



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMÁTICAS

**ANÁLISIS Y ESTIMACIÓN DE
MERCADOS FINANCIEROS.**

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
ALEJANDRA XOCHITL HERNÁNDEZ DÁVILA

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ

*Dedicado a mis papás
Rosa María Dávila Márquez y
Jesús Hernández Rosas*

Agradecimientos

A mis papás: Rosa María y Jesús; por ser mi ejemplo a seguir, por todo el apoyo, sin ustedes yo no existiría.

A mi hermana “Guadita” gracias por escucharme, por ser mi amiga, por los ratos de risas y por los “pececitos.”

A Teban por la porras, por creer en mi y darme ánimos para seguir adelante.

A Bibi, por estar conmigo a pesar de todo y por los ánimos.

A mis cuatro angelitos: Elva, Carmen, Matías y Antonio. Por todas las enseñanzas.

Al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por la paciencia y el tiempo dedicado a pesar de todas sus ocupaciones.

Al Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, a la Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes y al Dr. Victor Hugo Vázquez Gevara por el tiempo e interés prestado a esta tesis

*No basta dar pasos que un día puedan conducir hasta la meta,
sino que cada paso ha de ser una meta,
sin dejar de ser un paso.
(Johann P. Eckermann)*

Índice general

Índice general	IV
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones en Finanzas	1
1.2. Construcción del Movimiento Browniano	3
2. Modelo Binomial	6
2.1. Opciones de Compra	7
2.1.1. Modelo Binomial de un Periodo	7
2.1.2. Determinación de p , u y d	10
2.1.3. Modelo Binomial de n Periodos	11
2.2. Opciones de Venta	15
2.2.1. Opciones Europeas	15
2.2.2. Opciones Americanas	17
3. Convergencia del Modelo Binomial	18
3.1. Modelo de Black-Scholes	18
3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial	20
4. Ejemplos: Valuación de Opciones	30
4.1. TELMEX	30
4.2. CEMEX	37
4.3. Genomma Lab	40

5. Modelo ARMA	45
5.1. Series de Tiempo	45
5.2. Procesos Autorregresivos	47
5.2.1. AR(1)	48
5.2.2. AR(p)	50
5.3. Procesos de Medias Móviles	53
5.3.1. MA(1)	53
5.3.2. MA(q)	55
5.4. Modelo ARMA	57
5.4.1. ARMA(1,1)	57
5.4.2. ARMA(p, q)	60
6. Modelo ARIMA	62
6.1. Identificación	63
6.1.1. Estacionariedad en Media	63
6.1.2. Estacionariedad en Varianza	64
6.1.3. Test de Dickey-Fuller Aumentado	64
6.1.4. Determinación del Orden de p y q	66
6.2. Estimación	67
6.2.1. Estimación de Parámetros	67
6.2.2. Selección del Modelo, Criterio de Akaike (AIC)	70
6.3. Validación	71
6.4. Predicción	73
6.4.1. Cálculo de Predicciones	73
6.4.2. Varianza de las Predicciones	75
7. Ejemplos del Modelo ARIMA	77
7.1. CEMEX	78
7.2. Genomma Lab	95
7.3. TELMEX	106
Conclusiones	117
A. Teorema de Extensión de Kolmogorov	118
B. Operadores	121
B.1. Definiciones	121
B.2. Estacionariedad e Invertibilidad	122

C. Predictor Óptimo	125
Bibliografía	128

Introducción

Una alternativa para reducir los riesgos financieros que sufren las empresas ocasionados por la inestabilidad económica en México son los instrumentos derivados, estos son contratos financieros los cuales otorgan derechos y obligaciones para las partes que los celebran, un ejemplo son las *opciones*, las opciones son contratos que otorgan a su poseedor el derecho pero no la obligación de vender (o comprar) un número específico de acciones o fracción en un determinado tiempo.

En este trabajo se estudiarán dos modelos para valorar opciones financieras de tipo Europeas y Americanas, uno de ellos es el modelo Binomial. El Modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein es un modelo a tiempo discreto que consiste en construir un árbol binomial en el que se representan las posibles trayectorias que puede seguir el precio de las acciones subyacentes y determinar el precio de opciones tanto americanas como europeas.

El siguiente modelo que se estudiará es el modelo de Black-Scholes, este modelo propuesto por Fischer Black y Myron Scholes es utilizado para estimar el valor de una opción de tipo europea (*put* y *call*), en este caso sólo se consideran acciones que no pagan dividendos.

En primer lugar se hará una revisión bibliográfica de conceptos básicos en matemáticas financieras, por ejemplo, opciones de compra y venta de tipo americanas y europeas. Posteriormente se demostrará la existencia del movimiento Browniano mediante el Teorema de extensión de Kolmogorov. En el segundo Capítulo se describe el modelo binomial para valuación de opciones *put* y *call* de tipo americanas y europeas para uno, dos y n periodos. Después, en el Capítulo 3 se definirá el modelo de Black-Scholes y se

demostrará la convergencia del modelo binomial a éste, se presentan ejemplos del modelo binomial y su convergencia al de Black-Scholes aplicado a tres empresas mexicanas (TELMEX, CEMEX y Genomma Lab Internacional) en el Capítulo 4.

En el Capítulo 5 se introduce el modelo ARMA empleado para la predicción de series de tiempo (procesos estocásticos) estacionarios, se describen los procesos autorregresivos (AR) y de medias (o promedios) móviles (MA), en el Capítulo 6 se describe el modelo ARIMA (que es una extensión del modelo ARMA) para series no estacionarias. Finalmente en el Capítulo 7 se presenta tres análisis de series de tiempo utilizando el modelo ARIMA de acuerdo con una serie de tiempo lineal.

El estudio de series de tiempo en finanzas, en particular el análisis del precio de las acciones empleando el modelo ARIMA, tiene como objetivo obtener una herramienta con la que sea posible predecir el precio de estas.

Capítulo 1

Preliminares

En el contexto financiero, los instrumentos derivados son contratos que otorgan derechos y obligaciones para las partes que los celebran. Estos productos reciben el nombre de “derivados”, ya que su valor depende de algún bien o activo al cual se le conoce como bien o activo subyacente.

1.1. Definiciones en Finanzas

Definición 1.1.1 *Una opción es un contrato financiero que otorga a su poseedor (comprador) el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) una cantidad de activo a un precio establecido, llamado precio de ejercicio, en una fecha determinada (véase [9]).*

El tipo y número de activos, el precio de ejecución del contrato y la fecha hasta la cual el contrato tiene validez son las características fundamentales de una opción.

Las opciones se clasifican en dos tipos, dependiendo del derecho que adquiere el comprador:

- Opción de **compra** (*call*), es un contrato que proporciona a su poseedor el derecho (pero no la obligación) a comprar un número determinado de acciones, a un precio establecido en cualquier momento antes de una fecha determinada (establecida al inicio del contrato) o bien únicamente en esa fecha. En este caso el vendedor de la opción se obliga

a vender el activo subyacente al precio convenido.

- Opción de **venta** (*put*), es un contrato en el que el propietario adquiere el derecho pero no la obligación de vender el bien subyacente al precio de ejercicio y en una fecha futura establecida al inicio del contrato. En este caso el vendedor de la opción se obliga a comprar el activo subyacente al precio convenido.

Una *prima* de contrato es el pago que recibirá el vendedor por parte del comprador de la opción; es decir, la prima es la compensación al vendedor de la opción por el riesgo que se asume.

La *volatilidad* subyacente manifiesta la capacidad que tiene el precio del bien subyacente, para variar sus movimientos en el futuro (véase [4]).

La volatilidad, el precio de ejercicio y los dividendos (ganancias) son factores que afectan el precio de la opción y estos, a su vez, son afectados por el tiempo de vida de la opción de la siguiente forma:

- Volatilidad: mientras mayor sea el tiempo que transcurre hasta la fecha de ejercicio, la probabilidad de que el precio de la acción aumente (o disminuya) a partir del precio inicial será mayor.
- Precio de ejercicio: si el tiempo de vencimiento aumenta, el precio de ejercicio disminuirá.
- Dividendos: si el tiempo de vida de la opción aumenta los dividendos serán mayores.

Para comprender mejor estos conceptos se presenta el siguiente ejemplo. Suponga que se está interesado en la compra en una fecha futura de un departamento, una casa u otro inmueble. Al día de hoy se tiene la intención de realizar la compra en un momento posterior (cuando se firme la escritura de compraventa y la propiedad pase a ser suya). Si se decidió firmar un contrato para la compra del inmueble, lo que ha hecho es una *opción de compra* a una fecha determinada y futura, es decir, cuando se firme la escritura de compraventa (*fecha de vencimiento*) sobre el departamento en cuestión (*subyacente*) a un precio determinado (*precio de ejercicio o strike*). Desde

el momento en que firma el contrato (*prima*) se tiene el derecho a un bien en una fecha futura, a un precio determinado, pero la propiedad del mismo aún no le pertenece al comprador de la opción dado que el vendedor (o el comprador) por cualquier causa puede decidir no ejercer la compra (véase [15]).

El estilo de la opción es definida por el periodo o fecha en que ésta puede ser ejercida, las más comunes son las opciones europeas y americanas.

Definición 1.1.2 .

*Una opción **europea** otorga a su comprador el derecho pero no la obligación de comprar (o vender) un bien subyacente (o parte de él) al precio de ejercicio en una fecha futura convenida al inicio del contrato (fecha de vencimiento).*

*Una opción **americana** otorga a su comprador el derecho pero no la obligación de comprar (o vender) un bien subyacente (o parte de él) al precio de ejercicio durante el lapso de tiempo comprendido entre el día de la emisión del contrato y la fecha de vencimiento.*

Un supuesto fundamental en la valuación de opciones es que el precio de las acciones sigue un movimiento Browniano geométrico.

1.2. Construcción del Movimiento Browniano

El movimiento Browniano (o proceso de Wiener) es un proceso estocástico a tiempo continuo denotado por $\{W(t) : t \in [0, \infty)\}$ el cual satisface

1. $W(0) = 0$
2. Tiene incrementos independientes, es decir, si $0 \leq s < t < u < v \leq T$ $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes.
3. Tiene incrementos estacionarios. Sean $t, s \in [0, \infty)$ con $t < s$, $W(s) - W(t) \sim N(0, \sigma^2(s - t))$.
4. La función $t \rightarrow W(t)$ es continua.

Se mostrará la existencia del proceso de Wiener usando el Teorema de extensión de Kolmogorov (véase el Apéndice A).

Para cada n con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ la distribución del vector $(W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$ es conocida y está dada por

$$\begin{aligned} f_{(W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \dots, W(t_n)-W(t_{n-1}))}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_1^2}{t_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_2^2}{t_2 - t_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_n^2}{t_n - t_{n-1}}}, \end{aligned}$$

donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{aligned} f_{(W(t_1), W(t_2)-W(t_1))}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{t_2 - t_1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t_1} + \frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)}. \end{aligned}$$

Usando el método de la transformada inversa, y tomando a

$$\begin{aligned} u &= W(t_1) & W(t_1) &= u \\ v &= W(t_2) - W(t_1) & \rightarrow & W(t_2) = v + u \end{aligned}$$

$$f_{uv}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t_1} + \frac{(y-x)^2}{t_2 - t_1} \right)}.$$

Consistencia (Véase teorema A.1 del apéndice A).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{uv}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t_1} + \frac{(y-x)^2}{t_2 - t_1} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2(t_2 - t_1) + t_1(y^2 - 2xy + x^2)}{t_1(t_2 - t_1)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{t_1 y^2}{t_1(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t_1(t_2 - t_1)} \right) (x^2 t_2 - 2xy t_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1 (t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{t_1 y^2}{t_1 (t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - y \frac{t_1}{t_2})^2 - (y \frac{t_1}{t_2})^2}{\frac{t_1}{t_2} (t_2 - t_1)} \right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right) \left(\frac{(y^2 t_1 / t_2)^2}{(t_1 / t_2) (t_2 - t_1)} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{t_1}{t_2} (t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - y(t_1/t_2))^2}{(t_1/t_2)(t_2 - t_1)}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right) \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2} \right)}.
\end{aligned}$$

El caso general se prueba por inducción basado en las ideas anteriores.

Capítulo 2

Modelo Binomial

Una técnica muy utilizada para valorar opciones está basada en construir un árbol binomial, dicha técnica consiste en un esquema de árbol en donde se representan las trayectorias que puede seguir el precio de las acciones subyacentes durante la vida de una opción.

El modelo binomial propuesto por Cox-Ross-Rubinstein en 1979 (véase [5]); es un modelo en tiempo discreto para valorar opciones, el cual está basado en la suma finita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma binomial (véase [4]).

Los supuestos para el modelo binomial son:

1. No existen costos de transacción y/o impuestos.
2. Se puede prestar y pedir prestado a la tasa de interés libre de riesgo.
3. Todos los activos son divisibles.
4. La tasa de interés libre de riesgo es positiva.
5. Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea sin afectar los precios en el mercado.
6. Se puede vender el bien subyacente sin poseerlo previamente, con el compromiso de entrega en una fecha posterior.

En el modelo binomial los precios del bien subyacente se modelan siguiendo el supuesto binomial: *El precio del bien subyacente evoluciona siguiendo un proceso binomial multiplicativo*; si S es el precio del bien en la fecha actual, entonces al final de cada periodo el precio del bien subyacente puede tener dos posibles valores: uno cuando el precio esté a la alza, y otro cuando esté a la baja. El modelo binomial mas simple es el de un periodo, donde el tiempo de vigencia se divide en dos instantes de tiempo $t_0 = 0$ y $t_n = T$.

2.1. Opciones de Compra

2.1.1. Modelo Binomial de un Periodo

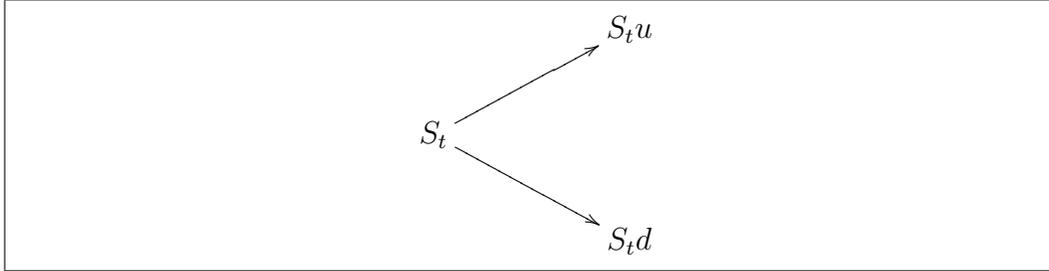
En el modelo binomial de un periodo el único supuesto que se necesita es que no haya oportunidad de arbitraje para un inversor, una forma de analizar el modelo es mediante la construcción de un portafolio.

Un portafolio (o cartera) de inversión es una combinación de activos o títulos individuales (entre ellos las acciones), de modo tal que una combinación de títulos individuales la mayoría de las veces sea menos arriesgada que cualquier título individual. Es posible eliminar el riesgo pues las rentabilidades de los títulos individuales, por lo general, no están perfectamente correlacionadas entre sí, así cierto porcentaje del riesgo se puede eliminar con la diversificación. Formalmente un portafolio se define como:

Un *portafolio* es un vector (w_1, w_2) , donde w_1 representa las unidades de una acción cuyo precio es S_t y w_2 son las unidades de una opción de dicha acción cuyo precio actual es \hat{c}_t . La vida de la opción comprende el intervalo de tiempo $[t, T]$ donde t representa el momento de inicio del contrato y T el periodo de vigencia. El *valor* Π_t *del portafolio* al inicio del periodo es el producto punto de los vectores (w_1, w_2) y (S_t, \hat{c}_t) :

$$\Pi_t := w_1 S_t + w_2 \hat{c}_t. \quad (2.1)$$

El modelo binomial está basado en la suposición de que el precio de las acciones puede moverse tanto por encima de S_t hasta $S_t u$ con probabilidad p_1 , como hacia abajo a un nivel $S_t d$ con probabilidad $1 - p_1$ donde u y d cumplen la condición $0 < d < 1 < u$. La tasa de interés libre de riesgo está representada por r .



Cuadro 2.1: Modelo binomial de un periodo

El incremento proporcional en el precio de las acciones cuando hay un movimiento hacia arriba es $u - 1$, mientras el descenso proporcional cuando hay un movimiento hacia abajo es $1 - d$. Este movimiento puede ser representado en el cuadro 2.1.

Si el precio de las acciones sube hasta $S_t u$ el beneficio de la opción es c_u , si el precio de la acción baja hasta $S_t d$ entonces el beneficio de la opción es c_d .

Si hay un movimiento de subida en el precio de las acciones, el valor del portafolio al final de la vida de la opción es:

$$\Pi_T^u = w_1 S_t u + w_2 c_u. \quad (2.2)$$

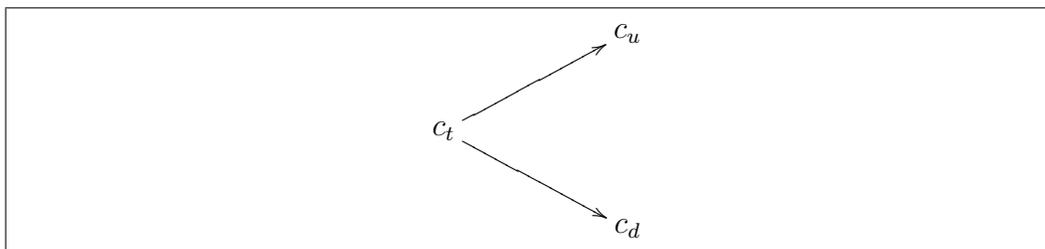
Donde $c_u = \max(S_t u - K, 0)$; c_u es el valor intrínseco de la opción dado un movimiento hacia arriba y K es el precio de ejercicio de la opción.

Ahora si por el contrario, el movimiento es a la baja en el precio de las acciones entonces el valor de la cartera al final de la vida de la opción es

$$\Pi_T^d = w_1 S_t d + w_2 c_d. \quad (2.3)$$

Donde $c_d = \max(S_t d - K, 0)$.

El comportamiento de la opción se presenta en el cuadro 2.2

Cuadro 2.2: Comportamiento de una opción *call*

Se busca w_1 tal que el portafolio sea libre de riesgo; es decir, buscamos w_1 tal que los dos valores posibles produzcan el mismo resultado, así que los dos valores posibles del portafolio deben ser igualados:

$$w_1 S_t u + w_2 c_u = w_1 S_t d + w_2 c_d,$$

despejando w_1

$$w_1 = -\frac{w_2(c_u - c_d)}{S_t(u - d)}.$$

tomando $w_2 = 1$ se tiene

$$w_1 = -\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} = -\Delta.$$

Es decir, el portafolio consiste de un *call* largo y una operación de venta en corto de Δ unidades de la acción (véase [17]).

Por lo tanto, el rendimiento también coincide con el obtenido de un depósito inicial de monto Π_t , esto es

$$\Pi_T^u = \Pi_t e^{r(T-t)}, \quad (2.4)$$

$$\Pi_T^d = \Pi_t e^{r(T-t)}. \quad (2.5)$$

De (2.1), (2.3) en (2.5) se tiene

$$\begin{aligned} w_1 S_t d + w_2 c_d &= \Pi_t e^{r(T-t)}, \\ w_1 S_t d + w_2 c_d &= (w_1 S_t + w_2 c_t) e^{r(T-t)}, \\ (w_1 S_t d + w_2 c_d) e^{-r(T-t)} &= w_1 S_t + w_2 c_t. \end{aligned}$$

Tomando $w_1 = -\Delta$ y $w_2 = 1$

$$\begin{aligned}
& \left[- \left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} \right) S_t d + c_d \right] e^{-r(T-t)} = - \left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} \right) S_t + c_t \\
c_t &= \left[- \left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} \right) S_t d + c_d + e^{r(T-t)} \left(- \frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} S_t \right) \right] e^{-r(T-t)} \\
&= \left[\left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \right) c_u + \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} \right) c_d \right] e^{-r(T-t)}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Si $p := \left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \right) c_u$ entonces $1 - p = \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} \right) c_d$ por lo tanto sustituyendo en (2.6) se tiene que

$$c_t = [pc_u + (1 - p)c_d]e^{-r(T-t)}. \tag{2.7}$$

Lo que permite valuar una opción de *compra* de tipo europea para un periodo. Nótese que en la fórmula (2.7) no aparece la probabilidad p_1 .

2.1.2. Determinación de p , u y d

Los parámetros p , u y d , mencionados en la sección 2.1.1 deben dar valores correctos para la media y la varianza del precio de las acciones durante un intervalo de tiempo δt , el rendimiento esperado de las acciones es el tipo de interés libre de riesgo r . Por lo tanto, el valor esperado del precio de las acciones al final del intervalo δt de tiempo es $S_t e^{r\delta t}$ (véase [3]).

Ya que se tiene una variable aleatoria *Binomial* su desviación estándar en un intervalo de tiempo pequeño δt es $\sigma\sqrt{\delta t}$, la varianza es por lo tanto,

$$\sigma^2 \delta t = pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2.$$

Igualando el precio esperado de las acciones al final de δt y la esperanza del árbol se tiene

$$\begin{aligned}
S e^{r\delta t} &= pSu + (1 - p)Sd = pSu + qSd, \\
e^{r\delta t} &= pu + (1 - p)d = pu + qd.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores imponen condiciones sobre p , u y d ; una de ellas es $u = \frac{1}{d}$.

Por lo tanto, para δt pequeña se tiene que (véase [4])

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \\ p &= \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \\ 1 - p &= \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

nótese que $0 < p < 1$.

2.1.3. Modelo Binomial de n Periodos

El tiempo de vigencia de la opción puede dividirse en $n = 1, 2, \dots, N$ etapas de tiempo. Sea S_t el precio de la acción en el momento t , este modelo supone que dicha acción tiende a comportarse de dos formas una vez transcurrido el intervalo de tiempo δt

- S_t puede subir hacia $S_t u$ con probabilidad p (con $u > 1$).
- S_t puede bajar al precio $S_t d$ con probabilidad $1 - p$ (con $d < 1$).

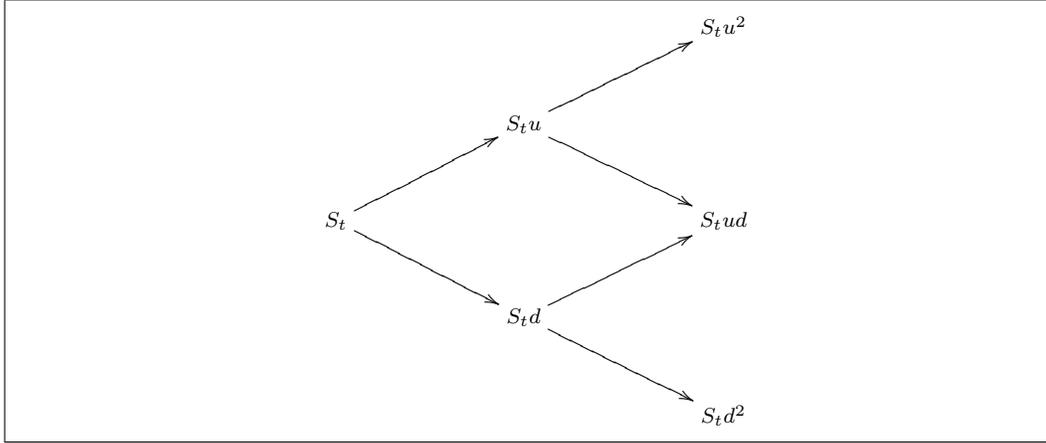
Si el tiempo de vigencia se divide en n etapas el precio del bien subyacente tendrá 2^n posibles valores al final del tiempo.

Una idea fundamental en el modelo binomial consiste en dividir el tiempo de vigencia de la opción en $n = 1, \dots, N$ etapas de igual longitud $\delta = \frac{1}{n}$, para un n suficientemente grande (véase [3]).

En el momento t se conoce el precio de la acción S_t , en el momento δt se tienen dos precios posibles para la acción $S_t u$ y $S_t d$. En el momento $2\delta t$ hay tres precios posibles $S_t u^2$, $S_t u d$ y $S_t d^2$ y así sucesivamente. El precio de la acción en el j -ésimo nodo ($j = 0, 1, \dots, N$) en el tiempo $i\delta t$ se calcula como

$$S_{u^j d^{i-j}} = S_t u^j d^{i-j}. \tag{2.9}$$

El esquema de árbol binomial para el caso de dos periodos se da en el cuadro 2.3



Cuadro 2.3: Modelo binomial de 2 periodos

Aplicando el mismo método para valuación de opciones para un periodo se obtiene que al final del periodo 2 el precio de la opción es

$$c_u = e^{-r\delta t} [p c_{u^2} + (1-p) c_{ud}] \quad (2.10)$$

$$c_d = e^{-r\delta t} [p c_{ud} + (1-p) c_{d^2}]. \quad (2.11)$$

Siguiendo un movimiento hacia atrás sobre el árbol binomial donde

$$c_{u^2} = \text{máx}(0, S u^2 - K)$$

$$c_{ud} = \text{máx}(0, S u d - K)$$

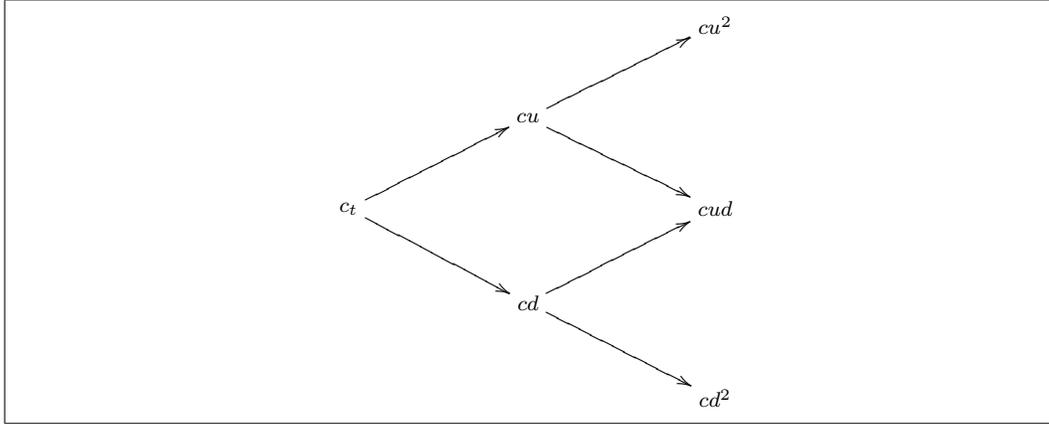
$$c_{d^2} = \text{máx}(0, S d^2 - K).$$

De (2.7), (2.10) y (2.11) se tiene

$$c_t = e^{-r\delta t} [p^2 c_{u^2} + 2p(1-p) c_{ud} + (1-p)^2 c_{d^2}].$$

Sustituyendo c_{u^2} , c_{ud} y c_{d^2}

$$c_t = e^{-r\delta t} [p^2 \text{máx}(0, S u^2 - K) + 2p(1-p) \text{máx}(0, S u d - K) + (1-p)^2 \text{máx}(0, S d^2 - K)].$$



Cuadro 2.4: Comportamiento de una opción para 2 periodos

Equivalentemente

$$c_t = e^{-r\delta t} \left[\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} p^j (1-p)^{2-j} \max(0, Su^j d^{2-j} - K) \right]. \quad (2.12)$$

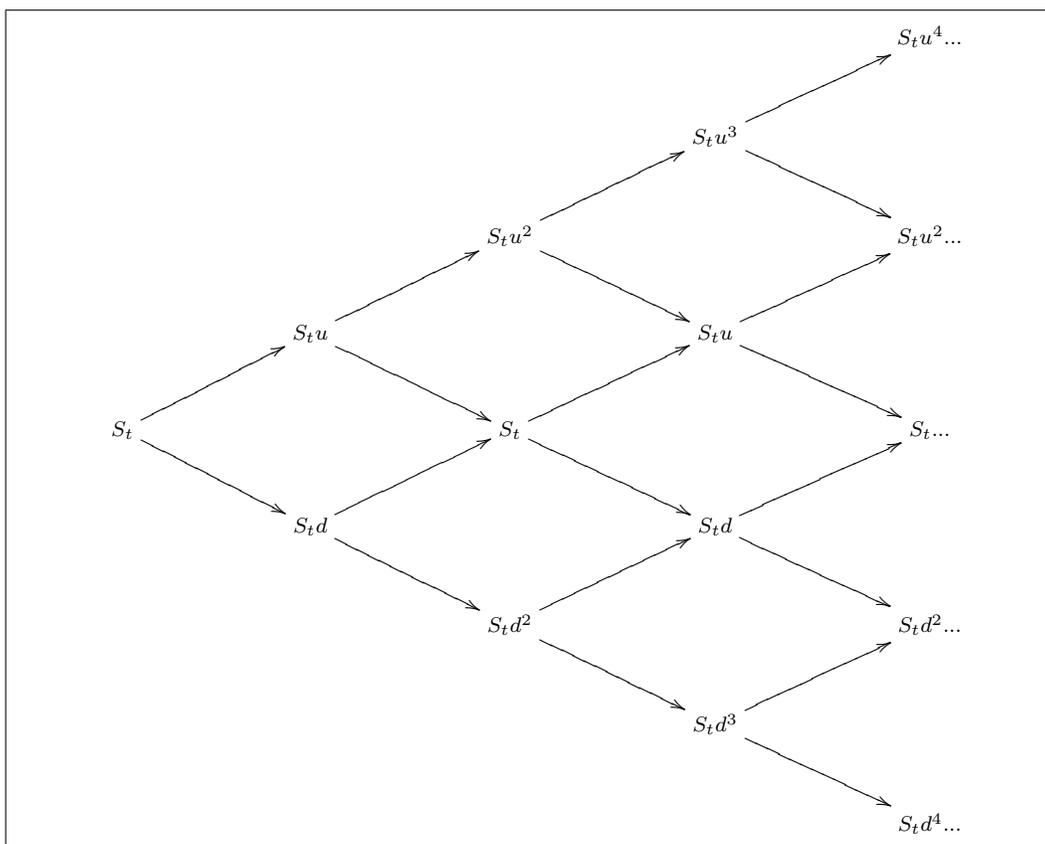
El comportamiento de la opción se representa en el cuadro 2.4 (Véase [12]).

Los precios del subyacente en el caso de n periodos, evolucionarán según el cuadro 2.5.

Existen dos métodos para valorar una opción en n periodos:

1. Calcular los valores intrínsecos al final de los n periodos y por medio de un proceso recursivo calcular el precio de la opción en cada nodo del diagrama utilizando la ecuación (2.7).
2. Generalizando la ecuación (2.12).

En el primer método se inicia calculando el último periodo n ; a partir de los valores intrínsecos en n se calculan los valores c_{n-1} y se retrocede en el tiempo para calcular $c_{n-2}, c_{n-3}, \dots, c$ que será el valor de la opción en el instante actual.

Cuadro 2.5: Modelo binomial de n periodos

En el segundo método se usa la generalización de la ecuación (2.12) por lo tanto, se tiene (véase [12])

$$c_t = e^{-r(T-t)} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max(0, Su^j d^{n-j} - K) \right]. \quad (2.13)$$

En resumen, las opciones son evaluadas empezando al final del árbol y moviéndose hacia atrás (inducción hacia atrás), el valor de una opción de venta es $\max(K - S_T, 0)$ y una opción de compra tiene un valor de $\max(0, S_T - K)$, donde S_T es el precio de la acción en el momento T y K es el precio de ejercicio.

Como se supone un mercado neutral al riesgo, el valor de cada nodo en el momento $T - \delta t$ puede calcularse como el valor esperado en el momento T descontado al tipo r con periodo de tiempo δt ; similarmente el valor de cada nodo en el momento $T - \delta t$ puede calcularse como el valor esperado en el momento $T - \delta t$ descontado por un periodo de tiempo δt al tipo r , y así sucesivamente.

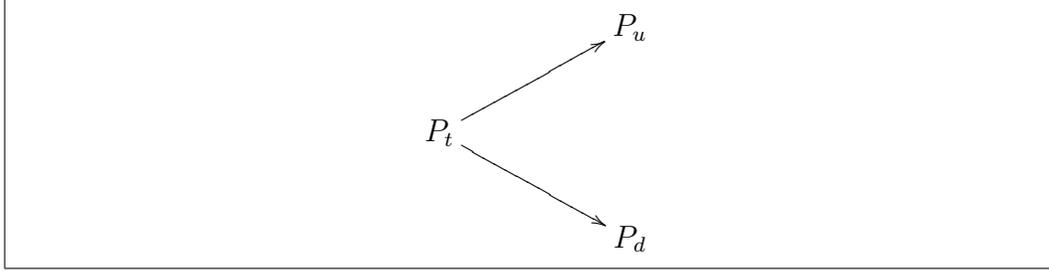
Cuando se desea valorar una opción americana de compra sobre acciones que no pagan dividendos, el tratamiento es similar, es decir, el valor de la opción *call* de tipo americana será el mismo que en el caso de una opción europea, pues el ejercicio anticipado nunca se dará debido a que no se obtiene algún beneficio (véase [12]).

2.2. Opciones de Venta

En el modelo binomial la valuación de opciones de *venta* de tipo europea se hace de manera análoga al caso de opciones de *compra*, sin embargo, en el caso de una opción americana el valor de ésta puede ser diferente al de una europea ya que se puede presentar que el ejercicio anticipado sea óptimo.

2.2.1. Opciones Europeas

Cuando se desea valorar una opción de venta de tipo europea, al igual que una opción de compra, se construye una cartera de arbitraje con posiciones largas (o cortas) en acciones y en opciones con lo que se obtiene (2.14).

Cuadro 2.6: Comportamiento de una opción *put*

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{u - d}. \quad (2.14)$$

El comportamiento del valor *put* de un periodo se muestra en el cuadro 2.6, donde P representa el valor de la opción.

$$\begin{aligned} P_u &= \text{máx}(0, K - Su), \\ P_d &= \text{máx}(0, K - Sd). \end{aligned}$$

Haciendo pasos análogos para una opción de compra se tiene que el valor de una opción de venta para un periodo es:

$$P_t = [pP_u + (1 - p)P_d]e^{-r\delta t}, \quad (2.15)$$

donde

$$p = \frac{e^{-r(T-t)} - d}{u - d}.$$

En el caso de n periodos el precio de la opción de tipo europea queda expresada como

$$P_t = e^{-r\delta t} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} \text{máx}(0, K - Su^j d^{n-j}) \right], \quad (2.16)$$

(véase [12]).

Para este caso también existe otro método que consiste en valorar la opción calculando los valores intrínsecos en el periodo n y retrocediendo en el tiempo para calcular cada P_i ($i = 1, \dots, n$) por medio de la ecuación (2.15).

2.2.2. Opciones Americanas

En el caso de las opciones americanas de venta es necesario revisar en cada nodo, si es mejor ejercer antes del vencimiento o mantener la opción por un periodo de tiempo δt ; eventualmente moviéndose hacia atrás a lo largo de todos los nodos, se obtiene el valor de la opción en el momento inicial (véase [3]).

Supongamos que $K > Su$ y como $u > d$ entonces $K > Sd$ (pues $K > Su > Sd$) así que para este caso

$$\begin{aligned} P_u &= K - Su, \\ P_d &= K - Sd. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$(ue^{-r\delta t})p + (de^{-r\delta t})(1-p) = 1.$$

Pues

$$\begin{aligned} (ue^{-r\delta t})p + (de^{-r\delta t})(1-p) &= (ue^{-r\delta t})\frac{e^{-r\delta t} - d}{u - d} \\ &\quad + (de^{-r\delta t})\frac{u - e^{-r\delta t}}{u - d} \\ &= e^{-r\delta t} \left[\frac{e^{-r\delta t}(u - d)}{u - d} \right]. \end{aligned}$$

Entonces de la ecuación (2.15) tenemos que

$$\begin{aligned} P_t &= [p(K - Su) + (1-p)(K - Sd)]e^{-r\delta t} \\ &= K \left(pe^{-r\delta t} + (1-p)e^{-r\delta t} \right) - S \left((ue^{-r\delta t})p + (de^{-r\delta t})(1-p) \right) \\ &= Ke^{-r\delta t} - S < K - S. \end{aligned}$$

Así se tiene un valor crítico para el precio de las opciones, definiendo $\widehat{S} = K - S$. Si $S < \widehat{S}$ debe ser ejercida la opción (véase [5]).

Convergencia del Modelo Binomial

3.1. Modelo de Black-Scholes

La fórmula de Black-Scholes fue desarrollada simultáneamente por Robert Merton en 1973 y por Fischer Black y Myron Scholes (véase [17]). Dicha fórmula es empleada para calcular el valor actual de una opción europea que no paga dividendos de acciones en una fecha futura. Posteriormente, el modelo se amplió para opciones sobre acciones que producen dividendos, y luego se adoptó para opciones americanas, y mercado monetario.

En el modelo de Black-Scholes se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio obedece a un movimiento Browniano geométrico neutral al riesgo.

Considérese un proceso de Wiener $\{W_t : t \in [0, \infty)\}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración.

Supóngase que el precio de la acción al tiempo t , es S_t el cual obedece a un movimiento Browniano geométrico que satisface la ecuación diferencial estocástica $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ representa el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea.

Los supuestos del modelo clásico de Black-Scholes (véase [17]) son:

- El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- El precio del activo sigue un movimiento Browniano geométrico.
- La volatilidad del precio del activo subyacente es constante a través del tiempo.
- Las ventas en corto del subyacente son permitidas.
- El subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad.
- No hay costos de transacción.
- El mercado opera en forma continua.
- Existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.
- No existe oportunidad de arbitraje.

La fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción *call* europea está dada por

$$c(S_t, t) = S_t \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.1)$$

Donde $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo, S_t es el precio del activo subyacente en el instante t , $T - t$ representa la vida del contrato (t fecha de inicio; T fecha de vencimiento), K es el precio de ejercicio, r la tasa de interés libre de riesgo y Φ es la distribución acumulada de una variable aleatoria normal estandar.

En el caso de una opción de tipo *put* europea se tiene

$$p(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln(\frac{K}{S_t}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - S_t \Phi \left(\frac{\ln(\frac{K}{S_t}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.2)$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial

Se muestra la convergencia en distribución del modelo binomial al modelo de Black-Scholes cuando el número de etapas n en que se ha dividido el modelo binomial tiende a infinito; la demostración se basa en el Teorema central del límite así como en la convergencia de la distribución binomial a la distribución normal.

El valor para una opción de acuerdo al modelo binomial en n pasos se calcula con la expresión (2.16)

$$c_t^n = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(S_t u^k d^{n-k} - K, 0), n \geq 1.$$

Obsérvese que si $k \in \mathbb{N}$ cumple que $u^k d^{n-k} S_t < K$ se tiene que $c_t^n = 0$ en la ecuación (2.16), de este modo sea $m \in \mathbb{N}$ definida como

$$m := \min\{k \mid u^k d^{n-k} S_t > K\}.$$

Así que

$$\begin{aligned} K &< S_t u^m d^{n-m} \\ \ln(K) &< m \ln(u) + \ln(S_t d^n) - m \ln(d) \\ \ln\left(\frac{K}{S_t d^n}\right) &< m \ln\left(\frac{u}{d}\right) \\ \ln\left(\frac{K/S_t d^n}{u/d}\right) &< m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por otro lado, ya que $m-1 < m$ y gracias a la definición de m se tiene

$$u^{m-1} d^{n-(m-1)} S_t \leq K,$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$m \leq \ln \left(\frac{K/S_t d^n}{u/d} \right) + 1. \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) se tiene

$$\ln \left(\frac{K/S_t d^n}{u/d} \right) < m \leq \ln \left(\frac{K/S_t d^n}{u/d} \right) + 1.$$

La ecuación (2.16) se reescribe como

$$\begin{aligned} c_t^n &= e^{-r(T-t)} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (u^k d^{n-k} S_t - K) \\ &= e^{-r(T-t)} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} S_t u^k d^{n-k} - K e^{-r(T-t)} \\ &\quad \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= S_t \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} e^{-r(T-t)(k-k+n)/n} (pu)^k [(1-p)d]^{n-k} - K e^{-r(T-t)} \\ &\quad \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= S_t \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} (e^{-r(T-t)/n} pu)^k [e^{-r(T-t)/n} (1-p)d]^{n-k} - K e^{-r(T-t)} \\ &\quad \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= S_t \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \left[\frac{pu}{e^{r(T-t)/n}} \right]^k \left[\frac{(1-p)d}{e^{r(T-t)/n}} \right]^{n-k} - K e^{-r(T-t)} \\ &\quad \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sean $Y_n \sim \text{Bin}(n, p)$ y $X_n \sim \text{Bin}(n, pu/e^{r(T-t)/n})$. Obsérvese que $0 < pu/e^{r(T-t)/n} < 1$ ya que $1 < e^{r(T-t)/n}$ y $0 < up < 1$. Por lo tanto la primera sumatoria de (3.5) se interpreta como $P(X_n \geq m)$ y la segunda

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

como $P(Y_n \geq m)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 c_t^n &= S_t P(X_n \geq m) - K e^{-r(T-t)} P(Y_n \geq m) \\
 &= S_t (1 - P(X_n < m)) - K e^{-r(T-t)} (1 - P(Y_n < m)) \\
 &= S_t (1 - P(X_n \leq m - 1)) - K e^{-r(T-t)} (1 - P(Y_n \leq m - 1)). \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Considérese la siguiente notación

$$\begin{aligned}
 \phi \left(m, n, \frac{pu}{e^{r(T-t)/n}} \right) &:= 1 - P(X_n \leq m - 1). \\
 \phi(m, n, p) &:= 1 - P(Y_n \leq m - 1).
 \end{aligned}$$

Así que, (2.16) se reescribe como:

$$c_t^n = S_t \phi \left(m, n, \frac{pu}{e^{r(T-t)/n}} \right) - K e^{r(T-t)/n} \phi(m, n, p). \quad (3.7)$$

Se quiere demostrar que:

$$\phi \left(m, n, \frac{pu}{e^{r(T-t)/n}} \right) \rightarrow \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) n \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

$$\phi(m, n, p) \rightarrow \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Donde Φ denota la distribución acumulada de una variable normal estándar.

Suponga que $Z_i \sim Ber(p)$, $i = 1, \dots, n$ y sea $U_n := \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, su función generadora de momentos es

$$\begin{aligned}
 M_{U_n}(t) &= E \left[e^{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} t} \right] \\
 &= E \left[e^{\frac{\sum_{i=1}^n Z_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} t} \right] \\
 &= \prod_{i=1}^n E \left[e^{\frac{Z_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} t} \right]
 \end{aligned}$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$\begin{aligned}
M_{U_n}(t) &= e^{-\frac{npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \left(1 - p + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} \right)^n \\
&= \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}} \right]^n \\
&= \left[(1-p) \left(1 - \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{p^2t^2}{2np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. p \left(1 + \frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)^2t^2}{2np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]^n \\
&= \left[1 + \frac{(1-p)pt - pt + p^2t}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{p^2t^2 - p^3t^2 + (1-p)^2pt^2}{2np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \\
&= \left[1 + \frac{(1-p)pt - pt(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{p^2t^2(1-p) + (1-p)^2pt^2}{2np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \\
&= \left[1 + \frac{p^2t^2 + (1-p)pt^2}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \\
&= \left[1 + \frac{p^2t^2 + pt^2 - p^2t^2}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \\
&= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n.
\end{aligned}$$

Tomando límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{U_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Debido a la convergencia de las funciones generadoras de momentos se tiene que la distribución binomial converge a una distribución normal estándar, cuando el número de ensayos n es grande.

De (2.8) y ya que el tiempo de vigencia de la opción se ha dividido en n pasos se tiene

$$p = \frac{e^{r(T-t)/n} - e^{-\sigma\sqrt{T-t/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T-t/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T-t/n}}}.$$

Aplicando límite, la regla de L'Hopital y tomando $\delta := T - t$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\delta/n} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-r\delta n^{-2}e^{r\delta/n} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\sigma n^{-3/2}e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\delta}n^{-3/2}e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\sigma n^{-3/2}e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-r\delta n^{-1/2}e^{r\delta/n} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\sigma e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\delta}e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\sigma e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Se mostrará (3.9)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(m, n, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(Y_n \leq m - 1)) \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).
 \end{aligned}$$

De (3.3) y de las ecuaciones (2.8) se tiene que

$$m - 1 \leq \frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n}}{2\sigma\sqrt{\delta/n}}. \quad (3.10)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n}}{2\sigma\sqrt{\delta/n}} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n} - 2\sigma np\sqrt{\delta/n}}{2\sigma\sqrt{\delta/n}\sqrt{np(1-p)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2p)}{2\sigma\sqrt{\delta p(1-p)}} \\
 &= \frac{\ln(K/S_t) + \lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2p)}{\sigma\sqrt{\delta}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para tener el resultado deseado se necesita que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2p) = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta.$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

Para ello obsérvese que

$$\begin{aligned}
 n\sigma\sqrt{\delta/n}(1-2p) &= \sigma\sqrt{n\delta}(1-2p) \\
 &= \sigma\sqrt{n\delta}\left[1-2\left(\frac{e^{r\delta/n}-e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}\right)\right] \\
 &= \sigma\sqrt{n\delta}\left[\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}+e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}-2e^{r\delta/n}}{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}+e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}\right] \\
 &= \sigma\delta\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}+e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}-2e^{r\delta/n}}{\sqrt{\delta/n}(e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}+e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}})}\right). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Denotando $v := \sqrt{\delta/n}$, (3.11) se reescribe como

$$n\sigma\sqrt{\delta/n}(1-2p) = \sigma\delta\left(\frac{e^{\sigma v} + e^{-\sigma v} - 2e^{rv^2}}{v(e^{\sigma v} + e^{-\sigma v})}\right).$$

Si $n \rightarrow \infty$ entonces $v \rightarrow 0$,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sigma\delta\left(\frac{e^{\sigma v} + e^{-\sigma v} - 2e^{rv^2}}{v(e^{\sigma v} + e^{-\sigma v})}\right) = \sigma\delta \lim_{v \rightarrow 0} \frac{e^{\sigma v} + e^{-\sigma v} - 2e^{rv^2}}{v(e^{\sigma v} + e^{-\sigma v})}.$$

Aplicando la regla de L'Hopital dos veces se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sigma\delta \lim_{v \rightarrow 0} \frac{e^{\sigma v} + e^{-\sigma v} - 2e^{rv^2}}{v(e^{\sigma v} + e^{-\sigma v})} &= \sigma\delta \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sigma e^{\sigma v} - 4rv e^{rv^2} - \sigma e^{-\sigma v}}{e^{\sigma v} - e^{-\sigma v} + v(\sigma e^{\sigma v} + \sigma e^{-\sigma v})} \\
 &= \sigma\delta \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sigma^2 e^{\sigma v} - 8r^2 v^2 e^{rv^2} - 4r e^{rv^2} + \sigma^2 e^{-\sigma v}}{2\sigma e^{\sigma v} + 2\sigma e^{-\sigma v} + v(\sigma^2 e^{\sigma v} - \sigma^2 e^{-\sigma v})} \\
 &= \sigma\delta \left(\frac{2\sigma^2 - 4r}{4\sigma}\right) = \sigma\delta \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right) \\
 &= \delta \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \\
 &= -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}.$$

Lo cual implica que

$$\phi(m, n, p) \longrightarrow \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}\right) n \rightarrow \infty.$$

Ahora se mostrará (3.8). Sea

$$\hat{p} := \frac{pu}{e^{r\delta/n}}.$$

Los cálculos se hacen de manera similar a los anteriores

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pu}{e^{r\delta/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pe^{\sigma\sqrt{\delta/n}}}{e^{r\delta/n}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}}}{e^{r\delta/n}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(m, n, \hat{p}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \leq \frac{m-1-n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right).$$

De (3.10)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m-1-n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n}}{2\sigma\sqrt{\delta/n}} - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n} - 2\sigma n\hat{p}\sqrt{\delta/n}}{2\sigma\sqrt{\delta/n}\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \end{aligned}$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2\hat{p})}{2\sigma\sqrt{\delta\hat{p}(1 - \hat{p})}} \\ &= \frac{\ln(K/S_t) + \lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2\hat{p})}{2\sigma\sqrt{\delta}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, obsérvese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2\hat{p}) = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta.$$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{\delta/n}(1 - 2\hat{p}) &= \sigma\sqrt{n\delta}(1 - 2\hat{p}) \\ &= \sigma\sqrt{n\delta}\left[1 - 2\left(\frac{pu}{e^{r\delta/n}}\right)\right] \\ &= \sigma\sqrt{n\delta}\left[1 - 2\left(\frac{e^{r\delta/n} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}\right)e^{\sigma\sqrt{\delta/n} - r\delta/n}\right] \\ &= \sigma\sqrt{n\delta}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}} - 2e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} + 2e^{-r\delta/n}}{e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}\right) \\ &= \delta\sigma\left[\frac{2e^{-r\delta/n} - e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}{\sqrt{\delta/n}e^{\sigma\sqrt{\delta/n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta/n}}}\right] \\ &= \delta\sigma\left[\frac{2e^{-rv^2} - e^{\sigma v} - e^{-\sigma v}}{v(e^{\sigma v} - e^{-\sigma v})}\right].\end{aligned}$$

Aplicando límite y la regla de L'Hopital dos veces

$$\lim_{v \rightarrow 0} \delta\sigma\left[\frac{2e^{-rv^2} - e^{\sigma v} - e^{-\sigma v}}{v(e^{\sigma v} - e^{-\sigma v})}\right] = \lim_{v \rightarrow 0} \delta\sigma\left[\frac{-4rve^{-rv^2} - \sigma e^{\sigma v} + \sigma e^{-\sigma v}}{v(\sigma e^{\sigma v} + \sigma e^{-\sigma v}) + e^{\sigma v} - e^{-\sigma v}}\right]$$

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial Capítulo 3.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{v \rightarrow 0} \delta \sigma \left[\frac{8r^2 v^2 e^{rv^2} - 4r e^{-rv^2} - \sigma^2 e^{\sigma v} - \sigma^2 e^{-\sigma v}}{\sigma e^{\sigma v} + \sigma e^{-\sigma v} + v(\sigma^2 e^{\sigma v} - \sigma^2 e^{-\sigma v}) + \sigma e^{\sigma v} + \sigma e^{-\sigma v}} \right] \\
 &= \delta \sigma \frac{-4r - 2\sigma^2}{4\sigma} = \delta \sigma \left(-\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \\
 &= \delta \left(-r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &= -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \delta.
 \end{aligned}$$

De este modo se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}} = \frac{\ln(K/S_t) + \delta(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\delta}}.$$

Entonces

$$\phi(m, n, \hat{p}) \longrightarrow \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}} \right) n \rightarrow \infty.$$

En conclusión se ha demostrado que

$$c_t^n \rightarrow S_t \Phi(d_1) - K e^{r\delta} \Phi(d_2),$$

cuando $n \rightarrow \infty$, donde

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}, \\
 d_2 &= \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}.
 \end{aligned}$$

La fórmula anterior es la expresada en (3.1) que es conocida como la fórmula de Black-Scholes para valorar opciones de tipo *call*.

3.2. Análisis de la Convergencia del Modelo Binomial *Capítulo 3.*

Con lo anterior se ha demostrado que si se aumenta el número de periodos del modelo binomial el resultado se aproxima al del modelo de Black-Scholes.

La convergencia se puede observar a partir de $n = 30$ teniendo diferencia de décimas mientras que a partir de $n = 300$ esta diferencia desaparece (véase[12]).

Capítulo 4

Ejemplos: Valuación de Opciones

En este Capítulo se presentan cinco ejemplos de valuación de opciones de tipo europeas y americanas de compra y venta del modelo binomial, en el caso de opciones europeas, también, se muestra numericamente su convergencia al modelo de Black-Scholes.

Para valuar opciones americanas de venta se emplea únicamente el modelo binomial, en el caso de opciones de compra se aplica el modelo binomial y se muestra su convergencia al de Black-Scholes.

Se utilizan los datos de tres empresas mexicanas: TELMEX, CEMEX y Genomma Lab; los datos son tomados de mx.finance.yahoo.com/

4.1. TELMEX

Ejemplo 4.1.1 Valuación de una opción Europea de tipo *call*.

Se dará un ejemplo de valuación de una opción de tipo europea de compra sobre una acción de la empresa mexicana Teléfonos de México, S.A.B. de C.V. (TELMEXL.MX) que no paga dividendos, usando el modelo binomial y el de Black-Scholes.

La opción es emitida el día 10 de Octubre de 2011, el precio de cierre de

la acción fue de 10.46 unidades.

Supongamos que la vigencia de la opción es de 1 año y su tiempo de vida se dividirá en cuatro etapas, es decir, el periodo de cada etapa durará 3 meses. La tasa de interés libre de riesgo nacional, basada en el CETES 175 es de 4.39 y el precio de liquidación será de 10.477 unidades.

La volatilidad subyacente está dada por $\sigma = \hat{\sigma}_y \sqrt{t}$ (véase [4])

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\hat{\sigma}_y^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) - \hat{\mu}_y \right)^2},$$

donde

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}.$$

S_i representa el precio del subyacente al cierre en la fecha i con $i = 0, 1, \dots, n$.

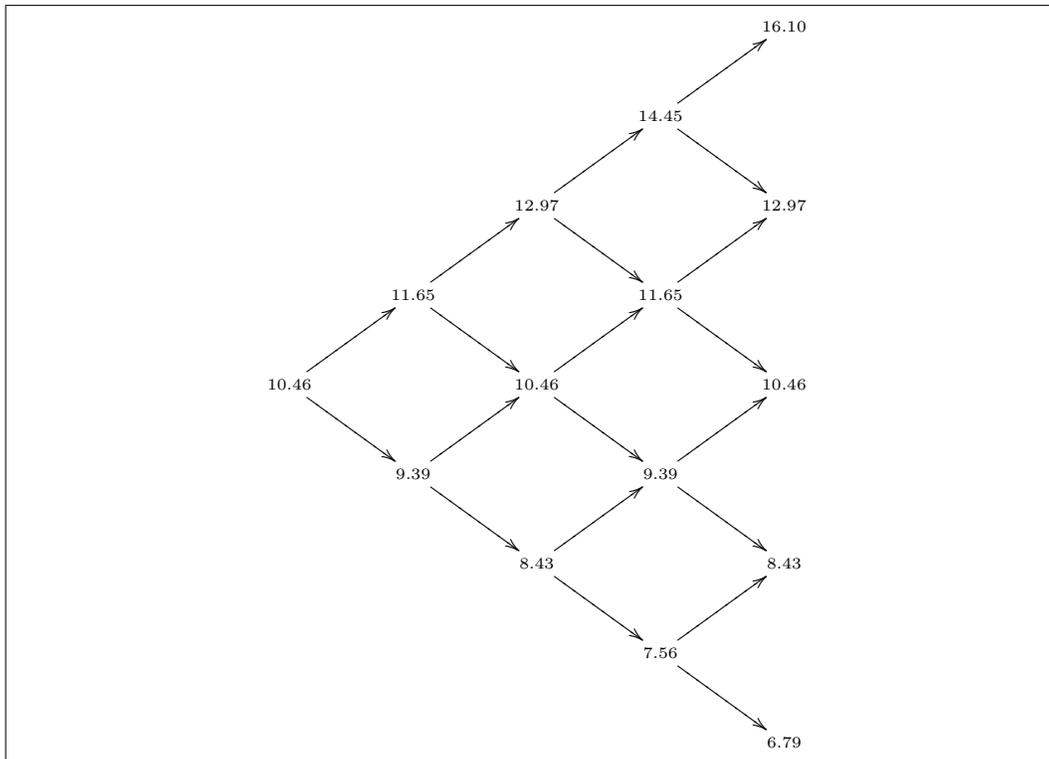
Son observados los precios históricos diarios de la acción a 180 días, a partir de la fecha de emisión del contrato.

Bajo estas condiciones los datos que se tienen son

S	T	δ	r	σ
10.46	1	$\frac{1}{4}$	0.0439	0.2157
K	u	d	p	q
0.477	0.113	0.897	0.524	0.475

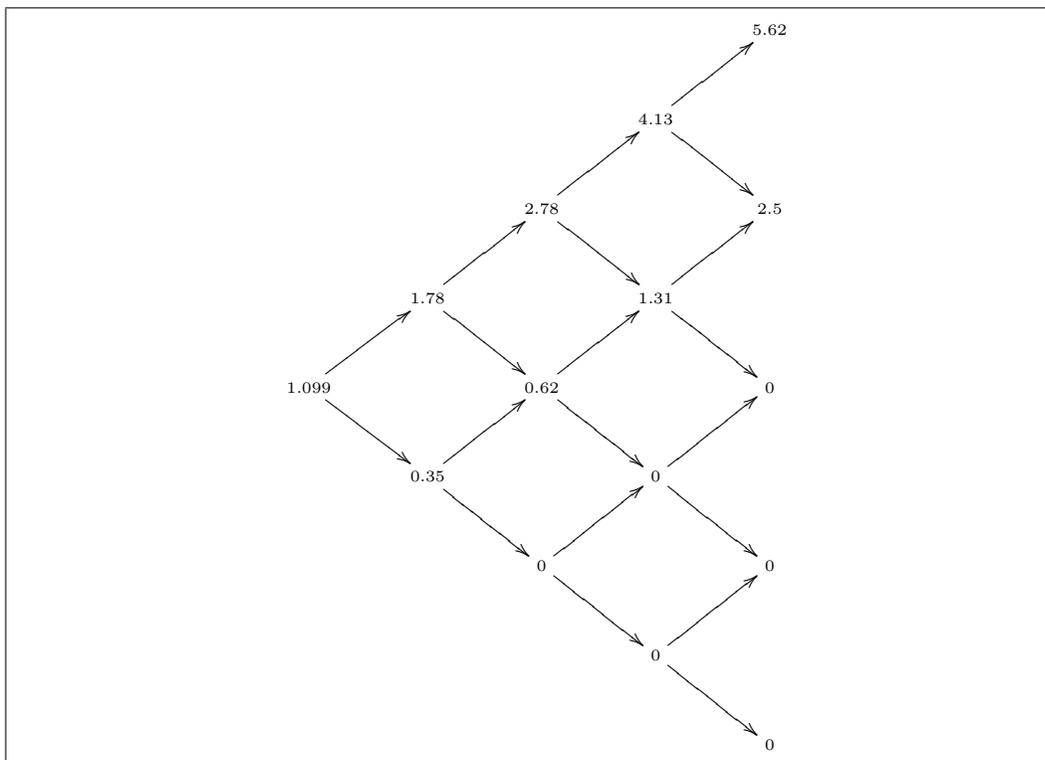
Tabla 4.1: Datos obtenidos para $n = 4$ bajo 180 días de observación.

Ya que el tiempo de vida de la opción se ha dividido en cuatro intervalos de tres meses cada uno, usando (2.9) el árbol binomial para este ejemplo se da en el cuadro 4.1.



Cuadro 4.1: Árbol binomial de acciones de la empresa TELMEX

El comportamiento de la opción está dado por el cuadro 4.2 (calculando los valores intrínsecos al final de cada periodo y retrocediendo en el tiempo).



Cuadro 4.2: Comportamiento de una opción de venta, TELMEX

Por lo tanto, el precio de la opción es de 1.099 unidades.

Aplicando la ecuación (2.13) se obtiene el mismo resultado para $n = 4$, a continuación se muestra el valor de la opción para distintos valores de n .

n	5	9	20	100	300	500
c_t	1.15	1.13	1.10	1.11	1.11	1.11

Tabla 4.2: Valuación de una opción de compra para distintos valores de n

Como ya se ha mencionado la convergencia se observa a partir de 300 etapas.

Bajo estas condiciones se hará la valuación de la opción empleando el modelo de Black-Scholes. Usando la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned}
 c &= 10.46\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{10.46}{10.47727}\right) + \left(0.0439 + \frac{1}{2}(0.2157422^2)\right)}{0.2157422}\right) \\
 &\quad - (10.47727)e^{-0.0439}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{10.46}{10.47727}\right) + \left(0.0439 - \frac{1}{2}(0.2157422^2)\right)}{0.2157422}\right) \\
 &= 1.113067.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio de la acción de compra es de \$1.113067, que coincide con el precio encontrado por medio del modelo binomial a partir de $n = 100$.

Ejemplo 4.1.2 Valuación de una Opción Europea de tipo *put*.

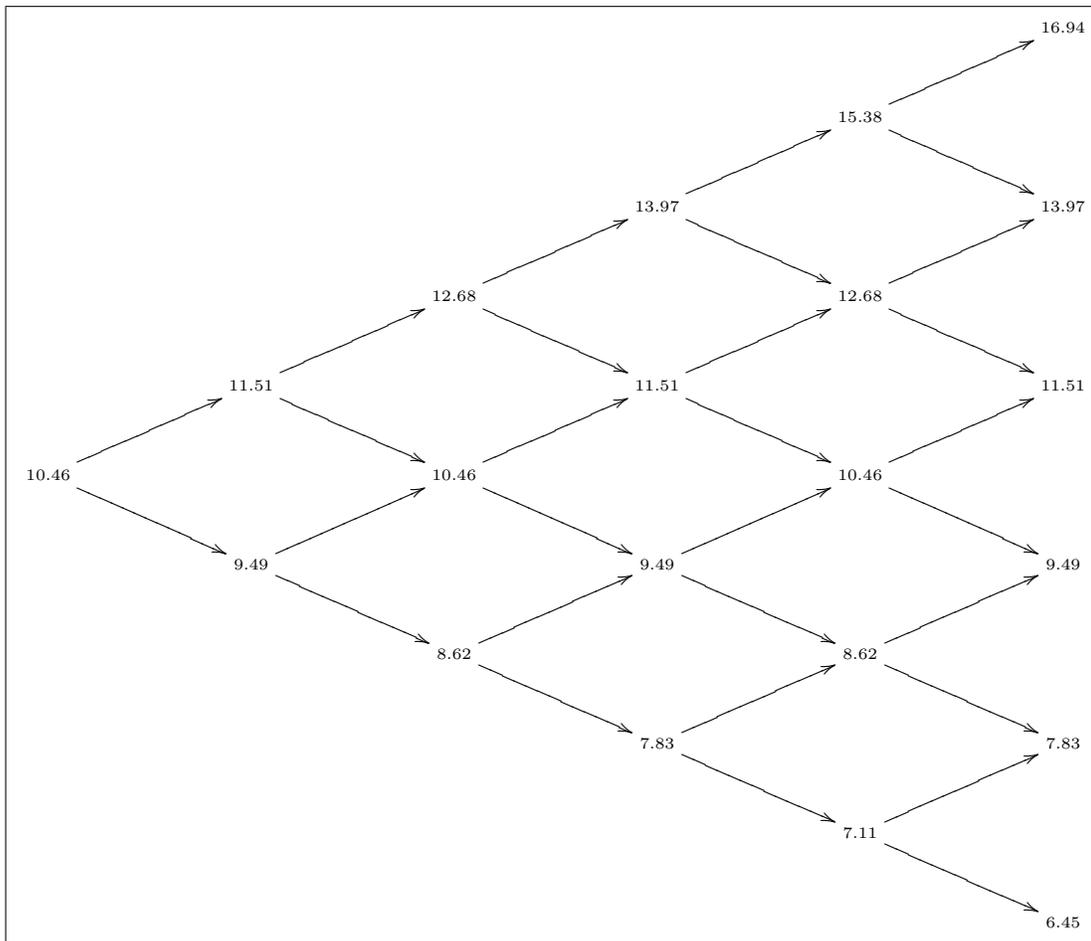
Se dará un ejemplo de valuación de una opción de venta usando el modelo binomial para $n = 5$, es decir, el modelo se dividirá en cinco etapas, para el modelo de Black-Scholes, también, se observará la convergencia del modelo binomial al de Black-Scholes de forma numérica.

Se tienen los siguientes datos:

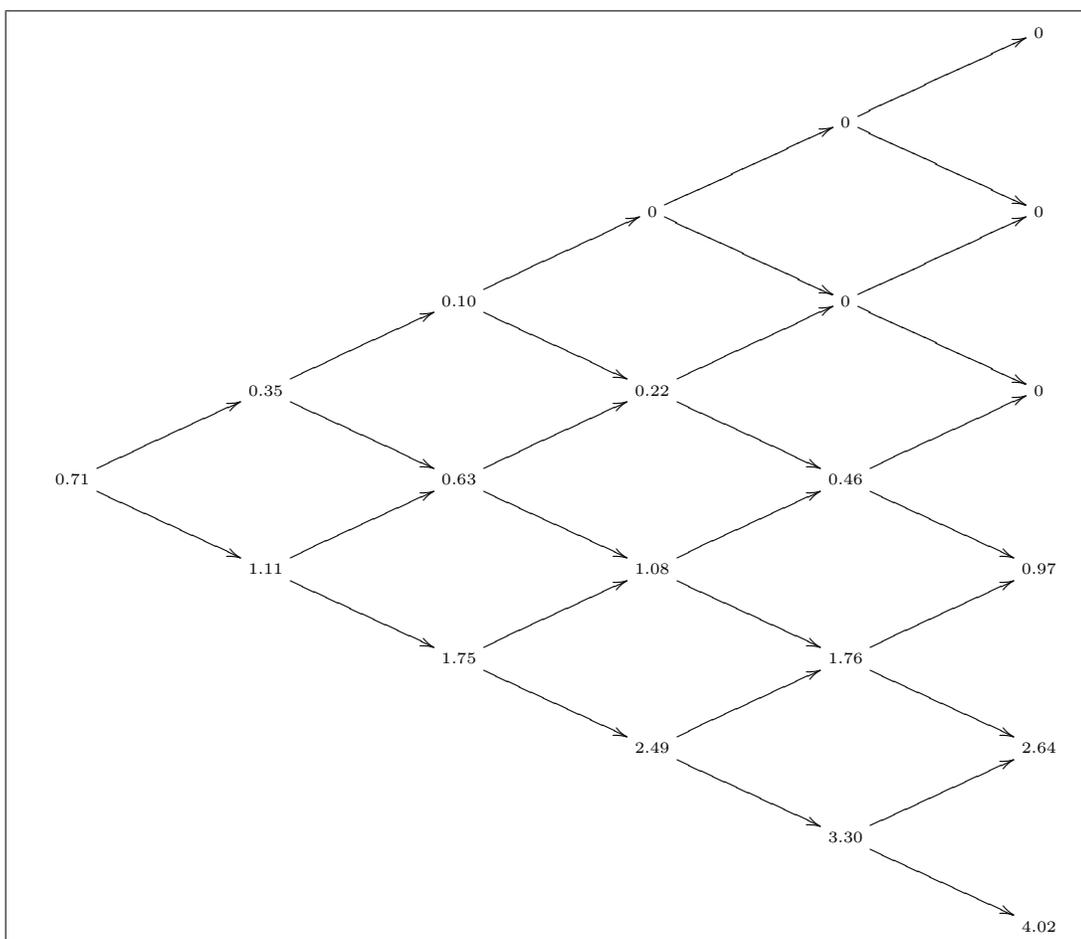
S	T	δ	r	σ
10.46	1	$\frac{1}{5}$	0.0439	0.2157422
K	u	d	p	q
10.47727	1.101291	0.980255	0.5215278	0.4784722

Tabla 4.3: Datos obtenidos para $n = 5$.

El comportamiento del precio de las acciones para $n = 5$ de observa en el cuadro 4.3.



Cuadro 4.3: Comportamiento del precio de las acciones para $n = 5$, TELMEX

Cuadro 4.4: Comportamiento de una opción de venta para $n=5$ TELMEX

Y el comportamiento de la opción está dado en el cuadro 4.3 (calculando los valores intrínsecos al final de cada periodo y retrocediendo en el tiempo).

Con la ecuación (2.13) se obtienen valores del modelo binomial para diferentes índices de n .

n	6	10	50	100	300	500
c_t	0.64	0.66	0.67	0.67	0.67	0.68

Tabla 4.4: Valuación de una opción de venta para distintos valores de n

A continuación se calcula el valor de la opción mediante el modelo de Black-Scholes por medio de la ecuación (3.2).

$$\begin{aligned}
 p &= (10.47727)e^{-0.0439} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{10.46}{10.47727}\right) + \left(0.0439 + \frac{1}{2}(0.2157422^2)\right)}{0.2157422}\right) \\
 &\quad - 10.46 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{10.46}{10.47727}\right) + \left(0.0439 - \frac{1}{2}(0.2157422^2)\right)}{0.2157422}\right) \\
 &= 0.6135329.
 \end{aligned}$$

En este caso se observa la convergencia (en una décima), del modelo binomial al de Black-Scholes.

4.2. CEMEX

Ejemplo 4.2.1 Valuación de una opción Americana *call*.

A continuación se da un ejemplo de valuación de una opción de tipo americana de compra sobre una acción de la empresa Cemex, S.A.B de C.V. (CEMEXCPO.MX) que no paga dividendos, usando el modelo binomial y el de Black-Scholes.

La opción es emitida el día 13 de Enero de 2012, el precio de cierre de la acción fue de 7.67 unidades. Supongamos que la vigencia de la opción es de 1 año y que se dividirá en tres etapas, es decir, el periodo de cada etapa durará 4 meses. La tasa de interés libre de riesgo nacional es de 4.49 % y el precio de liquidación será de 9.507 unidades.

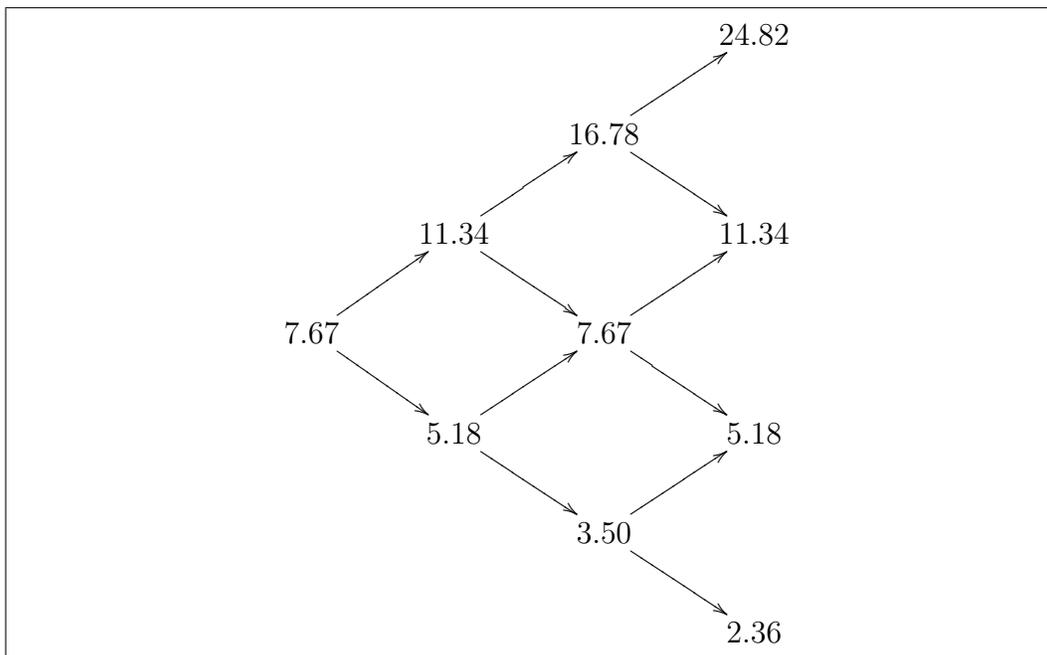
Se observan los precios históricos diarios de la acción a 180 días, a partir de la fecha de emisión del contrato.

Así, se tiene los siguientes datos

S 7.67	T 1	δ $\frac{1}{3}$	r 0.0449	σ 0.67816962
K 9.507	u 1.479259	d 0.676014	p 0.4221192	q 0.5778808

Tabla 4.5: Parámetros para calcular el modelo binomial para $n = 3$.

Como se ha dividido el tiempo de vida de la opción en tres intervalos de cuatro meses, el árbol binomial para este ejemplo se observa en el cuadro 4.5.



Cuadro 4.5: Comportamiento del precio de las acciones para $n=3$, CEMEX

Usando la ecuación (2.7) se tiene que $c_t = 1.694814$ unidades.

Como ya se mencionó, en el caso de una opción americana que no paga dividendos el resultado es el mismo que para el caso de opciones europeas

(véase [4]).

Calculando c_t para distintos valores de n obtenemos la siguiente tabla (tabla 4.6)

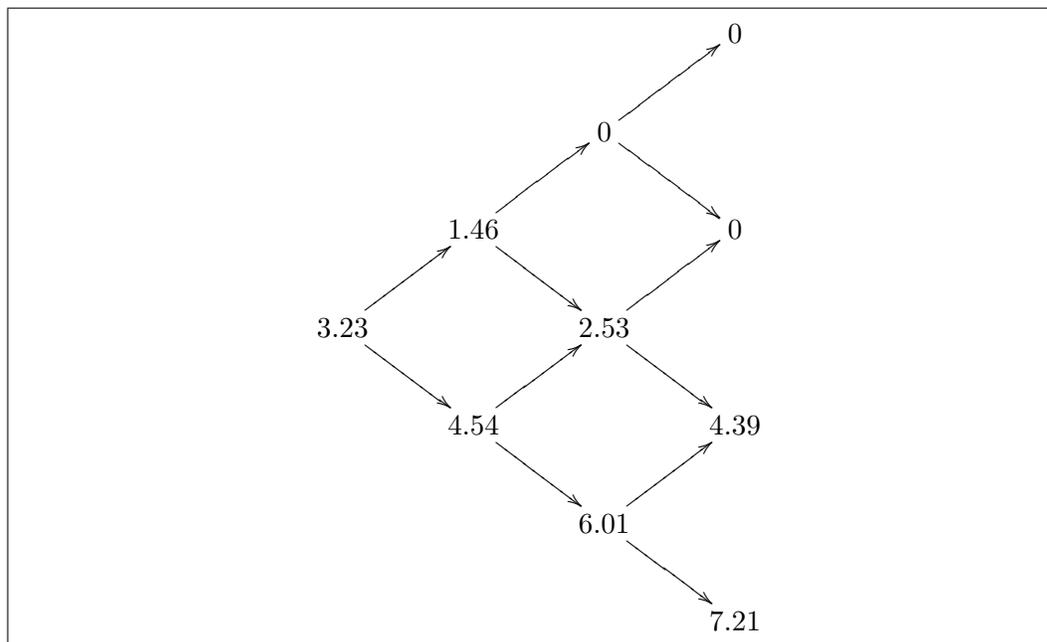
n	10	20	50	100	300	500
c_t	1.69	1.66	1.64	1.65	1.65	1.65

Tabla 4.6: Valuación de una opción americana de venta para distintos valores de n

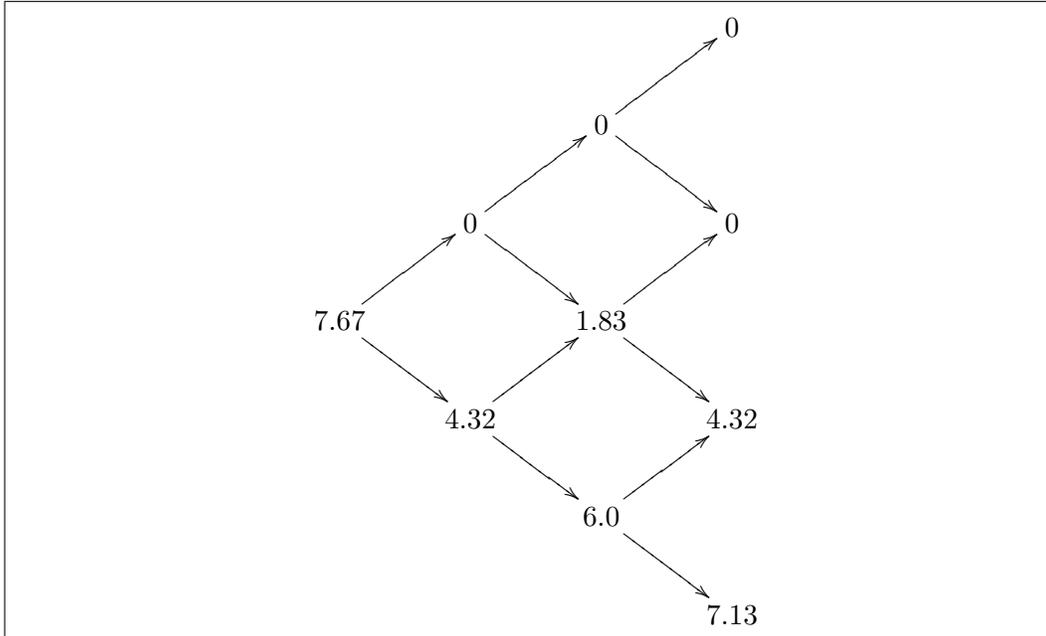
Ejemplo 4.2.2 Valuación de una opción Americana de tipo *put* aplicando el modelo Binomial.

Usando las mismas condiciones del Ejemplo 4.2.1, se emplea el modelo Binomial para la empresa Cemex, S.A.B. de C.V. (CEMEXCPO.MX).

El comportamiento de la opción está dado en el cuadro 4.6.



Cuadro 4.6: Comportamiento de una opción de venta para $n=3$.

Cuadro 4.7: Árbol binomial para el valor de \hat{S} , CEMEX

El valor de $\hat{S} = K - S_{u^i d^{j-i}}$ en cada nodo se da en el cuadro 4.7.

Comparando el valor en cada nodo de los dos árboles binomiales se toma la decisión de ejercer hasta el vencimiento de la opción (en el nodo $(0,0)$) pues $3.23 < 7.67$.

4.3. Genomma Lab

Ejemplo 4.3.1 Valuación de una opción Americana de venta aplicando el modelo Binomial.

A continuación se da un ejemplo de valuación de una opción de venta americana que no paga dividendos de la empresa Genomma Lab Interna-

cional, S.A.B. de C.V. (LAABB.MX).

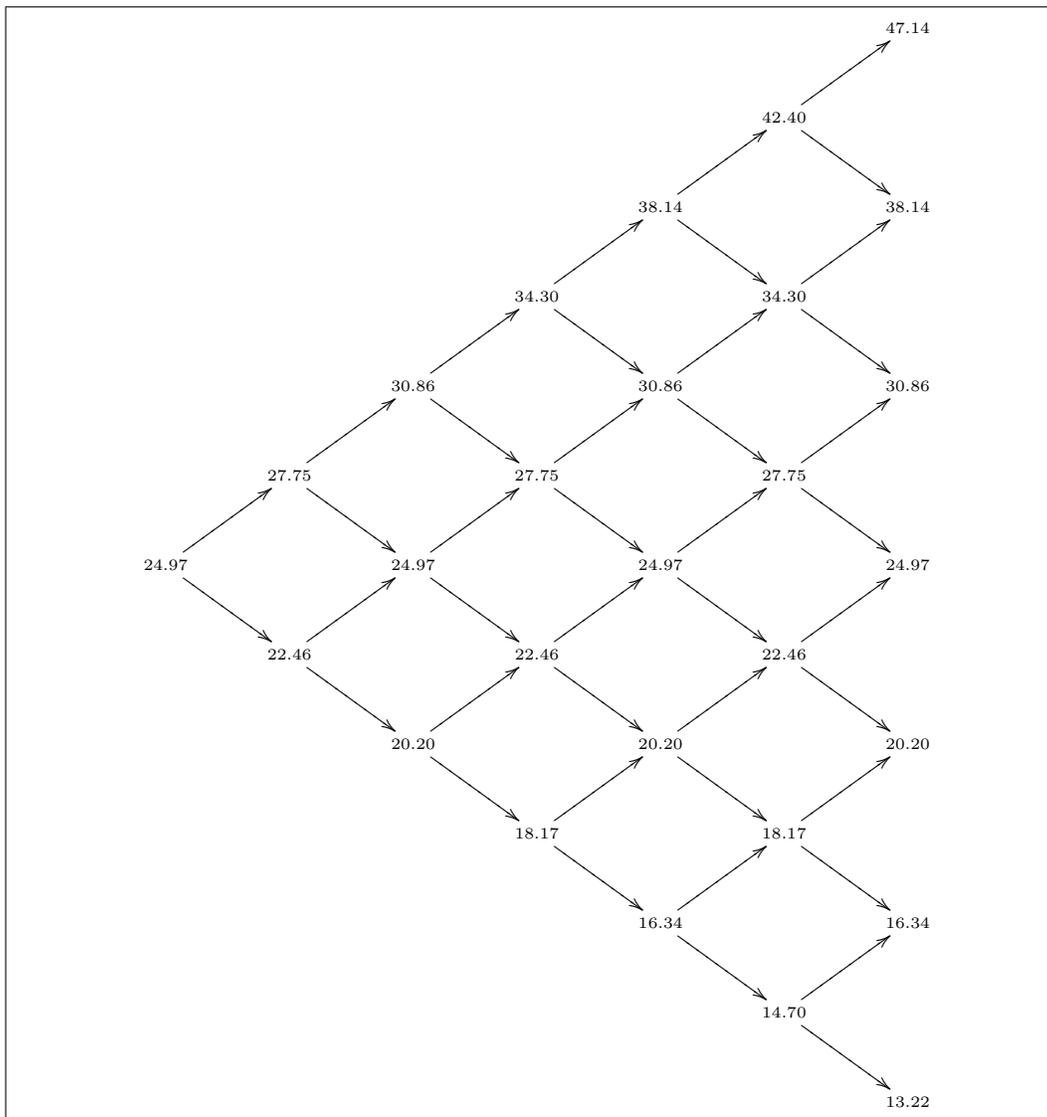
La opción es emitida el 28 de Mayo de 2012, el precio de cierre fue de 24.97 unidades, son observados los precios históricos diarios (5 días a la semana) a 180 días a partir de la fecha de emisión del contrato.

Supongamos que la vigencia de la opción es de seis meses, entonces $T = \frac{1}{2}$ y se dividirá en seis etapas (cada etapa con duración de un mes), la tasa de interés libre de riesgo es de 4.51 %. Los datos para este caso se muestran a continuación

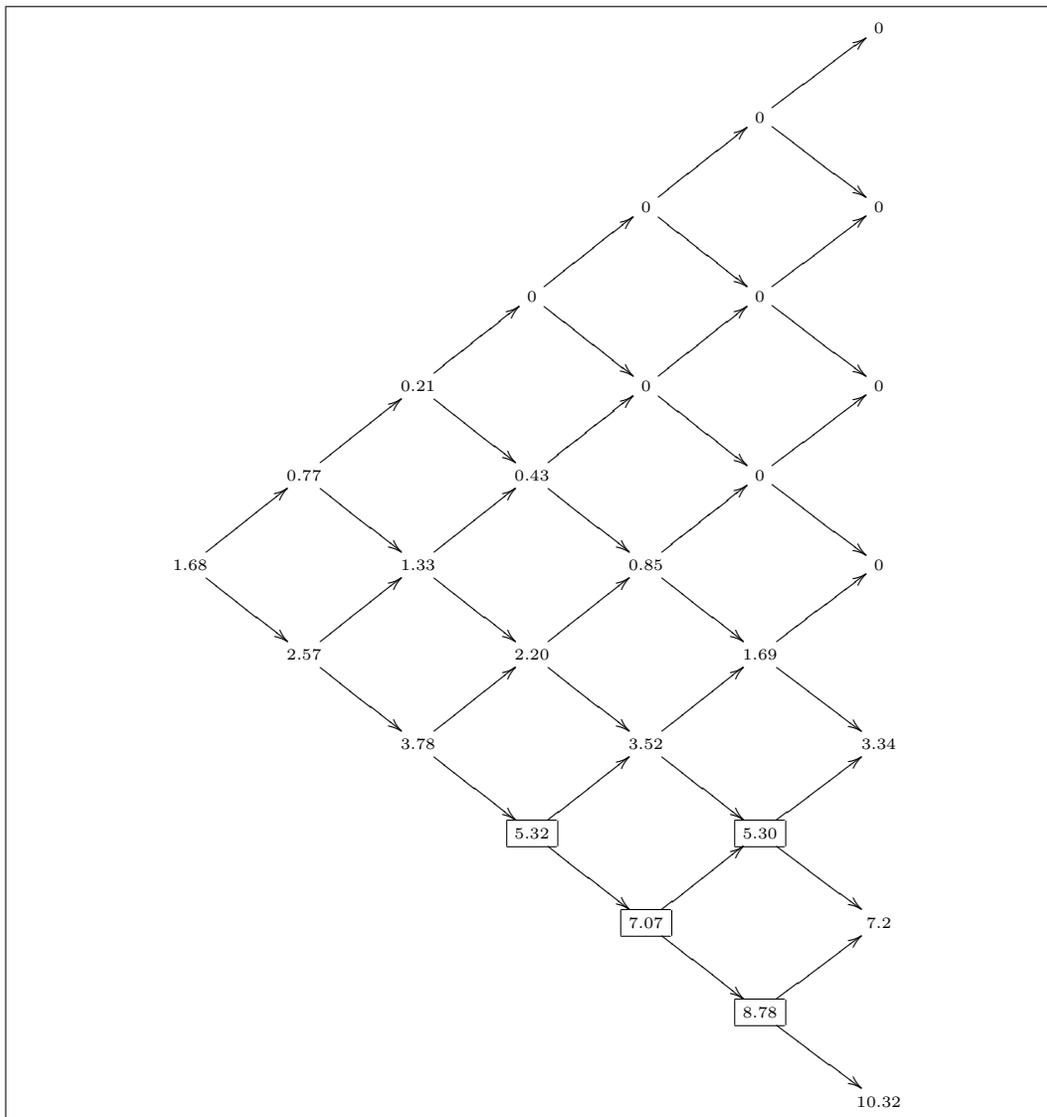
S 24.7	T $\frac{1}{6}$	δ $\frac{1}{12}$	r 0.0451	σ 0.36688339
K 23.544	u 1.111722	d 0.8995055	p 0.4912904	q 0.5087094

Tabla 4.7: Datos obtenidos para $n = 6$ para valuar una opción de tipo *put*

En el cuadro 4.8 se muestra el comportamiento de las acciones, en el cuadro 4.9 se presenta el comportamiento de las opciones de venta, los nodos encerrados son los posibles momentos de ejercer, en el que se observa que es necesario que el precio del bien subyacente este a la baja.



Cuadro 4.8: Comportamiento de una opción de venta para $n = 6$



Cuadro 4.9: Árbol binomial para el valor de \hat{S} , Genomma Lab

Una herramienta que puede ser de utilidad para tomar la decisión de comprar o no una acción (o acciones), después de la adquisición de una opción, es la implementación del modelo ARIMA, pues, con éste es posible realizar una predicción en el precio de las acciones y así conocer una aproximación del comportamiento de éstas.

A continuación, en el Capítulo 5 se desarrolla el modelo ARMA que es un caso particular del modelo ARIMA, en el Capítulo 6 se presenta el modelo ARIMA y, finalmente en el Capítulo 7 se dan tres ejemplos de este modelo.

Capítulo 5

Modelo ARMA

5.1. Series de Tiempo

Una serie de tiempo es el resultado de observar los valores de una variable a lo largo de un periodo de tiempo en intervalos regulares, ya sean días, meses, años, etc. Una serie de tiempo generalmente es un proceso estocástico $\{Z_t : t \in [0, \infty)\}$, donde t representa el tiempo, el proceso se denotará por $\{Z_t\}$, y z_t como sus realizaciones.

Cuando una serie oscila alrededor de un nivel constante se dice que la serie es estable o *estacionaria*; en cambio si la serie no se mantiene en un nivel constante entonces la serie es *no estacionaria*; generalmente la clasificación de una serie como estacionaria o no depende del periodo de observación.

Cuando una serie presenta un comportamiento que se repite a lo largo del tiempo (de manera periódica) entonces se dice que la serie es *estacional*.

Las series de tiempo normalmente tienen una dependencia entre sus valores presentes y sus valores pasados; para medir esta dependencia se emplea las funciones de *autocovarianza* y *autocorrelación* que generalizan la idea de covarianza y correlación entre dos variables.

Se dirá que un proceso (o serie) $\{Z_t\}$ es estable en media si no presenta tendencia en su esperanza $E[Z_t] = \mu_t$; el proceso es estable si su varianza $Var(Z_t) = \sigma_t$ se mantiene constante en el tiempo.

La dependencia lineal entre variables aleatorias del proceso se observa por medio de las funciones de covarianza y correlación; la función de *auto-covarianza* describe las covarianzas entre dos variables del proceso en dos instantes de tiempo, esta se define como

$$\gamma(t, t+j) = \text{Cov}(Z_t, Z_{t+j}) = E[(Z_t - \mu_t)(Z_{t+j} - \mu_{t+j})], \quad t, j \in [0, \infty). \quad (5.1)$$

La función de *autocorrelación* entre las variables Z_t, Z_{t+j} está dada por (véase [14])

$$\rho(t, t+j) = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t+j})}{\sigma_t \sigma_{t+j}} = \frac{\gamma(t, t+j)}{\sqrt{\gamma(t, t)\gamma(t+j, t+j)}}.$$

Definición 5.1.1 *Un proceso estocástico (serie de tiempo) es estacionario en sentido estricto si:*

1. *Las distribuciones marginales de todas las variables son idénticas.*
2. *Las distribuciones finito-dimensionales de cualquier conjunto de variables sólo depende de los retardos entre ellas.*

En otras palabras, la primera condición de la definición se refiere a que la esperanza y la varianza de todas las variables son las mismas (así como los coeficientes de asimetría y curtosis), con la segunda condición se pide que la dependencia entre las variables sólo dependa de sus retardos, es decir, existe la misma dependencia entre las variables Z_t, Z_{t+j} que entre las variables Z_{t+k}, Z_{t+j+k} con $j, k \in \mathbb{N}$, donde Z_t es el retardo de Z_{t+j} en j observaciones.

Definición 5.1.2 *Un proceso estocástico es estacionario en sentido débil si para todo t*

1. $\mu_t = \mu$.
2. $\sigma_t^2 = \sigma^2$.
3. $\gamma(t, t-k) = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Las dos primeras condiciones establecen que la media y la varianza son constantes, la tercera condición plantea que la covarianza entre las dos variables depende sólo de su separación (véase [14]).

En un proceso estacionario las autocovarianzas y las autocorrelaciones sólo dependen del retardo entre sus observaciones, es decir,

$$\text{Cov}(z_t, z_{t+k}) = \text{Cov}(z_{t+j}, z_{t+j+k}) = \gamma_k. \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(z_t, z_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(z_t)\text{var}(z_{t-k})}}. \quad (5.2)$$

Definición 5.1.3 *Un proceso de ruido blanco es un proceso estocástico Z_t que cumple con*

- $E[Z_t]=0, \quad t = 0, 1, 2, \dots$
- $\text{Var}(Z_t)=\sigma^2$ constante, $t = 0, 1, 2, \dots$
- $\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k})=0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Un proceso de ruido blanco es un proceso estacionario, la esperanza del proceso siempre es cero por lo tanto, no depende de t , la varianza del proceso es σ^2 constante así que, la varianza tampoco depende del tiempo, la tercera condición implica que las variables del proceso están no correlacionadas para todos los retardos (véase [11]).

Una serie de tiempo puede ser representada por medio de procesos autorregresivos (AR), de medias móviles (MA), o de la combinación de ambos (ARMA).

5.2. Procesos Autorregresivos

Los modelos más simples de procesos estacionarios utilizados para representar la dependencia de los valores de una serie de tiempo de su pasado son los modelos autorregresivos, que generalizan la idea de regresión lineal entre dos variables aleatorias.

En esta sección se muestran las propiedades que tiene un proceso autorregresivo de orden uno, después estas se generalizan para un AR de orden p .

5.2.1. AR(1)

Una serie $\{Z_t\}$ sigue un proceso autorregresivo de primer orden (AR(1)) si está dado por

$$z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t. \quad (5.3)$$

Donde c y ϕ son constantes y $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 , a_t también son conocidas como innovaciones; la condición necesaria para que el proceso sea estacionario es que $-1 < \phi < 1$.

Éste, es un proceso de Markov pues el valor presente de la serie sólo depende del último valor observado; esta dependencia lineal puede generalizarse, es decir, puede ocurrir que el valor actual de la serie no solo dependa de z_t sino también de los p retardos anteriores, que se verá en la sección 5.2.2, (véase [14]).

Una herramienta utilizada para la representación de series de tiempo es el *operador de retardo* (véase Apéndice B), la ecuación (5.3) se reescribe en términos de éste como

$$(1 - \phi B)\tilde{z}_t = a_t,$$

donde $\tilde{z}_t = z_t - \mu$.

Un supuesto en los procesos AR es la estacionariedad, para que el proceso $\{Z_t\}$ sea estacionario, la raíz de su *ecuación característica* debe encontrarse fuera del círculo unitario.

$$1 - \phi B = 0. \quad (5.4)$$

Supongamos que $z_0 = h$, (con $h \in \mathbb{R}$) entonces

$$\begin{aligned} z_1 &= c + \phi h + a_1, \\ &\vdots \\ z_t &= c \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i + \phi^t h + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i a_{t-i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la esperanza de z_t es

$$E[z_t] = c \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i + \phi^t h, \quad t < 0. \quad (5.5)$$

Si $-1 < \phi < 1$ y haciendo $t \rightarrow \infty$ entonces (5.5) no depende de t y por lo tanto, se tiene la estacionariedad y

$$E[z_t] = \mu = \frac{c}{1 - \phi}. \quad (5.6)$$

Sustituyendo $c = \mu(1 - \phi)$ en (5.3) se reescribe como

$$\begin{aligned} z_t &= \mu(1 - \phi) + \phi z_{t-1} + a_t \\ z_t &= \mu - \mu\phi + \phi z_{t-1} + a_t, \\ z_t - \mu &= \phi(z_{t-1} - \mu) + a_t. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Elevando al cuadrado y tomando esperanza en (5.7) se obtiene la varianza σ_z^2 del proceso

$$\begin{aligned} E[(z_t - \mu)^2] &= E[(\phi(z_{t-1} - \mu) + a_t)^2] \\ \text{var}(z_t) &= \phi^2 E[(z_{t-1} - \mu)^2] + \underbrace{2\phi E[(z_{t-1} - \mu)a_t]}_0 + \underbrace{E[a_t^2]}_{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Así, (5.8) se reescribe como

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \phi^2 \sigma_z^2 + \sigma^2, \\ \sigma_z^2 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Según las ecuaciones (5.1) y (5.7) y tomando en cuenta que el proceso es estacionario, la función de autocovarianzas de k periodos consecutivos está dada por

$$\gamma_k = E[(z_{t-k} - \mu)(z_t - \mu)] = E[(z_{t-k} - \mu)(\phi(z_{t-1} - \mu) + a_t)],$$

como $E[(z_{t-k} - \mu)a_t] = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi E[(z_{t-k} - \mu)(z_{t-1} - \mu)], \\ \gamma_k &= \phi \gamma_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para obtener la función de autocorrelación también llamada función de autocorrelación simple (*fas*) observemos que, como $\gamma_0 = \sigma_z^2$ y por (5.2) se tiene

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \quad (5.11)$$

De (5.10)

$$\rho_k = \phi^k.$$

Si $k \rightarrow \infty$ entonces $\rho_k \rightarrow 0$ por lo tanto, la función de autocorrelación simple de un proceso AR(1) decrece geoméricamente hasta llegar a cero.

Si $\phi > 0$ el valor del proceso en el instante t es parecido al del instante $t - 1$ (dependencia positiva); si $\phi < 0$ el valor de t generalmente es de signo opuesto al de $t - 1$ (véase[14]).

5.2.2. AR(p)

Una serie de tiempo $\{Z_t\}$ estacionaria sigue un proceso autorregresivo de orden p si z_t se puede expresar en términos de sus retardos hasta z_{t-p} y una innovación a_t , es decir

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t. \quad (5.12)$$

En términos del operador de retardo (5.12) se reescribe como

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) z_t = a_t.$$

Se define a $\phi_p(B)$ como el *polinomio autorregresivo*

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p,$$

La ecuación

$$\phi_p(B) = 0, \quad (5.13)$$

es conocida como la *ecuación característica del proceso*, esta ecuación tiene p raíces (generalmente distintas) $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \dots, G_p^{-1}$, entonces (5.13) se reescribe como

$$\phi_p(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B).$$

En el Teorema B.2.1 del Apéndice B se demuestra que el proceso es estacionario si y sólo si $|G_i| < 1$ para todo i .

Para calcular la esperanza del proceso se deben tomar en cuenta dos observaciones: $E[a_t] = 0$ pues es un proceso de ruido blanco y la segunda es que ya que es un proceso estacionario, la esperanza no depende del tiempo, es decir, $E[z_{t-1}] = E[z_{t-2}] = \dots = E[z_{t-p}]$, por lo tanto

$$E[z_t] = E[\phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t].$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} E[a_t] &= (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)E[z_t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso del proceso

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t.$$

En este caso la esperanza está dada por

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)E[z_t] &= c \\ E[z_t] &= \frac{c}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}. \end{aligned}$$

Para calcular la función de *autocorrelación simple* se multiplica (5.12) por \tilde{z}_{t-k} , tomando esperanzas y dividiendo por γ_0 se obtiene

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad .$$

Determinar el orden de un proceso autorregresivo a partir de su función de autocorrelación simple no es fácil, así que se emplea la función de autocorrelación parcial (*fap*).

Definición 5.2.1 *Se define el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k , ρ_k^p , como el coeficiente de correlación entre observaciones separadas k periodos cuando se elimina la relación entre las dos variables.*

Definimos $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, para calcular ρ_k^p se debe eliminar el efecto de $\tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$ sobre \tilde{z}_t por medio de la siguiente regresión

$$\tilde{z}_t = \beta_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \beta_{k-1} \tilde{z}_{t-k+1} + u_t,$$

u_t reúne la parte de \tilde{z}_t no común con $\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$; después se debe eliminar el efecto de $\tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$ sobre \tilde{z}_t por medio de la regresión

$$\tilde{z}_{t-k} = \gamma_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \gamma_{k-1} \tilde{z}_{t-k+1} + v_t,$$

donde v_t contiene la parte de \tilde{z}_{t-k} no común con las observaciones intermedias.

Se calcula el coeficiente de correlación simple entre u_t y v_t que por definición es el coeficiente de autocorrelación parcial. Los pasos seguidos equivalen a ajustar a la regresión múltiple

$$\tilde{z}_t = \alpha_{k1} \tilde{z}_{t-1} + \dots + \alpha_{kk} \tilde{z}_{t-k} + \eta_t,$$

y entonces

$$\rho_k^p = \alpha_{kk} \quad .$$

Es decir, el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k es el coeficiente α_{kk} de la variable \tilde{z}_{t-k} al ajustar los datos de la serie a un $AR(k)$.

Se llamará función de autocorrelación parcial a la representación de los coeficientes de autocorrelación parcial en función del retardo

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= \alpha_{11} \tilde{z}_{t-1} + \eta_{1t} \\ \tilde{z}_t &= \alpha_{21} \tilde{z}_{t-1} + \alpha_{22} \tilde{z}_{t-2} + \eta_{2t} \\ &\vdots \\ \tilde{z}_t &= \alpha_{k1} \tilde{z}_{t-1} + \dots + \alpha_{kk} \tilde{z}_{t-k} + \eta_{kt}, \end{aligned}$$

los coeficientes α_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ proporcionan la función de autocorrelación parcial.

Con lo que se concluye que en un $AR(p)$ los p primeros coeficientes serán distintos de cero y por lo tanto, en la *fap* estos coeficientes indican el orden del proceso.

Los procesos $AR(p)$ pueden ser representados como suma de innovaciones, esta representación también es llamada forma $MA(\infty)$, se obtiene invirtiendo el operador $AR(p)$ como

$$\psi(B) = \phi(B)^{-1},$$

se cumple

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1.$$

Se debe verificar que

$$\psi_k = \phi_1 \psi_{k-1} + \dots + \phi_p \psi_{k-p}.$$

5.3. Procesos de Medias Móviles

Los procesos de medias móviles (MA) tienen la propiedad de representar series de tiempo de memoria corta, estos procesos son función de un número finito (generalmente pequeño) de innovaciones pasadas.

5.3.1. MA(1)

Los procesos de medias móviles de orden uno, son los modelos mas simples, donde el valor actual de la serie sólo esta correlacionado con el valor anterior (véase [14]), es decir, la perturbación a_t aparece en el sistema en el momento t e influye en z_t y en z_{t+1} únicamente, por lo que su memoria es de un solo periodo (véase [10]).

El proceso de media móvil de orden uno está dado por

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta a_{t-1}, \quad (5.14)$$

donde $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, μ es la esperanza del proceso y a_t un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 . Este proceso es estacionario pues es la suma de dos procesos estacionarios a_t y $-\theta a_{t-1}$.

Uno de los supuestos del proceso es que $-1 < \theta < 1$, y que la innovación en el instante $t - 1$ tenga menos peso que en el instante t . Los procesos MA tienen la propiedad que los valores pasados decrecen con el tiempo; según el modelo $\tilde{z}_{t-1} = a_{t-1} - \theta a_{t-2}$ despejando a_{t-1} y sustituyendo en (5.14)

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= a_t - \theta(\tilde{z}_{t-1} + \theta a_{t-2}) \\ &= a_t - \theta \tilde{z}_{t-1} + \theta^2 a_{t-2} \quad . \end{aligned}$$

Repetiendo este proceso t veces se tiene

$$\tilde{z}_t = a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \theta^i \tilde{z}_{t-1} + \theta^t a_0 \quad .$$

Con esto se puede observar que si $|\theta| < 1$ entonces \tilde{z}_{t-k} tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que (5.14) se puede reescribir como

$$\tilde{z}_t = a_t - \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \tilde{z}_{t-1} \quad .$$

Para calcular la esperanza del proceso

$$E[\tilde{z}_t] = E[a_t - \theta a_{t-1}] = 0.$$

Por lo tanto, MA(1) es estacionario en media para todo θ (con $-1 < \theta < 1$). La varianza del proceso se calcula elevando al cuadrado (5.14) y tomando esperanzas de ambos lados, denotando σ_z^2 a la varianza del proceso

$$\begin{aligned} E[\tilde{z}_t^2] &= E[a_t^2] - 2\theta E[a_t a_{t-1}] + \theta^2 E[a_{t-1}^2] \\ \text{var}(\tilde{z}_t) &= \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 \\ \sigma_z^2 &= \sigma^2(1 + \theta^2). \end{aligned}$$

Así la varianza del modelo MA(1) es constante y finita para cualquier valor de θ por lo que el proceso es estacionario en varianza. Para calcular la función de autocovarianzas del modelo se multiplica la ecuación (5.14) por z_{t-i} (con $i = 1, 2, \dots$) y se aplican esperanzas, tomando $i = 1$ se obtiene la autocovarianza de primer orden

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E[\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}] \\ &= E[(a_t - \theta a_{t-1}) \tilde{z}_{t-1}] \\ &= E[a_t \tilde{z}_{t-1}] - \theta E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-1}], \end{aligned} \tag{5.15}$$

como \tilde{z}_{t-1} no depende de las innovaciones futuras entonces el primer término de (5.15) es cero y

$$\begin{aligned} -\theta E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-1}] &= -\theta E[a_{t-1}^2] + \theta^2 E[a_{t-1} a_{t-2}] \\ \gamma_1 &= -\theta \sigma^2. \end{aligned}$$

Para calcular la autocovarianza de orden dos ($i = 2$)

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E[\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-2}] \\ &= E[(a_t - \theta a_{t-1}) \tilde{z}_{t-2}] \\ &= E[a_t \tilde{z}_{t-2}] - \theta E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-2}] \\ &= 0,\end{aligned}$$

lo mismo ocurre para $i > 2$ por lo tanto, la función de autocovarianzas para el proceso MA(1) es

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & , \text{ si } k = 0, \\ -\theta\sigma^2 & , \text{ si } k = 1, \\ 0 & , \text{ si } k > 1. \end{cases}$$

La función de autocorrelación simple según (5.11) es

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , \text{ si } k = 0, \\ -\frac{\theta}{1+\theta^2} & , \text{ si } k = 1, \\ 0 & , \text{ si } k > 1. \end{cases}$$

Los modelos lineales deben cumplir dos condiciones más, deben ser modelos no *anticipantes* e *invertibles*; el modelo MA(1) es no anticipante porque el futuro no influye en el pasado, para que sea invertible debe cumplir que su representación autorregresiva converja, es decir, que se cumpla que la influencia de z_t disminuya conforme se aleja del pasado; para que se cumpla esta condición es necesario y suficiente que $|\theta| < 1$, por lo que el modelo MA(1) no siempre es invertible.

Bajo las condiciones de invertibilidad, cualquier modelo de medias móviles, se puede escribir en forma autorregresiva (véase [10]).

5.3.2. MA(q)

La generalización de un MA(1) es un proceso de medias móviles de orden q , MA(q), en este caso el proceso no sólo depende de la última innovación observada sino también de las últimas q innovaciones, el proceso se representa como

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}.$$

Un proceso de medias móviles siempre es estacionario pues es la suma de procesos estacionarios, ya que el modelo $MA(q)$ es generalización de $MA(1)$ entonces sus características serán similares, la esperanza, varianzas, covarianzas y autocorrelaciones no dependen de t .

Esperanza

$$E[\tilde{z}_t] = E[a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}] = 0. \quad (5.16)$$

La varianzas y autocovarianzas se obtienen multiplicando (5.16) por \tilde{z}_{t-k} para $k \geq 0$ y tomando esperanzas se tiene

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 & , \text{ si } k = 0, \\ (-\theta_k - \theta_1\theta_{k+1} - \cdots - \theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2 & , \text{ si } k = 1, \dots, q, \\ 0 & , \text{ si } k > q. \end{cases}$$

Dividiendo las autocovarianzas por γ_0 se tiene que la función de autocorrelación es

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta^2} \text{ si } k = 1, \dots, q \quad \cdot$$

$$\rho_k = 0, \quad \text{si } k > q \quad \cdot$$

Con la función de autocorrelación se puede observar que los procesos $MA(q)$ tienen memoria corta (de q periodos), esta función es empleada para determinar el orden del proceso; en la serie $\{Z_t\}$ con función de autocorrelación ρ_l si $\rho_q \neq 0$, pero $\rho_l = 0$ para $l > q$ entonces $\{Z_t\}$ sigue $MA(q)$ (véase [16]).

Para calcular la función de autocorrelación parcial $MA(q)$ se representa como un $AR(\infty)$ por medio de

$$\theta_q^{-1}(B)\tilde{z}_t = a_t,$$

denotando $\theta_q^{-1}(B) = \pi(B)$

$$\pi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i,$$

los coeficientes de $\pi(B)$ se obtienen con la condición $\pi(B)\theta_q(B) = 1$. Igualando las potencias de B a cero se obtiene que los coeficientes π_i cumplen con

$$\pi_k = \theta_1\pi_{k-1} + \dots + \theta_q\pi_{k-q}, \quad (\pi_0 = 1, \pi_j = 0 \text{ si } j < 0),$$

así que el proceso MA se puede reescribir en términos de AR(∞) como

$$\tilde{z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{z}_{t-i} + a_t \quad .$$

El modelo MA(q) es no anticipante porque el pasado no depende del futuro, también, el modelo es invertible si su representación autorregresiva es tal que la influencia de z_{t-k} es menor conforme se aleja del pasado; se dice que el modelo MA(q) es invertible si las raíces del operador $\theta_q(B) = 0$ son en módulo mayores que uno.

5.4. Modelo ARMA

Los procesos autorregresivos de medias móviles (ARMA), constan de dos partes, una parte autorregresiva de orden p que permiten muchos coeficientes distintos de cero pero, que decrecen geométricamente y otra parte de medias móviles de orden q , que permiten pocos coeficientes distintos de cero con valores arbitrarios, en otras palabras un proceso $\{Z_t\}$ estacionario se puede escribir en función de su pasado hasta el retardo p , y el pasado de la innovación hasta el retardo q . El modelo ARMA está definido como

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad .$$

El modelo más simple es ARMA(1,1).

5.4.1. ARMA(1,1)

El modelo ARMA(1,1) se representa como

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad (5.17)$$

donde a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 . En términos del operador de retardo el modelo está dado por

$$(1 - \phi_1 B)\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B)a_t, \quad (5.18)$$

ϕ_1 y θ_1 deben ser distintos pues si $\phi_1 = \theta_1$ multiplicando $(1 - \phi_1 B)^{-1}$ por ambos miembros de (5.18) se tendría que $\tilde{z}_t = a_t$ es un proceso de ruido blanco.

Para que el proceso sea estacionario es necesario que $|\phi_1| < 1$, esta condición es impuesta por la parte autorregresiva por el Teorema B.2.1 pues la parte MA siempre es estacionaria. Para que el proceso ARMA sea invertible se necesita que $|\theta_1| < 1$ condición impuesta por la parte de medias móviles en el Teorema B.2.2, la parte autorregresiva finita siempre es invertible pues está escrita en forma autorregresiva (véase [10]).

La esperanza del proceso ARMA(1,1) se calcula como

$$\begin{aligned} E[\tilde{z}_t] &= E[\phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}] \\ E[\tilde{z}_t] &= \phi_1 E[\tilde{z}_{t-1}], \end{aligned}$$

de la ecuación (5.6)

$$E[\tilde{z}_t] = 0. \quad \text{cuando } c = 0$$

Para obtener la varianza y la función de autocorrelación se multiplica \tilde{z}_{t-k} por (5.17) y se toma esperanza

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} + E[a_t \tilde{z}_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-k}]. \quad (5.19)$$

Si el proceso es representado como MA(∞), invirtiendo la parte autorregresiva, se observa que cuando $k > 1$, a_t no está correlacionado con la historia de la serie

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - \theta_1 B) a_t \\ &= a_t + (\phi_1 - \theta_1) a_{t-1} + \phi_1 (\phi_1 - \theta_1) a_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

Así que

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} \quad k > 1.$$

Para $k = 0$, primero se demostrará que $E[a_t \tilde{z}_t] = \sigma^2$

$$\begin{aligned} E[a_t \tilde{z}_t] &= E[a_t (\phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] \\ &= \phi_1 E[a_t \tilde{z}_{t-1}] + E[a_t^2] - \theta_1 E[a_t a_{t-1}] \\ &= E[a_t^2] \\ &= \sigma^2, \end{aligned}$$

análogamente

$$E[a_{t-1}\tilde{z}_t] = \sigma^2(\phi_1 - \theta_1),$$

sustituyendo estos dos resultados en (5.19) para $k = 0$

$$\gamma_0 = \phi\gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1\sigma^2(\phi_1 - \theta_1), \quad (5.20)$$

ahora, para $k = 1$ se obtiene

$$\gamma_1 = \phi\gamma_0 - \theta_1\sigma^2,$$

sustituyendo en (5.20)

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2},$$

por lo tanto, la función de autocovarianzas es

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)(1 - \phi_1^2)^{-1} & , \text{ si } k = 0, \\ \phi\gamma_0 - \theta_1\sigma^2 & , \text{ si } k = 1, \\ \phi_1\gamma_{k-1} & , \text{ si } k > 1. \end{cases}$$

Con lo que se observa que la varianza cuenta con una parte de medias móviles, otra autorregresiva y una que es la interacción entre ambas partes del modelo; la autocovarianza de orden uno es la suma de las autocovarianzas de orden uno de la parte AR y la parte MA.

La función de autocorrelación simple es

$$\rho_k = \begin{cases} \phi_1 - (\theta_1\sigma^2)\gamma_0^{-1} & \text{si } k = 1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

se observa que la función de autocorrelación simple de orden uno depende de los parámetros autorregresivos y de medias móviles, pero, a partir del orden dos decrece exponencialmente, este decrecimiento está determinado por el parámetro ϕ_1 .

Para calcular la función de autocorrelación parcial el modelo ARMA(1,1) se reescribe en la forma AR(∞) como

$$(1 - \theta_1 B)^{-1}(1 - \phi_1 B)\tilde{z}_t = a_t,$$

ya que $(1 - \theta_1 B)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i B^i$ se tiene que la *fap* está dada por

$$\tilde{z}_t = (\phi_1 - \theta_1)\tilde{z}_{t-1} + \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\tilde{z}_{t-2} + \theta_1^2(\phi_1 - \theta_1)\tilde{z}_{t-3} + \cdots + a_t.$$

Los resultados obtenidos para el modelo ARMA(1,1) se pueden generalizar para el caso de un modelo ARMA(p, q).

5.4.2. ARMA(p, q)

El modelo ARMA(p, q) puede ser representado como

$$z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}, \quad (5.21)$$

donde $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco, y $p, q \in \mathbb{N}$. En términos del operador de retardo el modelo está dado por

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)z_t = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q)a_t.$$

El proceso es estacionario si las raíces de $\phi_p(B)$ son mayores que uno en módulo; también, será invertible si las raíces de $\theta_1(B)$ están fuera del círculo unidad.

Supongamos que los procesos AR(p) y MA(q) no tienen coeficientes en común ($\phi_i \neq \theta_j$ para todo $i = 1, \dots, p$ y para todo $j = 1, \dots, q$), en caso de no cumplirse esta condición el orden del modelo se reduciría (véase [16]).

La esperanza del modelo ARMA(p, q) está dada sólo por la parte autorregresiva pues $E[a_t] = 0$ para todo t

$$E[z_t] = \frac{1}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}.$$

Las autocovarianzas se obtienen multiplicando (5.21) por z_{t-k} y se toman esperanzas

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{k-p} = E[a_t] - \theta_1 E[a_{t-1} z_{t-k}] - \cdots - \theta_q E[a_{t-q} z_{t-k}],$$

para $k > q$

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{k-p} = 0,$$

y dividiendo por γ_0

$$\rho_k - \phi_1\rho_{k-1} - \cdots - \phi_p\rho_{k-p} = 0.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la función de autocorrelación para $k > q$ tendrán un decrecimiento determinado por la parte autorregresiva.

Capítulo 6

Modelo ARIMA

Como ya se ha mencionado el modelo ARMA consiste de dos partes una parte autorregresiva (AR) de orden p y una parte de medias móviles (MA) de orden q , cuando el modelo no es estacionario se deben hacer transformaciones para volver al proceso estacionario, así el modelo ARMA se convierte en el modelo ARIMA (procesos autorregresivos integrados de medias móviles) donde la letra “I” indica el número de diferencias que se deben realizar para que el proceso se vuelva estacionario, este modelo está dado por

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

El modelo ARIMA es una herramienta de predicción desarrollado por Box y Jenkins en 1976, este modelo también es referido como $ARIMA(p, d, q)$ donde p representa el orden del proceso AR, q es el orden del proceso MA y d es el número de raíces unitarias del proceso (orden de integración) (véase [2]).

La construcción de modelos ARIMA se lleva a cabo de forma iterativa mediante los siguientes pasos

1. Identificación
 - estacionariedad
 - determinación de los órdenes p, d, q
2. Estimación
 - estimación de parámetros

- selección del modelo
3. Validación (verificación de los parámetros)
 4. Predicción (uso del modelo)

6.1. Identificación

La primera etapa consiste en identificar el posible modelo ARIMA que sigue la serie, primero se debe determinar si la serie es estacionaria o no, en caso de no serlo se debe diferenciar, en esta etapa también se estiman los órdenes de p, d, q y se identifican los posibles modelos para la serie.

La modelación ARIMA se fundamenta en el supuesto de que el proceso estocástico es estacionario (en sentido débil o estricto) por lo tanto, se debe comprobar la estacionariedad del proceso (véase [13]). En caso de que el proceso $\{Z_t\}$ no sea estacionario se debe determinar el orden de integración.

Definición 6.1.1 *Un proceso $\{Z_t\}$ es integrado de orden d ($Z_t \sim I(d)$) si Z_t no es estacionario pero su diferencia de orden d , $\nabla^d z_t$ sigue un proceso ARMA($p - d, q$) estacionario e invertible (véase [10]).*

En otras palabras la definición expresa que, una vez que el orden de integración se ha determinado, el modelo ARIMA se puede interpretar como un modelo ARMA para la transformación estacionaria $\nabla^d z_t$ con lo que se obtiene una nueva serie $\{Y_t\}$.

$$Y_t = \nabla^d z_t.$$

Esta transformación es una función tal que se preserve el orden de los elementos de la serie, pero disminuye la dispersión de ésta.

6.1.1. Estacionariedad en Media

Si la serie tiene tendencia o presenta cambios de nivel en la media, es necesario diferenciar para que la serie se vuelva estacionaria, la decisión de diferenciar puede estar basada en la observación de la gráfica de la serie, con

un correlograma, o por medio de un test de raíces unitarias.

Cuando la decisión de diferenciar no es clara por medio de la gráfica entonces es necesario observar la *fas*, si una serie tiene autocorrelaciones positivas con decrecimiento lento, entonces no es estacionaria (véase [14]).

Si la serie no es estacionaria en media se toman d diferencias sucesivas (de orden uno) hasta obtener una serie estacionaria.

$$\begin{aligned}(1 - B)z_t &= \nabla \ln z_t \\ &= \ln \left(\frac{z_t}{z_{t-1}} \right).\end{aligned}$$

En las series económicas generalmente es necesario diferenciar solo una vez, para tener mayor seguridad del número de diferencias necesarias se debe realizar un contraste de raíces unitarias en el que si se rechaza la hipótesis nula de que $\nabla^d z_t$ tiene una raíz unitaria, entonces no se debe seguir diferenciando, uno de los contrastes más utilizados es el de **Dickey-Fuller aumentado**, que es una generalización del test de Dickey-Fuller (véase [7]).

6.1.2. Estacionariedad en Varianza

Una serie es estacionaria en varianza si existe una única varianza para toda la serie de tiempo, si la serie no es estacionaria en varianza se utilizan las transformaciones de *Box-Cox*

$$y_t^\lambda = \begin{cases} (z_t^\lambda - 1)(\lambda)^{-1} & , \text{ si } \lambda \neq 0, \\ \ln(z_t) & , \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$$

En el caso de series económicas generalmente se tienen valores mayores que cero, por tanto, la transformación más utilizada es la logarítmica.

6.1.3. Test de Dickey-Fuller Aumentado

Test de Dickey-Fuller: El Test de Dickey-Fuller es el contraste de raíces unitarias para el modelo autorregresivo más simple AR(1), en este, se parte de la suposición de que se tienen T observaciones de una serie de tiempo $\{Z_t\}$, restando z_{t-1} en ambos lados de la ecuación (5.3) se tiene

$$\begin{aligned}z_t - z_{t-1} &= c + \phi z_{t-1} - z_{t-1} + a_t, \\ \nabla z_t &= c + \beta z_{t-1} + a_t \quad ,\end{aligned}\tag{6.1}$$

el modelo (6.1) es conocido como *modelo de corrección de error* donde factorizando z_{t-1} se tiene que $\beta = \phi - 1$, en este caso el juego de hipótesis será

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &: \beta = 0 \\ &\text{vs} \\ \mathbf{H}_a &: \beta < 0 \end{aligned}$$

Es decir, que si $\beta = 0$ entonces la serie tendrá una raíz unitaria que implica que la serie no es estacionaria, por el contrario, si $\beta < 0$ entonces la serie no tiene raíces unitarias y por lo tanto, la serie es estacionaria.

El estadístico de la prueba es

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\hat{s}_\beta}, \quad (6.2)$$

donde $\hat{\beta}$ es estimador de mínimos cuadrados de β y \hat{s}_β es el estimador de su varianza.

Este estadístico es llamado *estadístico de Dickey-Fuller*, este no sigue ninguna distribución conocida así, que Dickey y Fuller calcularon sus percentiles bajo \mathbf{H}_0 , proporcionando las tablas con los niveles críticos correctos para el estadístico en función del tamaño de la muestra T y el nivel de significancia α .

Se rechaza \mathbf{H}_0 : a un nivel de significancia α si el valor del estadístico t es menor que el valor crítico de las tablas de Dickey-Fuller (DF_α).

$$t < DF_\alpha.$$

La generalización del test de Dickey-Fuller es el test de Dickey-Fuller aumentado.

Test de Dickey-Fuller aumentado: El test de Dickey-Fuller aumentado es empleado cuando se tiene un modelo ARMA ya que en este caso se tienen AR(p+1), esta prueba intenta contrastar la condición de una raíz unitaria del operador $\phi_{p+1}(B)$, así que el modelo (5.12) se reescribe como

$$\nabla z_t = \beta z_{t-1} + \alpha_1 \nabla z_{t-1} + \cdots + \alpha_{p-1} \nabla z_{t-p+1} + a_t,$$

donde

$$\beta = \sum_{i=1}^p \phi_i - 1 \quad \text{y} \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^i \phi_{p-i+j} \quad .$$

Si en un proceso autorregresivo de orden p se cumple que $\sum_{i=0}^p \phi_i = 1$, entonces el proceso tiene una raíz unitaria, así que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 : \beta &= 0, \\ \text{vs} \\ \mathbf{H}_a : \beta &\neq 0. \end{aligned}$$

El estadístico de prueba es el mismo que en el caso de AR(1) y por tanto su distribución es la misma, se rechaza \mathbf{H}_0 : a un nivel de significancia α si el valor del estadístico t es menor que el valor crítico de las tablas de Dickey-Fuller (DF_α):

$$t < DF_\alpha.$$

6.1.4. Determinación del Orden de p y q

En la etapa de identificación como ya se mencionó también se debe determinar el orden de la parte autorregresiva y el orden de la parte de medias móviles para lo que se emplea *fas* y la *fap*. En el caso que la serie sea estacional también se deben determinar los órdenes de P y Q de la estructura ARMA estacional.

La Función de Autocorrelación Simple proporciona el grado de dependencia que muestran las observaciones respecto del conjunto de la serie de tiempo; esta función es simétrica y se encuentra entre -1 (correlación negativa) y 1 (Correlación positiva).

La función de Autocorrelación Parcial reúne los efectos de un rezago determinado sobre la variable explicada, corregido por los rezagos medios.

Una de las características de los procesos AR(p) es que su *fas* decrece geométricamente, mientras que en su *fap* las primeras p observaciones son diferentes a cero, y a partir de la observación $p + 1$ el valor de esta es cero. En el caso de un proceso MA(q), el comportamiento de estas funciones es

contrario: la función de autocorrelación simple decae a cero a partir de la observación $q + 1$, mientras que la representación de la *fap* presenta un decaimiento geométrico.

Es por este motivo que la identificación de un proceso AR(p) se logra utilizando la *fap*, mientras que para identificar un proceso MA(q) se requiere de la *fas* (véase [13]).

Los coeficientes de autocorrelación muestral de $\{Y_t\}$ están dados por

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T^*} (y_t - \bar{\mu})(y_{t-k} - \bar{\mu})}{\sum_{t=k+1}^{T^*} (y_t - \bar{\mu})^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde $T^* = T - d$ que es la longitud de la serie estacionaria $\{Y_t\}$.

Para identificar cuando un coeficiente $\hat{\rho}_k$ es distinto de cero se necesita conocer su error estándar, tomando $\frac{1}{\sqrt{T^*}}$ como el error que es aproximadamente el error de un coeficiente de correlación entre variables independientes, si todos los coeficientes de autocovarianzas fueran iguales a cero las desviaciones típicas serían aproximadas a $\frac{1}{\sqrt{T^*}}$ y así se pueden construir bandas de confianza $\pm \frac{2}{\sqrt{T^*}}$ y considerar como significativos los coeficientes fuera de dichas bandas.

En la etapa de identificación no necesariamente se debe de encontrar el modelo correcto, lo importante es poder identificar un conjunto de posibles modelos (sencillos) que en las siguientes etapas son analizados nuevamente.

6.2. Estimación

Una vez que se han elegido los posibles modelos, se deben estimar los coeficientes, se obtienen errores estándar y los residuos de estos, en esta etapa también se debe seleccionar el modelo que mejor describa los datos.

6.2.1. Estimación de Parámetros

Supongamos que se tiene una serie estacionaria $\{Y_t\}$ de tamaño T , se desean estimar los parámetros de un modelo ARMA, normalmente se utiliza

el método de máxima verosimilitud o el método de mínimos cuadrados.

Uno de los supuestos para la estimación es que no se dispone de información *a priori* sobre los valores de los parámetros del proceso, y que se dispone de una muestra grande.

Supongamos que se tiene un proceso ARMA del cual se desean estimar sus parámetros por máxima verosimilitud a partir de la función de densidad conjunta de las T observaciones $\{y_1, \dots, y_T\}$ y maximizarla respecto a los parámetros.

La densidad conjunta de (Y_1, \dots, Y_T) puede ser escrita como producto de una densidad univariada y una densidad condicional

$$f_{(Y_1, \dots, Y_T)}(y_1, \dots, y_T) = f_{(Y_1)}(y_1) f_{(Y_2, \dots, Y_T | Y_1)}(y_2, \dots, y_T | y_1). \quad (6.3)$$

para simplificar la notación se escribirá

$$f_{(Y_1, \dots, Y_T)}(y_1, \dots, y_T) = f(y_1, \dots, y_T)$$

siguiendo pasos análogos a (6.3) se tiene

$$f(y_1, \dots, y_T) = f(y_1) f(y_2 | y_1) f(y_3 | y_2, y_1) \dots f(y_T | y_{T-1}, \dots, y_2, y_1), \quad (6.4)$$

gracias a (6.4) se puede escribir la verosimilitud de un modelo ARIMA. El predictor que minimiza el error cuadrático medio de predicción (ECMP) es la esperanza condicionada a los valores observados (ver Apéndice C), bajo el supuesto de normalidad, tomando como esperanza de y_i ($i = 1, 2, \dots, T$) cero, todas las distribuciones condicionadas también serán normales.

Denotaremos a

$$\hat{y}_{t-1}(1) = y_{t|t-1} = E[y_t | y_{t-1}, \dots, y_1],$$

que es el predictor de y_t , este se obtiene gracias a las $t - 1$ observaciones anteriores, por lo tanto, el error de predicción será

$$e_t = y_t - y_{t|t-1}.$$

Estos errores están relacionados con las innovaciones, aunque no coinciden en todos los casos, a causa de los valores iniciales. Considérese una serie y_1, y_2, \dots, y_T con media cero que es generada por un AR(1), es decir

$$y_t = \phi y_{t-1} + a_t,$$

con ϕ conocido, entonces tomando esperanzas, se tiene que $w_{t|t-1} = \phi y_{t-1} = 0$, ($t = 2, \dots, T$, $E[y_t] = 0$), ahora, calculando los errores de predicción

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - y_{1|0} = y_1 - \phi E[w_0] = y_1 \\ e_2 &= y_2 - y_{2|1} = y_2 - \phi w_1 = a_2 \\ &\vdots \\ e_T &= y_T - \phi y_{T-1} = a_T, \end{aligned}$$

nótese que $e_1 \neq a_1$, por otro lado, la varianza de los errores de predicción e_t ($t = 2, \dots, T$) a un paso están dados por

$$\text{var}(e_i) = \text{var}(y_i - y_{i|i-1}) = \text{var}(a_i) = \sigma^2, \quad i = 2, \dots, T,$$

donde σ^2 es la varianza de las innovaciones; para el caso $i = 1$ la varianza se obtiene de la ecuación (5.9) pues $\text{var}(e_1) = \text{var}(y_1)$, y_1 es un proceso estacionario, por lo tanto

$$\text{var}(e_1) = \sigma^2(1 - \phi)^{-1}.$$

Ya que σ^2 es factor común en ambos casos entonces denotaremos por $\sigma^2 v_{t|t-1}$ a la varianza de y_t condicionadas a y_{t-1}, \dots, y_1 , por lo tanto, (6.4) es igual a

$$f(y_1, \dots, y_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma v_{t|t-1}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - y_{t|t-1})^2}{\sigma^2 v_{t|t-1}} \right\},$$

y su función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} L(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2) &= -\frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(v_{t|t-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{v_{t|t-1}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para la estimación condicionada de los modelos ARMA(p, q) se denota como r al máximo entre p y q , es decir, $r = \max(p, q)$ y $\beta = (\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)$. La función de máxima verosimilitud condicionada L_c es

$$L_c(\beta | a_0, y_1, \dots, y_p) = -\frac{T-r}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=r+1}^T a_t^2,$$

donde $a_t^2 = a_t^2(\beta|a_0, y_1, \dots, y_p)$, así, las innovaciones se calculan como

$$\hat{a}_t = y_t - c - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}, \quad t = r + 1, \dots, T.$$

La constante c está dada por $c = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ y se supone que los primeros r residuos son cero, por lo tanto, para calcular las innovaciones a partir de observaciones anteriores es necesario tener un conjunto de valores iniciales $y_1 \dots, y_{p-1}$ y $a_1 \dots, a_{q-1}$.

Una vez que los parámetros del modelo han sido estimados, se debe realizar una evaluación del modelo recién ajustado.

Como se puede obtener más de un modelo, es necesario decidir cual es el que mejor se ajusta a la serie para ello existen criterios, como el de Akaike.

6.2.2. Selección del Modelo, Criterio de Akaike (AIC)

Supongamos que se han estimado m modelos M_1, \dots, M_m de una serie de tiempo $\{Y_t\}$, se desea elegir el que mejor describa a la serie.

La función de verosimilitud de un modelo ARIMA está dada por (6.5), multiplicado por -2 y tomando esperanzas

$$E[-2L(\beta)] = T \log(\sigma^2) + \sum_{t=1}^T \log(v_{t|t-1}) + E \left[\sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{\sigma^2 v_{t|t-1}} \right],$$

bajo los supuestos de que los parámetros son estimados con los datos observados y de que la esperanza respecto de futuras observaciones es calculada, entonces

$$AIC = E[-2L(\beta)] = T \log \hat{\sigma}_{MV}^2 + 2k, \quad (6.6)$$

donde T es el número de observaciones utilizadas para estimar el modelo, $\hat{\sigma}_{MV}^2$ es el estimador de máxima verosimilitud de la varianza de las innovaciones y k es el número de parámetros estimados para calcular las predicciones.

Por lo tanto, seleccionar el modelo con verosimilitud esperada máxima equivale a utilizar el modelo que minimiza la verosimilitud con signo negativo que está dado por (6.6). Si se utiliza el criterio AIC para comparar

modelos ajustados a una serie, es importante que T sea el mismo para todos los modelos.

Para determinar cuál es el mejor modelo para la serie $\{Y_t\}$ es necesario comparar al valor de AIC de cada M_i , $i = 1, \dots, m$, se seleccionará el modelo con el menor AIC en valor absoluto (véase [18]).

6.3. Validación

Al construir un modelo ARIMA el objetivo es encontrar un modelo que sea lo más adecuado posible para representar el comportamiento de la serie estudiada. El mejor modelo es el que cumpla con lo siguiente:

1. Los coeficientes del modelo son estadísticamente significativos y no están correlacionados entre sí.
2. Los residuos del modelo estimado se aproximan al comportamiento de un ruido blanco.
3. El grado de ajuste es elevado en comparación al de otros modelos alternativos.
4. El modelo es estacionario e invertible.

Si el modelo no cumple con lo anterior entonces se debe modificar y se coteja con las características anteriores.

En primer lugar se deben realizar contrastes de significatividad de los coeficientes AR y MA, es decir, se debe comprobar si en el modelo se ha incluido algún coeficiente (o estructura) que no es relevante.

El juego de hipótesis para cada caso es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 : c = 0 & \quad \text{vs} \quad \mathbf{H}_a : c \neq 0 \\ \mathbf{H}_0 : \phi_i = 0 & \quad \text{vs} \quad \mathbf{H}_a : \phi_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \mathbf{H}_0 : \theta_j = 0 & \quad \text{vs} \quad \mathbf{H}_a : \theta_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Si $\beta = (c, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ generalmente la distribución asintótica de los estimadores $\hat{\beta}$ sigue una distribución normal con media $\hat{\beta}_i$ y varianza

$V(\hat{\beta}_i)$, por lo que para contrastar \mathbf{H}_0 de no significatividad individual de los parámetros se utiliza el estadístico t :

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{V(\hat{\beta}_i)}} \sim N(0, 1).$$

Se rechaza \mathbf{H}_0 a un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ si

$$\left| \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{V(\hat{\beta}_i)}} \right| > N_{\frac{\alpha}{2}}(0, 1) \simeq 2.$$

Ya que se ha verificado que todos los parámetros son significativos, se debe realizar un contraste en relación a los residuos estimados, si están correlacionados o no, para lo que se necesita calcular la *fas* por medio de

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (\hat{a}_t - \bar{a})(\hat{a}_{t+k} - \bar{a})}{\sum_{t=1}^{T-k} (\hat{a}_t - \bar{a})^2},$$

donde \bar{a} es la media de los T residuos; si los residuos no están correlacionados, los coeficientes \hat{r}_k (para k grande) serán aproximadamente variables aleatorias con media cero y varianza asintótica $\frac{1}{T}$, y distribución normal.

El procedimiento más común para verificar la no correlación de los residuos es dibujar dos líneas paralelas a distancia $\frac{2}{\sqrt{T}}$ del origen en sus funciones de su autocorrelación simple o parcial, se debe verificar que todos los coeficientes \hat{r}_k están dentro de estos límites de confianza, a esta representación se le denomina *correlograma de errores*.

Después de verificar la no correlación de los residuos se debe realizar un test de normalidad sobre estos, como la prueba de Jarque-Bera

Test de Jarque-Bera: La prueba de Jarque-Bera se emplea para decidir si una serie sigue una distribución normal, el estadístico de prueba es

$$JB = \frac{N}{6} \left[S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right],$$

S representa el sesgo de la serie, K la kurtosis, N es el número de observaciones (o grados de libertad), JB es el estadístico de prueba, se distribuye de acuerdo a una distribución χ^2 con dos grados de libertad.

\mathbf{H}_0 : La serie no sigue una distribución normal.

\mathbf{H}_a : La serie sigue una distribución normal.

Se rechaza \mathbf{H}_0 si $JB > \chi^2_{(2)} = 5.99$ con $\alpha = 0.05$.

Finalmente, se debe comprobar si las condiciones de estacionariedad e invertibilidad se satisfacen para el modelo propuesto, para ello, se calculan las raíces del polinomio autorregresivo $\hat{\phi}_p(B)$, así como las raíces del polinomio de medias móviles $\hat{\theta}_q(B)$, si alguna de estas raíces está próxima a la unidad podría indicar falta de estacionariedad y/o invertibilidad.

6.4. Predicción

La predicción es el objetivo del modelo ARIMA; mediante la función de predicción podemos elaborar estimaciones del comportamiento de la serie en el futuro; esta función se basa en la estructura de cada modelo que se ha elegido como el que mejor describe el comportamiento de los datos en el periodo que se está estudiando.

Después de haber obtenido los valores de predicción es necesario conocer cuál es la magnitud del error que se ha cometido, el cual es denominado error de predicción, que se define como la diferencia entre la realización de la serie y la predicción de la misma.

6.4.1. Cálculo de Predicciones

Supóngase que se tiene una serie $\{Z_t\}$ y se conoce una realización de tamaño T , z_1, \dots, z_T , de un proceso ARIMA(p, d, q) con parámetros conocidos

$$\phi_p(B) = \nabla^d z_t = c + \theta_q(B)a_t.$$

Ya que se conocen los parámetros del proceso entonces, también se pueden conocer las innovaciones $\{a_1, \dots, a_T\}$ por ejemplo, para el caso del modelo ARMA(1, 1) las innovaciones se calculan por medio de la ecuación recursiva

$$a_t = z_t - c - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1} \quad t = 2, \dots, T.$$

Si z_0 y a_0 no son conocidos entonces la innovación a_1 se substituye por su esperanza $E[a_1] = 0$.

En el Apéndice C se muestra que el predictor óptimo de z_{T+k} (con $k \in \mathbb{N}$) es $E[z_{T+k}|z_T, \dots, z_1]$ así que se denotará

$$\begin{aligned} \hat{z}_T(j) &= E[z_{T+j}|z_T, \dots, z_1], \quad j = 1, 2, \dots, \\ \hat{a}_T(j) &= E[a_{T+j}|z_T, \dots, z_1], \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

T es llamado origen de la predicción, j horizonte y las estimaciones de las innovaciones $\hat{a}_T(j)$ son llamadas *residuos*. También se define el operador $\phi_h(B)$ como

$$\phi_h(B) = \phi_p(B)\nabla^d,$$

donde $h = p + d$ que es el orden del proceso autorregresivo más el orden de integración.

Con esta notación se tiene que el predictor es

$$z_{T+k} = c + \varphi_1 z_{T+k-1} + \dots + \varphi_h z_{T+k-h} + a_{T+k} - \theta_1 a_{T+k-1} - \dots - \theta_q a_{T+k-q}. \quad (6.7)$$

Tomando esperanzas condicionadas a $\{z_T, \dots, z_1\}$ se tiene que

$$\hat{z}_T(k) = c + \varphi_1 \hat{z}_T(k-1) + \dots + \varphi_h \hat{z}_T(k-h) - \theta_1 \hat{a}_T(k-1) - \dots - \theta_q \hat{a}_T(k-q), \quad (6.8)$$

que es conocida como *función de predicción*. Nótese que en algunos casos la esperanza es tomada sobre variables aleatorias ya observadas, y en otros casos no han sido observadas:

- Si $i > 0$ entonces $\hat{z}_T(i) = E[z_{T+i}|z_T, \dots, z_1]$ se condiciona a variables que aún no han sido observadas.
- Si $i \leq 0$ entonces $\hat{z}_T(i) = E[z_{T-|i}|z_T, \dots, z_1]$ ya han sido observadas y entonces $\hat{z}_T(-|i|) = z_{T-|i|}$.

En el caso de las innovaciones ocurre algo similar:

- Si $i > 0$ entonces $E[a_{T+i}|z_T, \dots, z_1] = E[a_{T+i}] = 0$ pues a_{T+i} es independiente de las observaciones z_j (con $j = 1, \dots, T$).
- Si $i \leq 0$ las innovaciones son conocidas y por lo tanto, $\hat{a}_T(-|i|) = a_{T-|i|}$.

Con (6.8) se pueden calcular las predicciones de forma recursiva, tomando $k = 1$ restando (6.7) menos (6.8) se tiene

$$a_{T+1} = z_{T+1} - \hat{z}_T(1),$$

de aquí la relación entre las innovaciones y los errores de predicción a un periodo.

En (6.8) se observa que después de q valores iniciales los términos de media móvil desaparecen (pues las innovaciones no son observadas y sus esperanzas son cero), por lo tanto la predicción queda determinada sólo por la parte autorregresiva. Para $k > q$ la predicción está dada por

$$\hat{z}_T(k) = c + \varphi_1 \hat{z}_T(k-1) + \dots + \varphi_h \hat{z}_T(k-h). \quad (6.9)$$

El operador de retardo se define como $B\hat{z}_T(k) = \hat{z}_T(k-1)$, nótese que en este caso el operador de retardo actúa sobre el horizonte de la predicción (no sobre el origen), así que (6.9) se reescribe como

$$(1 - \varphi_1 B + \dots + \varphi_h B^h) \hat{z}_T(k) = \phi(B) \nabla^d \hat{z}_T(k) = c \quad k > q.$$

Esta ecuación es conocida como *ecuación de predicción final*.

6.4.2. Varianza de las Predicciones

En esta sección se presenta el cálculo de la varianza de un modelo ARIMA así como sus intervalos de confianza.

Sea $\{Z_t\}$ una serie de tiempo que sigue un proceso ARIMA(p, d, q) de la que se tienen $\{z_1, z_2, \dots, z_T\}$ observaciones. Sea $z_t = \psi(B)a_t$ la representación MA(∞) del proceso, entonces

$$z_{T+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{T+k-i}, \quad (\psi_0 = 1). \quad (6.10)$$

Tomando esperanzas condicionadas a las T observaciones $\{z_1, z_2, \dots, z_T\}$, la predicción óptima será

$$\hat{z}_T(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{k+j} a_{T-j}, \quad (\psi_0 = 1), \quad (6.11)$$

restando (6.11) menos (6.10) se obtiene el error de predicción

$$e_T(k) = z_{T+k} - \hat{z}_T(k) = a_{T+k} + \psi_1 a_{T+k-1} + \dots + \psi_{k-1} a_{T+1},$$

su varianza será

$$\text{var}(e_T(k)) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_{k-1}^2),$$

es decir, cuando $k \rightarrow \infty$ la varianza de la predicción converge a la varianza marginal del proceso.

Bajo el supuesto de normalidad de las innovaciones $a_t \sim N(0, \sigma^2)$, para todo t se pueden calcular intervalos de confianza para la predicción, que serán

$$\left(\hat{z}_t(k) - N_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{var}(e_t(k))}, \hat{z}_t(k) + N_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{var}(e_t(k))} \right).$$

Con la que se obtiene predicciones para z_{T+i} , $i = 1, \dots$ a partir de las observaciones $\{z_1, \dots, z_T\}$, también se conoce los intervalos de confianza así como el error de predicción.

En el siguiente Capítulo se dan ejemplos de la modelación por medio de la metodología ARIMA(p, d, q) para tres empresas.

Ejemplos del Modelo ARIMA

A continuación se presentan tres ejemplos realizados con el paquete **EViews7** de las empresas CEMEX, TELMEX y Genomma Lab en los que se obtiene un modelo ARIMA en cada caso, así como sus predicciones.

Para cada ejemplo se seguirá el siguiente algoritmo

1. Identificación.
 - a) Realizar la gráfica de la serie.
 - b) Determinar estacionariedad por medio de:
 - 1) Test de Dickey-Fuller.
 - 2) Correlograma de errores.
 - c) En caso de no ser estacionaria diferenciar.
 - d) Realizar la gráfica de la serie diferenciada y regresar a 1 a, en caso de ser estacionaria realizar 1 e.
 - e) Estimar el orden de p y q por medio del correlograma.
2. Estimación.
 - a) Estimar los parámetros del modelo.
3. Validación
 - a) Realizar pruebas de normalidad (test de Jarque-Bera e histograma).

- b) Determinar si los parámetros estimados son significativos por medio del correlograma de errores del modelo, en caso de obtener mas parámetros significativos regresar a 2a, ya determinados todos los modelos posibles realizar 3c, en caso de encontrar sólo un modelo realizar 3d.
- c) Determinar el criterio de Akaike para cada modelo y determinar cual es el que mejor se ajusta a la serie.
- d) Calcular raíces unitarias del modelo y graficarlas.

4. Predicción

- a) Realizar una predicción.
- b) Calcular los errores de predicción.

7.1. CEMEX

Son observados los datos históricos de cierre de una acción de la empresa Cemex, S.A.B. de C.V. (CEMEXCPO.MX) desde el 1 de Enero de 2003 hasta el 28 de Septiembre de 2012, en total se tienen 2 496 observaciones.

Para construir el modelo se toma una muestra de 2 324 observaciones (del 1 de Enero de 2003 al 13 de Enero de 2012) con el fin de poder comparar las predicciones obtenidas con el modelo y los valores reales de la serie, así obtener los errores de predicción.

En la Figura 7.1 se muestran los valores de la serie, en ésta se observa que la serie no es estacionaria tanto en media como en varianza, para comprobarlo se realiza la prueba de raíces unitarias Dickey-Fuller aumentada en la Figura 7.2 a través del paquete EViews 7.



Figura 7.1: Datos históricos

Null Hypothesis: CLOSE has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=26)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.638646	0.4408
Test critical values:		
1% level	-2.565958	
5% level	-1.940960	
10% level	-1.616608	

Figura 7.2: Prueba de Dickey-Fuller aumentada para el precio de cierre

El estadístico t es menor a los valores críticos de la prueba en 1%, 5% y 10%, en valores absolutos entonces no se rechaza la hipótesis nula, por lo

tanto, es necesario diferenciar.

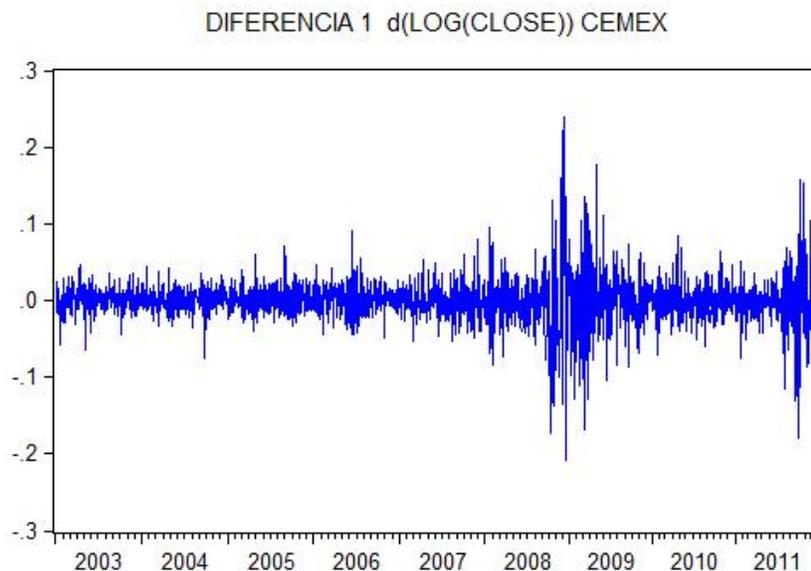


Figura 7.3: Cierre con una diferencia

Ya que la serie no es estacionaria entonces se realiza una diferencia, en la Figura 7.3 se muestra el comportamiento de la nueva serie.

Null Hypothesis: CLOSE_DIF1 has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=26)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-43.40531	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565958	
5% level	-1.940960	
10% level	-1.616608	

Figura 7.4: Dickey-Fuller diferencia 1

Se hace una vez más el test de Dickey-Fuller aumentado para comprobar la estacionariedad de la serie nueva, en la Figura 7.4 se muestra el resultado,

en este caso el valor absoluto del estadístico t es mayor que los valores críticos por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula, es decir, la serie es estacionaria.

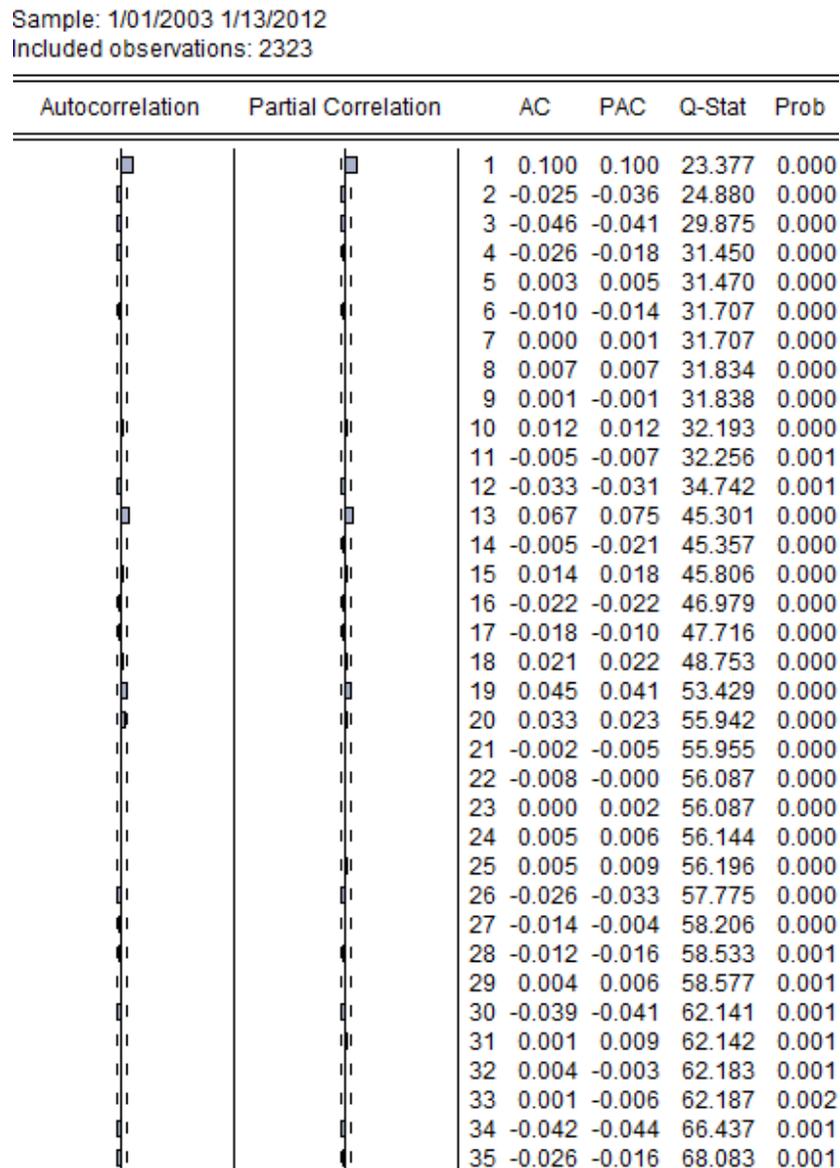


Figura 7.5: Correlograma de diferencia 1

Ahora con la serie diferenciada se realiza el correlograma, en este se toman

los valores que se salen de las bandas para detectar problemas de autocorrelación simple y parcial en el modelo, para este caso las bandas de confianza serán $\pm \frac{2}{\sqrt{2324}} \simeq \pm 0.04148$.

En la Figura 7.5 se muestra el correlograma de las diferencias del precio de cierre, en la función de correlación parcial se muestran los valores en los que se salen de las bandas: AR(1), AR(2), AR(3), AR(12), AR(13), AR(19), AR(30) y AR(34) y en la función de autocorrelación: MA(1), MA(2), MA(3), MA(4), MA(12), MA(13), MA(19), MA(26), MA(30), MA(34), MA(35). Lo que indica que el precio de cierre de las acciones de CEMEX dependen de los procesos AR(1), AR(2), AR(3), etc. y de los procesos MA(1), MA(2), MA(3), etc.

Sample (adjusted): 2/19/2003 1/13/2012
 Included observations: 2289 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.338922	0.061800	5.484208	0.0000
AR(2)	-0.038764	0.020665	-1.875840	0.0608
AR(3)	-0.353338	0.050447	-7.004186	0.0000
AR(12)	0.246434	0.066839	3.686997	0.0002
AR(13)	-0.320357	0.050365	-6.360730	0.0000
AR(19)	0.355748	0.056527	6.293449	0.0000
AR(30)	-0.064949	0.017265	-3.761814	0.0002
AR(34)	0.124742	0.050493	2.470496	0.0136
MA(1)	-0.228369	0.060013	-3.805363	0.0001
MA(3)	0.287299	0.050663	5.670734	0.0000
MA(4)	0.093313	0.019741	4.726768	0.0000
MA(12)	-0.308316	0.063691	-4.840823	0.0000
MA(13)	0.389135	0.054138	7.187847	0.0000
MA(19)	-0.324817	0.059908	-5.421948	0.0000
MA(34)	-0.158550	0.048467	-3.271286	0.0011

Figura 7.6: Modelo 1

Cuando se calcula el modelo en Eviews7 en la columna *t-Statistic* se debe observar si t es mayor a 2 en valor absoluto para cada proceso AR y MA, si es así entonces se excluye (uno a uno de mayor a menor) del modelo pues no son significativos, de esta forma se obtiene el modelo 1 mostrado en la Figura 7.6, en este caso no son excluidos todos los valores mayores a dos pues si se excluyen el número de coeficientes no son suficientes para representar la serie, tomando estas consideraciones en cuenta se obtiene un modelo ARIMA(8, 1, 7).

El modelo que se obtiene es

$$\begin{aligned} z_t = & 0.33z_{t-1} - 0.03z_{t-2} - 0.35z_{t-3} + 0.24z_{t-4} - 0.32z_{t-5} - 0.35z_{t-6} \\ & - 0.06z_{t-7} + 0.12z_{t-8} + 0.22a_{t-1} - 0.28a_{t-2} - 0.09a_{t-3} + 0.3 \\ & - 0.38a_{t-4} + 0.32a_{t-5} + 0.15a_{t-6}. \end{aligned}$$

Ya que se tiene un modelo se debe verificar que sus residuos sigan un comportamiento de ruido blanco, una de las herramientas para esto es el empleo del histograma junto con la prueba de Jarque-Bera, que se muestran en la Figura 7.7.

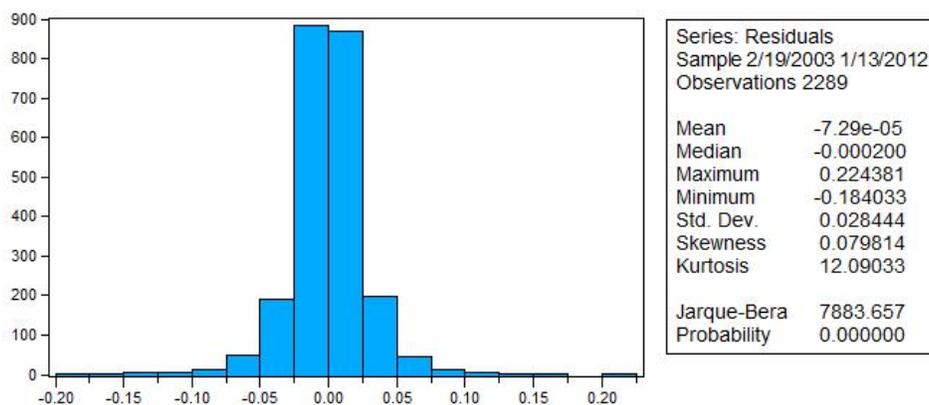


Figura 7.7: Histograma de residuos del modelo 1

Verificada la normalidad del primer modelo se observa el correlograma de errores, que se muestra en la Figura 7.8, en este se puede observar que aún existen valores que están fuera de las bandas, en este caso AR(10) y MA(10)

son significativos, por tanto se deben agregar al modelo.

Date: 09/11/12 Time: 14:46
 Sample: 2/19/2003 1/13/2012
 Included observations: 2289
 Q-statistic probabilities adjusted for 15 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.004	0.004	0.0462	
		2	-0.002	-0.002	0.0550	
		3	0.012	0.012	0.3943	
		4	-0.025	-0.025	1.8688	
		5	-0.008	-0.008	2.0138	
		6	0.011	0.011	2.3132	
		7	-0.005	-0.004	2.3632	
		8	0.014	0.014	2.8229	
		9	-0.004	-0.005	2.8586	
		10	0.076	0.077	16.145	
		11	-0.027	-0.029	17.864	
		12	0.003	0.004	17.885	
		13	-0.004	-0.006	17.922	
		14	-0.029	-0.024	19.797	
		15	0.009	0.010	19.996	
		16	0.009	0.007	20.193	0.000
		17	-0.034	-0.032	22.830	0.000
		18	-0.004	-0.007	22.859	0.000
		19	0.006	0.007	22.935	0.000
		20	-0.010	-0.014	23.159	0.000
		21	-0.003	-0.000	23.178	0.001
		22	-0.021	-0.023	24.222	0.001
		23	0.001	0.003	24.225	0.002
		24	0.028	0.031	26.072	0.002
		25	0.014	0.011	26.494	0.003
		26	-0.003	-0.005	26.520	0.005
		27	0.002	0.006	26.533	0.009
		28	-0.004	-0.003	26.567	0.014
		29	0.030	0.031	28.673	0.012
		30	0.018	0.019	29.389	0.014
		31	0.021	0.018	30.377	0.016
		32	-0.009	-0.007	30.578	0.022

Figura 7.8: Correlograma de errores modelo 1

Agregando los valores significativos al modelo se obtiene un nuevo modelo (el modelo 2) que se presenta en la Figura 7.9.

Sample (adjusted): 2/19/2003 1/13/2012
 Included observations: 2289 after adjustments
 Convergence achieved after 22 iterations
 MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.356005	0.054262	6.560863	0.0000
AR(2)	-0.047891	0.020361	-2.352052	0.0188
AR(3)	-0.387416	0.050326	-7.698158	0.0000
AR(10)	-0.066815	0.057902	-1.153938	0.2486
AR(12)	0.216516	0.064251	3.369835	0.0008
AR(13)	-0.296064	0.055104	-5.372859	0.0000
AR(19)	0.267347	0.049953	5.351971	0.0000
AR(30)	-0.051562	0.017637	-2.923520	0.0035
AR(34)	0.224919	0.054612	4.118455	0.0000
MA(1)	-0.242882	0.050193	-4.839006	0.0000
MA(3)	0.323210	0.047273	6.837075	0.0000
MA(4)	0.108435	0.018683	5.803984	0.0000
MA(10)	0.126975	0.056190	2.259738	0.0239
MA(12)	-0.277811	0.061649	-4.506348	0.0000
MA(13)	0.394115	0.051147	7.705596	0.0000
MA(19)	-0.241730	0.051510	-4.692876	0.0000
MA(34)	-0.292425	0.053598	-5.455940	0.0000

Figura 7.9: Modelo 2

Con la que se obtiene los nuevos parámetros y el nuevo modelo ARIMA(9, 1, 8).

$$\begin{aligned}
 z_t = & 0.35z_{t-1} - 0.04z_{t-2} - 0.38z_{t-3} - 0.06z_{t-4} + 0.21z_{t-5} - 0.29z_{t-6} \\
 & + 0.26z_{t-7} + 0.05z_{t-8} + 0.22z_{t-9} + 0.24a_{t-1} - 0.32a_{t-2} - 0.10a_{t-3} \\
 & - 0.12a_{t-4} + 0.27a_{t-5} - 0.39a_{t-6} + 0.24a_{t-7} + 0.29a_{t-8}.
 \end{aligned}$$

Una vez más se deben verificar los supuestos del modelo (modelo 2), gracias al histograma y al test de Jarque-Bera se comprueba normalidad en la Figura. 7.10.

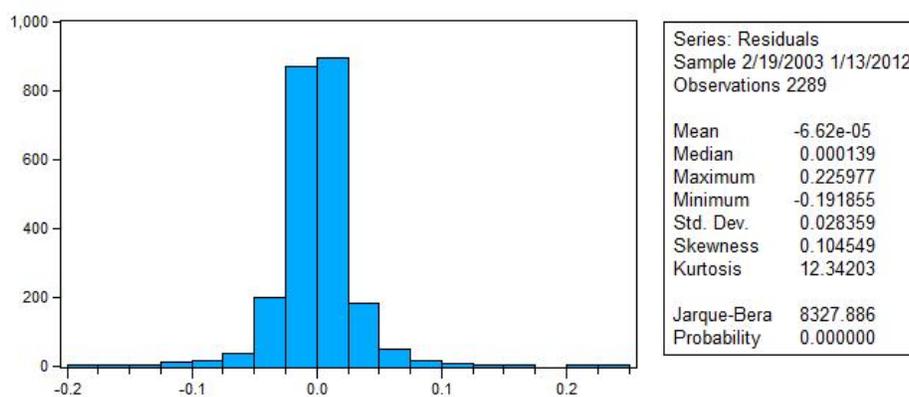


Figura 7.10: Histograma del modelo 2

El correlograma de errores del modelo 2 se muestra en la Figura 7.11, con este es posible comprobar que los coeficientes no están correlacionados, pues ningún parámetro se sale de los límites de confianza $\pm \frac{2}{\sqrt{2323}}$, también se observa que ya no se tienen más parámetros significativos.

Date: 09/11/12 Time: 14:48
 Sample: 2/19/2003 1/13/2012
 Included observations: 2289
 Q-statistic probabilities adjusted for 17 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.001	0.001	0.0017	
		2	0.003	0.003	0.0250	
		3	0.013	0.013	0.3863	
		4	-0.031	-0.031	2.5232	
		5	-0.010	-0.010	2.7682	
		6	0.008	0.008	2.9153	
		7	-0.001	-0.000	2.9172	
		8	0.020	0.019	3.8510	
		9	-0.002	-0.002	3.8564	
		10	0.019	0.019	4.6941	
		11	-0.035	-0.035	7.4523	
		12	-0.002	-0.000	7.4576	
		13	-0.016	-0.016	8.0319	
		14	-0.019	-0.018	8.8908	
		15	0.009	0.007	9.0744	
		16	0.017	0.016	9.7328	
		17	-0.035	-0.035	12.576	
		18	-0.007	-0.009	12.676	0.000
		19	0.006	0.008	12.768	0.002
		20	-0.000	0.001	12.769	0.005
		21	0.003	0.003	12.784	0.012
		22	-0.046	-0.048	17.698	0.003
		23	0.020	0.022	18.654	0.005
		24	0.033	0.032	21.141	0.004
		25	0.021	0.022	22.169	0.005
		26	0.002	-0.002	22.177	0.008
		27	-0.000	0.000	22.177	0.014
		28	-0.003	-0.003	22.198	0.023
		29	0.012	0.014	22.541	0.032
		30	-0.001	0.000	22.546	0.047
		31	0.015	0.011	23.039	0.060
		32	0.004	0.005	23.083	0.082
		33	-0.006	-0.009	23.177	0.109

Figura 7.11: Correlograma de errores modelo 2

En este ejemplo se han obtenido dos modelos, por lo tanto, se debe deter-

minar cual es el que se adecúa mejor a la serie, tomando en cuenta el criterio de Akaike para ambos modelos se observa que el modelo uno tiene un valor menor (en valor absoluto) AIC que el modelo dos.

The figure shows two windows from a statistical software package, each displaying regression statistics for a different model. The top window is for 'MODELO1' and the bottom for 'MODELO2'. Both windows have a menu bar with 'View', 'Proc', 'Object', 'Print', 'Name', 'Freeze', 'Estimate', 'Forecast', 'Stats', and 'Resids'. The 'Stats' column contains the following data:

Stat	Value	Stat	Value
R-squared	0.045828	Mean dependent var	-0.000107
Adjusted R-squared	0.039953	S.D. dependent var	0.029119
S.E. of regression	0.028531	Akaike info criterion	-4.269089
Sum squared resid	1.851134	Schwarz criterion	-4.231501
Log likelihood	4900.972	Hannan-Quinn criter.	-4.255381
Durbin-Watson stat	1.990928		

Stat	Value	Stat	Value
R-squared	0.051524	Mean dependent var	-0.000107
Adjusted R-squared	0.044845	S.D. dependent var	0.029119
S.E. of regression	0.028459	Akaike info criterion	-4.273329
Sum squared resid	1.840083	Schwarz criterion	-4.230730
Log likelihood	4907.825	Hannan-Quinn criter.	-4.257794
Durbin-Watson stat	1.998236		

Figura 7.12: Selección del modelo, criterio de Akaike

Para determinar si el modelo es estacionario e invertible se observa la Figura 7.13, la gráfica de raíces unitarias en que se aprecia que el modelo no es estacionario, y tampoco invertible, por lo que se concluye que se debe diferenciar la serie original dos veces.

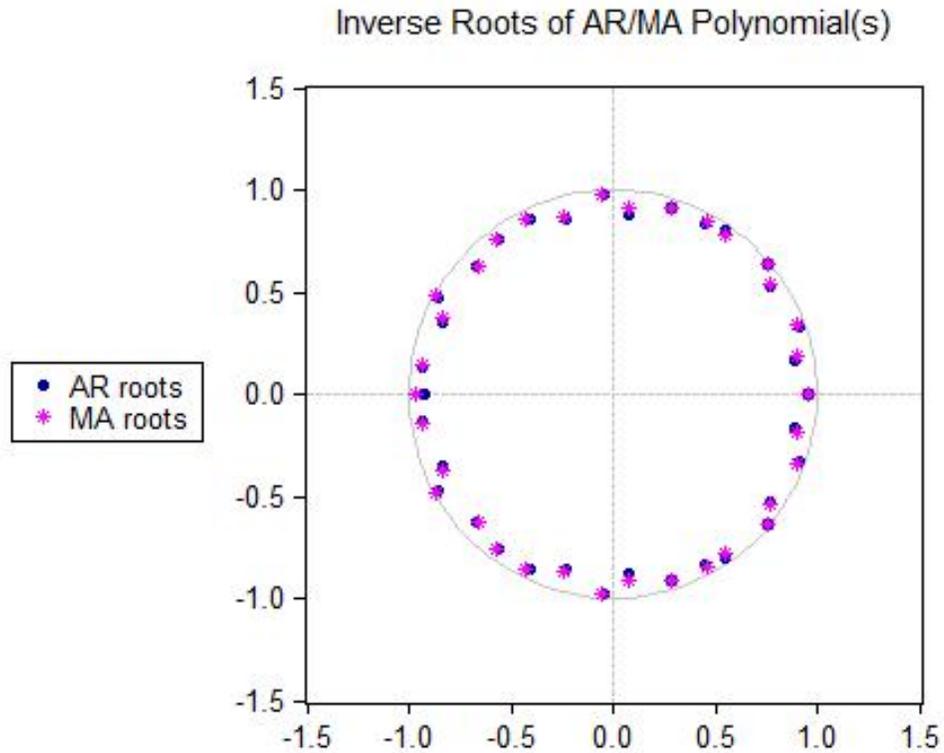


Figura 7.13: Raíces unitarias modelo 1

En la Figura 7.14 se presenta la gráfica de las observaciones del precio de cierre de las acciones de CEMEX diferenciado dos veces, ya que la serie con una diferencia es estacionaria entonces al diferenciarla seguirá cumpliendo dicha propiedad, por lo tanto ya no es necesario realizar el test de Dickey-Fuller, además en la gráfica se puede observar la estacionariedad.

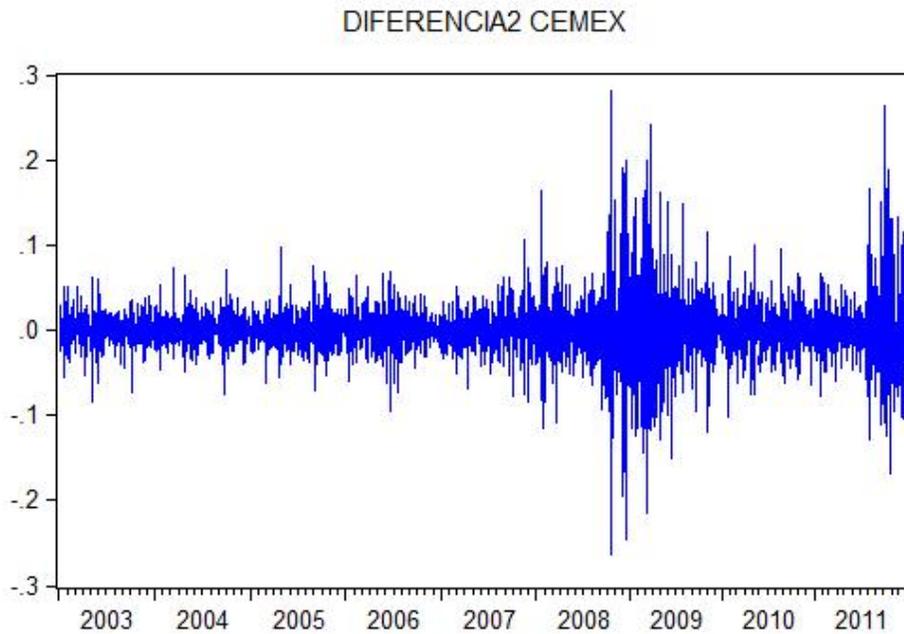


Figura 7.14: Cemex diferencia 2

Se repite el proceso para determinar el modelo que describa la serie, obteniendo un modelo ARIMA(6, 2, 7).

$$\begin{aligned}
 z_t = & 6.3 \times 10^{-7} - 0.47z_{t-1} - 0.25z_{t-2} - 0.021z_{t-3} - 0.25z_{t-4} + 0.68z_{t-5} \\
 & - 0.05z_{t-6} + 0.4a_{t-1} + 0.26a_{t-2} + 0.30a_{t-3} - 0.9 \times 10^{-3}a_{t-4} \\
 & + 0.016a_{t-5} + 0.013a_{t-6} - 0.011a_{t-7}.
 \end{aligned}$$

Sample (adjusted): 1/21/2003 1/13/2012
 Included observations: 2310 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.31E-07	2.48E-06	0.254443	0.7992
AR(1)	-0.471399	0.155494	-3.031629	0.0025
AR(2)	-0.250684	0.147850	-1.695537	0.0901
AR(4)	-0.021107	0.023411	-0.901576	0.3674
AR(5)	-0.025516	0.022402	-1.139015	0.2548
AR(10)	0.068103	0.019470	3.497884	0.0005
AR(12)	-0.059826	0.023420	-2.554488	0.0107
MA(1)	-0.402549	0.156646	-2.569796	0.0102
MA(2)	-0.268371	0.202324	-1.326442	0.1848
MA(3)	-0.306221	0.136434	-2.244458	0.0249
MA(9)	0.000949	0.020037	0.047385	0.9622
MA(14)	-0.016279	0.017882	-0.910403	0.3627
MA(30)	-0.013681	0.016073	-0.851194	0.3948
MA(36)	0.011024	0.014409	0.765086	0.4443

Figura 7.15: Cemex modelo 3

Se comprueba normalidad y no correlación en los residuos del modelo, así como estacionariedad e invertibilidad, en la Figura 7.17 se puede observar que un coeficiente está cercano al círculo unitario, sin embargo este término es invertible, los valores de las raíces se muestran en la Figura 7.16.

Sample: 1/01/2003 1/13/2012

Included observations: 2310

AR Root(s)	Modulus	Cycle
-0.284462 ± 0.814593i	0.862833	3.295208
-0.622415 ± 0.555703i	0.834390	2.604149
0.179254 ± 0.798896i	0.818760	4.653955
0.551231 ± 0.545245i	0.775337	8.055998
-0.742739 ± 0.160675i	0.759919	2.145495
0.683431 ± 0.170028i	0.704264	25.76806

No root lies outside the unit circle.

ARMA model is stationary.

MA Root(s)	Modulus	Cycle
0.997680	0.997680	
0.832808 ± 0.341308i	0.900034	16.15422
0.882469 ± 0.176711i	0.899988	31.79233
0.740643 ± 0.490827i	0.888518	10.73583
-0.720394 ± 0.518794i	0.887758	2.495835
0.887706	0.887706	
-0.803045 ± 0.377296i	0.887262	2.325065
-0.084897 ± 0.882870i	0.886943	3.769921
-0.241655 ± 0.850864i	0.884515	3.400874
-0.608463 ± 0.640702i	0.883587	2.696193
0.085290 ± 0.879408i	0.883534	4.262349
0.625411 ± 0.617768i	0.879076	8.063117
0.243075 ± 0.840637i	0.875075	4.873263
-0.845729 ± 0.218382i	0.873469	2.174944
-0.489915 ± 0.720282i	0.871105	2.898028
-0.374660 ± 0.781727i	0.866872	3.113996
0.498094 ± 0.702009i	0.860764	6.588182
-0.857215 ± 0.065354i	0.859703	2.049645
0.376765 ± 0.768411i	0.855808	5.635519

No root lies outside the unit circle.

ARMA model is invertible.

Figura 7.16: raíces unitarias modelo 3

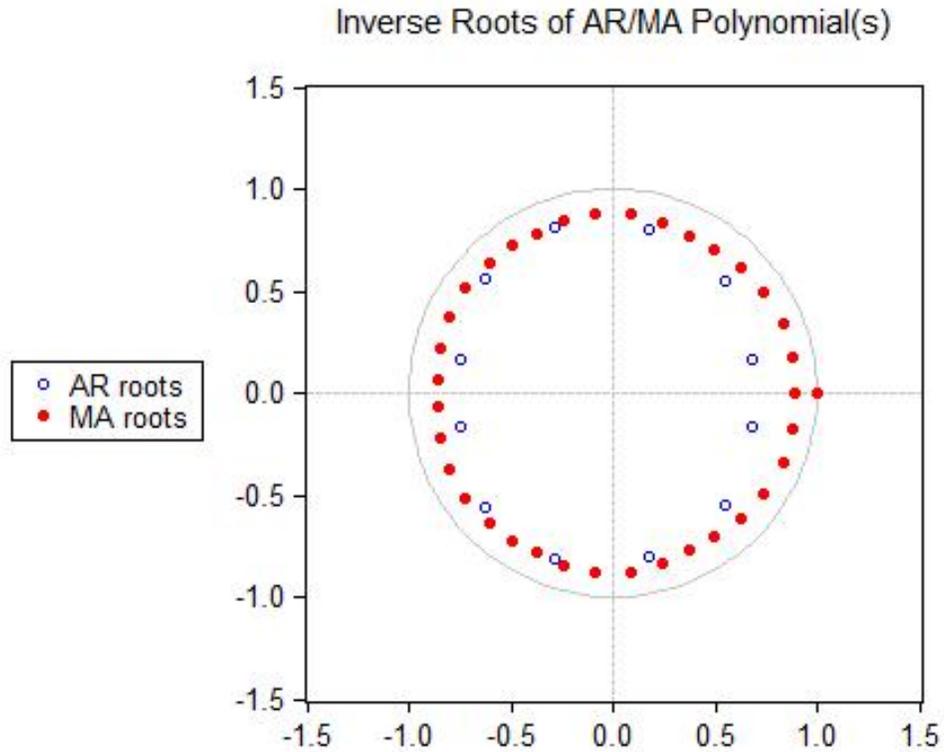


Figura 7.17: Gráfica de raíces unitarias Modelo 3

Como ya se mencionó los datos del 16 de Enero de 2012 al 28 de Septiembre de 2012 no fueron utilizados para obtener el modelo con el fin de poder obtener una comparación entre los datos reales y los estimados.

La predicción del 28 de Septiembre de 2012 se muestra en la Figura 7.18, esta fue obtenida mediante el modelo 3, en la Figura se observa que el valor de la predicción estimado es de 10.6 y su intervalo de confianza que es (10, 11.2), el error de predicción fue de 0.11.

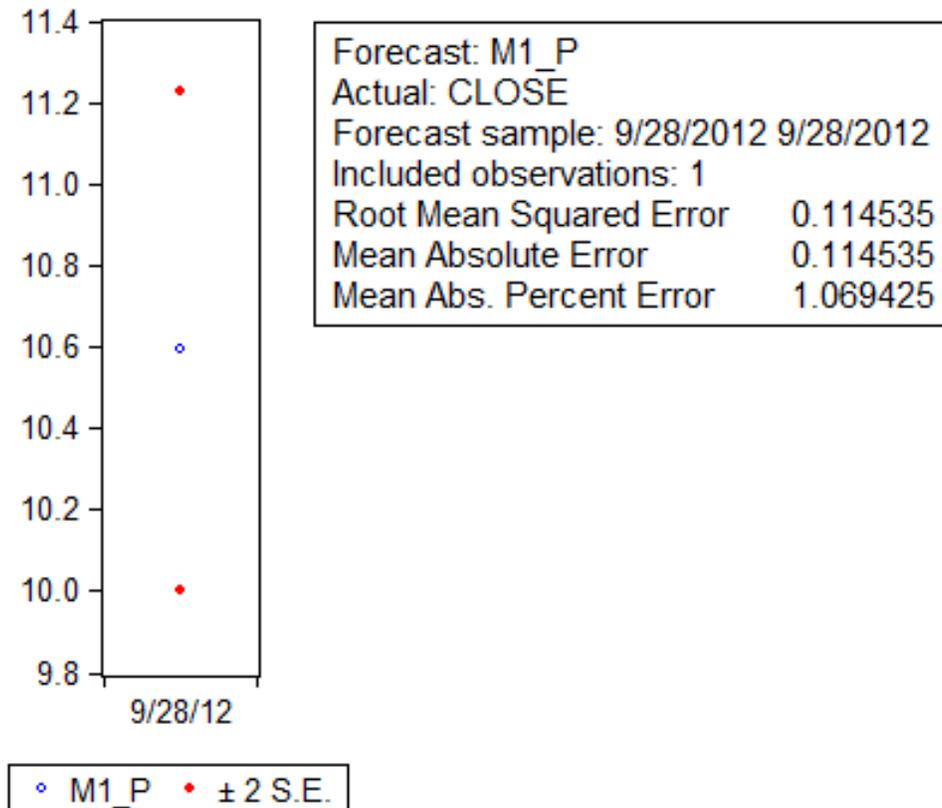


Figura 7.18: Predicción de 28/Septiembre/2012 con el modelo 3

La predicción entre el 13 de Enero de 2012 al 28 de Septiembre de 2012 hecha con el modelo 3 es observado en la Figura 7.19, en promedio el error de predicción es de 0.24.

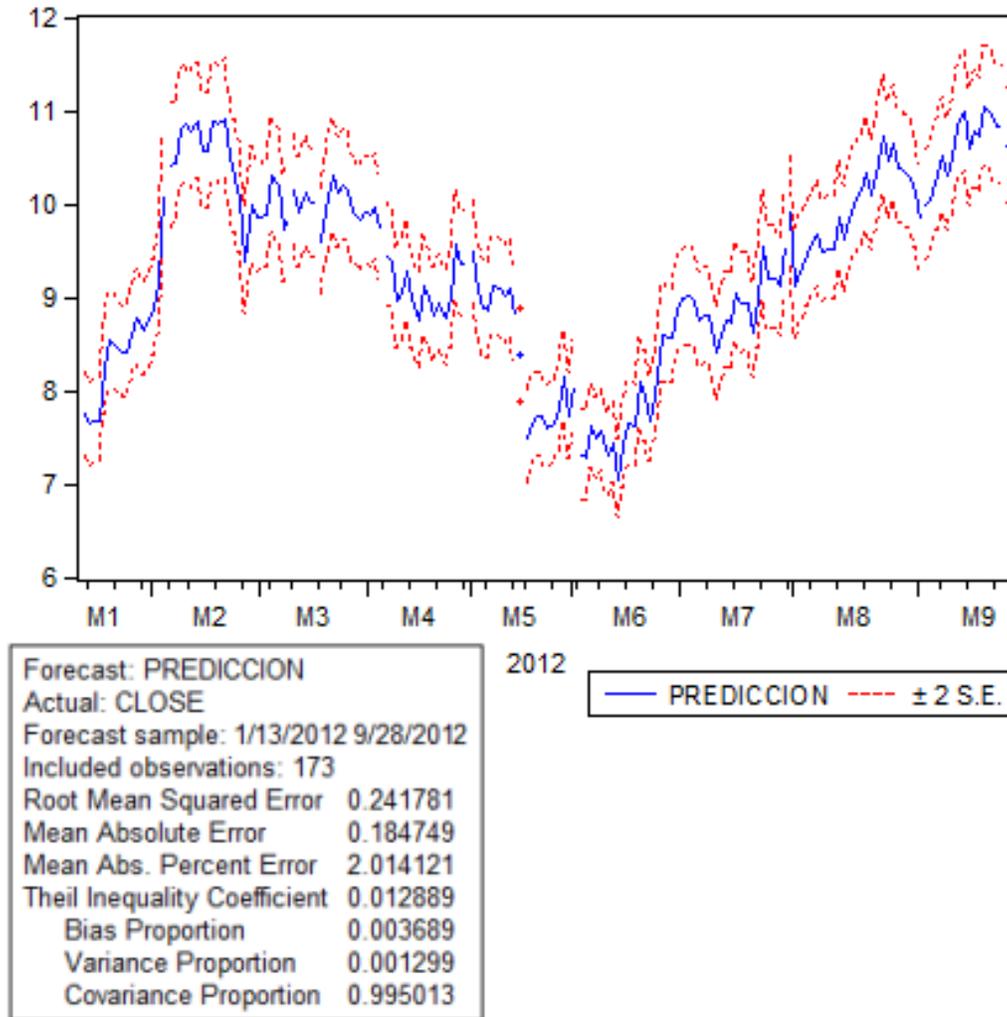


Figura 7.19: Predicción 13 de Enero a 28 de Septiembre de 2012 modelo 3

7.2. Genomma Lab

Los datos históricos en el cierre de las acciones de la empresa Genomma Lab Internacional, S.A.B. de C.V. (LAABB.MX) son observados durante 1 090 días, entre el 18 de Junio de 2008 y 9 de Septiembre de 2012, siguien-

do la misma metodología que en la sección anterior, con el fin de tener una comparación entre los datos reales y las predicciones, el modelo es realizado en base a 1 006 observaciones, del 18 de Junio de 2008 al 28 de Mayo de 2012.

El precio de las acciones al cierre está dado en la Figura 7.20, es claro que la serie no es estacionaria pues los datos no se mantienen alrededor en un nivel constante.

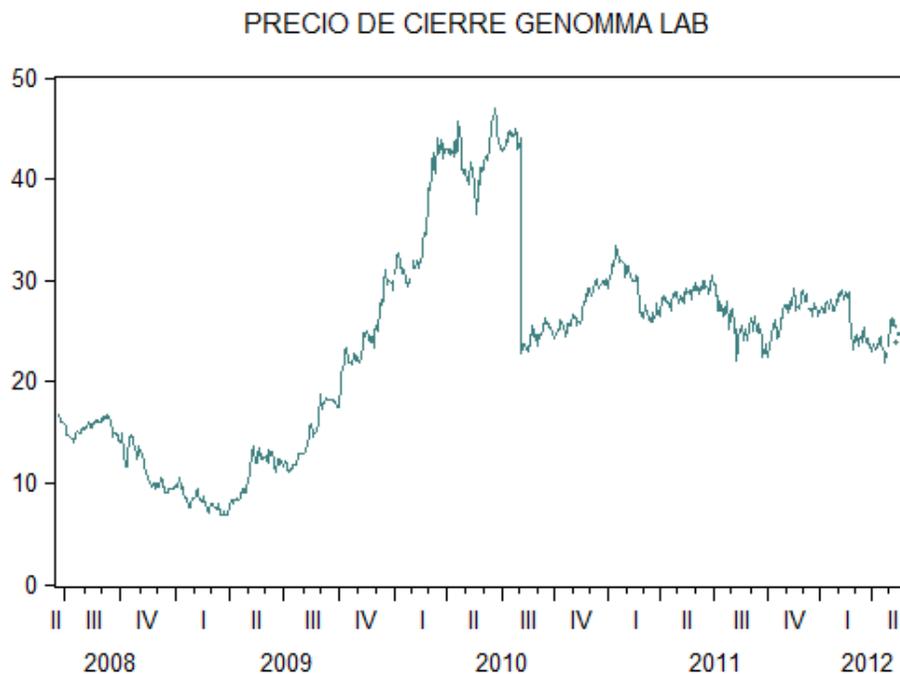


Figura 7.20: Precios al cierre Genomma Lab

Se realizó la prueba de raíces unitarias de Dickey-Fuller aumentada para corroborar las observaciones hechas gracias a la gráfica del precio de las acciones, en la Figura 7.21 se observa el resultado de dicha prueba, en valor absoluto el estadístico t de la prueba es menor que los valores críticos por lo que la hipótesis de no estacionariedad no es rechazada.

Null Hypothesis: CLOSE has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.499957	0.5335
Test critical values:		
1% level	-3.436637	
5% level	-2.864204	
10% level	-2.568241	

Figura 7.21: Test de Dickey-Fuller

Como la serie no es estacionaria entonces es necesario diferenciar, la Figura 7.22 muestra la serie diferenciada.

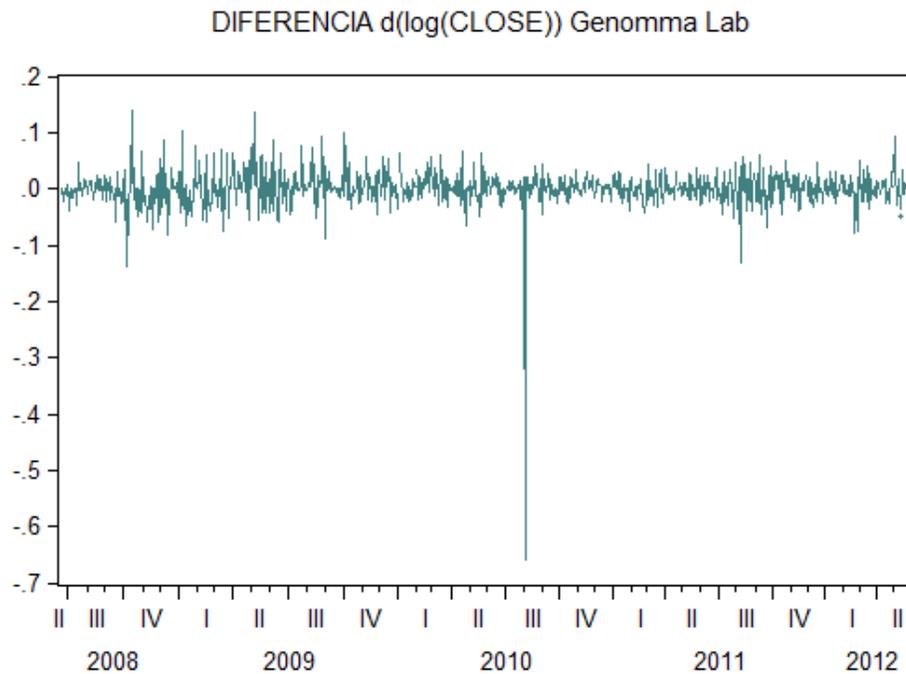


Figura 7.22: Genomma Lab serie diferenciada

El test de Dickey-Fuller se presenta en la Figura 7.23,

Null Hypothesis: DIF1_CLOSE has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-31.13446	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.436644	
5% level	-2.864207	
10% level	-2.568242	

Figura 7.23: Test Dickey-Fuller de la serie diferenciada.

en este caso el estadístico de prueba es menor que los valores críticos (en valor absoluto) y por lo tanto, la serie es estacionaria.

Se realizó el correlograma (Figura 7.24) de la serie estacionaria, los coeficientes fuera de las bandas se consideran significativos y por lo tanto, se consideran en la construcción del modelo, en este caso se tiene AR(2), AR(13), AR(15), AR(20), AR(22), AR(24), MA(2), MA(13), MA(15), MA(22), MA(24) y MA(25).

Sample: 6/18/2008 5/28/2012
 Included observations: 1005

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prot	
		1	0.017	0.017	0.2757	0.60
		2	0.050	0.050	2.8088	0.24
		3	-0.032	-0.034	3.8696	0.27
		4	0.005	0.004	3.8991	0.42
		5	-0.006	-0.003	3.9338	0.55
		6	-0.014	-0.016	4.1392	0.65
		7	-0.036	-0.035	5.4559	0.60
		8	0.013	0.016	5.6331	0.68
		9	-0.001	0.001	5.6335	0.77
		10	0.007	0.003	5.6768	0.84
		11	-0.023	-0.022	6.2300	0.85
		12	-0.006	-0.006	6.2622	0.90
		13	0.049	0.051	8.7362	0.79
		14	-0.033	-0.037	9.8815	0.77
		15	0.052	0.050	12.675	0.62
		16	0.008	0.013	12.734	0.69
		17	0.023	0.014	13.261	0.71
		18	-0.042	-0.042	15.060	0.65
		19	-0.028	-0.027	15.882	0.66
		20	0.039	0.049	17.426	0.62
		21	-0.009	-0.014	17.518	0.67
		22	0.052	0.052	20.260	0.56
		23	0.020	0.021	20.664	0.60
		24	0.056	0.053	23.900	0.46
		25	0.043	0.037	25.853	0.41
		26	0.013	0.007	26.032	0.46
		27	-0.041	-0.033	27.743	0.42
		28	0.004	0.001	27.763	0.47
		29	-0.016	-0.007	28.039	0.51
		30	0.026	0.019	28.745	0.53
		31	-0.018	-0.006	29.088	0.56
		32	-0.015	-0.020	29.334	0.60
		33	0.028	0.031	30.153	0.61

Figura 7.24: Correlograma de la serie estacionaria.

Sample (adjusted): 7/23/2008 5/28/2012
 Included observations: 981 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000548	0.001578	0.347396	0.7284
AR(2)	0.006719	0.304241	0.022086	0.9824
AR(13)	0.111697	0.239506	0.466366	0.6411
AR(15)	0.219255	0.225917	0.970509	0.3320
AR(20)	0.041418	0.031364	1.320553	0.1870
AR(22)	-0.146534	0.221691	-0.660984	0.5088
AR(24)	0.015816	0.200412	0.078919	0.9371
MA(2)	0.041728	0.306280	0.136242	0.8917
MA(13)	-0.061848	0.240525	-0.257137	0.7971
MA(15)	-0.175251	0.220527	-0.794690	0.4270
MA(22)	0.210839	0.221705	0.950985	0.3418
MA(24)	0.046011	0.202276	0.227467	0.8201
MA(25)	0.045451	0.031244	1.454734	0.1461

Figura 7.25: Modelo ARIMA Genomma Lab

Para este caso la constante c es significativa para el modelo, el valor absoluto del estadístico t es menor que dos para todos los coeficientes de los procesos autorregresivos y de medias móviles. El modelo que se obtiene es:

$$\begin{aligned}
 z_t = & 0.00054 + 0.006z_{t-1} + 0.11z_{t-2} + 0.21z_{t-3} + 0.04z_{t-4} - 0.14z_{t-5} \\
 & - 0.41a_{t-1} + 0.06a_{t-2} + 0.17a_{t-3} - 0.21a_{t-4} - 0.046a_{t-5} \\
 & - 0.45a_{t-6}.
 \end{aligned}$$

Para comprobar que los residuos del modelo siguen, o se aproximan al comportamiento de un ruido blanco se elaboró el histograma (en la Figura 7.26) de estos, que junto con el test de Jarque-Bera se llega a la conclusión de que los residuos siguen una distribución normal, y ya que la media de los residuos es cercana a cero entonces se puede afirmar que se tiene un proceso aproximado de ruido blanco.

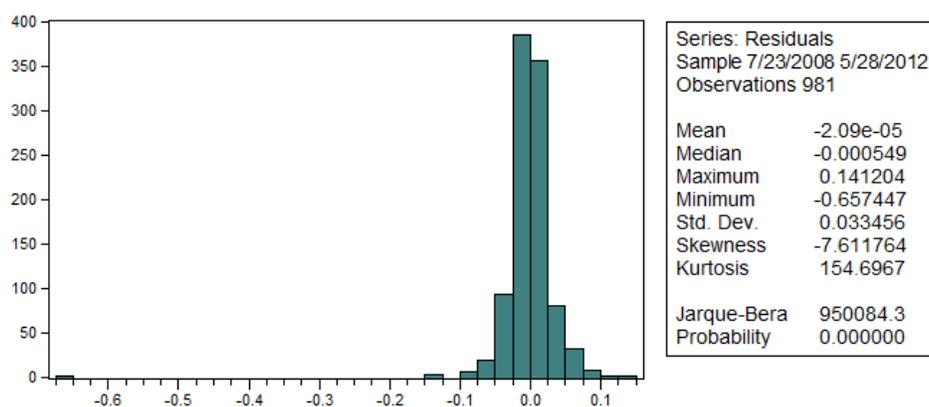


Figura 7.26: Histograma de residuos

En el correlograma de errores, en la Figura 7.27, se aprecia que los coeficientes no están correlacionados, pues ninguno se sale de las bandas, que es otro de los supuestos que debe cumplir el modelo.

Sample: 7/23/2008 5/28/2012
 Included observations: 981
 Q-statistic probabilities adjusted for 12 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.018	0.018	0.3285	
		2	-0.003	-0.003	0.3379	
		3	-0.032	-0.032	1.3740	
		4	0.009	0.010	1.4457	
		5	-0.004	-0.005	1.4622	
		6	-0.009	-0.009	1.5348	
		7	-0.039	-0.038	3.0219	
		8	0.011	0.012	3.1503	
		9	-0.000	-0.002	3.1504	
		10	0.011	0.009	3.2701	
		11	-0.024	-0.023	3.8342	
		12	0.001	0.001	3.8345	
		13	0.000	-0.000	3.8345	0.050
		14	-0.028	-0.031	4.6153	0.099
		15	0.001	0.003	4.6160	0.202
		16	0.014	0.013	4.8097	0.307
		17	0.015	0.014	5.0490	0.410
		18	-0.041	-0.043	6.7236	0.347
		19	-0.020	-0.018	7.1441	0.414
		20	0.000	0.001	7.1441	0.521
		21	-0.006	-0.011	7.1856	0.618
		22	-0.010	-0.010	7.2889	0.698
		23	0.019	0.020	7.6420	0.745
		24	0.003	0.003	7.6527	0.812
		25	-0.000	-0.006	7.6528	0.865
		26	0.005	0.006	7.6826	0.905
		27	-0.035	-0.035	8.9078	0.882
		28	-0.014	-0.013	9.1102	0.909
		29	-0.007	-0.008	9.1608	0.935
		30	0.017	0.017	9.4615	0.948
		31	-0.011	-0.011	9.5821	0.963
		32	-0.018	-0.021	9.9073	0.970

Figura 7.27: Correlograma de errores

Ya obtenido el modelo y comprobados los supuestos de ruido blanco de residuos y de no correlación entre coeficientes se comprobó la estacionariedad e invertibilidad del modelo, en la Figura 7.28 se muestran los valores de las

raíces unitarias, se observa que en el proceso todos los coeficientes AR son estacionarios y todos los de MA son invertibles.

Sample: 6/18/2008 5/28/2012

Included observations: 981

AR Root(s)	Modulus	Cycle
0.862564 ± 0.395332i	0.948844	14.62045
0.268878 ± 0.906136i	0.945187	4.899775
-0.731458 ± 0.594371i	0.942501	2.554945
-0.918065 ± 0.173948i	0.934399	2.126765
-0.488561 ± 0.796453i	0.934360	2.962334
-0.015518 ± 0.930606i	0.930736	3.957988
0.522328 ± 0.750150i	0.914085	6.527586
-0.255814 ± 0.869591i	0.906438	3.383690
0.653378 ± 0.606301i	0.891350	8.399494
0.875775 ± 0.051105i	0.877264	107.7951
-0.773638 ± 0.343680i	0.846541	2.306992
0.333966	0.333966	
-0.333706	0.333706	

No root lies outside the unit circle.

ARMA model is stationary.

MA Root(s)	Modulus	Cycle
0.877485 ± 0.392746i	0.961368	14.93008
-0.728076 ± 0.611297i	0.950673	2.571742
-0.503373 ± 0.802103i	0.946970	2.948138
-0.931999 ± 0.158010i	0.945298	2.112953
0.932549 ± 0.109467i	0.938952	53.77117
0.263320 ± 0.893949i	0.931924	4.892152
-0.030586 ± 0.930778i	0.931280	3.918063
-0.270067 ± 0.877776i	0.918382	3.361293
0.530628 ± 0.746233i	0.915658	6.595300
0.692582 ± 0.595551i	0.913428	8.846905
-0.824135 ± 0.381006i	0.907945	2.319760
0.231481 ± 0.620285i	0.662070	5.177235
-0.479618	0.479618	

No root lies outside the unit circle.

ARMA model is invertible.

Figura 7.28: Raíces unitarias

En la Figura 7.29 se presenta la gráfica de las raíces unitarias para el proceso, en esta se puede apreciar mejor la estacionariedad así como la invertibilidad de los procesos autorregresivos y de medias móviles respectivamente.

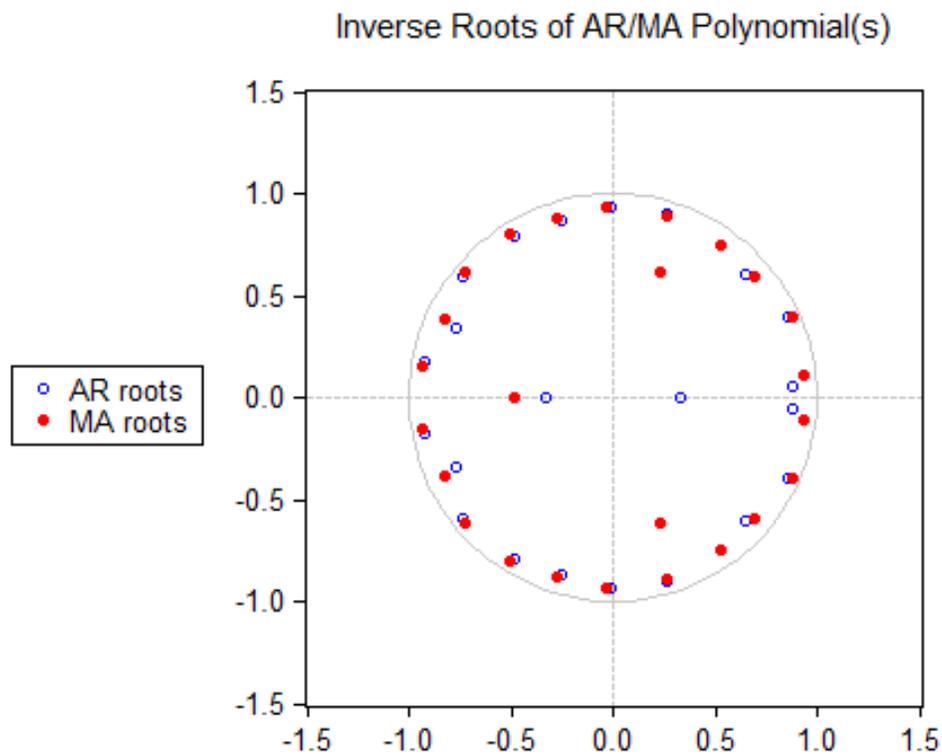


Figura 7.29: Gráfica de raíces unitarias

En las Figuras 7.30 y 7.31 se muestran las predicciones, la primera presenta sólo las predicciones entre el 29 de Mayo de 2012 y el 28 de Septiembre de 2012 es decir, los datos que no se consideraron para la construcción del

modelo, en la gráfica también se observan los intervalos de confianza de la predicción, la media del error de predicción fue de 0.39.

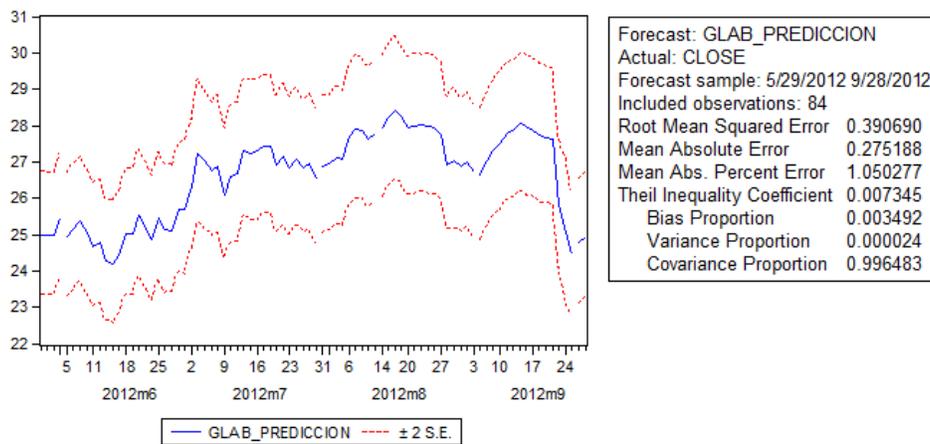


Figura 7.30: Predicción Mayo 29 a Septiembre 28 de 2012

En la Figura 7.31 se hace una comparación entre los valores reales de la serie original (llamada close) y los obtenidos con el modelo (predicción), para este caso se toman los 1 090 datos (desde el 28 de Junio de 2008 hasta el 28 de Septiembre de 2012).

En este ejemplo se puede apreciar que el modelo se ajusta a los datos del 28 de Junio de 2008 hasta el 29 de Mayo de 2012 y que en la predicción se tienen mayores diferencias.



Figura 7.31: Comparación de la predicción y las observaciones reales

7.3. TELMEX

Se toman 3 104 datos históricos del precio de las acciones de la empresa Telefonos de Mexico, S.A.B. de C.V. (TELMEXL.MX) a partir del 1 de Marzo de 2000 y hasta el 21 de Diciembre de 2011, denotando estos datos como el proceso $\{Z_t | t \in [1, 3104]\}$, tomando $t_1 = \$26.36$ que fue el precio al cierre el 1° de Marzo de 2011. Los datos de Diciembre 22 de 2011 a Septiembre 8 de 2012 se reservan con el fin de obtener una comparación entre los valores reales y los realizados con el predictor.

En la Figura 7.32 se muestra el comportamiento de $\{Z_t\}$.

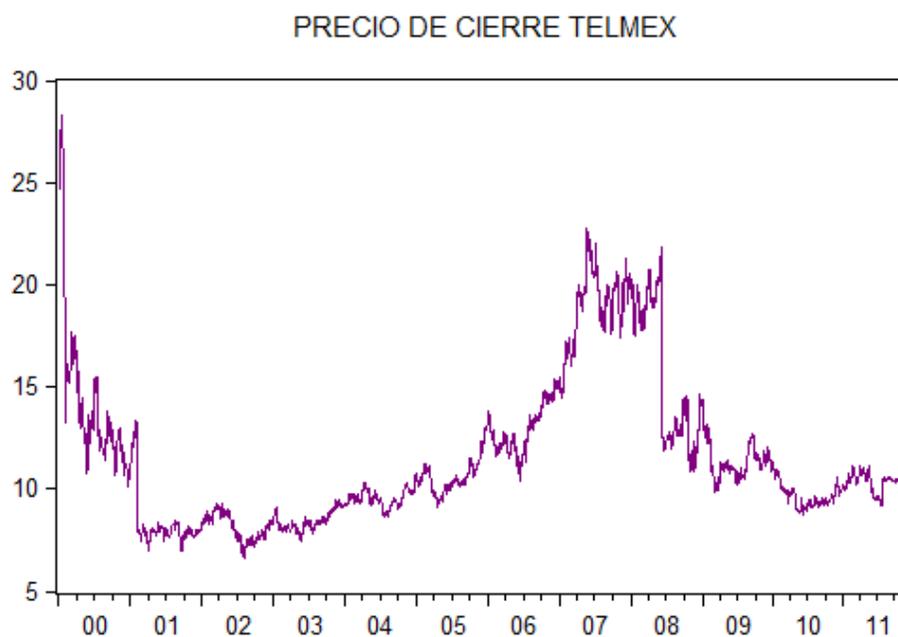
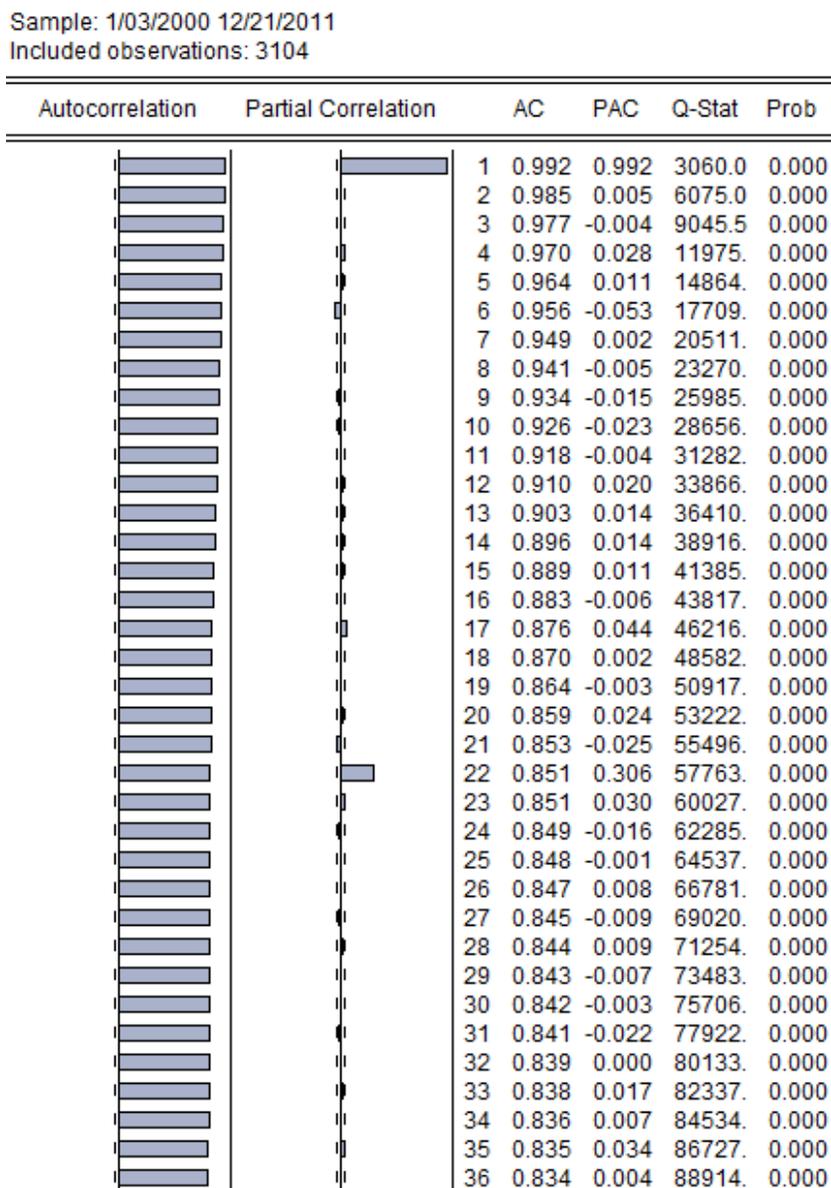


Figura 7.32: Precio de las acciones el cierre (TELMEX)

En la gráfica se observa que los datos no se concentran alrededor de un valor, así que el proceso no es estacionario en media, la distancia entre las realizaciones z_i (con $i = 1, \dots, 3104$) no es constante, es decir, que $|z_i - z_{i-1}| \neq |z_j - z_{j-1}|$ cuando $i \neq j$ por tanto, $\{Z_t\}$ no es estacionario en varianza.

Figura 7.33: correlograma de la serie $\{Z_t\}$

En el correlograma de la serie $\{Z_t\}$ (Figura 7.33) se observa que la función de autocorrelación (*fas*) toma valores positivos que decrecen lentamente, entonces, como se dijo en la sección 6.1.1 la serie no es estacionaria por lo que se debe diferenciar obteniendo la nueva serie $\{Y_t\}$ (Figura 7.34), donde

$y_t = \nabla \ln z_t$, vease que cada vez que se hace una diferencia se pierde un dato, por lo tanto ya no se tienen 3 104 observaciones sino 3 103.

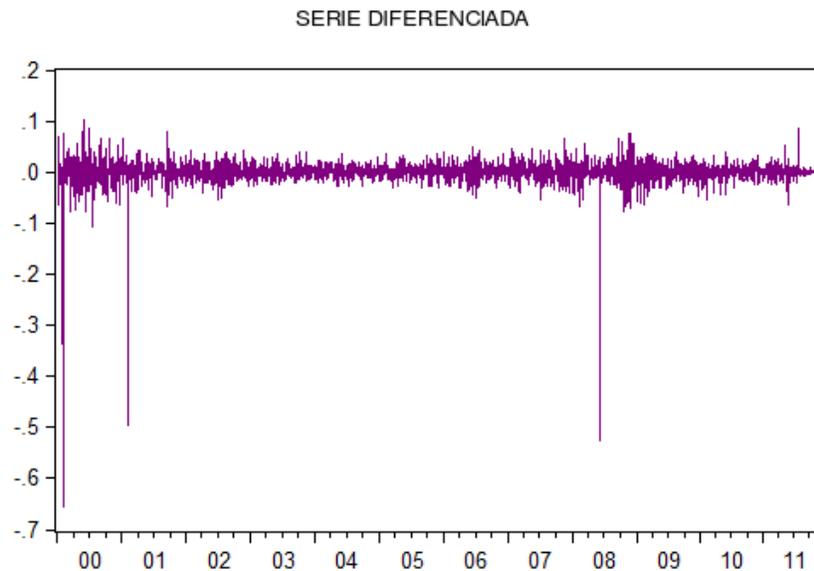


Figura 7.34: Gráfica de la serie $\{Y_t\}$

Es claro que $\{Y_t\}$ es estacionaria pero se realiza la prueba de Dickey-Fuller aumentada (Figura 7.35) para mayor seguridad.

Null Hypothesis: DIF has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=28)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-53.75206	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432269	
5% level	-2.862273	
10% level	-2.567205	

Figura 7.35: Test de Dickey-Fuller aumentado para $\{Y_t\}$

Sample: 1/03/2000 12/21/2011
Included observations: 3103

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.036	0.036	4.0892	0.043
		2	-0.013	-0.014	4.6247	0.099
		3	-0.052	-0.052	13.183	0.004
		4	-0.038	-0.034	17.604	0.001
		5	0.006	0.007	17.717	0.003
		6	0.007	0.003	17.877	0.007
		7	0.005	0.001	17.955	0.012
		8	-0.008	-0.008	18.140	0.020
		9	0.019	0.021	19.303	0.023
		10	-0.013	-0.014	19.827	0.031
		11	-0.018	-0.017	20.812	0.035
		12	-0.009	-0.007	21.053	0.050
		13	-0.020	-0.020	22.348	0.050
		14	-0.012	-0.014	22.795	0.064
		15	0.008	0.006	22.986	0.084
		16	-0.052	-0.055	31.283	0.012
		17	0.001	0.003	31.285	0.018
		18	-0.001	-0.003	31.288	0.027
		19	-0.031	-0.036	34.363	0.017
		20	0.028	0.027	36.772	0.012
		21	-0.028	-0.032	39.300	0.009
		22	-0.028	-0.029	41.749	0.007
		23	0.011	0.013	42.147	0.009
		24	-0.013	-0.018	42.689	0.011
		25	-0.047	-0.050	49.619	0.002
		26	-0.009	-0.008	49.847	0.003
		27	-0.002	-0.006	49.859	0.005
		28	-0.005	-0.010	49.947	0.007
		29	0.010	0.002	50.264	0.008
		30	0.012	0.010	50.723	0.010
		31	-0.017	-0.017	51.602	0.012
		32	0.001	-0.004	51.607	0.016
		33	-0.004	-0.003	51.646	0.020
		34	-0.033	-0.033	54.994	0.013

Figura 7.36: correlograma de la serie $\{Y_t\}$

Para la determinación del modelo se realizó el correlograma de la serie $\{Y_t\}$, en este caso, los valores que salen de las bandas en la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial son: 1, 3, 4, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 25 y 34, sin embargo, en el modelo no todos resultaron significativos.

Sample (adjusted): 2/03/2000 12/21/2011
 Included observations: 3081 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000125	0.000359	-0.348038	0.7278
AR(1)	0.036384	0.017971	2.024575	0.0430
AR(4)	-0.028724	0.015725	-1.826588	0.0679
AR(16)	-0.041750	0.032273	-1.293677	0.1959
AR(21)	-0.060854	0.032051	-1.898647	0.0577
AR(22)	-0.055162	0.031794	-1.735006	0.0828
MA(3)	-0.034105	0.018031	-1.891431	0.0587
MA(16)	0.018072	0.036985	0.488637	0.6251
MA(21)	0.043669	0.036791	1.186973	0.2353
MA(22)	0.036430	0.036510	0.997808	0.3185

Figura 7.37: modelo

Los valores de la función de autocorrelación son: 3, 16, 21, y 22, mientras que en la función de autocorrelación parcial los coeficientes significativos son: 4, 16, 21 y 22, Ar(1) se agregó con el fin tener suficientes para determinar el modelo; la constante C en este también es significativa. Se obtuvo un modelo ARIMA(5, 1, 4), que es

$$z_t = -0,000125 + 0.036z_{t-1} - 0.028z_{t-2} - 0.041z_{t-3} - 0.060z_{t-4} - 0.055z_{t-5} + 0.034a_{t-1} - 0.018a_{t-2} - 0.043a_{t-3} - 0.036a_{t-4}.$$

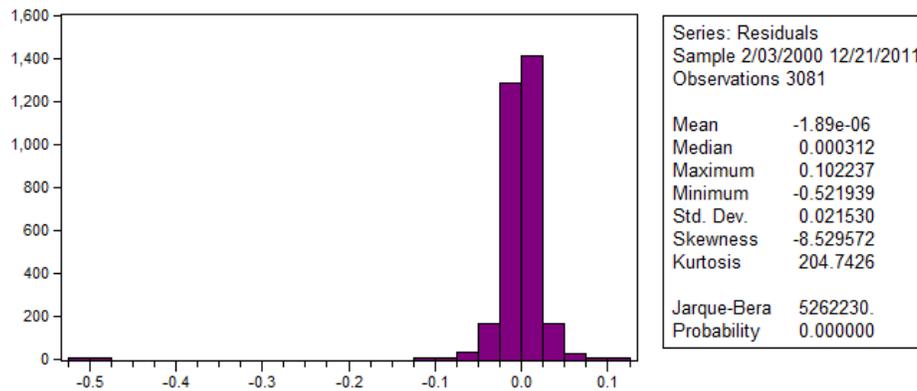


Figura 7.38: histograma de residuos

Comprobando normalidad de los residuos, en la Figura 7.38 se muestra el histograma así como la prueba de Jarque-Bera, la media es de 0.000312, cercana a cero, por lo que se tiene un proceso de ruido blanco aproximado.

Con el correlograma, en la Figura 7.39, se comprueba que los datos no están correlacionados pues ninguno sale de las bandas.

Sample: 2/03/2000 12/21/2011

Included observations: 3081

Q-statistic probabilities adjusted for 9 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.001	-0.001	0.0008	
		2	-0.001	-0.001	0.0044	
		3	0.002	0.002	0.0184	
		4	0.001	0.001	0.0212	
		5	0.000	0.000	0.0212	
		6	0.000	0.000	0.0214	
		7	-0.000	-0.000	0.0218	
		8	0.002	0.002	0.0381	
		9	0.002	0.002	0.0565	
		10	0.002	0.002	0.0723	0.788
		11	-0.001	-0.001	0.0731	0.964
		12	-0.001	-0.001	0.0764	0.995
		13	-0.000	-0.000	0.0764	0.999
		14	-0.001	-0.001	0.0820	1.000
		15	-0.001	-0.001	0.0831	1.000
		16	-0.002	-0.002	0.0940	1.000
		17	-0.001	-0.001	0.1007	1.000
		18	-0.001	-0.001	0.1047	1.000
		19	-0.000	-0.000	0.1050	1.000
		20	-0.001	-0.001	0.1073	1.000
		21	-0.001	-0.001	0.1129	1.000
		22	0.000	0.000	0.1132	1.000
		23	0.002	0.002	0.1235	1.000
		24	0.003	0.003	0.1569	1.000
		25	0.010	0.010	0.4588	1.000
		26	0.001	0.001	0.4618	1.000
		27	-0.000	-0.000	0.4622	1.000
		28	0.000	-0.000	0.4622	1.000
		29	-0.001	-0.001	0.4651	1.000
		30	-0.001	-0.001	0.4680	1.000
		31	0.002	0.002	0.4867	1.000
		32	-0.001	-0.001	0.4929	1.000

Figura 7.39: Correlograma de errores

Las raíces unitarias la ecuación característica del polinomio autorregresivo se muestran en la Figura 7.40, con los que se comprueba que el modelo es

estacionario e invertible.

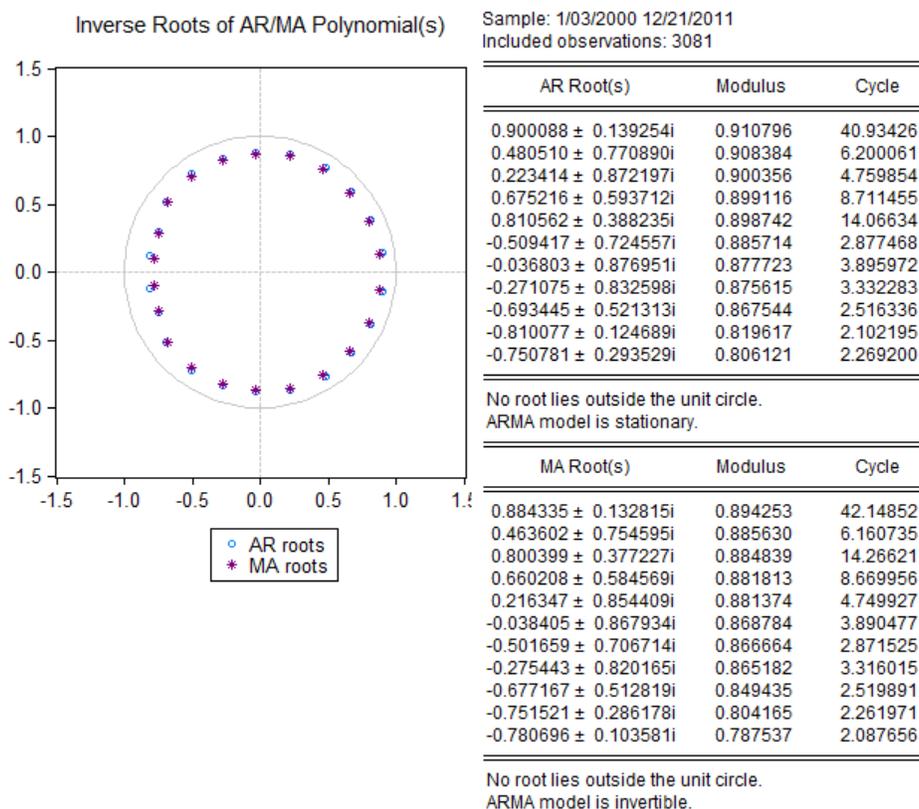


Figura 7.40: Raíces unitarias

Ya comprobados los supuestos del modelo se realizó la predicción de los días omitidos para la construcción del modelo, es decir, los valores del 21 de Diciembre de 2011 a 28 de Septiembre de 2012, que se puede ver en la Figura 7.41.

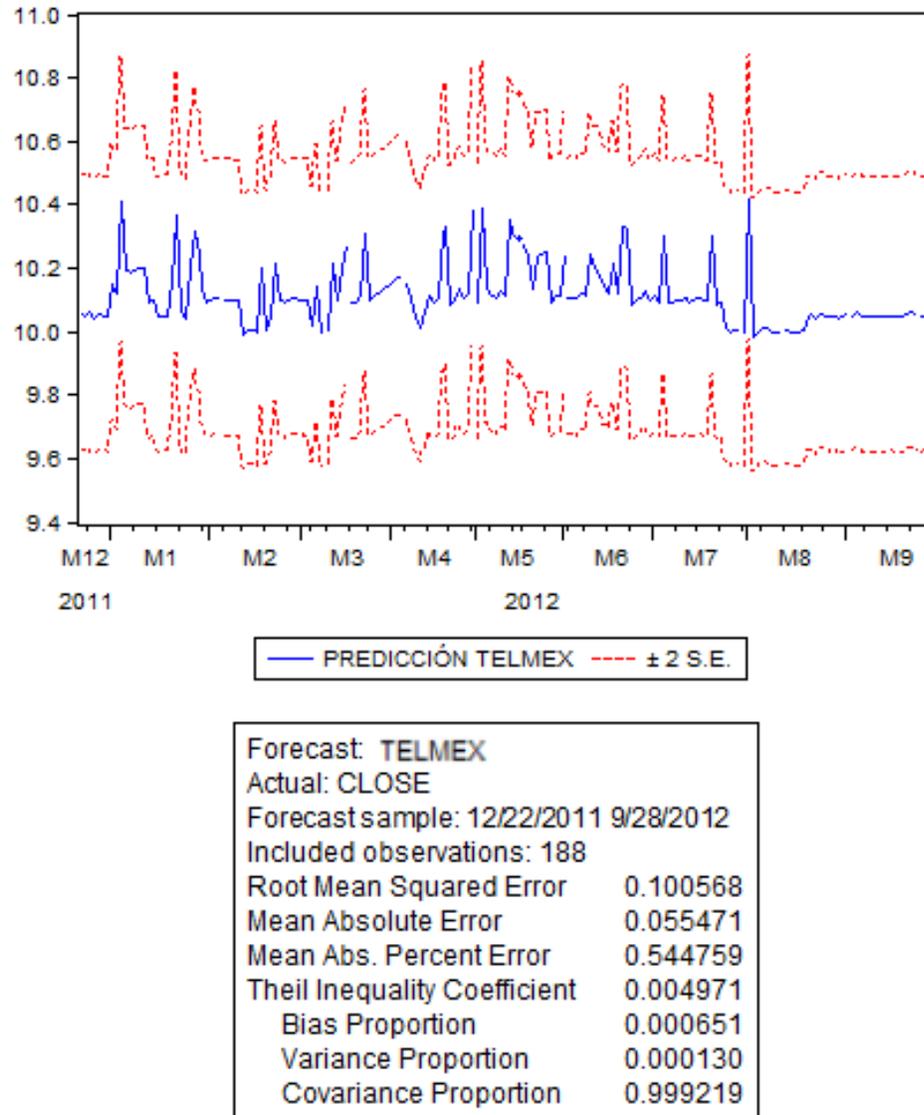


Figura 7.41: Predicción del 22 de Diciembre al 28 de Septiembre.

La media del error de predicción es de 0.1.

En la Figura 7.42 se muestra una tabla de comparaciones entre los datos obtenidos con el modelo y los reales del 14 de Agosto al 28 de Septiembre de 2012 , en la columna *obs* se dan las fechas de cada observación (mes/día/año), en la siguiente columna se presentan las predicciones, en la tercera columna los datos reales y finalmente en la cuarta columna se observan los errores de predicción.

obs	CLOSE	PREDICCION	ERROR_DE_P REDICCION
8/14/2012	10	10.00354	0.00354
8/15/2012	10	9.99898	0.00102
8/16/2012	10	10.00036	0.00036
8/17/2012	10.01	9.998747	0.011253
8/20/2012	10.05	10.00565	0.04435
8/21/2012	10.05	10.04954	0.00046
8/22/2012	10.05	10.05226	0.00226
8/23/2012	10.05	10.03967	0.01033
8/24/2012	10.05	10.05845	0.00845
8/27/2012	10.05	10.04885	0.00115
8/28/2012	10.05	10.04825	0.00175
8/29/2012	10.05	10.04876	0.00124
8/30/2012	10.05	10.0416	0.0084
8/31/2012	10.05	10.04739	0.00261
09/03/2012	10.05	10.05607	0.00607
09/05/2012	10.06	10.0495	0.0105
09/06/2012	10.05	10.05927	0.00927
09/07/2012	10.05	10.04803	0.00197
09/10/2012	10.05	10.04795	0.00205
09/11/2012	10.05	10.04849	0.00151
09/12/2012	10.05	10.04818	0.00182
9/13/2012	10.05	10.04853	0.00147
9/14/2012	10.05	10.04838	0.00162
9/17/2012	10.05	10.0487	0.0013
9/18/2012	10.05	10.04822	0.00178

Figura 7.42: Tabla de comparación entre la predicción y los datos reales.

Conclusiones

En esta tesis se estudió el problema de valuación de opciones tanto Europeas como Americanas usando el método binomial (árboles binomiales), aunque en este trabajo sólo fueron consideradas acciones que no pagan dividendos, este método también es aplicable a acciones que si los pagan. El modelo tiene la ventaja de ser bastante sencillo, aunque al aumentar el número de etapas los cálculos se vuelven más complejos, por lo que en el caso de opciones europeas de tipo *call* y *put* así como para opciones americanas de compra es mas conveniente emplear el modelo de Black-Scholes.

En el presente análisis también se ha aplicado el modelo ARIMA para la predicción de una serie de tiempo, en particular se ha empleado en el precio de las acciones de tres empresas, se observó que en una muestra de 3 000 observaciones el modelo encontrado se ajusta mejor que al modelo basado en 1 000 observaciones

Como trabajos a futuro

- Se puede ampliar el modelo ARIMA para el caso de series de tiempo estacionales y con interferencias.
- Se puede hacer una extensión para la valuación de algunas variantes de las opciones americanas como la canasta
- También se puede hacer una comparación del modelo binomial con respecto a otros métodos numéricos.

Apéndice A

Teorema de Extensión de Kolmogorov

Definición A.1 Sea \mathcal{F} una colección de subconjuntos de Ω (espacio muestral). Entonces \mathcal{F} es llamada sigma-álgebra si cumple con las propiedades siguientes: (véase [1])

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_1, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definición A.2 Una medida de probabilidad en una σ -álgebra \mathcal{F} es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que cumple con:

1. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
3. Si $\langle A_i \rangle \subset \mathcal{F}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definición A.3 Sea $x \in \mathbb{R}$, la mínima σ -álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma $[-\infty, x)$ es llamada σ -álgebra de Borel, la cual es denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición A.4 Sean \mathcal{F}_j una σ -álgebra de Ω_j con $j = 1, 2, \dots, n$, definamos $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$. Un rectángulo medible en Ω es un conjunto $A = A_1 \times \dots \times A_n$ donde $A_j \in \mathcal{F}_j$ para cada $j = 1, \dots, n$, la mínima σ -álgebra que contiene al rectángulo medible es llamada σ -álgebra producto denotada por $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n$, cuando \mathcal{F}_j coincide con una σ -álgebra \mathcal{F} fija entonces la σ -álgebra producto es denotada por \mathcal{F}^n .

Definición A.5 Para cada $j = 1, 2, \dots$, sean $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{j=1}^n \Omega_j$, el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tal que $\omega_j \in \Omega_j$, $j = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{j=1}^n \Omega_j$ definido como

$$B^n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in B^n\}.$$

El conjunto B^n es llamado el cilindro con base B^n ; se dice que el cilindro es medible si $B^n \in \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$. Si $B^n = A_1 \times \dots \times A_n$ donde $A_i \subset \Omega_i$ para cada i , B^n es llamado rectángulo, y rectángulo medible si $A_i \in \mathcal{F}_i$ para cada i .

Definición A.6 La mínima σ -álgebra bajo cilindros medibles es llamada σ -álgebra producto \mathcal{F} , denotada por $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$. En particular si toda \mathcal{F}_i coincide con la σ -álgebra \mathcal{F} , entonces $\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ que se denota como \mathcal{F}^{∞} .

Considerando el problema de construir medidas de probabilidad en la σ -álgebra producto $\prod_{t \in T} \mathcal{F}$, denotemos $v = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un subconjunto finito de T y $\prod_{t \in T} \mathcal{F} = \mathcal{F}_v$, donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $u = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\}$ un subconjunto distinto del vacío de v , $(y(t_1), \dots, y(t_n)) \in \Omega_v := \prod_{t \in T} \Omega_t$ denotada por y_v y $w = (w(t), t \in T)$ en $\prod_{t \in T} \Omega_t$, donde $w_v = (w(t_1), \dots, w(t_n))$. Si $B \in \mathcal{F}_v$ el cilindro medible con base B será denotado por $B(v)$. Si P_v es una medida de probabilidad en \mathcal{F}_v la *proyección de P_v en \mathcal{F}_u* es la medida de probabilidad $\pi_u(P_v)$ en \mathcal{F}_u definida por

$$[\pi_u(P_v)](B) = P_v\{y \in \Omega_v : y_u \in B\} \quad B \in \mathcal{F}_u.$$

Teorema A.1 (*Teorema de extensión de Kolmogorov*) Para cada t en un conjunto arbitrario de índices T , sea $\Omega_t = \mathbb{R}$ y \mathcal{F}_t un conjunto de Borel de \mathbb{R} y suponga que para cada subconjunto distinto del vacío v de T existe una media de probabilidad P_v en \mathcal{F}_v , suponga que P_v es consistente, es decir que $\pi_v(P_v) = P_u$ para cada u distinto del vacío con $u \subset v$.

Entonces existe una única medida de probabilidad P en $\mathcal{F} = \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$ tal que $\pi_v(P) = P_v$ para toda v .

Para la demostración véase [1].

La propiedad de consistencia en términos de la función de densidad está dado como

$$\int f_{t_1, \dots, t_i, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i = f_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(t_1, \dots, x_{i-1}, t_{i+1}, \dots, x_n).$$

Apéndice B

Operadores

B.1. Definiciones

Definición B.1.1 *Se define como el operador de retardo \mathbf{B} un operador lineal que aplicada a una función dependiente del tiempo proporciona esa misma función retardada un periodo*

$$\mathbf{B}f(t) := f(t - 1). \quad (\text{B.1})$$

En particular si se aplica el operador de retardo a una serie de tiempo z_t se obtendrá la misma serie retardada un periodo.

$$\mathbf{B}z_t := z_{t-1}.$$

El operador puede ser aplicado sucesivamente

$$\mathbf{B}^k z_t := \underbrace{\mathbf{B} \dots \mathbf{B}}_k z_t = z_{t-k}.$$

Definición B.1.2 *El operador diferencia denotado por $\nabla = (1 - \mathbf{B})$ aplicado a una serie de tiempo*

$$\nabla z_t = (1 - \mathbf{B})z_t = z_t - z_{t-1}, \quad (\text{B.2})$$

es decir, al aplicar el operador diferencia a una serie z_t con T observaciones se obtiene una nueva serie con $T - 1$ observaciones.

Al igual que el operador de retardo, el operador diferencia puede aplicarse mas de una vez

$$\nabla^2 z_t = (1 - \mathbf{B})^2 z_t = (1 - \mathbf{B})(z_t - z_{t-1}) = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}. \quad (\text{B.3})$$

Cuando la serie original $\{Z_t\}$ es una serie de precios en un activo financiero, la serie $\nabla \ln z_t$ se define como los rendimientos de este activo.

$$\begin{aligned} \nabla \ln z_t &= \ln \left(1 + \frac{z_t - z_{t-1}}{z_{t-1}} \right) \\ &= \ln \frac{z_t}{z_{t-1}}. \end{aligned}$$

B.2. Estacionariedad e Invertibilidad

Teorema B.2.1 *Un proceso autorregresivo finito $AR(p)$ es estacionario sí y solo sí el modulo de las raíces del polinomio autorregresivo $\phi_p(B)$ está fuera del circulo unidad para $t > 0$ (véase [10]).*

Demostración Primero se demostrará que la solución general de una ecuación homogénea de primer orden es AG^t , donde A es una constante determinada por las condiciones iniciales y G^{-1} es la solución de la ecuación característica del proceso.

Sean

$$(1 - \phi B)x_t = 0 \quad (\text{B.4})$$

Una ecuación homogénea de primer orden y x_0 un valor inicial, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi x_0 \\ x_2 &= \phi x_1 = \phi^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_t &= \phi^t x_0. \end{aligned}$$

Tomando $A = x_0$ y $G = \phi$ se tiene que AG^t es la solución de la ecuación (B.4)

Ahora se demostrará el Teorema

- En el caso de un proceso AR(1) la ecuación característica está dada por

$$1 - \phi B = 0,$$

y su solución es:

$$B = \frac{1}{\phi}.$$

Pero gracias a la condición de estacionariedad se tienen que

$$|\phi| < 1 \text{ sí y sólo sí } \frac{1}{|\phi|} > 1.$$

- AR(2) Considérese ahora la ecuación homogénea de segundo orden

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)x_t = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0,$$

son

$$B_i = -\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}, \quad i = 1, 2.$$

la condición para que el proceso sea estacionario es que

$$|B_1| = \left| \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1, \quad |B_2| = \left| \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1.$$

Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$ las raíces son reales y el módulo es el valor absoluto; si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ las raíces son complejas conjugadas $B_1, B_2 = a \pm bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

- AR(k) Un polinomio homogéneo de orden k se puede escribir como

$$(1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_k B)x_t = 0,$$

donde las raíces G_i , $i = 1, \dots, k$ son distintas, la solución de la ecuación es de la forma

$$x_t = A_1 G_1^t + \dots + A_k G_k^t,$$

donde A_i , $i = 1, \dots, k$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales y G_i^{-1} , con $i = 1, \dots, k$ son las raíces de la ecuación característica tales que

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_k B^k) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_k B)$$

con lo que se puede observar que para que x_t tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$ G_i^t ($i = 1, \dots, k$) debe tender a cero lo que implica que los módulos de todas las soluciones deben ser menores que uno.

Teorema B.2.2 *Un proceso de medias móviles finito $MA(q)$ es invertible si y sólo si el módulo de las raíces unitarias del polinomio de medias móviles $\theta_q(L)$ está fuera del círculo unitario.*

La demostración es similar al Teorema B.2.1.

Apéndice C

Predictor Óptimo

Supóngase que se ha observado una realización de longitud T de una serie de tiempo $\{Z_t\}$, se desea prever el valor de los siguientes k periodos ($k > 0$), z_{T+1}, \dots, z_{T+k} .

Se denotará como $\hat{z}_T(k)$ al predictor de z_{t+k} obtenido como función de las T realizaciones observadas, T es llamado *origen* de la predicción y k *horizonte*.

Un predictor lineal es aquel que tiene la forma

$$\hat{z}_T(k) = \alpha_1 z_T + \alpha_2 z_{T-1} + \dots + \alpha_T z_1,$$

donde α_i , $i = 1, \dots, T$ son constantes a determinar, el *error de predicción* del predictor $\hat{z}_T(k)$ se define como

$$e_T(k) = z_{T+k} - \hat{z}_T(k).$$

Lo que se busca es minimizar este error de predicción, si los errores de predicción positivos y negativos son valorados de igual manera (predecir por exceso o por defecto) entonces, el criterio que se considera es el de minimizar el valor esperado dado por la función

$$\begin{aligned} l(e_{T+k}) &= ce_t^2(k) && \text{(C.1)} \\ &\text{ó} \\ l(e_{T+k}) &= c|e_t(k)|. \end{aligned}$$

con $c = cte$, $l(e_{T+k})$ es llamada *función de pérdida*.

La función de pérdida que generalmente es empleada es (C.1), lo que conlleva al criterio de minimizar el error cuadrático medio de predicción (ECMP) de z_{T+k} dado que se tienen las observaciones z_1, z_2, \dots, z_T , es decir, de busca minimizar

$$ECMP(z_{T+k}|z_1, z_2, \dots, z_T) = E[(z_{T+k} - \hat{z}_T(k))^2|z_1, z_2, \dots, z_T]. \quad (C.2)$$

la esperanza se toma respecto a la distribución de la v.a. $z_{T+k}|z_1, z_2, \dots, z_T$.

Se afirma que el predictor que minimiza el error cuadrático medio es la esperanza de $z_{T+k}|z_1, z_2, \dots, z_T$.

Demostración

Denotaremos a la esperanza de la distribución condicionada $z_{T+k}|z_1, z_2, \dots, z_T$ ($E[z_{T+k}|z_1, z_2, \dots, z_T]$) como $\mu_{T+k|T}$, restando y sumando $\mu_{T+k|T}$ en (C.2) y denotando \bar{z}_T , a, z_1, z_2, \dots, z_T se tiene

$$E[(z_{T+k} - \hat{z}_T(k))^2|z_1, z_2, \dots, z_T] = E\left[\left((z_{T+k} - \mu_{T+k|T}) + (\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))\right)^2|\bar{z}_T\right],$$

desarrollando el cuadrado

$$E\left[(z_{T+k} - \mu_{T+k|T})^2 + 2(z_{T+k} - \mu_{T+k|T})(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k)) + (\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))^2|\bar{z}_T\right],$$

donde

$$\begin{aligned} E\left[2(z_{T+k} - \mu_{T+k|T})(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))|\bar{z}_T\right] &= 2(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))E\left[z_{T+k} - \mu_{T+k|T}|\bar{z}_T\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces la ecuación C.2 es igual a

$$\begin{aligned} ECMP(z_{T+k}|\bar{z}_T) &= E[(z_{T+k} - \mu_{T+k|T})^2|\bar{z}_T] + E[(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))^2|\bar{z}_T] \\ &= var(z_{T+k}|\bar{z}_T) + E[(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))^2|\bar{z}_T]. \quad (C.3) \end{aligned}$$

Ya que $var(z_{T+k}|\bar{z}_T)$ no depende del predictor $\hat{z}_T(k)$ entonces el error cuadrático medio de predicción se minimizará igualando a cero el segundo

término de (C.3), es decir $E[(\mu_{T+k|T} - \hat{z}_T(k))^2 | \bar{z}_T] = 0$ si $\mu_{T+k|T} = \hat{z}_T(k)$.

Por lo tanto el predictor que minimiza el ECMP de un valor futuro se obtiene tomando la esperanza condicionada a los datos ya observados.

Bibliografía

- [1] Ash Robert B. (2000) *Probability and Measure Theory*, UK, Harcourt Academic Press.
- [2] Borak S., Härdle W. K., López Cabrera B. (2010) *Statistics of Financial Markets Exercises and Solutions*, Alemania, Springer.
- [3] C. Hull, John (2000) *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, México, Prentice Hall.
- [4] Cortés Toto, Daniela (2011) *Valuación de opciones americanas vía programación dinámica*, Tesis de maestría Facultad de Cs. Físico-Matemáticas. BUAP.
- [5] Cox, J., Ross, S., Rubinstein M. (1979) *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, Pp. 229-263.
- [6] De Lara Haro, Alfonso (2005) *Medición y control de riesgos financieros*, México, Limusa.
- [7] Dickey, D. A., Fuller W. A. (1979) *Distribution of the Estimators for autoregressive time series with a unit root*, Journal of The American Statistical Association, Vol. 74.
- [8] Domínguez, G. R. M., Zambrano R. A. (2011) *Pronóstico con Modelos ARIMA para los casos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y la Acción de América Móvil (AM)*, IPN. Consultado en: http://xxicolmemeuan.netne.net/extenso/Rosa_Maria_Dominguez_Gijon_-_Pronostico_con_modelos_ARIMA_para_los_casos_del_indice_de_precios.pdf.

-
- [9] Fernández, Pablo (1996) *Opciones, futuros e instrumentos derivados*, España, Deusto.
- [10] González Casimiro, María P. (2009) *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*, España. Consultado en: <http://www.sarriko-online.com/cas/fichas/2009/04-09.pdf>.
- [11] Gerrero G., Victor (1987) *Modelos estadísticos para series de tiempo univariadas*, México, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.
- [12] Lamothe Fernández P., Pérez Somalo M. (2003) *Opciones financieras y productos estructurados*, España, McGraw-Hill
- [13] Ordoñez Porras, Edith N. (2002) *La modelización de variables macroeconómicas Peruanas; Los ARCH como alternativa a los ARIMA*, Perú, Centro de Investigación y Desarrollo del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI).
- [14] Peña, Daniel (2005) *Análisis de series temporales*, España, Alianza Editorial.
- [15] Rascón Ostega, Pedro J. (2007) *MANUAL PRÁCTICO DE OPCIONES FINANCIERAS: una forma equilibrada de invertir en la bolsa* Libros en red pp 12 Prieria Edición en español en versión digital <http://books.google.com.mx>.
- [16] Tsay, Ruey. S. (2002) *Analysis of Time Series Financial econometrics*, Estados Unidos, Wiley-Intercience Publication.
- [17] Venegas Matínez, Francisco (2008) *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Chile, Cengage Learning Editores.
- [18] Villarreal, Francisco G. (2005) *Elementos teóricos del ajuste estacional de series económicas utilizando X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS*, Serie Estudios y estadísticos prospectivos CEPAL