):

$$b(3a^2 - b^2) = b\left(3a^2 - \frac{1 + 2a^3}{6a}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b(\frac{18a^3 - 1 - 2a^3}{6a}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$b = \frac{3a\sqrt{3}}{16a^3-1}$ por lo que: $b^2 = \frac{27a^2}{(16a^3-1)^2}$ (β)

Igualando (α) y (β) :

$$\frac{1 + 2a^3}{6a} = \frac{27a^2}{(16a^3-1)^2}$$

$$(1 + 2a^3)(16a^3 - 1)^2 = (27a^2)(6a)$$

$$512a^9 + 192a^6 + 1 = 192a^3$$

$$512a^9 + 192a^6 - 192a^3 + 1 = 0$$

$$(8a^3)^3 + 3(64a^6) - 24(8a^3) + 1 = 0$$

Si hacemos nuevamente $x = 8a^3$ resulta $x^2 = 64a^6$

$$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$$

Y haciendo la sustitución de $x = y - 1$ para eliminar la parte $3x^2$ de la ecuación,

Tenemos:

$$y^3 - 27y + 27 = 0$$

Haciendo nuevamente $y = 3z$

$27z^3 - 27(3z) + 27 = 0$ Dividiendo por 27:

$\boldsymbol{z^3 - 3z + 1 = 0}$ **¡¡¡Volvemos a la ecuación original!!!**

Este tipo de ecuaciones son las denominadas irreducibles, y los métodos de Cardano-Tartaglia que se conocían para encontrar la solución de la ecuación cúbica ya no sirven para resolverlas.

En este momento, notaremos que requerimos de otras herramientas para encontrar las raíces, pues, sabemos por el teorema fundamental del cálculo que toda ecuación algebraica tendrá un número de raíces igual a su grado, aunque éstas no sean reales.

Esta fue la razón primordial por la que este tipo de ecuaciones cúbicas fueron llamadas "irreducibles", ya que los conocimientos que estaban hasta ese momento no eran suficientes para poder dar solución al problema encontrado. Lo que dio lugar a trabajar este tipo de nuevos números: los imaginarios.

Solución de la ecuación cúbica en el caso irreducible.

François Viète, escribe *De Aequationem Recognitione et Etmendatione*, con lo que entra a nuestra historia pues es la figura central y más brillante del proceso de construcción del álgebra. Su mérito reside en que ordenó y adecuó todo el material existente, otorgándole unidad y sentido lógico. En su obra *In artem analyten isagoge* (Introducción al arte del análisis) de 1591, expone los principios fundamentales del álgebra, estableciendo unos postulados en los que se han de fundar las transformaciones algebraicas, definiendo los símbolos operativos y las entidades literales. La explicitación de las reglas del cálculo ofrece por primera vez un modelo para proceder a demostraciones formales de las proposiciones algebraicas. A partir de Viète ya se pueden efectuar demostraciones de resultados algebraicos sin acudir a la geometría; en este sentido, Viète libera al álgebra de las ataduras de la geometría; y logra resolver el caso irreducible de la ecuación de tercer grado, empleando una identidad trigonométrica, evitando así la fórmula de Cardano. Este método es el que aún se usa (Pérez y Sánchez, 2007):

Viète inicia con la identidad trigonométrica:

$$Cos\ 3A = 4\ Cos^3\ A + 3\ Cos\ A:$$

Haciendo z = *Cos A*, se tiene que:

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}Cos\ 3A = 0$$

Supongamos que la ecuación irreducible dada es:

$$y^3 + py + q = 0$$

Hacemos $y = nz$, eligiendo n de forma que los coeficientes de la ecuaciones anteriores coincidan. Sustituyendo $y = nz$ en la cúbica anterior, resulta $n^3z^3 + pnz + q = 0$, de donde

$$z^3 + \frac{p}{n^2}z + \frac{q}{n^3} = 0$$

Debe ser

$$\frac{p}{n^2} = -\frac{3}{4}$$

Es decir:

$$n = \sqrt{-\frac{4}{3}p}$$

Ahora tomamos un valor de A tal que: $-\frac{1}{4}Cos\ 3A = q$

Con lo que: $-\frac{1}{4}Cos\ 3A = \frac{q}{n^3}$

$$Cos\ 3A = -\frac{4q}{n^3} = -\frac{4q}{(\sqrt{-\frac{4}{3}p})^3} = -\frac{4q}{2^3\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

Se puede demostrar que si las tres raíces son reales, entonces p es negativo, de modo que n es real. Además puede verse que

$|\ cosA| < 1$, por lo que puede determinarse $Cos\ 3A$.

Si se elige $Cos\ A$ de modo que la ecuación:

$$z^3 + \frac{p}{n^2}z + \frac{q}{n^3} = 0$$

sea un caso particular entonces:

$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}Cos\ 3A = 0$ (que es una identidad).

Por lo que: Cos A satisface la ecuación: $z^3 + \frac{p}{n^2}z + \frac{q}{n^3} = 0$,

pero a la vez el valor de A está determinado por $Cos\ 3A = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$, lo que fija $3A$.

Si A satisface $Cos\ 3A = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$,

también la satisface

$A+120^{\circ}$ y $A+240^{\circ}$y como z = Cos A, hay por tanto, tres valores que satisfacen

$z^3+\frac{p}{n^2}z+\frac{q}{n^3}=0,$ a saber Cos A; Cos($A+120^{\circ}$); cos($A+240^{\circ}$)*:*

Multiplicando n por éstos, tenemos los tres valores que satisfacen $y^3+py+q=0$*:*

Aunque Viète sólo obtuvo una raíz.

Otro método que se propone con los avances en las investigaciones son las fórmulas de De Moivre, usando los números complejos.

CAPÍTULO III

UNA CONSECUENCIA INDIRECTA: SURGIMIENTO DE *i*

Stewart (2008) menciona que las ideas matemáticas revolucionarias rara vez se descubren en los contextos más simples y más obvios. Casi siempre surgen de algo mucho más complicado. Así sucedió con la raíz cuadrada de menos uno. Hoy día, lo habitual es introducir este número en términos de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, cuya solución es la raíz cuadrada de menos uno, cualquier cosa que esto signifique. Entre los primeros matemáticos que se preguntaron si esto tenía un sentido razonable estaban los algebristas del Renacimiento, que como ya se mencionó en el capítulo anterior, tropezaron con las raíces cuadradas de números negativos de una manera sorprendentemente indirecta: la solución de la ecuación cúbica.

En el capítulo anterior comentaba los resultados que obtuvo Bombelli de la ecuación $x^3 = 15x + 4$, de la que encontró la siguiente solución:

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = \left(2 + \sqrt{-1}\right) - \left(-2 + \sqrt{-1}\right) = 4.$

De aquí surgió el cuestionamiento: ¿Cómo se sabe por adelantado que $2 + \sqrt{-1}$ va a ser raíz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$?

Y un problema más, ¿cómo entender la existencia de un número inexistente?

Desde la antigüedad existió la dificultad de aceptar y entender los números negativos, por lo que cuando se resolvían ecuaciones algebraicas, se aceptaban como soluciones únicamente las raíces positivas.

En el siglo XVIII, algunos algebristas aceptaron trabajar con los números llamados “imaginarios”, los cuales aun no comprendían completamente. Por lo que otros algebristas decían que era una manera tramposa de cubrir los problemas que no había otra forma de resolver.

William Frend (1757-1841), Lazare N. M. Carnot (1753-1823), Robert Woodhouse, Augustus de Morgan, entre otros matemáticos del siglo XIX, se negaron aceptar y usar los números negativos y menos los imaginarios por lo que decían que había ecuaciones que tenían soluciones incompletas.

Aun así, Descartes fue el primer matemático en usar "números imaginarios" y el símbolo i para $\sqrt{-1}$. Fue Gauss quien usó la expresión "números complejos".

Menciona Stewart (2007) que Descartes y Newton, interpretaban estos números "imaginarios" como una señal de que estos problemas no tenían solución. Si uno quería encontrar un número cuya raíz cuadrada era menos uno, la solución formal "raíz cuadrada de menos uno" era imaginaria de modo que no existía solución. Pero el cálculo de Bombelli implicaba que en los números imaginarios había algo más que eso. Lo cual se podía usar para encontrar soluciones; y esto ocurría cuando las soluciones sí existían.

En 1673 John Wallis dio una manera de representar los números imaginarios como puntos en el plano. En ese momento ya era conocida la representación de los números reales en una recta, luego, Wallis introduce una recta formando un ángulo recto con la recta vertical real y en ésta colocó los números imaginarios.

Aquí, se observará que este plano es similar al de Descartes utilizado en la geometría plana.

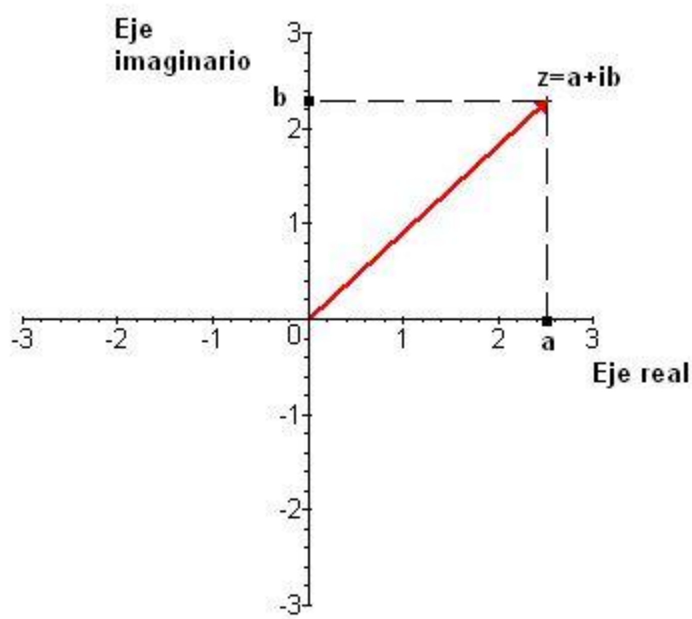


Figura 3

Éste será en adelante conocido como Plano Complejo (Figura3), que constará de dos partes una real y una imaginaria.

Esta representación fue considerándose lentamente, hasta que el matemático francés Jean-Robert Argand en 1806, publicó esta representación, de la misma forma y de manera independiente lo hizo Gauss en 1811.

Al igual que todos los otros números, *i* es un símbolo que representa una idea, abstracta pero muy precisa. Obedece a todas las reglas de la aritmética, a las que se agrega la convención de que $i * i = i^2 = -1$. Su obediencia a estas reglas y sus múltiples usos y aplicaciones justifican su existencia, haciendo caso omiso del hecho que pueda ser una anomalía. (Kasner y Newman, 1978).

Apoyándose en la regla de los signos tenemos:

$$i * 1 = \sqrt{-1} = i$$

$$i * (-1) = -\sqrt{-1} = -i$$

$$-i * (-1) = +\sqrt{-1} = i$$

$$i * i = i^2 = -1$$

$$i * i * i = i^3 = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i * i^2 = i * (-1) = -i$$

$$i * i * i * i = i^4 = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1$$

$$i * i * i * i * i = i^5 = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 * i^2 * i = (-1) * (-1)\sqrt{-1} = i, \text{etc.}$$

Así, se puede hacer una tabla de potencias de i:

i^1	$\sqrt{-1} = i$	i^2	$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$
i^3	$(-1) * \sqrt{-1} = -i$	i^4	$i^2 * i^2 = (-1)(-1) = 1$
i^5	$1*\sqrt{-1} = i$	i^6	$1 * i^2 = 1 * (-1) = -1$
i^7	$-1*\sqrt{-1} = -i$	i^8	$-1 * i^2 = (-1)(-1) = 1$
$\downarrow$		$\downarrow$	

Donde se observa, que las potencias impares dan como resultado i ó $-\mathrm{i}$, y las potencias pares 1 ó -1.

Ahora, el manejo de los números complejos es muy usada y común, los cuales ya se pueden reconocer de la forma: $a + \mathrm{i}b$ donde a y b son números reales.

Como se mencionó anteriormente los números complejos pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos como si fueran números reales. Las reglas formales de estas operaciones son:

1. $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$ si y solamente si $x = x'$ y $y = y'$
2. $(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$
3. $(x + \mathrm{i}y) - (x' + \mathrm{i}y') = (x - x') + \mathrm{i}(y - y')$
4. $(x + \mathrm{i}y) * (x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx')$
5. $(x + \mathrm{i}y)/(x' + \mathrm{i}y') = \frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} + \mathrm{i}\frac{(yx'-xy')}{(x')^2+(y')^2}$

En virtud de las propiedades espaciales que tienen los números complejos al ubicarlos en el plano, pueden utilizarse para representar, al mismo tiempo, magnitud y dirección. Mediante ellos pueden representarse convenientemente algunas de las nociones más importantes de la física, tales como velocidad, fuerza, aceleración, etc. (Kasner y Newman, 1978).

Por lo anterior, hoy los números complejos son ampliamente utilizados en física e ingeniería. Un ejemplo simple se da en el estudio de las oscilaciones, movimientos que se repiten periódicamente. Los ejemplos incluyen la vibración de un edificio en un terremoto, las vibraciones en los automóviles y la transmisión de corrientes eléctricas alternas.

Los números complejos determinan también las estabilidades de los estados estacionarios de los sistemas dinámicos, y son ampliamente utilizados en la teoría del control. Esta disciplina trata de los métodos de estabilizar sistemas que de otro modo serian inestables. Un ejemplo es el uso de superficies de control en el movimiento controlado por ordenador para estabilizar la lanzadera espacial en vuelo. Sin esta aplicación del análisis complejo, la lanzadera espacial volaría como un ladrillo (Stewart, 2009).

CAPÍTULO IV

UNA PROPUESTA DE CLASE

La historia del episodio que se presenta es un panorama de cómo se generó la solución general de la ecuación cúbica, la cual se podría seguir analizando desde diferentes puntos de vista, según los diferentes autores que lo recrean, con un enfoque histórico, matemático, teórico, novelesco, etc.

Se trata de usar el conocimiento de la historia, sin menospreciar el valor lógico del contenido y con atención cuidadosa del objetivo pedagógico, según las características del grupo de alumnos. El éxito de esta propuesta depende precisamente de una acertada combinación de *lo lógico, lo histórico y lo pedagógico*, que se nos presenta en la preparación y ejecución de cada acto en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Pérez, 2000).

TEMA: ECUACION CÚBICA, SOLUCION GENERAL.

CONTENIDO:

- La ecuación general de tercer grado.
- Solución general.
- Contenidos adicionales: trigonometría, aproximaciones numéricas de las raíces, números complejos, etc.

ACTIVIDADES:

Por equipos de dos o tres alumnos realizaran las siguientes actividades:

- ✓ Analizar el artículo: La última noche de G. Cardano, escrita por *Joaquín Collantes Hernáiz, Antonio Pérez Sanz, nº 50 de la Revista UNO de ed. GRAÓ.*
- ✓ Identificar los 30 problemas que fueron los retos planteados por Cardano a Tartaglia.
- ✓ Iniciar discusión por equipo ubicando la situación histórica de la época, cómo se llega a la solución de estos problemas y la manera de dar a conocer estas soluciones.
- ✓ Buscar las referencias que da Cardano para las soluciones.

- ✓ Anotar las limitaciones, errores y conocimientos usados por los protagonistas mismos de la época.
- ✓ Defender el trabajo de cada protagonista, por lo que tendrán que profundizar en el trabajo de cada uno de los personajes. Esta investigación deberá ser tal que tengan claro como desarrollaron su teoría, para exponerla ante el grupo.
- ✓ Investigar que otros matemáticos de la época estudiaron el mismo tema y cuál fue su aportación.
- ✓ Institucionalizar el contenido, por parte del profesor.

TIEMPO DE EJECUCIÓN:

El manejo de este tema se podrá realizar en 3 sesiones:

- ✓ La primera será la lectura y análisis del artículo (el cual es un ejemplo, se pueden manejar otras lecturas relacionadas, se ofrecen más alternativas)
- ✓ La segunda es la defensa y recreación de las actividades de los matemáticos participantes en el desarrollo histórico.
- ✓ Finalmente, la última sesión será la presentación del tema de manera formal, en la cual se presentará el contenido matemático en sí. Donde los alumnos ya tendrán el antecedente del material a presentar.

EVALUACIÓN:

Aquí considero la presentación del tema, la comprensión de la lectura del artículo y el contenido matemático parte importante para la evaluación, ya que se busca que sea cualitativa, de tal forma que se pueda conocer al alumnado, detectar las dificultades que se generen y poderlas superar, considerar los progresos en función de las posibilidades, valorar los logros de los alumnos y así estimularlos. También esta evaluación ayudará a ajustar y ampliar las actividades para el tema.

SOBRE EL ARTÍCULO:

Fíjate bien en esta lista de nombres:

- Luca Pacioli

- Scipione del Ferro (1465-1526).
- Nicolo Fontana (Tartaglia) (1499-1557)
- Antonio Mª del Fiore.
- Girolamo Cardano (1501-1576).
- Ludovico Ferrari (1522-1565)

A) Dos de ellos se enfrentaron en un concurso de resolución de problemas, que ellos mismos se proponían. Entre ellos estaban los siguientes:

- Hallar un número que añadido a su raíz cúbica resulte 6.
- Dos hombres ganan en total 100 ducados. Calcular lo que gana cada uno si la parte del primero es la raíz cúbica de la del segundo.

Cada uno depositó ante notario una lista de 30 problemas y una cantidad de dinero. El que, en 30 días, hubiese resuelto el mayor número de ellos sería el ganador y se llevaría todo.

Según una versión de esta historia, el perdedor impugnó el resultado y el ganador rechazó el dinero, porque no quería nada de un mal jugador. Lo que es cierto es que el ganador utilizó unos conocimientos que su contrincante no esperaba que supiera... ¿De qué estamos hablando?

Averigua quiénes fueron e intenta resolver los problemas que se presentan. En todos ellos aparecen ecuaciones. ¿De qué tipo son? ¿Sabes cómo se resuelven?

B) Más adelante, un día del año 1539, uno de estos personajes le contó a otro cómo se resolvía cierto problema de matemáticas, relacionado con la resolución de ecuaciones, con el compromiso de mantenerlo en secreto y no publicarlo. Pero esto no fue así, pues pasados unos años...

Averigua quiénes son y el tema de la conversación.

Escribe, con sus pasos y transformaciones, el proceso y el método matemático que da lugar a una fórmula que resuelve esas ecuaciones.

C) Averigua el papel que tienen el resto de personajes en esta historia, y su relación con el tema matemático que estamos tratando.

D) Uno de los personajes anteriores escribió libros sobre medicina, filosofía, probabilidades, álgebra, etc. También lo hizo sobre su vida y sobre sus libros. ¿Cuál es su obra más importante desde el punto de vista matemático? Haz un resumen de su biografía. Moreno (2001).

CONTENIDOS MATEMÁTICOS:

Se pide resolver por el método de Cardano las siguientes ecuaciones:

$a)$ $x^3 + 9x = 100$ b) $x^3 + 4x + 1 = 0$

c) $x^3 + 6x = 20$ d) $x^3 + 3x = 14$

e) $2\,x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0$

En un manuscrito anónimo del siglo XIV se dan diferentes fórmulas y ejemplos para resolver la ecuación cúbica. Donde la ecuación $a\,x^3 + bx^2 + cx = k$ es resuelta por:

$$x = \sqrt[3]{(\frac{c}{b})^3 + \frac{k}{a}} - \frac{c}{b}$$

El autor pone como ejemplo la ecuación $x^3 + 60x + 1200 = 4000$. Usando la fórmula anterior determinar una raíz, verifícalo.

UNA REFLEXIÓN A MODO DE CONCLUSIÓN

Actualmente, los profesores de matemáticas buscamos materiales de orientación práctica con la idea de facilitar y generar interés en el contenido a enseñar. Ya no podemos quedarnos en el método de enseñanza que consiste en llenar el pizarrón de información inaccesible y complicada para los alumnos. Lo anterior nos ha llevado a reflexionar e investigar en relación a alternativas que muestren diferentes formas de aprender. La enseñanza con énfasis en la historia es una de varias propuestas que nos permiten eliminar el formalismo, sin perder el rigor, y el aislamiento de este conocimiento.

Ahora, pasamos a ser facilitadores del conocimiento y nuestro compromiso es prepararnos en el área matemática, además de buscar actividades variadas para que los alumnos lleguen a cambiar su visión de las matemáticas y usen la matemática conscientemente.

Esta propuesta puede ser parte de una unidad o trayectoria didáctica, insertándose en las actividades de desarrollo. El diseño de dicha unidad didáctica será objeto de una investigación posterior.

ANEXO

Artículo publicado en el nº 50 de la Revista UNO de ed. GRAÓ

La última noche de G. Cardano

Joaquín Collantes Hernáiz

Antonio Pérez Sanz

G. Cardano

…así que mi vida, precisamente, termina hoy, día 21 de septiembre del año de 1576. No todos podrán precisar con exactitud matemática el día de su muerte y hasta la hora y el minuto como yo, que para eso soy un gran astrólogo más amigo de las estrellas que de los hombres, que ellas iluminan la noche y no traicionan. Así pues, adiós; me despido de una vida plena como pocos mortales la han disfrutado, que yo sí, pues lo puedo asegurar y por lo tanto, lo aseguro.

Y así lo firmo en el citado día 21 de septiembre del año 1576, en la ciudad de Roma.

Girolamo Cardano.

El anciano dejó la pluma sobre la mesa, bajó la tapa del tintero, metió las cinco hojas de papel que había llenado con una letra pulcra y ordenada en una carpeta de cuero repujado y se levantó al comprobar que la luz de la tarde había comenzado a decaer. Después de una última ojeada a las nubes que aparecían teñidas de rojo por los últimos rayos del sol, al bosque cercano que tantas veces había recorrido en busca de hierbas para sus pócimas y ungüentos y al descuidado jardín que en su día estuvo cuidado pero tampoco tanto, cerró las cortinas considerando que ya se había despedido suficientemente del paisaje.

Después, encendió su mejor vela de cera pura, se descalzó y se tumbó sobre el cubrecamas de piel de zorro con tapabocas de armiño que le regalara en el año 1553 John Hamilton, arzobispo de Edimburgo y primado de Escocia, por haberle curado de sus dificultades respiratorias, que resultaron provocadas por la alergia a las plumas de sus almohadas y edredones y no por algo más grave como él, en su hipocondría, imaginaba. Y se rió al recordar el episodio que, a su vez, le trajo a la memoria que bien podría ponerse para esta especial ocasión de despedida del mundo la bata de brocado que le regalara en su visita a Besançon el obispo de Lisieux que, como todos, y aunque disimulara por eso de que era hombre de iglesia, le rogó que le hiciera su horóscopo y unos cuantos amuletos a cambio de lisonjas y regalos, como la preciosa bata que se puso ante el espejo.

-¡Imponente! – le dijo a su imagen reflejada en el espejo. Y repitió imponente al imaginarse que así lo verían al día siguiente el notario y el alguacil del distrito y el cardenal que se las daba de matemático cuando en el fondo era un patán purpurado con ínfulas de científico, que a los tres había citado a las nueve de la mañana con el pretexto de entregarles sus horóscopos y unos amuletos contra el mal de ojo, pero con la intención aviesa de que lo descubrieran yaciendo elegantemente ataviado sobre el adornado lecho y se encargaran de divulgar la noticia de que aquel hombre sabio, o sea él, Girolamo Cardano, había muerto en el día y hora predichos. Que por esta premonición y cálculo astrológico –pensó, aún ante el espejo- mis admiradores me admirarán aún más, y me tendrán en adelante por aún mejor mago de lo que ya me consideraban en vida al haber adivinado la fecha exacta de mi muerte mediante la astrología y la adivinanza y los cálculos matemáticos, ciencias éstas en las que soy maestro. Aunque es de suponer que mis detractores, que también los tengo, y muchos, para denigrarme una vez más harán correr la voz de que, por no dar mi brazo a torcer y no fracasar en mi augurio, ayudé a la muerte en su intento en el día y hora augurado ingiriendo cañaheja, que, como saben todos los que lo saben, es tan venenosa como la cicuta, en fin.

Así que el anciano, después de sus reflexiones ante el espejo, se volvió a tumbar en el lecho cruzando las manos sobre el pecho ensayando, incluso, un gesto de dignidad que fuera recordado y divulgado por los que lo descubrieran… hasta que descompuso el gesto al recordar que no había lavado la copa del resto de pócima ingerida. Y volvió a levantarse para lavar la copa mientras reconocía en voz alta:

-Que sí, que sí, que de saberse podría considerarse una trampa. Pero yo tan sólo lo veo como una ligera ayuda a mi predicción, por si acaso. Y aunque me considero tan infalible como el Papa, nunca se sabe. Y si predije que moriría tres días antes de cumplir los 75 años pues moriré, que además de ser un gran mago, adivino, científico y matemático soy un hombre de palabra.

Una vez colocada la copa lavada en el estante entre las otras que completaban la media docena Cardano volvió al lecho colocando cuidadosamente los pliegues de la bata paralelos a los bordes de la colcha. Y vuelta a cruzar los brazos sobre el pecho… y vuelta a levantarse al pensar que quizá sería más eficaz que mantuviera su carta de despedida entre sus manos, no fuera a ser que con el jaleo del descubrimiento de su cadáver pasara desapercibida dentro de la carpeta, perdiéndose así una prueba más de su genio e ingenio. Y ya de paso tomaría un ejemplar de su *Ars Magna*, su obra maestra al servicio de la Matemática, para que la imagen fuera completa, pasando a la posteridad con su mejor obra en las manos. Así que volvió al lecho para tumbarse con la carta de despedida y su *Ars Magna* en las manos, la obra que se consideraba, con diferencia, el mejor libro de álgebra publicado hasta entonces, en el que utilizó la geometría para demostrar la identidad algebraica referida al cubo de una diferencia, fórmula que repasó mentalmente, sonriendo al recordarla: $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$. Y en esas estaba cuando volvió a levantarse considerando que podría rodearse también de alguna obra más, aunque quizá fuera excesivo hacerse acompañar de las 21 que había escrito sobre la que consideraba ciencia de las ciencias: la Matemática. Como, por ejemplo, su *Practica Arithmeticae,* escrita en 1538. Pero claro –recapacitó ante el estante de los libros- tampoco es cosa de llenar el lecho con mis obras, que entonces parecería vanidad. Pero la *Practica Arithmeticae,* sí. Y con esta obra volvió al lecho para volver a colocarse con estudiada naturalidad.

-¡Qué trajín! –exclamó, añadiendo en voz alta, cerrando los ojos y tratando de calmarse: - En realidad la muerte solamente es un tránsito hacia otra vida, pero, claro, para eso habría que creer que existe otra vida, que no es el caso y ahora ya puedo decirlo sin temor a la Inquisición, que bastantes quebraderos de cabeza me dieron con el asunto del horóscopo de Cristo, que se necesita estar faltos de sentido del humor. Y ya que la muerte no llega con la rapidez que imaginaba bien puedo entretener la espera en dar un repaso a mis recuerdos a partir de los disgustos acarreados por confeccionar el citado horóscopo de Cristo, materializados en los 163 días que pasé privado de libertad acusado de herejía, con la acusación de haber atribuido todos los santos sucesos de la extraordinaria vida de Nuestro Señor a la influencia de los astros. El sagrado tribunal me impuso la abjuración *de vehementi*, aunque, gracias a la intercesión de mis poderosas amistades, me libré de un castigo mayor, lo cual era lógico ya que todos los miembros del tribunal eran antiguos clientes míos, a los que les hice el horóscopo y más de una pócima para conseguir los favores de una dama, que lo mismo hice para el cardenal Giovanni Morone, mi protector y hasta al mismo Papa Pio V. En fin, la frontera entre religión y superstición es tan delgada…

Calló un momento. No quería que la muerte, la Negra Señora, lo tomase por sorpresa sumergido en sus pensamientos. Contuvo la respiración unos segundos para comprobar si podía oír sus pasos acercándose. Pero nada... Quizás el primer efecto de la pócima fuera la sordera... No tenía ninguna noticia de este efecto secundario. Y tranquilo por el imponente silencio que le rodeaba siguió con su soliloquio.

-Y hablando de disgustos, cómo no recordar mi desgraciado matrimonio, los problemas causados por mi hijo pequeño Aldo, vago redomado, pendenciero y jugador y, sobre todo, el calvario pasado con la condena y muerte por ahorcamiento de mi otro hijo Giambatista acusado de envenenar a su mujer… ¡Qué familia! Pero en fin, fue la que me tocó en suerte, que también el Destino, ya puesto, podría haberme enviado otra. Aunque, bien mirado, no me puedo quejar, ya que seguramente para compensar mi poca fortuna como esposo y padre, la suerte trajo a mi casa, para trabajar como criado a mis órdenes, el último día de noviembre del año 1536, al joven huérfano Ludovico Ferrari. Lo recuerdo como si fuera ayer. En la calle ya se sentían los rigores de lo que luego sería un invierno mucho más frío de lo habitual. Desde el primer día me impresionaron su brillante inteligencia y su excelente disposición a ayudar en todo lo que se le demandaba. ¡Justo lo contrario que mis hijos! A las pocas semanas ya seguía, sin esfuerzo, mis explicaciones sobre los fundamentos de la geometría del gran maestro Euclides y sobre las artes de la aritmética y del álgebra. En tan sólo cuatro años, cuando apenas contaba 18, había aprendido casi todo lo que yo podía enseñarle del noble arte de la Matemática, que aunque me condene por inmodestia no era poco. Aunque he de reconocer que en este campo fue un apoyo impagable en mis aventuras por los extraños caminos de esta procelosa ciencia. Gustosamente le cedí mi puesto de profesor en la Fundación Piatti cuando sólo contaba 20 años, aunque a lo largo de los dos años siguientes mil veces me arrepentí, ya que el exceso de tiempo libre, mal consejero para el alma, condujo a mi espíritu, de nuevo, a los tenebrosos caminos del juego, que seis años antes ya habían dado con mis huesos y los de mi familia en la casa de beneficencia de Milán y que en esta ocasión a punto estuvieron de llevarme a la tumba demasiado temprano. En el último momento el puesto de profesor de medicina en la Universidad de Milán me salvó de volver al infierno de la ludopatía. De poco me sirvieron en esa ocasión mis cálculos matemáticos; aunque estoy convencido que la aritmética también puede poner un poco de orden en ese voluble mundo del azar; estoy seguro de que, no tardando mucho, algún hombre de ciencia, menos propenso que yo a dejar sus caudales en las mesas de juego, pondrá contra las cuerdas a la diosa Fortuna.

Los recuerdos bullían en la mente del anciano. No sabía si por los efectos alucinatorios del veneno o por lo que tantas veces él mismo había podido comprobar en muchos de sus pacientes: que en la antesala de la muerte toda nuestra vida desfila ante nuestros ojos con más precisión que las páginas de un libro. Y en ese desfile de hechos, historias y personajes, otra vez Ferrari, ya no tan joven, aparecía en primer plano.

-Pobre Ludovico mío. Ya va para diez años que en mala hora dejó este mundo. No quiso hacerme caso cuando le aconsejé quedarse en Milán y no aceptar ese puesto en la Universidad de Bolonia, donde yo tenía la cátedra de medicina. Y mucho menos llevarse con él a la bruja de su hermanastra. Menos de un año duró. Si no me hubiese jurado no volver a apostar, apostaría mi vida, aunque en estos momentos no sea una apuesta muy alta, a que ella lo envenenó… Y el recuerdo de su discípulo lo llevó hasta las puertas de Santa María del Giardino en Milán, la tarde de 10 de agosto del año 1548. Ferrari está radiante. Por fin se va a dilucidar públicamente el desafío lanzado a Niccolo Tartaglia en forma de cartel (realmente era una carta pública que Ferrari mandó a Tartaglia y de paso a los más notables matemáticos italianos. Aunque en realidad fueron doce desafíos al ser doce los carteles que acabarían lanzándose entre sí los dos matemáticos. Ferrari -aunque todo el mundo sabía que realmente era Cardano quien está detrás de todo el asunto- quiere zanjar de forma definitiva la amarga polémica suscitada por la publicación en el *Ars Magna* del método de Scipione del Ferro, redescubierto por Tartaglia, para la resolución de la ecuación cúbica. Y de paso bajar los humos a ese tartamudo, cascarrabias, presuntuoso y acomplejado matemático.

Oficialmente, Cardano no estuvo presente en el torneo público. Pero Ferrari sabía que, disfrazado de comerciante oriental y bien situado en primera fila, su maestro no se perdía ni un detalle de la disputa científica. De los 31 problemas del último cartel muchos llevaban el inconfundible sello de Cardano, del sabio prolífico que ahora, mientras espera a la Parca y a pesar de que su mente comienza a estar un poco confusa, recuerda el enunciado de uno de los problemas, el 17. Le tenía especial cariño, pues de nada servirían a Tartaglia para resolverlo sus versos de la cúbica:

“***Divide el número 8 en dos partes de manera que su producto multiplicado por la diferencia entre las partes sea tan grande como sea posible, demostrando cada paso”***

La trampa era perfecta. Poco podía sospechar Tartaglia que tendría que echar mano de las cónicas de Apolonio si quería encontrar la solución. Aunque el viejo gruñón dio con la solución, las partes pedidas eran:

$$4 + \sqrt{5\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad 4 - \sqrt{5\frac{1}{3}}$$

Pero no fue capaz de explicar cómo lo había conseguido.

- Todavía no consigo comprender cómo Tartaglia llegó a la solución correcta. No era tan malo, el viejo testarudo. Ahora me arrepiento de algunos de los términos utilizados contra él en alguna de mis cartas y de no haber podido aclarar más tarde mis disputas con él. La historia, espero, nos reservará un sitio a los dos... cuando todo esto se aclare. Aunque lo cierto es que con el que se cabreó del todo fue con el problema 27 cuyo enunciado también recuerdo:

“Este es un triángulo rectángulo tal que cuando se traza la perpendicular, uno de los lados con la parte de la base opuesta hace 30, y el otro lado con la otra parte hacen 28. ¿Cuál es la longitud de uno de los lados?”

-Y no le faltaba razón para enfadarse. Aún recuerdo la carta que dirigió a Ferrari clamando contra él y contra mí porque habíamos propuesto un problema del que no teníamos la solución general, como quedaba claro en mi *Ars Magna*. El viejo Niccolo nos había pillado. Menos mal que de los problemas 15 y 23 sí teníamos las respuestas:

Enunciado del problema 17:“Encuentra dos números tales que al sumarlos hacen tanto como el cubo del menor sumado al producto de su triple con el cuadrado del mayor y el cubo del mayor sumado a su triple multiplicado por el cuadrado del menor hace 64 más que la suma de esos números.”

Enunciado del problema 23: "Esto es un cubo tal que sus lados y sus caras sumados son igual a la cantidad proporcional entre dicho cubo y una de sus caras. ¿Cuál es el tamaño del cubo?"

-Estos sí que fueron dos señores problemas. En fin, parece que fue ayer cuando vimos salir de la ciudad, derrotado y a escondidas, al pobre Tartaglia, avergonzado de su derrota. Pero ahora que espero a la Muerte eso ya no tiene importancia, nada tiene importancia. Y ahora que lo pienso… creo que… sí, claro que sí… -y el anciano matemático saltó de la cama corriendo a la mesa de trabajo, mientras exclamaba:

-¡Será posible! Creo que lo tengo. Es más: diría que lo tengo. ¡Lo tengo! ¡Lo tengo! Tanto tiempo en su busca y precisamente ahora lo he encontrado. Al fin lo he conseguido, que más vale tarde que nunca –y se puso a buscar una hoja de papel de la última resma que había encargado para comprobar, con desesperación, que se le había terminado. Así que, abriendo nervioso el *Ars Magna* por las últimas páginas utilizó los márgenes para escribir notas y fórmulas, números y signos mientras repetía febrilmente: -Lo tengo, lo tengo. Tengo el procedimiento para resolver la ecuación de quinto grado, nada menos que la ecuación de quinto grado, sí, la ecuación de quinto grado. ¡Ahora sí que estoy seguro de que mi nombre estará por encima del de Tartaglia y de Ferrari en el Olimpo Matemático!

Pero su mano se paró de repente como si se hubiera congelado mientras que el frío ascendía por su brazo camino del corazón. Y ni siquiera tuvo fuerzas para lamentar su mala suerte. Se limitó, con un último esfuerzo, a escribir en el último espacio de margen libre cinco palabras en latín: HANC MARGINIS EXIGUITAS NON CAPERET. Y a continuación, en italiano, ¡¡NO ME QUEDA TIEMPO!!

Finalmente apagó la vela con la mano al no tener fuerza para soplar la llama y se arrastró hasta su lecho aferrado a su *Ars Magna*, mientras susurraba:

-Espero que dentro de doscientos o trescientos años algún matemático descubra mis indicaciones y encuentre al menos papel suficiente para desarrollar el método para resolver cualquier ecuación de quinto grado sin el impedimento de la falta de espacio para anotarla.

Muy poco podía imaginar Gerolamo Cardano que su visión difusa de un método general para resolver la quíntica sería una quimera, su última quimera en esta vida, y un canto de sirena en el que sucumbirían los mejores matemáticos durante casi tres siglos. Incluso para una mente privilegiada como la suya, agudizado su ingenio por los momentos previos a salto al más allá, era imposible adivinar lo que dos jóvenes en los primeros años del siglo XIX demostrarían de forma irrefutable. Dos jóvenes a los que la muerte arrastró consigo en edades muy tempranas, como si la quíntica ejerciera su maldición. Dos jóvenes que destrozarían la última visión matemática de Cardano:

La ecuación general de quinto grado no puede resolverse siempre utilizando un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces.

Ni todo el papel del mundo, ni todo el tiempo de la eternidad le hubiesen bastado para encontrar su fórmula mágica.

ALTERNATIVAS DE ARTICULOS:

- Francisco Martín Casalderrey, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento Italiano. Capítulo 4.Nivola, 2000.*
- Dirk Jan Struik, *Historia concisa de las Matemáticas. Capítulo V. Instituto Politécnico Nacional*, 1986.

BIBLIOGRAFIA

- Bautista, R (2002). Conferencia *La Solución de Ecuaciones como Motor del Desarrollo del Algebra*, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, durante la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas
- Baumgart, J. et al. (1989). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. NCTM. Reston, Virginia.
- Kaster, E., Newman, J. (1978). *Matemáticas e Imaginación.* Compañía Editorial Continental, S.A. D.F., México.
- Kolmogorov, A. Aleksandrov, A. y otros (1985). *La Matemática: su contenido, método y significado.* Alianza Editorial. Madrid.
- Moreno, R. (2001) *Andanzas* **y** *aventuras de las ecuaciones cúbicas y cuárticas a su paso por España. Un capítulo de la historia del álgebra española.* Colección "línea 300" Editorial Complutense. Madrid.
- Pérez, J. Sánchez, C. (2007). *Historia de las Matemáticas: Ecuaciones Algebraicas.* Cursos THALES. Andalucía.
- Rico, L. (Coord.).(2000). *La educación matemática en la enseñanza secundaría.* Horsori Editorial, S.I.
- Sierra, M. (2009), *Notas De Historia De Las Matemáticas Para El Currículo De Secundaria*, en http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/122/116
- Stewart, I. (2009) *Historia de las matemáticas.* Crítica. Barcelona.
- Várrilly, J. (1986) *La enseñanza de las matemáticas con un énfasis histórico.* Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, ISSN 0034-8252, Nº. Extra 59, págs. 75-78. Costa Rica.
- Revista digital Matemática (2008), Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, No 1.