BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Título de la tesis:

"DESARROLLO DE COMPETENCIAS ALGEBRAICAS BASADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"

Tesis para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Adriana Isabel Mora Palestina

Directores de tesis:

Dr. Juan Carlos Macías Romero

Lic. Pablo Zeleny Vázquez

Puebla, Pue, Enero 2011

Contenido

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo ser un auxiliar didáctico para apoyar la práctica docente de los profesores que imparten matemáticas en secundaria en cualquiera de sus grados y en el primer año de bachillerato.

El programa oficial de la SEP vigente (2010) marca que la enseñanza básica así como la del nivel medio superior debe tener un enfoque basado en competencias.

La **OCDE** (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) dice que las *"competencias"* son más que conocimientos y habilidades. Considera que debe incluir la habilidad para poder cumplir demandas complejas mediante la esquematización y movilización de recursos psicológicos (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto particular [11].

La **Secretaria de Educación Pública de México** (SEP, 2004) concibe la "*competencia"* como el conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiestan en su desempeño en situaciones y contextos diversos [13].

Perrenoud (1999) define la "*competencia"* como una capacidad de actuar de manera más eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos. La adquisición de competencias científicas durante la formación media básica y superior, requiere además, entre varios aspectos, de metodologías didácticas e instrumentos de evaluación que se ajusten a sus fines [16].

La mayor parte de los autores incluyen en el concepto de competencia la adquisición de conocimientos, la ejecución de destrezas y el desarrollo de talentos que se expresan en el saber, el saber hacer y el saber ser, es decir, al conjunto de conocimientos, procedimientos, ejecuciones, actitudes y valores coordinados, combinados e integrados en el ejercicio profesional. Es importante comprender que las competencias se manifiestan en la realización de tareas. Las tareas son esquemas de acción, esquemas de pensamiento orientados a la realización de tareas prácticas. Deben tener relevancia para las personas implicadas [9].

En [9] se define la competencia matemática como la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y especiales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral.

La **RIEMS** (Reforma Integral para la Educación Media Superior) menciona que las competencias matemáticas buscan formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar el entorno que los rodea matemáticamente. Algunas de ellas están propuestas a continuación:

- Resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Además, la **RIEMS** afirma que estas competencias buscan propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con ellas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases [15].

Considerando este concepto de competencia matemática que las diferentes instituciones y autores abordan, es preciso reflexionar sobre el enfoque que hasta ahora se le ha dado a la enseñanza de la matemática así como al papel del profesor. Las matemáticas son importantes para todas las ciencias y se ha reducido su enseñanza al aprendizaje de reglas y algoritmos casi como si fuera una clase de cocina donde para cada contenido te dan tu receta, se aíslan los contenidos y los profesores intentan dar clases, limitando el papel del alumno a ser un sólo oyente o quien recupera el discurso y lo trata de imitar. Los alumnos necesitan ser la parte activa en este proceso, exponer sus ideas y resolver sus problemas. Otro problema con la matemática, no es si la entienden, si se les hace difícil o si se dejan llevar por lo dicho por otros compañeros, conocidos, padres y sociedad en general quienes no tuvieron éxito con el aprendizaje de las matemáticas. El problema radica en que se plantea como algo, solamente en el salón de clase. Si se relaciona con la vida diaria, los acontecimientos de los alumnos, su día a día es potencialmente seguro que la comprendan con mayor facilidad. Otra cosa importante es también que está en juego la parte pedagógica del docente a la hora de impartir la materia [3].

En esta tesis proponemos desarrollar las competencias algebraicas a través de la resolución de problemas.

En la enseñanza tradicional, la introducción al método algebraico se hace, la mayoría de las veces, con demasiada rapidez y de manera mecánica sin valorar de forma adecuada las dificultades que conlleva su correcta asimilación. La mayoría de los símbolos que se utilizan en álgebra se habían utilizado antes en aritmética. Por eso para los alumnos ya tenían un significado que, con frecuencia, puede entrar en conflicto con el que se atribuye ahora. Cualquier estrategia de enseñanza para incorporar el nuevo significado de los símbolos debe distinguir y ampliar el que ya tenían [2].

Nosotros hemos observado que el maestro ingenuamente supone que bastan unos cuantos ejemplos de "lenguaje algebraico" para que los alumnos sean capaces de resolver problemas con enunciado.

Es importante que durante todo el aprendizaje del álgebra los alumnos la utilicen para resolver problemas que doten de sentido a las nociones y procedimientos algebraicos. Estos problemas no sólo deben aparecer después de que se han estudiado las formas de resolverlos, como aplicaciones de los mismos, sino que deberán estar presentes en todas las fases del aprendizaje, para introducir y facilitar la comprensión de nuevos conocimientos, así para enriquecer los que se hayan visto con anterioridad [8].

En [1] se plantea que la resolución de problemas en la actualidad se considera que es la parte más esencial de la educación matemática debido a que los estudiantes pueden experimentar la potencia y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea. También, se afirma que para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven fácilmente a la resolución del problema. Pero no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema es por "ideas luminosas" que se tienen o no se tienen. Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas.

En la resolución de cualquiera de los problemas propuestos en este trabajo se ponen en práctica las competencias. La naturaleza de los problemas es de carácter algebraico por lo que las competencias que se pretenden desarrollar están más enfocadas en el álgebra que en otras ramas, sin embargo, esto no limita el aplicar una estrategia diferente para resolver cierto problema. Lo importante es propiciar el contacto de los estudiantes con los problemas reto para que de esta manera logren desarrollar estas competencias.

En esta tesis estamos presentado una colección de problemas cuya resolución permite observar la aplicación de estrategias para el desarrollo de ciertas competencias matemáticas. La selección de los problemas está organizada de acuerdo a la naturaleza de su resolución. Por ejemplo, un problema que se puede resolver con una ecuación de primer grado está ubicado en el Capítulo 2. Sin embargo, el profesor puede utilizar los problemas y organizar sus actividades en la forma que considere más adecuada. Como se puede observar, en la mayoría de los problemas presentamos varias formas de resolverlos. Se usan desde la técnica del ensayo y error o tanteo hasta el uso de ecuaciones de primero y segundo grado y sistemas de ecuaciones.

Nosotros hemos llevado a la práctica estos problemas con profesores de secundaria y bachillerato y cabe señalar que el presentar los problemas resueltos y en varias formas, como los de este trabajo, dan la oportunidad al profesor de conocer varias estrategias empleadas. Es una dificultad común para profesores que no tienen el perfil de matemáticos el que se les plantee un problema para su resolución y de inicio no tienen ni la menor idea de por dónde empezar. Esto tiene como consecuencia que estos profesores no les planteen a sus estudiantes el mismo problema. De esta manera no ponen en contacto directo a los estudiantes con el desarrollo de sus competencias. Prefieren irse por el viejo camino de la enseñanza tradicional donde el estudiante repite y copia lo que el profesor dice o explica. Hemos observado que al tener las soluciones el profesor puede adquirir confianza y motivarse para proponer estos problemas a los estudiantes dándoles a su vez libertad y confianza para intentar que los resuelvan. La confianza que el profesor debe generar en los alumnos puede partir del hecho de aceptar sus propias soluciones y estrategias. Esto es muy importante puesto que el estudiante se motiva al saber que su trabajo está siendo tomado en cuenta así como su propio razonamiento.

Es importante que a lo largo de la enseñanza los estudiantes conozcan y resuelvan numerosos problemas. Es un hecho que los problemas son necesarios para la formación de conceptos, el desarrollo de la capacidad de trabajo personal del estudiante y de sus aptitudes para la investigación, la comunicación y la justificación de sus afirmaciones.

Es un hecho que los tiempos establecidos por las autoridades educativas, para que los docentes lleven a cabo su plan de estudios es una dificultad para la implementación de este material. Sin embargo, consideramos pertinente hacer unas sugerencias pedagógicas para el uso de esta tesis. Podemos mencionar, entre otras, las siguientes:

(a) Lo primero que se sugiere es cambiar el nombre de “problema” por el de “reto”. Cada vez que se les proponga a los estudiantes se les debe decir, el siguiente reto es… A los estudiantes de estos niveles y edades les llama la atención que los reten y es un buen momento para hacerlo.
(b) Estos problemas se pueden utilizar para iniciar un tema de álgebra, para amenizar una clase, para dejar tarea, para divertirse pensando, etc.
(c) Como lo que se busca es que el alumno desarrolle sus competencias con libertad entonces no hay que exigirles que usen obligatoriamente el álgebra sino más bien que los resuelvan como puedan.
(d) Aceptar los diversos razonamientos de los estudiantes, los motiva a seguir adelante.
(e) Se debe permitir que los estudiantes interactúen en parejas o en equipos en la resolución de problemas. El diálogo entre ellos ayuda al profesor a trabajar menos porque en ocasiones los estudiantes se entienden mejor entre ellos que con la intervención del profesor [5]. Se sugiere formar equipos de cuatro estudiantes. Se les pide a los miembros del equipo que todos se responsabilicen de la resolución y la presenten a la clase para que se comparen los diferentes métodos o razonamientos e ideas utilizados por cada equipo o por cada estudiante.
(f) Una vez que un estudiante crea tener la solución se le pide que espere hasta que los demás hayan intentado la resolución. Se les debe dar tiempo. No todos son igual de “rápidos para comprender el problema”. No se debe decir a los estudiantes que no han logrado el resultado, que están equivocados, se les debe dar ideas para que no abandonen el problema y continúen pensándolo y a los estudiantes que si lo han logrado se les pide que redacten el problema tal como lo pensaron para ver por escrito el desarrollo de sus ideas. Esto permite desarrollar sus competencias en el “área de comunicación”.
(g) Si la intención del profesor es que el estudiante aprenda a plantear y resolver ecuaciones de primero y segundo grado así como sistemas de ecuaciones, entonces debe permitir que el estudiante resuelva el problema como pueda siempre y cuando no haga trampa. Después el

profesor puede proceder a resolver el problema usando una herramienta del álgebra. Esto mostrará a los estudiantes que el álgebra en los problemas les provee una forma de resolverlos más fácilmente.

(h) Si el uso del álgebra es más difícil que otra técnica para resolver un problema es preferible y aconsejable que el estudiante se quede con su solución y que el profesor no insista en mostrarles el uso del álgebra. En caso contrario, los estudiantes no hacen caso pues se quedan con la idea que su estrategia es mejor y que el álgebra sólo los confunde.

(i) El profesor debe seleccionar el problema adecuado para trabajar en clase y así poder mostrar a sus alumnos la potencia del álgebra en la resolución de problemas y los estudiantes comenzarán a apreciar la utilidad de las herramientas algebraicas.

(j) Cuando se considera que el tiempo ha sido suficiente, se comenta la solución para retroalimentar los distintos razonamientos y para que los estudiantes se sientan tomados en cuenta y se les valore su trabajo.

(k) En la resolución algebraica de cada problema mostramos la justificación matemática de cada paso. Por ejemplo, en los despejes explicamos las propiedades que fundamentan lo realizado. Los profesores pueden emplear esta forma de resolución en cada problema si lo que necesitan es argumentar las propiedades que le permiten dar cada paso.

La tesis está organizada en cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 ilustramos una serie de definiciones y propiedades básicas de los números reales, de álgebra y de geometría en los cuales se puede apoyar el lector para recordar y aclarar algún concepto o propiedad que necesite para la comprensión y resolución de los problemas.

En el Capítulo 2 presentamos una selección de problemas que ilustran el desarrollo de competencias donde la herramienta algebraica que se usa para su resolución es el planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado. Además, se presentan otras soluciones para la mayoría de los problemas planteados en este capítulo. Algunas de estas soluciones utilizan la técnica del ensayo y error y técnicas de aritmética.

En el Capítulo 3 exponemos una selección de problemas que implican el planteamiento de ecuaciones de segundo grado y su resolución mediante la fórmula general de segundo grado o mediante factorización. Además, se presentan otras soluciones para la mayoría de los problemas planteados en este capítulo usando otras técnicas no algebraicas.

En el Capítulo 4 exhibimos una serie de problemas que pueden ser resueltos a través del planteamiento de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Incluso algunos implican un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al igual que en los capítulos anteriores, algunos problemas se pueden resolver usando técnicas de aritmética.

Capítulo 1 Definiciones y propiedades

En este capítulo ilustramos una serie de definiciones y propiedades básicas de los números reales, de álgebra y de geometría en los cuales se puede apoyar el lector para recordar y aclarar algún concepto o propiedad que necesite para la comprensión y resolución de los problemas. Si algún profesor no recuerda un concepto, teoría o propiedad puede buscarlo directamente consultando el presente.

En este apartado presentamos a los números reales como un conjunto (al cual denotaremos como $\mathbb{R}$) sujeto a dos operaciones (la suma y el producto) junto con una relación de orden total (la de “ser menor que”).

Enunciamos los axiomas de $\mathbb{R}$ y sus consecuencias. Para la demostración de estas últimas damos la referencia correspondiente.

1.1 Definiciones y propiedades básicas de los números reales

Los resultados de este apartado fueron consultados en su mayoría en [4].

1.1.1 **Definición.** Un conjunto es toda colección de objetos.

1.1.2 **Los Axiomas de los números reales.**

1. Axiomas de Campo (referente a las operaciones de suma y producto).

Axiomas de campo.

1. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{ab} \in \mathbb{R}$ (leyes de cerradura).
2. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$ (leyes conmutativas).
3. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})=(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ (leyes asociativas).
4. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$ (ley distributiva).
5. Existen $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \in \mathbb{R}$, con $0 \neq 1$, tales que: si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{1}=\boldsymbol{a}$ (0 se llamará **neutro aditivo** y 1 se llamará **neutro multiplicativo**).
6. Si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$, existe $\boldsymbol{a_1} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a_1}=\boldsymbol{0}$ y si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, entonces existe $\boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a_2}=\boldsymbol{1}$.

2. Axiomas de Orden (que se refieren a la relación “ser menor que”).

Axiomas de orden (la proposición “a menor que b” se denotará $a<b$ o $b>a$).

1. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:
   (i) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
   (ii) $\boldsymbol{a}<b$
   (iii) $\boldsymbol{b}<a$

(ley de tricotomía).

2. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a}<b,\ b<c$, entonces $\boldsymbol{a}<c$ (ley transitiva).

3. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{c} > 0$ y $\boldsymbol{a} < b$, entonces $\boldsymbol{ac} < bc$ (consistencia del producto respecto a la relación de orden).
4. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} < b$, entonces $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} < b + c$ (consistencia de la suma respecto a la relación de orden).

Además de la relación de orden en los reales, existe la relación de igualdad. Para esta recordemos que cumple:

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.
(b) Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$.
(c) **Propiedad aditiva de la igualdad.**
Para todos los números reales $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
(d) **Propiedad multiplicativa de la igualdad.**
Para todos los números reales $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$.
Si tengo una igualdad me es permitido sumar o multiplicar a cada miembro de la igualdad por un mismo número.

1.1.3 **Teorema.**

(i) Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.
(ii) Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

(Ambas proposiciones son conocidas con los nombres de **ley de cancelación para la suma** y **ley de cancelación para el producto**).

1.1.4 **Teorema.** Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

1.1.5 **Teorema.**

(i) Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ existe un único $\boldsymbol{a_1} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{0}$.
(ii) Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, existe un único $\boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{1}$.

1.1.6 **Definición.** Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $-\boldsymbol{a}$ denotará al único número real que cumple $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ y lo llamaremos el **inverso aditivo** de $\boldsymbol{a}$. Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{1}}$ denotará al único número real que cumple $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{1}$ y lo llamaremos el **inverso multiplicativo** de $\boldsymbol{a}$.

1.1.7 **Teorema.**

(i) Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$.
(ii) Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ entonces $\left(\boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{1}}\right)^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{a}$.

1.1.8 **Teorema.** Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b})$.
(ii) $-(\boldsymbol{ab}) = (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(-\boldsymbol{b})$.
(iii) *Si* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{0}$ y $(\boldsymbol{ab})^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{b}^{-\boldsymbol{1}}$.

***1.1.9* Teorema.** Si $\boldsymbol{a, b, c, d} \in \mathbb{R}$**,** con $\boldsymbol{b \neq 0}$ y $\boldsymbol{d \neq 0}$, entonces

(i) $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad+bc}}{\boldsymbol{bd}}$.

(ii) $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{bd}}$.

(iii) $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{-1}} = \frac{\boldsymbol{a^{-1}}}{\boldsymbol{b^{-1}}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$, si $\boldsymbol{a \neq 0}$.

***1.1.10* Teorema.** Sean $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ tales que $\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{b} > 0$. Entonces: $\boldsymbol{a^2 = b^2}$ si y sólo si $\boldsymbol{a = b}$.

***1.1.11* Teorema.** Si $\boldsymbol{a} > 0, b > 0$ y $\boldsymbol{a^2 = b}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es el único número real con esta propiedad.

1.1.12 Definición. Sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{b} > 0$ o $\boldsymbol{b = 0}$. Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ es tal que $\boldsymbol{a} > 0$ o $\boldsymbol{a = 0}$ y cumple $\boldsymbol{a^2 = b}$, **a** se llamará la **raíz cuadrada** de $\boldsymbol{b}$. La denotaremos $\boldsymbol{a = \sqrt{b}}$.

***1.1.13* Teorema.** Si $\boldsymbol{a} > 0$ o $\boldsymbol{a = 0}$ y $\boldsymbol{b} > 0$ o $\boldsymbol{b = 0}$, entonces $\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}$.

***1.1.14* Definición.** $\mathbb{R}_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} > 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} < 0\}$.
$\mathbb{R}_+$ se llamará el **conjunto de los reales positivos**. $\mathbb{R}_-$ se llamará el **conjunto de los reales negativos**.
Además: $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{\boldsymbol{0}\} \cup \mathbb{R}_-$.

***1.1.15* Definición.** Sean $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ tienen **signos iguales** si

1. $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}_+$ ó
2. $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}_-$

Pero en caso que:

1. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_-$ ó
2. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_-$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+$

Se dirá que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ tienen **signos contrarios** o **distintos**.
Es fácil ver que si $\boldsymbol{x, y}$ tienen signos iguales entonces $\boldsymbol{xy} \in \mathbb{R}_+$. También, si $\boldsymbol{x, y}$ tienen signos distintos, entonces $\boldsymbol{xy} \in \mathbb{R}_-$**.**

***1.1.16* Definición.** Dado $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, el **valor absoluto** de $\boldsymbol{x}$, el cual denotaremos como $|\boldsymbol{x}|$, se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

***1.1.17* Definición.**

(i) $\mathbb{N} = \{\boldsymbol{1, 2, 3, 4}, \ldots\}$

(ii) $\mathbb{N}_- = \{\boldsymbol{-n} \mid \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Al conjunto $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{N}_{-}$ se llama el conjunto de **números enteros**.
Así pues, $\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, \dots\}$

1.1.18 **Definición** El conjunto de los números racionales es el conjunto
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{son\ enteros\ \ y\ \ b \neq 0}\right\}$.

1.1.19 **Definición.** Para cada número real $\boldsymbol{x}$ existe un único número entero $\boldsymbol{a}$ tal que $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < a + 1$.

1.1.20 **Definición.** Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ enteros con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$**.** Se dice que $\boldsymbol{b}$ **divide** a $\boldsymbol{a}$ si el cociente $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ es un entero, es decir, si existe un entero $\boldsymbol{c}$ tal que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$.
Otras formas muy usadas para decir que $\boldsymbol{b}$ divide a $\boldsymbol{a}$, son:

i. $\boldsymbol{a}$ es divisible entre $\boldsymbol{b}$**.**
ii. $\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{b}$**.**
iii. $\boldsymbol{b}$ es un divisor de $\boldsymbol{a}$.

1.1.21 **Definición.** Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son enteros, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{r}$ son únicos enteros tales que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{r}$ con $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < |\boldsymbol{b}|$, entonces $\boldsymbol{c}$ se llama el cociente y $\boldsymbol{r}$ el residuo que se obtiene al dividir $\boldsymbol{a}$ entre $\boldsymbol{b}$.

1.1.22 **Tipos de fracciones.**

1. **Fracción propia** es aquella que tiene su denominador mayor que su numerador es decir: $\frac{a}{b}$ Es fracción propia si $a < b$.
2. **Fracción impropia** es aquella en donde el numerador es mayor que el denominador es decir: $\frac{a}{b}$ Es fracción impropia si $a > b$.
3. **Fracción mixta** es aquella que resulta de una suma de un número natural y una fracción propia. Las fracciones mixtas se pueden expresar como fracciones impropias.

1.1.23 Criterio de divisibilidad. Un número natural es divisible entre 11, cuando la diferencia entre la suma de sus dígitos de orden impar (primera, tercera, etc.) y la suma de sus dígitos de orden impar (segunda, cuarta, etc.), es un múltiplo de 11.

1.1.24 **Definición.** Un número consecutivo se obtiene sumando una unidad al anterior. Se expresa como $n + 1$ donde n es cualquier número entero.

1.1.25 **Definición.** Un número entero es par si es divisible entre 2 y es impar o non si no es divisible entre 2. El conjunto de los números pares se define como $\{2n | n \in \mathbb{N}\}$.

1.1.26 **Definición.** Los números pares consecutivos se obtienen sumando dos unidades al anterior número par. Se expresa como $2n + 2$ donde n es cualquier número entero.

1.1.27 **Definición.** Un número impar consecutivo se obtiene sumando dos unidades al anterior número impar. Se expresa como $(2n - 1) + 2$ donde n es cualquier número entero.

1.1.28 **Definición.** La razón entre dos cantidades de la misma especie es un número que se obtiene dividiendo la medida de la primera entre la medida de la segunda, en el supuesto naturalmente de que ambas se miden con la misma unidad de medida.

1.1.29**Definición.** Un número **cuadrado perfecto** es un número natural al cuadrado.

1.1.30 **Definición.** El **litro** (símbolo **l** o **L**) es una unidad de volumen equivalente a un decímetro cúbico (0,001 m^3). Su uso es aceptado en el Sistema Internacional de Unidades (SI), aunque ya no pertenece estrictamente a él. Normalmente es utilizado para medir líquidos o sólidos granulares.

1.1.31 **Definición.** El **decímetro** es una unidad de longitud. Es el primer submúltiplo del metro y equivale a la decima parte de él. Su símbolo es dm.

$$1\ dm = 0{,}1m = 10^{-1}m$$

1.1.32 **Definición.** El **decímetro cúbico** es una unidad de volumen. Se corresponde con el volumen de un cubo de un decímetro de lado. Equivale a la milésima parte de un metro cúbico y también a un litro. Es el primer submúltiplo del metro cúbico. Su abreviatura es dm^3.

1.1.33 **Media aritmética (promedio).** Es la medida de tendencia central que se obtiene mediante la suma de un grupo de términos dividiendo entre el número de ellos.

1.2 Definiciones y propiedades básicas de Álgebra

En este apartado damos una lista de definiciones que pueden consultarse en [10] y [12].

1.2.1 **Definición. Una expresión algebraica** es la combinación de variables y constantes que implica un número finito de operaciones indicadas de adición, sustracción, multiplicación, división, potencia o raíz entre ellas.

1.2.2 **Definición. Un polinomio** es la expresión algebraica que consta de dos o más términos.

1.2.3 **Definición. Un binomio** es una expresión que consta de dos términos los cuales, a su vez, pueden ser productos o sumas o una combinación de ambas.

1.2.4 **Definición. Un término** es la parte de un polinomio o expresión algebraica separada por los signos más o menos que sólo contiene productos y cocientes de números y letras (constantes y variables). A menudo, una expresión se llama polinomio y en particular monomio, binomio o trinomio, según tenga uno, dos o tres términos.

1.2.5 El término esta formado por coeficientes (parte numérica o constantes) variables (literales o letras), multiplicadas entre sí, llamados factores. El factor numérico se llama coeficiente numérico o simplemente coeficiente de los factores.

exponente

$$4x^2$$

coeficiente literales

1.2.6 **Definición. Suma algebraica** es el proceso de sumar números reales positivos y negativos. Sólo se pueden sumar términos semejantes, o sea aquellos términos que sólo difieran del coeficiente.

1.2.7 Las expresiones algebraicas nos permiten traducir el lenguaje natural al lenguaje matemático, por ejemplo:

Lenguaje natural	Lenguaje matemático
Denótese un número cualquiera	x
Duplíquese un número	$2x$
Sumar a un número 10 unidades	$x + 10$
Restar a un número 8 unidades	$x - 8$
La cuarta parte del total	$\frac{x}{4}$
Cuanto es 3 al cuadrado	$3^2 = 3 \times 3 = 9$
Cuanto es 2 al cubo	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

1.2.8 Definición. **Ecuación** igualdad entre dos expresiones matemáticas formadas por datos conocidos e incógnitas (datos desconocidos). La expresión separada por un signo (=) recibe el nombre de miembros de la ecuación (izquierdo y derecho). El término que no contiene incógnitas recibe el nombre de término independiente y si no aparece es igual a cero. El grado de una ecuación es igual al mayor de los grados de todos los términos que la forma y determinan el número máximo de soluciones de una ecuación.

Una solución de la ecuación es un valor de los que puede tomar la incógnita para que se cumpla la igualdad, es decir, que al sustituir la incógnita por este valor, el miembro izquierdo es igual, o equivalente, al miembro derecho.

Resolver una ecuación es encontrar todas las soluciones de la ecuación.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen, exactamente, las mismas soluciones. Este concepto es el que utilizan todos los métodos de resolución de ecuaciones: transforman la ecuación inicial en otra más sencilla pero equivalente.

1.2.9 **Transformaciones que mantienen la equivalencia de las ecuaciones.**

- Si a cada miembro de una ecuación se suma un mismo número, la ecuación resultante es también cierta.
- Si se quita un mismo número de cada miembro de una ecuación, la ecuación resultante es también cierta.
- Si cada miembro de una ecuación se multiplica por un mismo número, la ecuación
  que resulta es también cierta.
- Si cada miembro de una ecuación se divide entre un mismo número (excepto el cero), la ecuación es también cierta.

1.2.10 **Solución de una ecuación.** Es el conjunto de valor o valores (también llamado conjunto de verdad) que toma la variable, y las transforman a la ecuación en una identidad.

1.2.11 **Ecuación de Primer Grado con una variable.**

Si $\boldsymbol{ax+b=0}$, $\boldsymbol{a,b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ entonces siempre existirá una solución en $\mathbb{R}$ y solamente una: $\boldsymbol{x=-\frac{a}{b}}$ (se obtendrá por despeje).

1.2.12 **Ecuación de primer grado con dos variables.**

Si $\boldsymbol{ax+by+c=0, a,b,c} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no ambos cero, entonces la grafica de esta ecuación es una recta.

4.2.13 **Conjunto solución de una ecuación en una variable.**

Es un conjunto de números que al sustituir a la variable, verifican la ecuación dada.

1.2.14 **Ecuaciones de segundo grado.** Si $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, $\boldsymbol{a,b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, entonces las soluciones se obtendrán por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:
Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces existen 2 soluciones reales.
Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces existe una única solución real.
Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces no existen soluciones reales.
Es interesante observar que esta fórmula tiene las seis operaciones racionales del álgebra elemental.

1.2.15 **Conjunto solución de una ecuación en dos variables.** Es un conjunto formado por pares ordenados (x, y) que verifican la ecuación dada.

1.2.16 **Definición.** La factorización consiste en que dada una expresión algebraica, esta se puede expresar como un producto, haciendo la observación de que no cualquier expresión puede ser factorizable.

1.2.17 ***Reglas básicas de*** **factorización.**

1) Factor común (MCD) $ab + ac = a(b + c)$
2) Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$(binomios conjugados)
3) Suma o diferencia de cubos
   $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = -(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
4) Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
5) Trinomio cuadrado perfecto
   $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

1.2.18 **Propiedad del producto nulo.** La propiedad establece que si a y b son números reales y $ab = 0$, entonces ya sea $a = 0$ ó $b = 0$ (o ambas). Un producto de factores es cero si y sólo si uno o más de los factores es cero. Esto es particularmente útil cuando se resuelven ecuaciones cuadráticas.

1.2.19 **Definición de sistema de ecuaciones.** Es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Una solución para el sistema debe proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción. En otras palabras el valor que reemplazamos en las incógnitas debe hacer cumplir la igualdad del sistema.
Las incógnitas se suelen representar utilizando las últimas letras del alfabeto latino, o si son demasiadas, con subíndices.

Las formas de resolver un sistema de ecuaciones son:

1.2.20 Método de igualación. Una primera técnica algebraica común para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **método de igualación.** Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes; se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida y se sustituye este valor en las ecuaciones iniciales.

1.2.21 Método de sustitución. La técnica algebraica denominada **método de sustitución**, para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra; así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Una vez obtenido el valor de esta incógnita, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, inicial para calcular el valor de la otra incógnita.

1.2.22 Método de reducción. La tercera técnica algebraica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el **método de reducción**, consta de los siguientes pasos: Se multiplican o dividen los miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Se restan las dos ecuaciones resultantes, con lo que se elimina una incógnita. Se resuelve la ecuación con una incógnita obtenida, y se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales para calcular la segunda.

1.2.23 Determinante de una matriz. Un determinante de una matriz determina si los sistemas son singulares o mal condicionados. En otras palabras, sirve para determinar la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

- El determinante de una matriz es un número.
- Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular.
- Un determinante con valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado.

Un sistema singular es cuando en el sistema de ecuaciones se tiene a más de una ecuación con el mismo valor de la pendiente. Por ejemplo ecuaciones que representan líneas paralelas o ecuaciones que coinciden en los mismos puntos de graficación.

En un sistema mal condicionado es difícil identificar el punto exacto en que las líneas de las ecuaciones se interceptan.

Determinante de primer orden para la matriz 1×1:

$$D = |a_{11}|$$

Determinante de segundo orden para la matriz 2×2:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se calcula de la siguiente manera:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de tercer orden para la matriz 3×3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se calcula de la siguiente manera:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

1.2.24 Regla de Cramer. Sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes: El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. Tales sistemas se denominan sistema de Cramer.

$$\begin{cases} \mathrm{a}_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \mathrm{a}_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \mathrm{a}_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Sea **Δ** el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Y sean:

$$\boldsymbol{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}$$

Los determinantes que se obtiene al sustituir los coeficientes del segundo miembro (los términos independientes) en la primera columna, en la segunda columna, en la tercera columna y en la enésima columna respectivamente.

Un sistema de Cramer tiene una sola solución que viene dada por las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

1.2.25 Procedimiento para dividir un polinomio entre otro.

1. Se ordenan el dividendo y el divisor, según las potencias descendientes de una misma literal.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta el producto obtenido del dividendo.
3. El residuo obtenido en el paso 2 se toma como nuevo dividendo y se repite el proceso del paso 2 para obtener el segundo término del cociente.
4. Se repite este proceso hasta que se obtenga un residuo nulo o de grado inferior que el del divisor.

***1.2.26* Las raíces de los polinomios.** Si $\boldsymbol{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n, \ldots\ldots (1)}$ es un polinomio y $\boldsymbol{c}$ es un número, el número $\boldsymbol{f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}$, obtenido de la sustitución de la indeterminada x por el número c, en la expresión (1) de $\boldsymbol{f(x)}$, y por la realización consiguiente de las operaciones indicadas se denomina *valor del polinomio* $\boldsymbol{f(x)}$ *para* $\boldsymbol{x = c}$.
Si $\boldsymbol{f(c) = 0}$, o sea, si el polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ se anula al sustituir el número c en lugar de la indeterminada, c se llama *raíz del polinomio* $\boldsymbol{f(x)}$ (o de la ecuación $\boldsymbol{f(x) = 0}$).
Si se divide el polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ por un polinomio arbitrario de primer grado (o como se dirá a continuación, por un polinomio lineal), el resto será un polinomio de grado cero o bien será igual a cero, es decir, siempre será un número r.
Aplicando el Teorema que sigue es fácil hallar este resto sin realizar la división (se supone que el polinomio lineal es de la forma $\boldsymbol{x - c}$). El resto de la división de un polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ por un polinomio lineal $\boldsymbol{x - c}$ es igual al valor $\boldsymbol{f(c)}$ que toma el polinomio $\boldsymbol{f(c)}$ que toma el polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ para $\boldsymbol{x = c}$. En efecto, o sea $\boldsymbol{f(x) = (x - c)q(x) + r}$. Tomando los valores de ambos miembros de la igualad para $\boldsymbol{x = c}$, obtendremos:

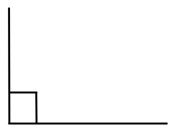
$$\boldsymbol{f(c) = (c - c)q(c) + r = r}$$

la cual demuestra el teorema.
De aquí se deduce la importante conclusión:
El número $\boldsymbol{c}$ *es raíz del polinomio* $\boldsymbol{f(x)}$ *cuando, y sólo cuando* $\boldsymbol{f(x)}$ *es divisible por* $\boldsymbol{x - c}$.
Por otra parte, es evidente que si $\boldsymbol{f(x)}$ es divisible por algún polinomio de primer grado $ax + b$, es divisible también por el polinomio $\boldsymbol{x - \left(-\frac{b}{a}\right)}$, o sea, por un polinomio de la forma $\boldsymbol{x - c}$. De este modo, la averiguación de las raíces del polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ es equivalente a la averiguación de sus divisores lineales.

1.3 Definiciones y propiedades básicas de Geometría.

Los resultados de esta parte pueden ser consultados en [6].

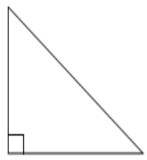
1.3.1 **Ángulo recto** es un ángulo cuya amplitud es de 90º (sus lados son perpendiculares)



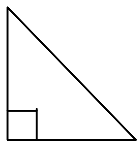
ángulo recto

1.3.2 **Triángulos** son los polígonos de tres lados.

1.3.3 **Triangulo rectángulo** es el que tiene un ángulo recto.



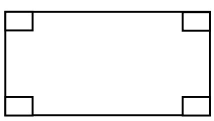
1.3.4 **Teorema de Pitágoras.** En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.



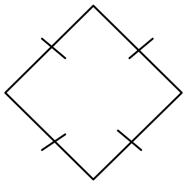
y viceversa: lados de un triángulo (a lado mayor).
Si , entonces el triángulo es rectángulo.

1.3.5 **Cuadriláteros** son los polígonos de 4 lados.

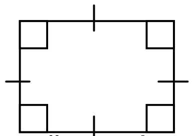
1.3.6 **Rectángulo** es un paralelogramo que tiene los ángulos rectos.



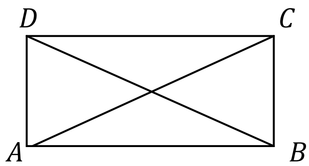
1.3.7 **Rombo** es un paralelogramo que tiene los lados iguales.



4.3.8 **Cuadrado** es un paralelogramo que tiene los lados iguales.

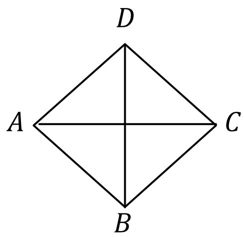


1.3.9 En todo rectángulo, las diagonales son iguales.

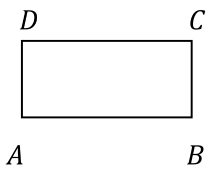


$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

1.3.10 En todo rombo, las diagonales son perpendiculares.

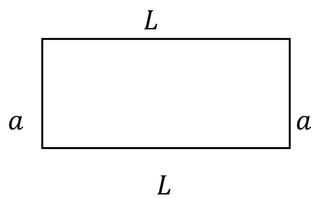


1.3.11 En todo cuadrado, las diagonales son iguales, perpendiculares entre si.



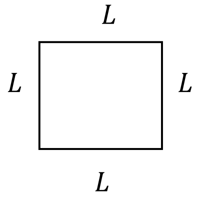
$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

1.3.12 **Rectángulo.** El área de un rectángulo es igual al producto del largo (L) por el ancho (a).



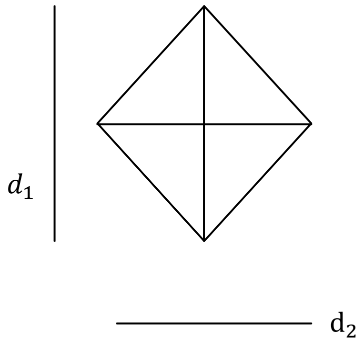
$\mathrm{A} = \mathrm{La}$ y su perímetro es igual a $P = 2(a + l)$

1.3.13 Cuadrado. El área de un cuadrado de lado L es igual al cuadrado de este.



$A = L^2$ y su perímetro es igual a: $P = 4L$

1.3.14 Rombo. El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales (d_1, d_2).



$$A = \frac{1}{2}(d_1 d_2)$$

Capítulo 2 Problemas con ecuación de primer grado

Resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas, y deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela.

La resolución de problemas es una actividad primordial en la clase de matemáticas, no es únicamente un objetivo general por conseguir sino que además es un instrumento pedagógico de primer orden. Lo importante no es obtener la solución, sino el camino que lleva hacia ella.

En [8] se menciona que en términos generales, para afrontar la resolución de problemas hemos de tener en cuenta:

(a) Los problemas sean interesantes y puedan resolverse a partir de conocimientos adquiridos con anterioridad.
(b) Provoquen rápidamente una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles soluciones.
(c) Contengan los elementos que permitan a los alumnos validar sus propias conjeturas y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

Aprender a resolver problemas, y aceptar que con frecuencia hay más de una respuesta a una pregunta y más de una forma de tratarla, constituye una parte fundamental tanto en la educación como en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Las ventajas del enfoque basado en la resolución de problemas en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje son significativas por diversas razones:

(i) Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las cuestiones con detenimiento, hacer pruebas, equivocarse, “pasar el tiempo” investigando, etc.
(ii) Existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión por parte de los estudiantes.
(iii) Es un tipo de conocimiento basado en la experiencia (es decir, el conocimiento obtenido mediante la experiencia de hacer algo), siendo más duradero y significativo para el alumno que el conocimiento transmitido por el profesor o el libro.
(iv) Los alumnos se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de aprendizaje y de comprensión.
(v) Incide directamente en el llamado aspecto formativo, creando así estructuras mentales que trascienden a las propias matemáticas.

(vi) La resolución de problemas es el núcleo central de las matemáticas, hacer matemáticas no es otra cosa que resolver problemas.
(vii) Hay que tener presente que el único camino que existe para aprender a resolver problemas, es enfrentarse a los problemas.

En este capítulo presentamos una selección de problemas que ilustran el desarrollo de competencias donde la herramienta algebraica que se usa para su resolución es el planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado. Además, se presentan otras soluciones para la mayoría de los problemas planteados en este capítulo. Algunas de estas soluciones utilizan la técnica del ensayo y error y de técnicas de aritmética.

Los problemas no están ordenados por grado de dificultad puesto que un problema difícil para una persona tal vez no lo es para otra. Los profesores pueden utilizar los problemas como lo prefieran de acuerdo a sus necesidades.

Sumando 60.

Hallar cinco números enteros consecutivos cuya suma sea 60.

Solución 1:

Este problema se puede resolver por ensayo y error. Lo más fácil es imaginarse 5 números consecutivos [ver 1.1.25] y sumarlos.

Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5 son consecutivos y su suma . Se observa que este valor esta alejado de 60.

Entonces se proponen otros 5 números consecutivos:

.

Aún falta para 60. Así que los números 10, 11, 12, 13 y 14 son tales que:

.

Otra forma de hacerlo por ensayo y error es la siguiente:

Como se trata de 5 números, si cada uno fuera el 10 entonces su suma sería 50 aunque no serían consecutivos, sin embargo es una aproximación al 60. De esta manera, podemos partir del 10 y consideramos sus 4 consecutivos:

10, 11, 12, 13 y 14.

Se verifica que: .

■

Solución 2:

Sean $(x), (x+1), (x+2), (x+3)$ y $(x+4)$ los cinco números consecutivo respectivamente cuya suma es igual a 60.

Es decir:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 60$$

Resolvamos esta ecuación como sigue.

Cancelando paréntesis:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 60$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$5x + 10 = 60$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -10 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$5x + 10 - 10 = 60 - 10$$
$$\Rightarrow 5x + 0 = 50$$
$$\Rightarrow 5x = 50$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{5}\right)5x = 50\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{5}{5}x = \frac{50}{5}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot x = 10$$
$$\Rightarrow x = 10$$

Por lo tanto, los números buscados son:

$x_1 = 10,\ \ x_2 = 10 + 1 = 11,\ \ x_3 = 10 + 2 = 12,\ \ x_4 = 10 + 3 = 13, x_5 = 10 + 4 = 14$

Comprobando, se tiene que: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$

■

Solución 3:

Otra forma de expresar los cinco números enteros [ver 1.1.17] consecutivos es como sigue:

$$(x-2), (x-1), x, (x+1) \text{ y } (x+2)$$

Se tiene que:

$$(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2) = 60$$

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis:

$$x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 = 60$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$5x = 60$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, los números son:

y

.

Y además se satisface que:

■

Monedas y más monedas.

Tenemos $1224 en igual número de monedas de $10 y de $2. ¿Cuántas monedas tenemos?

Solución 1:

Si consideramos el conjunto de dos monedas, una de $10 y otra de $2, su valor total es de $12 (formado por dos piezas).

Como en total hay $1224, la división , nos da el número de conjuntos de dos monedas (una de $10 y otra de $2).

Dado que hay un número igual de monedas de $10 y de $2, entonces existen 102 monedas de $10 y 102 monedas de $2.

Y verificando con los datos del problema se tiene que:

y

Así:

■

Solución 2:

Sea el número de monedas de $10. Note que también es el número de monedas de $2 pues el problema plantea que están en igual número.

Entonces:

Resolvamos esta ecuación como sigue.

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 12 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, hay 102 monedas de $10 y 102 monedas de $2.

Y se verifica que:

■

Las doce monedas.

Pepe tiene $95 en doce monedas de $10 y de $5. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

Solución 1:

Por tanteo, se buscan 2 números, uno para las monedas de $10 y otro para las monedas de $5 tales que sumados den 12 y la suma en pesos sea $95.

Si fueran 6 monedas de $10 y 6 monedas de $5 se tendría y que en total dan $90. Como falta $5, se ensaya con 7 monedas de $10 y 5 monedas de $5 y se verifica que y que en total dan $95.

■

Solución 2:

Si es el total de monedas de $10. Entonces denota el total de monedas de $5, de aquí:

Resolvamos esta ecuación como sigue.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -60 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

– –

– —

Por lo tanto, hay 7 monedas de $10 y 5 monedas de $5.

■

Hablando de enteros consecutivos.

Dos números enteros consecutivos son tales que la mitad del menor más el mayor excede en 13 a – del menor más — del mayor. Hállalos.

Solución 1:

Este problema se puede resolver por ensayo y error. Se proponen 2 números consecutivos 9 y 10 [ver 1.1.24]. Al menor se le saca la mitad y se le suma el mayor:

–

Y esto debe exceder en 13 a – del menor más — del mayor:

– de 9 + — de 10

Es decir:

– — ––

Pero 15.70 no excede en 13 a 14.5

Luego, se proponen los números consecutivos 10 y 11.

Al menor se le saca la mitad y se le suma el mayor:

$$\frac{10}{2} = 5 \quad \Rightarrow 5 + 11 = 16$$

Y como

$$\frac{10}{5} = 2, \quad \frac{11}{11} = 1$$

Se tiene que:

$2 + 1 = 3$ y 16 si excede en 13 al 3.

Por lo tanto, los números son: 10 y 11.

■

Observación. Al buscar los números por esta forma, los estudiantes descubren que los números consecutivos buscados deben tener quinta y onceava respectivamente. Es por eso que el 10 y el 11 son los números que buscan.

Solución 2:

Sean x y $x + 1$ los enteros consecutivo que se buscan.

Una de las condiciones del problema es que la mitad del menor, $\frac{x}{2}$, más el mayor $x + 1$ excede en 13 a $\frac{1}{5}$ del menor, $\frac{x}{5}$, más $\frac{1}{11}$ del mayor, $\frac{x+1}{11}$.

Es decir, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} + (x + 1) - 13 = \frac{x}{5} + \frac{(x + 1)}{11}$$

Resolvamos esta ecuación como sigue:

Eliminando paréntesis en ambos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$\frac{x}{2} + x + 1 - 13 = \frac{x}{5} + \frac{x + 1}{11}$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{x + 2x}{2} - 12 = \frac{11x + 5(x + 1)}{55}$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{3}{2}x - 12 = \frac{11x + 5x + 5}{55}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - 12 = \frac{16x + 5}{55}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 55 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{3}{2}x - 12\right)(55) = \left(\frac{16x + 5}{55}\right)(55)$$

$$\Rightarrow \frac{165}{2}x - 660 = 16x + 5$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 660 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$\frac{165}{2}x - 660 + 660 = 16x + 5 + 660$$

$$\Rightarrow \frac{165}{2}x + 0 = 16x + 665$$

$$\Rightarrow \frac{165}{2}x = 16x + 665$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-16x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$\frac{165}{2}x - 16x = 16x - 16x + 665$$

$$\Rightarrow \frac{165}{2}x - 16x = 0 + 665$$

$$\Rightarrow \frac{165}{2}x - 16x = 665$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{165x - (2)16x}{2} = 665$$

$$\Rightarrow \frac{165x - 32x}{2} = 665$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{133}{2}x = 665$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{2}{133}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{2}{133}\right)\frac{133}{2}x = 665\left(\frac{2}{133}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{266}{266}x = \frac{1330}{133}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x = 10$$

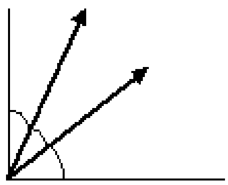
$$\Rightarrow x = 10$$

Por lo tanto, los dos números consecutivos son: 10 y 11 y además satisfacen las condiciones del problema.

■

Entre ángulos te veas.

Dividir un ángulo recto en tres ángulos, de manera que el segundo sea el doble del primero y el tercero sea igual al triple del primero, disminuido en 18 grados.



Solución 1:

Este problema puede ser resuelto por ensayo y error. Si es la medida del primer ángulo.

El problema plantea que hay que efectuar la siguiente operación:

, y ver si resulta 90º.

Si , entonces:

Luego, se intenta con , o sea:

Por lo tanto, con cumple con las condiciones y entonces la medida de los ángulos son: 18º, 36º y 36º.

■

Solución 2:

Como se sabe un ángulo recto mide 90º [ver 1.3.1].

El primer ángulo se denota como , el segundo ángulo como , (por ser el doble del primero) y el tercer ángulo lo denotamos como (por ser el triple del primero disminuido en 18 unidades).

Luego, se tiene la siguiente ecuación:

Resolvamos esta ecuación como sigue.

Eliminando paréntesis:

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad 18 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$6x - 18 + 18 = 90 + 18$$
$$6x + 0 = 108$$
$$\Rightarrow 6x = 108$$
Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{6}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*
$$\left(\frac{1}{6}\right)6x = 108\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{6}{6}x = \frac{108}{6}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot x = 18$$
$$\Rightarrow x = 18$$
Por lo tanto, el primer ángulo mide 18º, el segundo ángulo mide $2(18) = 36$º y el tercer ángulo mide $3(18) - 18 = 54 - 18 = 36$º.

Observe que se satisfacen las condiciones del problema: 18º + 36º + 36º = 90º.

■

Solución 3:

Algunas personas pueden resolverlo como sigue:

La ecuación que se plantea en este problema puede ser representado por el siguiente dibujo:

Es decir:
$$x + 2x + 3x - 18 = 90$$
Resolvamos esta ecuación como sigue.

Simplificando (Suma de términos semejantes):
$$6x - 18 = 90$$
Sumando en ambos miembros de la igualdad 18 (Propiedad aditiva de la igualdad):
$$6x - 18 + 18 = 90 + 18$$
$$\Rightarrow 6x + 0 = 108$$
$$\Rightarrow 6x = 108$$
Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{6}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*
$$\left(\frac{1}{6}\right)6x = 108\left(\frac{1}{6}\right)$$

Por lo tanto, el primer ángulo mide 18º, el segundo ángulo mide 36º y el tercer ángulo mide 36º.

■

Huevos estrellados.

> **Una mujer tiene huevos en una canasta y se propone venderlos a $1 cada uno. Por un accidente casual, se le rompen 20 huevos y ve que para no perder nada, ha de vender los huevos restantes a $2 cada uno. ¿Cuántos llevaba al inicio?**

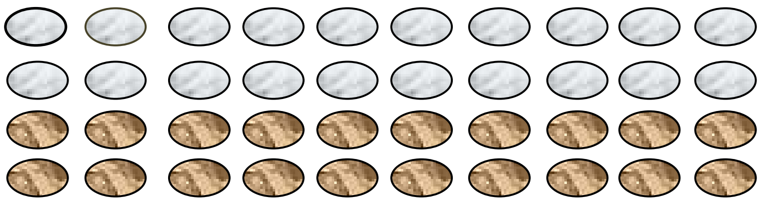
Solución 1:

Cada huevo se ha de vender a $1 pero como se rompen 20 huevos se decide vender los que restan a $2. Es decir:

Cada huevo que no se rompió cuesta el doble o cada huevo roto equivale a uno de los que no se rompieron.

Luego, huevos.

El siguiente diagrama, ilustra la solución del problema.



Donde  = los huevos que quedaron y  = los huevos rotos.

Por lo tanto, al inicio eran 40 huevos y después sólo hay 20 huevos.

■

Solución 2:

Sea el número de huevos que lleva la mujer a vender. De los huevos que lleva a vender, se le rompen 20. Entonces, ahora tiene huevos, así que para no perder, después de tener que venderlos a $1 cuando eran huevos ahora tiene que venderlos a $2 cuando son huevos.

Tenemos la siguiente ecuación:

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Sumando en ambos miembros de la igualdad (Propiedad aditiva de la igualdad):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, la señora llevaba al principio 40 huevos pero después sólo tiene 20 huevos. ■

Puré de manzanas.

Un vendedor de frutas que ha vendido los – de un cesto de manzanas dice que añadiendo 65 a las que le quedan, el contenido inicial del cesto aumentaría en –. ¿Cuántas manzanas había?

Solución 1:

Sea el total de manzanas. Una forma de representar lo antes mencionado es por medio de una tabla como a continuación se muestra:

Lo que se vende	Lo que se vende	Lo que se vende	Lo que queda
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}m$

Luego, a lo que queda se aumenta 65 manzanas entonces:

Lo que queda	Lo que se agrega
$\frac{1}{4}$	$65\ manzanas$

Después se observa que al total de manzanas que tenía al inicio aumenta $\frac{1}{3}$.

Luego se tiene:

Lo que se vende	Lo que se vende	Lo que se vende	Lo que queda	Lo que aumenta
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{3}{4}m$

Las manzanas al inicio

$$\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{3}m=1m+\frac{1}{3}m=\frac{4}{3}m$$

Observe que lo que queda $\left(\frac{1}{4}\right)$ más las 65 manzanas son los $\frac{4}{3}m$.

Entonces:

$$\frac{1}{4}m+65=\frac{4}{3}m$$

Resolvamos esta ecuación.

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{1}{4}m$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+65=\frac{4}{3}m-\frac{1}{4}m$$
$$\Rightarrow 0+65=\frac{4}{3}m-\frac{1}{4}m$$
Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):
$$65=\frac{16m-3m}{12}$$
Simplificando (Suma de términos semejantes):
$$65=\frac{13}{12}m$$
Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{12}{13}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*
$$\left(\frac{12}{13}\right)(65)=\left(\frac{13}{12}m\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{780}{13}=\frac{156}{156}m$$
$$\Rightarrow 60=1\cdot m$$
$$\Rightarrow m=60$$
Por lo tanto, al inicio había 60 manzanas.

■

Solución 2:

Sea x el número de manzanas.

El vendedor de frutas ha vendido $\frac{3}{4}$ de un cesto de manzanas y lo que quedó es $\frac{1}{4}$ del cesto de manzanas. Es decir: $\frac{1}{4}x$

Si se añade a las manzanas que le quedaron 65 el contenido inicial aumentara en $\frac{1}{3}$.

Por lo que:
$$\frac{1}{4}x+65=x+\frac{1}{3}x$$
Resolvamos esta ecuación.

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{1}{4}x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*
$$-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x+65=x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x$$
$$\Rightarrow 0+65=x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por — (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, había 60 manzanas.

■

Poste, poste.

> **Un poste tiene bajo tierra – de su longitud, – del resto sumergido en el agua, y la parte emergente mide . Hallar su altura.**

Solución 1:

Sea la altura del poste. Bajo la tierra tiene – de su longitud, o sea – .

De esta manera, el resto queda representado por:

Luego, como – de este resto está sumergido en agua, esto se representa así:

Como la parte emergente mide entonces la longitud del poste está representado por:

Resolvamos esta ecuación.

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 7 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(7)\left(\frac{2}{7}a+\frac{2}{7}a+6\right)=a(7)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2a+2a+42=7a$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$4a+42=7a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-4a$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-4a+4a+42=7a-4a$$
$$\Rightarrow 0+42=7a-4a$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$42=3a$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{3}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{3}\right)42=3a\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{42}{3}=\frac{3}{3}a$$
$$\Rightarrow 14=1\cdot a$$
$$\Rightarrow a=14$$

Por lo tanto, la longitud del poste es de 14 metros.

Comprobación:

$$\tfrac{2}{7}\text{ de }14=4m$$
$$\tfrac{2}{5}\text{ de }10=4m$$

Y se satisface:

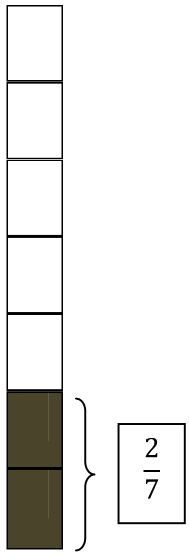
$$4m+4m+6m=14\ metros.$$

■

Solución 2:

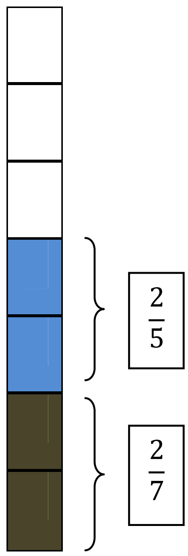
El dibujo siguiente representa la longitud del poste.

El poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud:



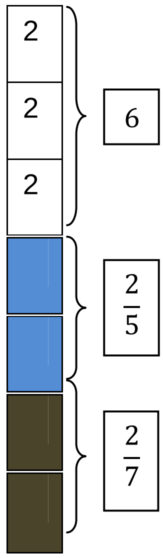
Observe que el resto de la longitud quedo dividido en quintos.

El poste tiene $\frac{2}{5}$ bajo el agua:



Note que lo que resta del poste queda dividido en tercios.

Y el resto de la longitud del poste mide 6 metros:



Luego, cada tercio equivale a 2 metros.
Por lo tanto, el poste mide 14 metros ($2 \times 7 = 14$).

■

Solución 3:

Sea x la altura del poste. El poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su altura, o sea $\frac{2}{7}x$. Luego, el resto es: $x - \frac{2}{7}x$. Como $\frac{2}{5}$ del resto está sumergido en el agua, se tiene: $\frac{2}{5}\left(x - \frac{2}{7}x\right)$ y la parte que sobresale de la tierra mide 6 metros.
Por lo que se tiene:

$$2\left(\frac{x}{7}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{7}x\right) + 6 = x$$

Resolvamos esta ecuación.

Efectuando operaciones con fracciones:

$$\frac{2}{7}x + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7x - 2x}{7}\right) + 6 = x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}x + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{7}x\right) + 6 = x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}x + \frac{10}{35}x + 6 = x$$

$$\Rightarrow \frac{10x + 10x}{35} + 6 = x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad (Propiedad aditiva de la igualdad):

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -6 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por — (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, la altura del poste es de 14 metros.

■

Por el camino.

Un migrante dice: llevo recorridos — del camino y aún me queda – de kilómetro para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?

Solución 1:

Sea c la longitud del camino. El migrante lleva recorridos $\frac{7}{15}$ del camino.

Es decir: $\frac{7}{15}c$ y le falta por recorrer $\frac{1}{3}$ de kilómetro para llegar a la mitad del camino, $\frac{c}{2}$

Se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{7}{15}c + \frac{1}{3} = \frac{c}{2}$$

Resolvamos esta ecuación.

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{7}{15}c$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{7}{15}c + \frac{7}{15}c + \frac{1}{3} = \frac{c}{2} - \frac{7}{15}c$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{3} = \frac{c}{2} - \frac{7}{15}c$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{1}{3} = \frac{15c - 14c}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{30}c$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 30 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(30)\frac{1}{3} = \frac{1}{30}c(30)$$

$$\Rightarrow \frac{30}{3} = \frac{30}{30}c$$

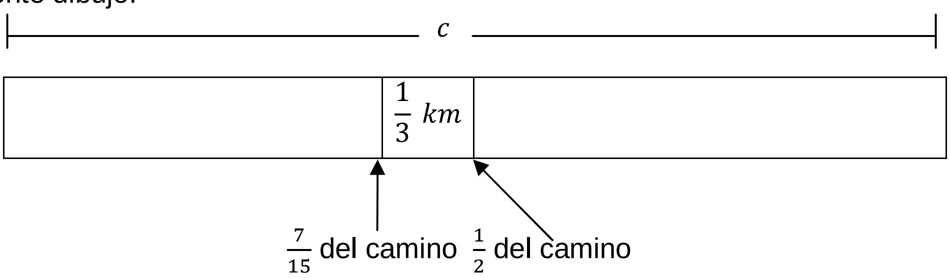
$$\Rightarrow 10 = 1 \cdot c \ \Rightarrow c = 10$$

Por lo tanto, la longitud del camino es 10 kilómetros.

■

Solución 2:

Sea c la longitud del camino. Una forma de resolver este problema es usando el siguiente dibujo:



Observemos que — del camino es equivalente a — del camino y que – del camino equivale a — del camino.

Luego, lo que le falta al migrante por recorrer para llegar a la mitad del camino es:

— — — del camino.

Y esto es igual, según el problema, a – de kilómetro.

Es decir:

— –

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 30 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

— –

— —

Por lo tanto, la longitud del camino es 10 kilómetros. ■

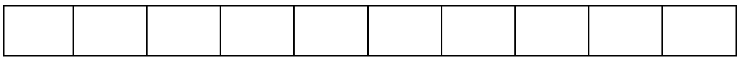
En la hielera.

Cuando el agua se hace hielo aumenta — su volumen. Calcular los litros de agua que se obtienen al derretirse 180 de hielo.

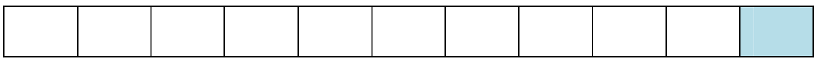
Solución 1:

El siguiente dibujo representa la cantidad de agua antes de hacerse hielo.

Y las marcas muestran una décima parte del total:



Como el agua aumenta su volumen — cuando se hace hielo entonces tenemos que aumentar una marca más al dibujo anterior:



El dibujo en su totalidad representa, según el problema a [ver 1.1.32].

Luego, cada marca equivale a $\frac{180}{11} = 16.36\ dm^3$.

Por lo tanto, cuando el agua congelada se derrite, se tiene:

$$180\ dm^3 - 16.36\ dm^3 = 163.63\ dm^3$$

■

Solución 2:

Otra forma es utilizando porcentajes. Si el agua sin congelar equivale a un 100% entonces el agua congelada equivale a 110% pues su volumen aumenta en $\frac{1}{10}$.

Es decir, 10%. Luego, según el problema, el 110% equivale a $180\ dm^3$.

Se plantea la siguiente regla de tres:

110%-----------------180 dm^3

10%--------------------------x

Resolviendo esta regla de tres tenemos:

$$x = \frac{10 \times 180}{110} = \frac{1800}{110}\ dm^3$$

$$x = 16.363\ dm^3.$$

Así, el agua congelada al derretirse tiene un volumen de:

$$(16.36\ dm^3)(100\%) = 163.63\ dm^3$$

■

Solución 3:

Sea x la cantidad de agua congelada. Como aumenta $\frac{1}{10}$ su volumen tenemos que:

$$x + \frac{x}{10} = 180$$

Resolvamos esta ecuación.

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 10 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$10\left(x + \frac{x}{10}\right) = 180(10)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$10x + x = 1800$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$11x = 1800$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 11 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{11}\right)11x = 1800\left(\frac{1}{11}\right)$$

Por lo tanto, el total de litros que se obtiene al derretirse 180 de hielo es 163.63 litros.

■

El gavilán coqueto.

> **Un gavilán dice a un conjunto de palomas al pasar frente a ellas: "adiós mis cien palomas", y estas responden: "no somos cien señor gavilán, somos tantas más tantas más la mitad de tantas más la cuarta parte de tantas y con usted hacemos cien" ¿Cuántas palomas son?**


Solución 1:

Por ensayo y error se puede resolver este problema.

"Tantas" debe ser menor que 40, pues de otra forma "tantas" más "tantas" más la mitad de "tantas" seria mayor o igual que:

y como la cuarta parte de "tantas" es un número entero, la suma de enteros es entero, se tiene que "tantas" es un múltiplo de 4 menor que 40.

Así que ensayemos con 36, "tantas" más "tantas" más la mitad de "tantas" más la cuarta parte de "tantas" más 1 se igual a:

Por lo tanto, son 36 palomas. ■

Solución 2:

Si llamamos a la cantidad de palomas, "tantas" más "tantas" más la mitad de "tantas" más la cuarta parte de "tantas" más 1 igual a 100 se expresa algebraicamente así:

Encontremos el valor de .

Sumando fracciones del miembro izquierdo de la igualdad:

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -1 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por — (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, son 36 palomas.

■

Prendas y más prendas.

Se compran 42 prendas de vestir. Camisas de \$52 y pantalones de \$88 y en total se gastaron \$3084. ¿Cuántas camisas y pantalones se compraron?

Solución 1:

Si todas las prendas hubieran sido camisas se habría gastado y faltarían .

Como cada pantalón cuesta \$36 más que cada camisa, entonces — es la cantidad de pantalones y por consiguiente hay 17 camisas.

Si todas las prendas hubieran sido pantalones se habrían gastado y faltarían .

Como cada camisa cuesta $36 menos que cada pantalón entonces $\frac{\$612}{\$36} = 17$ es la cantidad de camisas y por consiguiente hay 25 pantalones.

■

Solución 2:

Si p es la cantidad de pantalones entonces $42 - p$ denota la cantidad de camisas.

Observemos que $88p$ denota la cantidad en pesos de lo que gastó en pantalones y $52(42 - p)$ denota la cantidad en pesos de lo que se gastó en camisas.

Como en total se gastó $3084 se tiene que:

$$88p + 52(42 - p) = 3084$$

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$88p + 2184 - 52p = 3084$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$36p + 2184 = 3084$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -2184 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$36p + 2184 - 2184 = 3084 - 2184$$
$$\Rightarrow 36p + 0 = 900$$
$$\Rightarrow 36p = 900$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{36}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{36}\right)36p = 900\left(\frac{1}{36}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{36}{36}p = \frac{900}{36}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot p = 25$$
$$\Rightarrow p = 25$$

Por lo tanto, se compraron 25 pantalones y $42 - 25 = 17$ camisas.

■

Solución 3:

Sea c la cantidad de camisas y p la cantidad de pantalones.

En total se compraron 42 prendas es decir:

$$c + p = 42$$

Ó equivalentemente:

$$c = 42 - p - - - - - - - - - - - - (1)$$

Además, cada camisa tiene un costo de $52 y cada pantalón cuesta $88.

Y el total de pesos gastados es \$3084.

Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$52c + 88p = 3084 - - - - - - - - -(2)$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones ((1), (2))

Sustituyendo c *de (1) en (2):*

$$52(42 - p) + 88p = 3084$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2184 - 52p + 88p = 3084$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$2184 + 36p = 3084$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -2184 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-2184 + 2184 + 36p = 3084 - 2184$$

$$\Rightarrow 0 + 36p = 900$$

$$\Rightarrow 36p = 900$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{36}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{36}\right)36p = 900\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{36}{36}p = \frac{900}{36}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot p = 25$$

$$\Rightarrow p = 25$$

Sustituyendo el valor de $p = 25$ *en (1) se tiene:*

$$c = 42 - 25$$

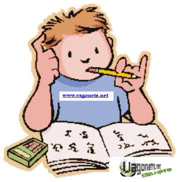
$$\Rightarrow c = 17$$

Por lo tanto, el número de camisas compradas son 17 y el de pantalones es 25.

■

Recompensa matemática.

Un padre para estimular a su hijo a estudiar la asignatura de MATEMÁTICAS le dice: "Por cada problema que resuelvas bien te daré \$70 y por cada uno que metas la pata me darás \$50". Después de hacer 25 problemas el muchacho tiene \$550. ¿Cuántos problemas ha resuelto correctamente?



Solución 1:

Este problema puede resolverse por ensayo y error de la siguiente manera:

Si el número de problemas bien resueltos fueran 22 (por decir un número para ensayar), la cantidad en pesos sería de $1540, ya que cada problema bien resuelto es pagado con $70. En este caso serían 3 los problemas no correctos pero el padre, por cada incorrecto recibirá $50. Así por estos 3 problemas incorrectos recibirá $150. De esta manera, se tiene que . Es obvio que esta cantidad esta muy alejada de los $550.

Por lo que podemos ensayar con otro número menor que 22.

Por ejemplo, si fueran 20 los problemas correctos se tendrían $1400 y los no correctos serían 5 y se tendrían $250. Así, por los correctos menos los incorrectos tendríamos:

Siguiendo con el ensayo, se observa que si los problemas correctos fueran 15 se tendrían $1050 mientras que por los 10 no correctos se tendrían $500.

Así, lo que le quedaría al hijo sería

Por lo tanto, el niño respondió 15 problemas correctamente.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es por medio de la construcción de una tabla que a continuación se presenta:

Total de problemas 25.

Problemas bien resueltos	Problemas mal resueltos	Dinero ganado por cada problemas bien	Dinero perdido por los problema mal resueltos	Total
22	3	$1540	$150	$1390
20	5	$1400	$250	$1150
18	7	$1260	$350	$900
16	9	$1120	$450	$670
15	10	$1050	$500	$550

Por lo tanto, el niño resolvió 15 problemas bien de los 25 y 10 mal resueltos.

■

Solución 3:

El niño realiza 25 problemas y se tiene dos clases:

i. Los que están bien resueltos, denotados como x.
El padre pagará al hijo \$70.
Es decir: $70x$

y

ii. Los que están mal resueltos denotados como $25 - x$.
El niño dará a su papá \$50.
O sea: $50(25 - x)$

Al final el niño tiene \$550.

Luego, se tiene la siguiente ecuación:

$$70x - 50(25 - x) = 550$$

Encontremos el valor de x.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$70x - 1250 + 50x = 550$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$120x - 1250 = 550$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 1250 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$120x - 1250 + 1250 = 550 + 1250$$
$$\Rightarrow -1250 + 0 = 1800$$
$$\Rightarrow 120x = 1800$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{120}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{120}\right)(120x) = (1800)\left(\frac{1}{120}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{120}{120}x = \frac{1800}{120}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot x = 15$$
$$\Rightarrow x = 15$$

Por lo tanto, el niño resolvió 15 problemas bien de los 25.

■

Observación. Algunos estudiantes comienzan su proceso de resolución de este problema realizando lo siguiente:

Como se tienen \$550 al haber realizado 25 problemas podemos hacer la división

— para tener una estimación de los problemas resueltos correctamente.

Sin embargo debemos tener cuidado cuando los estudiantes reflexionan de esta manera pues si ellos dividen $550 entre 25 problemas, el resultado (22) nos indica que cada problema vale $22 más no, que sea un número de problemas.

A pesar de este error conceptual, el número 22 les sirve, como punto de partida para ensayar la solución.

En este caso, este error le permite al docente retroalimentar el concepto de división.

Una reunión no muy familiar.

> **En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hay de cada clase si en total hay 156 personas?**

Solución 1:

Una forma de resolver este problema es la siguiente:

Se observa que por cada hombre hay 2 mujeres y por cada hombre y 2 mujeres hay el triple de niños, es decir, por cada hombre y 2 mujeres hay 9 niños. Entonces por cada hombre se tienen 2 mujeres y 9 niños que en total son 12 personas (1 hombre + 2 mujeres + 9 niños = 12 personas).

Como en total hay 156 personas entonces la división:

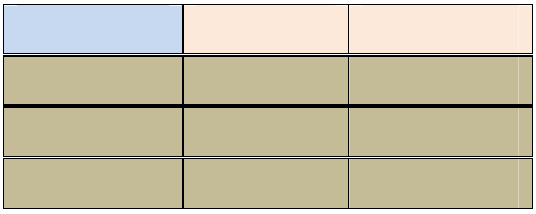
— , nos da el número de hombres.

Luego, hay 26 mujeres (13 x 2 = 26) y 117 niños (13 x 9 = 117).

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es utilizando una grafica como la siguiente:



En esta tabla se muestra que por cada hombre (H) hay 2 mujeres (M_1 y M_2) y por cada terna formada por un hombre (H) y dos mujeres (M_1 y M_2) se tienen 9 niños ($N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8$ y N_9). Cada tabla como esta consta de 12 personas.

Entonces, como hay 156 personas en total, tenemos 13 tablas como la anterior $\left(\frac{156}{12} = 13\right)$.

Por lo tanto, hay 13 hombres, 26 mujeres y 117 niños.

■

Solución 3:

Sea x el número de hombres. Luego, $2x$ es el número de mujeres.

Como hay el triple número de niños que de hombres y mujeres, entonces el número de niños queda expresado como sigue:

$$3(x + 2x).$$

Es decir:

$$3(3x) = 9x.$$

Además entre hombres, mujeres y niños son 156.

Ahora, se tiene la siguiente ecuación:

$$x + 2x + 9x = 156$$

Resolvámosla.

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$12x = 156$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{12}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{12}\right) 12x = 156 \left(\frac{1}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{12}{12}x = \frac{156}{12}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x = 13$$

$$\Rightarrow x = 13$$

Por lo tanto, el total de hombres es 13, el de mujeres es $2x = 2(13) = 26$ y el de niños $9x = 9(13) = 117$.

Lo cual verifica que:

$$Hombres + Mujeres + Niños = 156\, personas$$

$$13 + 26 + 117 = 156.$$

■

Estilista con estilo.

Una estilista es contratada por $120 diarios si trabaja todo el día. Si sólo lo hace por la mañana recibe $50. Al cabo del mes de noviembre recibe $2760. ¿Cuántos días trabajo por la mañana?

Solución 1:

Por ensayo y error, este problema puede ser resuelto sólo con la propuesta de números que ayuden a acercarse al valor del dinero recibido.

Por ejemplo, si fueran 16 los días que trabajó todo el día, se tendría:

y los días que sólo trabajó por la mañana serían 14 (pues días de noviembre), lo cual daría .

En total se tendría:

.

Esta cantidad está próxima a lo que recibió ($2760).

Ensayando de esta forma se observa que los días que trabajó todo el día fueron 18 mientras que los días que sólo trabajó por la mañana fueron 12.

Y se verifica que:

y

Lo cual da un total de .

■

Observación.

Algunos estudiantes empiezan a resolver este problema de la manera siguiente:

1. Suman $120 con $50 y da un total de $170.
2. Realizan la operación: ——
3. Consideran el 16 como el número con el cual empiezan a probar con las condiciones del problema.
4. Encuentran la solución al seguir ensayando.

Por alguna razón desconocida, realizan los pasos (1) y (2) anteriores.

El hecho de empezar con estas operaciones no tiene explicación lógica matemática. Creemos que con el afán de resolver el problema realizan estas operaciones que para ellos no tienen sentido pero que de alguna manera logran encontrar un número que les ayude a continuar con la búsqueda de la solución como en este caso.

Solución 2:

Sea d el número de días que trabajó todo el día. Luego, el número de días que trabajó por la mañana es $30 - d$, pues el mes de noviembre consta de 30 días.

Si trabaja todo el día recibe \$120. O sea, $\$120d$ representa la cantidad recibida por los días trabajados todo el día.

Si sólo lo hace por la mañana recibe \$50. Así, $\$50(30 - d)$ representa la cantidad recibida por los días trabajados sólo por la mañana.

Al finalizar el mes de noviembre recibe \$2760, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$120d + 50(30 - d) = 2760$$

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$120d + 1500 - 50d = 2760$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$70d + 1500 = 2760$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -1500 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$70d + 1500 - 1500 = 2760 - 1500$$
$$\Rightarrow 70d + 0 = 2760 - 1500$$
$$\Rightarrow 70d = 1260$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{70}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{70}\right)70d = 1260\left(\frac{1}{70}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{70}{70}d = \frac{1260}{70}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot d = 18$$
$$\Rightarrow d = 18$$

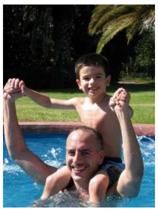
Luego, los días trabajados todo el día son 18, por lo que los días trabajados sólo por la mañana son:

$$30 - 18 = 12.$$

■

Cuestión de edades.

> **Una persona tiene actualmente 5 veces la edad de su sobrino; dentro de 3 años, su edad no será más que 4 veces mayor. Calcular la edad de cada uno.**



Solución 1:

Este problema puede ser resuelto por ensayo y error.

Si el sobrino tuviera 6 años, el tío tendría 30 ( ). Dentro de 3 años el sobrino tendría 9 y el tío 33. Pero 33 no es 4 veces 9 (.

Por lo tanto, el sobrino no puede tener 6 años.

Si el sobrino tuviera 8 años, el tío tendría 40 ( ). Dentro de 3 años el sobrino tendría 11 y el tío tendría 43. Pero 43 no es 4 veces 11 (.

Así, el sobrino no puede tener 8 años.

Si el sobrino tuviera 9 años, el tío tendría 45 ( ). Dentro de 3 años el sobrino tendría 12 años y el tío 48. Ahora, 48 si es 4 veces 12 ( ).

Por lo tanto, la edad del sobrino es 9 años y la del tío es 45 años.

■

Solución 2:

Sea la edad del sobrino y la edad del tío. La edad de es 5 veces la edad de o sea, dentro de tres años la edad de será 4 veces mayor.

Es decir:

Basta encontrar el valor de .

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Sumando en ambos miembros de la igualdad (Propiedad aditiva de la igualdad):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -12 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-x) = (-9)(-1)$$
$$\Rightarrow x = 9$$

Por lo tanto, la edad del sobrino es 9 años y la edad del tío es 45 años.

■

Solución 3:

Otra forma de resolver este problema es considerando la siguiente tabla:

	Sobrino	Tío
Edad actual	x	$5x$
Edad en 3 años	$x + 3$	$5x + 3$

Relación entre edades después de 3 años	$4(x + 3) = 5x + 3$

Luego, resolviendo la ecuación $4(x + 3) = 5x + 3$, se tiene:

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$4x + 12 = 5x + 3$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-4x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-4x + 4x + 12 = 5x - 4x + 3$$
$$\Rightarrow 0 + 12 = x + 3$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$12 = x + 3$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -12 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-12 + 12 = x + 3 - 12$$
$$\Rightarrow 0 = x - 9$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 9 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$9 + 0 = x - 9 + 9$$
$$\Rightarrow 9 = x + 0$$
$$\Rightarrow x = 9$$

Por lo tanto, la edad del sobrino es 9 años y la del tío es $5x = 5(9) = 45$ años.

■

Solución 4:

También este problema se puede resolver planteando un sistema de ecuaciones.

Sea s la edad del sobrino y t la edad del tío. Como el tío tiene 5 veces la edad del sobrino se tiene que:

$$t = 5s - - - - - - - - - - - -(1)$$

Por otra parte, se sabe que dentro de 3 años ($t + 3, s + 3$), la edad del tío no será más que 4 veces mayor:

$$t + 3 = 4(s + 3) - - - - - - -(2)$$

Resolvamos este sistema:

Sustituyendo t *de (1) en (2) se tiene:*

$$5s + 3 = 4(s + 3)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$5s + 3 = 4s + 12$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-5s$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-5s + 5s + 3 = 4s + 12 - 5s$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3 = -s + 12$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -3 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-3 + 3 = -s + 12 - 3$$

$$\Rightarrow 0 = -s + 9$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -9 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-9 + 0 = -s + 9 - 9$$

$$\Rightarrow -9 = -s + 0$$

$$\Rightarrow -s = -9$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-s) = (-9)(-1)$$

$$\Rightarrow s = 9$$

Sustituyendo el valor de $s = 9$ *en (1) se tiene:*

$$t = 5(9)$$

$$\Rightarrow t = 45$$

Por lo tanto, la edad del sobrino es 9 años y la edad del tío es 45 años.

■

De gallinas y borregos y una que otra pata.

> **En un corral hay 37 animales entre gallinas y borregos y en total hay 118 patas. ¿Cuántas gallinas y borregos hay?**

Solución 1:

En el problema se supone que todas las gallinas tienen 2 patas y los borregos 4. Realizando una tabla y ensayando tenemos que los números que cumplen con el problema son: 15 gallinas y 22 borregos.

	Cabezas	Patas
Gallinas	17	34
Borregos	20	80
Total	37	114
	Cabezas	Patas
Gallinas	16	32
Borregos	21	84
Total	37	116
	Cabezas	Patas
Gallinas	15	30
Borregos	22	88
Total	37	118

■

Solución 2:

Si es la cantidad de borregos entonces representa la cantidad de gallinas.

Como las gallinas tienen 2 patas y los borregos 4 entonces la cantidad total de patas queda expresada como sigue:

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$2b + 74 = 118$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -74 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$2b + 74 - 74 = 118 - 74$$
$$\Rightarrow 2b + 0 = 118 - 74$$
$$\Rightarrow 2b = 44$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)2b = 44\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{2}{2}b = \frac{44}{2}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot b = 22$$
$$\Rightarrow b = 22$$

Por lo tanto, hay 22 borregos y 15 gallinas ($37 - 22 = 15$).

■

Solución 3:

Si todas las cabezas fueran de gallinas se contarían $37 \times 2 = 74$ patas, es decir, faltarían $118 - 74 = 44$ patas.

Como cada borrego tiene 2 patas más que cada gallina entonces $\frac{44}{2} = 22$ es la cantidad de borregos que hay y por consiguiente, hay 15 gallinas.

Verificando se tiene que 22 borregos + 15 gallinas = 37 cabezas y

$$(22 \times 4) + (15 \times 2) = 88 + 30 = 118.$$

Es la cantidad total de patas.

O bien, si todas las cabezas fueran de borregos se contarían $37 \times 4 = 148$ patas, por lo que sobrarían $148 - 118 = 30$ patas.

Como cada gallina tiene 2 patas menos que cada borrego entonces $\frac{30}{2} = 15$ es el número de gallinas que hay y por consiguiente hay 22 borregos.

■

Solución 4:

Este problema también puede resolverse con un sistema de ecuaciones.

Sean b la cantidad de borregos y g la cantidad de gallinas. El total de patas de los borregos se expresa por $4b$ y el de las gallinas se expresa por $2g$.

De esta manera, como hay en total 118 patas, se tiene que:

$$4b + 2g = 118 - - - - - - - - -(1)$$

Y como hay en total 37 cabezas se tiene que:

$$b + g = 37$$

Ó equivalentemente:

Entonces, para resolver este sistema, podemos hacerlo por el método de sustitución (por ejemplo):
Sustituyendo de (2) en (1) se tiene:

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -148 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por − (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Sustituyendo el valor de en (1):

Por lo tanto, el número de gallinas es 15 y el de borregos es 22.

■

Observación.
Como el problema anterior podemos plantear muchos más. Basta con cambiar los números y los objetos. Por ejemplo:
En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 61 cabezas y 196 patas ¿Cuántas hay de cada clase?

■

Aceite que no se come.

> **Se han consumido $\frac{7}{8}$ partes de un tambo de aceite. Reponiendo 38 litros ha quedado lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Calcular la capacidad del tambo.**

Solución 1:

Sea x la cantidad total de aceite, como se consumen $\frac{7}{8}$ partes del tambo entonces lo que queda es $\frac{1}{8}x$ y como se reponen 38 litros con esto se llena hasta $\frac{3}{5}$ partes. Por lo que se tiene:

$$\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$$

Resolvamos esta ecuación.

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{1}{8}x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x$$

$$\Rightarrow 0 + 38 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$38 = \frac{24x - 5x}{40}$$

$$\Rightarrow 38 = \frac{19}{40}x$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{40}{19}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{40}{19}\right)38 = \frac{19}{40}x\left(\frac{40}{19}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1520}{19} = \frac{760}{760}x$$

$$\Rightarrow 80 = 1 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = 80$$

Por lo tanto, la capacidad del tambo es de 80 litros.

■

Solución 2:

Como se llena de nuevo el tambo hasta sus $\frac{3}{5}$ partes y queda $\frac{1}{8}$ parte al inicio y además se reponen 38 litros, se tiene que:

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x = 38$$

Sumando términos semejantes:

$$\frac{19}{40}x = 38$$

Luego, utilizando la regla de tres tenemos:

$$\frac{19}{40} ------ -- \ 38\, litros$$

$$\frac{40}{40} -----------x$$

Ó equivalente:

$$19 -------38\, litros$$

$$40 ---------x$$

Entonces:

$$x = \frac{(40)(38)}{19} = \frac{1520}{19} = 80\, litros$$

Por lo tanto, la capacidad del tambo es de 80 litros.

■

Solución 3:

Se tiene una cierta cantidad de aceite x de la cual usó $\frac{7}{8}$ del total del aceite, o sea, $\frac{7}{8}x$, y se reponen 38 litros y este queda lleno hasta $\frac{3}{5}$ partes del total del aceite, es decir, $\frac{3}{5}x$. Luego, se tiene la siguiente ecuación:

$$x - \frac{7}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$$

Encontremos el valor de x.

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{3}{5}x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{3}{5}x + x - \frac{7}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}x$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{-24x+40x-35x}{40}+38=0$$
$$\Rightarrow -\frac{19}{40}x+38=0$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -38 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-38+38-\frac{19}{40}x=0-38$$
$$\Rightarrow 0-\frac{19}{40}x=-38$$
$$\Rightarrow -\frac{19}{40}x=-38$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $-\frac{40}{19}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(-\frac{40}{19}\right)\left(-\frac{19}{40}x\right)=-38\left(-\frac{40}{19}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{760}{760}x=\frac{1520}{19}$$
$$\Rightarrow 1\cdot x=80$$
$$\Rightarrow x=80$$

Por lo tanto, la capacidad del tambo es de 80 litros.

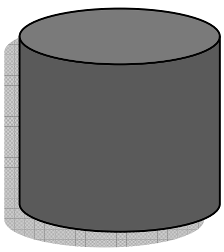
■

Solución 4:

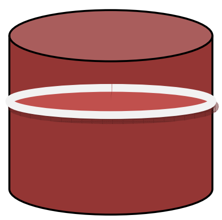
Otra forma de resolver este problema es utilizando dibujos como a continuación se ilustra:

Se tiene un tambo con una cantidad de aceite.

Tambo

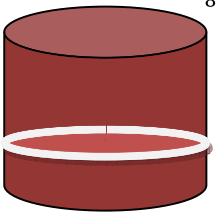
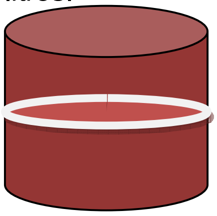


Del cual se ocupan $\frac{7}{8}$ partes:

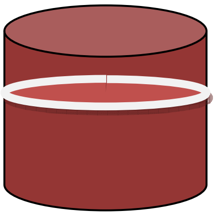


Se ocupa $\frac{7}{8}$

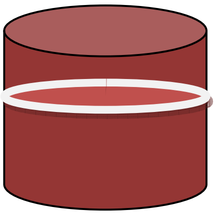
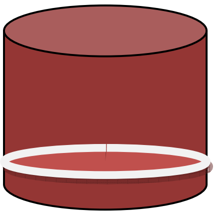
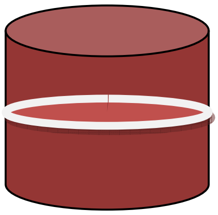
Después a lo queda, que es $\frac{1}{8}$ se le agregan 38 litros.

Y quedan $\frac{1}{8}$  + 38 litros = 

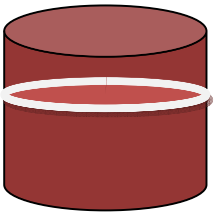
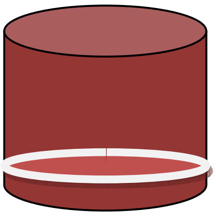
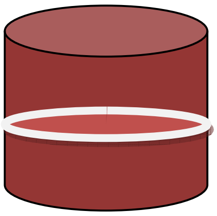
Y el tambo se llena hasta sus $\frac{3}{5}$ partes:

$\frac{3}{5}$ 

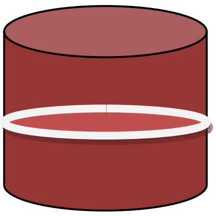
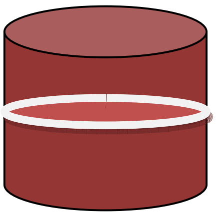
Observe que:

$\frac{3}{5}$  $-\ \frac{1}{8}$  = 38 litros 

Pero

$\frac{3}{5}$  $-\ \frac{1}{8}$  $= \frac{19}{40}$ 

Así,

$\frac{19}{40}$  = 38 litros 

Si la capacidad del tambo es entonces se tiene que:

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, la capacidad del tambo es de 80 litros.

■

¿Y la camioneta…profe?

> **Una camioneta al salir de viaje lleva de gasolina una cierta cantidad en su depósito. El viaje lo hace en dos etapas: en la primera consume – de la gasolina. En la segunda – de lo que quedaba. Al final del trayecto le quedan 30 litros en su deposito ¿Con cuántos litros emprendió el viaje?**

Solución 1:

Sea la cantidad total de gasolina. En la primera etapa consume – por lo que queda –. En la segunda etapa consume – de lo que queda.

Es decir:

– de – es – –

Y al final termina con 30 litros.

Luego, se tiene:

Encontremos el valor de .

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{4g+4g}{20}+30=g$$

$$\Rightarrow \frac{8}{20}g+30=g$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-g$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$\frac{8}{20}g+30-g=g-g$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-\frac{3}{5}g+30=0$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -30 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-\frac{3}{5}g+30-30=0-30$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{5}g+0=-30$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{5}g=-30$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $-\frac{5}{3}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}g\right)=(-30)\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{15}g=\frac{150}{3}$$

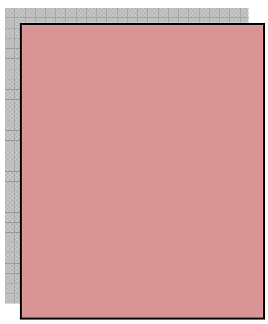
$$\Rightarrow 1\cdot g=50$$

$$\Rightarrow g=50$$

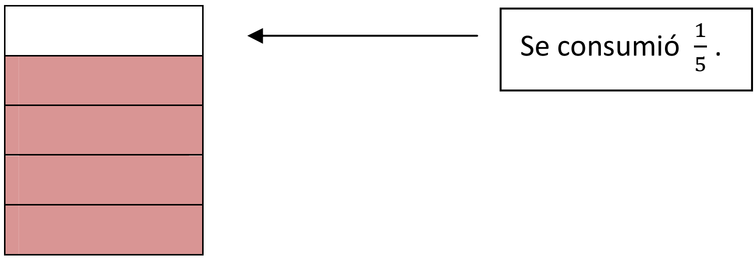
Por lo tanto, el viaje fue emprendido con 50 litros de gasolina. ■

Solución 2:

El dibujo siguiente representa la cantidad de gasolina que una camioneta llevaba en su depósito:

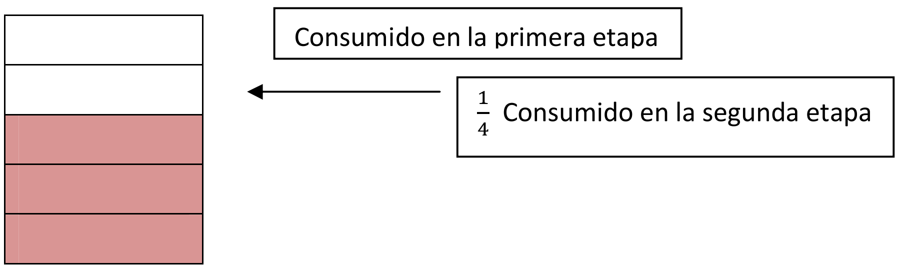


En la primera etapa del viaje consumió $\frac{1}{5}$ de lo que llevaba:



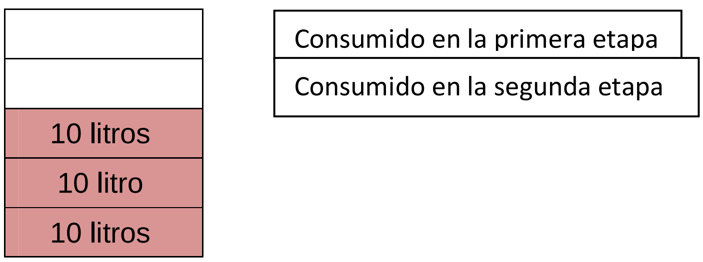
Observe que lo que quedó en el depósito esta dividido ahora en cuartos.

En la segunda etapa consumió $\frac{1}{4}$ de lo que quedo:



Note que lo que ahora quedó en el depósito está dividido en tercios.

Como al final del trayecto acaba con 30 litros, cada tercio equivale a 10 litros.



Luego, cada quinto equivale a 10 litros.

De esta manera se sabe que la camioneta al inicio del viaje llevaba 50 litros en su depósito.

■

Solución 3:

Sea x la cantidad de litros de gasolina. El viaje se hace en dos etapas:

En la primera consume $\frac{1}{5}$ de la gasolina, o sea $\frac{1}{5}x$ o $\frac{x}{5}$. Lo que queda en el depósito es: $x-\frac{x}{5}$

En la segunda consume $\frac{1}{4}$ de la gasolina que quedaba, o sea:

$$\frac{1\left(x-\frac{x}{5}\right)}{4}$$

Al final sólo tiene 30 litros de gasolina.

Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{5}+\frac{\left(x-\frac{x}{5}\right)}{4}+30=x$$

Encontremos el valor de x.

Sumando fracciones:

$$\frac{x}{5}+\frac{\frac{4}{5}x}{4}+30=x$$

Realizando la división de fracciones:

$$\frac{x}{5}+\frac{4x}{20}+30=x$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{4x+4x}{20}+30=x$$

$$\Rightarrow \frac{8}{20}x+30=x$$

Simplificando $\frac{8}{20}x$ *se tiene:*

$$\frac{2}{5}x+30=x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$\frac{2}{5}x+30-x=x-x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-\frac{3}{5}x+30=0$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -30 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-\frac{3}{5}x+30-30=0-30$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{5}x+0=-30$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Por lo tanto, la camioneta tenía 50 litros en su depósito al inicio del viaje.

■

En la cantina "mi oficina".

Un cantinero ha vendido de una cierta cantidad de vino a \$440 por litro, a \$520 por litro y el resto a \$340 por litro recaudándose en total \$11600. ¿Cuántos litros se han vendido?

Solución 1:

Sea la cantidad de vino en litros. El cantinero vende de la cantidad de vino a \$440, de la cantidad de vino a \$520 y el resto del vino a \$340.

Observe que las ganancias quedan expresadas como sigue:

Luego, se tiene:

Y como lo que recaudó es \$11600

Por lo tanto, se han vendido 26.58 litros.

$\blacksquare$

Solución 2:

Sea l la cantidad de litros vendidos por el cantinero. Como vendió $\frac{4}{11}$ de la cantidad de vino a \$440 entonces la ganancia se representa por:

$$\$440\left(\frac{4}{11}l\right)$$

Puesto que vendió $\frac{1}{3}$ de la cantidad de vino a \$520 se tiene que la ganancia se representa por:

$$\$520\left(\frac{1}{3}l\right)$$

Y finalmente, vendió el resto del vino a \$340 el litro.

Observe que el resto esta representado por la expresión:

$$l-\frac{4}{11}l-\frac{1}{3}l=\frac{10}{33}l$$

Y así la ganancia por el resto se representa por:

$$\$340\left(\frac{10}{33}l\right)$$

Como en total recaudó \$11600 tenemos que:

$$(440)\left(\frac{4}{11}l\right)+(520)\left(\frac{1}{3}l\right)+(340)\left(\frac{10}{33}l\right)=11600$$

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$\frac{1760}{11}l+\frac{520}{3}l+\frac{3400}{33}l=11600$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{3(1760l)+11(520l)+3400l}{33}=11600$$

$$\Rightarrow\frac{5280l+5760l+3400l}{33}=11600$$

$$\Rightarrow\frac{14400}{33}l=11600$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{33}{14400}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{33}{14400}\right)\frac{14400l}{33}=11600\left(\frac{33}{14400}\right)$$

Por lo tanto, se vendió 26.5 litros en total.

■

De sabrosos chocolates.

Una madre distribuye un paquete de chocolates entre sus tres hijos. Al primero le da la mitad de los chocolates más 2; al segundo la mitad de los que quedan más 2, y al tercero la mitad del resto más 2. Después de repartidos no le queda ningún chocolate. ¿Cuántos chocolates se han repartido?

Solución 1:

Sea el total de chocolates. Al primer niño le tocan la mitad de los chocolates más 2, es decir:

Observemos que entonces los que quedan son:

Luego, al segundo hijo le da la mitad de estos que quedan más 2; es decir:

Entonces los que quedan son:

Simplificando tenemos:

Así, los que restan después de haberle dado al segundo hijo son:

$$\frac{c-12}{4}$$

Finalmente, al tercer hijo le da la mitad de este resto más 2.

Es decir:

$$\frac{\frac{c-12}{4}}{2}+2=\frac{c-12}{8}+2$$

En resumen, lo que le toca a cada hijo se muestra en la tabla siguiente:

Hijo	Primero	Segundo	Tercero
Lo que le toca	$\frac{c}{2}+2$	$\frac{c-4}{4}+2$	$\frac{c-12}{8}+2$

Como no le quedó ningún chocolate, la suma de lo que les repartió da el total de chocolates del paquete.

Esto se representa por la ecuación:

$$\frac{c}{2}+2+\frac{c-4}{4}+2+\frac{c-12}{8}+2=c$$

Resolvamos esta ecuación.

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{c}{2}+2+\frac{c}{4}-1+2+\frac{c}{8}-\frac{12}{8}+2=c$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8}c+\frac{7}{2}=c$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-c$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-c+\frac{7}{8}c+\frac{7}{2}=c-c$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-\frac{1}{8}c+\frac{7}{2}=0$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{7}{2}$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{7}{2}-\frac{1}{8}c+\frac{7}{2}=0-\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}c=-\frac{7}{2}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -8 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-8)\left(-\frac{1}{8}c\right)=\left(-\frac{7}{2}\right)(-8)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{8}c = \frac{56}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c = 28$$

$$\Rightarrow c = 28$$

Por lo tanto, el total de chocolates es 28. ■

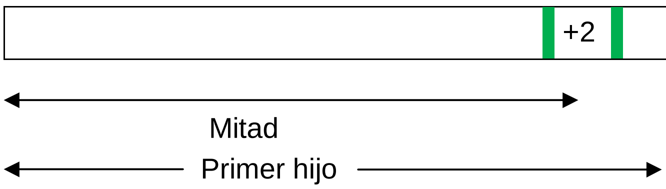
Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es como sigue:
El dibujo muestra el total de los chocolates:

DIBUJO 1

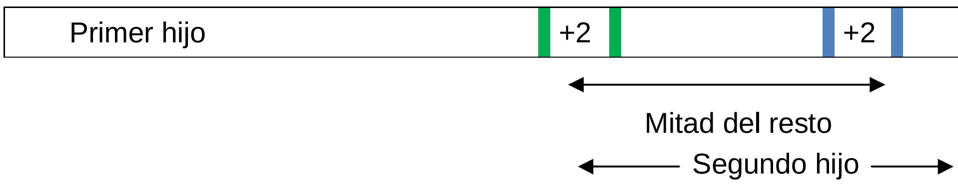
Al primer hijo le da la mitad de los chocolates más 2:

DIBUJO 2



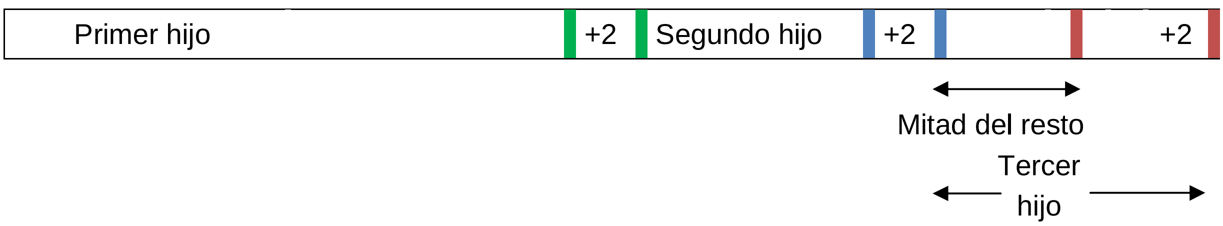
Al segundo hijo le da la mitad de los que quedan más 2:

DIBUJO 3



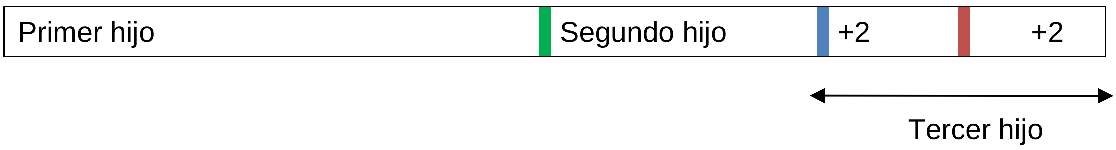
Y al tercer hijo le da la mitad de los que quedan más 2 y no le sobra ningún chocolate:

DIBUJO 4



Como al final no le quedó ningún chocolate y al tercer hijo le dio la mitad del último resto más 2 chocolates que sumados los otros 2 dan 4 y estos son los que le tocaron al tercer hijo.

DIBUJO 5

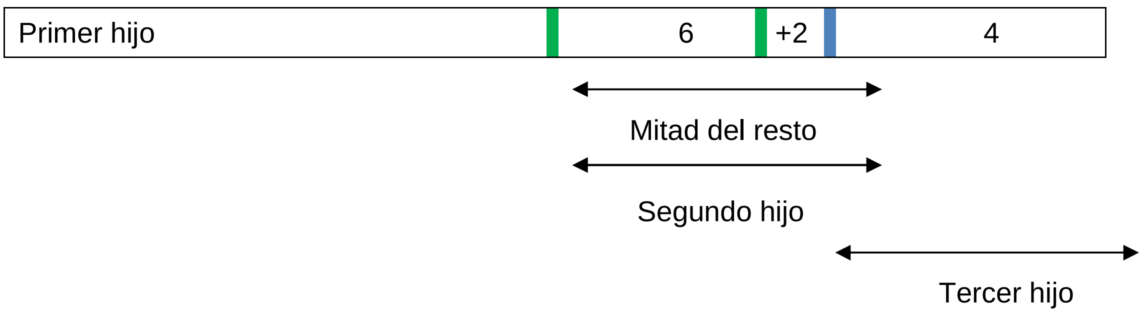


Es decir:

DIBUJO 6

Como al segundo hijo le dio la mitad más 2 de lo que le quedó después de repartirle al primer hijo, (ver dibujo 3). Entonces al segundo hijo le tocaron $8 = 6 + 2$ chocolates:

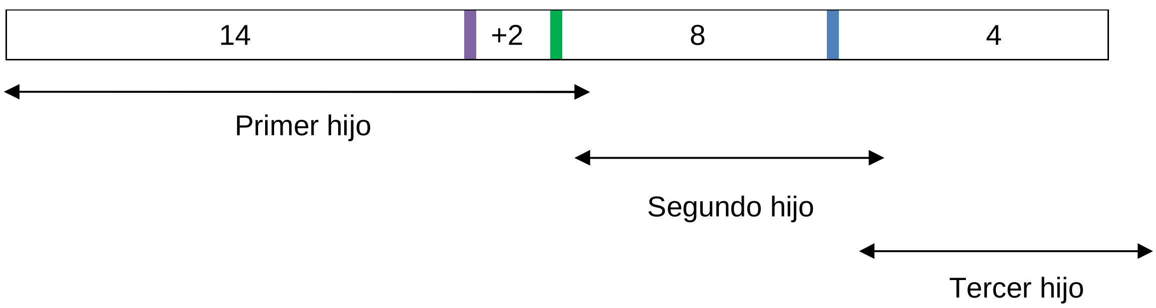
DIBUJO 7



Finalmente, al primer hijo le tocó la mitad más 2.

Ahora sabemos que esta mitad equivale a: $4 + 8 + 2 = 14$ chocolates.

DIBUJO 8



Así, al primer hijo le tocaron $14 + 2 = 16$ chocolates.
Por lo tanto, se repartieron $16 + 8 + 4 = 28$. Y se verifica que:
Al primer hijo le toca la mitad más 2 o sea: $\frac{28}{2} + 2 = 14 + 2 = 16$ y restan 12 $(28 - 16 = 12)$.
Al segundo hijo le toca la mitad del resto más 2: $\frac{12}{2} + 2 = 6 + 2 = 8$ y restan 4 $(12 - 8 = 4)$.
Al tercer hijo le toca la mitad del resto más 2 y no queda ningún chocolate:
$\frac{4}{2} + 2 = 2 + 2 = 4$.
■

Solución 3:
La mamá reparte x chocolates a sus 3 hijos.
Al primer hijo le toca la mitad del total de los chocolates más 2, o sea:

$$\frac{x}{2} + 2$$

Al segundo hijo le toca la mitad de los restantes más 2, o sea:

$$\frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{x}{2} + 2\right)\right) + 2$$

Y al tercer hijo le toca la mitad del resto más 2, o sea:

$$\frac{1}{2}\left\{x - \left[\left(\frac{x}{2} + 2\right) + \frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{x}{2} + 2\right)\right) + 2\right]\right\} + 2$$

Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{x}{2} + 2\right)\right) + 2 + \frac{1}{2}\left\{x - \left[\left(\frac{x}{2} + 2\right) + \frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{x}{2} + 2\right)\right) + 2\right]\right\} + 2 = x$$

Encontremos la x.
Cancelando los símbolos de agrupación (Propiedad distributiva):

$$\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{2} - 2\right) + 2 + \frac{1}{2}\left\{x - \left[\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{2} - 2\right) + 2\right]\right\} + 2 = x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2 + \frac{1}{2}\left\{x - \left[\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2\right]\right\} + 2 = x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{4}x - 1 + 2 + \frac{1}{2}\left\{x - \left[\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{4}x - 1 + 2\right]\right\} + 2 = x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{4}x - 1 + 2 + \frac{1}{2}\left\{x - \left[\frac{3}{4}x + 3\right]\right\} + 2 = x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+2+\frac{1}{4}x-1+2+\frac{1}{2}\left\{x-\frac{3}{4}x-3\right\}+2=x$$

Simplificando (Sumando de términos semejantes):

$$\frac{x}{2}+2+\frac{1}{4}x-1+2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}x-3\right\}+2=x$$

Cancelando las llaves (Propiedad distributiva):

$$\frac{x}{2}+2+\frac{1}{4}x-1+2+\frac{1}{8}x-\frac{3}{2}+2=x$$

Sumando términos semejantes:

$$\frac{x}{2}+2+\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{8}x-\frac{3}{2}+2=x$$

Sumando fracciones:

$$\frac{4x+2x+x}{8}+\frac{4+2-3+4}{2}=x$$

Simplificando:

$$\frac{7}{8}x+\frac{7}{2}=x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{7}{8}x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}x+\frac{7}{2}=x-\frac{7}{8}x$$

$$\Rightarrow 0+\frac{7}{2}=x-\frac{7}{8}x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{7}{2}=\frac{8x-7x}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}=\frac{1}{8}x$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 8 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(8)\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}x\right)(8)$$

$$\Rightarrow \frac{56}{2}=\frac{8}{8}x$$

$$\Rightarrow 1\cdot x=28$$

$$\Rightarrow x=28$$

Por lo tanto, los chocolates repartidos son 28.

Además, al primer hijo le tocaron 16 chocolates, al segundo hijo le tocaron 8 chocolates y al tercer hijo le tocaron 4 chocolates.

■

Una excursión prometedora.

Una octava parte de los alumnos de un curso no pueden ir a una excursión. Los $\frac{3}{5}$ de los que pensaban ir pierden el permiso de sus padres, y además, el día del viaje, pierden el camión $\frac{1}{21}$ de los que quedaban. Al final van a la excursión 80 alumnos. ¿Cuántos alumnos tenía el curso?

Solución 1:

Sea x el número de alumnos. Una octava parte de un curso no puede ir a una excursión. O sea, que los restantes si pueden ir; es decir:

$$\frac{7}{8}x$$

Los $\frac{3}{5}$ de los que pensaban ir pierden el permiso de sus padres. Esto significa que sólo van $\frac{2}{5}$ de los alumnos. Es decir, $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{8}x$.

Además, el día del viaje $\frac{1}{21}$ de los que quedan pierde el tren para ir. Luego, sólo van $\frac{20}{21}$ al viaje. Es decir, sólo van $\frac{20}{21}$ de los $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{8}x$. Como al final van a la excursión 80 alumnos tenemos la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{20}{21}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}x\right) = 80$$

Encontremos el valor de x.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$\left(\frac{40}{105}\right)\left(\frac{7}{8}x\right) = 80$$

$$\Rightarrow \frac{280}{840}x = 80$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{840}{280}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{840}{280}\right)\frac{280}{840}x = 80\left(\frac{840}{280}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{235200}{235200}x = \frac{67200}{280}$$

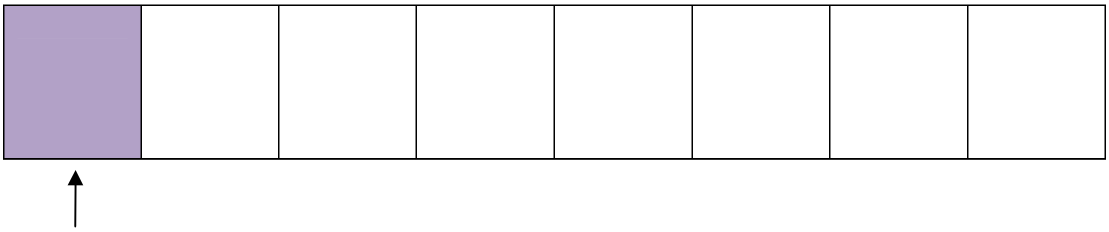
$$\Rightarrow 1 \cdot x = 240$$
$$\Rightarrow x = 240$$

Por lo tanto, el número de alumnos del curso son 240.
Podemos comprobar el resultado como sigue:
Los alumnos que no fueron a la excursión son $\frac{1}{8}x$.
Es decir $\frac{1}{8}(240) = 30$ alumnos. Luego, los alumnos que restan son:
$240 - 30 = 210$. Pero de estos no fueron $\frac{3}{5}$ es decir, $\frac{3}{5}(210) = 126$. Luego, restan $210 - 126 = 84$ y de estos no fueron a la excursión $\frac{1}{21}$, o sea, $\frac{1}{21}(84) = 4$ alumnos.
Por lo que el número de alumnos que no fueron al viaje son:
$30 + 126 + 4 = 160$ alumnos y los que si asistieron fueron los 80.

■

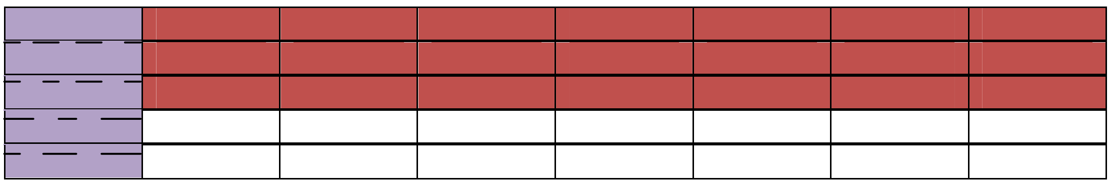
Solución 2:

Otra forma de resolver este problema, es usando gráficas.
Sea x la cantidad de alumnos que tenía el curso. El problema plantea que una octava parte de los alumnos no pueden ir a la excursión.
Esto lo representamos gráficamente como sigue:



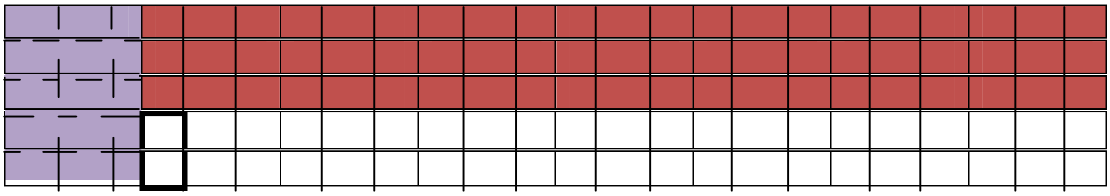
No pueden ir a la excursión.

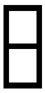
Observe que restan $\frac{7}{8}$. De estos, los $\frac{3}{5}$ pierden el permiso de sus padres.
Entonces dividiendo en 5 partes los $\frac{7}{8}$ y quitando los $\frac{3}{5}$, se tiene la representación siguiente:



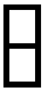
Donde lo sombreado de rojo representa los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{7}{8}$.

Además, el día del viaje, pierde el tren $\frac{1}{21}$ de los que quedan.
Luego, dividiendo los que quedan en 21 partes se tiene el dibujo siguiente:

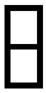


Note que la figura  representa $\frac{1}{21}$ de los que quedan.

Así que, es la que perdió el tren.
Y los que quedaron son 20 figuras como ésta:



Ahora, falta ver qué parte del total son estas 20 figuras.
Para esto, se observa que la figura completa tiene 60 figuras de estas:

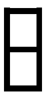


Esto significa que x equivale a estas 60 figuras. Así que las 20 figuras que quedan son una tercera parte de las 60. Es decir, las 20 figuras equivalen a $\frac{x}{3}$.
Como al final sólo van a la excursión 80 alumnos, estas 20 figuras representan a estos alumnos.
O sea:

$$\frac{x}{3} = 80$$

Por lo que $x = 3(80) = 240$.
Por lo tanto, el curso tenía 240 alumnos. ■

Observación. Con esta forma de resolución se puede conocer más del problema de forma sencilla. Por ejemplo, se sabe que cada figura:



Representa a 4 alumnos (porque 20 de ellas son los 80 alumnos).
Luego, cada figura del tipo □ representa a 2 alumnos.
Con esto, se sabe que la octava parte de los alumnos que no pueden ir a la excursión son 30 alumnos (son 15 □ figuras del tipo).

Los − que pierden el permiso son 126 alumnos (son 63 figuras del tipo □).

Y los que pierden el tren son 4 (2 figuras del tipo □).
Se verifica que: 30 + 126 + 4 = 160 los que no van y son 80 los que si van y
160 + 80 = 240 son los que tenía el curso.

La marca del zorro.

La longitud de paso de un conejo (distancia entre patas traseras y delanteras) es la tercera parte de la longitud de paso de un zorro, sin embargo el conejo da 5 pasos en el tiempo en que el zorro da tres. ¿El zorro alcanzará al conejo que se encuentra a 20 pasos (pasos del zorro) de distancia? Si la respuesta es afirmativa ¿Cuántos pasos realizará el zorro?

Solución 1:

Sean y las longitudes de los pasos del conejo y del zorro respectivamente.

Como la longitud del paso del conejo es la tercera parte de la longitud del paso del zorro se tiene que:

Si es el tiempo que el zorro da 3 pasos entonces cada tiempo el conejo se desplaza 5 pasos .

Por (1) se tiene que:

La diferencia en las distancias en un tiempo es:

Ahora, sea el número de intervalos de 3 pasos que da el zorro. Luego, el zorro alcanzará al conejo cuando la diferencia en las distancias multiplicada por sea o rebase los 20 pasos a los que se encuentra el zorro.

Es decir, cuando:

$$n\left(\frac{4}{3}z\right) \geq 20z$$

Resolvamos esta desigualdad.

Multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por 3 (Propiedad multiplicativa de la desigualdad) se tiene:

$$(3)n\left(\frac{4}{3}z\right) \geq 20z(3)$$

Realizando la multiplicación en ambos miembros de la desigualdad:

$$n4z \geq 60z$$

Multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{4z}$ *(Propiedad multiplicativa de la desigualdad):*

$$n \geq \frac{60z}{4z}$$

$$\Rightarrow n \geq 15$$

Así, $n = 15$ o sea, el número de intervalos de 3 pasos que da el zorro son 15.

Por lo tanto, el zorro alcanzará al conejo en exactamente $15 \times 3 = 45$ pasos.

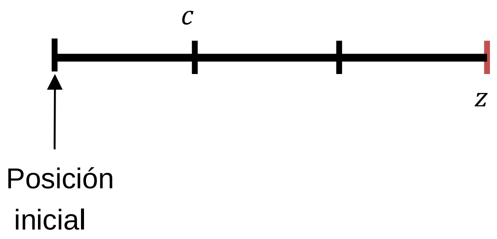
■

Solución 2:

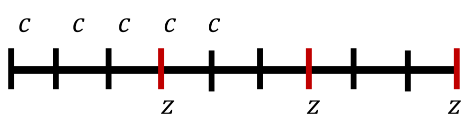
Otra forma de resolver este problema es utilizando un dibujo.

Sean c y z la longitud del paso del conejo y del zorro respectivamente.

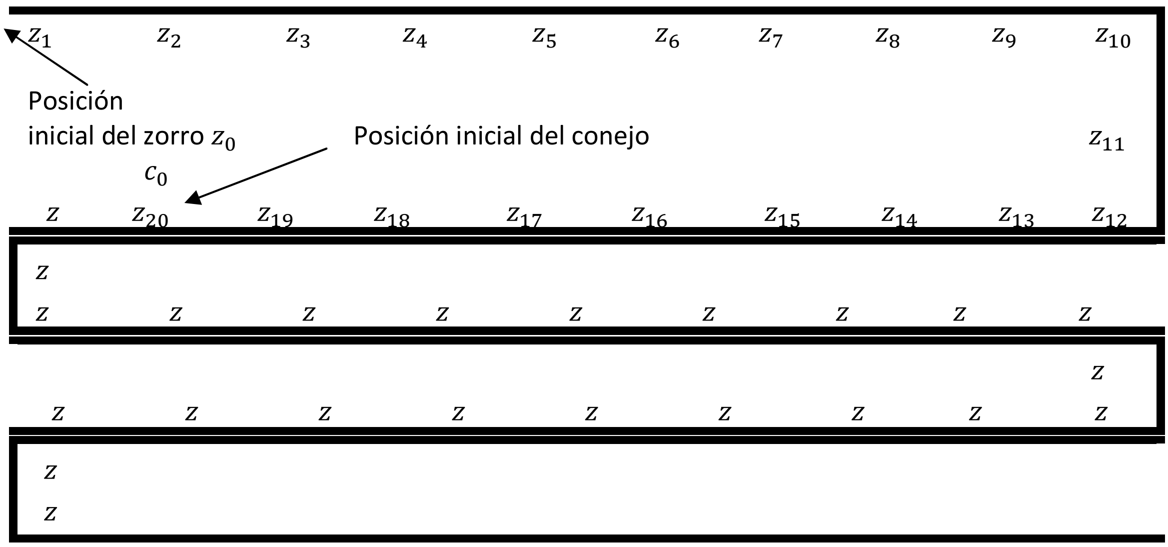
Primero observamos que $c = \frac{z}{3}$.



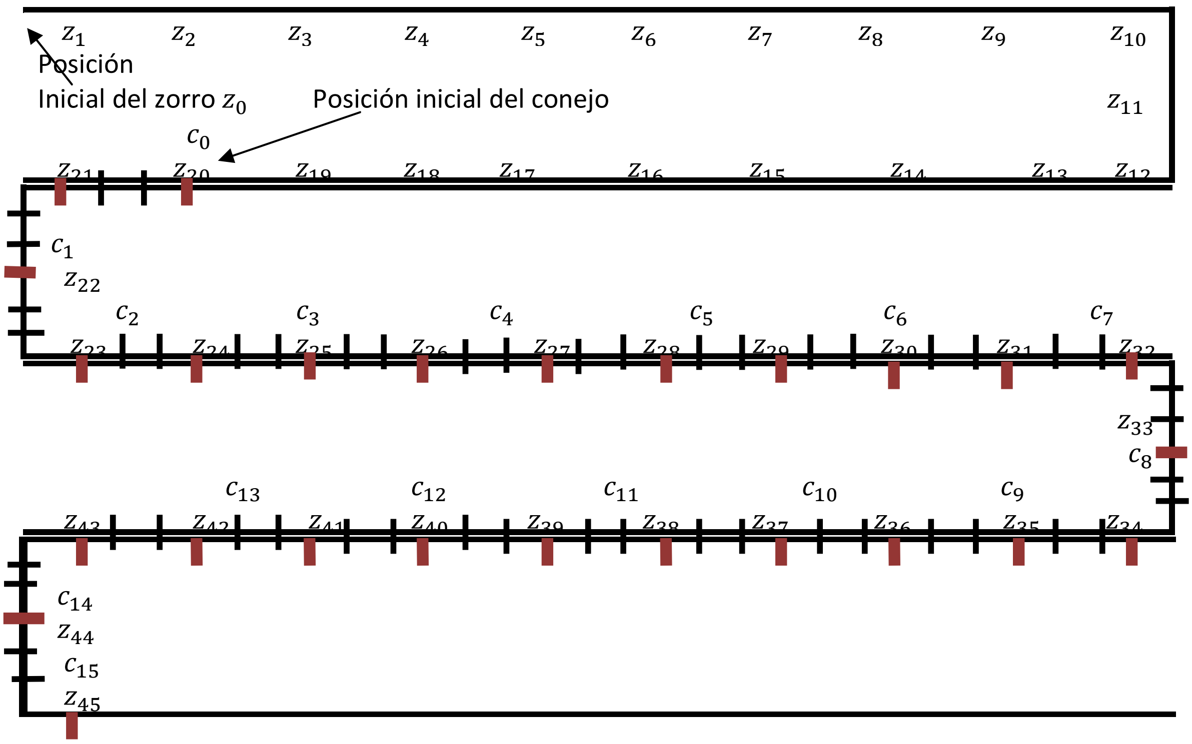
Cuando el conejo da 5 pasos el zorro da 3.



Por la hipótesis del problema, el siguiente dibujo muestra que el conejo está a 20 pasos del zorro:



Entonces la persecución comienza así; cuando el zorro da 3 pasos el conejo da 5 pasos:



Donde $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \dots \dots \dots \dots \dots, z_{45}$ denotan los pasos consecutivos que da el zorro y $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots \dots \dots \dots \dots, c_{15}$ son los pasitos que da el conejo. Observe que en el dibujo, la marca z_{42} rebasa la marca 13 del conejo c_{13}. Sin embargo, esto no significa que es el momento en que el zorro atrapa al conejo puesto que el zorro al desplazarse de z_{42} a z_{43}, el conejo hace lo propio de c_{13} a c_{14}.

Finalmente, tanto el zorro como el conejo, al desplazarse de z_{43} a z_{44} y de c_{14} a c_{15} respectivamente, el zorro ahora sí atrapa al conejo en $z_{45} = c_{15}$.

Por lo tanto, contando los pasos del zorro, este tiene que dar 45 pasos desde el inicio para atrapar al conejo.

■

Capítulo 3 Problemas con ecuación de segundo grado

En este capítulo exponemos una selección de problemas que implican el planteamiento de ecuaciones de segundo grado y su resolución mediante la fórmula general de segundo o mediante factorización. Además, se presentan otras soluciones para la mayoría de los problemas planteados en este capítulo usando otras técnicas no algebraicas.

Al igual que en el capítulo anterior, los problemas no están ordenados por grado de dificultad. Lo interesante es observar como problemas que se pueden resolver con el planteamiento de ecuaciones de segundo grado también se pueden resolver usando la técnica de ensayo y error, usando dibujos o por aritmética.

Cubos no tan mágicos.

Hallar dos números consecutivos, sabiendo que la diferencia de sus cubos es 397.

Solución 1:

Este problema puede ser resuelto por ensayo y error de la siguiente forma:

Primero, se proponen dos números consecutivos [ver 1.1.24] y se elevan al cubo. La diferencia de estos cubos tiene que ser igual a 397.

Por ejemplo, si los consecutivos son 9 y 10 entonces:

Si los consecutivos son 10 y 11 entonces:

Si los consecutivos son 11 y 12 entonces:

Por lo tanto, los números son: 11 y 12 ya que satisfacen la condición.

■

Solución 2:

Como se buscan dos números que sean consecutivos, llamemos al primer número y al segundo “ .

La diferencia de estos 2 números al cubo es 397, es decir:

$$(x+1)^3 - x^3 = 397$$

Resolviendo la ecuación, se tiene que:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 397$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3x^2 + 3x + 1 = 397$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -397 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$3x^2 + 3x + 1 - 397 = 397 - 397$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 396 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(3x^2 + 3x - 396)\left(\frac{1}{3}\right) = 0\left(\frac{1}{3}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2 + x - 132 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-132)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 23}{2}$$

$$\Rightarrow x = 11 \text{ y } x = -12$$

Por lo tanto, los números son: $x_1 = 11$ y $x_2 = 12$

Comprobando:

$$12^3 - 11^3 = 397$$

Pero también: $x = -11$ y $x = -12$ porque:

$$(-11^3) - (-12^3) = (-1331) - (-1728) = -1331 + 1728 = 397.$$

■

Observe que por ensayo y error no se consideran los números -11 y -12 como solución. Esto debe promover el uso del álgebra en el estudiante.

Solución 3:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

es por factorización.

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (5)] tenemos:

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18], se tiene que:

ó

Resolvamos la ecuación:

Sumando en ambos miembros de la igualdad 11 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Ahora, resolvamos la ecuación:

Sumando en ambos miembros de la igualdad -12 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Entonces las soluciones de la ecuación son y

Pero como se trata de dos números consecutivos si el otro número es 12 y si el otro número es -11.

Por lo tanto, los números consecutivos que satisfacen la condición son: y , y, y

■

Los tres son enteros.

Encontrar tres números enteros consecutivos, sabiendo que el cociente de su producto entre su suma es igual a 5.

Solución 1:

Una vez que se ha comprendido el problema se prueba por ensayo y error. Si se comienzan con los números 2, 3 y 4 se tiene:

$$\frac{2 \times 3 \times 4}{2+3+4} = \frac{24}{10} = 2.4$$

Ahora, si los números son: 3,4 y 5 entonces se tiene:

$$\frac{3 \times 4 \times 5}{3+4+5} = \frac{60}{12} = 5$$

Por lo tanto, los números son: 3, 4 y 5.

■

Solución 2:

Sean $x+1$, x y $x-1$ los tres números enteros consecutivos.

Luego, su producto es:

$$(x+1)(x)(x-1)$$

Su suma es:

$$(x+1)+(x)+(x-1)$$

Y el cociente de su producto entre su suma es:

$$\frac{(x+1)(x)(x-1)}{(x+1)+(x)+(x-1)}$$

Entonces, por las condiciones del problema tenemos:

$$\frac{(x+1)(x)(x-1)}{(x+1)+(x)+(x-1)} = 5 ------(1)$$

Resolvamos esta ecuación.

Realizando el producto en el numerador y la suma en el denominador, se tiene que:

$$\frac{(x^2-1)(x)}{3x} = 5$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $3x$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(3x)\left(\frac{(x^2-1)(x)}{3x}\right) = 5(3x)$$

$$\Rightarrow (x^2-1)x = 5(3x)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^3 - x = 15x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-15x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$x^3 - x - 15x = 15x - 15x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x^3 - 16x = 0$$

Factorizando por factor común [ver 1.2.17 (1)]:

$$x(x^2 - 16) = 0$$

Así, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

$$x = 0 \text{ ó } x^2 - 16 = 0$$

Luego, una solución de la ecuación es $x_1 = 0$

Resolvamos la ecuación $x^2 - 16 = 0$.

Sumando en ambos miembros de la igualdad 16 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2 - 16 + 16 = 0 + 16$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

Sacando raíz en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[2]{16}$$

$$x = \pm 4$$

Si $x = 4$ entonces $x + 1 = 5$ y $x - 1 = 3$

Por lo tanto, los números buscados son 3, 4 y 5.

Como $x^2 = 16$ tiene dos soluciones una positiva y otra negativa, así también es solución los números:

$$x_1 = -3, \; x_2 = -4, \; x_3 = -5$$

Observe que satisfacen la ecuación (1):

$$\frac{(5)(4)(3)}{5 + 4 + 3} = \frac{60}{12} = 5$$

y

$$\frac{(-5)(-4)(-3)}{-5 - 4 - 3} = \frac{-60}{-12} = 5$$

■

Solución 3:

Sean x, $(x + 1)$ y $(x + 2)$ los tres números buscados se tiene:

$$\frac{(x)(x + 1)(x + 2)}{x + x + 1 + x + 2} = 5$$

Simplificando:

$$\frac{(x)(x + 1)(x + 2)}{3x + 3} = 5$$

Factorizando por factor común $3x + 3$, *se tiene que:*

$$\frac{(x)(x+1)(x+2)}{3(x+1)} = 5$$

Dividiendo factores comunes:

$$\frac{(x)(x+2)}{3} = 5$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(3)\left(\frac{(x)(x+2)}{3}\right) = 5(3)$$

$$\Rightarrow (x)(x+2) = 15$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2 + 2x = 15$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -15 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2 + 2x - 15 = 15 - 15$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2^2) - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow x = -1 \pm 4$$

$$x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -5$$

Luego, tenemos los números $x_1 = 3$ y $x_2 = -5$ y como los números buscados son tres enteros consecutivos entonces se tiene:

i) Si $x = 3$ entonces los tres números consecutivos son 3, 4 y 5.

ii)Si $x = -5$ entonces los tres números consecutivos son -5, -4 y -3

Los cuales satisfacen la condición del problema:

$$\frac{(3)(4)(5)}{3+4+5} = \frac{60}{12} = 5$$

y

$$\frac{(-5)(-4)(-3)}{-5-4-3} = \frac{-60}{-12} = 5$$

■

Un número interesante.

Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 4224.

Solución 1:

Dado $k \in \mathbb{N}$, sean $2k$ y $2k+2$ dos números pares consecutivos [ver 1.1.26] tales que:

$$2k(2k+2) = 4224$$

Resolvamos esta ecuación.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$4k^2 + 4k = 4224$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 4 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{4}\right)(4k^2 + 4k) = (4224)\left(\frac{1}{4}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$k^2 + k = 1056$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -1056 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$k^2 + k - 1056 = 1056 - 1056$$

$$\Rightarrow k^2 + k - 1056 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1056)}}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4224}}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 \pm 65}{2}$$

$$\Rightarrow k_1 = 32 \text{ y } k_2 = -33$$

Luego, tenemos los números $k = 32$ y $k = -33$ y como los números buscados son de la forma: $2k$ y $2k+2$ donde, $k \in N$ entonces se tiene:

Si $k = 32$ entonces los pares son $2k = 2(32)$ =64 y $2k + 2 = 2(32) + 2 = 66$.

Los cuales satisfacen la condición de que el producto de ellos es igual a 4224 es decir:

Por lo tanto, los dos números pares consecutivos son:

64 y 66. ■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

es por factorización.

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)]:

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

ó

Resolvamos la ecuación:

Sumando en ambos miembros de la igualdad 32 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Ahora, resolvamos la ecuación:

Sumando en ambos miembros de la igualdad -33 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Entonces las soluciones de la ecuación son y

Por lo tanto, los dos números pares consecutivos son:

64 y 66. ■

Paciencia y progresión.

Hallar el valor de tres números enteros consecutivos, cuyos cuadrados sumen tanto como el producto del mayor por 12, más 5.

Solución 1:

Sean $x,\ x+1$ y $x+2$ los tres enteros consecutivos.

Por el problema, la suma de sus cuadrados debe ser el producto del mayor por 12 más 5:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=12(x+2)+5$$

Resolvamos esta ecuación para hallar el valor de x.

Desarrollando el cuadrado de los binomios del miembro izquierdo de la igualdad y el producto en el miembro derecho de la igualdad, se tiene que:

$$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=12x+24+5$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3x^2+6x+5=12x+29$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-12x-29$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$3x^2+6x+5-12x-29=12x+29-12x-29$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3x^2+6x-24=0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x-24)=0(3)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2-2x-8=0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-8)}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm 6}{2}$$

$$x=1\pm 3$$

$$x_1=4 \text{ y } x_2=-2$$

Luego, se tienen los siguientes casos:

i)Si $x=4$ entonces los números consecutivos son: 4, 5 y 6.

ii)Si $x=-2$ entonces los números consecutivos son: -2, -1 y 0

Veamos ahora si i) y ii) satisfacen la ecuación dada al inicio del problema:

Sean los números 4, 5 y 6, tenemos:

$$(4^2)+(5^2)+(6^2)=12(6)+5$$
$$\Rightarrow 16+25+36=72+5$$
$$\Rightarrow 77=77$$
Ahora sean los números -2, -1 y 0, tenemos:
$$(-2^2)+(-1^2)+(0^2)=12(0)+5$$
$$\Rightarrow 4+1+0=0+5$$
$$\Rightarrow 5=5$$
Por lo tanto, los números consecutivos son: 4, 5 y 6 y -2, -1 y 0, ya que satisfacen las condiciones del problema.

■

Solución 2:
Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:
$$x^2-2x-8=0$$
es por factorización.
Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)]:
$$(x-4)(x+2)=0$$
Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18], se tiene que:
$$\Rightarrow (x-4)=0 \text{ ó } (x+2)=0$$
Resolvamos la ecuación:
$$x-4=0$$
Sumando en ambos miembros de la igualdad 4 (Propiedad aditiva de la igualdad):
$$x-4+4=0+4$$
$$\Rightarrow x-0=0+4$$
$$\Rightarrow x=4$$
Resolvamos la ecuación:
$$x+2=0$$
Sumando en ambos miembros de la igualdad -2 (Propiedad aditiva de la igualdad):
$$x+2-2=0-2$$
$$\Rightarrow x+0=-2$$
$$\Rightarrow x=-2$$
Entonces las soluciones de la ecuación $x^2-2x-8=0$ son $x=4$ y $x=-2$
Por lo tanto, los números consecutivos son: 4, 5 y 6 y -2, -1 y 0 ya que satisfacen las condiciones del problema.

■

Sumando fracciones.

Hallar una fracción de denominador 13 que al sumarla con su inversa se obtenga $\frac{194}{65}$.

Solución:

Sea $\frac{x}{y}$ la fracción. Como el denominador es 13 su expresión es $\frac{x}{13}$. Luego, el inverso de $\frac{x}{13}$ es $\frac{13}{x}$ y al sumarlos da como resultado $\frac{194}{65}$.

Y la suma de esta fracción con su inversa es:

$$\frac{x}{13}+\frac{13}{x}$$

Según el problema tenemos:

$$\frac{x}{13}+\frac{13}{x}=\frac{194}{65}$$

Resolvamos esta ecuación.

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{x^2+13^2}{13x}=\frac{194}{65}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $13x$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(13x)\left(\frac{x^2+13^2}{13x}\right)=\left(\frac{194}{65}\right)(13x)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2+13^2=\frac{2522}{65}x$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 65 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(65)(x^2+13^2)=\left(\frac{2522}{65}x\right)(65)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$65x^2+10985=2522x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-2522x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$65x^2-2522x+10985=2522x-2522x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

y

Por lo tanto, los valores son y .

Y además satisface las condiciones del problema:

Si entonces:

y

Si entonces:

■

Observación: Esta ecuación es muy difícil resolverla por factorización, pues como se ve, las soluciones no son números enteros.

¿Que número soy?

Un alumno debe sumar 1 a un número, restar de 4 el número dado y multiplicar los resultados. Por error suma 4 al número, resta 1 de dicho número y multiplica los resultados, con lo que ¡oh casualidad! obtiene lo mismo que si no se hubiera equivocado. Hallar ese numerito.

Solución 1:

El número buscado lo denotamos como x. A x se le suma 1 o sea $(x+1)$. Por otra parte se le resta a 4 el número x, o sea $(4-x)$ y se multiplican los resultados.

Es decir:

$$(x+1)(4-x).$$

Pero por error suma 4 a x, o sea $(4+x)$ y resta 1 a x, o sea $(x-1)$. Luego, multiplica los resultados.

Es decir:

$$(4+x)(x-1).$$

Y por casualidad obtiene lo mismo si no se hubiera equivocado:

Esto nos lleva a plantear:

$$(x+1)(4-x)=(4+x)(x-1)$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

Realizando la multiplicación de binomios en ambos miembros de la igualdad:

$$4x+4-x^2-x=x^2+4x-x-4$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3x+4-x^2=x^2+3x-4$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-x^2-3x+4$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$3x+4-x^2-x^2-3x+4=x^2+3x-4-x^2-3x+4$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-2x^2+8=0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-2x^2+8)=0\,(-1)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2x^2-8=0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2-8)=0\left(\frac{1}{2}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2-4=0$$

$$\Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x=\pm 2$$

Entonces los números buscados son:

$$x = \pm 2$$

Y además se satisface:

$$(x+1)(4-x) = (4+x)(x-1)$$

Veamos, sustituyendo el valor de $x = 2$, tenemos:

$$(2+1)(4-2) = (4+2)(2-1)$$
$$\Rightarrow (3)(2) = (6)(1)$$
$$\Rightarrow 6 = 6$$

Sustituyendo el valor de $x = -2$, tenemos:

$$(-2+1)(4-(-2)) = (4-2)(-2-1)$$
$$\Rightarrow (-1)(6) = (2)(-3)$$
$$\Rightarrow -6 = -6$$

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$x^2 - 4 = 0$$

es por factorización.

Factorizando por diferencia de cuadrados [ver 1.2.17 (2)]:

$$(x+2)(x-2) = 0$$

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18], se tiene que:

$$x + 2 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación $x + 2 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -2 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x + 2 - 2 = 0 - 2$$
$$\Rightarrow x = -2$$

Resolviendo la ecuación $x - 2 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 2 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$
$$\Rightarrow x = 2$$

Por lo tanto, los números buscados son:

$$x = \pm 2$$

■

Solución 3:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

es utilizando la fórmula general de segundo grado.

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

y

Entonces los números buscados son:

Y además se satisface:

Veamos, sustituyendo el valor de , tenemos:

Sustituyendo el valor de , tenemos:

■

Inocente edad.

Si a la tercera parte de la edad de un niño se le suman dos años, se obtiene un número que equivale a 9 veces el recíproco del que expresa su edad. ¿Cuántos años tiene?

Sugerencia:

Recordar, al alumno cual es el reciproco de un número con ejemplos: el reciproco de 3 es $\frac{1}{3}$, el reciproco de 20 es $\frac{1}{20}$, etc.

Solución 1:

Sea x la edad del niño. Si la tercera parte de la edad del niño se le suman 2 años esto será igual a 9 veces el recíproco de la edad.

Es decir:

$$\frac{x}{3}+2=9\left(\frac{1}{x}\right)$$

Resolvamos esta ecuación.

Realizando operaciones en ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{x+6}{3}=\frac{9}{x}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(3)\left(\frac{x+6}{3}\right)=\left(\frac{9}{x}\right)(3)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x+6=\frac{27}{x}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por x *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(x)(x+6)=\left(\frac{27}{x}\right)(x)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2+6x=27$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -27 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2+6x-27=27-27$$

$$\Rightarrow x^2+6x-27=0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-27)}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{144}}{2}$$

y

Pero como se trata de una edad, esta no puede ser negativa.
Por lo tanto, la edad del niño es 3 años.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

es por factorización.

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)]:

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18]:

ó

Resolviendo la ecuación

Sumando en ambos miembros de la igualdad 3 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Resolviendo la ecuación

Sumando en ambos miembros de la igualdad -9 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Entonces las soluciones de la ecuación son y .

Pero como se trata de una edad, esta no puede ser negativa. Por lo tanto, la edad del niño es 3 años.

■

Un abuelo muy inteligente.

Un abuelo dice: "multiplicando mi edad por su cuarta y su sexta parte y dividiendo el producto por los – de la misma hallaréis 243 años". ¿Cuál es la edad del abuelo?

Solución 1:

Sea x la edad del abuelo. La cuarta y sexta parte de la edad del abuelo la representamos por $\frac{x}{4}$ y $\frac{x}{6}$ respectivamente.

Multiplicando estas partes por la edad del abuelo y dividiendo esto por $\frac{8}{9}$ de la edad del abuelo se tiene 243 años:

$$\frac{x\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{6}\right)}{\frac{8}{9}x}=243$$

Resolvamos esta ecuación.

Realizando la multiplicación del numerador en el miembro izquierdo de la igualdad:

$$\frac{\frac{x^3}{24}}{\frac{8}{9}x}=243$$

Realizando la división de fracciones en el miembro izquierdo de la igualdad:

$$\frac{9x^3}{192x}=243$$

Simplificando la fracción del miembro izquierdo de la igualdad:

$$\frac{9x^2}{192}=243$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 192 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(192)\frac{9x^2}{192}=243(192)$$

Eliminando paréntesis:

$$9x^2=46656$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -46656 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$9x^2-46656=46656-46656$$

$$\Rightarrow 9x^2-46656=0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 9 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{9}\right)(9x^2-46656)=0\left(\frac{1}{9}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2-5184=0$$

$$\Rightarrow x^2=5184$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5184}$$
$$\Rightarrow x = \pm 72$$

Pero como se trata de una edad, esta no puede ser negativa.

Por lo tanto, la edad del abuelo es de 72 años.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$x^2 - 5184 = 0$$

es por factorización.

Factorizando por diferencia de cuadrados tenemos [ver 1.2.17 (2)]:

$$(x-72)(x+72) = 0$$

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18]:

$$(x-72) = 0 \ \text{ ó } \ (x+72) = 0$$

Resolviendo la ecuación $x - 72 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 72 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 72 + 72 = 0 + 72$$
$$\Rightarrow x = 72$$

Resolviendo la ecuación $x + 72 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -72 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x + 972 - 72 = 0 - 72$$
$$\Rightarrow x = -72$$

Así, los números buscados son:

$$x = \pm 72$$

Pero como se trata de una edad, esta no puede ser negativa.

Por lo tanto, la edad del abuelo es de 72 años.

■

Solución 3:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$x^2 - 5184 = 0$$

es utilizando la fórmula general de segundo grado.

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4(1)(-5184)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{20736}}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pm 144}{2}$$

Así, los números buscados son:

$$x = \pm 72$$

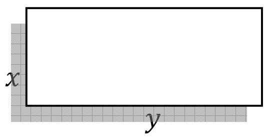
Pero como se trata de una edad, esta no puede ser negativa.

Por lo tanto, la edad del abuelo es de 72 años.

■

¿Será rectángulo?

Encontrar las dimensiones del rectángulo con perímetro de 5 metros y área de 1 metro cuadrado.



Solución 1:

Sean x y y las longitudes del largo y ancho del rectángulo respectivamente.

El perímetro del rectángulo es:

$$2x + 2y = 5 - - - - - - - - -(1)$$

Por otra parte, el área del rectángulo se expresa por:

$$xy$$

Luego, según el enunciado:

$$xy = 1m^2 - - - - - - - - -(2)$$

Despejando x de (2):

$x = \frac{1}{y} - - - - - - - -$ (3) Esto se vale porque $y \neq 0$

Sustituyendo x de (3) en (1):

$$2\left(\frac{1}{y}\right) + 2y = 5$$
$$\Rightarrow \frac{2}{y} + 2y = 5$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por y *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(y)\left(\frac{2}{y}+2y\right)=5(y)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2+2y^2=5y$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-5y$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-5y+2+2y^2=5y-5y$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$2y^2-5y+2=0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$y=\frac{5\pm\sqrt{-5^2-4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow y_1=2 \text{ y } y_2=\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{2}$$

Sustituyendo $y=2$ en (2):

$$x=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo $y=\frac{1}{2}$ en (2):

$$x=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}$$

$$x=2$$

Por lo tanto, las longitudes del rectángulo son: 2 y $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{2}$ y 2

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$2y^2-5y+2=0$$

es por factorización.

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)], se tiene:

$$(1y-2)(2y-1)=0$$

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18]:

$$(y-2)=0 \text{ ó } (2y-1)=0$$

Resolvamos la ecuación $y-2=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 2 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$y-2+2=0+2$$
$$\Rightarrow y=2$$

Ahora resolvamos la ecuación $2y-1=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 1 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$2y-1+1=0+1$$
$$\Rightarrow 2y+0=0+1$$
$$\Rightarrow 2y=1$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2y)=1\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{2}{2}y=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 1\cdot y=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Así, la solución de la ecuación $2y^2-5y+2=0$ es $y=2$ y $y=\frac{1}{2}$.

Sustituyendo $y=\frac{1}{2}$ en (2), tenemos:

$$x=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Sustituyendo $y=2$ en (2), tenemos:

$$x=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, las longitudes del rectángulo son: 2 y $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{2}$ y 2.

■

Aumento de área.

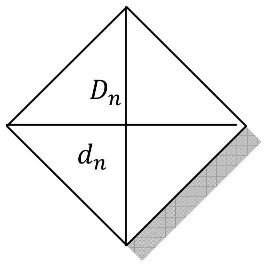
> **Se tiene un rombo cuyas diagonales miden 18 y 12 m. ¿Qué longitud igual deberíamos añadir a cada una de ellas de modo que la superficie del nuevo rombo sea el doble que la del primero?**

Solución 1:

Sean D y d la longitud de la diagonal mayor y menor del rombo, respectivamente. Entonces:

$$D_n = 18 + x$$
$$d_n = 12 + x$$

Donde D_n y d_n son las longitudes de las diagonales del nuevo rombo.



La fórmula para encontrar el área de un rombo es $A = \frac{D \times d}{2}$ [1.3.14].

Luego, el área del primer rombo es:

$$\frac{18 \times 12}{2} = \frac{216}{2} = 108$$

Como se quiere saber que cantidad se debe sumar a un nuevo rombo tal que su área sea el doble del primero.

Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{(18 + x)(12 + x)}{2} = 216$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{(18 + x)(12 + x)}{2}\right)(2) = (216)(2)$$

$$\Rightarrow (18 + x)(12 + x) = 432$$

Realizando la multiplicación de binomios del miembro izquierdo:

$$216 + 12x + 18x + x^2 = 432$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -432 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-432 + 216 + 12x + 18x + x^2 = 432 - 432$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x^2 + 30x - 216 = 0$$

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)]:

$$(x - 6)(x + 36) = 0$$

Luego, por propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

$$x-6=0 \text{ ó } x+36=0$$

Resolvamos la ecuación $x-6=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 6 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x-6+6=0+6$$
$$\Rightarrow x+0=0+6$$
$$\Rightarrow x=6$$

Ahora resolvamos la ecuación $x+36=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -36 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x+36-36=0-36$$
$$x=-36$$

Así, las soluciones de la ecuación $2y^2-5y+2=0$ son $x=6$ y $x=-36$

Por lo tanto, el número que se debe sumar es 6. Note que el valor negativo de x , o sea $x=-36$, nos daría longitudes negativas y esto no puede ser.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$x^2+30x-216=0$$

es utilizando la fórmula general de segundo grado.

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x=\frac{-30\pm\sqrt{(30^2)-4(1)(-216)}}{2(1)}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-30\pm\sqrt{900+864}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-30\pm\sqrt{1764}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-30\pm 42}{2}$$
$$x_1=6 \text{ y } x_2=-36$$

Por lo tanto, el número que se debe sumar es 6. Note que el valor negativo de x , o sea $x=-36$, nos daría longitudes negativas y esto no puede ser.

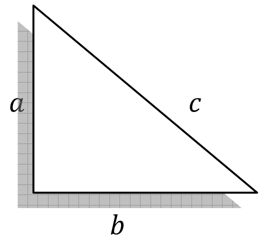
■

Un triángulo famoso.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo es $8m$ mayor que el cateto pequeño y $1m$ mayor que el cateto grande. Hallar los lados de ese triángulo.

Solución 1:

Considérese el siguiente triángulo rectángulo [ver 1.3.3].



Y sean a el cateto menor, b el cateto mayor y c la hipotenusa.

Como la hipotenusa es $8m$ mayor que el cateto pequeño se tiene:

$$c = a + 8 - - - - - - - - -(1)$$

Y además es un metro mayor que el grande, o sea:

$$c = b + 1$$

Por lo que:

$$c - 1 = b - - - - - - - - -(2)$$

Ahora, sustituyendo c de (1) en (2) tenemos:

$$a + 8 - 1 = b$$

$$\Rightarrow a + 7 = b - - - - - - - - (3)$$

Por el Teorema de Pitágoras [ver 1.3.4] se sabe que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - - - - - - - - (4)$$

Sustituyendo c de (1) y b de (3) en (4) tenemos:

$$(a + 8)^2 = (a)^2 + (a + 7)^2$$

Resolvamos esta ecuación.

Desarrollando los binomios al cuadrado de ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$a^2 + 16a + 64 = a^2 + a^2 + 14a + 49$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$a^2 + 16a + 64 = 2a^2 + 14a + 49$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-2a^2 - 14a - 49$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$a^2 + 16a + 64 - 2a^2 - 14a - 49 = 2a^2 + 14a + 49 - 2a^2 - 14a - 49$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-a^2 + 2a + 15 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-a^2 + 2a + 15)(-1) = 0(-1)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = 5 \quad y \ a_2 = -3$$

Pero como se trata de medidas y estas no pueden ser negativas entonces los valores de los lados del triángulo son:

$$a = 5, \ b = a + 7 = 5 + 7 = 12 \ \text{ y } \ c = a + 8 = 5 + 8 = 13$$

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación obtenida en la solución anterior:

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

es por factorización.

Factorizando el trinomio [ver 1.2.17 (4)] tenemos:

$$(a - 5)(a + 3) = 0$$

Luego, por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene:

$$(a - 5) = 0 \ \text{ ó } \ (a + 3) = 0$$

Resolvamos la ecuación $a - 5 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 5 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$a - 5 + 5 = 0 + 5$$

$$\Rightarrow a = 5$$

Ahora resolvamos la ecuación $a + 3 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -3 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$a + 3 - 3 = 0 - 3$$

$$a = -3$$

Entonces las soluciones de la ecuación $2a^2 - 2a - 15 = 0$ son $a = 5$ y $a = -3$

Pero como se trata de medidas y estas no pueden ser negativas entonces los valores de los lados del triangulo son:

y

Y además satisface:

■

Hábil vendedor.

Un almacenista compra 11 sillas a $350 cada una. Se estropean un cierto número de ellas por lo que para no perder dinero vende cada una de las restantes aumentando el precio de venta en tantas veces $50 como sillas se han roto. Hallar el número de sillas estropeadas.

Solución 1:

Sea el número de sillas estropeadas. Luego, el número de sillas en buen estado es:

.

Se tienen 11 sillas y se pagó $350 por cada una, es decir:

.

Luego, $3850 se pagó por 11 sillas.

Para no perder dinero de lo gastado en la compra de las sillas decide aumentar su precio de cada una en $50 más por cada silla defectuosa.

Entonces:

Resolvamos esta ecuación.

Realizando la multiplicación de binomios:

Sumando en ambos miembros de la igualdad -3850 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(200x - 50x^2) = 0(-1)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$50x^2 - 200x = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 50 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{50}\right)(50x^2 - 200x) = 0\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

Factorizando por factor común [ver 1.2.17 (1)]:

$$x(x-4) = 0$$

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.218] se tiene que:

$$x = 0 \text{ ó } x - 4 = 0$$

Luego, una solución de la ecuación es $x_1 = 0$

Resolvamos la ecuación $x - 4 = 0$.

Sumando en ambos miembros de la igualdad 4 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Así, las dos soluciones de la ecuación $x^2 - 4x = 0$ son $x = 0$ y $x = 4$.

Luego, si $x = 0$ entonces esto significa que no hubo sillas estropeadas pero el problema plantea que si las hubo entonces la solución al problema es $x = 4$.

■

Solución 2:

Al inicio se tiene: $Sillas \times Precio = 11 \times \$350 = \$3850$

Número de sillas dañadas	Número de sillas en buen estado	Nuevo precio por cada silla	Dinero ganado
1	10	$(10)(350 + 1(50))$	$4000
2	9	$(9)(350 + 2(50))$	$4050
3	8	$(8)(350 + 3(50))$	$4000
4	7	$(7)(350 + 4(50))$	$3850

Como se observa no se pierde dinero ya que la cantidad que se invirtió es la misma que se obtuvo al final al aumentar el precio de cada silla.

Por lo tanto, el número de sillas rotas son 4 y las 7 sillas restantes se venden a $550 cada una.

■

Capítulo 4 Problemas con sistema de ecuaciones

En este capítulo exhibimos una serie de problemas que pueden ser resueltos a través del planteamiento de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Incluso algunos implican un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al igual que en los capítulos anteriores, algunos problemas se pueden resolver usando técnicas de aritmética. Al ser problemas que se pueden resolver usando un sistema de ecuaciones, aquí presentamos al menos una forma de resolverlo, ya sea por el método de sustitución, o por el método de determinantes, pero es bien sabido que también se pueden resolver por los demás métodos (Igualación, Suma o resta, Regla de Cramer o Gráfico) [ver 1.2.20, 1.2.21, 1.2.22 y 1.2.23].

Curiosa propiedad.

Descomponer el número 48 en dos partes, tales que dividiendo una por la otra se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.

Solución 1:

Sean a y b las partes que descomponen al 48.

Es decir:

$$a + b = 48 - - - - - - - - - - - -(1)$$

La división de a por b para obtener 3 de cociente y 4 del resto [ver 1.1.21] es:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline b & a \\ & 4 \end{array}$$

Esto significa que:

$$a = 3b + 4 \ - - - - - - - - - - - -(2)$$

Despejando b *de (1) tenemos:*

$$b = 48 - a - - - - - - - - - - - -(3)$$

Sustituyendo b *de (3) en (2) tenemos:*

$$a = 3(48 - a) + 4$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$a = 144 - 3a + 4$$

$$\Rightarrow a = 148 - 3a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $3a$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$3a + a = 148 - 3a + 3a$$

$$\Rightarrow 3a + a = 148 + 0$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$4a = 148$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 4 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{4}\right)(4a) = 148\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4}a = \frac{148}{4}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot a = 37$$

$$\Rightarrow a = 37$$

Ahora sustituyendo $a = 37$ *en (3):*

$$b = 48 - 37$$

$$\Rightarrow b = 11$$

Por lo tanto, $a = 37$ y $b = 11$.

Observe que estos números cumplen:

$$a + b = 48$$

$$\Rightarrow 37 + 11 = 48$$

Y además:

$$37 = 3(11) + 4$$

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es por medio de una tabla como a continuación se presenta, donde x y y son las partes que descomponen al 48:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36

Luego, dividiendo x entre y se busca que resulte 3 de cociente y 4 de resto.

Por lo tanto, los números son: 37 y 11

Porque:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;3\;} \\ 11 & 37 \\ & \;4 \end{array}$$

■

Observación: Este sistema de ecuaciones también se puede resolver por los métodos conocidos como el de igualación, suma y resta, reducción y determinantes [1.2.20, 1.2.21, 1.2.22 y 1.2.23].

Práctica de fracciones.

La razón de dos números es –. Si se suman 10 unidades a cada uno de ellos la razón de los nuevos números es — ¿Cuáles son esos números?

Solución 1:

Como la razón de dos números es – , en la lista siguiente mostramos números cuya razón es también –:

– — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Ahora, como tanto el numerador como al denominador le tenemos que sumar 10 unidades para obtener una razón de — entonces los números que dan esta razón deben ser tales que el numerador sea un múltiplo de 11 y el denominador un múltiplo de 14.

En la lista observamos que el — al sumarle 10 unidades tanto al numerador como al denominador tenemos:

——— —

Aquí, el numerador si es múltiplo de 11 pero el denominador no es múltiplo de 14.

Probamos con el —. Sumando 10, “arriba y abajo”:

——— —

Veamos que ahora el denominador si es múltiplo de 14 pero el numerador no es múltiplo de 11. Continuando de esta manera, vemos que el $\frac{45}{60}$ al sumarle 10 "arriba y abajo":

$$\frac{45+10}{60+10}=\frac{55}{70}$$

Y 55 si es múltiplo de 11 y el 70 si es múltiplo del 14.

Por lo tanto, los números buscados son 45 y 60.

■

Observación. Esta forma de encontrar la solución no es contundente para los ojos de un matemático pues se puede pensar que no cubre todas las posibilidades. Sin embargo, cuando los estudiantes lo intentan de esta forma y hallan la solución, se les debe aceptar como válida explicándoles que no siempre es bueno su método. La solución siguiente muestra un método más eficaz.

Solución 2:

Sean x y y los dos números buscados. La razón $\frac{x}{y}$ es igual a $\frac{3}{4}$. Esto se expresa como:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$$

Ó equivalentemente:

$$x=\frac{3}{4}y------------(1)$$

Ahora, a cada número se le aumenta 10 unidades y su razón es $\frac{11}{14}$.

Es decir:

$$\frac{x+10}{y+10}=\frac{11}{14}-----------(2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de sustitución [ver 4.2.30].

Sustituimos x *de (1) en (2) se tiene:*

$$\frac{\frac{3}{4}y+10}{y+10}=\frac{11}{14}$$

Realizando la suma del numerador:

$$\frac{\frac{3y+40}{4}}{y+10}=\frac{11}{14}$$

Realizando la división de fracciones:

$$\frac{3y+40}{4(y+10)}=\frac{11}{14}$$

Eliminando paréntesis en el denominador (Propiedad distributiva):

$$\frac{3y+40}{4y+40}=\frac{11}{14}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $4y+40$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(4y+40)\left(\frac{3y+40}{4y+40}\right)=\frac{11}{14}(4y+40)$$

$$\Rightarrow 3y+40=\frac{11(4y+40)}{14}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 14 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$14(3y+40)=\left(\frac{11(4y+40)}{14}\right)(14)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$42y+560=44y+440$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-42y$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-42y+42y+560=44y+440-42y$$

$$\Rightarrow 0+560=2y+440$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$560=2y+440$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -440 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-440+560=2y+440-440$$

$$\Rightarrow -440+560=2y+0$$

$$\Rightarrow 120=2y$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)120=2y\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{120}{2}=\frac{2}{2}y$$

$$\Rightarrow 1\cdot y=60$$

$$\Rightarrow y=60$$

Ahora sustituyendo $y=60$ en (1):

– ___

Por lo tanto, y

Comprobación:

— es un múltiplo de – y además —— — es decir — es un múltiplo de —.

■

La suma da 56.

La suma de dos números es 56, y la diferencia de sus cuadrados es 448. Hallarlos.

Solución 1:

Sean los dos números cuya suma es 56 y resta es 448.

Es decir:

Despejando de (1):

Resolvamos el sistema de ecuaciones (2) y (3).

Sustituyendo de (3) en (2):

Desarrollando el binomio al cuadrado:

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -3136 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por —— (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(-\frac{1}{112}\right)(-112y) = (-2688)\left(-\frac{1}{112}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{112}{112}y = \frac{2688}{112}$$
$$\Rightarrow 1 \cdot y = 24$$
$$\Rightarrow y = 24$$

Sustituyendo $y = 24$ *en (3):*

$$x = 56 - 24$$
$$\Rightarrow x = 32$$

Por lo tanto, los dos números son 32 y 24.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es la siguiente.

De la solución 1 se tiene que:

$$x + y = 56 - - - - - - - - - - - - (1)$$
$$x^2 - y^2 = 448 - - - - - - - - - - (2)$$

Otra manera de expresar (2) es factorizando la diferencia de cuadrados [ver 1.2.17 (2)]:

$$(x + y)(x - y) = 448 - - - - - - - (3)$$

Sustituyendo $x + y$ *de (1) en (3):*

$$56(x - y) = 448$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$56x - 56y = 448$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 56 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{56}\right)(56x - 56y) = 448\left(\frac{1}{56}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x - y = 8 - - - - - - - - - - - - - - - (4)$$

Sumando (1) y (4):

$$\begin{array}{c} x + y = 56 \\ \underline{x - y = 8} \\ 2x = 64 \end{array}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Sustituyendo en (1):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -32 (Propiedad aditiva de la igualdad):

Por lo tanto, los dos números son 32 y 24.

■

Tratando con fracciones.

Hallar dos números cuya suma sea 18 y la de sus inversos sea —.

Solución 1:

Sean y los números buscados cuya suma es 18 y la suma de sus inversos es —.

Es decir:

Despejando de (1):

Resolvamos el sistema de ecuaciones (2) y (3).

Sustituyendo en (2):

Sumando fracciones:

$$\frac{18-x+x}{x(18-x)}=\frac{9}{40}$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$\frac{18}{18x-x^2}=\frac{9}{40}$$

Aplicando la regla de los productos cruzados:

$$(40)(18)=(9)(18x-x^2)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$720=162x-9x^2$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -720 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-720+720=162x-9x^2-720$$
$$\Rightarrow 0=162x-9x^2-720$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $-\frac{1}{9}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(-\frac{1}{9}\right)0=(162x-9x^2-720)\left(-\frac{1}{9}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2-18x+80=0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x=\frac{18\pm\sqrt{(18)^2-4(1)(80)}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{324-320}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{4}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{18\pm 2}{2}$$
$$\Rightarrow x=9\pm 1$$
$$\Rightarrow x_1=10,\qquad x_2=8$$

Sustituyendo $x_1=10,\ x_2=8$ en $y=18-x$, tenemos dos casos:

i)Si $x=10,$ entonces $y=18-10=8$

ii) Si $x=8$, entonces $y=18-8=10$

Por lo tanto, en cualquier caso los números son 10 y 8.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es la siguiente.

De la solución 1 se tiene el sistema:

$$x + y = 18 ----------- (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{40} ----------- (2)$$

Sumando las fracciones en (2):

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{9}{40} ----------- (3)$$

Sustituyendo $x + y$ *de (1) en (3):*

$$\frac{18}{xy} = \frac{9}{40}$$

Se sigue por la regla de los productos cruzados:

$$(18)(40) = 9xy$$

$$\Rightarrow 720 = 9xy$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 9 *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{9}\right)720 = 9xy\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{9}xy = \frac{720}{9}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot xy = 80$$

$$\Rightarrow xy = 80$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de y *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{1}{y}\right)(xy) = 80\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y}x = \frac{80}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{y} ----------- (4)$$

Sustituyendo (4) en (1):

$$\frac{80}{y} + y = 18$$

Sumando fracciones:

$$\frac{80+y^2}{y}=18$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por y *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$y\left(\frac{80+y^2}{y}\right)=18y$$

$$\Rightarrow 80+y^2=18y$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-18y$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-18y+80+y^2=18y-18y$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$y^2-18y+80=0$$

Factorizando por trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)]:

$$(y-10)(y-8)=0$$

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

$$y-10=0 \;\; ó \;\; y-8=0$$

Resolvamos la ecuación $y-10=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 10 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$y-10+10=0+10$$

$$\Rightarrow y=10$$

Ahora resolvamos la ecuación $y-8=0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 8 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$y-8+8=0+8$$

$$\Rightarrow y=8$$

Entonces las soluciones de la ecuación $y^2-18y+80=0$ son $y=10$ y $y=8$.

Si $y=10$ *sustituyendo en (1):*

$$x+10=18$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -10 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-10+x+10=18-10$$

$$\Rightarrow x=8$$

Si $y=8$ *sustituyendo en (1):*

$$x+8=18$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 8 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-8+x+8=18-8$$

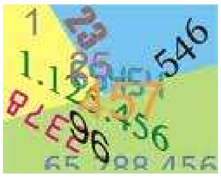
$$\Rightarrow x=10$$

Por lo tanto, en cualquier caso los números son 10 y 8.

■

Cifras invertidas y algo más.

Hallar un número de tres cifras divisible por 11, tal que la suma de sus cifras sea 10, y la diferencia entre dicho número y el obtenido invirtiendo el orden de sus cifras sea 297.



Solución 1:

Realizando una lista de todos los números de 3 cifras múltiplos de 11 tenemos:

Múltiplo de 11	Suma de sus dígitos	Múltiplo de 11	Suma de sus dígitos	Múltiplo de 11	Suma de sus dígitos
110	2	407	11	704	11
121	4	418	13	715	13
132	6	429	15	726	15
143	8	440	8	737	17
154	10	451	10	748	19
165	12	462	12	759	21
176	14	473	14	770	14
187	16	484	16	781	16
198	18	495	18	792	18
209	11	506	11	803	11
220	4	517	13	814	13
231	6	528	15	825	15
242	8	539	17	836	17
253	10	550	10	847	19
264	12	561	12	858	21
275	14	572	14	869	23
286	16	583	16	880	16
297	18	594	18	891	18
308	11	605	11	902	11
319	13	616	13	913	13
330	6	627	15	924	15

341	8	638	17	935	17
352	10	649	18	946	19
363	12	660	12	957	21
374	14	671	14	968	23
385	16	682	16	979	25
396	18	693	18	990	18

En ella encontramos que aquellos números cuyas cifras suman 10 son los siguientes:

$$154, 253, 352, 451 \text{ y } 550$$

Ahora debemos ver que cada uno de estos al invertir el orden de sus cifras, y haciendo la diferencia con dicho número sea 297.

$$352 - 253 = 99, \;\; 451 - 154 = 297, \;\; 550 - 055 = 495$$

y

$$253 - 352 = -99, \; 154 - 451 = -297, \; 055 - 550 = -495.$$

Luego, el número buscado es 451.

■

Solución 2:

Sean x, y, z las cifras del número buscado.

Ahora, la expresión de su suma es:

$$x + y + z = 10 - - - - - - - - -(1)$$

Por otro lado, un número de tres cifras x, y,z en su expresión decimal lo podemos representar así:

$$100x + 10y + z - - - - - - - - -(i)$$

Luego, el número obtenido al invertir las cifras se escribe así:

$$100z + 10y + x - - - - - - - - -(ii)$$

Continuando con el problema tenemos que la diferencia de (i) con (ii) es 297.

Es decir:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 297$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$100x - 100z + z - x = 297$$

$$\Rightarrow 99x - 99z = 297$$

Factorizando por factor común [1.2.17 (1)]:

$$99(x - z) = 297$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 99 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{99}\right)[99(x-z)] = (297)\left(\frac{1}{99}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{99}{99}(x-z) = \frac{297}{99}$$

$$x - z = 3 - - - - - - - - - - -(2)$$

Por el criterio de divisibilidad del 11 se sabe que la diferencia entre la suma de las cifras de posición impar y la suma de las cifras de posición par debe ser cero o múltiplo de 11 [ver 1.1.23]. (En el número xyz, las cifras de posición impar son x, z y la cifra de posición par es y.)

Es decir:

$(x+z) - y = 11k$, donde $k = 0,1,2,\ldots$

Pero como $x + y + z = 10 - - - - - - - - (1)$ y x, y, z son positivos se tiene que:

$$x + y - z < 10$$

Esto implica que $k \neq 1,2,3,\ldots$

Luego, $k = 0$ por lo que se tiene:

$$x + z - y = 0 - - - - - - - - - (3)$$

Sumando (1) y (3):

$$\begin{array}{c} x + z - y = 0 \\ \underline{x + z + y = 10} \\ 2x + 2z = 10 \end{array}$$

De esta forma, tenemos un sistema de 3 ecuaciones ((1), (2), (3)) con 3 incógnitas (x, y, z).

Una forma de resolverlo es sumando (1) y (3):

$$(x + y + z) + (x + z - y) = 10 + 0$$

Eliminando paréntesis:

$$x + y + z + x + z - y = 10$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$2x + 2z = 10$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2x + 2z) = 10\left(\frac{1}{2}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x + z = 5 - - - - - - - - - (4)$$

Ahora sumando (2) con (4) se tiene:

$$(x - z) + (x + z) = 3 + 5$$

Eliminando paréntesis:

$$x - z + x + z = 3 + 5$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$2x = 8$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x = 4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Ahora, sustituyendo $x = 4$ *en (2):*

$$4 - z = 3$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -4 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$4 - z - 4 = 3 - 1$$

$$\Rightarrow -z = -1$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-z) = (-1)(-1)$$

$$\Rightarrow z = 1$$

Finalmente, sustituyendo los valores de $x = 4$ y $z = 1$ *en (1):*

$$4 + y + 1 = 10$$

Es decir:

$$5 + y = 10$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -5 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$5 + y - 5 = 10 - 5$$

$$\Rightarrow y = 5$$

Por lo tanto, el número buscado xyz es 451.

■

Solución 3:

De la solución 2, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = 10 - - - - - - - - -(1)$$

$$x - z = 3 - - - - - - - - - - -(2)$$

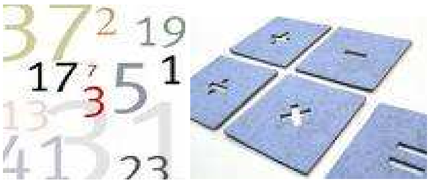
$$x - y + z = 0 - - - - - - - - -(3)$$

Resolviendo por Regla de Cramer [ver 1.2.23 y 1.2.24]:

Por lo tanto, el número buscado es 451. ■

Curiosos números invertidos.

Hallar un número de tres cifras, sabiendo que éstas suman 9; la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos y que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de las cifras, la diferencia es 198.



Solución 1:

Para resolver este problema primero recordemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{La suma de dos números pares es par [ver 1.1.25].}\\ \qquad\qquad\qquad \text{y}\\ \text{la suma de dos impares también es par [ver 1.1.27 y 1.1.25].}\end{array}\right\}(*)$$

Sean u, d y c las cifras de las unidades, decenas y centenas, respectivamente del número buscado.

Por las condiciones del problema, notamos que el número de 3 cifras que se busca debe tener las siguientes características.

1. La suma de sus cifras debe ser 9. Por lo tanto, no todas sus cifras pueden ser pares (si lo fueran, su suma no podría ser 9).
2. Como la cifra de las decenas d, es media aritmética [ver 1.1.33] de las otras dos (la de las unidades y la de las centenas), es decir, $d = \frac{u+c}{2}$ entonces la suma de las unidades y de las centenas debe ser par, o sea $u + c$ debe ser par puesto que si $u + c$ fuera impar entonces al dividir entre 2 no se obtendría un número entero para las decenas.
3. Ahora, para que la suma de las unidades y las centenas sea par se debe tener que ambas sean pares o ambas impares $(*)$.

A partir de esto, podemos primero hacer una lista de números que cumplan con las características (1) y (3):

$$135, 153, 117, 315, 351, 513, 531, 711, 252, 234, 216, 414, 432, 612.$$

Ahora, de las anteriores buscamos aquellas que cumplan con las características (2).

Luego, los que cumplen son:

$$135, 531, 234 \text{ y } 432$$

Pues por ejemplo, del 135, la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos:

$$3 = \frac{1+5}{2}$$

Finalmente, uno de estos números debe cumplir la última condición del problema:

Si del número encontrado se resta el que resulta de invertir el orden de las cifras, la diferencia es 198.

Por lo que si el 531 lo invertimos queda el 135 y su diferencia es $531 - 135 = 396$

Y si el 432 lo invertimos queda el número 234 y su diferencia son 198.

Por lo tanto, el número buscado es 432.

■

Solución 2:

Sean x, y, z las tres cifras de un número cuya suma es 9.

Es decir:

$$x + y + z = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

El número de tres cifras x, y, z lo podemos representar también así:

$$100x + 10y + z$$

Como la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos se tiene:

$$y = \frac{x + z}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Y además el número obtenido de 3 cifras menos este mismo número invirtiéndolo es igual a 198.

Luego:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 198 \ldots(3)$$

Teniendo estas 3 ecuaciones podemos resolver el problema.

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$x + \frac{x + z}{2} + z = 9$$

Sumando fracciones:

$$\frac{2x + x + z + 2z}{2} = 9$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{3x + 3z}{2} = 9$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 9 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(2)\left(\frac{3x + 3z}{2}\right) = 9(2)$$

$$\Rightarrow 3x + 3z = 18$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3x + 3z) = 18\left(\frac{1}{3}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x + z = 6$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-z$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-z + x + z = 6 - z$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x = 6 - z$$

Sustituyendo este valor de x *en (3):*

$$(100(6 - z) + 10y + z) - (100z + 10y + (6 - z)) = 198$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$600 - 100z + 10y + z - 100z - 10y - 6 + z = 198$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$594 - 198z = 198$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 198 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{198}\right)(594 - 198z) = 198\left(\frac{1}{198}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$3 - z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 3 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-3 + 3 - z = 1 - 3$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-z = -2$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-z) = (-2)(-1)$$

$$\Rightarrow z = 2$$

Sustituyendo $z = 2$ *en (4):*

$$x = 6 - 2$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Sustituyendo $x = 4$ y $z = 2$ *en (2):*

$$y = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow y = 3$$

Por lo tanto, el número buscado es 432 y además satisface $432 - 234 = 198$.

■

Solución 3:

De la solución 2, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = 9 - - - - - - - - - - - (1)$$

$$y = \frac{x + z}{2} - - - - - - - - - - - - (2)$$

$$x - z = 2 - - - - - - - - - - - - - (3)$$

Resolviendo por Regla de Cramer [ver 1.2.23 y 1.2.24]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2) - 1(-1-1) + 1(2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 9(2) - 1(-2) + 1(4) = 18 + 2 + 4 = 24$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2) - 9(-1-1) + 1(2) = -2 + 18 + 2 = 18$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - 1(2) + 9(2) = -4 - 2 + 18 = 12$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{24}{6} = 4,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3$$

y $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$.

Por lo tanto, el número de tres cifras xyz buscado es 432.

■

Múltiplos de 7.

Hallar una fracción equivalente a $\frac{6}{11}$ tal que la diferencia del denominador con el numerador sea múltiplo de 7.

Solución 1:

Dado que el problema plantea encontrar una fracción equivalente a — hacemos una lista de los primeros números equivalentes a —.

— — — — — — —

Y ahora, de entre ellos, buscamos cual cumple la condición de que el denominador menos el numerador sea un múltiplo de 7:

i. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y no es un múltiplo de 7.
ii. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y no es un múltiplo de 7.
iii. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y no es un múltiplo de 7.
iv. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y no es un múltiplo de 7.
v. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y no es un múltiplo de 7.
vi. De la fracción —, el denominador menos el numerador es , y si es un múltiplo de 7

Por lo tanto, la fracción equivalente a — es — ya que cumple con las condiciones del problema.

■

Solución 2:

Sea – una fracción equivalente a — .

Es decir:

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{11} - - - - - - - - - - - (1)$$

Como la diferencia del denominador con el numerador es múltiplo de 7 se tiene:

$$y - x = 7k - - - - - - - - - (2)$$

donde $k \in \mathbb{N}$**.**

De la ecuación (1) por la regla de los productos cruzados se tiene que:

$$11x = 6y$$

Es decir:

$$11x - 6y = 0 - - - - - - - - - (3)$$

De la ecuación (2) despejamos y:

$$y = 7k + x - - - - - - - - - - (4)$$

Sustituyendo este valor en (3) se sigue que:

$$11x - 6(7k + x) = 0$$

Resolvamos esta ecuación para x:

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$11x - 42k - 6x = 0$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$5x - 42k = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{5}\right)(5x - 42k) = 0\left(\frac{1}{5}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x - \frac{42}{5}k = 0$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $\frac{42}{5}k$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$\frac{42}{5}k + x - \frac{42}{5}k = 0 + \frac{42}{5}k$$

$$\Rightarrow 0 + x = 0 + \frac{42}{5}k$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x = \frac{42}{5}k$$

Sustituyendo este valor de x *en (4):*

$$y = 7k + \frac{42}{5}k$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

———

Simplificando (Suma de términos semejantes):

—

Como y deben ser enteros el valor de debe ser 5 para que y sean enteros. Por lo tanto, la fracción equivalente a — es —.

■

Observación: Como tenemos un sistema de ecuaciones el profesor puede resolverlo por el método que este enseñando ó por el que crea conveniente.

Buscando una fracción.

> **Hallar una fracción tal que si al numerador se le suma 1 su valor es –, y si ésta unidad se le agrega al denominador su valor es –.**

Solución 1:

Este problema puede ser resuelto satisfactoriamente con estrategias propias de la aritmética.

Para que se cumpla la primera condición primero hacemos una lista de las fracciones equivalentes a –:

– – — — —

Luego, las fracciones correspondientes antes de sumarle 1 al denominador son:

– – — — —

Por otra parte, para que se cumpla la segunda condición mostramos una lista de las fracciones equivalentes a –:

– — — — — —

Así la fracción correspondiente antes de sumarle 1 al denominador son:

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}, \frac{5}{19}, \frac{6}{23}, \frac{7}{27}, \dots$$

Observe que la fracción común en ambas listas antes de sumarle 1 al numerador o al denominador es $\frac{4}{15}$.

Por lo tanto, está es la fracción buscada.

■

Solución 2:

La fracción buscada la denotaremos como $\frac{x}{y}$. Ahora, si a esta fracción, al numerador se le suma 1, esta nueva fracción es igual a $\frac{1}{3}$.

Es decir:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} - - - - - - - - - - - -(1)$$

Por otra parte, si a la fracción $\frac{x}{y}$ se le suma 1 al denominador es igual a $\frac{1}{4}$.

Es decir:

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} - - - - - - - - - - - -(2)$$

Teniendo estas 2 ecuaciones se puede resolver el problema.

Despejando x *en (2):*

$$x = \frac{1}{4}(y+1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{4} - - - - - - - - - -(3)$$

Sustituyendo x *de (3) en (1):*

$$\frac{\frac{y+1}{4}+1}{y} = \frac{1}{3}$$

Sumando fracciones en el numerador:

$$\frac{\frac{y+1+4}{4}}{y} = \frac{1}{3}$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{\frac{y+5}{4}}{y} = \frac{1}{3}$$

Dividiendo fracciones:

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Eliminando paréntesis:

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 3 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

Sumando en ambos miembros de la igualdad (Propiedad aditiva de la igualdad):

Simplificando (Suma de términos semejantes):

Sustituyendo este valor de en (3):

Por lo tanto, la fracción buscada es y además satisface el problema.

Observe que:

es un múltiplo de

y

es un múltiplo de

■

Empresario listo.

> **En una fábrica trabajan 50 obreros entre hombres y niños, de los cuales los niños están en mayor número. Entre todos cobran diariamente $1050. A cada hombre se le pagan tantos pesos como niños hay, y a cada niño tantos pesos como hombres hay ¿Cuántos hombres y niños trabajan en la fábrica?**

Solución 1:

Sean h el número de hombres y n el número de niños.

De acuerdo al problema se tienen las condiciones siguientes:

(1) $n > h$

(2) h ganan n cantidad de dinero, es decir, que los hombres ganan hn pesos.

(3) n ganan h cantidad de dinero, es decir, que los niños ganan nh pesos.

(4) $n + h = 50$

(5) $nh + hn = \$1050$

De (5) tenemos que $2nh = \$1050$ ó $2hn = \$1050$.

Esto significa que:

(6) $nh = \frac{\$1050}{2} = \$525$ ó $hn = \frac{\$1050}{2} = \$525$.

Luego, se tiene que buscar dos números uno mayor que el otro que sumados den 50 (condición (4)) y multiplicados $525 (condición (6)).

Para esto, se piensa en dos números cuyas unidades sumadas terminen en cero y multiplicadas terminen en 5.

Revisando, los números que sumados terminan en 0 son:

9 y 1, 8 y 2, 7 y 3, 6 y 4, 5 y 5.

Para éstos, los únicos que multiplicados terminan en 5 son 5 y 5.

Hasta aquí sabemos que los números buscados deben terminar en 5 ambos.

Como la suma de ellos deben ser 50 y como terminan en 5 ya llevamos 10.

Luego, sus decenas deben sumar 40.

Por ejemplo 20 + 20. En este caso, los números serían 25 y 25. Pero por la condición (1) no se puede.

Entonces ensayamos con el 15 y 35. Terminan en 5 y sus decenas suman 40.

Además, $15 + 35 = 50$ y $15 \times 35 = 525$ ó $35 \times 15 = 525$. Luego, se cumple (6).

Y como $n > h$ (ver (1)) tenemos que $n = 35$ y $h = 15$.

Por lo tanto, el número de hombres es 15 y el de niños es 35

■

Solución 2:

Denotando $h = hombres$ y $n = niños$ se tiene:

$$n > h$$

$h\ ganan\ n$ cantidad de dinero

$n\ ganan\ h$ cantidad de dinero

Entre todos cobran diariamente $1050 se tiene:

$$n(h) + h(n) = 1050$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2hn = 1050$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2hn) = (1050)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2}hn = \frac{1050}{2}$$

$$\Rightarrow hn = 525 - - - - - - - - -(1)$$

Por otro lado se tiene:

$$h + n = 50 - - - - - - - - -(2)$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (1) y (2):

Despejando h *en (2), se tiene:*

$$h = 50 - n$$

Sustituyendo este valor de h *en (1):*

$$(50 - n)n = 525$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$50n - n^2 = 525$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -525 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$50n - n^2 - 525 = 525 - 525$$

$$\Rightarrow 50n - n^2 - 525 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(50n - n^2 - 525) = 0(-1)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$n^2 - 50n + 525 = 0$$

Resolviendo por factorización.

Factorizando por trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)]:

$$(n - 35)(n - 15) = 0$$

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tienen que:

$$n - 35 = 0 \;\; ó \;\; n - 15 = 0$$

Resolvamos la ecuación $n - 35 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 35 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$n - 35 + 35 = 0 + 35$$

$$\Rightarrow n = 35$$

Ahora resolvamos la ecuación $n - 15 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 15 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$n - 15 + 15 = 0 + 15$$

$$\Rightarrow n = 15$$

Entonces las soluciones de la ecuación $n^2 - 50n + 525 = 0$ son $n = 35$ y $n = 15$ y como $n > h$ entonces $n = 35$.

Luego, sustituyendo $n = 35$ en (1):

$$h = \frac{525}{35}$$

$$\Rightarrow h = 15$$

Por lo tanto, los niños son 35 y los hombres 15.

■

Solución 3:

Se tiene que entre hombres y niños son 50 obreros, en total todos cobran diariamente $1050.

Denotando x como el número de niños, tenemos $niños = x$ y el número de hombres es $hombres = 50 - x$, pero como a los niños se les pagan tantos pesos como hombres hay.

Así:

$$(50 - x) = Es\ el\ dinero\ que\ gana\ cada\ niño$$

Y a los hombres se les pagan tantos pesos como niños hay entonces:

$$x = Es\ el\ dinero\ que\ gana\ cada\ hombre$$

Luego, se tiene:

$$x(50 - x) + (50 - x)x = 1050$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$50x - x^2 + 50x - x^2 = 1050$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-2x^2 + 100x = 1050$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -1050 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-2x^2 + 100x - 1050 = 1050 - 1050$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 100x - 1050 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-2x^2 + 100x - 1050) = 0(-1)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$2x^2 - 100x + 1050 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 100x + 1050) = 0\left(\frac{1}{2}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x^2 - 50x + 525 = 0$$

Resolviendo por factorización.

Factorizando por trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)]:

$$(x - 35)(x - 15) = 0$$

Por la propiedad del producto nulo [ver 12.18] se tienen que:

$$x - 35 = 0 \ \text{ó} \ \ x - 15 = 0$$

Resolvamos la ecuación $x - 35 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 35 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 35 + 35 = 0 + 35$$

$$\Rightarrow x = 35$$

Ahora resolvamos la ecuación $x - 15 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 15 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 15 + 15 = 0 + 15$$

$$\Rightarrow x = 15$$

Entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 50x + 525 = 0$ son $x = 35$ y $x = 15$

Como en la solución 2 se tiene, que $n > h$.

Si $n = 35$.

Sustituyendo este valor de n *en:*

$$(50 - x)$$

$$\Rightarrow 50 - 35 = 15$$

$$\Rightarrow h = 15.$$

■

Solución 4:

Sean h y n la cantidad de hombres y niños respectivamente. Luego, $h + n = 50$ es el total de trabajadores.

Por otro lado se tiene:

$$hx + ny = \$1050 - - - - - - - (1)$$

Donde x es la cantidad de dinero que ganan los hombres y y es la cantidad de dinero que ganan los niños.

También se tiene que los hombres ganan x pesos pero esto es igual al total de niños, es decir:

$$h \Rightarrow x = n ----------(2)$$

Y la cantidad de y pesos que ganan los niños es igual al total de hombres.

O sea:

$$n \Rightarrow y = h ----------(3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$$hn + nh = 1050 -------- (4)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$h + n = 50 ----------(i)$$

$$hn + nh = 1050 --------(ii)$$

De (ii) se sigue que:

$$2hn = 1050$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2hn) = 1050\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{1050}{2n}$$

$$\Rightarrow h = \frac{525}{n} ----------(5)$$

Sustituyendo (5) en (i) *se tiene:*

$$\frac{525}{n} + n = 50$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{525 + n^2}{n} = 50$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por n *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(n)\left(\frac{525 + n^2}{n}\right) = 50(n)$$

$$\Rightarrow 525 + n^2 = 50n$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-50n$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-50n + 525 + n^2 = 50n - 50n$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$n^2 - 50n + 525 = 0 ----------(6)$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

Luego, las soluciones de la ecuación cuadrática (6) son:

y .

Como el número de niños es mayor que el de hombres se tiene que:

Sustituyendo en (5):

Por lo tanto, en la fábrica trabajan 15 hombres y 35 niños entre todos suman 50 obreros.

Note que:

Cada hombre cobra $35 y como son 15 niños en total ganan:

y

Cada niño cobra $15 y son 35 hombres, en total ganan:

Por lo tanto:

■

Una deuda complicada.

> **Entre 15 amigos han de pagar una deuda de $1380. Como algunos no tienen dinero, cada uno de los restantes han pagado $23 más de lo que les correspondía. ¿Cuántos son los amigos que no tienen dinero?**

Solución 1:

El dinero que tienen que pagar los 15 amigos es \$1380, o sea, cada uno tiene que pagar:

$$\frac{\$1380}{15} = \$92$$

Pero como hay algunos que no tienen dinero, los que si lo tienen pagarán \$23 más para cubrir el total de la deuda. Si todos pagaran \$23 más entonces cada uno pagaría:

$$\$92 + \$23 = \$115$$

Y dividiendo \$1380 entre \$115 tendríamos:

$$\frac{\$1380}{\$115} = 12$$

Y esto significa que con 12 personas se puede pagar el total de la deuda aportando cada uno de ellos \$115.

Por lo tanto, los amigos que no tienen dinero son $15 - 12 = 3$.

■

Solución 2:

Sea a el número de amigos que no cuentan con dinero. Luego, $(15 - a)$ representa el número de amigos que si tienen dinero. Como se tiene que pagar \$1380 entonces la cantidad a aportar por los que si tienen dinero se expresa por $\frac{1380}{15-a}$.

Pero esta cantidad es igual a lo que tenían que pagar los 15 amigos $\left(\frac{1380}{15}\right)$ más \$23. Esto es:

$$\frac{1380}{15 - a} = \frac{1380}{15} + 23$$

$$\Rightarrow \frac{1380}{15 - a} = 92 + 23$$

$$\Rightarrow \frac{1380}{15 - a} = 115$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $15 - a$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$(15 - a)\left(\frac{1380}{15 - a}\right) = 115(15 - a)$$

$$\Rightarrow 1380 = 1725 - 115a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -1380 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-1380 + 1380 = 1725 - 115a - 1380$$

$$\Rightarrow 0 = 345 - 115a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $115a$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$115a + 0 = 345 - 115a + 115a$$

$$\Rightarrow 115a + 0 = 345 + 0$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$115a = 345$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 115 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{115}\right)115a = 345\left(\frac{1}{115}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{115}{115}a = \frac{345}{115}$$

$$\Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow 1 \cdot a = 3$$

Por lo tanto, los que no tienen dinero son 3.

■

Solución 3:

Este problema trata de 15 amigos y hay 2 grupos, los que tienen dinero denotado por x y los que no tiene dinero denotado por y.

Entonces:

$$x + y = 15 - - - - - - - - - - - -(1)$$

La deuda es de $1380 y es pagada por los 15 amigos. Además cada amigo pagará $23 más por cada amigo que no tiene dinero.

Se tiene la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{1380}{15} + 23\right)x = 1380 - - - - - (2)$$

Encontremos el valor de x.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$\frac{1380}{15}x + 23x = 1380$$

$$\Rightarrow 92x + 23x = 1380$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$115x = 1380$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 115 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{115}\right)115x = 1380\left(\frac{1}{115}\right)$$

Son los amigos que tienen dinero

Sustituyendo en (1):

Por lo tanto, 3 son los amigos que no tienen dinero

■

Una repartición no muy equitativa.

Dividir $273 entre dos personas, de manera que la parte de la primera sea – de la parte de la segunda.

Solución 1:

Sea la cantidad de dinero que le corresponde a la segunda persona.

Una forma de resolver este problema es por medio del siguiente dibujo:

Cantidad a repartir $273

Primera	Persona	Segunda	Persona			

Le corresponde

– Le corresponde

Observe que:

Luego, dividiendo los $273 en 7 partes se tiene que:

Equivale a cada parte.

Así, y

Por lo tanto, a la primera persona le corresponden $78 y a la segunda $195.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es como sigue:

Sea p la cantidad de dinero que le toca a la primera persona. Luego, para la segunda persona hay $g = 273 - p$ dinero pero hay una condición, el dinero que le corresponde a la primera persona es $\frac{2}{5}$ del dinero de la segunda persona.

Esto se expresa así:

$$p = \frac{2}{5}g$$

Sustituyendo el valor de g:

$$p = \frac{2}{5}(273 - p)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$p = \frac{546}{5} - \frac{2}{5}p$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(5)p = \left(\frac{546}{5} - \frac{2}{5}p\right)(5)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$5p = 546 - 2p$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $2p$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$5p + 2p = 546 - 2p + 2p$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$7p = 546$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 7 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{7}\right)7p = 546\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{7}p = \frac{546}{7}$$

$$\Rightarrow p = 78$$

Sustituyendo $p = 78$ *en* g*:*

$$g = 273 - 78 = 195$$

Por lo tanto, a la primera persona le corresponde \$78 y a la segunda \$195.

■

Solución 3:

Sean x y y la cantidad de dinero que le corresponde a la primera y segunda persona respectivamente.

Como \$273 se dividen entre 2 personas se tiene que:

$$x + y = 273 - - - - - - - - - - - (1)$$

Como a la primera persona le corresponde $\frac{2}{5}$ de lo de la segunda entonces:

$$x = \frac{2}{5}y - - - - - - - - - - - - (2)$$

Teniendo estás ecuaciones se resuelve el problema.

Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$\frac{2}{5}y + y = 273$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{2y + 5y}{5} = 273$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{7}{5}y = 273$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{5}{7}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{7}{5}y\right) = 273\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{35}{35}y = \frac{1365}{7}$$

$$\Rightarrow y = 195$$

Sustituyendo $y = 195$ *en (1):*

$$x + 195 = 273$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -195 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x + 195 - 195 = 273 - 195$$

$$\Rightarrow x = 78$$

Por lo tanto, a la primera persona le tocan \$78 y a la segunda \$195.

Al comprobar se observa que:

$$x + y = 273$$

$$\Rightarrow 78 + 195 = 273 \text{ y } x = \frac{2}{5}y = \frac{(2)(195)}{5} = 78$$

■

Una maravillosa excursión.

> **Un grupo de estudiantes organiza una excursión y para ello alquilan un autobús cuyo costo es de $540. Al salir aparecen 6 alumnos más que están interesadísimos en ir a esa maravillosa excursión por lo que cada uno de los anteriores han de pagar $3 menos. ¿Cuántos estudiantes fueron a la excursión y cuánto pagó cada uno?**

Solución 1:

Llamemos e el número de estudiantes que organizan la excursión y p la cantidad que cada uno va a pagar. El monto total a pagar es $540.

Es decir:

$$(e)(p) = 540$$

Ó equivalentemente:

$$p = \frac{540}{e} - - - - - - - - - - - -(1)$$

Al salir, aparecen 6 estudiantes más que quieren ir a la excursión.

Se tiene que:

$$e + 6$$

Luego, cada estudiante paga $3 menos.

Es decir:

$$p - 3$$

Debido a que hay 6 estudiantes más y cada uno pagará $3 menos, entonces:

$$(e + 6)(p - 3) = 540 - - - - - (2)$$

Teniendo (1) y (2) es posible resolver el problema.

Sustituyendo (1) en (2):

$$(e + 6)\left(\frac{540}{e} - 3\right) = 540$$

Multiplicando binomios:

$$\frac{540e}{e} + \frac{(540)(6)}{e} - 3e - 18 = 540$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por e *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$e\left(540+\frac{3240}{e}-3e-18\right)=540e$$

Simplificando:

$$540e+3240-3e^2-18e=540e$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$522e+3240-3e^2=540e$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-522e$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-522e+522e+3240-3e^2=540e-522e$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$3240-3e^2=18e$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-18e$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-18e+3240-3e^2=18e-18e$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$-18e+3240-3e^2=0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $-\frac{1}{3}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-18e+3240-3e^2)=0\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$6e-1080+e^2=0$$

$$\Rightarrow e^2+6e-1080=0------(3)$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$e=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-1080)}}{2}$$

$$\Rightarrow e=\frac{-6\pm\sqrt{36+4320}}{2a}$$

$$\Rightarrow e=\frac{-6\pm\sqrt{4356}}{2}$$

$$\Rightarrow e=\frac{-6\pm 66}{2}$$

$$\Rightarrow e_1=30 \text{ y } e_2=-36$$

Pero como e es el número de estudiantes no puede ser negativo, entonces:

$$e=30$$

Sustituyendo el valor de e *en (1):*

$$\Rightarrow p = \frac{540}{30}$$

$$\Rightarrow p = 18$$

Así, el número de estudiantes al inicio de la excursión era 30 y cada uno tenía que pagar $18 y al final fueron 36 estudiantes y cada uno pagó $15.

■

Solución 2:

La ecuación cuadrática (3) de la solución anterior también se puede resolver por factorización:

$$e^2 + 6e - 1080 = 0$$

Factorizando por trinomio [ver 1.2.17 (4)]:

$$(e + 36)(e - 30) = 0$$

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

$$e + 36 = 0 \text{ ó } e - 30 = 0$$

Resolvamos la ecuación $e + 36 = 0$.

Sumando en ambos miembros de la igualdad -36 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$e + 36 - 36 = 0 - 36$$

$$\Rightarrow e = -36$$

Ahora resolvamos la ecuación $e - 30 = 0$.

Sumando en ambos miembros de la igualdad 30 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$e - 30 + 30 = 0 + 30$$

$$\Rightarrow e = 30$$

Luego, las soluciones de la ecuación $e^2 + 6e - 1080 = 0$ son $e = -36$ y $e = 30$

Pero como e es el número de estudiantes no puede ser negativo, entonces:

$$e = 30$$

Sustituyendo el valor de $e = 30$ *en (1):*

$$\Rightarrow p = \frac{540}{30} \quad \Rightarrow p = 18$$

Así, el número de estudiantes al inicio de la excursión era 30 y cada uno tenía que pagar $18 y al final fueron 36 estudiantes y cada uno pagó $15.

■

Escasez de agua.

Entre dos cubetas A y B de igual capacidad se distribuyen en partes desiguales 10 litros de agua. La cubeta A se llenaría si se vertiesen los $\frac{4}{5}$ del agua contenida en B, y éste se llenaría si se añadiesen los $\frac{3}{4}$ del agua contenida en A. Se desea saber la cantidad de agua contenida en cada cubeta.

Solución 1:

Sea x la cantidad de agua contenida en la cubeta A. Como los 10 litros de agua se distribuyen en partes desiguales en las cubetas A y B, se tiene que la cantidad de agua contenida en B es:

$$B = 10 - x - - - - - - - - - (1)$$

Dado que las cubetas tienen la misma capacidad, sea c dicha cantidad.

Como la cubeta A se llenaría si se vertiesen $\frac{4}{5}$ del agua contenida en B, se tiene que:

$$x + \frac{4}{5}B = c - - - - - - - - - - (2)$$

Por otra parte, si en la cubeta B se añadiesen $\frac{3}{4}$ del agua contenida en A, B se llenaría.

Es decir:

$$B + \frac{3}{4}x = c - - - - - - - - - - (3)$$

Como (2) y (3) son iguales (Propiedad transitiva [Ver 4.1.17]), tenemos:

$$x + \frac{4}{5}B = B + \frac{3}{4}x - - - - - - - - (4)$$

Sustituyendo el valor de (1) en (4) se sigue:

$$x + \frac{4}{5}(10 - x) = 10 - x + \frac{3}{4}x$$

Ahora, encontremos el valor de x.

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$x+\frac{40}{5}-\frac{4}{5}x=10-x+\frac{3}{4}x$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{5x-4x}{5}+8=10+\frac{-4x+3x}{4}$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{1}{5}x+8=10-\frac{1}{4}x$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $\frac{1}{4}x$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+8=10-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$\frac{5x+4x}{20}+8=10$$

$$\Rightarrow \frac{9}{20}x+8=10$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -8 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-8+\frac{9}{20}x+8=10-8$$

$$\Rightarrow \frac{9}{20}x=2$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $\frac{20}{9}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(\frac{20}{9}\right)\left(\frac{9}{20}x\right)=2\left(\frac{20}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{180}{180}x=\frac{40}{9}$$

$$\Rightarrow x=\frac{40}{9}$$

Sustituyendo este valor de x *en (1):*

$$B=10-\frac{40}{9}=\frac{50}{9}$$

Por lo tanto, $A=\frac{40}{9}$ y $B=\frac{50}{9}$.

Esto es, la cantidad de agua contenida en A es $\frac{40}{9}l$ y la de B es $\frac{50}{9}l$.

■

Solución 2:

Sean A y B la cantidad de agua contenida en cada cubeta. Como las cubetas A y B son de igual capacidad se tiene que:

$$A = B.$$

Supongamos que la cubeta A tiene x cantidad de agua y que la cubeta B tiene y cantidad de agua.

Luego, el total de agua distribuida en las cubetas en partes desiguales es 10 litros, es decir;

$$x + y = 10 - - - - - - - - - - - - (1)$$

Como la cubeta A se llenaría si se vertiesen $\frac{4}{5}$ del agua contenida en B, se tiene:

$$\frac{4}{5}y + x = A$$

Ahora la cubeta B se llenara si se vertiesen los $\frac{3}{4}$ del agua contenida en A .
Luego:

$$y + \frac{3}{4}x = B$$

Pero como ambas cubetas tienen la misma capacidad, se sigue:

$$\frac{4}{5}y + x = y + \frac{3}{4}x - - - - - - - - - - - (2)$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (1) y (2).

Despejando x *de (1):*

$$x = 10 - y - - - - - - - - - - - - - (3)$$

Sustituyendo esta x *en (2):*

$$\frac{4}{5}y + (10 - y) = y + \frac{3}{4}(10 - y)$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$\frac{4}{5}y + 10 - y = y + \frac{30}{4} - \frac{3}{4}y$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{4y - 5y}{5} + 10 = \frac{4y - 3y}{4} + \frac{30}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}y + 10 = \frac{1}{4}y + \frac{30}{4}$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-\frac{1}{4}y$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$-\frac{1}{4}y - \frac{1}{5}y + 10 = \frac{1}{4}y + \frac{30}{4} - \frac{1}{4}y$$

Sumando fracciones (Suma de términos semejantes):

$$\frac{-5y-4y}{20}+10=\frac{30}{4}$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{20}y+10=\frac{30}{4}$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -10 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-10-\frac{9}{20}y+10=\frac{30}{4}-10$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{20}y=\frac{30-40}{4}$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{20}y=-\frac{10}{4}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por $-\frac{20}{9}$ *(Propiedad multiplicativa de la igualdad):*

$$\left(-\frac{20}{9}\right)\left(-\frac{9}{20}y\right)=\left(-\frac{10}{4}\right)\left(-\frac{20}{9}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{180}{180}y=\frac{200}{36}$$
$$\Rightarrow 1\cdot y=\frac{200}{36}$$
$$\Rightarrow y=\frac{200}{36}$$
$$\Rightarrow y=\frac{50}{9}$$

Sustituyendo $y=\frac{50}{9}$ *en (1):*

$$x=10-\frac{50}{9}$$
$$\Rightarrow x=\frac{40}{9}$$

Por lo tanto, el agua contenida en A es $\frac{40}{9}l$ y el agua contenida en $B=\frac{50}{9}l$.

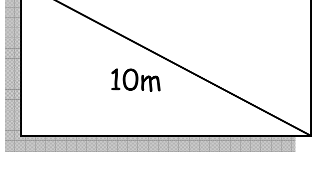
Observe que:

$$\frac{40}{9}litro+\frac{50}{9}litro=10\ litros$$

■

Casi cuadrado.

Un rectángulo tiene 48 m^2 de área y 10 m de diagonal. Encontrar la longitud de sus lados.



Este problema admite tres formas de resolución.
Aquí las presentamos.

Solución 1:
Sean x y y las longitudes de los lados del rectángulo. Como el área del rectángulo es $48m^2$, se tiene:

$$xy = 48 - - - - - - - - - - - - - (1)$$

Por el teorema de Pitágoras [ver 1.3.4] se tiene:

$$x^2 + y^2 = 10^2 - - - - - - - - - - - (2)$$

Donde 10 es la medida de la hipotenusa.

Despejando x de (2):

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-y^2$(Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2 + y^2 - y^2 = 10^2 - y^2$$
$$x^2 = 10^2 - y^2$$

Sacando raíz en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{10^2 - y^2}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{10^2 - y^2}$$

Sustituyendo $x = \sqrt{10^2 - y^2}$ en (1):

$$\left(\sqrt{10^2 - y^2}\right) y = 48$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\left(\sqrt{10^2 - y^2}\right)(y)\right)^2 = 48^2$$
$$\Rightarrow (10^2 - y^2)y^2 = 48^2$$

Eliminando paréntesis (Propiedad distributiva):

$$10^2y^2 - y^4 = 2304$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad -2304 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-2304 + 10^2y^2 - y^4 = 2304 - 2304$$
$$-2304 + 10^2y^2 - y^4 = 0$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por -1 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(-1)(-2304 + 10^2y^2 - y^4) = (0)(-1)$$
$$\Rightarrow y^4 - 100y^2 + 2304 = 0 - - - - - - - - (3)$$

Observe que esta ecuación es de cuarto grado.

Po lo que una forma de encontrar sus raíces ó soluciones, es encontrando al menos una raíz para bajar el grado de esta ecuación [ver 1.2.26].

Por tanteo, se halla que $y = 6$ *es una solución:*

$$6^4 - 100(6^2) + 2304 = 0$$

$$\Rightarrow 1296 - 3600 + 2304 = 0$$

Luego, se divide el polinomio [ver 1.2.25] $y^4 - 100y^2 + 2304 = 0$ *entre el factor* $(y - 6)$*:*

$$\frac{y^4 - 100y^2 + 2304}{y - 6} = y^3 + 6y^2 - 64y - 384$$

Ahora buscamos una solución para la ecuación:

$$y^3 + 6y^2 - 64y - 384 = 0$$

Por tanteo, hallamos que $y = 8$ *es una de ellas:*

$$8^3 + 6(8^2) - 64(8) - 384 = 512 + 384 - 512 - 384 = 0$$

Así, dividiendo el polinomio $y^3 + 6y^2 - 64y - 384$ *entre el factor* $(y - 8)$ *obtenemos:*

$$\frac{y^3 + 6y^2 - 64y - 384}{y - 8} = y^2 + 14y + 48$$

De esta manera hemos reducido el grado del polinomio $y^4 - 100y^2 + 2304$ *y su expresión ahora es:*

$$y^4 - 100y^2 + 2304 = (y - 6)(y - 8)(y^2 + 14y + 48)$$

Lo que sigue es resolver la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + 14y + 48 = 0$$

Resolviéndola por fórmula general de segundo grado para encontrar las otras dos soluciones se tiene que:

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(1)(48)}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-14 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-14 \pm 2}{2}$$

Entonces: $y_1 = -6$ y $y_2 = -8$. Note que estas soluciones de la ecuación (3) no lo son para el problema. Por lo que sólo consideramos las soluciones $y = 6$ y $y = 8$.

Sustituyendo $y = 6$ en (1) se tiene:

$$(x)(6) = 48$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 6 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{6}\right)(x)(6) = (48)\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{6}{6}x = \frac{48}{6}$$
$$\Rightarrow x = 8$$

Similarmente si $y = 8$ entonces $x = 6$

Por lo tanto, las longitudes del rectángulo son 6 y 8.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver la ecuación (3) obtenida en la solución 1:

Es usando la fórmula general de segundo grado. Primero vemos que la ecuación (3) es equivalente a:

$$(y^2)^2 - 100(y)^2 + 2304 = 0$$

Observe que hasta aquí se obtiene la misma ecuación que en la solución (1).

Resolviéndola por fórmula general de segundo grado.

Ahora,

$$y^2 = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4(1)(2304)}}{2}$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{100 \pm \sqrt{784}}{2}$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{100 \pm 28}{2}$$

Luego, $y_1^2 = 64$ y $y_2^2 = 36$ entonces $y_1 = \pm 8$ y $y_2 = \pm 6$. Las soluciones negativas no se consideran para el problema.

Sustituyendo $y = 6$ *en (1) se tiene:*

$$(x)(6) = 48$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 6 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{6}\right)(x)(6) = (48)\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{6}{6}x = \frac{48}{6}$$
$$\Rightarrow x = 8$$

Similarmente si $y = 8$ entonces $x = 6$

Por lo tanto, las longitudes del rectángulo son 6 y 8.

■

Solución 3:

Otra manera de resolver la ecuación (3) de la solución 1 es por factorización:

Como

$$y^4 - 100y^2 + 2304 = (y^2 - 64)(y^2 - 36)$$

Entonces (3) es equivalente a:

$$(y^2 - 64)(y^2 - 36) = 0$$

por factorización de trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)].

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18]:

$$y^2 - 64 = 0 \text{ ó } y^2 - 36 = 0$$

Resolvamos la ecuación $y^2 - 64 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 64 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$y^2 - 64 + 64 = 0 + 64$$

$$\Rightarrow y^2 = 64$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{64}$$

Por la propiedad $\sqrt{y^2} = |y|$ *ó equivalentemente* $y = \pm\sqrt{y}$

$$y = \pm 8$$

Resolvamos la ecuación $y^2 - 36 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 36 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$y^2 - 36 + 36 = 0 + 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{36}$$

$$y = \pm 6$$

Entonces las soluciones de la ecuación $y^4 - 100y^2 + 2304 = 0$ *son* $y = \pm 8$ y $y = \pm 6$.

Sustituyendo $y = 6$ *en (1) se tiene:*

$$(x)(6) = 48$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 6 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{6}\right)(x)(6) = (48)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{6}x = \frac{48}{6}$$

$$\Rightarrow x = 8$$

Similarmente si $y = 8$ entonces $x = 6$
Por lo tanto, las longitudes del rectángulo son 6 y 8.

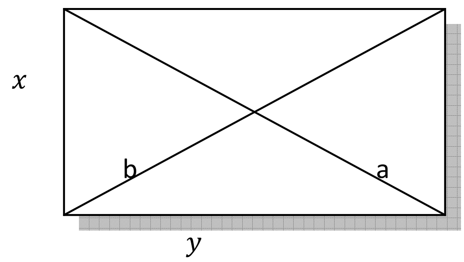
■

Producto de 4.

Hallar las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que el producto de sus cuatro lados es 3600, y el de sus diagonales 169.

Solución 1:

Sean x y y los lados del rectángulo y a, b sus diagonales como se muestra a continuación:



Como se tiene que el producto de sus cuatro lados es 3600 esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$x \cdot x \cdot y \cdot y = 3600$$

Es decir:

$$x^2 \cdot y^2 = 3600 - - - - - - - - - - - (1)$$

Por otra parte, el producto de sus diagonales es 169.
O sea:

$$ab = 169 - - - - - - - - - - - - - (2)$$

Observe que por el Teorema de Pitágoras [ver 1.3.4] se tiene que:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } x^2 + y^2 = b^2$$

Luego:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$b = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, (2) es equivalente a:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \times \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 169$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 = 169$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 169 - - - - - - - - -(3)$$

Ó equivalentemente:

$$y^2 = 169 - x^2 - - - - - - - - - - (4)$$

Por otra parte:

Despejando y^2 de (1):

$$y^2 = \frac{3600}{x^2}$$

Observe que si podemos dividir por x^2 dado que $x^2 \neq 0$.

Sustituyendo este valor de y^2 en (3):

$$x^2 + \frac{3600}{x^2} = 169$$

Sumando fracciones:

$$\frac{x^4 + 3600}{x^2} = 169$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por x^2 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$x^2\left(\frac{x^4 + 3600}{x^2}\right) = 169x^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 3600 = 169x^2$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-169x^2$ (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-169x^2 + x^4 + 3600 = 169x^2 - 169x^2$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = 0 - - - - - - -(5)$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 - 169(x)^2 + 3600 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$x^2 = \frac{169 \pm \sqrt{(-169)^2 - 4(1)(3600)}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{169 \pm \sqrt{14161}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{169 \pm 119}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 144 \;\; y \;\; x_2 = 25$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt[2]{144} \;\; y \;\; x_2 = \sqrt[2]{25}$$

$$\Rightarrow x_1 = 12 \quad y \quad x_2 = 5$$

Si $x = 12$ *sustituyendo en (4):*

$$y^2 = 169 - 12^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 25$$
$$\Rightarrow y = \sqrt[2]{25}$$
$$\Rightarrow y = \pm 5$$

Pero si $x = 5$ *sustituyendo en (4):*

$$\Rightarrow y^2 = 169 - 5^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 144$$
$$\Rightarrow y = \sqrt[2]{144}$$
$$\Rightarrow y = 12$$

Por lo tanto, $x = 12$ y $y = 5$ ó $x = 5$ y $y = 12$.

■

Solución 2:

Veamos otra forma de resolver la ecuación (4) obtenida en la solución 1:

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$$

Observe que esta ecuación es de cuarto grado.

Po lo que una forma de encontrar sus raíces ó soluciones, es encontrando al menos una raíz para bajar el grado de esta ecuación [ver 1.2.26].

Por tanteo, se halla que $y = 5$ *es una solución:*

$$5^4 - 169(5^2) + 3600 = 0$$
$$625 - 4225 + 3600 = 0$$

Luego, se divide el polinomio $x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$ *entre el factor* $(x - 5)$*:*

$$\frac{x^4 - 169x^2 + 3600}{x - 5} = x^3 + 5x^2 - 144x - 720$$

Ahora buscamos una solución para la ecuación:

$$x^3 + 5x^2 - 144x - 720 = 0$$

Por tanteo, hallamos que $y = 12$ *es una de ellas:*

$$12^3 + 5(12^2) - 144(12) - 720 = 1728 + 720 - 1728 - 720 = 0$$

Así, dividiendo el polinomio [Ver 4.2.35] $x^3 + 5x^2 - 144x - 720$ *entre el factor* $(x - 12)$ *obtenemos:*

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 144x - 720}{x - 12} = x^2 + 17x + 60$$

De esta manera hemos reducido el grado del polinomio $x^4 - 169x^2 + 3600$ *y expresión ahora es:*

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = (x-5)(x-12)(x^2 + 17x + 60)$$

Lo que sigue es resolver la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 17x + 60 = 0$$

Resolviéndola por fórmula general de segundo grado para encontrar las otras dos soluciones se tiene que:

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4(1)(60)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm 7}{2}$$

Entonces: $x_1 = -5$ y $x_2 = -12$. Note que estas soluciones negativas de la ecuación no son soluciones del problema.

Sustituyendo $x = 5$ *en (3) se tiene:*

$$y^2 = 169 - 5^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 169 - 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 144$$

$$\Rightarrow y = \pm 12$$

Similarmente si $x = 12$ entonces $y = 5$

Por lo tanto, $x = 12$ y $y = 5$ ó $x = 5$ y $y = 12$.

■

Solución 3:

Otra manera de resolver la ecuación (4) de la solución 1 es por factorización:

Como

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = (x^2 - 144)(x^2 - 25)$$

Entonces la ecuación (1) es equivalente a:

$$(x^2 - 144)(x^2 - 25) = 0$$

por trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)].

Por la propiedad del producto nulo [ver 1.2.18]:

$$x^2 - 144 = 0 \text{ ó } x^2 - 25 = 0$$

Resolvamos la ecuación $x^2 - 144 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 144 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2 - 144 + 144 = 0 + 144$$
$$\Rightarrow x^2 = 144$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$$
$$x = \pm 12$$

Resolvamos la ecuación $x^2 - 25 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 25 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x^2 - 25 + 25 = 0 + 25$$
$$\Rightarrow x^2 = 25$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Entonces las soluciones de la ecuación $x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$ *son* $x = \pm 12$ y $x = \pm 5$.

Sustituyendo $x = 5$ *en (1) se tiene:*

$$(5^2)(y^2) = 3600$$
$$25y^2 = 3600$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 25 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{25}\right)(25y^2) = (3600)\left(\frac{1}{25}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{25}{25}y^2 = \frac{3600}{25}$$
$$\Rightarrow y^2 = 144$$
$$\Rightarrow y = \pm 12$$

Similarmente si $x = 12$ entonces $y = 5$

Por lo tanto, $x = 12$ y $y = 5$ ó $x = 5$ y $y = 12$.

■

Siempre exacto.

> **Dentro de tres años la edad de un niño será un cuadrado perfecto, hace tres años su edad era precisamente la raíz de ese mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene ahora?**

Solución 1:

Sean x la edad del niño y y un cuadrado perfecto [ver 1.1.29]. Dentro de tres años su edad es un cuadrado perfecto.

Es decir:

$$x+3=y------------(1)$$

Donde y es un entero.

Hace tres años su edad era la raíz de ese mismo cuadrado.

O sea:

$$x-3=\sqrt[2]{y}------------(2)$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (1) y (2).

Despejando x de (1):

Sumando en ambos miembros de la igualdad -3 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x+3-3=y-3$$

$$\Rightarrow x=y-3-------------(3)$$

Sustituyendo x de (3) en (2):

$$(y-3)-3=\sqrt[2]{y}$$

$$\Rightarrow\ y-3-3=\sqrt[2]{y}$$

$$\Rightarrow y-6=\sqrt[2]{y}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad:

$$(y-6)^2=\left(\sqrt[2]{y}\right)^2$$

Desarrollando el binomio:

$$y^2-12y+36=y$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-y$ (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-y+y^2-12y+36=y-y$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Utilicemos la fórmula general de segundo grado para resolver la ecuación anterior:

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(1)(36)}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 9 \text{ y } y_2 = 4$$

Si $y_1 = 9$ *sustituyendo en (3):*

$$x = 9 - 3$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Si $y_2 = 4$ *sustituyendo en (3):*

$$x = 4 - 3$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Observe que la edad del niño no puede ser $x = 1$ ya que hace tres años aún no nacía.

Po lo tanto, la edad del niño es 6 años.

■

Solución 2:

Otra forma de resolver este problema es como sigue:

Sea x la edad del niño. Dentro de tres años, su edad es un cuadrado perfecto:

$$x + 3$$

Por otro lado, hace 3 años su edad, es decir, $x - 3$ era la raíz de ese mismo cuadrado perfecto, es decir:

$$x - 3 = \sqrt{x + 3} - - - - - - - - -(1)$$

Resolviendo esta igualdad tenemos:

$$(x - 3)^2 = x + 3$$

Desarrollando el binomio cuadrado:

$$x^2 - 6x + 9 = x + 3$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad $-x - 3$ *(Propiedad aditiva de la igualdad):*

$$x^2 - 6x + 9 - x - 3 = x + 3 - x - 3$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

Factorizando por trinomio cuadrado perfecto [ver 1.2.17 (5)]:

$$(x-1)(x-6) = 0$$

Por propiedad del producto nulo [ver 1.2.18] se tiene que:

$$x - 1 = 0 \ \text{ ó } \ x - 6 = 0$$

Resolvamos la ecuación $x - 1 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 1 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 1 + 1 = 0 + 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Ahora, resolviendo la ecuación $x - 6 = 0$

Sumando en ambos miembros de la igualdad 6 (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 6 = 0$ son $x = 1$ y $x = 6$

Pero la edad del niño no puede ser $x = 1$ ya que hace tres años aún no nacía.

Po lo tanto, la edad del niño es 6 años.

■

Conclusiones

Esta tesis esta enfocada en la resolución de problemas y pretende ser un material de apoyo para profesores que imparten la materia de matemáticas de nivel medio superior y superior en específico el álgebra.

La tesis fue puesta en práctica con alumnos de secundaria, bachillerato y con profesores que imparten la materia de matemáticas en estos niveles escolares.

La actitud que mostraron los alumnos con quienes se trabajó fue buena ya que al llamar "**reto**" al problema se mostraron interesados y motivados.

Aunque no todos los alumnos sabían como resolver el reto que se les presentaba lo intentaron, y algunos se sintieron satisfechos con lo que habían logrado. Después de esto observaron la solución correcta de alguno de sus compañeros de clase y notaron cual era el error que habían cometido.

Algunos alumnos nos sorprendieron con su capacidad mental que tienen para resolver los problemas y otros incluso intentaron utilizar el álgebra sin pedirles que lo hicieran y esto fue de gran motivación para nosotros.

Incluso algunos relacionaban el reto con algo de su vida diaria y otros comentaban que eran interesantes los retos propuestos.

Hubo ocasiones en que los retos se dejaban de tarea y luego se realizaba la revisión de ellos.

Con esto, nosotros pudimos notar que ellos tenían interés por los retos propuestos y que sí los razonaban de alguna manera y de tanto intentar el reto al pedirles que lo explicaran lo tenían tan claro que no era necesario recurrir al cuaderno.

Con los profesores que se trabajó mostraron interés en este trabajo y dispuestos a tomar en cuenta las recomendaciones antes mencionadas y estuvieron dispuestos a llevarlos a cabo con sus alumnos.

Una vez que se trabajó esta serie de problemas con los profesores, después se les pidió que los pusieran en práctica con sus alumnos y comentaran cómo les había ido.

La mayoría de ellos hizo comentarios favorables pues comentaban que sus alumnos se sentían motivados de alguna manera.

En la resolución de los problemas lo que se pretende es que de alguna u otra forma a los alumnos les sea más entendible las matemáticas y tenga significado para ellos. En cada problema se trabajan muchos aspectos matemáticos e incluso de otras áreas.

Al trabajar con alumnos y profesores esta propuesta de tesis en lo personal fue satisfactoria ya que pude observar que este trabajo puede ser de gran utilidad para profesores que no tienen el perfil de matemáticos.

Y para quienes estudiaron matemáticas puedan encontrar material idóneo para la enseñanza. Además tiene recomendaciones pedagógicas y una serie de definiciones y propiedades aritméticas, algebraicas y geométricas.

Bibliografía

[1] Abrantes Paulo, *La Resolución de Problemas en Matemáticas*, Editorial Grao, 2002.

[2] Alcalá Manuel, *La Construcción del Lenguaje Matemático*, Editorial Grao, 2002.

[3] Alsina Claudi, *Enseñar Matemáticas*, Editorial Grao, 1996.

[4] Angoa Juan, Contreras Agustín, Ibarra Manuel, Linares Raúl, Martínez Armando, *Matemáticas Elementales*, Textos científicos BUAP, 2010.

[5] Castelnuovo Emma, *Didáctica de la Matemática Moderna*, Editorial Trillas, 1970.

[6] Clemens et al., Geometría, Pearson Educación 1998.

[7] *Competencias Disciplinares Básicas del Sistema Nacional de Bachillerato,* 21 de abril de 2008, www.sems.gob.mx .

[8] Ledezma Santiago Vicente, *Desarrollo de Habilidades Matemáticas en el nivel Medio y Medio Superior*, Tesis de Licenciatura, FCFM BUAP, 2008.

[9] Morán Álvarez Sura, Callera Pérez Arturo y Álvarez Suarez Luisa, *Hacia un Enfoque de la Educación en Competencias*, Consejo de Educación y Ciencia, 2008.

[10] Ramírez Galarza Ana Irene, *Sistema de Ecuaciones y de Desigualdades*, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

[11] Salganik L.H., Rychen D.S., Moser U. and Konstant J., Projects on competencies in the OCDE context: Analysis of theoretical and conceptual foundations,1999.

[12] Swokowski Earl William, *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Editorial Grupo editorial Iberoamérica, 1988.

[13]http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/INFORMTICA-I.pdf

[14]http://www.fisicanet.com.ar/matematica/ecuaciones/tp07_algebra.php

[15]http://www.scribd.com/doc/40058323/REIMS-Competencias

[16]http://www.scribd.com/doc/4921017/Construir-competencias

[17] Zavala Antoni, La Práctica Educativa Cómo Enseñar, Editorial Grao, 1995.