Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Ciertas propiedades de continuos y sus hiperespacios

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Alberto Alejandro Vega Bravo

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Fernando Macías Romero
Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE. 23 de mayo de 2024.

Agradecimientos

La culminación de una etapa extraordinaria de mi vida no habría sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, por ello quiero agradecer a mi padre Carlos Vega y a mi madre Maricela Bravo Huerta por confiar en mí cuando decidí estudiar matemáticas y perseguir mis sueños; gracias por tantos años de orientación y lecciones de vida, que no les quepa duda que estaré siempre para ustedes así como ustedes lo han estado para mí. A mis hermanos Nayeli Beatriz Vega Bravo y Juan Carlos Vega Bravo gracias por sus sabios consejos, cariño y compañía.

También quiero agradecer a mis abuelos José Roberto Rubén Bravo Torres y María de la Paz Huerta Gómez por estar siempre conmigo, apoyándome y motivándome a seguir adelante.

Agradezco a Alexis Yanick, Cinthia, Magda, Karen y Karla Angélica por los buenos momentos que pasamos en la facultad y el apoyo moral que tuve de ustedes. Un gran agradecimiento a mi mejor amigo Mario Lorenzo Rosas quien siempre estuvo apoyándome en los malos momentos y ayudarme a salir adelante. Gracias por los 12 años de amistad, mi gran amigo.

Agradezco a cada profesor que me impartió clase durante toda la carrera, en especial a los profesores Manuel Ibarra, Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo y el Dr. Iván Martínez Ruíz, quienes me trasmitieron su increíble pasión por las matemáticas.

También agradezco a mis directores de tesis David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero por la oportunidad de trabajar con ellos y mostrarme el emocionante mundo de la teoría de continuos y sus hiperespacios.

Un agradecimiento especial a mi jurado por su valiosa retroalimentación, Dr. Luis Alberto Guerrero Méndez, Dra. Patricia Domínguez Soto y al Dr. Agustín Contreras Carreto por sus consejos y comentarios para mejorar este trabajo.

A todos ustedes muchas gracias.

Índice general

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados relacionados con la teoría de continuos e hiperespacios. La teoría de continuos tiene sus origenes en el siglo **XIX** cuando G. Cantor [1845-1918] da por primera ves la definición orignal de continuo la cual establece que un continuo es un subconjunto perfecto, es decir, cerrado y denso en si mismo conexo en un espacio Euclidiano. Tiempo más tarde los matemáticos Bronislaw Knaster [1893-1980], Kazimierz Kuratowski [1896-1980] y Waclaw Sierpinski [1882-1983] se dedicaron a cultivar la Teoría de los Continuos y casi al mismo tiempo se empezaron estudiar también los hiperespacios de continuos. En la actualidad entedemos que un continuo es un espacio métrico no vacío compacto y conexo.

En el capítulo 1, se presentan algunos resultados previos acerca de los espacios métricos y topológicos, ya que estos servirán para los capítulos siguientes. Después introduciremos a los continuos, veremos algunos ejemplos y algunas propiedades interesantes acerca de ellos. Estudiaremos un poco a los continuos encadenables. Por último, se tratará a profundidad las descomposiciones de un continuo que no son más que una partición de un continuo X. Primero daremos la definición de espacio de descomposición en general y veremos cuando un espacio de descomposición de un continuo es continuo.

En el capítulo 2, se centra en estudiar a los hiperespacios de un continuo X, estos son familias de subconjuntos de X que cumplen alguna propiedad en particular. Los más estudiados son:

$$\begin{aligned}
2^X =& \{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y no vacío}\},\\
C(X) =& \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},\\
C_n(X) =& \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},\\
F_n(X) =& \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},\\
F(X) =& \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X).
\end{aligned}$$

Al hiperespacio $C(X)$ se le conoce como el hiperespacio de subcontinuos de X a $F_n(X)$ como el n-ésimo producto simétrico. Veremos que estos hiperespacios se les pueda dotar de una métrica llamada métrica de Hausdorff, se darán algunos resultados interesantes que cumple esta métrica. Después introduciremos una clase de conjuntos llamados Vietóricos, estos nos ayudarán a construir una topología para el hiperespacio 2^X llamada topología de Vietoris y se verá que la topología generada por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris. Por último, se estudiará la convergencia en el hiperespacio 2^X, se mostrarán algunos reultados interesantes, y veremos que este hiperespacio es un continuo.

Finalmente, en el capítulo 3 presentamos tres modelos de $C(X)$, para cuando X es alguno de los siguientes continuos: el intervalo cerrado $[0,1]$, la circunferencia y el triodo simple. Básicamente, un modelo geométrico para un hiperespacio H, (donde H puede ser $2^X, C(X), C_n(X)$ o $F_n(X)$) de un continuo X, es un espacio conocido que es homeomorfo a H y cuyos elementos son puntos en lugar de subconjuntos de X. En [8] se presentan más modelos geométricos de $C(X)$ y $F_2(X)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capitulo escribiremos a manera de repaso algunas definiciones y propiedades acerca de los espacios métricos y topológicos, los cuales nos serán muy útiles en capítulos siguientes. Como es usual denotaremos por $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el conjunto de numeros reales, el conjunto de los numeros naturales y el conjunto de numeros reales positivos unión con el cero respectivamente.

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una **métrica** en X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$:*

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El siguiente teorema enuncia que una función d que cumpla con los incisos (i), (iii) y (iv) es automáticamente una métrica.

Teorema 1.2. *[3, Teorema 2.2] Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función. Entonces d es una métrica para X si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen*

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Definición 1.3. *Un* ***espacio métrico*** *es una pareja formada por un conjunto no vacío X y una métrica d definida en X.*

Ejemplo 1.4. *Algunos ejemplos de espacios métricos son:*

(i) *En $\mathbb{R}$, la función $d^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $d^1(x,y) = |x-y|$ es una métrica.*

(ii) *En general, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $d^n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida, para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por*

$$d^n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, es una métrica para $\mathbb{R}^n$, conocida como ***métrica euclidiana****.*

(iii) *Si consideramos $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida por*

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

es una métrica para $\mathbb{R}^n$, conocida como la ***métrica del taxista****.*

(iv) *En $\mathbb{R}^n$, la función $d_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_i - y_i| : x_i, y_i \in \mathbb{R}\}$ es una métrica para $\mathbb{R}^n$ y se le llama* ***métrica uniforme****.*

(v) *Si X es un conjunto no vacío. Definimos $d_{dis} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como*

$$d_{dis} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y, \\ 1 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

Así, d_{dis} es una métrica para el conjunto X y recibe el nombre de ***métrica discreta****.*

Las demostraciones de los ejemplos mencionados se pueden consultar en [3].

Notación 1.5. *Si X es un espacio métrico con métrica d lo denotamos por (X, d).*

Definición 1.6. *Sean un espacio métrico (X, d) y $x \in X$, $\epsilon > 0$. La* ***bola abierta*** *centrada en x y de radio ϵ es el conjunto*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Definición 1.7. *La* ***distancia de un punto*** *x de un espacio métrico (X, d) a un subconjunto A de X, es*

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Definición 1.8. *La* ***distancia entre dos subconjuntos*** *A y B de un espacio métrico (X, d) con métrica d, está dada por*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \ \text{ y } \ b \in B\}.$$

Definición 1.9. *El* ***diámetro*** *de un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es*

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Véase figura 1.1.

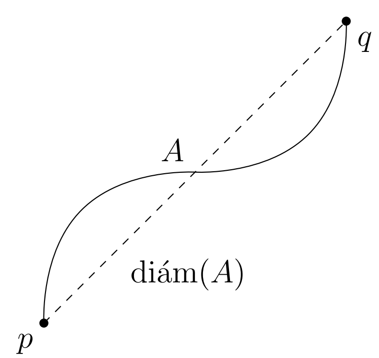

Figura 1.1: Diámetro de un conjunto.

Teorema 1.10. *[3, Lema 5.8] Sean (X, d) un espacio métrico y $a \in X$. La función $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida para cada $x \in X$, por $f(x) = d(x, a)$, es continua en X.*

Teorema 1.11. *[3, Lema 5.9] Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. La función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para todo $x \in X$, por $g(x) = d(x,A)$ es continua.*

Proposición 1.12. *Si (X,d) es un espacio métrico, A es un subconjunto compacto de X, entonces se cumple lo siguiente:*

(i) *Si $x \in X$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,A) = d(x,a)$.*

(ii) *Si B es un subconjunto compacto de X, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(A,B) = d(a,b)$.*

Demostración. (i) Sea $f : A \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $x_0 \in A$, por $f(x_0) = d(x,x_0)$. Por el teorema 1.10, tenemos que f es continua. Como A es compacto se sigue que f es acotada, así existe el ínfimo de $f(A)$, es decir, existe $a \in A$ tal que $f(a) \leq f(x_0)$, para cada $x_0 \in A$. Luego, de la definición de $d(x,A)$ se sigue que $d(x,A) = d(x,a)$.

(ii) Sea $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $x_0 \in A$, por $g(x_0) = d(x_0,B)$. Por el teorema 1.11 tenemos que g es continua. Como A es compacto se sigue que g es acotada y por tanto existe el ínfimo de $g(A)$, es decir, existe $a \in A$ tal que $g(a) \leq g(x_0)$. Así que, $d(a,B) \leq d(x_0,B)$. Además, como B es compacto y por el inciso (i), existe $b \in B$ tal que $d(a,B) = d(a,b)$, por lo que $d(A,B) = d(a,b)$.

■

Teorema 1.13. *[3, Lema 5.26] Sean (X,d) un espacio métrico, A un subconjunto compacto de X y B un subconjunto cerrado y no vacío de X. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $d(A,B) > 0$.*

Teorema 1.14. *[3, Corolario 4.13] Si A es un subconjunto de un espacio métrico X con $x_0 \in A$, $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$.*

Teorema 1.15. *[3, Teorema 4.16] Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 en un espacio métrico X, entonces toda subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0.*

Teorema 1.16. *[3, Teorema 3.38] Sea $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.17. *Sean* (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *espacios métricos y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función biyectiva. Decimos que es una **isometría** si para cualesquiera* $x, y \in X$, $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Definición 1.18. *Sea* X *un conjunto no vacío. Si* d *y* $\widehat{d}$ *son dos métricas para* X*. Decimos que* d *y* $\widehat{d}$ *son **métricas equivalentes** si y sólo si para cada* $x \in X$ *y para todo* $r > 0$*, existen números* $\epsilon_1 > 0$ *y* $\epsilon_2 > 0$ *tales que* $B_d(x, \epsilon_1) \subset B_{\widehat{d}}(x, r)$ *y* $B_{\widehat{d}}(x, \epsilon_2) \subset B_d(x, r)$.

Definición 1.19. *Sean* X *y* Y *dos espacios métricos. Si* $h : X \longrightarrow Y$ *es una función biyectiva y continua y* $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ *es continua, decimos que* h *es un **homeomorfismo**.*

Definición 1.20. *Sea* X *un conjunto no vacío. Una **topología** sobre el conjunto* X *es una familia* τ *de subconjuntos de* X *tal que*

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) *Si* $\mathscr{U}$ *es una familia arbitraria de subconjuntos de* τ*, entonces* $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$.

(iii) *Si* U *y* V *son elementos de* τ*, entonces* $U \cap V \in \tau$.

Al par (X, τ) *se le llama **espacio topológico**.*

Definición 1.21. *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$*. Un subconjunto* V *de* X *es una **vecindad** de* x *si contiene un abierto* U *de* X *que contiene a* x.

Definición 1.22. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Una **base** para la topología* τ *es una familia* $\mathscr{B} \subset \tau$ *tal que para cada* $U \in \tau$*, existe* $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ *tal que* $U = \bigcup \mathscr{C}$.

Definición 1.23. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Una **subbase** para la topología es una familia* $\mathscr{J} \subset \tau$ *tal que la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de* $\mathscr{J}$ *forma una base para* τ.

Teorema 1.24. *[2, proposicón 2.42.] Sea* $X \neq \emptyset$*. Una familia* $\mathscr{B}$ *de subconjuntos de* X *es una base para alguna topología* τ *si:*

(i) $\emptyset \in \mathscr{B}$.

(ii) *Siempre que* $B_0, B_1 \in \mathscr{B}$ *y* $x \in B_0 \cap B_1$, *existe* $B \in \mathscr{B}$ *tal que* $x \in B \subset B_0 \cap B_1$.

(iii) $X = \bigcup \mathscr{B}$.

Definición 1.25. *Un espacio topológico es* ***conexo*** *si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de* X, *o equivalentemente, si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de* X. *Si* X *no es conexo, decimos que es* ***disconexo***.

Definición 1.26. *Una pareja* (U, V) *de subconjuntos de un espacio topológico* X *es una* ***separación*** *de* X *si* U *y* V *son abiertos de* X, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ *y* $U \neq \emptyset \neq V$.

Observación 1.27. *Algunas observaciones son*

(i) *Un espacio topológico* X *es conexo si y sólo si no existe una separación de* X.

(ii) *Si* X *es conexo y* $X = U \cup V$, *donde* U *y* V *son abiertos de* X *y no vacíos, entonces* $U \cap V \neq \emptyset$.

(iii) *Si* X *es conexo y* $X = U \cup V$, *donde* U *y* V *son abiertos y ajenos de* X, *entonces* $U = \emptyset$ *o* $V = \emptyset$. *De hecho* $U \cap V = \emptyset$, *se tiene que* ($U = \emptyset$ *y* $V = X$) *o* ($U = X$ *y* $V = \emptyset$).

Ejemplo 1.28.

(i) *Es claro que cualquier conjunto con la topología indiscreta es un espacio conexo, pues dichos espacios no contienen dos subconjuntos abiertos no vacios diferentes.*

(ii) *Si* X *es un conjunto con la topológia discreta y* $x \in X$, *entonces los conjuntos* $\{x\}$ *y* $X \setminus \{x\}$ *son abiertos de* X, *ajenos, no vacíos y* $\{x\} \cup (X \setminus \{x\}) = X$. *Luego,* X *es disconexo.*

(iii) *Cualquier conjunto infinito* X *con la topología cofinita es conexo pues cualesquiera dos subconjuntos abiertos de* X *en él tienen intersección no vacía.*

Proposición 1.29. *[1, proposicón 8.1.4] Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son exactamente el vacío, los subconjuntos unipuntuales y los intervalos.*

Definición 1.30. *Una familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de* ***intersección finita*** *si, dado $J \subset I$ finito, se cumple que $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$.*

Teorema 1.31. *[1, Proposición 8.1.11] Sea $\{A_j : j \in J\}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X. Si $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{j \in J} A_j$ es conexo.*

Definición 1.32. *Un espacio topológico X es* ***conexo por trayectorias*** *si dados dos puntos $x, y \in X$, existe una función continua $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.*

Teorema 1.33. *[1, Teorema 8.2.3] Cualquier espacio topológico X conexo por trayectorias es conexo.*

Recordemos los axiomas de separación y algunos resultados de ellos.

Definición 1.34. *Sea X un espacio topológico.*

(i) *Decimos que X es un* ***espacio topológico*** *T_0, si dados cualesquiera dos puntos de X, existe un subconjunto abierto de X que contiene solo uno de ellos.*

(ii) *Decimos que X es un* ***espacio topológico es*** *T_1, si dados cualesquiera dos puntos de X, digamos $x, y \in X$ existen subconjuntos abiertos U y V de X, tales que $x \in U$, $y \notin U$, $x \notin V$ y $y \in V$.*

(iii) *Decimos que X es un* ***espacio topológico*** *T_2* ***o espacio Hausdorff*** *si dados dos puntos $x, y \in X$ existen subconjuntos abiertos U y V de X ajenos, tales que $x \in U$ y $y \in V$.*

(iv) *Decimos que X es un* ***espacio topológico*** *T_3* ***o espacio regular*** *si dados un subconjunto cerrado F de X y $x \in X \setminus F$, existen subconjuntos abiertos U y V de X ajenos, tales que $x \in U$ y $F \subset V$; además de ser un espacio T_1.*

Proposición 1.35. *[1, Ejemplo 5.1.15] Todo espacio métrico X es un espacio Hausdorff.*

Teorema 1.36. *[1, Teorema 5.1.6] Un espacio topológico X es un espacio T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Definición 1.37. *Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es un **espacio topológico normal o** T_4, si dados dos subconjuntos cerrados F_1 y F_2 de X, existen dos subconjuntos abiertos U y V de X, ajenos, tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$.*

Definición 1.38. *Sea X un espacio topológico.*

(i) *Una colección $\mathscr{U}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X si $X = \cup\mathscr{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathscr{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathscr{U}$ le llamaremos **cubierta abierta** de X. Por otro lado, si $\mathscr{U}$ es una cubierta de X y $\mathscr{V}$ es una subcolección de $\mathscr{U}$, diremos que $\mathscr{V}$ es una **subcubierta** de $\mathscr{U}$ si $\cup\mathscr{V} = \mathscr{U}$.*

(ii) *Decimos que X es un espacio topológico **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Proposición 1.39. *[1, proposición 7.1.6] Si X es un espacio topológico compacto, Y es un espacio topológico, y existe una función continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f[X] = Y$, entonces Y es compacto.*

Proposición 1.40. *[1, proposición 7.1.4] Sean X un espacio topológico compacto y F un subespacio cerrado de X. Entonces F es compacto.*

Proposición 1.41. *[1, corolario 7.1.9] Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, entonces f es una función cerrada.*

Proposición 1.42. *[1, Teorema 7.1.7] Sean X un espacio topológico Hausdorff, y K_1 y K_2 subespacios compactos de X. Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$.*

Definición 1.43. *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es **metrizable** si existe una métrica d sobre X que es compatible con la topología de X, es decir, que la topología τ_d coincide con la topología original de X.*

Teorema 1.44. *[1, Teorema 6.5.1] Todo espacio topológico Hausdorff normal y segundo numerable es metrizable.*

Para finalizar esta primera parte enunciaremos los siguientes resultados.

Teorema 1.45. *[11, Teorema 2.6] Si $\mathcal{C}$ es un conjunto numerable y $\mathcal{U}$ es la clase de los subconjuntos finitos de $\mathcal{C}$, es decir, si*

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{L} \subset \mathcal{C} : \ \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{C}\},$$

entonces $\mathcal{U}$ es numerable.

Teorema 1.46. *[9, Teorema 7.1] Sea B un conjunto no vacío. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B es numerable.

(ii) Existe una función suprayectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$.

(iii) Existe una función inyectiva $f : B \longrightarrow \mathbb{N}$.

1.1. Continuos

Definición 1.47. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dado un subconjunto Y de un continuo X, diremos que Y es un* ***subcontinuo*** *de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.*

La propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica, es decir, si X es un continuo y Y es un espacio métrico homeomorfo a X, entonces Y también es un continuo. Veamos algunos ejemplos de continuos:

Ejemplo 1.48. *Si consideremos $[0, 1]$ con la métrica usual, se cumple lo siguiente:*

(i) $[0, 1]$ *es conexo por ser un intervalo, véase 1.29.*

(ii) $[0, 1]$ *es compacto ya que es cerrado y acotado, véase 1.16.*

Así, $[0, 1]$ es un continuo.

Definición 1.49. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $\alpha : [0, 1] \longrightarrow A$ un homeomorfismo, diremos que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos del arco A.*

En la figura 1.2 se representan imagenes de arcos

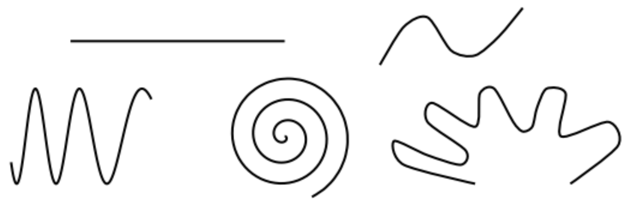

Figura 1.2: Ejemplos de arcos

Teorema 1.50. *Sea un espacio métrico X. Si A es un arco en X, entonces A es un continuo.*

Demostración. Sea A un arco en X. Existe un homeomorfismo $h : [0,1] \longrightarrow A$. Por el ejemplo 1.48, sabemos que el intervalo cerrado $[0,1]$ es compacto y conexo. Ahora, como la compacidad y la conexidad se preservan bajo funciones continuas, entonces A es compacto y conexo. Por lo tanto, A es un continuo. ■

Ejemplo 1.51. *Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la* ***circunferencia unitaria*** *con la métrica euclidea de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que*

(i) *S^1 es conexo pues S^1 es conexo por trayectorias y por el teorema 1.33, se tiene que S^1 es conexo.*

(ii) *S^1 es compacto pues es un conjunto cerrado y acotado.*

Definición 1.52. *Una* ***curva cerrada simple*** *es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1.*

En la figura 1.3 se muestran algunas curvas cerradas simples.

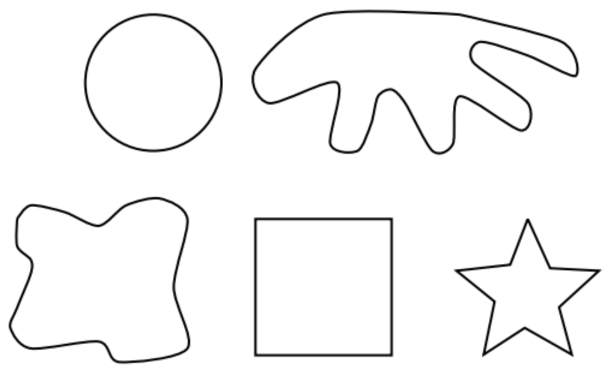

Figura 1.3: Ejemplos de curvas cerradas simples.

Teorema 1.53. *Sea X un espacio métrico. Si C es una curva cerrada simple en X, entonces C es un continuo.*

Demostración. Sea C un curva cerrada simple. Entonces existe un homeomorfismo $h : S^1 \longrightarrow C$. Por el ejemplo 1.51, sabemos que la circunferencia unitaria S^1 es conexo y compacto. Ahora, como la compacidad y conexidad se preservan bajo funciones continuas, tenemos que C es compacto y conexo, Por lo tanto, C es un continuo. ∎

Definición 1.54. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada n-dimensional B^n en $\mathbb{R}^n$, donde*

$$B^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \leq 1\}.$$

Definición 1.55. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n-esfera** es cualquier espacio homeomorfo a la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde*

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{x_1^2 + ... + x_{n+1}^2} = 1\}.$$

Definición 1.56. *Un **triodo simple** T es la unión de tres arcos que únicamente se intersectan en un punto v. El punto v es llamado **vértice** de T. Véase figura 1.4.*

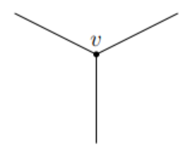

Figura 1.4: Triodo simple.

Teorema 1.57. *Sea X es un espacio métrico. Si T es un triodo simple en X, entonces T es un continuo.*

Demostración. Sea $T = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ un triodo simple en X con vértice v, es decir, A_1, A_2 y A_3 son arcos tales que la intersección dos a dos es $\{v\}$. Como los arcos son continuos, tenemos que A_1, A_2 y A_3 son compactos y conexos. Luego, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es conexo puesto que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{v\}$. Más aún, dado que la unión finita de compactos es un compacto, tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es compacto. Por lo tanto, T es un continuo. ■

Una propiedad que comparten el arco y la curva cerrada simple, y que no tiene el triodo simple, es que todo subcontinuo propio con más de un punto es un arco, lo cual se demuestra a continuación.

Teorema 1.58. *Sea A un arco. Si B es un subcontinuo propio de A con más de un punto, entonces B es un arco.*

Demostración. Sea B un subcontinuo propio de A con más de un punto. Como A es un arco, entonces existe un homeomorfismo $\alpha : A \longrightarrow [0, 1]$, dado que B es un subcontinuo de A, entonces B es conexo. Así $\alpha(B)$ es un intervalo, el cual es conexo por la proposición 1.29. Además como B es compacto se sigue que $\alpha(B)$ es un intervalo cerrado. De esta forma tenemos que $\alpha(B)$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Luego, por transitividad, tenemos que B es un arco. ■

Teorema 1.59. *Sea C una curva cerrada simple. Si S es un subcontinuo propio de C con más de un punto, entonces S es un arco.*

Demostración. Sean S un subcontinuo propio de C con más de un punto y $p \in C \setminus S$, entonces existe $\beta : C \setminus \{p\} \longrightarrow (0, 1)$ homeomorfismo. Como S es conexo, tenemos que $\beta(S)$ es un intervalo. Más aún, al ser S compacto, tenemos que $\beta(S)$ es un intervalo cerrado. Así, $\beta(S)$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ y por transitividad S es un arco. ■

Ejemplo 1.60. *Si $\mathcal{W} = \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, entonces $\overline{\mathcal{W}}$ en $\mathbb{R}^2$ es un continuo llamdo **curva senoidal del topólogo**. Véase figura 1.5.*

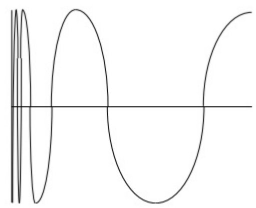

Figura 1.5

Ejemplo 1.61. *El **continuo ocho**, es la unión de dos circunferencias unidas por un punto, es decir, $\mathcal{O} = S^1 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$. Como se muestra en la figura 1.6.*

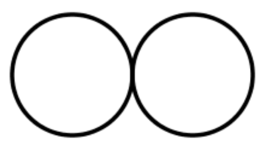

Figura 1.6: Continuo del ocho

Definición 1.62. *Para $n \geq 1$, un n-**odo simple** es un continuo X que es unión de n arcos $J_1, ..., J_n$ que únicamente se intersectan en un punto v llamado vértice.*

Se pueden construir continuos uniendo un número finito de continuos de tal forma que se vallan intersectando cada uno de ellos para que el resultado sea conexo. La figura resultante de estos continuos son llamadas gráficas finitas.

Definición 1.63. *Un continuo X es una **gráfica finita** si es la unión de una familia finita de arcos tales que cada par de ellos o son ajenos o se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos.*

Algunas gráficas finitas significativas son: el intervalo cerrado $[0, 1]$, la circunferencia unitaria S^1 y los n-odos simples. Una vez dicho lo anterior pasemos a ver otros ejemplos interesantes de continuos.

Ejemplo 1.64. ***El continuo de la paleta***, *es la unión de la circunferencia* S^1, *del ejemplo 1.51, con el conjunto* $[1,2] \times \{0\}$, *es decir,* $P = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$ *es un continuo. Véase la figura 1.7.*

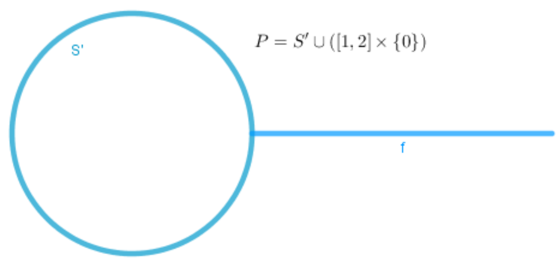

Figura 1.7: Continuo de la paleta

Ejemplo 1.65. ***El círculo de Varsovia.*** *Tomemos el continuo de la curva senoidal del topólogo* $\mathcal{W}$ *y sea* $\mathcal{T}$ *un arco del punto* $p = (0,1)$ *al punto* $q = (2\pi,1)$ *de forma que* $\mathcal{W} \cap \mathcal{T} = \{p,q\}$. *Entonces el conjunto* $\Omega = \mathcal{W} \cup \mathcal{T}$ *es llamado el continuo del círculo de Varsovia. Véase la figura 1.8.*

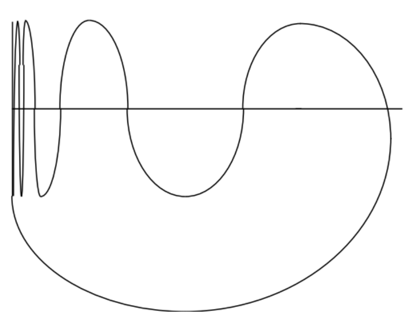

Figura 1.8: Continuo del círculo de Varsovia.

Ejemplo 1.66. *Sea* X *un* 5-***odo simple*** *este continuo esta representado en la siguiente figura 1.9.*

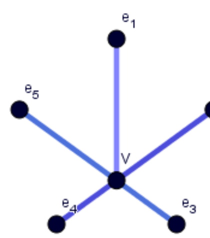

Figura 1.9: El continuo 5-**odo simple.**

En la figura 1.9 los puntos terminales de X *son* e_1, e_2, e_3, e_4 *y* e_5 *y* v *es el vértice en el origen en* $\mathbb{R}^2$.

1.2. Intersecciones anidadas

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos interesantes de continuos es el uso de las intersecciones anidadas. De hecho, se puede decir que dicha técnica es fundamental para la teoría de continuos, pues, no solo se utiliza para construir ejemplos, sino que es la idea clave para la demostración de muchos teoremas.

Teorema 1.67. *Sean* X *un espacio métrico compacto y* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos cerrados de* X *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$; $X_{n+1} \subset X_n$. *Si* U *es un subconjunto abierto de* X *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_N \subset U$.

Demostración. Dado que U es abierto de X, tenemos que $X \setminus U$ es cerrado de X y por tanto compacto. Además, sabemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$. Tomando complementos tenemos que $X \setminus U \subset X \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n)$. Por las leyes de D'Morgan llegamos a que $X \setminus U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n)$. Ahora note, que $\{X \setminus X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$ y dado que $X \setminus U$ es compacto existe una subcubierta finita tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{k}(X \setminus X_{n_j})$ con $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$. Así, tenemos que $\bigcap_{j=1}^{k} X_{n_j} \subset U$. Sea $N = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_k\}$. Tenemos que $X_N = \bigcap_{j=1}^{k} X_{n_j}$ y por lo tanto, $X_N \subset U$. ∎

El siguiente ejemplo que proporcionamos nos muestra que la intersección anidada de conjuntos conexos no es un conexo.

Ejemplo 1.68. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$X_n = [-1,1] \times \left[-\frac{1}{n}.\frac{1}{n}\right] \setminus \left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times \{0\}\right\}.$$

Observemos que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_n = \left(\left[-1,-\frac{1}{2}\right] \times \{0\}\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2},1\right] \times \{0\}\right),$$

el cual no es conexo, veáse la figura 1.10.

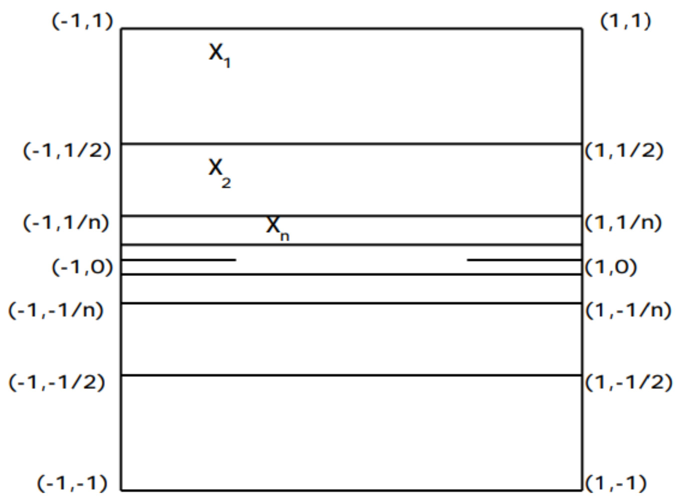

Figura 1.10

El resultado que sigue muestra una forma de como construir un continuo, a partir de una familia anidada de subcontinuos.

Teorema 1.69. *Sean X un espacio métrico compacto y $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subcontinuos de X. Si $X_{n+1} \subset X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_n$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Primero veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es no vacío. Supongamos lo contrario, es decir que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Entonces $X = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Luego por las leyes de D'Morgan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n)$. Ahora, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que X_n es un conjunto cerrado de X, pues, cada X_n es un subcontinuo, que en particular es compacto y por tanto cerrado de X. Ahora, sea $\{X \setminus X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de X, digamos $\{X_j : j \in \{1, \cdots, k\}\}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{k}(X \setminus X_j) = X$. Sea $m = \text{máx}\{1, \cdots, k\}$. Luego $X = X \setminus X_m$, por lo que X_m es vacío, lo cual es una contradicción . Por lo tanto, ,$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. Ahora, observe que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un conjunto cerrado dentro del compacto X. Por lo tanto, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto. Por último veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo. Supongamos lo contrario, es decir, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es disconexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y ajenos de X tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = A \cup B$. Ahora, como X es un espacio T_4 podemos encontrar U y V subconjuntos abiertos de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Luego, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U \cup B$. Así, por el teorema 1.67 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset A \cup B$. Como X_N es conexo tenemos que $X_N \subset U$ o $X_N \subset V$. Supongamos que $X_N \subset U$. Puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset X_N \subset U$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = A \cup B$, se sigue que $B \subset U$, así $B \subset U \cap V$ lo que es absurdo. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo y concluimos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo. ■

Ejemplo 1.70. ***La curva universal de Sierpinski.*** *Este continuo famoso se construye empezando por un cuadrado en el plano $\mathbb{R}^2$, es decir, $C = [0,1]^2$ dicho cuadrado lo dividimos en 9 cuadrados de lado $\frac{1}{3}$ y le quitamos el interior del cuadrado central. De los 8 cuadrados restantes le hacemos lo mismo. Esto es, a cada uno lo dividimos en 9 partes iguales de lado $\frac{1}{27}$ y le quitamos el interior del central. A cada uno de estos cuadrados le hacemos lo mismo y continuamos este proceso una infinidad de veces. El resultado de los cuatro primeros pasos se muestra en la figura 1.11.*

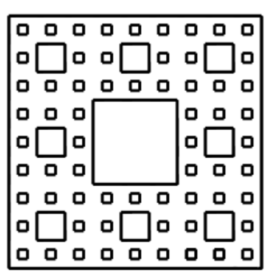

Figura 1.11

Ejemplo 1.71. ***La curva universal de Menger.*** *Consideremos primero el cubo en $\mathbb{R}^3$, $Cub = [0,1]^3$. Ahora, si dividimos cada una de las caras de Cub*

en nueve cuadrados congruentes y si además hacemos un agujero a través del interior de cada cuadrado central el resultado nos da un continuo, llamemosle M_1. Si continuamos de esta manera con M_1 obtenemos ahora cuarenta y ocho cuadrados y nueve cuadrados congruentes y de igual maneral si se hace un agujero a través del interior de los cuadrados centrales, así obtenemos otro nuevo continuo M_2. Siguiendo esté algoritmo podemos obtener M_n continuos. La curva universal de Menger es por definición $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Por el teorema 1.69, tenemos que $\mathcal{M}$ es un continuo. Véase figura 1.12.

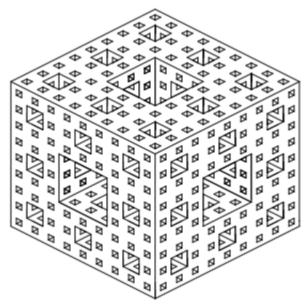

Figura 1.12

Observación 1.72. *El término universal se refiere en este caso, al hecho de que $\mathcal{M}$ contiene una copia topológica de cualquier espacio métrico separable de dimensión uno.*

Teorema 1.73. *Sea un continuo X y A un subcontinuo de X tal que $X \setminus A$ no es conexo. Si U y V son subconjuntos abiertos y ajenos de X tales que $X \setminus A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.*

Demostración. Sea $X \setminus A = U \cup V$, note que $X \setminus U = A \cup V$ es un conjunto cerrado de X. Como X es compacto, tenemos que $A \cup V$ es compacto.
Ahora supongamos que $A \cup V$ no es conexo, entonces existen H y K subconjuntos cerrados de X, ajenos y no vacíos tales que

$$A \cup U = H \cup K.$$

Como A es conexo se sigue que $A = (A \cap H) \cup (A \cap K)$ y estos dos últimos conjuntos son cerrados de X y ajenos. Luego, uno de ellos tiene que ser vacío. Entonces podemos suponer $A = A \cap H$, esto implica que $A \subset H$. Dado que H y K son disjuntos, también se cumple que $K \subset V$. Observé que $K \cap \overline{V} \neq \emptyset$

pues de lo contrario existiría un elemento $a \in K \cap \overline{V}$, lo cual implica que $a \in K$ y $a \in \overline{V}$. Como $a \in \overline{V}$ entonces dado cualquier subconjunto abierto L de X tal que $a \in L$ se tiene que $L \cap V = \emptyset$, pero $a \in K \subset V$. Así tenemos que $a \in V$ lo que es absurdo. Por tanto, $K \cap \overline{V} \neq \emptyset$.
Dicho lo anterior se sigue que $X = K \cup (H \cup \overline{V})$ donde K y $H \cup \overline{V}$ son subconjuntos cerrados de X, no vacíos y ajenos de X. Pero esto es una contradicción pues estamos diciendo que X no es conexo. Por lo tanto, $A \cup V$ es conexo. Concluimos que $A \cup V$ es un subcontinuo de X.

Para el caso de $A \cup U$ se sigue del mismo razonamiento del caso anterior. Así, el teorema queda demostrado. ∎

1.3. Continuos encadenables

A continuación estudiaremos a los continuos encadenables.

Definición 1.74. *Una familia $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una **cadena simple** en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j-k| \leq 1$. A cada U_k se le llama **eslabón** de la cadena simple. Se dice que una cadena simple $C = \{U_1, \cdots U_n\}$ conecta a los puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.*

Teorema 1.75. *Sea X un espacio métrico conexo. Si $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de X y $a, b \in X$, entonces existe una cadena simple que conecta al elemento a con b cuyos eslabones son miembros de $\mathscr{U}$.*

Demostración. Sea $B = \{x \in X : \text{existe una cadena simple } \mathcal{C} \subset \mathscr{U} \text{ que conecta a } a \text{ con } x\}$. La idea de la demostración es probar que el conjunto B es un subconjunto abierto y cerrado de X, y dado que X es conexo, tiene que suceder que X sea igual a B. Nótese que B no es vacío porque $a \in B$.
Dicho lo anterior veamos que B es un subconjunto abierto de X. Para ello sea $x \in B$. Luego, existe una cadena simple $\mathcal{C} = \{U_1, \cdots, U_n\} \subset \mathscr{U}$ de tal forma que $a \in U_1$ y $x \in U_n$. Como cada U_n es un subconjunto abierto de X se sigue que $U_n \subset B$, y de aquí obtenemos que B es un subconjunto abierto de X.
Por último veamos que B es un subconjunto cerrado de X. Para ello probaremos que $B = \overline{B}$. Sea $x \in \overline{B}$, donde $\overline{B} = B \cup fr_X(B)$, si $x \in B$ no hay nada que probar. Por otro lado, supongamos que $x \in fr_X(B)$. Como $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$. Como $x \in fr_X(B)$ se

sigue que $U \cap B \neq \emptyset$. Así, existe $p \in U \cap B$ y por lo tanto, existe una cadena simple $\{V_1 \cdots V_m\} \subset \mathscr{U}$ que une a a con p. Tomemos $j \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $U \cap V_j \neq \emptyset$, tenemos que $\{V_1, \cdots, V_m, U\}$ es una cadena simple que conecta a a con x, y por lo tanto, $x \in B$. ■

Definición 1.76. *Una cadena simple C de conjuntos abiertos en un espacio métrico X es llamada **ϵ-cadena** si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ϵ.*

Definición 1.77. *Un espacio métrico es **encadenable** si existe una ϵ-cadena que cubre a X. Si $a, b \in X$, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena $C = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.*

1.4. Descomposiciones de continuos

En esta sección vemos otra forma de construir continuos a partir de los ya conocidos, este se logra por el método de las *descomposiciones semicontinuas superiores*. Describimos qué es un *espacio de descomposición*, damos algunos resultados interesantes y vemos cuando una descomposición es un continuo.

Sea S un espacio topológico no vacío. Una familia $\mathscr{D}$ de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos de S tales que $\bigcup \mathscr{D} = S$, se llama **partición** de S. Si los miembros de la partición son todos subconjuntos cerrados de S, se dice que la **partición es cerrada**.

Teorema 1.78. *Sean (S, τ) un espacio topológico no vacío y $\mathscr{D}$ una partición de S. La colección*

$$T(\mathscr{D}) = \left\{ \mathscr{U} \subset \mathscr{D} : \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \in \tau \right\},$$

una topología para $\mathscr{D}$.

Demostración. Note que $\mathscr{D} \in T(\mathscr{D})$ porque $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ y es tal que $\bigcup \mathscr{D} = S \in \tau$. Como $\emptyset \subset \mathscr{D}$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \tau$, se tiene que $\emptyset \in T(\mathscr{D})$.

Ahora, tomemos a $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in T(\mathscr{D})$. Luego, $\mathscr{U}, \mathscr{V} \subset \mathscr{D}$ y cumplen que $\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \in$

τ y $\bigcup_{V\in\mathscr{V}} V \in \tau$. Luego, $\left[\bigcup_{U\in\mathscr{U}} U\right] \cap \left[\bigcup_{V\in\mathscr{V}} V\right] \in \tau$. Ahora note que

$$\left[\bigcup_{U\in\mathscr{U}} U\right] \cap \left[\bigcup_{V\in\mathscr{V}} V\right] = \bigcup_{C\in\mathscr{U}\cap\mathscr{V}} C,$$

así concluimos que $\bigcup_{C\in\mathscr{U}\cap\mathscr{V}} C$ es un abierto de S. Por lo tanto, $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} \in T(\mathscr{D})$.

Por último sea $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de $T(\mathscr{D})$. Veamos que $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in T(\mathscr{D})$. Para cada $i \in I$, tenemos que $\bigcup_{A\in\mathcal{U}_i} A$ es un abierto de S. Luego, $\bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{U}_i} A\right)$ es un abierto de S. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in T(\mathscr{D})$. ■

Definición 1.79. *Sea S un espacio topológico y $\mathscr{D}$ una partición de S. El espacio topológico $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es llamado* ***espacio de descomposición*** *de S y la topología $T(\mathscr{D})$ es llamada la* ***topología de descomposición.***

Intuitivamente una descomposición es el espacio que se obtiene del espacio original indentificando todos los puntos de cada miembro de una partición determinada. Por esta razón, las descomposiciones frecuentemente se les llama espacios de identificación o también se les suele llamar espacios cocientes. Un ejemplo de espacio de descomposición es el siguiente:

Ejemplo 1.80. *[9, Sección 22, Ejemplo 4, página 139] Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ y $\mathscr{D} = \{\{(x,y)\} : x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. El espacio $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio descomposición que es homeomorfo a la esfera.*

Las descomposiciones son una fuente importante de ejemplos, contraejemplos en la teoría de continuos. Cabe mencionar que un espacio de descomposición de un continuo X puede no ser un continuo incluso cuando los miembros de la partición sean subconjuntos cerrados de X. Como veremos en el ejemplo 1.92.

Teorema 1.81. *[1, Teorema 4.4.1, página 116] Sea (S,τ) un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : S \longrightarrow Y$ una función suprayectiva, entonces*

$$\tau_g = \{E \subset Y : \ g^{-1}[E] \in \tau\}$$

es una topología para Y.

Notemos que la función g es continua con la topología τ_g. Además, si τ es otra topología para Y con la que g resulta ser continua, entonces $\tau \subset \tau_g$.

Definición 1.82. *Un espacio topológico Y es un **espacio cociente** de un espacio topológico S si existe una función suprayectiva $g : S \longrightarrow Y$ tal que τ_g coincide con la topología de Y. En tal caso, la función g se llama **función cociente**.*

Definición 1.83. *Sea (S, τ) un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : S \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. La topología $\tau_g = \{E \subset Y : g^{-1}[E] \in \tau\}$ es conocida como la **topología cociente** sobre Y inducida por la función Y.*

Teorema 1.84. *[1, Proposición 4.5.3] Sean S y Y dos espacios topológicos y sea $g : S \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si g es una función abierta o cerrada, entonces la topología de Y coincide con la topología cociente en Y definida por g.*

Ejemplo 1.85. *Como toda función continua de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff es cerrada, por el teorema anterior, toda función suprayectiva de un espacio de Hausdorff es una función cociente. En particular, toda función continua y suprayectiva entre continuos es una función cociente.*

Definición 1.86. *Sean S un espacio topológico y $\mathscr{D}$ una partición de S. La **función natural** de S sobre $\mathscr{D}$ es la función $\pi : S \longrightarrow \mathscr{D}$ dada por $\pi(x) = D$ si y sólo si $x \in D$.*

Observación 1.87. *La función natural π es una función continua. Dado $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$, tenemos que*

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}[\mathscr{U}] &= \{x \in S : \text{ existe } D \in \mathscr{U} \text{ tal que } \pi(x) = D\} \\
&= \{x \in S : \text{ existe } D \in \mathscr{U} \text{ tal que } x \in D\} \\
&= \bigcup_{D \in \mathscr{U}} D.
\end{aligned}
$$

Si $\mathscr{U}$ es un abierto de $\mathscr{D}$, tenemos que $\bigcup_{D \in \mathscr{U}} D$ es abierto de S. Luego, $\pi^{-1}[\mathscr{U}]$ es abierto de S. Por lo tanto, la función natural es continua.

Si tenemos un espacio de descomposición de un espacio topológico S, la topología $T(\mathscr{D})$ es la topología más grande tal que la función natural es continua. Más aún, π es una función cociente como lo establece el siguiente resultado.

Teorema 1.88. *Todo espacio de descomposición de un espacio topológico S es un espacio cociente de S.*

Demostración. Sea $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ un espacio de descomposición de un espacio topológico S. Veamos que la función $\pi : S \longrightarrow \mathscr{D}$ satisface que $T(\mathscr{D}) = \tau_g$. Si $\mathscr{A} \in T(\mathscr{D})$, entonces $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ y es tal que $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es un abierto de S, luego $\pi^{-1}[\mathscr{A}] = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es un abierto de S, se sigue que $\mathscr{A} \in \tau_g$. Ahora, sea $\mathscr{U} \in \tau_g$. Tenenemos que $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$ y es tal que $\pi^{-1}[\mathscr{U}]$ es un abierto de S y dado que $\pi^{-1}[\mathscr{U}] = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$ se sigue que $\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$ es un abierto de S, por tanto $\mathscr{U} \in T(\mathscr{D})$. Concluimos que $T(\mathscr{D}) = \tau_g$ y así $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio cociente. ■

El siguiente resultado muestra cuando un espacio topológico es metrizable.

Teorema 1.89. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio topológico Hausdorff. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva de un espacio métrico compacto sobre un espacio de Hausdorff Y. Note que como X es un espacio métrico compacto, tenemos que X es Hausdorff, por la proposición 1.35 . Luego, como f es continua y suprayectiva, por el teorema 1.39 se sigue que Y es compacto. Es decir, Y es un espacio Hausorff compacto.
Ahora, afirmamos que, todo espacio Hausdorff compacto es un espacio normal. En efecto, sean Y un espacio compacto Hausdorff y F_1, F_2 subconjuntos cerrados ajenos de Y. Como F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de Y, tenemos que F_1 y F_2 son compactos, por la proposición 1.40, y dado que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, por el teorema 1.42 existen abiertos U y V de X, ajenos, tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$. Por lo tanto, Y es normal.
Veamos ahora que Y tiene una base numerable. Sea $\mathscr{C}$ una base numerable para X. Sea $\mathscr{C}_0$ la colección de los subconjuntos finitos de $\mathscr{C}$. Para cada $\mathscr{L} \in \mathscr{C}_0$ defínase el siguiente conjunto

$$E(\mathscr{L}) = Y \setminus \left(f \left[X \setminus \bigcup \mathscr{L} \right] \right).$$

Note que los elementos de $\mathscr{L}$ son abiertos de X y en particular $\bigcup \mathscr{L}$ es abierto de X, así $X \setminus \bigcup \mathscr{L}$ es cerrado de X. Como f es continua y X es compacto, por el teorema 1.41 se cumple que $f[X \setminus \bigcup \mathscr{L}]$ es cerrado de Y. Por lo tanto, $E(\mathscr{L})$ es un abierto de Y.

Sea $\mathscr{P} = \{E(\mathscr{L}) : \mathscr{L} \subset \mathscr{C}$ y $\mathscr{L}$ es finito$\}$. Afirmamos que $\mathscr{P}$ es numerable. En efecto, como $\mathscr{C}$ es numerable, por el teorema 1.45, $\mathscr{C}_0$ es numerable. Consideremos la función $h : \mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{P}$ definida, para cada $\mathscr{L} \in \mathscr{C}_0$ como $h(\mathscr{L}) = E(\mathscr{L})$. Es claro que h es una función suprayectiva, por el teorema 1.46, se sigue que $\mathscr{P}$ es numerable.

Ahora, veamos que $\mathscr{P}$ es una base para Y. Para ello, sean U un subconjunto abierto de Y y $q \in U$. Luego, $f^{-1}(\{q\}) \subset f^{-1}(U)$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X. Como $\mathscr{C}$ es una base de X, entonces para cada $p \in f^{-1}(\{q\})$, existe, $V_p \in \mathscr{C}$ tal que $p \in V_p \subset f^{-1}(\{q\}) \subset f^{-1}(U)$. Así,

$$f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(\{q\})} V_p \subset f^{-1}(U).$$

Como $f^{-1}(\{q\})$ es un subconjunto cerrado del compacto X se sigue que $f^{-1}(\{q\})$ es compacto. Por lo tanto, existen $p_1, ..., p_n \in f^{-1}(\{q\})$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}.$$

Ahora, sea $\mathscr{L} = \{V_{p_1}, ..., V_{p_n}\}$. Entonces $\mathscr{L} \in \mathscr{C}_0$ y $f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup \mathscr{L} \subset f^{-1}(U)$. Al tomar complementos

$$X \setminus f^{-1}(U) \subset X \setminus \left(\bigcup \mathscr{L}\right) \subset X \setminus f^{-1}(\{q\}).$$

Luego,

$$f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) \subset f\left(X \setminus \bigcup \mathscr{L}\right) \subset f\left(X \setminus f^{-1}(\{q\})\right).$$

Tomando de nuevo complementos

$$Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(\{q\})\right) \subset Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathscr{U}\right) \subset Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right). \quad (1.1)$$

Observemos que $q \in Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(\{q\})\right)$, pues de lo contrario se tiene que $q \in f\left(X \setminus f^{-1}(\{q\})\right)$, entonces existe $a \in X \setminus f^{-1}(\{q\})$ tal que $f(a) = q$, luego inferimos que $a \in f^{-1}(\{q\})$. Pero $a \notin f^{-1}(\{q\})$ lo que es absurdo. Por

lo tanto, $q \in Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(\{q\})\right)$.
Como f es suprayectiva se cumple que

$$Y \setminus U = Y \setminus f(f^{-1}(\{q\})) \subset f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right),$$

luego $Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) \subset U$. De esto último y por la contención (1.1) se sigue que $q \in E(\mathscr{L}) \subset U$. Así $\mathscr{P}$ es una base numerable para Y. Por lo tanto, Y es metrizable. ■

Teorema 1.90. *Sean X un espacio métrico compacto y $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es una descompasición de X. Entonces $\mathscr{D}$ es metrizable si y sólo si $\mathscr{D}$ es Hausdorff.*

Demostración. [$\Leftarrow$] Como la función natural π de X sobre $\mathscr{D}$ es continua y suprayectiva, entonces si suponemos que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio Hausdorff. Por el teorema 1.89, tenemos que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es metrizable.
[$\Rightarrow$] Supongamos ahora que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es metrizable. Luego, $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ obviamente es un espacio Hausdorff. ■

Teorema 1.91. *Un espacio de descomposición $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ de un continuo X es un continuo si y sólo si $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es Hausdorff.*

Demostración. Si $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un continuo, tenemos que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es metrizable. Luego $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es Hausdorff. Ahora, supongamos que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio Hausdorff, por el teorema 1.90 tenemos que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es metrizable. Como la función natural $\pi : X \longrightarrow \mathscr{D}$ es continua, y dado que la compacidad y la conexidad son invariantes topológicos, tenemos que $\mathscr{D}$ es compacto y conexo. Por lo tanto, $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un continua y el teorema queda demostrado. ■

A continuación presentamos un ejemplo donde una partición $\mathscr{D}$ no es un continuo.

Ejemplo 1.92. *Sea $S = [-1, 1]$ y sea $\mathscr{D}$ la partición cerrada dada por*

$$\mathscr{D} = \{\{x, -x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}.$$

La descomposición $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ no es un continuo ya que no es de Hausdorff y por tanto no es metrizable.

Ahora estudiaremos las descomposiciones semicontinuas superiores. Podemos usar la descomposición de continuos para construir otros continuos. La siguiente definición nos dará una útil condición para poder establecer cuando una descomposición es metrizable, sin necesidad de verificar en cada ocasión que la descomposición es un espacio Hausdorff.

Definición 1.93. *Sea* (S,T) *un espacio topológico. Una partición* $\mathscr{D}$ *de* S *es* ***semicontinua superior*** *si para cada* $D \in \mathscr{D}$ *y* $U \in T$ *tal que* $D \subset U$ *existe* $V \in T$ *con* $D \subset V$ *tal que si* $A \in D$ *y* $A \cap V \neq \emptyset$*, entonces* $A \subset U$.

Definición 1.94. *Sea* $\mathscr{D}$ *un espacio de descomposición de un espacio topológico* S*. Un subconjunto* E *de* S *es* $\mathscr{D}$***-saturado*** *si existe* $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$ *tal que* $\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = E$.

Observación 1.95. *Dado un espacio de descomposición* $\mathscr{D}$ *de un espacio topológico* S*, consideremos la función natural* $\pi : S \longrightarrow \mathscr{D}$*. Para* $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ *tenemos que* $\pi^{-1}[\mathscr{C}]$ *es* $\mathscr{D}$*-saturado. En efecto, sea* $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ *y veamos que* $\pi^{-1}[\mathscr{C}] = \bigcup \mathscr{C} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$*. Note que se cumple lo siguiente*

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}[\mathscr{C}] &= \{x \in S : \pi(x) \in \mathscr{C}\} \\
&= \{x \in S : \textit{existe } C \in \mathscr{C} \textit{ tal que } \pi(x) = C\} \\
&= \{x \in S : \textit{existe } C \in \mathscr{C} \textit{ tal que } x \in C\} \\
&= \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi^{-1}[\mathscr{C}]$ *es* $\mathscr{D}$*-saturado.*

Proposición 1.96. *San* S *un espacio topológico y* $\mathscr{D}$ *un espacio de descomposición. Entonces un subconjunto* A *de* S *es* $\mathscr{D}$*-saturado si y sólo si* $A = \pi^{-1}[\pi[A]]$.

Demostración. Supongamos que A es $\mathscr{D}$-saturado. Entonces existe una subcolección $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$ tal que $A = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$. Así, $\pi[A] = \{\pi(x) : x \in A\} = \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\pi^{-1}[\pi[A]] = \pi^{-1}[\mathscr{U}] = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = A$.
Por último supongamos que $A = \pi^{-1}[\pi[A]]$ y veamos que A es $\mathscr{D}$-saturado. Dado que $\pi[A] \subset \mathscr{D}$, por la observación 1.95, tenemos que $\pi^{-1}[\pi[A]]$ es $\mathscr{D}$-saturado y por lo tanto, A es $\mathscr{D}$-saturado. ■

Proposición 1.97. *Sean* S *un espacio topológico y* $\mathscr{D}$ *un espacio de descomposición. Si* V *es* $\mathscr{D}$*-saturado y abierto de* S*, entonces el conjunto* $\pi[V]$ *es abierto de* $\mathscr{D}$.

Demostración. Dado que V es $\mathscr{D}$-saturado, existe una subcolección $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$ tal que $V = \bigcup \mathscr{U}$ es abierto de S. Luego

$$\pi[V] = \pi[\bigcup \mathscr{U}] = \bigcup \pi[\mathscr{U}] \subset \mathscr{D}.$$

Como $D \in \mathscr{U}$ y $x \in D$, tenemos que $\pi(x) = D \subset \bigcup \mathscr{U} = V$. Por lo tanto, $\pi[V]$ es abierto de $\mathscr{D}$. ■

Teorema 1.98. *Sean (S,T) un espacio topológico, $\mathscr{D}$ una descomposición de S y $\pi : S \longrightarrow \mathscr{D}$ la función natural. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{D}$ es una descomposición semicontinua superior.*

(ii) *π es una función cerrada.*

(iii) *Si $D \in \mathscr{D}$ y $U \in T$ son tales que $D \subset U$, entonces existe $V \in T$ tal que $D \subset V \subset U$ y V es $\mathscr{D}$-saturado.*

Demostración. Veamos primero que $[(i) \Rightarrow (ii)]$. Sea C un subconjunto cerrado de S. Para ver que $\pi[C]$ es cerrado de $\mathscr{D}$, basta probar que $\mathscr{D} \setminus \pi[C]$ es abierto de $\mathscr{D}$, o que es lo mismo que probar que $\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]$ es abierto de S. Sea $x \in \pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]$. Luego $\pi(x) \in \mathscr{D} \setminus \pi[C]$. Veamos que $\pi(x) \subset S \setminus C$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $z \in \pi(x)$ tal que $z \notin S \setminus C$. Note que esto último es equivalente a decir que $\pi(x) \cap C \neq \emptyset$, así existe $z \in \pi(x) \cap C$. Si $z \in \pi(x)$, entonces $\pi(z) = \pi(x)$ lo cual implica que $\pi(z) \cap \pi(x) \neq \emptyset$, además $\pi(z) = \pi(x) \in \pi[C]$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\pi(x) \subset S \setminus C$.

Ahora, como $S \setminus C$ es un subconjunto abierto de S y $\mathscr{D}$ es una descomposición semicontinua superior, existe un subconjunto abierto V de S con $\pi(x) \subset V$ tal que si $D \in \mathscr{D}$ y $D \cap V \neq \emptyset$, entonces $D \subset S \setminus C$. Notemos que si $p \in V$, entonces $\pi(p) = D$. Luego, $\pi(p) \cap V \neq \emptyset$, lo cual implica $\pi(p) \subset S \setminus C$. Veamos que $\pi[V] \subset \mathscr{D} \setminus \pi[C]$, para ello sea $U \in \pi[V]$. Existe $r \in V$ tal que $\pi(r) = U$. Supongamos, por el contrario, que $\pi(r) \in \pi[C]$. Existe un $c \in C$ tal que $\pi(r) = \pi(c)$. Así, $c \in C \cap \pi(r)$. Esto último implica que $\pi(r) \not\subseteq S \setminus C$ y por tanto $r \notin V$, lo cual es una contradicción. Así, $\pi[V] \subset \mathscr{D} \setminus \pi[C]$. Luego, $V \subset \pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]$. Como $x \in \pi(x) \subset V$, tenemos que $\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]$ es un subconjunto abierto de S, y de acuerdo con la observación 1.95, tenemos que $\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]$ es $\mathscr{D}$-saturado, y por la proposición 1.97, se sigue que $\pi[\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]]$ es un subconjunto abierto de $\mathscr{D}$. Como π es suprayectiva, se tiene que $\pi[\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[C]]] = \mathscr{D} \setminus \pi[C]$. De esta forma $\mathscr{D} \setminus \pi[C]$ es un subconjunto abierto de $\mathscr{D}$. Por lo tanto, $\pi[C]$ es un subconjunto cerrado de $\mathscr{D}$.

Probemos ahora que $[(ii) \Rightarrow (iii)]$. Para ello supongamos que π es cerrada.

Sean $D \in \mathscr{D}$, $U \in T$ tal que $D \subset U$ y $V = \pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \pi[S \setminus U]]$. Veamos que V satisface las condiciones de (3). Como $U \in T$, tenemos que $S \setminus U$ es cerrado de S, y por hipótesis, $\pi[S \setminus U]$ es cerrado de $\mathscr{D}$, luego $\mathscr{D} \setminus \pi[S \setminus U]$ es abierto de $\mathscr{D}$ así por la continuidad de π se sigue que $V \in T$ y por la observación 1.95, tenemos que V es $\mathscr{D}$-saturado.
Por último veamos que $(iii) \Rightarrow (i)$. Para ello supongamos (3). Sean $D \in \mathscr{D}$ y $U \in T$ con $D \subset U$. Por hipótesis existe $V \in T$ tal que $D \subset V \subset U$ y V es $\mathscr{D}$-saturado. Si algún $A \in \mathscr{D}$ es tal que $A \cap V \neq \emptyset$, entonces veamos que $A \subset V \subset U$. En efecto, como V es $\mathscr{D}$-saturado, existe una subcolección $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{D}$ tal que $V = \bigcup \mathscr{U}_1$. Como $A \cap V \neq \emptyset$ se sigue que $A \cap [\bigcup \mathscr{U}_1] \neq \emptyset$. Esto implica que $\bigcup_{B \in \mathscr{U}_1}(A \cap B) \neq \emptyset$. Así, existe $B \in \mathscr{U}_1$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Luego $A = B$, así $A \subset \bigcup_{B \in \mathscr{U}_1} B = V \subset U$. Por lo tanto, $A \subset U$. Concluimos que $\mathscr{D}$ es semicontinua superior. ■

Teorema 1.99. *Si S es un espacio topológico y $\mathscr{D}$ es una partición de S, entonces el espacio de descomposición $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio T_1 si y sólo si $\mathscr{D}$ es una partición cerrada.*

Demostración. Por el teorema 1.36, $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio T_1 si y sólo si dado cualquier $U \in \mathscr{D}$ se cumple que $\{U\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathscr{D}$. Luego $\mathscr{D} \setminus \{U\}$ es abierto de $\mathscr{D}$. Por la observación 1.87, esto es equivalente a que $\pi^{-1}[\mathscr{D} \setminus \{U\}]$ es un subconjunto abierto de S y como π es suprayectiva tenemos que $S \setminus \pi^{-1}[U]$ es abierto de S si y sólo si $\pi^{-1}[\{U\}]$ es cerrado de S; además como la familia los miembros de $\{\pi^{-1}[\{U\}] \colon U \in \mathscr{D}\}$ es una partición de S, tenemos que, $\mathscr{D}$ es una partición cerrada. ■

Lema 1.100. *Si $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es una descomposición semicontinua superior de un espacio topológico S que tiene la propiedad T_1, entonces $\mathscr{D}$ es una partición cerrada.*

Demostración. Sean $U \in \mathscr{D}$, $x \in U$ y $\pi : S \longrightarrow \mathscr{D}$ la función natural. Por hipótesis $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de S. Luego por el teorema 1.98, tenemos que $\pi[\{x\}]$ es cerrado de $\mathscr{D}$. Note que $\pi[\{x\}] = \{\pi(x)\} = \{U\}$ es cerrado de $\mathscr{D}$ y como π es continua se sigue que $\pi^{-1}[\{U\}]$ es cerrado de S, además $U = \pi^{-1}[\{U\}]$. Por lo tanto, U es un subconjunto cerrado de S. Así concluimos que $\mathscr{D}$ es una partición cerrada. ■

Teorema 1.101. *Si $\mathscr{D}$ es una descomposición semicontinua superior de un espacio métrico compacto X, entonces $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es metrizable.*

Demostración. En virtud del teorema 1.89, es suficiente probar que el espacio de descomposición $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio Hausdorff. Para ello sean $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$. Por el lema 1.100, tenemos que D_1 y D_2 son cerrados de X y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Luego, como X es normal existen dos subconjuntos abiertos y ajenos de X, digamos U_1 y U_2 tales que $D_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset U_2$. Como $\mathscr{D}$ es una descomposición semicontinua superior por el apartado (iii) del teorema 1.98, existen dos subconjuntos V_1 y V_2 abiertos de X tales que, para cada $i \in \{1,2\}$, $D_i \subset V_i \subset U_i$ y V_i es $\mathscr{D}$-saturado. Ahora, observemos que para todo $i \in \{1,2\}$, se tiene que $D_i \in \pi[V_i]$, pues de lo contrario si $D_i \notin \pi[V_i]$ entonces $D_i \not\subset V_i$, pero $D_i \subset V_i$ lo que es absurdo.

Ahora, por la proposición 1.97, tenemos que $\pi[V_1]$ y $\pi[V_2]$ son abiertos de $\mathscr{D}$. Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $V_i \subset U_i$; se sigue que $V_1 \cap U_2 = \emptyset$. Luego, por la proposición 1.96, tenemos que para todo $i \in \{1,2\}$ se cumple que $\pi^{-1}[\pi[V_i]] = V_i$. Así, $\pi[V_1] \cap \pi[V_2] = \emptyset$. De esta forma encontramos dos subconjuntos abiertos $\pi[V_1]$ y $\pi[V_2]$ ajenos de $\mathscr{D}$ tales que $D_1 \in \pi[V_1]$ y $D_2 \in \pi[V_2]$. Por lo tanto, hemos probado que $(\mathscr{D}, T(\mathscr{D}))$ es un espacio Hausdorff. ■

Teorema 1.102. *Sean un continuo X y $\mathscr{D}$ una descomposición semicontinua superior de X, entonces $\mathscr{D}$ es un continuo.*

Demostración. Consideremos a $\pi : X \longrightarrow \mathscr{D}$ la función natural. Como π es continua, la compacidad y conexidad son invariantes topológicos. Tenemos que $\mathscr{D}$ es compacto y conexo. Además, por el teorema 1.101, tenemos que $\mathscr{D}$ es metrizable. Así, $\mathscr{D}$ es un continuo. ■

Capítulo 2

Hiperespacios

En el capítulo anterior vimos que un continuo es un espacio métrico que es compacto, conexo y con más de un punto. También, vimos algunas de sus propiedades y algunos ejemplos de continuos más comunes. En este segundo capítulo estudiaremos a los hiperespacios que son subconjuntos de un continuo que cumplen alguna propiedad. En particular, veremos algunos ejemplos y algunas propiedades que nos ayudarán a definir una nueva métrica para estos hiperespacios llamada métrica Haussdorff. Para culminar este capítulo construiremos una topología para los hiperespacios llamada topología de Vietoris, probaremos algunas propiedades y además probaremos que la métrica Haussdorff genera la topología de Vietoris. Por último probaremos que el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X es un continuo.

2.1. Métrica Hausdorff y sus propiedades

Daremos la definición de hiperespacio y algunos ejemplos comunes de ellos. Además, presentamos algunas propiedades básicas que serán de gran ayuda para construir la métrica de Hausdorff.

Definición 2.1. *Sea un continuo X, decimos que un **hiperespacio** de X es una colección de subconjuntos de X que cumplen alguna propiedad en particular.*

Por ejemplo, podemos considerar los siguientes hiperespacios de X

$$
\begin{aligned}
2^X =&\{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y no vacío}\}, \\
C(X) =&\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\
C_n(X) =&\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \\
F_n(X) =&\{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\
F(X) =& \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X).
\end{aligned}
$$

Observación 2.2. *Para un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:*

(i) $C(X) = C_1(X)$,

(ii) $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$,

(iii) $F_n(X) \subset C_n(X)$.

Note que como X es un compacto, entonces 2^X es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, en particular $X \in 2^X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X. Veamos algunas definiciones y propiedades interesantes.

Definición 2.3. *Sean un continuo X con métrica d, $A \subset X$ y $r > 0$. La **nube** de radio r con centro en A es*

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, a) < r \text{ para algún } a \in A\}.$$

Teorema 2.4. *Sean un continuo X con métrica d, $r > 0$ y $A \in 2^X$, se cumplen las siguientes condiciones*

(i) *Si U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$.*

(ii) *Si $0 < \delta \leq r$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(r, B)$.*

(iii) $N(r, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta \in (0, r)\}$.

(iv) $N(r, A) = \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. *Es decir $N(r, A)$ es un abierto de X.*

Demostración. (i) Sea $A \subset U$, como U es abierto de X tenemos que $X \setminus U$ es cerrado de X y por tanto compacto. Así tenemos que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y por lo tanto, $d(A, X \setminus U) > 0$. Ahora, sean $\delta = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$ y $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Se sigue que $x \in B(a, \delta)$. Si suponemos que $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(x, a)$; lo cual implica que $d(A, X \setminus U) < \delta = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$, lo que es absurdo. Por lo tanto, $x \in U$.

(ii) Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq r$. Tomemos $x \in N(\delta, A)$. Existe un $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta \leq r$, luego $d(x, a) \leq r$, para algún $a \in A$. Como $A \subset B$, tenemos que $a \in B$. Así, $x \in N(r, B)$.

(iii) Dado $\delta > 0$ tal que $\delta < r$, por (2) de este teorema se tiene que $N(\delta, A) \subset N(r, A)$. Entonces $\bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\} \subset N(r, A)$. Por otro lado, tomemos $x \in N(r, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$. Tomemos un $\delta' > 0$ tal que $d(x, a) < \delta' < r$. Luego, $x \in N(\delta', A)$, además, $N(\delta', A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$. Por lo tanto, $N(r, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$.

(iv) Sea $x \in N(r, A)$, luego por definición de nube se sigue que existe un elemento $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$, así $x \in B(x, r)$ y por lo tanto, $x \in \bigcup_{a \in A} B(x, r)$. Por último, sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(x, r)$, entonces existe $a \in A$ tal que $x \in B(x, r)$, luego por definición de bola abierta se sigue que $d(x, a) < r$, por lo tanto, $x \in N(x, A)$.

■

Observación 2.5. *Sean un continuo X con métrica d, $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces se cumple que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$.*

En efecto, primero veamos que que se cumple $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Sea acuerdo con el teorema 2.4, apartado (iii), se deduce que $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Así,

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B).$$

Para ver que se cumple la otra contención, sea $z \in N(\epsilon, A \cup B)$. Existe $a \in A \cup B$ tal que $d(a, z) < \epsilon$. Ahora, observemos que tenemos dos casos:

(i) Si $a \in A$, entonces $d(a, z) < \epsilon$ se sigue que $z \in N(\epsilon, A)$.

(ii) Ahora si $a \in B$, entonces $d(a, z) < \epsilon$, con lo cual se tiene que $z \in N(\epsilon, B)$.

En ambos casos se tiene que $z \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Por lo tanto, concluimos que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$. $\blacksquare$

Lema 2.6. *Sean un continuo X con métrica d y $A, B \in 2^X$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$.*

Demostración. Como A y B son compactos, entonces $d(A, B) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{d(A,B)}{2} > 0$ y supongamos a manera de contradicción que existe $y \in N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B)$. Luego, existe $a \in A$ tal que $d(a, y) < \epsilon$, de forma similar, existe $b \in B$ tal que $d(b, y) < \epsilon$. Ahora aplicando la desigualdad del triángulo,

$$d(a, b) \leq d(a, y) + d(b, y) < \epsilon + \epsilon = d(A, B),$$

así que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual contradice que $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. $\blacksquare$

Nuestro propósito es definir una métrica en 2^X que se encuentre estrechamente relacionada con la métrica de X. Para ello definamos la siguiente función :

$$\begin{aligned} H_d \colon 2^X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (A, B) &\mapsto \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, B) \ \text{ y } \ B \subset N(r, A)\}. \end{aligned}$$

De aquí en adelante denotaremos al conjunto $\{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}$ por $E(A, B)$. El siguiente resultado establece que en efecto el conjunto $E(A, B)$ definido anteriormente tiene ínfimo.

Teorema 2.7. *Sean un continuo X con su métrica d y $A, B \in 2^X$, entonces el conjunto $E(A, B) = \{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}$ tiene ínfimo.*

Demostración. Dea cuerdo con la definición 1.9 tenemos que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, se cumple que $d(a, b) < \text{diám}(X) + 1$. Por lo tanto, $A \subset N(\text{diám}(X)+1, B)$ y $B \subset (\text{diám}(X)+1, A)$. Así, $\text{diám}(X)+1 \in E(A, B)$. Por consiguiente 0 es una cota inferior de $E(A, B)$ y entonces concluimos que en efecto existe el $\text{ínf}(E(A, B))$. $\blacksquare$

Teorema 2.8. *La función definida anteriormente es una métrica para el hiperespacio 2^X.*

Demostración. Por el teorema 2.7, la función H_d esta bien definida y es tal que $H_d(A, B) \geq 0$, para cualesquiera $A, B \in 2^X$. Veamos que se cumplen las propiedades restantes.

(i) Si $A = B$, entonces para cualquier $r > 0$ tenemos que $A \subset N(B, r)$ y $B \subset N(A, r)$ esto implica que $\{r > 0 : A \subset N(B, r) \text{ y } B \subset N(A, r)\} = [0, \infty)$. Por lo cual,

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(B, r) \text{ y } B \subset N(A, r)\} = 0.$$

Por otro lado si $H_d(A, B) = 0$, entonces el $\text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(B, r) \text{ y } B \subset N(A, r)\} = 0$. Esto implica que para todo $r > 0$ se cumple $A \subset N(B, r)$ y $B \subset N(A, r)$. Luego, para cualquier $r > 0$ y $a \in A$ tenemos que $B(a, r) \cap B \neq \emptyset$ y dado cualquier $b \in B$ se tiene que $B(b, r) \cap A \neq \emptyset$. Así, para todo $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $a \in \overline{B} = B$ y $b \in \overline{A} = A$. Observe que esto se cumple porque A y B son conjuntos compactos. Luego, $A \subset B$ y $B \subset A$. Por lo tanto, $A = B$.

(ii) Es claro que la propiedad simetrica se cumple por definición de H_d. Por lo tanto, $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

(iii) Por último veamos la desigualdad del triángulo. Para ello sean $A, B, C \in 2^X$ y tomemos δ y γ de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\delta \in &\{r > 0 : A \subset N(B, r) \text{ y } B \subset N(A, r)\} = E(A, B),\\ \gamma \in &\{r > 0 : B \subset N(C, r) \text{ y } C \subset N(B, r)\} = E(B, C).\end{aligned}$$

Esto último implica que si $a \in A$, entonces existen $b \in B$ y $c \in C$ tales que $d(b, c) \leq \delta$ y $d(a, b) \leq \gamma$. Aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \delta + \gamma.$$

Dado que $a \in A$, tenemos que $A \subset N(C, \delta + \gamma)$. Intercambiando A y C tenemos que $C \subset N(A, \delta + \gamma)$. Por lo cual $\delta + \gamma \in \{r > 0 : A \subset N(C, r) \text{ y } C \subset N(A, \gamma)\}$, así tenemos que $\{\delta + \gamma : \delta \in E(A, B) \text{ y } \gamma \in E(B, C)\} \subset \{r > 0 : A \subset N(C, r) \text{ y } C \subset N(A, r)\}$. Entonces

$$\begin{aligned}H_d(A, C) = &\,\text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(C, r) \text{ y } C \subset N(A, r)\}\\ \leq &\,\text{ínf}\{\delta + \gamma : \delta \in E(A, B) \text{ y } \gamma \in E(B, C)\}\\ = &\,\text{ínf}(E(A, B)) + \text{ínf}(E(B, C))\\ = &H_d(A, B) + H_d(B, C).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. Así, concluimos que la función H_d es una métrica para 2^X.

■

Definición 2.9. *Si X es un espacio métrico con métrica d, la* ***métrica de Hausdorff*** *para 2^X inducida por d, denotada por H_d, para cada A, $B \in 2^X$ es*

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\,\{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}\,.$$

Para todo continuo X, se tiene que el par $(2^X, H_d)$ es un espacio métrico. Como $C(X)$ está contenido en 2^X, entonces $C(X)$ es un subespacio métrico de 2^X. La métrica de Hausdorff la podemos interprentar geométricamente como se muestra en la figura 2.1. La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno con otro.

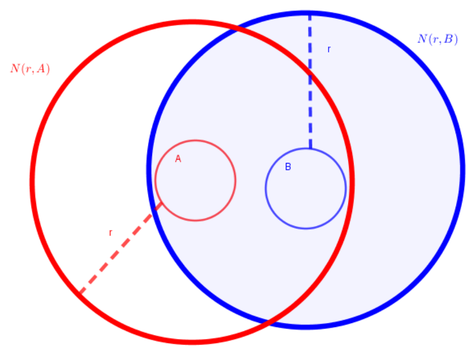

Figura 2.1: Métrica Huasdorff

Teorema 2.10. *Sean un continuo X, $A, B \in 2^X$ y $r > 0$. Entonces $H_d(A, B) < r$ si y sólo si $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Si $H_d(A, B) < r$, entonces r es una cota inferior de $E(A, B)$. Luego, dado un elemento $\delta \in E(A, B)$ se cumple que $\delta < r$. Luego, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por consiguiente $N(\delta, A) \subset N(r, A)$, esto último se cumple por el aparatdo (ii) del teorema 2.4. Como $B \subset N(\delta, A) \subset N(r, A)$, se tiene que $B \subset N(r, A)$. Por otro lado, como $B \in 2^X$ también se cumple que si $\delta \in E(A, B)$, entonces $\delta < r$. Así utilizando de nuevo el apartado (ii) del teorema 2.4, se tiene que $N(\delta, B) \subset N(r, B)$. Como $A \subset N(\delta, B) \subset N(r, B)$, se sigue que $B \subset N(r, B)$. Por lo tanto, lo que hemos probado es que si

$$H_d(A, B) < r \Rightarrow A \subset N(r, B) \;\text{ y }\; B \subset N(r, B).$$

[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Por el apartado (iii) del teorema 2.4, tenemos que $A \subset N(r, B) = \bigcup\{N(\delta, B) : 0 < \delta < r\}$ y $B \subset N(r, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$.
Como A y B son compactos, entonces existen $\delta_1, ..., \delta_n \in (0, r]$ y $\delta'_1, ..., \delta'_m \in (0, r]$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} N(\delta'_i, A)$. Tomemos a $\delta' = \text{máx}\{\delta_i : i = 1, ...n\}$ y $\delta'' = \text{máx}\{\delta'_i : i = 1, ...m\}$. Así, $A \subset \bigcup N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta'', A)$. Sea $\epsilon = \text{máx}\{\delta', \delta''\}$. Se sigue que $0 < \epsilon < r$ y además $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Luego, por la definición de la métrica de Hausdorff, tenemos que $H_d(A, B) \leq \epsilon < r$. Se concluye que $H_d(A, B) < r$. ■

Los siguientes resultados nos muestra una forma equivalente de ver a la métrica de Hausdorff.

Definición 2.11. *Sean un continuo X con métrica d y una función $D_d : 2^X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ cuya regla de correspondecia esta dada por:*

$$D_d(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

Teorema 2.12. *Sean un continuo X con métrica d y $A, B \in 2^X$. Entonces $D_d(A, B) = H_d(A, B)$.*

Demostración. Denotemos por $\epsilon = D_d(A, B)$ y supongamos, por el contrario que, $H_d(A, B) \neq \epsilon$. Entonces tenemos los siguientes dos casos:

(i) Si $H_d(A, B) < \epsilon$, por el teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Sea $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada, $x \in X$ por $g(x) = d(x, B)$. Por el teorema 1.11 sabemos que g es continua y en particular su restricción al conjunto A también es continua. Como A es compacto, la función $g|_A$ es acotada y por tanto existe $a_0 \in A$ tal que

$$d(a_0, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Como $A \subset N(\epsilon, B)$, existe un $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) < \epsilon$. Así,

$$d(a_0, B) \leq d(a_0, b_0) < \epsilon.$$

Por otro lado si consideramos a la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $x \in X$ por $h(x) = d(x, A)$, sabemos, por el teorema 1.11, h es continua y en particular $h|_B$ también lo es. Como B es compacto se sigue que $h|_B$ es acotada y por tanto existe el supremo. Existe $b_0 \in B$ tal que

$$d(b_0, A) = \sup\{d(b.A) : b \in B\}.$$

Dado que $B \subset N(\epsilon, A)$, existe un $a_0 \in A$ tal que $d(b_0, a_0) < \epsilon$, por consiguiente

$$d(b_0, A) \leq d(b_0, a_0) < \epsilon.$$

Ahora, de acuerdo con la definición 2.11, tenemos que

$$D_d(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A)\} : b \in B\} < \epsilon.$$

Como $\epsilon = D_d(A, B)$, tenemos que $D_d(A, B) < D_d(A, B)$, lo cual es una contradicción.

(ii) Supongamos que $H_d(A, B) > \epsilon$. Tomemos $r > 0$ tal que $\epsilon < r < H_d(A, B)$. Veamos que $A \subset N(r, B)$. Sea $a_0 \in A$, como B es compacto, por la proposición 1.12, tenemos que existe $b \in B$ tal que $d(a_0, B) = d(a_0, b)$. Por lo tanto,

$$d(a_0, b) = d(a_0, B) \leq \sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq D_d(A, B) < r.$$

De esta forma, $d(a_0, b) < r$, para algún $b \in B$. Así que $A \subset N(r, B)$. Por otro lado, si $b_0 \in B$ y dado que A es compacto, existe $a \in A$ tal que $d(b_0, A) = d(b_0, a)$. Luego,

$$d(b_0, a) = d(b_0, A) \leq \sup\{d(b, A) : b \in B\} \leq \epsilon < r.$$

Así, para el elemento $b_0 \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(b_0, a) < r$. Tenemos que $B \subset N(r, A)$, lo cual implica que $H_d(A, B) < r$ lo que es absurdo pues $H_d(A, B) > r$.
Por lo tanto, concluimos de los dos casos anteriores que $H_d(A, B) = D_d(A, B)$.

■

Proposición 2.13. *Sea un continuo X con métrica d. Si $A, B \in 2^X$ y $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$.*

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$ y $a \in A$. Si $a \in B$, entonces se cumple que $0 = d(a,a) \leq H_d(A,B)$.

Por otro lado supóngase que $a \notin B$. De acuerdo con el teorema 1.10, tenemos que la función $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para todo $x \in B$, por $g(x) = d(a,x)$ es continua. Dado que B es compacto tenemos que g alcanza su mínimo, es decir, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq d(a,x)$, para toda $x \in B$. Como queremos probar que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$, supongamos, por el contrario que $H_d(A,B) < d(a,b)$. Por la propiedad del ínfimo, que es $H_d(A,B)$, existe un número real ϵ_1 tal que $\epsilon_1 < d(a,b)$. Se sigue que $A \subset N(\epsilon_1, B)$ y $B \subset N(\epsilon_1, A)$ y dado que $a \in A$, existe $z \in B$ tal que $d(a,z) < \epsilon_1$, es decir, $d(a,z) < \epsilon_1 < d(a,b)$, pero cuando $x = z$ esto contradice el hecho de que $d(a,b) \leq d(a,x)$, para toda $x \in B$. Por lo tanto, concluimos que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$, y de esta forma la proposición queda demostrada. ■

Proposición 2.14. *Sean un continuo X con métrica d y $A, B \in 2^X$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $d(a,b) = H_d(A,B)$.*

Demostración. Por la compacidad de A y B, tenemos que $\sup\{d(a,B) : a \in A\} = d(a,b)$ para algún $b \in B$. De forma similar $\sup\{d(b,A) : b \in B\} = d(b,a)$, para algún $a \in A$. Así, aplicando el teorema 2.12, tenemos que $D(A,B) = \max\{d(a,b), d(b,a)\} = d(a,b)$, es decir, $H_d(A,B) = d(a,b)$ y el teorema queda demostrado. ■

Proposición 2.15. *Si X un contiuo con métrica d y $A, B, A', B' \in 2^X$ tales que $A' \subset A$ y $B' \subset B$, entonces*

$$H_d(A \cup B', B \cup A') \leq H_d(A,B).$$

Demostración. Denotemos por $r = H_d(A,B)$, veamos que se cumplen las siguientes condiciones

$$(1)\ A \cup B' \subset N(r, B \cup A') \ \text{ y } \ (2)\ B \cup A' \subset N(r, A \cup B').$$

Para ver (1) tomemos un elemento $x \in A \cup B'$. Si $x \in A$, entonces podemos considerar la función $f : B \cup A' \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $f(b) = d(x,b)$, para cada $b \in B \cup A'$. Luego note que por el teorema 1.10, tenemos que f es una función continua y como $B \cup A'$ es compacto, f alcanza su mínimo, es decir, existe $z \in B \cup A'$ tal que $d(x,z) \leq d(x,b)$. Por la proposición 2.13, tenemos que $d(x,z) \leq r$ y de esta forma obtenemos que $x \in N(r, B \cup A')$. Por otro lado si $x \in B'$, entonces por la hipótesis $x \in B$. Luego $0 = d(x,x) \leq r$ y por

tanto $x \in N(r, B \cup A')$.
Para último veamos que se cumple (2). Sea $x \in B \cup A'$. Entonces tenemos dos casos, por un lado si $x \in B$ entonces podemos considerar una función $f : A \cup B' \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $f(a) = d(x, a)$, para cada $a \in A \cup B'$. Luego por el teorema 1.10, tenemos que f es una función continua y como $A \cup B'$ es compacto, f alcanza su mínimo, es decir, que existe un $b \in A \cup B'$ tal que $d(x, b) \leq d(x, a)$, y de acuerdo con la proposición 2.13, tenemos que $d(x, b) \leq r$. Así obtenemos que $x \in N(r, A \cup B')$. Por otro lado si $x \in A'$, entonces por hipótesis $x \in A$, luego $0 = d(x, x) < r$ y por lo tanto, $x \in N(r, A \cup B')$. Concluimos de los casos (1) y (2) que la proposición es cierta y por tanto queda demostrada. ■

2.2. Topología de Vietoris

A continuación veremos que todos los hiperespacios de un continuo X los podemos considerar con la métrica de Hausdorff o con la topología de **Vietoris**. Empezaremos enunciando las siguientes definiciones.

Definición 2.16. *Sea un continuo X y A un subconjunto de X. Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X*

$$\begin{aligned}\Gamma(A) &= \{B \in 2^X : B \subset A\},\\ \Lambda(A) &= \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\},\\ \Omega(A) &= \{B \in 2^X : A \subset B\}.\end{aligned}$$

Definición 2.17. *Sean un continuo X, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n$ subconjuntos de X no vacíos. El **vietórico** de $U_1, U_2, ..., U_n$ es el conjunto*

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, ..., n\} \right\}.$$

Teorema 2.18. *Sean un continuo X, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n$ subconjuntos de X, no vacíos. Entonces se cumple las siguientes condiciones*

(i) $\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$,

(ii) $\Gamma(A) = \langle A \rangle$ *para cada* $A \subset X$,

(iii) $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$ *para cada* $A \subset X$.

Demostración. (i) Observe que el conjunto vietórico se puede ver como sigue

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle &= \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ con } i \in \{1,2,...,n\}\} \\ &\cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset \text{ con } i \in \{1,2,...,n\}\} \\ &= \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].\end{aligned}$$

(ii) [$\subset$] Sea $B \in \Gamma(A)$, luego $B \subset A$. Ahora afirmamos que $B \cap A \neq \emptyset$. Basta ver que $B \setminus A \neq B$. En efecto supongamos que $B \setminus A = B$. Dado un elemento $z \in B \setminus A$ se cumple que $z \in B$ y $z \notin A$, pero como $B \subset A$ entonces $z \in A$, así tenemos que $z \in A$ y $z \notin A$ lo que es absurdo. Por lo tanto, $B \setminus A \neq B$. Es decir $B \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $B \in \Lambda(A)$. Así concluimos que $B \in \langle A \rangle$.

[$\supset$] Sea $B \in \langle A \rangle$ luego por definición de $\langle A \rangle$ se sigue que $B \in \Gamma(A)$.

(iii) [$\subset$] Si $B \in \Lambda(A)$, entonces $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap X \neq \emptyset$. Por tanto $B \in \langle X, A \rangle$.

[$\subset$] Por último, sea $B \in \langle X, A \rangle$ entonces $B \subset X \cup A = X$ y $B \cap (X \cap A) \neq \emptyset$ esto implica que $B \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B \in \Lambda(A)$.

■

Teorema 2.19. *Sean* $n, m \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, ..., U_n$ *y* $V_1, V_2, ..., V_m$ *subconjuntos de un continuo* X. *Si* $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *y* $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, *entonces*

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle = \langle V \cap U_1, V \cap U_2, ..., V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, ..., U \cap V_m \rangle$$

Demostración. Notemos primero que

$$U \cap V = \left[U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\right)\right] \cup \left[V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right] \tag{2.1}$$

$$= \left[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)\right] \tag{2.2}$$

[$\subset$] Sea $B \in \langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle$, entonces $B \in \langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle$ y $B \in \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle$.

(i) Si $B \in \langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} & B \in \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \\ \Rightarrow\ & B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ \text{ y } \ B \in \Lambda(U_i) \ \text{ para todo } \ i \in \{1,2,...,n\} \\ \Rightarrow\ & B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U \ \text{ y } \ B \cap U_i \ \text{ para todo } \ i \in \{1,2,...,n\}. \end{aligned}$$

(ii) De forma similar se comprueba para el elemento $B \in \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle$, para obtener

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i = V \ \text{ y } \ B \cap V_i \ \text{ para todo } \ i \in \{1,2,...,m\}.$$

De esto último observemos que $B \subset (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_i) = U \cap V$. Además, de acuerdo con la ecuación 2.1, tenemos que

$$B \subset \left[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)\right].$$

Como $B \subset U$ se cumple que $B = B \cap U$. Además, observe que $B \cap V_i = B \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2,...,m\}$. Del mismo modo se prueba que $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,2,...,n\}$. Por lo tanto, concluimos que

$$B \in \langle U \cap V_1, ..., U \cap V_m, V \cap U_1, ..., V \cap U_n \rangle.$$

[$\supset$] Sea $B \in \langle U \cap V_1, ..., U \cap V_m, V \cap U_1, ..., V \cap U_n \rangle$. Luego por la igualdad 2.1, tenemos que $B \subset U \cap V$. Tomemos $i \in \{1,2,...,n\}$, como $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, tenemos que $B = B \cap V$ y $B \cap U_i = B \cap (V \cap U_i)$. Así se tiene que $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, es decir, $B \cap U_i \neq \emptyset$. De la misma forma se prueba que $B \cap V_i \neq \emptyset$, para cualquier $i \in \{1,2,...,m\}$. Por lo tanto,

$$B \in \langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle.$$

Así, concluimos que

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, ..., V_n \rangle = \langle V \cap U_1, V \cap U_2, ..., V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, ..., U \cap V_m \rangle$$

■

Teorema 2.20. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes conjuntos*

(i) $\mathfrak{C} = \{\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle : U_1, U_2, ..., U_n \quad \textit{son abiertos de} \quad X\}$,

(ii) $\wp = \{\Gamma(U) : \, U \textit{ es abierto de } X\} \cup \{\Lambda(U) : \, U \textit{ es abierto de } X\}$.

Entonces $\mathfrak{C}$ es una base para la topología obtenida por la métrica de Hausdorff para 2^X y $\wp$ es una subbase para tal topología.

Demostración. Demostraremos las tres condiciones del teorema 1.24. Entonces:

(i) Note que el $\emptyset \in \mathfrak{C}$ ya que $\langle \emptyset \rangle = \{B \in 2^X : B \subset \emptyset \text{ y } B \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$ y dado que $\emptyset$ es abierto de X, se sigue que $\emptyset \in \mathfrak{C}$.

Sean $U, V \in \mathfrak{C}$ y $B \in U \cap V$. Veamos que existe $U_0 \in \mathfrak{C}$ tal que $B \in U_0 \subset U \cap V$. Como $U, V \in \mathfrak{C}$, entonces $U = \langle U_1, ..., U_n \rangle$ y $V = \langle V_1, ..., V_m \rangle$ donde cada $U_1, ..., U_n$ y $V_1, ..., V_m$ son abiertos de X, con $n, m \in \mathbb{N}$. Ahora, por el teorema 2.19, existe un conjunto U_0 tal que

$$U_0 = \langle V \cap U_1, ..., V \cap U_n, U \cap V_1, ..., U \cap V_m \rangle \in \mathfrak{C}.$$

Del mismo teorema 2.19 se sigue que $U \cap V = U_0 \in \mathfrak{C}$. Como $B \in U \cap V$ tenemos que $B \in U_0 \subset U \cap V$.

Por último, veamos que $2^X = \bigcup \mathfrak{C}$. En efecto, notemos que $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$, así $2^X \in \mathfrak{C}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathfrak{C}$, luego, $2^X = \bigcup \mathfrak{C}$. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es una base para lo topología τ_V para 2^X.

(ii) Ahora, sea $[\wp] = \{\bigcap \mathscr{L} : \mathscr{L}$ es finito y $\mathscr{L} \subset \wp\}$, para ver que $\wp$ es una subbase para la topología τ_V, basta ver que $[\wp] = \mathfrak{C}$.

Sea $V \in \mathfrak{C}$, entonces $V = \langle U_1, ..., U_n \rangle$, donde cada U_i es un abierto de X, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Denotemos por $W = \bigcup_{i=1}^n U_i$, luego aplicando el teorema 2.18, apartado (i) tenemos que $V = \langle U_1, ..., U_n \rangle = \Gamma(W) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$, de aquí obtenemos que V es una intersección finita de elementos de $\wp$. Por lo tanto, $V \in [\wp]$ y así obtenemos la primera contención $\mathfrak{C} \subset \wp$.

Por otro lado, note que $\wp \subset \mathfrak{C}$, pues si $V \in \wp$, entonces tenemos los siguientes casos $V \in \{\Gamma(U) : \, U$ es abierto de $X\}$ o $V \in \{\Lambda(U) :$

U es abierto de $X\}$. Si $V \in \{\Gamma(U) : U$ es abierto de $X\}$, entonces $V = \Gamma(U)$ para algún U abierto de X y aplicando el teorema 2.18, apartado (ii), tenemos que $V = \Gamma(U) = \langle U \rangle$ así $V \in \mathfrak{C}$. Ahora si $V \in \{\Lambda(U) : U$ es abierto de $X\}$, entonces $V = \Lambda(U)$ para algún U abierto de X, luego aplicando de nuevo el teorema 2.18, apartado (iii), tenemos que $V = \Lambda(U) = \langle X, U \rangle$. Se sigue que $V \in \mathfrak{C}$. Además, por el teorema 2.19, tenemos que $\mathfrak{C}$ es cerrado bajo intersecciones finitas de manera que $[\wp] \subset \mathfrak{C}$. Por lo tanto, $[\wp] = \mathfrak{C}$ y así de ambas contenciones concluimos que $\wp$ es una subbase para la topología τ_V.

■

A la topología generada por $\mathfrak{C}$ y denotada por τ_V se le llama **topología de Vietoris** para el hiperespacio 2^X.

Teorema 2.21. *Sea un continuo X con métrica d. La topología de Vietoris τ_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff τ_{H_d} en 2^X son iguales.*

Demostración. Mostraremos primero que $\tau_V \subset \tau_{H_d}$. Como $\wp$ es una subbase de τ_V, veamos que $\Gamma(U) \in \tau_{H_d}$ y $\Lambda(U) \in \tau_{H_d}$. Para ello fijemos un subconjunto abierto U de X tal que $U \neq X$ y tomemos a $A \in \Gamma(U)$. Sea $\epsilon = d(A, X \setminus U)$, por la proposición 1.13, tenemos que $\epsilon > 0$. Ahora, sea $K \in B_{H_d}(A, \epsilon)$, luego $H_d(A, K) < \epsilon$ y veamos que $K \subset U$. Sea $k_1 \in K$ entonces por la proposición 2.13, existe $a \in A$ tal que

$$d(a, k_1) \leq H_d(A, K).$$

Supongamos, por el contrario, que $k_1 \notin U$ entonces $k_1 \in X \setminus U$, así obtenemos que

$$d(a, k_1) < \epsilon \text{ y } \epsilon \leq d(a, k_1),$$

lo cual es una contradicción, así $K \subset U$ y por lo tanto, $K \in \Gamma(U)$. Esto implica que $B_{H_d}(A, \epsilon) \subset \Gamma(U)$.

Ahora si $A \in \Lambda(U)$, entonces $A \cap U \neq \emptyset$ con lo cual existe $p \in A \cap U$. Sea $\epsilon = d(\{p\}, X \setminus U)$, por la proposición 1.13, tenemos que $\epsilon > 0$. Sea $K \in B_{H_d}(A, \epsilon)$ y veamos que $K \cap U \neq \emptyset$. Para ello supongamos por el contrario, que $K \cap U = \emptyset$. Luego, $K \subset X \setminus U$. Como $p \in A$, por la proposición 2.13, existe $k_0 \in K$ tal que

$$d(p, k) \leq H_d(A, K) < \epsilon.$$

Como $p \in \{p\}$ y $k_0 \in X \setminus U$, tenemos que $\epsilon \leq d(p,k)$, lo cual es una contradicción. Así, $K \cap U \neq \emptyset$, es decir, $K \in \Lambda(U)$ y por lo tanto, $B_{H_d}(A,\epsilon) \subset \Lambda(U)$.

Esto último nos dice que $\Gamma(U), \Lambda(U) \in \tau_{H_d}$ para U un subconjunto abierto de X con $U \neq X$. Más aún, se tiene que $\Lambda(X) = \Gamma(X) = 2^X$. Por lo tanto, $\wp \subset \tau_{H_d}$ y esto implica que $\tau_V \subset \tau_{H_d}$.
Ahora, veamos que $\tau_H \subset \tau_V$. Como $\mathfrak{C}$ es una base para la topología τ_V es suficiente probar que la bola con la métrica de Hausdorff $B_{H_d}(A,\epsilon)$ es un conjunto abierto de 2^X. Para ello sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, consideremos la bola $B_{H_d}(A,\epsilon)$. Es claro que $A \in B_{H_d}(A,\epsilon)$, por tanto buscamos $U_1, ..., U_n$ subconjuntos abiertos de X tales que

$$A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle \subset B_{H_d}(A,\epsilon).$$

Veamos que primero que $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Consideremos la siguiente cubierta abierta $\mathcal{U} = \{B(a, \frac{\epsilon}{2}) : a \in A\}$ de A. Como A es compacto podemos extraer una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, digamos $\mathcal{V} = \{B(a_i, \frac{\epsilon}{2}) : i \in \{1, .., n\}\}$. Note que los elementos de la cubierta tienen diámetro menor que ϵ. Defínase $U_i = B(a_i, \frac{\epsilon}{2})$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Tenemos entonces lo siguiente:

(i) $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y

(ii) $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, .., n\}$.

De lo anterior concluimos que $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Resta probar que $H_d(A,B) < \epsilon$ o que es lo mismo que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Sea $a \in A$. Existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $a \in B(a_j, \frac{\epsilon}{2})$. Así, $d(a_j, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora como $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a_j, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego de las dos desigualdades anteriores se tiene que $d(a,b) \leq d(a_j, a) + d(a_j, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, con lo cual tenemos que $d(a,b) < \epsilon$ y por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, B)$. Por otro lado, como $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $\text{diám}(U_i) < \epsilon$, tenemos que $B \subset N(\epsilon, A)$. Finalmente $H_d(A,B) < \epsilon$ y por lo tanto, concluimos que $B \in B_{H_d}(A,\epsilon)$. ■

Dado un continuo X, la topología obtenida de la métrica de Hausdorff para 2^X, depende solo de la topología de X, como lo establece el siguiente corolario.

Corolario 2.22. *Sea un continuo X, si d y D son métricas para X, cada una de las cuales genera la topología τ de X, entonces la topología para 2^X obtenida de H_d y la obtenida de H_D son idénticas.*

Demostración. Sean d y D dos métricas para X. Si τ_d y τ_D son las topologías obtenidas por las métricas d y D respectivamente, tales que $\tau_d = \tau_D$. Ahora, sean τ_{H_d} y τ_{H_D} las topologías obtenidas por métricas de Hausdorff H_d y H_D respectivamente para 2^X. Mostraremos que $\tau_{H_d} = \tau_{H_D}$.
Para ver esto último, sean

$$\mathfrak{C}_d = \{\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle : U_i \in \tau_d \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

y

$$\mathfrak{C}_D = \{\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle : U_i \in \tau_D \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Por el teorema 2.20, sabemos que $\mathfrak{C}_d$ es una base para la topología obtenida de la métrica de Hausdorff H_d y también $\mathfrak{C}_D$ es una base para la topología obtenida de la métrica de Hausdorff H_D. Como $\tau_d = \tau_D$, entonces $\mathfrak{C}_d = \mathfrak{C}_D$, es decir, $\tau_{H_d} = \tau_{H_D}$. ■

Teorema 2.23. *Sea un continuo X con métrica d y A un subconjunto cerrado de X. Entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Omega(A)$ son cerrados de 2^X.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X. Veamos primero que $\Gamma(A)$ es cerrado de 2^X, esto último es equivalente a demostrar que $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$. Probemos que $\Gamma(A) \subset \overline{\Gamma(A)}$. Si $B \in \Gamma(A)$, entonces B es cerrado de X y no vacío y es tal que $B \subset A$. Luego se cumple que $B = \overline{B}$ y $A = \overline{A}$. Se sigue que $\overline{B} \subset \overline{A}$. Así tenemos que $B \in \overline{\Gamma(A)}$. Resta probar la otra contención $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$. Para ello sea $B \in \overline{\Gamma(A)}$, supongamos, por el contrario, $B \notin \Gamma(A)$, es decir, $B \not\subset A$. Como estamos suponiendo que $B \not\subset A$, entonces $B \setminus A \neq \emptyset$. De esta forma aseguramos que existe un elemento $n \in B \setminus A$. Luego, como A es compacto en X y $n \in B$ se cumple que $d(n, A) > 0$, pues $A \cap \{n\} = \emptyset$. Denotemos por $\epsilon = d(n, A)$, como $B \in \overline{\Gamma(A)}$ tenemos que $B_{H_d}(B, \epsilon) \cap \Gamma(A) \neq \emptyset$. Así, existe $Z \in B_{H_d}(B, \epsilon) \cap \Gamma(A)$. Se sigue que $H_d(B, Z) < \epsilon$ y $Z \subset A$. Luego, $B \subset N(\epsilon, Z)$ y $Z \subset N(\epsilon, B)$. Como $n \in B$ tenemos que $n \in N(\epsilon, Z)$. Así, existe $m \in Z$ tal que $d(n, m) < \epsilon$. Además, sabemos que $Z \subset A$, luego $m \in A$. Se sigue que $d(n, A) \leq d(n, m)$. De manera que $d(n, A) < \epsilon$, lo que es absurdo. Así $B \in \Gamma(A)$, por lo que $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$. Por lo tanto, $\Gamma(A)$ es cerrado de 2^X.

Veamos que $\Lambda(A)$ es un conjunto cerrado de 2^X. Para ello note que como A es cerrado de X, entonces $X \setminus A$ es abierto de X. Luego, por (i) de este teorema $\Gamma(X \setminus A)$ es abierto de 2^X. Por tanto $2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$ es cerrado de 2^X. Afirmamos que $\Lambda(A) = 2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$. En efecto. Tenemos que $B \in \Lambda(A)$ si y sólo si $B \cap A \neq \emptyset$, si y sólo si $B \setminus (B \setminus A) \neq \emptyset$, si y sólo si no ocurre que $B \setminus (B \setminus A) = \emptyset$, si y sólo si no ocurre que $B \subset B \setminus A$, si y sólo si $B \not\subset B \setminus A$, si y sólo si $B \in 2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$. Por lo tanto, concluimos que $\Lambda(A)$ es cerrado de 2^X.

Por último probemos que $\Omega(A)$ es un conjunto cerrado de 2^X. Bastara probar que $\overline{\Omega(A)} = \Omega(A)$. Sea $B \in \overline{\Omega(A)}$. Supongamos, por el contrario que $B \notin \Omega(A)$, es decir, $A \not\subset B$. Tomemos $n \in A \setminus B$, luego $d(n, B) > 0$ y denotemos por $\epsilon = d(n, B)$. Como $B \in \overline{\Omega(A)}$, entonces $B_{H_d}(\epsilon, B) \cap \Omega(A) \neq \emptyset$. Luego, existe un elemento $Z \in B_{H_d}(\epsilon, B) \cap \Omega(A)$, esto implica que $Z \in B_{H_d}(\epsilon, B)$ y $Z \in \Omega(A)$. Si $Z \in B_{H_d}(\epsilon, B)$, $H_d(B, Z) < \epsilon$. Por el teorema 2.10. Estó último es equivalente a decir que $B \subset N(\epsilon, Z)$ y $Z \subset N(\epsilon, B)$. Luego, como $n \in A$ y $Z \in \Omega(A)$ se sigue que $A \subset Z$, en particular $n \in Z$ y así $n \in N(\epsilon, B)$. Luego, existe $m \in B$ tal que $d(n, m) < \epsilon$. Entonces, $d(n, B) \leq d(n, m)$, con lo cual $d(n, B) < \epsilon$, es decir, $\epsilon < \epsilon$ lo que es absurdo. Por lo tonta $\Omega(A)$ es cerrado de 2^X. ■

Teorema 2.24. *Sean X y Y dos continuos con d y d' sus métricas respectivas, y sea un homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$. Existe un homeomorfismo $h^* : 2^X \longrightarrow 2^Y$ tal que $h^*[C(X)] = C(Y)$.*

Demostración. Sea $h^* : 2^X \longrightarrow 2^Y$ definida como $h^*(A) = h(A)$, para cada $A \in 2^X$. Nótese que como h es un homeomorfismo, h es una función cerrada y por tanto $h(A) \in 2^Y$.

Veamos que h^* es inyectiva, entonces sean $A, B \in 2^X$ tales que $h^*(A) = h^*(B)$, luego $h(A) = h(B)$, como h es inyectiva tenemos que $A = B$. Por lo tanto, h^* es inyectiva.

Probemos que h^* es suprayectiva, para ello tomemos cualquier $B \in 2^Y$. Luego, B es un subconjunto cerrado de Y tenemos que $h^{-1}(B) \in 2^X$ pues h es una función continua y es tal que

$$h^*(h^{-1}(B)) = h(h^{-1}(B)) = B,$$

esto último es porque h es suprayectiva. Por lo tanto, h^* es suprayectiva, y por tanto h^* es biyectiva.

Veamos que $h^*[C(X)] = C(Y)$. Sea $B \in h^*[C(X)]$. Existe $A \in C(X)$ tal que $B = h^*(A)$, como las funciones continuas preservan conexidad se sigue que $h(A) = B$ es conexo, luego por definición de h tenemos que B es cerrado de X, luego B es compacto. Así $B \in C(Y)$. De esta manera hemos probado que $h^*[C(X)] \subset C(Y)$.

Sea $B \in C(Y)$. Como h^* es suprayectiva existe $A \in 2^X$ tal que $h^*(A) = B$. Como $h(A) = B$ y $h^{-1}(B) = h^{-1}(h(A)) = A$, se tiene que A es conexo. Por lo tanto, $A \in C(X)$, así $A \in h^*[C(X)]$ y por lo tanto, concluimos que $h^*[C(X)] = C(Y)$.

Resta mostrar la continuidad de h^*, pero antes de ello definamos $D : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $D(x, y) = d'(h(x), h(y))$, para cada $(x, y) \in X \times X$. Como que d' es una métrica en Y, entonces D es una métrica para X.
Ahora, afirmamos que d y D son métricas equivalentes. En efecto, sean $x \in X$ y $r > 0$, deseamos probar que existe un $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon_1) \subset B_D(x, r)$. Sea $t \in B_D(x, r)$, entonces $D(x, t) < r$. Como $D(x, t) = d'(h(x), h(t))$, $h(t) \in B_{d'}(h(x), r)$ que es lo mismo que $t \in h^{-1}[B_{d'}(h(x), r)]$. Denotemos a $U_x = h^{-1}[B_{d'}(h(x), r)]$, note que U_x es un subconjunto abierto de X. Luego existe un $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_d(t, \epsilon_1) \subset U_x$. Ahora, veamos que $U_x \subset B_D(x, r)$. Para ello, supongamos, por el contrario que existe $x_1 \in U_x$ tal que $x_1 \notin B_D(x, r)$. Entonces $h(x_1) \notin B_{d'}(h(x), r)$, que es lo mismo que, $x_1 \notin h^{-1}[B_{d'}(h(x), r)]$, es decir, $x_1 \notin U_x$, lo cual es una contradicción pues $x_1 \in U_x$. Por lo tanto, $B_d(t, \epsilon_1) \subset B_D(x, r)$. De forma análogoa se prueba que existe un $\epsilon_2 > 0$ tal que $B_D(x, \epsilon_2) \subset B_d(x, r)$. Por lo tanto, D es equivalente a d.
Ahora, afirmamos que

$$H_D(A, B) = H_{d'}(h^*(A), h^*(B)), \quad \text{para cada } A, B \in 2^X.$$

En efecto, denotemos por

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N_D(\epsilon, B) \quad \text{y} \quad B \subset N_D(\epsilon, A)\}$$

y

$$E'(h(A), h(B)) = \{\epsilon > 0 : h(A) \subset N_{d'}(\epsilon, h(B)) \quad \text{y} \quad h(B) \subset N_{d'}(\epsilon, h(A))\}.$$

Probemos que $E(A, B) = E'(h(A), h(B))$. Sea $\epsilon \in E(A, B)$, entonces $A \subset N_D(\epsilon, B)$ y $B \subset N_D(\epsilon, B)$. Ahora, sea $a \in A$, existe un $b \in B$ tal que $D(a, b) < \epsilon$, luego $d'(h(a), h(b)) < \epsilon$, o sea que $h(a) \in N_{d'}(\epsilon, h(b))$, que es lo mismo que, $h(A) \subset N_{d'}(\epsilon, h(B))$. De forma similar se prueba que si $B \subset N_D(\epsilon, A)$, entonces $h(B) \subset N_{d'}(\epsilon, h(A))$. Por lo tanto, $E(A,B) \subset E'(h(A), h(B))$.

Por último sea $\epsilon \in E'(h(A), h(B))$, entonces $h(A) \subset N_{d'}(\epsilon, h(B))$ y $h(B) \subset N_{d'}(\epsilon, h(A))$. Sea $a \in h(A)$, entonces existe $b \in h(B)$ tal que $d'(h(a), h(b)) < \epsilon$, que es lo mismo que, $D(a,b) < \epsilon$, es decir, $A \subset N_D(\epsilon, B)$. De forma similar se prueba que si $h(B) \subset N_{d'}(\epsilon, h(A))$, entonces $B \subset N_D(\epsilon, A)$. Por lo tanto, $E(A,B) = E'(h(A), h(B))$.

Ahora, por el teorema 2.7, tenemos que $\text{ínf}(E(A,B)) = \text{ínf}(E'(h(A), h(B)))$. Por lo tanto, $H_D(A,B) = H_{d'}(h^*(A), h^*(B))$.

Ya estamos listos par ver que en efecto h^* es una función continua. Por el corolario 2.22, tenemos que H_D y H_d son métricas equivalentes, así dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_{H_d}(A, \delta) \subset B_{H_D}(A, \epsilon)$, es decir, si $B \in B_{H_d}(A, \delta)$, entonces $B \in B_{H_D}(A, \epsilon)$, o sea que si, $H_d(A,B) < \delta$, entonces $H_D(A,B) < \epsilon$. Pero $H_D(A,B) = H_{d'}(h^*(A), h^*(B))$, se sigue que $H_{d'}(h^*(A), h^*(B)) < \epsilon$. Por lo tanto, h^* es continua en A con $H_{d'}$ y H_d. ■

2.3. Convergencia en hiperespacios

En esta sección presentamos una descripción apropiada de la convergencia con respecto a la métrica Hausdorff.

Definición 2.25. *Sean un continuo X y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X. El* ***limite superior*** *y el* ***limite inferior****, denotados como* $\text{lím sup}(A_i)$ *y* $\text{lím inf}\,(A_i)$*, son :*

$$\text{lím sup}\,(A_i) = \{x \in X : \textit{para todo } \epsilon > 0, \;\; B(x,\epsilon) \cap A_i \neq \emptyset \;\; \textit{para una cantidad infinita de índices } \; i\},$$

$$\text{lím inf}\,(A_i) = \{x \in X : \textit{para todo } \epsilon > 0, \; \textit{existe } N \in \mathbb{N} \;\; B(x,\epsilon) \cap A_i \neq \emptyset \;\; \textit{para toda } i \geq N\}.$$

Observación 2.26. *El* $\text{lím inf}\,(A_i) \subset \text{lím sup}\,(A_i)$*, por la definición de estos conjuntos.*

Definición 2.27. *Sean un continuo X, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X y $A \in 2^X$. Si* $\text{lím inf}\, A_i = \text{lím sup}\, A_i = A$*, entonces el* ***límite de*** *$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es A y se denota por* $\text{lím}\, A_i = A$.

Lema 2.28. *Sean un continuo X y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

(i) $\operatorname{lím}(A_i) = A$.

(ii) $A \subset \operatorname{lím\,inf}(A_i)$ y $\operatorname{lím\,sup} A_i \subset A$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Si $\operatorname{lím} A_i = A$, entonces $\operatorname{lím\,inf} A_i = \operatorname{lím\,sup} A_i = A$ lo cual implica que $\operatorname{lím\,inf}(A_i) \subset \operatorname{lím\,sup}(A_i)$ y $\operatorname{lím\,sup}(A_i) \subset \operatorname{lím\,inf}(A_i)$. Así $A \subset \operatorname{lím\,inf}(A_i)$ y $\operatorname{lím\,sup}(A_i) \subset A$.
$[\Leftarrow]$ Ahora, note que $A \subset \operatorname{lím\,inf}(A_i) \subset \operatorname{lím\,sup}(A_i) \subset A$. Luego, $\operatorname{lím\,inf}(A_i) = \operatorname{lím\,sup}(A_i)$, es decir, $\operatorname{lím}(A_i) = A$. ■

Lema 2.29. *Sean un continuo X con métrica d, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X y $A \in 2^X$, entonces se cumple:*

(i) $\operatorname{lím\,sup}(A_i)$ *y el* $\operatorname{lím\,inf} A_i$ *son conjuntos cerrados de* X.

(ii) $\operatorname{lím\,sup}(A_i) \neq \emptyset$ *para toda sucesión en* 2^X.

Demostración. (i) Deseamos probar que $\operatorname{lím\,sup}(A_i) = \overline{\operatorname{lím\,sup} A_i}$. Es evidente que $\operatorname{lím\,sup}(A_i) \subset \overline{\operatorname{lím\,sup}(A_i)}$. Lo interesante es la otra contención, es decir, $\overline{\operatorname{lím\,sup}(A_i)} \subset \operatorname{lím\,sup}(A_i)$. Para ello, sea $x \in \overline{\operatorname{lím\,sup}(A_i)}$. Dado cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $B(x,\epsilon) \cap \operatorname{lím\,sup}(A_i) \neq \emptyset$. Luego, consideremos a un elemento $p \in B(x,\epsilon) \cap \operatorname{lím\,sup}(A_i)$. Como $p \in B(x,\epsilon)$ esto implica que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B(p,\epsilon_0) \subset B(x,\epsilon)$, donde $\epsilon_0 = \epsilon - d(p,x)$. Por otro lado, como también se tiene que $p \in \operatorname{lím\,sup}(A_i)$, entonces para dicho $\epsilon_0 > 0$ tenemos que $B(p,\epsilon_0) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i y dado que $B(p,\epsilon_0) \subset B(x,\epsilon)$, se sigue que, $B(x,\epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i. Por lo tanto, $x \in \overline{\operatorname{lím\,sup}(A_i)}$.

Veamos ahora que $\operatorname{lím\,inf}(A_i)$ es un subconjunto cerrado de X. Para ello solo probaremos la siguiente contención $\overline{\operatorname{lím\,inf}(A_i)} \subset \operatorname{lím\,inf}(A_i)$, ya que la otra contención es evidente. Dicho esto, tomemos $x \in \overline{\operatorname{lím\,inf}(A_i)}$. Luego, dado cualquier $\epsilon > 0$, se cumple que $B(x,\epsilon) \cap \operatorname{lím\,inf}(A_i) \neq \emptyset$. Así existe $x_0 \in B(x,\epsilon) \cap \operatorname{lím\,inf}(A_i)$. Como $x_0 \in B(x,\epsilon)$, podemos encontrar un $\epsilon_1 = \epsilon - d(x,x_0) > 0$ tal que $B(x_0,\epsilon_0) \subset B(x,\epsilon)$. Por otro lado, como $x_0 \in \operatorname{lím\,inf}(A_i)$, para $\epsilon_0 > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_0,\epsilon_0,) \cap A_i \neq \emptyset$, para toda $i \geq N$. Dado que $B(x_0,\epsilon_0) \subset B(x,\epsilon)$ se sigue que $B(x,\epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$, para toda $i \geq N$. Por lo tanto, $x \in \operatorname{lím\,inf}(A_i)$.

(ii) Note que para cada sucesión $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de 2^X A_i es diferente del vacío para toda $i \in \mathbb{N}$. Ahora para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $a_i \in A_i \subset X$. Tenemos que $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X. Dado que X es compacto, existe una subsucesión $\{a_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento a de X. Dicho lo anterior tenemos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{i_j} \in B(\epsilon, x), \text{ para toda } j \geq N.$$

De esta forma tenemos que $B(\epsilon, x) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i. De aqui, se sigue que $x \in \limsup(A_i)$, y por lo tanto, $\limsup(A_i) \neq \emptyset$.

■

Lema 2.30. *Sea un continuo X con métrica d. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de 2^X, entonces se cumple*:

(i) $x \in \liminf(A_i)$ *si solo si existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x tal que $x_i \in A_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.*

(ii) $x \in \limsup(A_i)$ *si y sólo si existen una sucesión de números naturales $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $i_1 < i_2 < ... < i_k < ...$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y x_{i_k} converge a x.*

Demostración. Veamos que se cumple que (i).
[⇒] Sea $x \in \liminf(A_i)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in A_i$ de tal forma que

$$d(x, x_i) = \min\{d(x, y) : y \in A_i\}.$$

Sean $x \in X$ fijo y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $x \in X$, por $f(y) = d(x, y)$. Por el teorema 1.10, sabemos que f es continua y dado que $A_i \in 2^X$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que A_i es compacto. Así f es acotada y alcanza su mínimo en A_i para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x_i) = \min\{d(x, y) : y \in A_i\}.$$

Sea $\epsilon > 0$, como $x \in \liminf(A_i)$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \geq N$. Así, para cada $i \geq N$, existe $a_i \in A_i$ tal que $d(x, a_i) < \epsilon$. Además

$$d(x, x_i) = \min\{d(x, y) : y \in A_i\} \leq d(x, a_i) < \epsilon.$$

De lo anterior tenemos que $d(x, x_i) < \epsilon$, para cada $i \geq N$, por lo tanto, x_i converge a x.
[$\Leftarrow$] Ahora sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X tal que x_i converge a x y $x_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_i) < \epsilon \text{ para cada } i \geq N.$$

Así, para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $x_i \in B(x, \epsilon)$ y $x_i \in A_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. De esta forma obtenemos que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(x, \epsilon) \cap A_i$, para cada $i \geq N$, es decir, $x \in \operatorname{lím\,inf}(A_i)$.

Por último, veamos que se cumple (ii).
[$\Rightarrow$] Sea $x \in \operatorname{lím\,sup}(A_i)$. Para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $B(x, \epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita índices i. Elijamos a $\epsilon = 1$. Luego, $B(x, 1) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i. Tomemos $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_1} \in B(x, 1) \cap A_{i_1}$. Luego, $d(x, x_{i_1}) < 1$ y $x_{i_1} \in A_{i_1}$. Ahora, tomemos a $\epsilon = \frac{1}{2}$. Tenemos que, $B(x, \frac{1}{2}) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i. Tomemos $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que $i_2 > i_1$. Luego, $B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{i_2} \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x_{i_2} \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{i_2}$. Así, $d(x, x_{i_2}) < \frac{1}{2}$ y $x_{i_2} \in A_{i_2}$.
Continuando este procedimiento se construye una sucesión de números naturales $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $i_1 < i_2 < ... < i_k ...$ y una sucesión de puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(x, x_{i_k}) < \frac{1}{k}$. Por lo tanto, $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.
[$\Leftarrow$] Supongamos que existe una sucesión $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $i_1 < i_2 < ... < i_k < ....$ Sea $x_{i_k} \in A_{i_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Como $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{i_k}) < \epsilon$, para todo $k \geq N$. Luego, $x_{i_k} \in B(x, \epsilon)$. De esta forma tenemos que

$$x_{i_k} \in B(x, \epsilon) \cap A_{i_k}, \text{ para toda } k \geq N.$$

Así, para toda $\epsilon > 0$, tenemos que $B(x, \epsilon) \cap A_{i_k} \neq \emptyset$, para una cantidad infinita de índices i. Por lo tanto, $x \in \operatorname{lím\,sup}(A_i)$. ■

Teorema 2.31. *Sean un continuo X y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X. Se cumple que*

$$\operatorname{lím\,sup}(A_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i} \right).$$

Demostración. Probemos primero que $\operatorname{lím\,sup}(A_i) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i} \right)$. Para ello, sea $x \in \operatorname{lím\,sup}(A_i)$. Dado cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $B(x, \epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$

para una cantidad infinita de índices i. Luego para toda $n \geq 1$, tenemos que $B(x,\epsilon) \cap (\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}$, para todo $n \geq 1$, es decir, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}\right)$.

Por último veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}\right) \subset \limsup (A_i)$. Entonces sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}\right)$, luego $x \in \left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}\right)$ para todo $n \geq 1$. Así dado cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $B(x,\epsilon) \cap (\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \neq \emptyset$, para todo $n \geq 1$. Es decir, $B(x,\epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i. Por lo tanto, $x \in \limsup (A_i)$. ■

El siguiente resultado es fundamental.

Teorema 2.32. *Sean un continuo X con métrica d y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos y compactos de X. Entonces el $\lim A_i = A$ si y sólo si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a A en 2^X con repecto a la métrica de Hausdorff H_d.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que $\lim A_i = A$ y probemos que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge con la métrica de Hausdorff. Puesto que $A = \limsup(A_i)$, de (i) y de (ii), del teorema 2.29, se sigue que $A \neq \emptyset$ y $A \in 2^X$. Ahora, sea $\epsilon > 0$, deseamos probar que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) $A \subset N(\epsilon, A_i)$ para toda $i \geq N_1$,

(b) $A_i \subset N(\epsilon, A)$ para toda $i \geq N_2$.

Veamos que se cumple (a). Para ello observemos que la familia $\mathcal{U} = \{B(a, \frac{\epsilon}{2}) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, dado que A es compacto existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, es decir, existen $a_1, a_2, ..., a_n$ elementos de A con $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(a_j, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Ahora, como $A = \liminf(A_i)$ para toda $j \in \{1,2,...,n\}$, se tiene que $a_j \in \liminf(A_i)$. Así, para cada $j \in \{1,..,n\}$, existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $B(a_j, \frac{\epsilon}{2}) \cap A_i \neq \emptyset$, para todo $i \geq M_i$. Consideremos $N_1 = \max\{M_1, M_2, ..., M_i\}$. Luego, afirmamos que $A \subset N(\epsilon, A_i)$, para todo $i \geq N_1$. En efecto, sea $a \in A$ y $i \geq N_1$. Como $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(a_j, \frac{\epsilon}{2})$, existe un $j_0 \in \{1,...,n\}$ tal que $a \in B(a_{j_0}, \frac{\epsilon}{2})$. Luego, $d(a, a_{j_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Además, note que para todo $i \geq M_1$, existe

$x \in B(a_j, \frac{\epsilon}{2}) \cap A_i$. Así $d(x, a_j) < \frac{\epsilon}{2}$ y $x \in A_i$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(a, x) \leq d(a, a_{j_0}) + d(a_{j_0}, x) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De esta forma $d(a, x) < \epsilon$, para algún $x \in A_i$. Así $a \in N(\epsilon, A_i)$, para todo $i \geq N_1$. Por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, A_i)$ para toda $i \geq N_1$.
Ahora, veamos que se cumple (b). Para ello supongamos, por el contrario, que para cada $N_2 \in \mathbb{N}$ existe $i \geq N_2$ tal que $A_i \not\subset N(\epsilon, A)$. Así, para $N_2 = 1$, existe un $i_1 \geq N_2$ tal que $A_{i_1} \not\subset N(\epsilon, A)$. Ahora, si $N_2 = i_1 + 1$, existe $i_2 \geq i_1$ tal que $A_{i_2} \not\subset N(\epsilon, A)$. Luego si $N_2 = i_2 + 1$, entonces existe $i_3 \geq i_2$ tal que $A_{i_3} \not\subset N(\epsilon, A)$. Continuando este procedimiento se tiene una sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < i_3, ..., i_k, ...$ tales que $A_{i_k} \not\subset N(\epsilon, A)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $x_{i_k} \in A_{i_k} \setminus N(\epsilon, A) \subset X$. Consideremos la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$en el compacto X. Existe una subsucesión $\{x_{i_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{l \to \infty} x_{i_{k_l}} = x_0$, para algún $x_0 \in X$. Observemos que para cada $l \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{i_{k_l}} \in X \setminus N(\epsilon, A)$ y como $X \setminus N(\epsilon, A)$ es cerrado de X, se sigue que $x_0 \in X \setminus N(\epsilon, A)$ y en particular $x_0 \in X \setminus A$. Así, $x_0 \notin A$.
Por otro lado, tenemos que una sucesión de números naturales $\{i_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tales que $i_1 < i_2 < i_3, ..., i_k, ...$ y existen puntos $x_{i_{k_l}} \in A_{i_{k_l}}$, para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{l \to \infty} x_{i_{k_l}} = x_0$. Por el lema 2.30, apartado (ii), se sigue que $x_0 \in \limsup(A_i) = A$, lo cual implica que $x_0 \in A$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subset N(\epsilon, A)$, para cada $i \geq N_2$. Concluimos de los apartados (a) y (b) que la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a A en 2^X con la métrica de Hausdorff.

[$\Leftarrow$] Finalmente supongamos que la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a A en 2^X con la métrica de Hausdorff y veamos que $\lim A_i = A$, es decir, $\liminf(A_i) = \limsup(A_i) = A$. Por la observación 2.26, sabemos que $\liminf(A_i) \subset \limsup (A_i)$, por lo que es suficiente probar que

(a') $A \subset \liminf(A_i)$ y

(b') $\limsup(A_i) \subset A$.

Veamos que se cumple (a'). Para ello, sea $a \in A$. Como la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a A en 2^X con la métrica de Hausdorff, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A, A_i) < \epsilon$ si $i \geq N$. Luego, $A \subset N(\epsilon, A_i)$ y $A_i \subset N(\epsilon, A)$. Como $a \in A \subset N(\epsilon, A_i)$, existe $x_i \in A_i$ tal que $d(x, x_i) < \epsilon$, para todo $i \geq N$ de aquí obtenemos que $x_i \in B(a, \epsilon)$ y dado que $x_i \in A_i$, se sigue que $x_i \in B(a, \epsilon) \cap A$ para todo $i \geq N$. Por lo tanto, $a \in \liminf(A_i)$.

Por último veamos que se cumple (b'). Para ello supongamos, por el contrario, que $\limsup(A_i) \not\subset A$, es decir, existe un $x \in \limsup(A_i)$ tal que $x \notin A$. Como A es compacto y por tanto cerrado de X, se sigue que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Ahora, dado que $x \in \limsup(A_i)$, si $\epsilon > 0$ se cumple que $B(x, \epsilon) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices i y como $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a A en 2^X con la métrica de Hausdorff, tomemos $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Así,

$$H_d(A_i, A) < \epsilon \text{ para } i \geq N.$$

Luego, $A_i \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ y $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_i)$, para $i \geq N$. Sea $n \geq N$ tal que

$$B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap A_n \neq \emptyset.$$

Sea $w \in B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap A_n$. Luego $d(x, w) < \frac{\epsilon}{2}$ y $w \in A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$. Por lo tanto, $a \in A$ tal que $d(a, w) < \frac{\epsilon}{2}$, luego por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(x, a) \leq d(x, w) + d(a, w) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así $d(x, a) < \epsilon$, para $a \in A$, lo cual implica que $a \in B(x, \epsilon) \cap A$. Esto es una contradicción, pues $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\limsup(A_i) \subset A$, de esta forma concluimos que $\lim A_i = A$, es decir, $\liminf(A_i) = \limsup(A_i) = A$ y el teorema queda demostrado. ■

Proposición 2.33. *Sea un continuo X con su métrica d. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$, entonces se cumplen las siguientes condiciones*

(i) *Si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$,*

(ii) $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$,

(iii) *Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. Primero demostremos (i). Sea $a \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \subset B_n$. Como $B \in 2^X$ sabemos que B es cerrado de X y no vacío, por lo que es suficiente probar que $a \in \overline{B} = B$. Para ello, sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$H_d(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para cada } n \geq N_1$$

y

$$H_d(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para cada } n \geq N_2.$$

Ahora, tomemos a $N = \max\{N_1, N_2\}$. Para cada $n \geq N$, tenemos que $H_d(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H_d(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, de acuerdo con el teorema 2.10, se cumple que

$$A_n \subset N\left(\frac{\epsilon}{2}, A\right) \text{ y } A \subset N\left(\frac{\epsilon}{2}, A_n\right)$$

y

$$B_n \subset N\left(\frac{\epsilon}{2}, B\right) \text{ y } B \subset N\left(\frac{\epsilon}{2}, B_n\right).$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Como $a \in A$, de donde existe $x \in A_n$ tal que $d(a, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Por hipótesis sabemos que $A_m \subset B_m$, se sigue que $x \in B_m$. Por lo cual existe $z \in B$ tal que $d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(a, z) \leq d(a, x) + d(x, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De lo anterior tenemos que $d(a, z) < \epsilon$ y $z \in B$ así se sigue que $z \in B(a, \epsilon) \cap B$ y por tanto $B(a, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$, es decir, $a \in \overline{B} = B$. Por lo tanto, $a \in B$ y de esta forma se comprueba que $A \subset B$.

Ahora veamos que se cumple (ii). Deseamos probar que, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon$, para toda $n \leq N'$. Sea $\epsilon > 0$, como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$H_d(A_n, A) < \epsilon \text{ para cada } n \geq N_1$$

y

$$H_d(B_n, B) < \epsilon \text{ para cada } n \geq N_2.$$

Tomemos a $N' = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N'$. Luego por el teorema 2.10, inferimos que

$$A \subset N(\epsilon, A_n) \text{ y } A_n \subset N(\epsilon, A_n)$$

y
$$B \subset N(\epsilon, B_n) \text{ y } B_n \subset N(\epsilon, B_n).$$

Por consiguiente, $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Por la observación 2.5, se cumple que

$$A \cup B \subset N(\epsilon, A_n \cup B_n) \text{ y } A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A \cup B).$$

Esto último equivale a decir que $H_d(A \cup B, A_n \cup B_n) < \epsilon$, para toda $n \geq N'$. Por lo tanto, concluimos que $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$.

Por último veamos que se cumple (iii). Supongamos, por el contrario, que $A \cap B = \emptyset$. Por el lema 2.6, tenemos que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$. Como $\lim A_n = B$ y $\lim B_n = B$ sabemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $H_d(A_n, A) < \epsilon$ y $H_d(B_n, B) < \epsilon$, para toda $n \geq N_1, N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Tenemos que

$$H_d(A_n, A) < \epsilon \text{ para toda } n \geq N$$

y
$$H_d(B_n, B) < \epsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

Ahora aplicando el teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, $A_n \subset N(\epsilon, A)$, $B_n \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, B_n)$, para cada $n \geq N$. Por hipótesis sabemos que $A_n \cap B_n \neq \emptyset$. Así, existe un $z \in A_n \cap B_n$. Luego, $z \in A_n$ y $z \in B_n$, por lo anterior se sigue que $z \in N(\epsilon, A)$ y $z \in N(\epsilon, B)$ que es lo mismo que $z \in N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Observación 2.34. *Sea un continuo X. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. No siempre se cumple que $\lim(A_n \cap B_n) = A \cap B$.*

Lema 2.35. *Sea un continuo X. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de 2^X tal que $\lim A_n = A$, entonces $p \in A$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$.*

Demostración. Primero supongamos que $p \in A$. Por hipótesis sabemos que $\lim A_n = A$. Luego, por el lema 2.30, existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y $p_n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por último, supongamos que existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y $p_n \in A_n$. Por el lema 2.30, se sigue que $p \in \liminf(A_n)$, pero como $\lim A_n = A$, que es lo mismo que, $\liminf(A_n) = \limsup(A_n) = A$, tenemos que $p \in A$. Así, el teorema queda demostrado. ■

A continuación enunciamos el **Lema de la subbase de Alexander**, ya que este nos ayudara a demostrar que el hiperespacio 2^X es compacto, cuando X es un espacio métrico compacto. La prueba de este lema se encuentra en [11].

Lema 2.36 (**Lema de la subbase de Alexander**). *Sean Y un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una subbase para Y. Entonces Y es compacto si y sólo si toda cubierta de Y formada por elementos de $\mathcal{S}$ tiene una subcubierta finita.*

Teorema 2.37. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es compacto.*

Demostración. Por el teorema 2.20, la familia

$$\wp = \{\Gamma(U) : \ U \ es \ abierto \ de \ X\} \cup \{\Lambda(U) : \ U \ es \ abierto \text{ de } X\},$$

es una subbase para la topología de Vietoris para 2^X. Así por el lema de Alexander, bastará probar que para cada cubierta de 2^X de elementos de $\wp$ tiene una subcubierta finita. Para ello supongamos que $\mathcal{L} \subset \wp$, donde,

$$\mathcal{L} = \{\Gamma(U_\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \cup \{\Lambda(V_\omega) : \omega \in \Omega\},$$

y es tal que $2^X = \bigcup \mathcal{L}$, es decir,

$$2^X = \left[\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma\right] \cup \left[\bigcup_{\omega\in\Omega} U_\omega\right].$$

Sea $Y = X \setminus \cup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $Y = \emptyset$, entonces $X = \cup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$. Como X es compacto, existe un subconjunto finito, digamos Ω_0 contenido en Ω y es tal que

$$2^X = \bigcup_{\omega\in\Omega_0} \Lambda(V_\omega).$$

En efecto. Sea $A \in 2^X$, entonces $A \subset X$ y A es cerrado de X y no vacío. Pero también $A \subset \bigcup_{\omega\in\Omega_0} V_\omega$, por lo que, para cada $a \in A$, existe $\omega \in \Omega_0$ tal que $a \in V_\omega$ y por tanto $A \cap V_\omega \neq \emptyset$. Se sigue que $A \in \langle X, V_\omega \rangle = \Lambda(V_\omega)$. Así, $2^X = \bigcup_{\omega \in \Omega_0} \Lambda(V_\omega)$ y por tanto 2^X tiene una subcubierta finita, de elementos de $\wp$. Por lo tanto, 2^X es compacto.

Caso 2: Ahora si $Y \neq \emptyset$, nótese que Y es cerrado, pues $X \setminus Y = \bigcup_{\omega \in \Omega} V_\omega$, el cual es abierto, por tanto

$$Y \in 2^X = \left[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Gamma(U_\sigma)\right] \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Ahora afirmamos que para cualquier $\omega \in \Omega$, no ocurre que $Y \notin \Lambda(V_\omega)$. En efecto: supongamos a manera de contradicción que $Y \in \Lambda(V_\omega)$ para algún $\omega_0 \in \Omega$. Entonces, $Y \cap V_{\omega_0} \neq \emptyset$. Sea $z \in Y \cap V_{\omega_0}$, luego $z \in X \setminus \cup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$ y $z \in V_{\omega_0} \subset \bigcup_{\omega \in \Omega} V_\omega$, esto quiere decir que, $z \notin \cup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$ y $z \in \bigcup_{\omega \in \Omega} V_\omega$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Y \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Gamma(U_\sigma)$. Dicho lo anterior tenemos que, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $Y \in \Gamma(U_\sigma)$. Por lo tanto, $Y \subset U_\sigma$. Tomando complementos tenemos que $X \setminus U_\sigma \subset X \setminus Y$, pero $X \setminus Y = \bigcup_{\omega \in \Omega} V_\omega$. Notemos que $X \setminus U_\sigma$ es un subconjunto cerrado de X y por tanto es compacto. De esta forma existe un subconjunto finito Ω_1 de Ω tal que $X \setminus U_\sigma \subset \bigcup_{\omega \in \Omega_1} V_\omega$. Finalmente, tomando complementos tenemos que $U_\sigma \subset X \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_1} V_\omega$ y dado que $Y = X \setminus \cup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$ tenemos que $U_\sigma \subset Y$, es decir, $Y \in \Gamma(U_\sigma)$. Luego,

$$2^X = \Gamma(U_\sigma) \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega_1} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Así, $\mathcal{L}$ es una subcubierta finita de 2^X. Por lo tanto, el hiperespacio 2^X es compacto. ∎

Los siguientes resultados que presentamos a continuación se refieren a la conexidad. En particular veremos en el teorema 2.44, que el hiperespacio $C(X)$ es compacto. Para este útimo introduciremos el concepto de (d,ϵ)-**cadena** y mostraremos unos resultados importantes.

Definición 2.38. *Sean un continuo X con métrica d y $\epsilon > 0$. Una (d,ϵ)-**cadena** en X es un subconjunto finito y no vacío $\{x_1, ..., x_n\}$ tal que*

$$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon, \text{ para cada } i = 1, ..., n-1.$$

Decimos que una (d,ϵ)-cadena $\{x_1, ..., x_n\}$, con $p = x_1$ y $q = x_n$ va de p a q o que une de p a q.

Definición 2.39. *Sea un continuo X con métrica d y $\epsilon > 0$ fijo. Si Z es un subconjunto de X, decimos que Z está (d,ϵ)-**encadenado** siempre que dos puntos cualesquiera de Z puedan unirse mediante una (d,ϵ)-cadena en Z.*

Definición 2.40. *Sea un continuo X con métrica d. Si U es un subconjunto de X que es (d,ϵ)-encadenado para toda ϵ, se dice que U está d-**bien-encadenado**.*

Teorema 2.41. *Sea un espacio métrico X con métrica d. Si para todo $Z \subset X$ y dado un $\epsilon > 0$, consideremos el siguiente conjunto*

$$\mathscr{C}(Z,\epsilon) = \{x \in X : \textit{existe una } (d,\epsilon)\textit{-cadena en } X \textit{ desde algún punto de } Z \textit{ a } x\},$$

entonces $\mathscr{C}(Z,\epsilon)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X.

Demostración. Primero veamos que $\mathscr{C}(Z,\epsilon)$ es un subconjunto abierto de X. Para ello sea $y \in \mathscr{C}(Z,\epsilon)$, entonces existe una (d,ϵ)-cadena en X desde algún punto z de Z a y. Luego existe un subconjunto finito $\mathscr{A}_y = \{x_1 = z, x_2, ..., x_n = y\}$ de X. Se cumple que $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ para cada $i = 1, 2, ..., n-1$, luego $y \in B(x_{n-1}, \epsilon)$. Ahora afirmamos que $B(y,\epsilon) \subset \mathscr{C}(Z,\epsilon)$: en efecto, sea $t \in B(y,\epsilon)$. Luego, $d(y,t) < \epsilon$. Así existe una (d,ϵ)-cadena digamos $\mathscr{A}_t = \{z, x_2, ..., y, t\}$ que une a z con t, se sigue que $t \in \mathscr{C}(Z,\epsilon)$. Por tanto $B(y,\epsilon) \subset \mathscr{C}(Z,\epsilon)$. Así, $\mathscr{C}(Z,\epsilon)$ es un subconjunto abierto de X.
Por último veamos que $\mathscr{C}(Z,\epsilon)$ es un subconjunto cerrado de X. Para ello es suficiente probar que $\mathscr{C}(Z,\epsilon) = \overline{\mathscr{C}(Z,\epsilon)}$. La contención hacia la derecha es evidente. Para la otra contención sea $b \in \overline{\mathscr{C}(Z,\epsilon)}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumple que $B(b,\epsilon) \cap \mathscr{C}(Z,\epsilon) \neq \emptyset$. Tomemos $a \in B(b,\epsilon) \cap \mathscr{C}(Z,\epsilon)$. Luego, $a \in B(b,\epsilon)$ y $a \in \mathscr{C}(Z,\epsilon)$. Si $a \in \mathscr{C}(Z,\epsilon)$, entonces existe una (d,ϵ)-cadena en X desde un punto z de Z a a, digamos $\mathscr{A}_a = \{z, x_2, ..., a\}$. Ahora considérese a $\mathscr{A}_a \cup \{b\}$ y dado que $a \in B(b,\epsilon)$ tenemos que $d(b,a) < \epsilon$, se sigue que $\mathscr{A}_a \cup \{b\}$ es una (d,ϵ)-cadena que une a z con b. Así, $b \in \mathscr{C}(Z,\epsilon)$. Por lo tanto, el subconjunto $\mathscr{C}(Z,\epsilon)$ es cerrado de X. ∎

Corolario 2.42. *Todo espacio métrico conexo X es d-bien-encadenado.*

Demostración. Sean X un espacio métrico conexo con métrica d y $U \subset X$ tal que $U = \{x\}$ para cualquier $x \in X$. Consideremos

$$\mathscr{C}(\{x\},\epsilon) = \{x' \in X : \textit{existe una } (d,\epsilon)\textit{-cadena que une } x' \textit{ con } x\}.$$

Note que $x \in \mathscr{C}(\{x\},\epsilon)$. Por la conexidad de X y por el teorema 2.41, se sigue que $\mathscr{C}(\{x\},\epsilon) = X$. Por lo tanto, X es d-bien-encadenado. ∎

Teorema 2.43. *Sean un espacio métrico compacto X con su métrica d y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X que converge a $A \in 2^X$. Si para cada A_i es un (d,ϵ)-encadenado, donde $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero, entonces $A \in C(X)$.*

Demostración. Supongamos que A no es conexo en 2^X. Entonces $A = K \cup L$, con K y L cerrados y ajenos no vacíos de A, y por tanto de X. Ahora, como X es normal, existen U y V subconjuntos abiertos de X y ajenos tales que $K \subset U$, $L \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. De aquí obtenemos que $A \in \langle U, V\rangle$, el cual es un abierto de 2^X.
Como la sucesión $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a A en 2^X, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_i \in \langle U, V\rangle \text{ para todo } i \geq N. \tag{2.3}$$

Ahora sea,

$$\delta = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in \overline{U} \text{ y } y \in \overline{V}\}.$$

Por la compacidad de $\overline{U}$ y $\overline{V}$ tenemos que $\delta > 0$. Ahora, como $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a cero, existe $k \geq N$ tal que $\epsilon_k < \delta$. Así, por 2.3, tenemos que $A_k \in \langle U, V\rangle$. Luego, $A_k \cap U \neq \emptyset$, $A_k \cap V \neq \emptyset$ y además $A_k \subset U \cup V$. Como A_k es (d,ϵ)-encadenado y $\epsilon_k < \delta$, existe un subconjunto finito de X, digamos, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset A_k$ tales que $x_1 \in A_k \cap U$ y $x_n \in A_k \cap V$ con $x_1 = x$ y $x_n = y$. Así,

$$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon_k < \delta \text{ para toda } i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Notemos que $x_1 \in \overline{U}$ y $x_n \in \overline{V}$. Se sigue que $\delta = d(\overline{U}, \overline{V}) = d(x_1, x_n)$, lo que es absurdo pues $\epsilon_K < \delta$. Por lo tanto, $A \in C(X)$. ■

Dicho todo lo anterior, ya estamos listos para probar que el hiperespacio $C(X)$ es compacto.

Teorema 2.44. *Si X es un espacio métrico compacto con métrica d, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. De acuerdo con el teorema 2.37 es suficiente probar que $C(X)$ es un subconjunto cerrado de 2^X. Para ello, sean $A \in 2^X$ y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $C(X)$ tal que $\text{lím}\, A_i = A$. Consideremos una sucesión $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos, que converge a cero. Luego, como A_i es conexo para cada $i \in \mathbb{N}$, por el corolario 2.42, se sigue que cada A_i es d-bien-encadenado. Ahora, aplicando el teorema 2.43 se sigue que $A \in C(X)$. Por lo tanto, $C(X)$ es compacto. ■

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que si X es un continuo, entonces 2^X es un continuo. Por un lado ya tenemos que 2^X es un espacio métrico con la métrica de Hausdorff H_d y por el teorema 2.37 tenemos que 2^X es compacto, así que falta ver que 2^X sea conexo. Para ello, daremos algunos resultados que no ayudaran a demostrar este hecho.

Teorema 2.45. *Sean un continuo X con métrica d y $n \in \mathbb{N}$. Si $D_{\text{máx}}$ denota la métrica en X^n, dada por*

$$D_{\text{máx}} = \text{máx}\{d(x_1, x_2), ..., d(x_n, y_n)\},$$

para cada par $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$, entonces la función $f_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$, definida por $f_n((x_1, ..., x_n)) = \{x_1, ..., x_n\}$ es suprayectiva y continua.

Demostración. Primero veamos que f_n es suprayectiva. Para ello, sea $A = \{x_1, ..., x_m\} \in F_n(X)$. Por un lado tenemos que si $m = n$, se cumple qe $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ y así $f_n((x_1, ..., x_m)) = A$. Por otro lado si $m < n$, entonces note que $x_{m+1} = ... = a_n = a_m$, así $(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) \in X^n$. Por lo tanto, $f_n((x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)) = A$, es decir, f_n es suprayectiva.
Por último veamos que f_n es continua. De hecho se probará que f_n es uniformemente continua. Sean $\epsilon > 0$ y $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$ tales que

$$D_{\text{máx}}((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n.y_n)\} < \epsilon,$$

entonces $d(x_i, y_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De modo que

$$\{x_1, ..., x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, ..., y_n\}) \quad \text{y} \quad \{y_1, ..., y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, ..., x_n\}).$$

Así $H_d(\{x_1, ..., x_n\}, \{y_1, ..., y_n\}) < \epsilon$, es decir, $H_d(f_n(x_1, ..., x_n), f_n(y_1, ..., y_n)) < \epsilon$. Por lo tanto, f_n es uniformemente continua. ■

Por el teorema 2.45, podemos probar que el hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.

Lema 2.46. *Sea un continuo X, entonces $F_n(X)$ es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Al ser X un continuo, se sigue que X^n es un continuo con métrica $D_{\text{máx}}$ por el teorema de Tychonoff [1, Teorema 7.2.2]. Además se sabe que X^n es conexo si X es conexo [1, Teorema 8.1.18]. Así por el teorema 2.45, tenemos que $F_n(X)$ es la imagen continua de un conjunto compacto y conexo, por lo que $F_n(X)$ es compacto y conexo. Por lo tanto, $F(X)$ es un continuo. ∎

Teorema 2.47. *Sea un continuo X, entonces el hiperespacio $F_n(X)$ es denso en 2^X.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Notemos que la familia $\{B(a, \epsilon) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y dado que A es compacto existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon)$. Ahora consideremos a la colección $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, entonces por el teorema 2.4, apartado (iv) tenemos que $N(\epsilon, \{a_1, a_2, ..., a_n\}) = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon)$, luego $A \subset N(\epsilon, \{a_1, a_2, ..., a_n\})$. Por otro lado la colección $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset A$ y como $A \subset N(\epsilon, A)$, se sigue que $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset N(\epsilon, A)$. Así, por el teoram 2.10, tenemos que $H_d(A, \{a_1, a_2, ..., a_n\}) < \epsilon$, es decir, la colección $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \in B_{H_d}(A, \epsilon) \cap F(X)$. Por lo tanto, el hiperespacio $F_n(X)$ es denso en 2^X. ∎

Teorema 2.48. *Sea un continuo X, entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Sea f_n la función del teorema 2.45, entonces $f_n(X) = F_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $F_n(X)$ es conexo y $F_1(X) \subset F_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $F(X) = \bigcup_{i=1}^{n} F_n(X)$ es conexo, pues es la unión de conexos que intersectan a un conexo en común, a saber $F_1(X)$. Así $\overline{F(X)}$ es conexo. Ahora, por el teorema 2.47 tenemos que $2^X = \overline{F(X)}$, se sigue que 2^X es conexo. Además por el teorema 2.37, tenemos que 2^X es compacto. Por lo tanto, el hiperespacio 2^X es un continuo. ∎

La conexidad de $C(X)$ se deriva del hecho de que este es conexo por arcos véase [10, página 84]. Por lo tanto, el hiperespacio $C(X)$ es un continuo. Para finalizar este capítulo daremos un resultado que se deduce del teorema 2.44.

Corolario 2.49. *Sea un espacio métrico compacto X. Entonces cada sucesión de subcontinuos de X tiene una subsusesión convergiendo a un subcontinuo de X, por lo que cada sucesión convergente de subcontinuos de X tiene un subcontinuo de X como su limite.*

Capítulo 3

Modelos de Hiperespacios

Desde una perspectiva geométrica, los modelos de hiperespacios representan un tema sumamente atractivo. Estos modelos, como mencionamos previamente, se presentan como una herramienta de gran poder para descubrir nuevas propiedades y resultados en los hiperespacios. Sin embargo, lamentablemente, como veremos más adelante, solo unos pocos hiperespacios pueden ser modelados.

3.1. Modelo para $C([0,1])$

Los modelos geométricos para los hiperespacios son imágenes que muestran como se ven estos espacios. En esta sección construiremos un modelo para el hiperespacio de subcontinuos del intervalo cerrado $[0,1]$.

Sea $X = [0,1]$ y consideremos el hiperespacio de subcontinuos de X es decir

$$C([0,1]) = \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Nótese que cada elemento de $C([0,1])$ es un subintervalo cerrado, conexo y no vacío de $[0,1]$.

Teorema 3.1. *Si* $\mathcal{T} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, *entonces la función* $\eta : C([0,1]) \longrightarrow \mathcal{T}$ *definida, para cada* $[a,b] \in C([0,1])$, *por* $\eta([0,1]) = (a,b)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. (i) Veamos que η es inyectiva, para ello sean $[a,b],[c,d] \in C([0,1])$ y supongamos que $\eta([a,b]) = \eta([c,d])$. Por definición de η

tenemos que $(a,b)=(c,d)$, esto último es equivalente a que $a=c$ y $b=d$, es decir, $[a,b]=[c,d]$. Por lo tanto, η es una función inyectiva.

(ii) Para ver que η es suprayectiva tomemos un punto del codominio $\mathcal{T}$, digamos $p=(a,b)\in\mathcal{T}$. Así existe un subintervalo $[a,b]\in C([0,1])$ tal que $\eta([a,b])=p$. Por lo tanto, hemos demostrado que η es una función suprayectiva. Luego, η es biyectiva.

(iii) Ahora veamos que η es una función continua. Para ello consideremos una sucesión de subintervalos $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ de $C([0,1])$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n,b_n]=[a,b]$. Entonces deseamos ver que $\lim\limits_{n\to\infty}\eta([a_n,b_n])=\eta([a,b])$ también existe. Dado que la sucesión $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $[a,b]$, existe $n\geq N$ tal que $H_d([a_n,b_n],[a,b])<\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Ahora, observe que

$$N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},[a,b]\right)=\left(a-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},b+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},[a_n,b_n]\right)=\left(a_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},b_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Luego, por el teorema 2.10, tenemos que $[a,b]\subset\left(a_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},b_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$ y $[a_n,b_n]\subset\left(a-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}},b+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$. Así, tenemos que $a_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}<a$ y $b<b_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Por otro lado también tenemos que $a-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}<a_n$ y $b_n<b+\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. De estas últimas desigualdades llegamos a que $a-a_n<\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y $b-b_n<\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Ahora, si sumamos y elevamos al cuadrado las desigualdades anteriores tenemos que $(a-a_n)^2+(b-b_n)^2<\epsilon^2$, lo cual implica que $\sqrt{(a-a_n)^2+(b-b_n)^2}<\epsilon$. Así, si $n>N$ entonces $d((a_n,b_n),(a,b))<\epsilon$. Por lo tanto, concluimos que la sucesión de puntos $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto (a,b) en $\mathbb{R}^2$. Así concluimos que η es una función continua.

Por último, note que el dominio de la función es un continuo y por tanto compacto y el codominio es de Hausdorff, entonces la función es cerrada y por el teorema [1, Proposición 3.1.20], η es un homeomorfismo. ■

Hasta este momento ya se puede decir que un modelo para $C([0,1])$ es el triángulo $\mathcal{T}$ como se muestra en la siguiente figura.

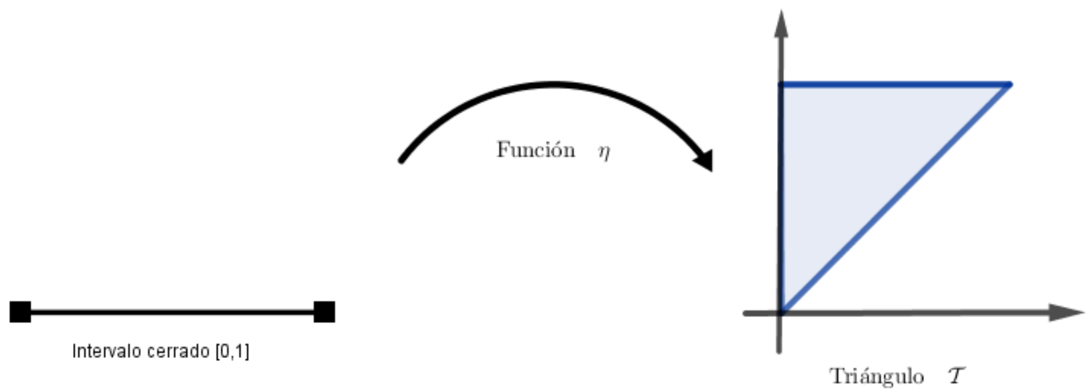

Figura 3.1: Modelo para el hiperespacio $C([0,1])$.

Otra forma de respresentar a $C([0,1])$ es usando la función $\psi : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida, para cada $[a,b] \in C([0,1])$, por $\psi([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Tenemos que $\psi : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo, donde $\psi(C([0,1]))$ es el triángulo que tiene como vértices a los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, el cual lo denotamos por $\triangle$, es decir,

$$\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2, \quad y \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x \leq 2 - y\},$$

cuya representación gráfica se muestra en la siguiente figura

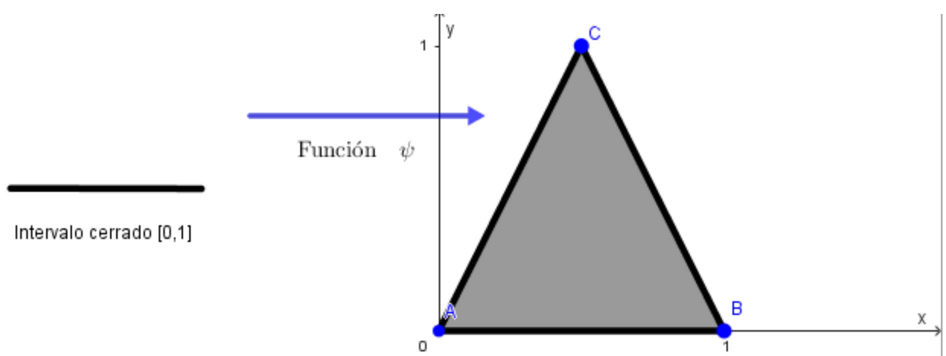

Figura 3.2

Pasemos ahora a ver como quedan representados algunos subintervalos

(i) El intervalo $[0,1]$ queda representado en el triángulo $\triangle$ por el punto $C = (\frac{1}{2}, 1)$.

(ii) Los conjuntos singulares $\{a\} = [a, a]$, donde $a \in [0, 1]$ quedan representados en la base del triángulo, pues $\psi([a, a]) = (a, 0)$.

(iii) Los intervalos de la forma $[0, b]$, quedan representados por la recta izquierda del triángulo. Pues $\psi([0, b]) = (\frac{b}{2}, b)$, es decir, todos los puntos de esta forma estan sobre la recta $y = 2x$.

(iv) Los intervalos de la forma $[a, 1]$ quedan representados en la recta derecha del triángulo. Pues $\psi([a, 1]) = (\frac{a+1}{2}, 1 - a)$, es decir, todos los puntos de esta forma estan sobre la recta $y = 1 - x$.

3.2. Modelo para $C(S^1)$

Ahora construyamos un modelo para el hiperespacio de subcontinuos de la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$. En el hiperespacio de subcontinuos de S^1 solo contamos con tres subcontinuos los cuales son los conjuntos de un solo punto, a los subarcos y a la cincunferencia misma S^1. Para cada subarco A de S^1 sean $m(A)$ el punto medio de A en S^1 y $\ell(A)$ la longitud de A.

Notación 3.2. *Sea* $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *el disco unitario de* $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.3. *Sea* $\rho : C(S^1) \longrightarrow \mathbb{D}$ *definida, para cada* $A \in C(S^1)$, *por*

$$\rho(A) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{\ell(A)}{2\pi}\right] m(A) & si \quad A \in C(S^1) \setminus \{S^1\}, \\ (0, 0) & si \quad A = S^1. \end{cases}$$

La función ρ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Primero veamos que ρ es inyectiva. Para ello sean $A, B \in C(S^1)$ tales que $A \neq B$. Si $A = S^1$ y $B \neq S^1$, entonces $\rho(A) \neq \rho(B)$. De forma similar se tiene para el caso de que $A \neq S^1$ y $B = S^1$.
Ahora supongamos que $A, B \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$, entonces tenemos los siguientes casos:

(i) Si $m(A) \neq m(B)$ y $\ell(A) \neq \ell(B)$, como $\rho(A)$ y $\rho(B)$ están en la recta que pasa por el origen $(0, 0)$ y los puntos $m(A)$ y $m(B)$, respectivamente, además estos dos últimos puntos son distintos. Luego, $\rho(A) \neq \rho(B)$.

(ii) Si $m(A) \neq m(B)$ y $\ell(A) = \ell(B)$, sean $m(A) = (a_1, a_2)$ y $m(B) = (b_1, b_2)$. Entonces, $a_1 \neq b_1$ o $a_2 \neq b_2$. Supongamos que $a_1 \neq b_1$, luego $\left(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right) a_1 \neq \left(1 - \frac{\ell(b)}{2\pi}\right) b_1$, por tanto $\rho(A) \neq \rho(B)$. De forma similar se obtiene el mismo resultado para el caso $a_2 \neq b_2$.

(iii) Si $m(A) = m(B)$ y $\ell(A) \neq \ell(B)$, entonces $\left(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right) \neq \left(1 - \frac{\ell(B)}{2\pi}\right)$, se sigue que $\left(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right) m(A) \neq \left(1 - \frac{\ell(B)}{2\pi}\right) m(B)$, es decir, $\rho(A) \neq \rho(B)$.

De los tres casos anteriores concluimos que ρ es una función inyectiva. Ahora veamos que ρ es suprayectiva, es decir, deseamos probar que para cada punto $(x, y) \in \mathbb{D}$, existe $A \in C(S^1)$ tal que $\left(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right) m(A) = (x, y)$. O sea que $\left|1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right| ||m(A)|| = ||(x, y)||$, que es lo mismo que $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi} = ||(x, y)||$. De esto último tenemos tres casos:

(i') Si $||(x, y)|| = 0$, entonces $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi} = 0$, lo cual implica que $\ell(A) = 2\pi$. Así, $A = S^1$ con lo cual $\rho(A) = (x, y)$.

(ii') Si $||(x, y)|| = 1$, entonces $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi} = 1$ y $(x, y) \in S^1$, por lo que $\ell(A) = 0$. Así, considerando a $A = \{(x, y)\}$ se sigue que $\rho(A) = (x, y)$.

(iii') Si $0 < ||(x, y|| < 1$, entonces $0 < 1 - \frac{\ell(A)}{2\pi} < 1$, esto es, $0 < \ell(A) < 2\pi$. De esto, A es un arco de S^1. Si r es el rayo con punto inicial $(0, 0)$, podemos elegir un punto $(z, w) \in r \cap S^1$, de tal manera que $0 < \ell(A) < 2\pi$ y $m(A) = (z, w)$. Por lo tanto, $\rho(A) = (x, y)$.

Así de los tres casos anteriores tenemos que ρ es suprayectiva, y por lo tanto, ρ es una función biyectiva.

Resta probar la continuidad de ρ. Para ello sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $C(S^1) \setminus \{S^1\}$ que converge a A en $C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Observe que si x_n y y_n son los puntos extremos de A_n y x y y son los puntos extremos de A, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Dicho esto, $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(A_n) = \ell(A)$. Es decir , ℓ y m son funciones continuas en $C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Por lo tanto, ρ es continua en $C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Por último probemos que ρ es continua en S^1. Para ello sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de arcos de S^1 que converge a $A = S^1$. Por el comportamiento de la función ρ, tenemos que entre más grande sea el arco A_n, su longitud tiende a 2π y así $\rho(A_n)$ tiende al origen. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a S^1, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_n) = (0, 0)$. Por lo tanto, ρ es continua. Ahora, como el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff se sigue que ρ es un homomorfismo. ■

Pasemos ahora a ver como quedan representados algunos subcontinuos de la circunferencia en el disco $\mathbb{D}$. Para ello tenemos los siguientes casos

(i) Si $A \in C(S^1)$ tal que $A = \{x\}$, entonces la imagen de A bajo ρ es $\rho(A) = \left[1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right] m(A)$. Note que la longitud de A es cero, entonces $\rho(A) = m(A)$, es decir, la imagen de A bajo ρ es el punto medio de A el cual es un punto de la frontera del disco $\mathbb{D}$. En general, si consideramos al hiperespacio $F_1(S^1)$, su imagen bajo ρ es $\rho(F_1(S^1)) = S^1$. Este hecho se ilustra en la siguiente figura 3.3.

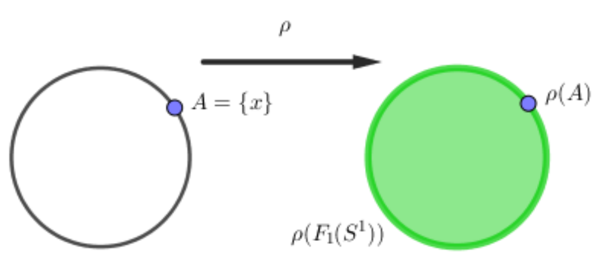

Figura 3.3

(ii) Ahora consideremos al conjunto de subcontinuos de S^1 cuya longitud sea fija, digamos l, es decir, sea $C_l(S^1) = \{A \in C(S^1) : \ell(A) = l$ para cada $l \in (0, 2\pi]\}$. La imagen de $C_l(S^1)$ bajo ρ esta representada por una circunferencia con centro en el origen. De hecho mientras más chica sea la longitud l de A, más grande será el radio de la circunferencia. Este hecho se muestra en la siguiente figura 3.4.

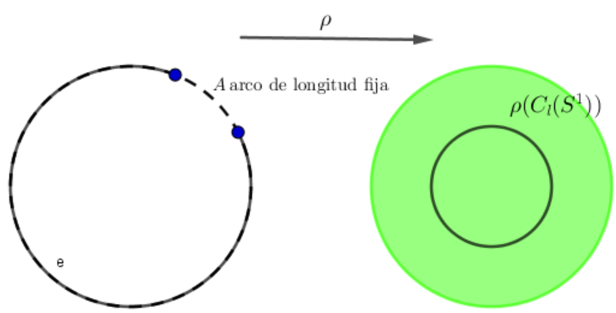

Figura 3.4

3.3. Modelo del triodo simple

El siguiente continuo que consideraremos es el **triodo simple** T. Recordemos que este continuo esta formado por la unión de tres arcos que coinciden exactamente en un punto en común, el cual es un extremo de cada uno de los arcos, veáse definición 1.56. Notemos que hay dos clase de subcontinuos en T, los cuales son, aquellos que tienen el vértice **v** y aquellos que no lo contienen. En otras palabras el hiperespacio $C(T)$, lo podemos ver como sigue

$$C(T) = C(L_1) \cup C(L_2) \cup C(L_3) \cup C_v(T),$$

donde L_1, L_2 y L_3 son los tres arcos que coinciden en el vértice **v** de T y además $C_v(T) = \{A \in C(T) : v \in A\}$. Como cada L_i para $i = 1, 2, 3$ es un arco, entonces por el modelo de la sección 3.1 cada $C(L_i)$ puede ser representado por triángulo convexo como se muestra en la figura 3.5.

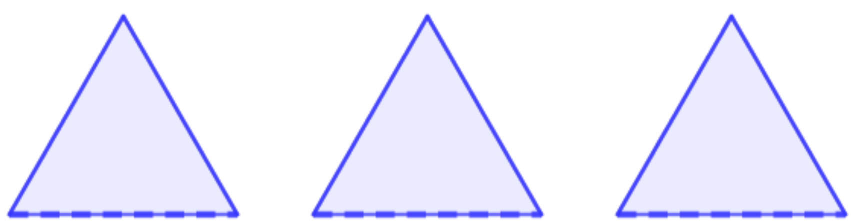

Figura 3.5: Para cada $i = 1, 2, 3$, se tiene que $C(L_i)$ es homeomorfo a un triángulo.

Observe que el lado punteado de cada uno de los tres triángulos indican que sobre ese lado se encuentran los subcontinuos de L_1, L_2 y L_3.

Ahora sea $A \in C_v(T)$, para $i = 1, 2, 3$, hacemos $J_i = A \cap L_i$. Entonces cada J_i es un subcontinuo de L_i que contiene a v, este continuo podría constar de un solo punto el cual sería el vértice v. Sea a_i la longitud de J_i. De manera que podemos asignarle a A un punto de $\mathbb{R}^3$ dado por (a_1, a_2, a_3). Notemos que esta asociación es inyectiva pues A esta determinado por las longitudes de J_1, J_2 y J_3. También notemos que como cada una de las longitudes a_i podría variar desde 0 hasta 1, entonces la imagen de esta asociación es un cubo sólido (o 3-celda). Hasta este momento tenemos que los subcontinuos de T que contienen a v pueden ser identificados por el cubo $C = [0, 1]^3$ como se muestra en la figura 3.6.

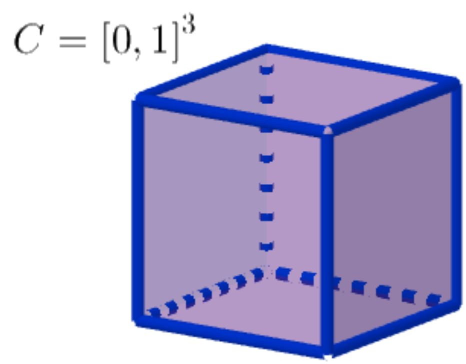

Figura 3.6: Representación de los elementos de $C_v(T)$.

De nuevo observemos que las aristas punteadas de C indican cada uno de los tipos de subcontinuos de L_i, para cada $i = 1, 2, 3$, que contienen a v. Así que vamos identificar estas aristas con la de los triángulos marcadas en la figura 3.6, de esta forma el hiperespacios $C(T)$ es un cubo sólido en $\mathbb{R}^3$ con tres triángulos convexos pegados, como se muestra en la figura 3.7.

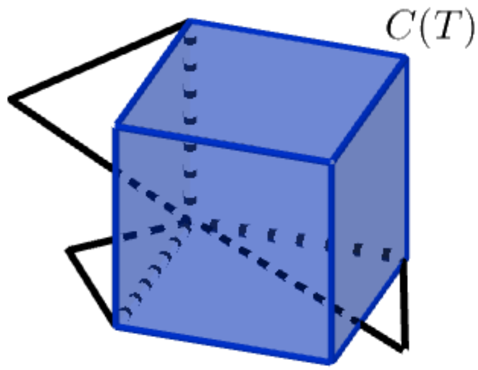

Figura 3.7: Modelo del triodo simple.

Para un estudio más profundo acerca de los modelos de los hiprespacios sugerimos al lector consultar [8].

Referencias

[1] Casarrubias Segura Fidel, Tamariz Mascarúa Ángel, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2019.

[2] Hernández Hernández Fernando. Curso de topología un enfonque conjuntista. *Soc. Mat. Mexicana,* aportaciones Mat. Serie Textos, Vol. 43, 2021.

[3] Herrera Carrasco David, Macías Romero Fernando, Guerrero Méndez Luis Alberto. *La magia de los espacios métricos*. Textos científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2024.

[4] Illanes, Alejandro, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Texto No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[5] Illanes, Alejandro, *Models of Hyperspaces*. Topology Proceedings, 41 (2013), 1–26.

[6] Illanes, Alejandro; Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[7] Macías, Sergio, *Un breve panorama de los hiperespacios de continuos*, Revista Integración, temas de matemáticas, 23(2) (2005), 1–13.

[8] Macías Prado María del Rocío. *Sobre algunos modelos de hiperespacios de continuos*. Tesis de licenciatura en matemáticas, Puebla, Pue., 28 de agosto 2013.

[9] Munkres James. *Topology*. Pearson Educación, S.A., Madrid. ISBN:978-1-292-02362-5. 2014.

[10] Nadler, Sam B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[11] Rodríguez Zepeda Alejandro *Algunas propiedades que se preservan bajo el producto topológico*. Tesis de licenciatura en matemáticas, Puebla, Pue., mayo 2014.

Índice alfabético