BENÉMERITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Continuidad y conexidad

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

ADAL TÉLLEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE

PUEBLA, PUE. MAYO 2022

Dedicado a mi mamá

y a mi novia

Agradecimientos

A lo largo de todas estas páginas se encuentra el resultado, tanto académica como personal, de todo el trabajo duro que he hecho a lo largo de mi existencia. Es por eso, que en este espacio quiero agradecer a todas y a todos aquellos que han estado conmigo y que han impactado positivamente a mi vida.

Agradezco a mi director de tesis el Dr. Raúl Escobedo Conde con quien ha sido un placer y un honor poder haber trabajado para la realización de esta tesis.

Agradezco a mis sinodales el M.C. Fernando Velázquez Castillo, el Dr. Agustín Contreras Carreto y el M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez por acceder ser parte de mi jurado, por tomarse el tiempo de leer mi tesis y por sus aportes a ésta.

Agradezco a mi mamá Nereida Sánchez y a mi papá Alejandro Téllez por amarme y apoyarme incondicionalmente en alcanzar un triunfo más. De verdad, su amor y cariño es lo mejor que este chico pudo haber recibido.

Agradezco a Gabriela Gárate por ser mi amiga, mi novia, mi confidente, mi pareja de aventuras y por permitirme ser parte de toda tu familia. Agradezco a Dios el haberme puesto en tu vida en el momento perfecto. Tenemos muchas metas que queremos cumplir y sé, que se harán realidad.

Agradezco a mis amigos del bachillerato Alberto, Elliott, Lupita y Olivia quienes después de tantos años de conocernos y de vivir experiencias juntos, seguimos riendo y jugando como niños. Gracias por permitirme ser su amigo y parte de su familia.

Agradezco a María y a César por poder contar con ustedes en todas las situaciones de la vida tanto buenas y malas, sin importar lo que pase, sé que estarán ahí para mí y para mi familia. Agradezco habernos conocido en el momento correcto.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por dejarme ser parte de esta comunidad donde tuve la oportunidad de aprender de todos mis maestros quienes me impartieron clases.

Agradezco a mis amigos de la facultad Zaida, Aleyda, Itzel, Rafa, Marijosse, Manuel (Mane), Pedro, Alonzo y Ángel quienes me permitieron ser su compañero y amigo de la universidad a lo largo de este tiempo de estudio. A todos ustedes, gracias por permitirme ser parte de su vida y de sus anécdotas.

Agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla pues, en ella tuve la oportunidad de conocer a Maricruz, quien es una persona maravillosa y una gran amiga; a Jorge Otero, Rubén Velez, Sara Guevara, Fátima Castillo, Odorico Mora quienes son grandes maestros de vida; a Virginia Gutiérrez con quien tuve la oportunidad de realizar mi servicio social y práctica profesional.

Agradezco al programa de Movilidad Estudiantil de la Dirección General de Desarrollo Internacional (DGDI), pues gracias a éste tuve la oportunidad de expandir mis horizontes de estudio y amistades. Además de poder conocer a mis profesores: el Dr. Yuri Karlovich, el Dr. Carlos Cabrera y el Dr. Erick Treviño de quienes aprendí nuevas maneras de seguir estudiando desde casa.

Agradezco a María Victoria por ser mi guía y compañera de trabajo en el aprendizaje y enseñanza del método KUMON, mostrando que las matemáticas se pueden realizar de una manera diferente e interesante a estudiantes de todas las edades. Gracias por ser mi inspiración a seguir estudiando las matemáticas.

Agradezco a Maria Antonieta Edith, María Navarro, Alejandro Farfán y Josue Peralta por ser personas que influyeron a mi vida de manera constructiva. Me enseñaron a querer siempre dar lo mejor y me motivaron a querer ser un gran hijo, una gran persona, un gran pensandor y un gran maestro.

Agradezco a cada uno de ustedes por formar parte mi vida, siempre estarán presentes en mi mente y corazón.

Introducción

La temática de esta tesis se enmarca dentro de la topología general. Particularmente, se estudian algunas propiedades de las funciones continuas en espacios topológicos, relacionadas con el concepto de conexidad. Concretamente, para una función f definida en un espacio X con valores en un espacio Y, analizamos relaciones entre las siguientes condiciones:

(1) La función f es continua.

(2) La gráfica de la función f es un subconjunto conexo del producto $X \times Y$.

(3) La gráfica de la restricción de la función f a cada subconjunto conexo de X, es un subconjunto conexo del producto $X \times Y$.

(4) La imagen bajo la función f de cada subconjunto conexo de X, es un subconjunto conexo de Y.

En un texto básico de topología se demuestra que la condición (1) implica cada una de las condiciones (3) y (4), y, si X es conexo, también implica la condición (2). En este trabajo se prueba que (3) implica (4), y exponemos ejemplos que muestran que, en términos generales, éstas son las únicas implicaciones válidas. También, demostramos que las condiciones (2) y (3) son equivalentes cuando X es un intervalo en la recta real.

Otra parte de nuestro trabajo lo constituye el estudio de dos funciones, a una le llamamos la función de Bruckner-Ceder y a la otra la función de Ciesielski-Kellum, porque las hemos tomado de [1] y [3] que son artículos de estos autores, respectivamente. Demostramos que estas funciones tienen una cantidad no numerable de discontinuidades, la primera satisface las condiciones (2), (3) y (4); y la segunda solamente cumple la condición (4).

La exposición de nuestros resultados la organizamos en tres capítulos. En el primero incluimos algunos elementos de topología general con la finalidad de presentar un trabajo autocontenido, en la medida de lo posible.

En el Capítulo 2, hacemos dos presentaciones del conjunto de Cantor en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Una es la clásica construcción conocida como el conjunto de Cantor de los tercios medios, y otra no tan conocida a la que llamamos el conjunto de Cantor de los quintos medios. Este material es fundamental para el análisis de las funciones de Bruckner-Ceder y de Ciesielski-Kellum, lo cual hacemos en el Capítulo 3.

Un lector con antecedentes en un curso básico de topología general puede iniciar la lectura de esta tesis en el segundo capítulo. Mejor aún, si tiene alguna experiencia con las propiedades topológicas del conjunto de Cantor puede avanzar la lectura directamente en el tercer capítulo.

Adal Téllez Sánchez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Mayo de 2022

Índice general

Capítulo 1

Elementos topología general

En este capítulo se exponen algunas nociones y resultados básicos de la topología general, los cuales se utilizan para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Nociones básicas

En todo el escrito se utiliza la siguiente notación: $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales, $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de números enteros; todos ellos considerados con sus respectivas topologías generadas por su métrica Euclidiana. Dados dos conjuntos A y B, $A \setminus B$ denota el conjunto de elementos de A que no son elementos de B. El conjunto vacío es representado por el símbolo $\emptyset$.

1.1 Definición. Una *topología* en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que satisface:

1) Unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ.

2) Intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

3) $\emptyset$ y X pertenecen a τ.

Decimos que (X, τ) es un espacio topológico, a veces se abrevia "X es un espacio topológico", o simplemente "X es un espacio" cuando no hay confusiones acerca de τ. Los elementos de una topología son llamados conjuntos **abiertos** en el espacio.

1.2 Ejemplos. Es fácil verificar que las colecciones que se mencionan a continuación son topologías.

1. Para un conjunto no vacío X, la *topología indiscreta* para X, es aquella definida por $\tau_i = \{\emptyset, X\}$.

2. Sea X cualquier conjunto y τ la colección de todos los subconjuntos de X. Entonces τ es una topología para X que se llama *topología discreta*.

3. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$, τ es una topologia para X.

4. Si X es un espacio con topología τ y $A \subset X$, la colección

$$\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$$

   es una topología de A, llamada *topología relativa* de A. En este caso, decimos que A es un subespacio de X.

5. Si X y Y son espacios con topologías τ y τ', respectivamente. La colección de todas las uniones de conjuntos de la forma $U \times V$, donde $U \in \tau$ y $V \in \tau'$, es una topología para el producto cartesiano $X \times Y$, ésta es llamada la *topología producto* sobre $X \times Y$.

1.3 Observación. La noción de topología producto es aún más general. Esto no lo incluimos aquí, pues su estudio se escapa del objetivo de esta tesis. Se puede consultar, por ejemplo, en el capítulo 3 de [12] o en el capítulo 2 de [7].

1.4 Definición. Dado un espacio topológico (X, τ) se dice que un subconjunto F de X es *cerrado* en X si $X \setminus F$ es abierto en X.

1.5 Proposición. Sea (X, τ) un espacio topológico entonces,

a) Intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

b) Unión finita de conjuntos cerrados es cerrado.

c) $\emptyset$ y X son cerrados en X.

Demostración. a) Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados. Así, $X \setminus F_\lambda$ es abierto para cada $\lambda \in \Lambda$. Notemos que $X \setminus \bigcap F_\lambda = \bigcup (X \setminus F_\lambda)$. Así, $\bigcup (X \setminus F_\lambda)$ es unión arbitraria de conjuntos abiertos. Por tanto, $X \setminus \bigcap F_\lambda$ es abierto en X. Así, $\bigcap F_\lambda$ es cerrado en X.

b) Sean $F_1, \ldots, F_n$ conjuntos finitos cerrados. Como F_i es cerrado, $X \setminus F_i$ es abierto para todo $i \in \{1, \ldots n\}$. Así, $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es abierto.

c) Como $X \setminus \emptyset = X$ y $X \setminus X = \emptyset$ son abiertos, se concluye que X y $\emptyset$ son cerrados en X.

$\square$

1.6 Definición. Sean X un conjunto distinto del vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que d es una métrica en X, si para cada $x, y, z \in X$, d satisface:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdad del triángulo*).

Se dice que (X, d) es un *espacio métrico*, o simplemente "X es un espacio métrico" cuando no hay confusiones acerca de la métrica d.

1.7 Definición. Dado un espacio métrico (X, d), $x_0 \in X$ y $r > 0$. Se define el conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

llamado *bola abierta* con centro en x_0 y radio r.

1.8 Definición. Un conjunto A en un espacio métrico (X, d) es *abierto*, si para cada $x \in A$, existe $r = r_x > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

1.9 Proposición. Los conjuntos abiertos en un espacio métrico (X, d) tiene las siguientes propiedades:

a) Unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.

b) Intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.

Demostración. a) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos abiertos. Sea x un punto en $\bigcup A_\lambda$, así, $x \in A_{\lambda_0}$ para algún λ_0. De esta manera, A_{λ_0} contiene una bola abierta que contiene al punto x. Con esto, $\bigcup A_\lambda$ contiene una bola abierta. Por tanto, $\bigcup A_\lambda$ es abierto.

b) Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos abiertos y $x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in A_i$. Se sigue que existen $r_i > 0$ tales que $B(x, r_i) \subset A_i$. Tomando $r = \text{mín}\{r_i : i = 1, \ldots, n\} > 0$, se obtiene que $B(x, r) \subset \bigcap A_i$. Por tanto, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

□

Observemos que para un espacio métrico (X, d), los conjuntos abiertos como en la Definición 1.8 forman una topología en X, llamada la *topología métrica*.

1.10 Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, la *cerradura* de A en X es el conjunto

$$\overline{A} = \bigcap\{K \subset X : K \text{ es cerrado y } A \subset K\}$$

Observemos que por inciso a) en la Proposición 1.5, $\overline{A}$ es cerrado. Además, si E es cerrado en X y A subconjunto de E, entonces $\overline{A}$ es subconjunto de E.

El siguiente teorema muestra cómo son los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en un subespacio.

1.11 Teorema. Si A es un subespacio topológico X, entonces:

a) $H \subset A$ es un abierto en A si, y sólo si, $H = G \cap A$, donde G es un abierto en X.

b) $F \subset A$ es un cerrado en A si, y sólo si, $F = K \cap A$, donde K es un cerrado en X.

Demostración. a) Es justamente la definición de topología relativa de A.

b) Si $F \subset A$ es cerrado en A, entonces $A \setminus F$ es abierto A. Así, existe G abierto en X tal que $A \setminus F = G \cap A$. Notemos que $K = X \setminus G$ es cerrado en X y $F = A \setminus G$. Se sigue que

$$K \cap A = (X \setminus G) \cap A = A \setminus G = F.$$

Por otro lado, si $F = K \cap A$ donde K es cerrado en X, entonces $X \setminus K$ es abierto en X. Luego,

$$(X \setminus K) \cap A = A \setminus F$$

Y, por iniciso a), $A \setminus F$ es abierto en A. Por tanto, F es cerrado en A.

$\square$

1.12 Teorema. Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) $A \subset \overline{A}$.

b) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

e) A es cerrado si, y sólo si, $\overline{A} = A$.

f) $\overline{A} = \{x \in X :$ Todo conjunto abierto que contiene a x intersecta al conjunto $A\}$.

Demostración. a) Sea $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de A cerrados en X. Así, para todo x en A implica que x está en K_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por tanto, $A \subset \bigcap\{K_\lambda\} = \overline{A}$.

b) Si $A \subset B$ y $B \subset \overline{B}$, entonces $A \subset \overline{B}$. Dado que $\overline{B}$ es cerrado, implica $\overline{A} \subset \overline{B}$.

c) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, por inciso anterior, tenemos $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Por otro lado, como $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$ se tiene que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Notemos que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado por ser unión finita de conjuntos cerrados, con esto tenemos $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por tanto, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) Dado que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$, se implica $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, donde $\overline{A} \cap \overline{B}$ es cerrado. Por tanto, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

e) (Necesidad) Como $A \subset A$ con A conjunto cerrado, ese tiene que $\overline{A} \subset A$. Por otro lado, se satisface que $A \subset \overline{A}$. Por tanto, $\overline{A} = A$.

(Suficiencia) Dado que $\overline{A}$ es cerrado y $\overline{A} = A$, satisface que A es cerrado.

f) Si existe un conjunto abierto que contiene al punto x, digamos U, tal que no intersecte al conjunto A, entonces $A \subset X \setminus U$. Dado que $X \setminus U$ es cerrado, $\overline{A} \subset X \setminus U$. Por tanto, x no pertenece al conjunto $\overline{A}$. Por otra parte, si x no pertenece al conjunto $\overline{A}$, entonces $X \setminus \overline{A}$ es un conjunto abierto que contiene al punto x que no intersecta al conjunto A.

□

1.2. Compacidad

En esta sección presentamos el concepto de conjunto compacto y lo caracterizamos a través de la propiedad de intersección finita. Además, estudiamos esta noción en los intervalos cerrados de la recta real.

1.13 Definición. Sea $A \subset X$. Si $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ con U_α conjunto abierto en X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se le llama *cubierta abierta* de A. Si $F \subset I$ es tal que $A \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$ entonces decimos que la subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in F}$ es *una subcubierta de A*. Si, además F es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es *una cubierta finita de A*.

1.14 Definición. Se dice que un espacio X es *compacto*, si para toda cubierta abierta de X, tiene una subcubierta finita.

1.15 Teorema. Todo intervalo cerrado $[a, b]$, como subconjunto de $\mathbb{R}$, es compacto.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de un intervalo cerrado $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Consideremos el siguiente conjunto

$$A = \{x \in [a,b] : [a,x] \text{ es cubierto por una subcolección finita de } \mathscr{U}\}.$$

Notemos que, como $\mathscr{U}$ es una cubierta de $[a,b]$, el punto a pertenece a algún abierto V de $\mathscr{U}$. Así el intervalo $[a,a]$ está cubierto por la subcolección finita $\{V\}$ de $\mathscr{U}$. Es decir, el punto a pertenece al conjunto A. Por otra parte, es claro que b es una cota superior para este conjunto A. Así, A es un conjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Luego, A tiene supremo. Denotemos $\beta = \sup A$. Observamos que $a \leq \beta \leq b$.

Para continuar esta demostración detallamos tres pasos:

1. Probaremos que $[a,\beta) \subset A$:

   Sea $z \in [a,\beta)$. Se tiene que $z < \beta$, así no es cota superior de A. Luego, existe un punto x en A tal que $z < x$. Así, existe una subcolección finita $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ que cubre al intervalo $[a,x]$. Como $[a,z] \subset [a,x]$, se tiene que $\mathscr{V}$ también cubre al intervalo $[a,z]$. Esto significa que $z \in A$.

2. Probaremos que $\beta \in A$:

   Si $\beta = a$, entonces $\beta \in A$, ya que $a \in A$. Así, en lo que sigue suponemos que $a < \beta$, existe un elemento U de $\mathscr{U}$ tal que $\beta \in U$. Como U es un abierto en $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto (c,d) tal que $a < c$ y $\beta \in (c,d) \subset U$. Por el paso 1 tenemos que $c \in A$. Así, existe una subcolección finita $\mathscr{W}$ de $\mathscr{U}$ que cubre al intervalo $[a,c]$. Se obtiene que $\mathscr{W} \cup \{U\}$ es una subcolección finita de la cubierta $\mathscr{U}$ que cubre al intervalo $[a,\beta]$ esto prueba que $\beta \in A$.

3. Probaremos que $\beta = b$:

En este paso procedemos por contradicción. Supongamos que $\beta < b$. Como $\mathscr{U}$ es cubierta de $[a, b]$, existe un elemento U de $\mathscr{U}$ tal que $\beta \in U$. Como U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto (c, d) tal que $d < b$ y $\beta \in (c, d) \subset U$. Fijemos un punto x tal que $\beta < x < d$. Se tiene que $[\beta, x] \subset (c, d)$, así, $[\beta, x] \subset U$. Por el paso 2, existe una subcolección finita $\mathscr{U}'$ de $\mathscr{U}$ que cubre al intervalo $[a, \beta]$. Se sigue que $\mathscr{U}' \cup \{U\}$ es una subcolección finita que cubre $[a, x]$. Así, $x \in A$, esto es una contradicción porque $\beta < x$ y $\beta = \sup A$. Esta contradicción demuestra que $\beta = b$.

Por lo demostrado en los pasos $1, 2$ y 3, tenemos que el intervalo $[a, b]$ es cubierto por una subcolección finita de la cubierta $\mathscr{U}$. Esto demuestra que el intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto.

□

1.16 Teorema. Si K es un subespacio cerrado de un espacio compacto X, entonces K es compacto.

Demostración. Sea $\{U'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de K, es decir, $U'_\alpha = U_\alpha \cap K$ con U_α abierto en X. La familia $\{U_\alpha\} \cup (X \setminus K)$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita que cubre a X, digamos $U_1, U_2, \ldots, U_n, X \setminus K$. Luego, la colección de $U'_1, U'_2, \ldots, U'_n$ forma una subcubierta finita que cubre a K, es decir, K es compacto. □

1.17 Definición. Se dice que una familia $\mathscr{C}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene *la propiedad de intersección finita*, si para toda subfamilia finita $\mathscr{C}'$ no vacía de $\mathscr{C}$, se tiene que $\bigcap \mathscr{C}' \neq \emptyset$.

1.18 Teorema. Un espacio X es compacto si, y sólo si, toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una familia de conjuntos cerrados de un espacio compacto X. Si $\bigcap \mathscr{C} = \emptyset$, entonces la familia $\mathscr{U} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X, la cubierta $\mathscr{U}$ tiene una subcubierta finita $\mathscr{U}'$. Sea $\mathscr{C}' = \{X \setminus U : U \in \mathscr{U}'\}$. Con esto, $\bigcap \mathscr{C}' = \emptyset$, por lo que $\mathscr{C}$ no tiene la propiedad de intersección finita, lo cual es una contradicción a la hipótesis. Por tanto, $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que toda familia de conjuntos cerrados en X tiene la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X y supongamos que no tiene una subcubierta finita. Por lo que, para cada $F \subset I$ finito, existe $x_0 \in X$ tal que x_0 no pertenece a $\bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$; equivalentemente, para todo $F \subset I$ finito $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in F}(X \setminus U_\alpha)$. Entonces, existe

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I}(X \setminus U_\alpha) = X \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha).$$

De esto, contradice que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de X. Así, se concluye que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tiene una subcubierta finita y por tanto, X es compacto.

□

1.19 Teorema. Si un conjunto abierto contiene a la intersección de una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un espacio compacto, entonces tal conjunto abierto contiene a alguno de los subconjuntos cerrados de esa sucesión.

Demostración. Sea U un conjunto abierto de un espacio compacto X, y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$. Vamos a demostrar que existe un número entero positivo m tal que $A_m \subset U$. Para hacer esto, suponemos que no es así, y denotamos $\mathcal{A} = \{A_n \setminus U : n \in \mathbb{N}\}$.

Notamos que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X la cual tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, si $\{A_{n_1} \setminus U, \ldots, A_{n_k} \setminus U\}$ es una subcolección finita de la colección $\mathcal{A}$, entonces existe un número entero positivo j tal que $A_{n_j} \setminus U \subset A_{n_i} \setminus U$ con $n_i \leq n_j$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$; esto resulta porque $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\bigcap\{A_{n_i} \setminus U : i \in \{1, \ldots, k\}\} = A_{n_j} \setminus U$, el cual es un conjunto no vacío, porque A_{n_j} no está contenido en U. Esto prueba que la colección $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Ahora, como el espacio X es compacto, por Teorema 1.18, se sigue que la intersección de todos los conjuntos de la colección $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío. Tomemos un punto x en la intersección $\bigcap \mathcal{A}$. Se sigue que x es un punto en la intersección $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y x no pertenece al conjunto U. Esto contradice nuestra hipótesis. Esta contradicción demuestra el teorema. $\square$

1.3. Conexidad

En esta sección presentamos el concepto de conjunto conexo y lo caracterizamos a través de los conjuntos separados. Además, analizamos esta noción en la recta real, en los conjuntos abiertos y en los conjuntos cerrados.

1.20 Definición. Un espacio X es *no conexo*, si existen U y V abiertos no vacíos, tales que

$$X = U \cup V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Diremos que el espacio es *conexo*, si no cumple que sea no conexo. Si A es subconjunto de X, diremos que A es un conjunto conexo en X, si como subespacio es conexo.

1.21 Observación. Es fácil verificar las siguientes afirmaciones.

a) Si $B \subset A$ es conexo en A y $A \subset X$, entonces, B es conexo en X. Por esto, si un conjunto es conexo en algún subespacio, simplemente diremos que es conexo.

b) Si X es conexo y $X = U \cup V$, U y V abiertos no vacíos, entonces $U \cap V \neq \emptyset$.

c) Si X es conexo, y $X = U \cup V$, con U y V abiertos ajenos, entonces $U = \emptyset$ ó $V = \emptyset$. Como $U \cap V = \emptyset$, se tiene que ($U = \emptyset$ y $V = X$) ó ($U = X$ y $V = \emptyset$).

d) Si $X = U \cup V$ con U y V abiertos ajenos, entonces U y V también son cerrados, ya que $X \setminus U = V$, $X \setminus V = U$.

1.22 Teorema. Sea X un espacio topológico. Las siquientes proposiciones son equivalentes:

a) X es conexo.

b) Los únicos abiertos y cerrados de X son $\emptyset$ y X.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Por contrarrecíproca: sea U un subconjunto abierto y cerrado propio no vacío de X. Como $X = (X \cap U) \cup (X \setminus U) = U \cup (X \setminus U)$ y $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Dado que U y $X \setminus U$ son abiertos no vacíos, satisface que X es no conexo.

b) $\Rightarrow$ a). Por contrarrecíproca: supongamos que existen U y V abiertos no vacíos tales que

$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Como $V = X \setminus U$, se cumple que V es un conjunto cerrado. Así que, hemos encontrado un conjunto diferente del vacío y de X que es abierto y cerrado.

□

1.23 Definición. Dos subconjuntos U y V de un espacio topológico X están *separados* si

$$U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset.$$

1.24 Teorema. Si A es un subespacio no vacío de un espacio topológico X. Las siquientes proposiciones son equivalentes:

a) A es un conjunto no conexo.

b) Existen U y V abiertos no vacíos en X tales que

$$A \subset U \cup V, \;\; A \cap U \neq \emptyset, \;\; A \cap V \neq \emptyset \;\; \text{y} \;\; A \cap U \cap V = \emptyset.$$

c) Existen U_1 y V_1 subconjuntos separados no vacíos en X, tales que $A = U_1 \cup V_1$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Como A es no conexo, existen U' y V' no vacíos, abiertos relativos en A. Así, existen U y V abiertos en X tales que

$$U' = U \cap A, \quad V' = V \cap A.$$

Notemos que U y V son abiertos no vacíos en X. Como $A = U' \cup V' = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, entonces $A \subset U \cup V$. Además, como $U' \cap V' = \emptyset$, entonces $A \cap V \cap U = \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ c) Tomemos $U_1 = A \cap U$ y $V_1 = A \cap V$. Estos conjuntos, por hipótesis, son distintos del vacío. Notemos que $A = U_1 \cup V_1$. Falta demostrar que $U_1 \cap \overline{V_1} = \overline{U_1} \cap V_1 = \emptyset$.

Supongamos que existe $x \in U_1 \cap \overline{V_1}$, entonces $x \in A, x \in \overline{V_1}$ y $x \in U$. Por lo que, $U \cap V_1 \neq \emptyset$ así, $A \cap U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De manera análoga, se demuestra que $\overline{U_1} \cap V_1 = \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ a) Dado que $A = U_1 \cup V_1$ y $U_1 \cap \overline{V_1} = \overline{U_1} \cap V_1 = \emptyset$, notemos que $U_1 = A \setminus \overline{V_1}$ y $V_1 = A \setminus \overline{U_1}$, estos conjuntos son abiertos en A y no vacíos. Como $U_1 \cap \overline{V_1} = \emptyset$ se implica que $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, por tanto A es no conexo. $\square$

1.25 Ejemplos.

1. Todo conjunto unitario en cualquier espacio métrico es conexo.
2. Todo conjunto con más de un punto, en un espacio con la topología discreta es no conexo, es decir, los únicos conjuntos conexos con la topología discreta son los conjuntos unitarios.

Otros ejemplos de conjuntos conexos se pueden consultar en [11].

1.26 Teorema. Si I es un intervalo en la recta real, entonces I es un conjunto conexo.

Demostración. Si I es no conexo, entonces existen U y V conjuntos no vacíos y separados tales que $I = U \cup V$. Sean $x \in U, y \in V$. Supongamos que $x < y$. Como I es un intervalo, el intervalo cerrado $[x, y]$ es subconjunto de I.

Ahora, consideremos el conjunto $A = [x, y] \cap U$. $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, por tanto, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sup A$. Así, $x \leq s \leq y$, por lo tanto, $s \in I$. Como $I = U \cup V$, entonces $s \in U$ o $s \in V$. Además, para cada $\epsilon > 0$, el intervalo abierto $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ tiene puntos de U, ya que $s - \epsilon$ no es cota superior del conjunto A. Asimismo, para todo z en $(s, y]$, se cumple que z no pertenece a U por definición de $s = \sup A$. Esto nos indica que $s \in U \cap \overline{V}$ o $s \in \overline{U} \cap V$, lo cual es una contradicción. Por tanto, I es conexo. $\square$

1.27 Corolario. $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos que existen A, B abiertos no vacíos en $\mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R} = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Notemos que el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R} = A \cup B$. Entonces $A \cap [a, b]$ y $B \cap [a, b]$ son no vacíos y como $A \cap B = \emptyset$ cumple que $[a, b] \cap A \cap B = \emptyset$. Es decir, $[a, b]$ es no conexo, lo cual es una contradicción al teorema anterior. □

1.28 Teorema. Sea A un conjunto conexo en la recta real, entonces A es un conjunto unitario o un intervalo.

Demostración. Supongamos que no es un conjunto unitario, ni un intervalo, entonces existen $x, y \in A$, supongamos que $x < y$, tales que el intervalo cerrado $[x, y]$ no está contenido al conjunto A, por lo tanto, existe $z \in (x, y)$ y z no es elemento de A. De esto, se concluye que los conjuntos $A \cap (-\infty, z)$ y $A \cap (z, \infty)$ son no vacíos, separados y

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty)).$$

Por lo tanto, A es no conexo. □

1.29 Teorema. Sean A y B dos conjuntos separados, tales que $E \subset (A \cup B)$ con E conjunto conexo. Entonces $E \subset A$ ó $E \subset B$.

Demostración. Supongamos que $E \cap A \neq \emptyset$ y $E \cap B \neq \emptyset$.

Como $E = (E \cap A) \cup (E \cap B)$, estos conjuntos están separados y no vacíos, es decir, E es no conexo. □

1.30 Teorema. Si $X = \bigcup X_\alpha$, donde para cada X_α es conexo, y $\bigcap X_\alpha \neq \emptyset$ entonces X es conexo.

Demostración. Sea $p \in \bigcap X_\alpha$. Supongamos que X es no conexo. Así, existen dos subconjuntos no vacíos separados, digamos U y V, tales que $X = U \cup V$.

Supongamos que $p \in U$. Observemos que $X_\alpha \subset U \cup V$, X_α conexo para cada α. Por Teorema 1.29, tenemos que $X_\alpha \subset U$ para cada α. Así, $X \subset U$ y por tanto, $V = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. $\square$

1.31 Teorema. Si A es un conjunto conexo de X y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.

Demostración. Supongamos que B es no conexo, es decir, existen dos conjuntos no vacíos separados, digamos U y V, tales que $B = U \cup V$. Como $A \subset B$ y por Teorema 1.29 tenemos que $A \subset U$ ó $A \subset V$. Supongamos que $A \subset U$, así que $\overline{A} \subset \overline{U}$ y por tanto, $B \subset \overline{U}$. Usando, $B \subset \overline{U}, \overline{U} \cap V = \emptyset$ y $B = U \cup V$ se obtiene que $V = \emptyset$; lo cual es una contradicción. $\square$

Observemos que, en particular, si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

1.32 Teorema. Si A es un conjunto conexo, B es un conjunto abierto y cerrado, y A no es ajeno al conjunto B , entonces A es subconjunto de B.

Demostración. Observemos que $A \cap B$ es abierto y cerrado en A. Dado que, $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ y A es conexo obtenemos que $A \cap B = \emptyset$ ó $A \cap B = A$. Por tanto, $A \subset B$. $\square$

1.4. Funciones continuas

En esta sección presentamos el concepto de función continua en espacios topológicos y lo caracterizamos a través de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados. Además, analizamos esta noción en espacios métricos y, en este caso, la caracterizamos por medio de sucesiones.

1.33 Definición. Una función f, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, es *continua en un punto x de X* si para cualquier subconjunto abierto V de Y que contiene al punto $f(x)$, existe un subconjunto abierto U de X que contiene al punto x tal que $f(U) \subset V$. La función f *es continua en un subconjunto A de* X, si f es continua en cada punto de A. En el caso de que $A = X$ decimos simplemente que la función f es continua.

1.34 Teorema. Para una función f, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) La función f es continua.

b) Para cada U abierto en Y, se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

c) Para cada K cerrado en Y, se cumple que $f^{-1}(K)$ es cerrado en X.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Sea U es un abierto en Y. Dado $x \in f^{-1}(U)$, tenemos que existe B_x, abierto en X que contiene al punto x, de tal forma que $f(B_x) \subset U$, y por ende, $x \in B_x \subset f^{-1}(U)$. Es decir, $f^{-1}(U)$ es abierto.

b) $\Rightarrow$ a). Sean $x \in X$ y V un abierto en Y con $f(x) \in V$, por hipótesis, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto que contiene al punto x, que satisface que $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Es decir, la función f es continua.

b) $\Rightarrow$ c). Si K es cerrado en Y, entonces $f^{-1}(Y \setminus K)$ es abierto en X por ser $Y \setminus K$ abierto en Y . Por tanto, $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus K)$ es cerrado en X.

c) $\Rightarrow$ b). Si U es abierto en Y, entonces $f^{-1}(Y \setminus U)$ es cerrado en X, por ser $Y \setminus U$ cerrado en Y. Por tanto, $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus U)$ es abierto en X. $\square$

1.35 Proposición. Para una función f continua, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, y una función g continua, definida en el espacio Y con valores en un espacio Z, entonces la función $g \circ f$, definida en el espacio X con valores en el espacio Z, es continua.

Demostración. Sea U un abierto en Z entonces, por continuidad de g, $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por continuidad de f, $f^{-1}[g^{-1}(U)] = (g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X. Por tanto $g \circ f$ es continua. $\square$

1.36 Definición. Una función f, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, y A un subespacio de X. La función $f\restriction_A$, definida en A con valores en el espacio Y dada por $f\restriction_A(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, se llama *la restricción de la función* f al conjunto A.

1.37 Proposición. Si f es una función continua, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, y A un subespacio de X, entonces la restricción de la función al conjunto A es continua.

Demostración. Sea H un abierto en Y, entonces $(f\restriction_A)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ es abierto en A. Por Teorema 1.34, se concluye que la función $f\restriction_A$ es continua. $\square$

Definamos las funciones continuas para espacios métricos.

1.38 Definición. Una función f, definida en un espacio métrico X con métrica d_X con valores en un espacio métrico Y con métrica d_Y, *es continua en un punto* x_0 si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que ,

$$\text{si } x \in \mathrm{X}, \text{ y } d_X(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

La función f *es continua en un subconjunto A de X*, si f es continua en cada punto de A. En el caso de que $A = X$ decimos simplemente que la función f es continua.

1.39 Lema. Para una función f, definida en un espacio métrico X con métrica d_X con valores en un espacio métrico Y con métrica d_Y, y x_0 un punto de X, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) La función f es continua en x_0.

b) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta))$ es subconjunto de $B(f(x_0), \epsilon)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b)] Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si x pertenece a X, y $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ o equivalentemente,

$$\text{si } x \in B(x_0, \delta) \text{ entonces } f(x) \in B(f(x_0), \epsilon).$$

Esto nos dice que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.

b) $\Rightarrow$ a)] Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta))$ es subconjunto de $B(f(x_0), \epsilon)$. Si $x \in B(x_0, \delta)$ entonces, $f(x) \in f(B(x_0, \delta))$. Por tanto, $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Esto es,

$$\text{si } x \in X \text{ y } d_X(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Es decir, f es continua en x_0.

$\square$

1.40 Teorema. Para una función f, definida en un espacio métrico X con valores en un espacio métrico Y. La función f es continua si, y sólo si, para cada U abierto en Y, se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Demostración. (Necesidad) Si U es abierto en Y y $x \in f^{-1}(U)$, es $f(x)$ un elemento de U. Por hipótesis, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon_x) \subset U$. Como f es continua en x, por Lema 1.39, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon_x)$. Luego, $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon_x)) \subset f^{-1}(U)$; con esto queda probado que, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(Suficiencia) Por hipótesis, para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$, el conjunto

$f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$ es abierto en X. Como $x \in f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$. Por Lema 1.39, se concluye que f es continua. $\square$

Del teorema anterior se obtiene el siguiente corolario.

1.41 Corolario. Para una función f, definida en un espacio métrico X con valores en un espacio métrico Y, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) La función f es continua.

b) Para cada U abierto en Y, se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

c) Para cada K cerrado en Y, se cumple que $f^{-1}(K)$ es cerrado en X.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 1.40 y 1.34. $\square$

Con el teorema anterior se concluye el análisis de las funciones continuas con los conjuntos abiertos y cerrados en espacios métricos. En la seguiente definición se introduce las sucesiones en un espacio métrico (X,d).

1.42 Definición. Una *sucesión* en un espacio métrico X con métrica d es una función definida en el conjunto $\mathbb{N}$ con valores en X.

Si f es una sucesión, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ lo representamos como x_n, la notación usual para una sucesión es $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, también usaremos $\{x_n\}$ o (x_n).

1.43 Definición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X con métrica d y x elemento de X. Se dice que x es un *límite* de $\{x_n\}$ (la sucesión $\{x_n\}$ *converge* a x) si para cada $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(x_n,x) < \epsilon, \text{ para cada } n \geq k.$$

1.44 Teorema. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X puede converger a lo más a un límite.

Demostración. Si la sucesión no converge a ningún punto, no hay nada que probar. Supongamos que x y y son dos límites distintos de la sucesión $\{x_n\}$. Sea $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$, como x y y son límites de la sucesión $\{x_n\}$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x_n, x) < \epsilon \text{ para cada } n \geq k_1 \text{ y } d(x_n, y) < \epsilon \text{ para cada } n \geq k_2.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \max\{k_1, k_2\}$, se cumple que

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon + \epsilon = d(x, y),$$

lo cual es una contradicción. □

Como consecuencia del teorema anterior, si x es un límite de la sucesión $\{x_n\}$ ahora le podemos llamar el límite de la sucesión y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1.45 Teorema. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Un punto x pertenece al conjunto $\overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demostración. (Necesidad) Si $x \in A$, tomamos la sucesión constante $\{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface se pide.

Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Para $\epsilon = 1$, existe

$$x_1 \in A, x_1 \neq x \text{ y } x_1 \in B(x, 1),$$

para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe

$$x_2 \in A, x_2 \neq x_1, x_2 \neq x \text{ y } x_2 \in B(x, \frac{1}{2}).$$

Procediendo inductivamente, para $\epsilon = \frac{1}{n}$, existe

$$x_n \in A, x_n \neq x_i, (i = 1, \ldots, n-1) \text{ y } x_n \in B(x, \frac{1}{n}).$$

Como $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(Suficiencia) Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ como lo indica el teorema. Para todo $r > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, r)$, para $n \geq k$. Por lo tanto, x pertenece al conjunto $\overline{A}$. □

1.46 Definición. Una función f, definida en un espacio métrico X con valores en un espacio métrico Y, es *continua por sucesiones* en un punto x_0 de X si

$$\text{Para cada sucesión } \{x_n\} \text{ en } X, \text{ si } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

1.47 Teorema. Para una función f, definida en un espacio métrico X con valores en un espacio métrico Y, y un punto x_0 de X. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) La función f es continua en x_0.

b) La función f es continua en x_0 por sucesiones.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X que converge a x_0. Queremos demostrar que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$. Sea $\epsilon > 0$, como f es continua en x_0, por Lema 1.39, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.

Como la sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq k$, $x_n \in B(x_0, \delta)$. Sea $n \geq k$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$, con lo cual $f(x_n) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Así, hemos demostrado que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.

b) $\Rightarrow$ a). Contrarrecíproca: Supongamos que f no es continua en x_0, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \text{ y } f(x_n) \text{ no pertenece a } B(f(x_0), \epsilon_0).$$

La sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0, pero la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x_0)$. $\square$

1.48 Definición. Para la función π_1, determinado en un espacio producto $X \times Y$ con valores en el espacio X definido por $\pi_1(x, y) = x$ para todo (x, y) en $X \times Y$, y para la función π_2, determinado en un espacio producto $X \times Y$ con valores en el espacio Y definido por $\pi_2(x, y) = y$, se denominan *proyecciones* de $X \times Y$ sobre su primera y segunda coordenada, respectivamente.

1.49 Teorema. Para una función f, definida en un subespacio A de un espacio X con valores en un espacio producto $X \times Y$ definida por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ para todo a en A. La función f es continua si, y sólo si, la función f_1, definida en el subespacio A con valores en el espacio X, y la función f_2, definida en el subespacio A con valores en el espacio Y, son continuas.

Demostración. Notemos que si U es abierto en X, entonces $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, es abierto en $X \times Y$. Similarmente, si V es abierto en Y, entonces $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ es abierto en $X \times Y$; por este razonamiento π_1 y π_2 son funciones continuas. Además, notemos que $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$.

(Necesidad) Si f es continua, entonces f_1 y f_2 son funciones continuas, por Proposición 1.35.

(Suficiencia) Supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Sea $U \times V$ un abierto de $X \times Y$ y un punto $a \in f^{-1}(U \times V)$ si y sólo si $f(a) \in U \times V$ si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto, $f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ que es abierto en A dado que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, y por Teorema 1.34, f es continua. $\square$

Capítulo 2

El conjunto de Cantor

En este capítulo presentamos dos contrucciones del conjunto de Cantor. Una de ellas es la clásica que se incluye en muchos textos de topología o de análisis, y que se conoce como el conjunto de Cantor de los tercios medios. La otra que no es muy conocida, la referimos aquí como el conjunto de Cantor de los quintos medios. Notamos que estas dos construcciones proporcionan espacios homeomorfos, debido a un teorema de caracterización que mencionamos al final de la sección 2.1.

2.1. Conjunto de Cantor de los tercios medios

Para dos números reales a y b, con $a < b$, el *tercio medio* del intervalo cerrado $[a, b]$ es el subintervalo abierto definido por $(a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$. Observamos que

$$[a, b] \setminus (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [b - \frac{b-a}{3}, b].$$

Es decir, el invervalo cerrado $[a, b]$ menos su tercio medio es la unión de dos intervalos cerrados ajenos, los cuales son componentes conexos de esta diferencia. Denotamos por $T(B)$ al tercio medio de un intervalo cerrado B.

El *conjunto de Cantor de los tercios medios* en el intervalo cerrado $[0,1]$, que denotaremos por $\mathbf{K}$, es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursivamente como sigue: $A_1 = [0,1]$ y, para cada número natural $n \geq 2$,

$$A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup \{T(B) : B \text{ es componente de } A_{n-1}\}.$$

Así,

$$\mathbf{K} = \bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Una representación gráfica de este conjunto de Cantor se puede consultar en la página 211 de [2].

Cada tercio medio, $T(B)$, de cada componente, B, de cada uno de los conjuntos A_n, es referido como un *intervalo contiguo* al conjunto de Cantor. Afirmamos que el conjunto de todos los intervalos contiguos es numerable. En efecto, de cada uno de estos intervalos contiguos podemos seleccionar un número racional. Como estos intervalos son disjuntos por pares, los números racionales seleccionados deben ser diferentes por pares. Como el conjunto de todos los números racionales es numerable, se concluye lo que afirmamos.

Por construcción, $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, como cada tercio medio es un conjunto abierto, notamos que cada A_n es un conjunto cerrado en el intervalo $[0,1]$. De los Teoremas 1.15 y 1.16 se sigue que el conjunto de Cantor es un subespacio compacto del intervalo $[0,1]$.

Observemos que A_1 tiene sólo una componente, cuyo diámetro es 1; $A_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ es un conjunto de dos componentes, cada una de las cuales tiene diámetro $\frac{1}{3}$; $A_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, así A_3 es un conjunto que tiene cuatro componentes, y el diámetro de cada una de estas es $\frac{1}{9}$. En general, inductivamente, observamos que cada conjunto A_n tiene 2^{n-1} componentes, y el diámetro de cada una de estas componentes es $\frac{1}{3^{n-1}}$.

2.1 Teorema. Un punto x del intervalo cerrado $[0, 1]$ pertenece al conjunto de Cantor si, y sólo si, existe una única sucesión decreciente de intervalos cerrados, $\{B_{x,n}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{x,n}$ es una componente del conjunto A_n y $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

Demostración. (Necesidad)] Dado un punto $x \in \mathbf{K}$, basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$, denotar por $B_{x,n}$ a la (única) componente de A_n que contiene al punto x. $\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente y observar que $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(B_{x,n}) = 0$. Además, $x \in B_{x,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte; si $y \neq x$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n-1}} < |x - y|$. Se sigue que y no pertenece a $B_{x,n}$ ya que $\text{diám}(B_{x,n}) = \frac{1}{3^{n-1}}$. Así, el punto y no pertenece a $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$. Esto prueba que $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

(Suficiencia) $x \in \bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbf{K}$.

□

Considerando la notación del teorema anterior, si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos un punto cualquiera x_n en la componente $B_{x,n}$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge al punto x; esto se tiene porque

$$|x - x_n| \leq \text{diám}(B_{x,n}) = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Además, puesto que cada componente $B_{x,n}$ contiene un intervalo contiguo al conjunto de Cantor, su tercio medio, entonces cada punto x_n puede ser tomado como el ínfimo (extremo izquierdo), o como el supremo (extremo derecho) o como el punto medio de un intervalo contiguo al conjunto de Cantor. De aquí se sigue que el conjunto de Cantor es *perfecto*, pues así se le llama a un espacio en el cual todo punto tiene en cada una de sus vecindades puntos del espacio distintos de él.

2.2 Teorema. Si x, y son puntos de $\mathbf{K}$, con $x < y$, entonces existe un intervalo contiguo al conjunto $\mathbf{K}$ contenido en el intervalo abierto (x, y).

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{y-x}{2}$. Notamos que $\epsilon > 0$. Considerando la notación del párrafo previo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(B_{x,n}) < \epsilon$ y $\text{diám}(B_{y,n}) < \epsilon$. Así, y no pertenece a $B_{x,n}$, por lo cual $B_{x,n} \neq B_{y,n}$.

Denotemos $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : B_{x,n} \neq B_{y,n}\}$. Observamos que $n_0 \geq 2$, ya que $A_1 = [0, 1]$. Además, $B_{x,n_0-1} = B_{y,n_0-1}$ y

$$B_{x,n_0-1} = B_{x,n_0} \cup T(B_{x,n_0-1}) \cup B_{y,n_0}.$$

Así, el tercio medio, $T(B_{x,n_0-1})$ de la componente B_{x,n_0-1}, de A_{n_0-1} es un intervalo contiguo al conjunto $\mathbf{K}$ tal que $T(B_{x,n_0-1}) \subset (x, y)$.

□

2.3 Teorema. Si E es un subconjunto del conjunto de Cantor que contiene más de un punto, entonces E es no conexo.

Demostración. Tomemos dos puntos diferentes x y y en el conjunto E. De acuerdo con el Teorema 2.1, existe un número natural n tal que estos puntos están en diferentes componentes del conjunto A_n, es decir $B_{x,n}$ es diferente, y por tanto es un conjunto disjunto, de $B_{y,n}$. Podemos suponer que $x < y$. Así, por el Teorema 2.2, existe un intervalo contiguo, digamos V, al conjunto de Cantor, tal que para cada punto z en V se tiene que $x < z < y$. Fijemos un punto cualquiera z en V. Observamos que $E \cap [0, z)$ y $E \cap (z, 1]$ son dos conjuntos abiertos en E, no vacíos, disjuntos, cuya unión es el conjunto E. Esto prueba que E es no conexo. □

En otra palabras, el teorema anterior establece que los únicos subconjuntos conexos del conjunto de Cantor son los conjuntos que consisten de un sólo punto. Es decir, el conjunto de Cantor es *totalmente disconexo*, como se denomina a un espacio con esta propiedad.

Por cultura general mencionamos la siguiente caracterización del conjunto de Cantor. No incluimos su demostración porque no usamos este resultado en nuestra tesis. El lector interesado puede consultar el Teorema 7.14 en [9].

2.4 Teorema. Un espacio métrico X es homeomorfo al conjunto de Cantor si, y sólo si, el espacio X es compacto, perfecto y totalmente disconexo.

2.2. Conjunto de Cantor de los quintos medios

Para dos números reales a y b, con $a < b$, los *quintos medios* del intervalo cerrado $[a, b]$ son los subintervalos abiertos $(a + \frac{1}{5}(b - a), a + \frac{2}{5}(b - a))$ y $(a+\frac{3}{5}(b-a), a+\frac{4}{5}(b-a))$. El primero es referido como el *quinto medio izquierdo* y el segundo como *quinto medio derecho*. Observamos que

$$[a, b] \setminus ((a + \tfrac{1}{5}(b - a), a + \tfrac{2}{5}(b - a)) \cup (a + \tfrac{3}{5}(b - a), a + \tfrac{4}{5}(b - a))) =$$

$$[a, a + \tfrac{1}{5}(b - a)] \cup [a + \tfrac{2}{5}(b - a), a + \tfrac{3}{5}(b - a)] \cup [a + \tfrac{4}{5}(b - a), b].$$

Es decir, el invervalo cerrado $[a, b]$ menos sus quintos medios es la unión de tres intervalos cerrados ajenos, los cuales son componentes conexos de esta diferencia.

Para un intervalo cerrado B, denotamos por $T_l(B)$ a su quinto medio izquierdo, y por $T_r(B)$ a su quinto medio derecho. Además, denotamos $T(B) = T_l(B) \cup T_r(B)$.

El *conjunto de Cantor de los quintos medios* en el intervalo cerrado $[0,1]$, que denotamos por $\mathbf{K}_5$, es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursivamente como sigue: $A_1 = [0,1]$ y, para cada número natural $n \geq 2$,

$$A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup \{T(B) : B \text{ es componente de } A_{n-1}\}.$$

Así,

$$\mathbf{K}_5 = \bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Cada uno de los quintos medios, $T_l(B)$ y $T_r(B)$, de cada componente, B, de cada uno de los conjuntos A_n, es referido como *un intervalo contiguo* al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$.

Claramente, $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, como los quintos medios son conjuntos abiertos, notamos que cada A_n es un conjunto cerrado en el intervalo $[0,1]$. Se sigue que el conjunto de Cantor de los quintos medios, $\mathbf{K}_5$, es un subconjunto cerrado y, así, un subconjunto compacto del intervalo $[0,1]$ (véase los Teoremas 1.15 y 1.16).

Observamos que A_1 tiene sólo una componente, cuyo diámetro es 1;

$$A_2 = [0, \tfrac{1}{5}] \cup [\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}] \cup [\tfrac{4}{5}, 1],$$

así, A_2 es un conjunto de tres componentes, cada una de las cuales tiene diámetro $\frac{1}{5}$;

$$A_3 = [0, \tfrac{1}{25}] \cup [\tfrac{2}{25}, \tfrac{3}{25}] \cup [\tfrac{4}{25}, \tfrac{1}{5}] \cup [\tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{25}] \cup [\tfrac{12}{25}, \tfrac{13}{25}] \cup [\tfrac{14}{25}, \tfrac{3}{5}] \cup [\tfrac{4}{5}, \tfrac{21}{25}] \cup [\tfrac{22}{25}, \tfrac{23}{25}] \cup [\tfrac{24}{25}, 1],$$

así, A_3 es un conjunto que tiene nueve componentes, y el diámetro de cada una de éstas es $\frac{1}{25}$. En general, inductivamente, observamos que cada conjunto A_n tiene 3^{n-1} componentes, y el diámetro de cada una de estas componentes es $\frac{1}{5^{n-1}}$.

Concretamente, notamos que una componente B_k del conjunto A_n es un intervalo cerrado de lo forma $B_k = [\frac{k}{5^{n-1}}, \frac{k+1}{5^{n-1}}]$, para algún número entero k tal que $0 \leq k \leq 5^{n-1} - 1$. Además, los quintos medios de esta componente (izquierdo y derecho, respectivamente) son los intervalos abiertos $T_l(B_k) = (\frac{5k+1}{5^n}, \frac{5k+2}{5^n})$ y $T_r(B_k) = (\frac{5k+3}{5^n}, \frac{5k+4}{5^n})$.

2.5 Proposición. Los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ pertenecen al conjunto $\mathbf{K}_5$.

Demostración. Primero, supongamos que $\frac{1}{2}$ no es un elemento de $\mathbf{K}_5$. Así, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}$ no pertenece a A_j. Se sigue que, para todo $n \geq j$, $\frac{1}{2}$ no pertenece a A_n ya que, en tal caso, $A_n \subset A_j$.

Tomemos $m = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \in A_n\}$ y sea $B_k = [\frac{k}{5^{m-1}}, \frac{k+1}{5^{m-1}}]$ la componente de A_m que contiene a $\frac{1}{2}$, donde $k \in \{0, 1, \ldots, 5^{m-1} - 1\}$. Se obtiene que $\frac{1}{2}$ pertenece a $T(B_k) = T_l(B_k) \cup T_r(B_k)$. Analicemos los dos casos:

- Si $\frac{1}{2}$ pertenece a $T_l(B_k)$,

$$\frac{5k+1}{5^m} < \frac{1}{2} < \frac{5k+2}{5^m} \text{ entonces } 10k + 2 < 5^m < (10k + 2) + 2.$$

  Por lo que, $5^m = 10k + 3$, es decir, $5^{m-1} - 2k = \frac{3}{5} \in \mathbb{Z}$; lo cual es una contradicción.

- Si $\frac{1}{2}$ pertenece a $T_r(B_k)$,

$$\frac{5k+3}{5^m} < \frac{1}{2} < \frac{5k+4}{5^m} \text{ entonces } 10k + 6 < 5^m < (10k + 6) + 2.$$

  Por lo que, $5^m = 10k + 7$, es decir, $5^{m-1} - 2k = \frac{7}{5} \in \mathbb{Z}$; lo cual es una contradicción.

De manera análoga, se llega una contradicción si suponemos que $\frac{1}{10}$ no es un elemento de $\mathbf{K}_5$. Por tanto; los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ pertenecen al conjunto $\mathbf{K}_5$.

$\square$

2.6 Teorema. Si x pertenece a $\mathbf{K}_5$, entonces $1-x$ pertenece a $\mathbf{K}_5$. Además, si x es punto extremo de un intervalo contiguo a $\mathbf{K}_5$, entonces $1-x$ también es un punto extremo de un intervalo contiguo a $\mathbf{K}_5$.

Demostración. [Por contrarrecíproca] Supongamos que $1-x$ no pertenece al conjunto $\mathbf{K}_5$. Luego, existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $1-x$ no es elemento de A_j. Se sigue que para todo $n \geq j$, no es elemento de A_n, pues en este caso $A_n \subset A_j$.

Denotemos $m = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : 1-x \in A_n\}$. Se tiene que $1-x$ pertenece a A_m y $1-x$ no pertenece a A_{m+1}. Denotamos por B_k a la componente de A_m que contiene a $1-x$. Notamos que $1-x$ pertenece a uno de los quintos medios de B_k. Recordemos que $B_k = [\frac{k}{5^{m-1}}, \frac{k+1}{5^{m-1}}]$ para algún $k \in \{0, 1, \ldots, 5^{m-1}-1\}$, y sus quintos medios son $T_l(B_k) = (\frac{5k+1}{5^m}, \frac{5k+2}{5^m})$ y $T_r(B_k) = (\frac{5k+3}{5^m}, \frac{5k+4}{5^m})$. Tenemos que $1-x$ pertenece a $T_l(B_k) \cup T_r(B_k)$, supongamos que $1-x$ pertenece a $T_l(B_k)$; el otro caso se trata de manera similar.

Se tiene que

$$\frac{5k+1}{5^m} < 1-x < \frac{5k+2}{5^m}$$

Luego, se obtiene que

$$\frac{5k'+3}{5^m} < x < \frac{5k'+4}{5^m} \qquad \text{donde} \quad k' = 5^{m-1} - k - 1.$$

Esto significa que x pertenece al quinto medio $T_r(B_{k'})$, de la componente $B_{k'}$ del conjunto A_m. Se sigue que x no pertenece a A_{m+1}, por lo cual x no pertenece a $\mathbf{K}_5$.

Por otro lado, supongamos que x es un punto extremo de algún intervalo contiguo al conjunto $\mathbf{K}_5$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x es un punto extremo de uno de los quintos medios de una componente, digamos B_k, del conjunto A_n. Así, x es un punto extremo de uno de los intervalos $(\frac{5k+1}{5^n}, \frac{5k+2}{5^n})$ y $(\frac{5k+3}{5^n}, \frac{5k+4}{5^n})$. Es decir,

$$x = \frac{5k+i}{5^n} \quad \text{para algún} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Se obtiene que

$$1 - x = \frac{5k' + i'}{5^n} \quad \text{donde } k' = 5^{n-1} - k - 1 \text{ y } i' = 5 - i.$$

Es decir, $1 - x$ es punto extremo de uno de los quintos medios de la componente $B_{k'}$ del conjunto A_n.

□

2.7 Teorema. Un punto x del intervalo cerrado $[0, 1]$ pertenece al conjunto de Cantor de los quintos medios $\mathbf{K}_5$ si, y sólo si, existe una única sucesión decreciente de intervalos cerrados, $\{B_{x,n}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{x,n}$ es una componente del conjunto A_n y $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

Demostración. (Necesidad) Dado un punto $x \in \mathbf{K}_5$, notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x es un punto del conjunto A_n, denotar por $B_{x,n}$ a la (única) componente de A_n que contiene al punto x. $\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente y observar que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diám}(B_{x,n}) = 0$. Además, $x \in B_{x,n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte; si $y \neq x$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{5^{n-1}} < |x - y|$. Se sigue que y no pertenece a $B_{x,n}$, ya que $\operatorname{diám}(B_{x,n}) = \frac{1}{5^{n-1}}$. Así, el punto y no pertenece a $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$. Esto prueba que $\bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

(Suficiencia) $x \in \bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbf{K}_5$.

$\square$

Considerando la notación del teorema anterior, si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos un punto cualquiera x_n en la componente $B_{x,n}$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge al punto x; esto se tiene porque

$$|x - x_n| \leq \text{diám}(B_{x,n}) = \frac{1}{5^{n-1}}.$$

De aquí se sigue que el conjunto de Cantor de los quintos medios, $\mathbf{K}_5$, es perfecto.

Además, puesto que cada componente $B_{x,n}$ contiene dos intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$, a saber, sus quintos medios, entonces cada punto x_n puede ser tomado como el ínfimo (extremo izquierdo), o como el supremo (extremo derecho) o como el punto medio de un quinto medio al conjunto $\mathbf{K}_5$.

2.8 Teorema. Si x, y son puntos de $\mathbf{K}_5$, con $x < y$, entonces existe un intervalo contiguo al conjunto $\mathbf{K}_5$ contenido en el intervalo abierto (x, y).

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{y-x}{2}$. Notamos que $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que diám$(B_{x,n}) < \epsilon$ y diám$(B_{y,n}) < \epsilon$. Así, y no pertenece a $B_{x,n}$, por lo cual $B_{x,n} \neq B_{y,n}$. Denotemos $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : B_{x,n} \neq B_{y,n}\}$. Observamos que $n_0 \geq 2$, ya que $A_1 = [0, 1]$. Además, $B_{x,n_0-1} = B_{y,n_0-1}$ y

$$B_{x,n_0-1} = C_1 \cup T_l(B_{x,n_0-1}) \cup C_2 \cup T_r(B_{x,n_0-1}) \cup C_3,$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las componentes de $B_{x,n_0-1} \setminus T(B_{x,n_0-1})$, además, $B_{x,n_0} = C_i$ y $B_{y,n_0} = C_j$ con $i \neq j$ y $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Se obtiene que al menos uno de los dos quintos medios, $T_l(B_{x,n_0-1})$ o $T_r(B_{x,n_0-1})$, está contenido en el intervalo abierto (x, y).

□

2.9 Teorema. Si E es un subconjunto del conjunto de Cantor de los quintos medios que contiene más de un punto, entonces E es no conexo.

Demostración. Tomemos dos puntos diferentes x y y en el conjunto E. De acuerdo con el Teorema 2.7, existe un número natural n tal que estos puntos están en diferentes componentes del conjunto A_n, es decir $B_{x,n}$ es diferente, y por tanto es un conjunto disjunto, de $B_{y,n}$. Podemos suponer que $x < y$. Así, por Teorema 2.8, existe un intervalo contiguo, digamos V, al conjunto $\mathbf{K}_5$, tal que para cada punto z en V se tiene que $x < z < y$. Fijemos un punto cualquiera z en V. Observamos que $E \cap [0, z)$ y $E \cap (z, 1]$ son dos conjuntos abiertos en E, no vacíos, disjuntos, cuya unión es el conjunto E. Esto prueba que E es no conexo. □

En otra palabras, el teorema anterior establece que los únicos subconjuntos conexos del conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$ son los conjuntos que consisten de un sólo punto. Es decir, el conjunto de Cantor de los quintos medios también es *totalmente disconexo*.

Compilando lo anterior, se tiene que $\mathbf{K}_5$ es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo. Así, de acuerdo con el Teorema 2.4 se obtiene el resultado siguiente.

2.10 Teorema. El conjunto de Cantor de los quintos medios es homeomorfo al conjunto de Cantor de los tercios medios.

2.11 Teorema. Si a y b son números reales tales que $0 \leq a < b \leq 1$, entonces existe un número entero positivo m tal que el intervalo abierto (a, b) contiene una componente del conjunto A_m, o el intervalo abierto (a, b) está contenido en algún intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$.

Demostración. Con las hipótesis mencionadas, analizamos dos casos:

Caso 1. El intervalo abierto (a, b) contiene algún punto del conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. En este caso tomamos un punto x en la intersección $(a, b) \cap \mathbf{K}_5$, y recordamos que $\{x\} = \bigcap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_{x,n}$ es la componente del conjunto A_n que contiene al punto x. Observamos que la colección de estas componentes constituye una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados del intervalo $[0, 1]$, cuya intersección está contenida en el intervalo abierto (a, b). De acuerdo con el Teorema 1.19, el intervalo abierto (a, b) contiene a alguno de los subconjuntos cerrados de esta sucesión. Es decir, existe un número entero positivo m tal que la componente $B_{x,m}$ del conjunto A_m está contenida en el intervalo abierto (a, b).

Caso 2. El intervalo abierto (a, b) no contiene algún punto del conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. En este caso, el intervalo abierto (a, b) está contenido en la unión de los intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. Es decir, $(a, b) \subset \bigcup\{T(B) : B \text{ es componente de } A_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos un punto x en el intervalo (a, b). Existen un número entero positivo m y una componente, digamos B_x del conjunto A_m tales que x pertenece a $T(B_x)$. Denotemos por U al intervalo del conjunto $T(B_x)$ que contiene al punto x. Observamos que U es uno de los dos quintos medios que constituyen a $T(B_x)$. Por otra parte, denotemos por V a la unión de todos los intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$ que son diferentes de U. En otras palabras, sea $V = \bigcup\{T(B) : B \text{ es componente de } A_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \setminus U$. Tenemos que U y V son dos conjuntos abiertos separados tales que $(a, b) \subset U \cup V$. Como el intervalo abierto (a, b) es un conjunto conexo, y puesto que x pertenece a la intersección $(a, b) \cap U$, concluimos que el intervalo abierto (a, b) está contenido en el intervalo contiguo U, por Teorema 1.29. $\square$

Un resultado similar al Teorema 2.11, con una demostración similar, se puede establecer para el conjunto de Cantor de los tercios medios. Esto no lo hacemos explícito, porque no lo usamos en la tesis.

Capítulo 3

Funciones de conectividad, conexas y de Darboux

En el presente capítulo presentamos y analizamos los conceptos que motivan esta tesis, a saber: el de función de conectividad, el de función conexa y el de función de Darboux. Éstos han sido estudiados con profundidad por varios autores, por ejemplo por F. Jordan [6] y por S.B. Nadler Jr. [10].

Aquí, limitamos nuestro estudio a observar que estas nociones son generalizaciones naturales de la noción de continuidad, en relación con la propiedad topológica de conexidad, y las comparamos entre sí; además, demostramos que las nociones de función de conectividad y de función conexa coinciden en cualquier intervalo de la recta real (Sección 3.1). También, exponemos con detalles una función de conectividad (conexa y de Darboux) que no es continua en cada punto de un conjunto de Cantor en el intervalo cerrado $[0,1]$, a esta le llamamos función de Bruckner-Ceder porque la hemos tomado de un artículo de estos autores [1] (Sección 3.2). Además, similarmente, exponemos una función de Darboux que no es conexa (ni de conectividad) y que no es continua en cada punto de un conjunto de Cantor en el intervalo cerrado $[0,1]$, a la cual denominamos función de Ciesielski-Kellum en nombre de los autores del artículo [3] (Sección 3.3).

3.1. Definiciones y relaciones

Aquí presentamos las definiciones de los conceptos que nos ocupan, y analizamos las relaciones entre éstos y los comparamos con la noción de continuidad. Para ésto primero recordamos la definición de gráfica de una función.

3.1 Definición. La *gráfica de una función* f, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, es subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ dado por $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

3.2 Definición. Una función f, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, es:

1. *de conectividad*, si para cada subconjunto conexo C de X se tiene que la gráfica $G(f \restriction_C)$ de la restricción de la función f en C, $f \restriction_C$, es un subconjunto conexo del producto $C \times Y$.

2. *conexa*, si la gráfica $G(f)$ de la función f es un subconjunto conexo del producto $X \times Y$.

3. *de Darboux*, si para cada subconjunto conexo C de X se tiene que $f(C)$ es un subconjunto conexo de Y.

3.3 Nota. En relación con el nombre de Darboux en la definición previa, comentamos que este matemático francés, en su artículo [4] de 1875, demostró que si una función f en la recta real es la derivada de alguna función

g, es decir, $f = g'$, entonces esta función f satisface una condición equivalente a la que damos en nuestra definición. Una prueba actual de este hecho, con elementos de topología, es presentada por S. B. Nadler Jr. en [8].

El objetivo en esta sección es analizar el esquema siguiente.

3.4 Esquema.

$$\begin{array}{ccccc} \text{continua} & \longrightarrow & \text{de conectividad} & \longrightarrow & \text{de Darboux} \\ & & \downarrow \ \text{X conexo} & & \\ & & \text{conexa} & & \end{array}$$

A continuación, exponemos las demostraciones de las implicaciones indicadas en este esquema, y mostramos ejemplos que prueban que los recíprocos son falsos. Además, demostramos que en cualquier intervalo de la recta real, las nociones de conectividad y conexa son equivalentes.

Primero, como un resultado auxiliar, demostramos un hecho conocido en un primer curso de topología general: las funciones continuas preservan la conexidad, es decir, envían conjuntos conexos en conjuntos conexos; o, en los términos de la Definición 3.2, éstas son de Darboux.

3.5 Teorema. Si f es una función continua, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, entonces f es una función de Darboux.

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de X. Debemos probar que $f(C)$ es conexo. Para esto, denotamos $g = f\restriction_C$. Notemos que $g : C \to f(C)$ es una función continua y sobreyectiva. Supongamos que $f(C)$ es no conexo. Tomemos dos conjuntos abiertos en $f(C)$ no vacíos y disjuntos, digamos U y V, tales que $f(C) = U \cup V$. Es claro que $g^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos en C (porque $g : C \to f(C)$ es continua), disjuntos (porque U y V son disjuntos) y no vacíos (porque $g : C \to f(C)$ es sobreyectiva). Además, es claro que $C = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$. Así, C es no conexo. De este modo, obtenemos la demostración del teorema. □

En lo que sigue vemos que las funciones continuas son de conectividad.

3.6 Teorema. Si f es una función continua, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, entonces f es una función de conectividad.

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de X. Debemos demostrar que la gráfica de la función $f \restriction_C$ es un subconjunto conexo del producto $C \times Y$. Para esto, consideramos la función $h : C \to C \times Y$ definida por $h(x) = (x, f(x))$ para todo x en C. Tenemos que h es una función continua (véase Teorema 1.49). Así, h es una función de Darboux (Teorema 3.5). En particular, $h(C)$ es subconjunto conexo de $C \times Y$. Por otro lado, observamos que,

$$h(C) = \{h(x) : x \in C\} = \{(x, f(x)) : x \in C\} = G(f \restriction_C).$$

Esto demuestra que la gráfica $G(f \restriction_C)$ es un conjunto conexo. □

En el resultado siguiente vemos que las funciones de conectividad son de Darboux.

3.7 Teorema. Si f es una función de conectividad, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, entonces f es una función de Darboux.

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de X. Por hipótesis, $G(f \restriction_C)$ es un subconjunto conexo de $C \times Y$. Por otra parte, tenemos que la proyección en la segunda coordenada, $\pi_2 : C \times Y \to Y$, es una función continua, y por ésto una función de Darboux (Teorema 3.5). En particular, $\pi_2(G(f \restriction_C))$ es un subconjunto conexo de Y. Ahora, notamos que

$$\pi_2(G(f \restriction_C)) = \pi_2(\{(x, f(x)) : x \in C\}) = \{f(x) : x \in C\} = f(C).$$

Así, obtenemos que $f(C)$ es un subconjunto conexo de Y. Esto demuestra el teorema. $\square$

Para concluir con las implicaciones del Esquema 3.4, probaremos que las funciones de conectividad, con dominio conexo, son conexas. Aunque esto es evidente por las definiciones en 3.2, lo hacemos explícito por formalidad.

3.8 Teorema. Si f es una función de conectividad, definida en un espacio conexo X con valores en un espacio Y, entonces f es una función conexa.

Demostración. Observemos que X es un subconjunto conexo de X y que $G(f) = G(f \restriction_X)$. Así, la gráfica $G(f)$ es un conjunto conexo. $\square$

Como un corolario obtenemos otro hecho conocido de la topología general: las funciones continuas con dominio conexo, tienen gráficas conexas o, en nuestros términos, estas funciones son conexas.

3.9 Corolario. Si f es una función continua, definida en un espacio conexo X con valores en un espacio Y, entonces f es una función conexa.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 3.6 y 3.8. $\square$

Otro hecho sencillo es que el dominio de una función conexa debe ser un espacio conexo, a continuación anotamos esto formalmente.

3.10 Teorema. Si f es una función conexa, definida en un espacio X con valores en un espacio Y, entonces X es conexo.

Demostración. Por hipótesis la gráfica $G(f)$ es un conjunto conexo del producto $X \times Y$. Notamos que la proyección en la primera coordenada $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una función continua, y así, de Darboux (Teorema 3.5). En consecuencia, $\pi_1(G(f))$ es un subconjunto conexo de X. Por otra parte, es claro que $\pi_1(G(f)) = X$. Esto prueba que X es conexo. $\square$

Continuamos el análisis del Esquema 3.4 con una serie de ejemplos. El primero muestra que la condición de conexidad sobre el dominio de la función, es esencial en la implicación: de conectividad $\to$ conexa. Al mismo tiempo este primer ejemplo muestra que existen funciones de Darboux que no son conexas, así: de Darboux $\nrightarrow$ conexa.

3.11 Ejemplo. Cada función continua definida en un espacio no conexo, es una función de conectividad (Teorema 3.6) y es una función de Darboux (Teorema 3.7), que no es conexa (Teorema 3.10). Por ejemplo, la función $f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to [0, 1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \\ \\ x - 1 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

es una función continua (véase [7, Teorema 18.3, p. 123]) y no es conexa (porque su dominio es no conexo).

A continuación, observamos que la condición de Darboux no implica la condición de conectividad.

3.12 Ejemplo. La función de Ciesielski-Kellum, que exponemos más adelante en la Sección 3.3, es una función de Darboux que no es de conectividad.

3.13 Observación. En realidad, en la Sección 3.3, mostramos que la función de Ciesielski-Kellum está definida en el intervalo cerrado $[0,1]$ y no es conexa. Así, esta función muestra que, aún con dominio conexo, de Darboux $\not\twoheadrightarrow$ conexa.

El Ejemplo 3.14 a continuación, muestra que existen funciones conexas que no son de Darboux. De este modo, observamos que no hay una relación directa entre las funciones de Darboux y las funciones conexas. Esquemáticamente, tenemos que:

de Darboux $\not\twoheadrightarrow$ conexa y conexa $\not\twoheadrightarrow$ de Darboux.

3.14 Ejemplo. Una función conexa que no es de Darboux.

Sean $X = \mathbb{R}$ con la topología indiscreta, $\tau = \{\emptyset, X\}$, $Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y $f : X \to Y$ la función identidad. Supongamos que la gráfica de $G(f)$ es un conjunto no conexo. Tomamos dos conjuntos abiertos en $G(f)$ no vacíos y disjuntos, A y B, tales que $G(f) = A \cup B$. A continuación tres observaciones:

1) $\pi_2(A)$ y $\pi_2(B)$ son conjuntos no vacíos; porque A y B son conjuntos no vacíos.

2) $Y = \pi_2(A) \cup \pi_2(B)$; porque si $y \in Y$ entonces $(y, y) \in G(f)$. Luego, $(y, y) \in A$ o $(y, y) \in B$. Así, $y \in \pi_2(A)$ o $y \in \pi_2(B)$.

3) $\pi_2(A)$ y $\pi_2(B)$ son conjuntos separados: porque si $z \in \pi_1(A) \cap \overline{\pi_2(B)}$, entonces $(z, z) \in A$. Como A es abierto en $G(f)$, existe un conjunto abierto en Y, digamos U, tal que $(z, z) \in (X \times U) \cap G(f) \subset A$. Se sigue que $z \in U$. En consecuencia, puesto que $z \in \overline{\pi_2(B)}$, se tiene que $U \cap \pi_2(B) \neq \emptyset$. Tomamos un punto $w \in U \cap \pi_2(B)$. Se tiene que $(w, w) \in B$. Por otra parte, notamos que $(w, w) \in (X \times U) \cap G(f) \subset A$. Así, $(w, w) \in A \cap B$, una

contradicción. Se obtiene una contradicción similar si suponemos que $\overline{\pi_2(A)} \cap \pi_2(B) \neq \emptyset$. Esto prueba (3).

Con las tres observaciones anteriores implican que Y, que es $\mathbb{R}$ con la topología usual, es no conexo, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que la gráfica $G(f)$ es un conjunto conexo. Por otra parte, observamos que el conjunto de dos puntos $\{0,1\}$ es un subconjunto conexo de X, y $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$ es no conexo en Y (véase Teorema 1.24). Esto significa que la función f no es de Darboux.

3.15 Observación. La función del ejemplo anterior no es de conectividad (véase Teorema 3.7). En consecuencia, esta función también muestra que: conexa $\nrightarrow$ de conectividad.

El ejemplo que sigue concluye el análisis del Esquema 3.4, mostrando que: de conectividad $\nrightarrow$ continua.

3.16 Ejemplo. Una función de conectividad que no es continua.

Sea $f : [0,1] \to [-1,1]$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función no es continua. En efecto, si para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos

$$x_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

tenemos que $f(x_n) = 1$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a 0 y $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(0)$.

Ahora, probemos que esta función es de conectividad. Sea C un subconjunto conexo del intervalo $[0,1]$. Debemos demostrar que la gráfica $G(f \restriction_C)$ es un conjunto conexo. Analizamos dos casos:

I) El punto 0 no pertenece a C: en este caso, $C \subset (0,1]$ y $f \restriction_C$ coincide con la función $f \restriction_{(0,1]} \restriction_C$, lo cual es una función continua. Se sigue que $G(f \restriction_C)$ es conexo.

II) El punto 0 pertenece a C: en este caso, observamos que $C \setminus \{0\}$ es un subconjunto conexo de $(0,1]$ y $f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}}$ es una función continua así, $G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}})$ es un conjunto conexo. Por otra parte, notamos que $(0,0)$ pertenece a la cerradura de este conjunto, porque si para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ tenemos que $f(x_n) = 0$; además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N, x_n \in C$. Así, $(x_n, 0) \in G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}})$; y es claro que la sucesión $\{(x_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto $(0,0)$. Por lo anterior tenemos que:

$$G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}}) \subset \{(0,0)\} \cup G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}}) \subset \overline{G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}})}.$$

Así, el conjunto $\{(0,0)\} \cup G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}})$ es conexo (véase Teorema 1.31). Finalmente notamos que

$$G(f \restriction_C) = \{(0,0)\} \cup G(f \restriction_{(0,1]} \restriction_{C\setminus\{0\}}),$$

por lo cual concluimos que $G(f \restriction_C)$ es un conjunto conexo.

3.17 Observación. Por el Teorema 3.8, la función f del Ejemplo 3.16 es función conexa. Esto último, también puede probarse directamente observando que $G(sen(\frac{1}{x})) \subset G(f) \subset \overline{G(sen(\frac{1}{x}))}$, considerando la función $sen(\frac{1}{x})$

en el intervalo $(0, 1]$. Por otra parte, usando que esta función es conexa y el Teorema 3.20 (más adelante), se obtiene otra demostración de que tal función f es de conectividad.

3.18 Observación. A la función de conectividad dada en el Ejemplo 3.16 la continuidad le falla únicamente en un punto (en $x = 0$). La función de Bruckner-Ceder, que exponemos en la Sección 3.2, es una función de conectividad, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, que no es continua en cada punto de un subconjunto no numerable de ese intervalo.

Para finalizar esta sección, a continuación exponemos nuestra demostración de que para funciones real valuadas definidas en intervalos las condiciones de conectividad y de conexa son equivalentes. Para esto, primero probamos el lema que sigue.

3.19 Lema. La restricción de una función conexa de la recta real a cualquier intervalo también es función conexa.

Demostración. Sea L un subconjunto de $\mathbb{R}$, y sea $f : L \to \mathbb{R}$ una función conexa. Por el Teorema 3.10, L es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, y así L es un intervalo en $\mathbb{R}$ (Teorema 1.28). Ahora, tomemos un subintervalo propio de L, digamos J. Debemos demostrar que $f \restriction_J : J \to \mathbb{R}$ es una función conexa; es decir, debemos demostrar que la gráfica $G(f \restriction_J)$ es un subconjunto conexo del producto $J \times \mathbb{R}$.

Existen puntos p y q en $\mathbb{R}$ tales que ocurre uno de los siguientes casos: (1) $J = [p, q]$; (2) $J = [p, q)$; (3) $J = (p, q]$; (4) $J = (p, q)$; (5) $J = [p, \infty)$; (6) $J = (p, \infty)$; (7) $J = (-\infty, q]$; y, (8) $J = (-\infty, q)$.

A continuación, demostramos lo requerido para el caso (1), y explicamos cómo se obtiene el resultado en los otros casos a partir del primero.

Supongamos que $J = [p, q]$ y, procediendo por contradicción, supongamos que la gráfica $G(f \upharpoonright_{[p,q]})$ es no conexo.

Existen dos conjuntos separados y no vacíos, en el espacio $L \times \mathbb{R}$, digamos A y B, tales que

$$G(f \upharpoonright_{[p,q]}) = A \cup B.$$

Observamos que $G(f) = G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A \cup B$. Analizamos los siguientes dos casos:

I). Los puntos $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$ pertenecen al conjunto A. En este caso asociamos los conjuntos como sigue

$$G(f) = [G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A] \cup B.$$

Afirmamos que $G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A$ y B son conjuntos separados no vacíos en el espacio $L \times \mathbb{R}$. En efecto,

$\overline{[G(f \upharpoonright_{[L\setminus[p,q]}) \cup A]} \cap B = [\overline{G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]})} \cap B] \cup [\overline{A} \cap B]$

$\subset (\overline{L \setminus [p, q]} \times \mathbb{R}) \cap ((p, q) \times \mathbb{R}) = ((\overline{L} \setminus (p, q)) \cap (p, q)) \times \mathbb{R} = \emptyset.$

De manera similar,

$[G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A] \cap \overline{B} = [G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cap \overline{B}] \cup [A \cap \overline{B}]$

$\subset (L \setminus [p, q] \times \mathbb{R}) \cap ([p, q] \times \mathbb{R}) = ((L \setminus [p, q]) \cap [p, q]) \times \mathbb{R} = \emptyset.$

Por tanto,

$$\overline{[G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A]} \cap B = \emptyset = [G(f \upharpoonright_{L\setminus[p,q]}) \cup A] \cap \overline{B}.$$

Es decir; $G(f)$ es no conexo, lo cual es una contradicción.

II). El punto $(p, f(p))$ pertenece al conjunto A y el punto $(q, f(q))$ pertenece al conjunto B. En este caso denotamos por $E_1 = \{x \in L : x < p\}$ y por $E_2 = \{x \in L : q < x\}$, los cuales son conjuntos separados. Observamos que:

a) $L = E_1 \cup [p, q] \cup E_2$.

b) $\overline{E_1} \cap (p, q] = \emptyset = \overline{E_2} \cap [p, q)$.

c) $E_1 \cap [p, q] = \emptyset = E_2 \cap [p, q]$.

Así, asociamos como sigue:

$$G(f) = [G(f \upharpoonright_{E_1}) \cup A] \cup [G(f \upharpoonright_{E_2}) \cup B].$$

Y, observamos que los conjuntos $G(f \upharpoonright_{E_1}) \cup A$ y $G(f \upharpoonright_{E_2}) \cup B$ son conjuntos no vacíos separados en el espacio $L \times \mathbb{R}$. En efecto,

$$\overline{[G(f \upharpoonright_{E_1}) \cup A]} \cap [G(f \upharpoonright_{E_2}) \cup B]$$

$$= [\overline{G(f \upharpoonright_{E_1})} \cap B] \cup [\overline{G(f \upharpoonright_{E_1})} \cap G(f \upharpoonright_{E_2})] \cup [\overline{A} \cap B] \cup [G(f \upharpoonright_{E_2}) \cap \overline{A}]$$

$$\subset [(\overline{E_1} \times \mathbb{R}) \cap ((p, q] \times \mathbb{R})] \cup [(\overline{E_1} \times \mathbb{R}) \cap (E_2 \times \mathbb{R})] \cup [(E_2 \times \mathbb{R}) \cap ([p, q] \times \mathbb{R})]$$

$$= ((\overline{E_1} \cap (p, q]) \times \mathbb{R}) \cup ((\overline{E_1} \cap E_2) \times \mathbb{R}) \cup ((E_2 \cap [p, q]) \times \mathbb{R}) = \emptyset.$$

De manera similar,

$$[G(f \upharpoonright_{E_1}) \cup A] \cap \overline{[G(f \upharpoonright_{E_2}) \cup B]}$$

$$= [G(f \upharpoonright_{E_1}) \cap \overline{B}] \cup [G(f \upharpoonright_{E_1}) \cap \overline{G(f \upharpoonright_{E_2})}] \cup [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{G(f \upharpoonright_{E_2})} \cap A]$$

$$\subset ((E_1 \cap [p, q]) \times \mathbb{R}) \cup ((E_1 \cap \overline{E_2}) \times \mathbb{R}) \cup ((\overline{E_2} \cap [p, q)) \times \mathbb{R}) = \emptyset.$$

Por tanto,

$$\overline{[G(f\restriction_{E_1})\cup A]}\cap[G(f\restriction_{E_2})\cup B]=\emptyset=[G(f\restriction_{E_1})\cup A]\cap\overline{[G(f\restriction_{E_2})\cup B]}.$$

Se obtiene que la gráfica $G(f)$ es no conexo. Esto es una contradicción.

III). Los puntos $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$ pertenecen al conjunto B. En este caso, procediendo como el inciso I), se obtiene la contradicción de que $G(f)$ es no conexo.

IV). Los puntos $(p, f(p))$ pertenece al conjunto B y el punto $(q, f(q))$ pertenece al conjunto A. En este caso, procediendo como en II), se obtiene la misma contradicción.

Las contradicciones obtenidas en los casos descritos, demuestran que la gráfica $G(f\restriction_J)$ es un conjunto conexo, cuando $J=[p,q]$.

A continuación, analizamos los casos (2) $J=[p,q)$ y (6) $J=(p,\infty)$, en los otros casos se resuelve de manera similar.

Supongamos que ocurre (2) $J=[p,q)$. En este caso, tomamos un entero positivo N tal que $p<q-\frac{1}{N}$. Se tiene que

$$J=\bigcup_{n=N}^{\infty}[p,q-\frac{1}{n}] \text{ y, en consecuencia la gráfica } G(f\restriction_J)=\bigcup_{n=N}^{\infty}G(f\restriction_{[p,q-\frac{1}{n}]}).$$

Por lo demostrado anteriormente, cada gráfica $G(f\restriction_{[p,q-\frac{1}{n}]})$ es un conjunto conexo. Así, se tiene que $G(f\restriction_J)$ es la unión de una sucesión creciente de conjuntos conexos. Esto prueba que la gráfica $G(f\restriction_J)$ es conexo, en el caso (2) $J=[p,q)$.

Ahora supongamos que (6) $J = (p, \infty)$. En este caso observamos que

$$J = \bigcup_{n=2}^{\infty} [p + \frac{1}{n}, p + n] \text{ y, en consecuencia, } G(f \restriction_J) = \bigcup_{n=2}^{\infty} G(f \restriction_{[p+\frac{1}{n}, p+n]}).$$

Luego, como en el caso (2), concluimos que la gráfica $G(f \restriction_J)$ es conexo, en el caso (6) $J = (p, \infty)$.

□

3.20 Teorema. Una función real valuada definida en un intervalo es una función de conectividad si, y sólo si, es una función conexa.

Demostración. (Necesidad) Se tiene por el Teorema 3.8.

(Suficiencia) Consideramos una función conexa, $f : L \to \mathbb{R}$, donde L es un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea J un subconjunto conexo de L. Sabemos que J es un intervalo en L (Teorema 1.28). Por el Lema 3.19, tenemos que $f \restriction_J : J \to \mathbb{R}$ es una función conexa. Es decir, la gráfica $G(f \restriction_J)$ es un conjunto conexo. Esto prueba que $f : L \to \mathbb{R}$ es una función de conectividad. □

3.21 Nota. La demostración del Teorema 3.20 (así como del Lema 3.19) no la hemos encontrado en la literatura. Así, éstas pueden considerarse una pequeña aportación de nuestra tesis. Aunque puede ser que estos resultados sean evidentes para los especialistas, por la mención de un caso particular del Teorema 3.20 que aparece en la página 126 de [5].

3.2. La función de Bruckner-Ceder

En esta sección presentamos una función conexa, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, en consecuencia de conectividad y de Darboux (Teoremas 3.20 y 3.7), que no es continua en cada punto de un conjunto de Cantor en este intervalo. A esta función le llamamos función de Bruckner-Ceder porque la hemos tomado de [1]. Para su definición recurrimos al conjunto de Cantor de los tercios medios en el intervalo $[0,1]$, el cual estudiamos en la Sección 2.1. En la nota que sigue anotamos los principales elementos de la construcción de este conjunto.

3.22 Nota. Para un intervalo cerrado y acotado, digamos $B=[a,b]$, el tercio medio de B es el intervalo abierto denotado y definido por $T(B)=(a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3})$. El conjunto de Cantor de los tercios medios en el intervalo cerrado $[0,1]$, denotado por $\mathbf{K}$, es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursivamente como sigue: $A_1=[0,1]$ y, para cada número natural $n\geq 2$,

$$A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup\{T(B) : B \text{ es componente de } A_{n-1}\}.$$

Así,

$$\mathbf{K} = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Cada tercio medio, $T(B)$, de cada componente, B, de cada uno de los conjuntos A_n, es referido como un intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}$. Además, denotamos por $\mathbb{C}^\circ$ al conjunto de todos los puntos en el conjunto de Cantor que no son puntos extremos de estos intervalos contiguos. Es decir,

$$\mathbb{C}^\circ = \mathbf{K} \setminus \bigcup\{\overline{T(B)} : B \text{ es componente de } A_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

3.23 Definición. La *función de Bruckner-Ceder*, $f : [0,1] \to [-1,1]$ es dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{b-a} - 1 & \text{si } x \in [a,b], \text{ donde } (a,b) \text{ es un intervalo contiguo a } \mathbf{K} \\ \\ 0 & \text{si } x \text{ pertenece al conjunto } \mathbb{C}^{\circ} \end{cases}$$

A continuación, mostramos un bosquejo de la gráfica de esta función.

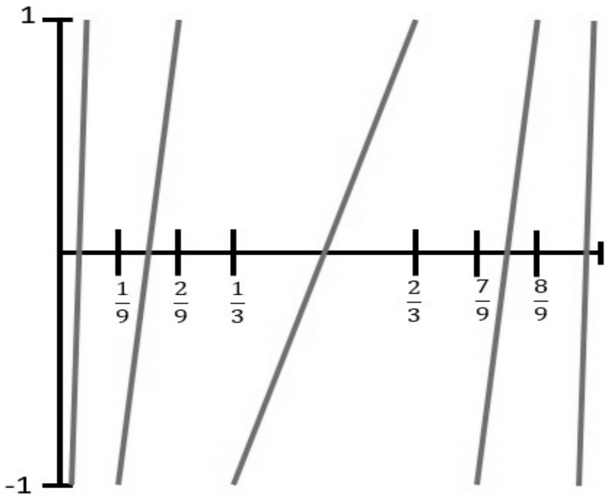

Figura 3.1: La función de Bruckner-Ceder.

Como primer resultado de esta sección vemos que la función de Bruckner-Ceder no es continua.

3.24 Teorema. La función de Bruckner-Ceder no es continua en cada punto del conjunto de Cantor.

Demostración. Fijemos un punto x en el conjunto de Cantor $\mathbf{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $B_{x,n}$ a la componente del conjunto A_n que contiene al punto x, y por (a_n, b_n) al tercio medio de esta componente. Observamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Además, por la definición de la función f

de Bruckner-Ceder, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(a_n) = -1$ y $f(b_n) = 1$. A continuación analizamos dos casos:

1) El punto x es un punto extremo de un intervalo contiguo, digamos (a, b), al conjunto de Cantor $\mathbf{K}$. En este caso, si $x = a$, se tiene que $f(x) = -1$ y así, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x)$; si $x = b$, se tiene que $f(x) = 1$ y así, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x)$. En cualquier caso, es decir $x = a$ o $x = b$, esto muestra que la función f no es continua en el punto x.

2) El punto x no es un punto extremo de ningún intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}$. En este caso, por definición de la función Bruckner-Ceder, se tiene que $f(x) = 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x)$ (también $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x)$). Esto prueba que la función f no es continua en el punto x.

□

3.25 Teorema. La función de Bruckner-Ceder es una función conexa.

Demostración. Veamos que la gráfica $G(f)$ de la función de Bruckner-Ceder, f, es conexa. Consideremos dos conjuntos abiertos y disjuntos en $G(f)$, digamos U y V tales que $G(f) = U \cup V$. Supongamos que $(0, 0)$ pertenece al conjunto U. Vamos a demostrar que $G(f) = U$ (así $V = \emptyset$). Para esto definimos los siguientes conjuntos:

$$G_z = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq z\} \quad \text{y} \quad G(U) = \{z \in [0, 1] : G_z \subset U\}.$$

Notemos que $0 \in G(U)$. Así $G(U)$ no es vacío. Es claro que $G(U)$ es acotado superiormente. Denotemos $\beta = \sup G(U)$. Afirmamos que $\beta > 0$. En efecto, tomemos un conjunto abierto básico en $G(f)$ que contenga al punto $(0, 0)$ y que esté contenido en U; es decir tomemos números $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que

$$[(-\lambda_1, \lambda_1) \times (-\lambda_2, \lambda_2)] \cap G(f) \subset U.$$

Fijemos un número entero positivo N tal que $\frac{2}{3^N} < \lambda_1$. Notemos que el intervalo $(\frac{1}{3^N}, \frac{2}{3^N})$ es un intervalo contiguo al conjunto de Cantor, con punto medio $\frac{3}{2*3^N}$, así $(\frac{3}{2*3^N}, 0) \in [(-\lambda_1, \lambda_1) \times (-\lambda_2, \lambda_2)] \cap G(f)$. Con un argumento similar se prueba que, el segmento de recta que constituye la gráfica de la función f a los intervalos contiguos al conjunto de Cantor que están contenidos en el intervalo $[0, \frac{1}{3^N})$, a la que denotaremos por L_α, donde α denota el ínfimo de cada intervalo contiguo, cumple que $L_\alpha \cap U \neq \emptyset$ para todo α. Dado que U es también cerrado en $G(f)$ y L_α es conexo, se cumple que $L_\alpha \subset U$ para todo α (véase Teorema 1.32). En consecuencia, $\frac{2}{3^N}$ pertenece a $G(U)$. Así, $\beta > 0$.

A continuación, probaremos que el punto $(\beta, f(\beta)) \in U$, para esto, analicemos tres casos:

1. β pertenece al intervalo $(a, b]$, donde (a, b) es un intervalo contiguo. En este caso, tomamos una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $G(U)$ tal que $z_n < z_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = \beta$. Como f es continua (por la izquierda) en β, se sigue que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\beta)$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} (z_n, f(z_n)) = (\beta, f(\beta)).$$

Notamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(z_n, f(z_n)) \in U$ y U es un conjunto cerrado en $G(f)$ se sigue que $(\beta, f(\beta)) \in U$.

2. $\beta = a$, donde (a, b) es un intervalo contiguo. En este caso, tomamos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $G(U)$ tal que $a_n < a_{n+1} < \beta$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ y,

para cada $n \in \mathbb{N}$, existe b_n tal que $a_n < b_n$ y (a_n, b_n) es un intervalo contiguo al conjunto de Cantor.

Observamos que $(a_n, f(a_n)) \in U$, pues $a_n \in G(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $(a_n, f(a_n)) = (a_n, -1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n, f(a_n)) = (\beta, -1) = (\beta, f(\beta)).$$

Finalmente, como U es cerrado en $G(f)$ y para todo n, $(a_n, f(a_n)) \in U$. Se sigue que $(\beta, f(\beta)) \in U$.

3. β pertenece al conjunto $\mathbb{C}^{\circ}$. En este caso, tomamos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $G(U)$ con las mismas condiciones que el caso anterior, y para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, es decir, m_n es el punto medio del intervalo contiguo (a_n, b_n). Observemos que $(m_n, f(m_n)) \in U$. En efecto, como $m_n < \beta$, existe $z \in G(U)$ tal que $m_n < z \leq \beta$, por lo que $(m_n, f(m_n)) \in G_z \subset U$.

   Además, $f(m_n) = 0 = f(\beta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así,

$$\lim_{n\to\infty}(m_n, f(m_n)) = (\beta, f(\beta)).$$

   Por tanto, $(\beta, f(\beta))$ pertenece al conjunto U, por ser U un conjunto cerrado en $G(f)$.

Ahora que tenemos que $(\beta, f(\beta))$ pertenece al conjunto U afirmamos que $G_\beta \subset U$. En efecto, como $\beta = \sup G(U)$ podemos considerar una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $G(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = \beta$. Observemos que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{z_n}\right) \cup \{(\beta, f(\beta))\} = G_\beta.$$

En efecto, como $z_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $G_{z_n} \subset G_\beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{z_n}) \cup \{(\beta, f(\beta))\} \subset G_\beta.$$

Recíprocamente, si $(x, f(x)) \in G_\beta \setminus \{(\beta, f(\beta))\}$, entonces $0 \leq x < \beta$. Luego, como $\text{lím}_{n\to\infty} z_n = \beta$ y $z_n \leq \beta$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < z_m \leq \beta$. Se tiene que $(x, f(x)) \in G_{z_m}$. Esto prueba que:

$$G_\beta \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{z_n}) \cup \{(\beta, f(\beta))\}.$$

Por otra parte, como $z_n \in G(U)$ se tiene que $G_{z_n} \subset U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como se tiene que $(\beta, f(\beta)) \in U$ y por lo probado anteriormente, $G_\beta \subset U$.

Finalmente, vamos a probar que $\beta = 1$. Para hacerlo vamos a suponer que no es así y como sabemos que $0 < \beta \leq 1$; con esto, estamos suponiendo que $\beta < 1$ y vamos a analizar los siguientes casos, tomando en cuenta la existencia de un $\epsilon > 0$ tal que

$$[(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

I). β pertenece al intervalo $[a, b)$ donde (a, b) es un intervalo contiguo. Dado que f es continua en $[a, b)$ existe $\delta > 0$ y $\delta < \epsilon$ tal que si $z \in (\beta, \beta + \delta)$ entonces $f(z) \in (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)$. Se sigue que para todo $z \in (\beta, \beta + \delta)$,

$$(z, f(z)) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

Fijamos $w \in (\beta, \beta + \delta)$, entonces $G_w = G_\beta \cup G(f \restriction_{(\beta, w]}) \subset U$, se sigue que $w \in G(U)$ lo cual es una contradiccón por ser $\beta = \sup G(U)$.

II). $\beta = b$, donde (a, b) es un intervalo contiguo al conjunto de Cantor **K**. En este caso, $(\beta, f(\beta)) = (\beta, 1) \in U$. Ahora, consideremos el intervalo $[\beta, \beta + \epsilon)$. Existe un número entero positivo m tal que el intervalo $[\beta, \beta + \epsilon)$ contiene una componente del A_m (véase Teorema 2.11). Sea $w = \sup T(B_{\beta,m})$ donde $B_{\beta,m}$ es componente del conjunto A_m, donde podemos afirmar que $f(w) = 1$; así,

$$(w, f(w)) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

Bastará demostrar que $G_w \subset U$.

Sea $(x, f(x)) \in G_w$, entonces $0 \leq x \leq w$. Si $x \in [0, \beta]$, entonces $(x, f(x))$ pertenece al conjunto U, pues $(x, f(x)) \in G_\beta$ y $G_\beta \subset U$.

Si $\beta < x < w$, analizaremos dos casos:

- x pertenece al intervalo $[p, q]$, donde (p, q) es un intervalo contiguo. En este caso, $(x, f(x)) \in L_p$. Más aún,

  $$(q, f(q)) = (q, 1) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

  Dado que $L_p \cap U \neq \emptyset$, L_p conexo y, U conjunto abierto y cerrado en $G(f)$, entonces $L_p \subset U$ y por tanto, $(x, f(x)) \in U$.

- x pertenece al conjunto $\mathbb{C}^\circ$. Para este caso, supongamos que $(x, f(x))$ no pertenece a U, por lo que $(x, f(x))$ pertenece al conjunto V. Además, $f(x) = 0$.

  Dado que x es un punto de Cantor, por Teorema 2.1 existe una única sucesión decreciente de intervalos cerrados, $\{B_{x,n}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{x,n}$ es una componente del conjunto A_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos el punto medio x_n en las componentes $B_{x,n}$ así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge al punto x. Notemos que $f(x_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $G(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (x, f(x))$. Ahora, como V es un conjunto abierto que contiene al punto $(x, f(x))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x_m, f(x_m)) \in V$. Denotemos como $c = \inf T(B_{x,m})$ y $d = \sup T(B_{x,m})$ como los puntos extremos del intervalo contiguo donde x_m es el punto medio. Se sigue que $L_c \cap V \neq \emptyset$ y, como en el caso anterior se concluye que, $L_c \subset V$. Por otro lado, $f(d) = 1$ así,

$$(d, f(d)) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

Entonces, $L_c \cap U \neq \emptyset$, U conjunto abierto y cerrado, y L_c conexo; se concluye que $L_c \subset U$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $(x, f(x))$ pertenece al conjunto U.

Es decir, $w > \beta$ y $w \in G(U)$, lo cual es una contradicción por ser $\beta = \sup G(U)$.

III). β pertenece al conjunto $\mathbb{C}^{\circ}$. En este caso, $f(\beta) = 0$. Consideremos el intervalo $[\beta, \beta + \epsilon)$. Existe un número entero positivo m tal que el intervalo $[\beta, \beta + \epsilon)$ contiene una componente del A_m (véase Teorema 2.11). Sea w_0 el punto medio de $T(B_{\beta,m})$ donde $B_{\beta,m}$ es componente del conjunto A_m, donde podemos afirmar que $f(w_0) = 0$; así

$$(w_0, f(w_0)) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

Bastará demostrar que $G_{w_0} \subset U$.

Sea $(x, f(x)) \in G_{w_0}$, entonces $0 \leq x \leq w_0$. Si $x \in [0, \beta]$, entonces $(x, f(x))$ pertenece al conjunto U, pues $(x, f(x)) \in G_\beta$ y $G_\beta \subset U$.

Si $\beta < x < w_0$, analizaremos dos casos:

- x pertenece al intervalo $[r, s]$ donde (r, s) es un intervalo contiguo. En este caso, $(x, f(x)) \in L_r$. Más aún, para $\mu = \frac{r+s}{2}$,

  $$(\mu, f(\mu)) = (\mu, 0) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U$$

  Dado que $L_r \cap U \neq \emptyset$, L_r conexo y, U conjunto abierto y cerrado en $G(f)$, entonces $L_r \subset U$ y por tanto, $(x, f(x)) \in U$.

- x pertenece al conjunto $\mathbb{C}^\circ$. Para este caso, $f(x) = 0$. Observamos,

  $$(x, f(x)) \in [(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \times (f(\beta) - \epsilon, f(\beta) + \epsilon)] \cap G(f) \subset U.$$

  Por tanto $(x, f(x)) \in U$.

Es decir, $w_0 > \beta$ y $w_0 \in G(U)$, lo cual es una contradicción por ser $\beta = \sup G(U)$.

Esa misma contradicción en los tres casos anteriores, demuestra que $\beta = 1$. Luego, como $G_\beta \subset U$ y $G_1 = G(f)$ se obtiene que $G(f) \subset U$. Así, $G(f) = U$ (en consecuencia $V = \emptyset$). Esto prueba que la gráfica $G(f)$ es conexo. En conclusión, f es una función conexa.

□

3.26 Corolario. La función de Bruckner-Ceder es una función de conectividad y es una función de Darboux.

Demostración. Por Teorema 3.25 la función de Bruckner-Ceder es una función conexa, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Luego, por el Teorema 3.20, ésta es una función de conectividad. En consecuencia, por Teorema 3.7, también es una función de Darboux. $\square$

3.27 Observación. La función de Bruckner-Ceder muestra que existen funciones conexas (de conectividad y de Darboux), que son discontinuas en cada punto de un conjunto no numerable. Por otra parte, observamos que la función de Bruckner-Ceder es continua en cada punto de todo intervalo contiguo al conjunto de Cantor. En relación con esto no sabemos las respuestas a los problemas que planteamos a continuación.

3.28 Problema. ¿Existen funciones conexas que son discontinuas en todo punto de su dominio?

3.29 Problema. ¿Existen funciones de conectividad que son discontinuas en todo punto de su dominio?

3.30 Problema. ¿Existen funciones de Darboux que son discontinuas en todo punto de su dominio?

3.3. La función de Ciesielski-Kellum

En esta sección presentamos una función de Darboux en el intervalo cerrado $[0, 1]$ que no es conexa (en consecuencia, tampoco es una función de conectividad , Teorema 3.8), y que no es continua en cada punto de un conjunto de Cantor en este intervalo. A esta función le llamamos función de Ciesielski-Kellum porque la hemos tomado de [3]. Para la definición de ésta, utilizamos el conjunto de Cantor de los quintos medios en el intervalo cerrado $[0, 1]$, el cual estudiamos en la Sección 2.2. En la nota siguiente anotamos los principales elementos de la construcción de este conjunto.

3.31 Nota. Para un intervalo cerrado y acotado, digamos $B = [a, b]$, los quintos medios de B son los intervalos abiertos denotados y definidos por $T_l(B) = (a + \frac{1}{5}(b-a), a + \frac{2}{5}(b-a))$ y $T_r(B) = (a + \frac{3}{5}(b-a), a + \frac{4}{5}(b-a))$. El primero es referido como el quinto medio izquierdo de B y el segundo como el quinto medio derecho de B. También, denotamos $T(B) = T_l(B) \cup T_r(B)$. El conjunto de Cantor de los quintos medios en el intervalo cerrado $[0, 1]$, que denotado por $\mathbf{K}_5$, es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursivamente como sigue: $A_1 = [0, 1]$ y, para cada número natural $n \geq 2$,

$$A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup\{T(B) : B \text{ es componente de } A_{n-1}\}.$$

Así,

$$\mathbf{K}_5 = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Cada uno de los quintos medios, $T_l(B)$ y $T_r(B)$, de cada componente, B, de cada uno de los conjuntos A_n, es referido como un intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$.

Denotamos por $\mathbb{T}^\circ$ a la unión de la colección de todos los quintos medios de todas las componentes B de los conjuntos A_n, y por $\mathbb{T}$ a la unión de la colección de las cerraduras de todos esos quintos medios. Es decir,

$$\mathbb{T}^\circ = \bigcup\{T(B) : \text{ B es componente de } A_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}, \text{ y}$$

$$\mathbb{T} = \bigcup\{\overline{T(B)} : B \text{ es componente de } A_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

En otras palabras, $\mathbb{T}^\circ$ es la unión de todos los intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$, y $\mathbb{T}$ es la unión de la cerraduras de todos esos intervalos contiguos.

Denotamos por $\mathbb{C}_5^\circ$ a la diferencia $[0,1] \setminus \mathbb{T}$. Observamos que $\mathbb{C}_5^\circ$ es la colección de todos los puntos de $\mathbf{K}_5$ que no son puntos extremos de los intervalos contiguos a éste. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ son puntos de $\mathbb{C}_5^\circ$.

3.32 Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$, y para cada componente B_k del conjunto A_n, definimos la función $f_{n,k} : \overline{T(B_k)} \to [0,1]$, como sigue:

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} (5^n - 5k - 2)(x - \frac{5k+1}{5^n}) + \frac{5k+2}{5^n} & \text{si} \quad x \in [\frac{5k+1}{5^n}, \frac{5k+2}{5^n}] \\ \\ (5k+2)(x - \frac{5k+3}{5^n}) & \text{si} \quad x \in [\frac{5k+3}{5^n}, \frac{5k+4}{5^n}] \end{cases}$$

Luego, mostramos un bosquejo de las gráficas de 4 de estas funciones.

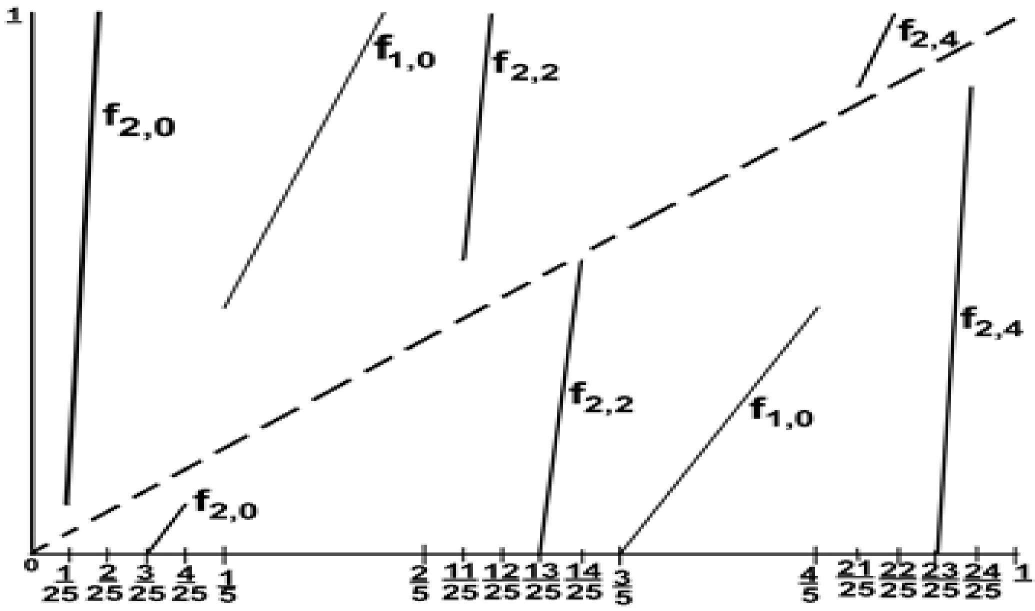

Figura 3.2: Las funciones $f_{1,0}$, $f_{2,0}$, $f_{2,2}$ y $f_{2,4}$.

3.33 Proposición. Cada función $f_{n,k}$ es función sobreyectiva.

Demostración. Observamos que la función $f_{n,k}$ transforma linealmente la cerradura del quinto medio izquierdo de la componente B_k en el intervalo cerrado $[\frac{5k+2}{5^n}, 1]$; y transforma linealmente la cerradura del quinto medio derecho en el intervalo cerrado $[0, \frac{5k+2}{5^n}]$. De este modo vemos que $f_{n,k}(\overline{T(B_k)}) = [0, \frac{5k+2}{5^n}] \cup [\frac{5k+2}{5^n}, 1] = [0, 1]$. $\square$

3.34 Notación. La diagonal del plano euclidiano es denotado por $\triangle$. Es decir, $\triangle = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

3.35 Proposición. La gráfica de cada función $f_{n,k}$ es ajena de la diagonal del plano euclidiano.

Demostración. Observamos que para cada punto x en el intervalo cerrado $[\frac{5k+1}{5^n}, \frac{5k+2}{5^n}]$ se tiene que $x < f_{n,k}(x)$. Así la gráfica de esta función restringida a la cerradura del quinto medio izquierdo, $T_l(B_k) = [\frac{5k+1}{5^n}, \frac{5k+2}{5^n}]$, se localiza *arriba* de la diagonal del plano euclidiano. Similarmente, para cada punto x en el intervalo cerrado $[\frac{5k+3}{5^n}, \frac{5k+4}{5^n}]$ se tiene que $f_{n,k}(x) < x$. Consecuentemente, la gráfica de esta función restringida a la cerradura del quinto medio derecho, $T_r(B_k) = [\frac{5k+3}{5^n}, \frac{5k+4}{5^n}]$, se localiza *abajo* de la diagonal del plano euclidiano. Esto prueba que $G(f_{n,k}) \cap \triangle = \emptyset$. $\square$

3.36 Definición. La función $f_0 : [0, 1] \to [0, 1]$ es dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\} \\[2em] \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \frac{1}{10} \\[2em] \frac{1}{10} & \text{si} \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A continuación, mostramos un bosquejo de esta función.

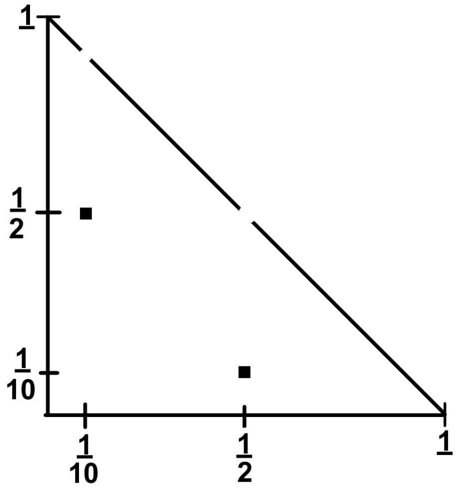

Figura 3.3: La función f_0.

3.37 Proposición. La gráfica de la función f_0 es ajena de la diagonal del plano euclidiano.

Demostración. Observemos que para cada punto x en el intervalo $[0, \frac{1}{2})$ se tiene que $x < f_0(x)$. Así la gráfica de esta función restringida a este intervalo se localiza *arriba* de la diagonal del plano inclinado. Similarmente, para cada punto en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ se tiene que $f_0(x) < x$. Luego, la gráfica de la función f_0 restringida a este segundo intervalo se localiza *abajo* de la diagonal del plano euclidiano. Esto prueba que $G(f_0) \cap \triangle = \emptyset$. $\square$

3.38 Definición. La *función de Ciesielski-Kellum*, $f : [0,1] \to [0,1]$ es dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} f_{n,k}(x) & \text{si} \quad \text{existen enteros positivos } n \text{ y } k \text{ tales que} \\ & \qquad\qquad 0 \leq k \leq 5^{n-1} - 1 \text{ y } x \in \overline{T(B_k)} \\ & \\ f_0(x) & \text{si} \quad x \text{ pertenece al conjunto } \mathbb{C}_5^\circ \end{cases}$$

3.39 Observación. En otros términos la función de Ciesielski-Kellum se define como sigue:

1. Si x es un punto en el conjunto $\mathbb{T}$, es decir, si x pertenece a la cerradura de alguno de los quintos medios de alguna componente B_k de alguno de los conjuntos A_n, entonces la función f asigna a este punto x lo mismo que le asigna la función $f_{n,k}$.

2. Si x no pertenece al conjunto $\mathbb{T}$, es decir si x pertenece $\mathbb{C}_5^\circ$, entonces la función f asigna a tal punto x lo mismo que le asigna la función f_0.

3.40 Teorema. La función de Ciesielski-Kellum no es continua en cada punto del conjunto de Cantor.

Demostración. Fijemos un punto x en el conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $B_{x,n}$ a la componente del conjunto A_n que contiene al punto x, y por (a_n, b_n) al quinto medio izquierdo de esta componente y por (c_n, d_n) al quinto medio derecho de esta componente. Observamos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x$. Además, por la definición de la función f de Ciesielski-Kellum, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(b_n) = 1$ y $f(c_n) = 0$. A continuación analizamos tres casos:

1) El punto x es un punto extremo de un quinto medio izquierdo, digamos (a, b), de la componente del conjunto A_n. En este caso, si $x = a$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x)$ (también $\lim_{n\to\infty} f(c_n) \neq f(x)$); si $x = b$, se tiene que $f(x) = 1$ y así, $\lim_{n\to\infty} f(c_n) \neq f(x)$. En cualquier caso, es decir $x = a$ o $x = b$, esto muestra que la función f no es continua en el punto x.

2) El punto x es un punto extremo de un quinto medio derecho, digamos (c, d), de la componente del conjunto A_n. En este caso, si $x = c$, se tiene que $f(x) = 0$ y así, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(c)$; si $x = d$, se tiene que, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x)$ (también $\lim_{n\to\infty} f(c_n) \neq f(x)$). En cualquier caso, es

decir $x = c$ o $x = d$, esto muestra que la función f no es continua en el punto x.

3) El punto x no es un punto extremo de ningún intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. En este caso, si tenemos que $f(x) \neq 0$, entonces, $\lim_{n\to\infty} f(c_n) \neq f(x)$. Y, si $f(x) = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x)$. Esto prueba que la función f no es continua en el punto x.

$\square$

3.41 Teorema. La función de Ciesielski-Kellum no es una función conexa.

Demostración. Para ver ésto, denotemos

$$\triangle_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \qquad \text{y} \qquad \triangle_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}.$$

Observamos que $\triangle_+$ y $\triangle_-$ son conjuntos abiertos en el plano euclidiano. Además, éstos son disjuntos; de hecho, $\triangle_+$ se localiza *arriba* de la diagonal $\triangle$ y $\triangle_-$ por *abajo*.

Por otra parte, notamos que, por la definición de la función f de Ciesielski-Kellum, y por las Proposiciones 3.35 y 3.37, la gráfica $G(f)$ de esta función no intersecta a la diagonal del plano euclidiano. Así, se tiene que

$$G(f) = (G(f) \cap \triangle_+) \cup (G(f) \cap \triangle_-).$$

Finalmente, notamos $(0,1)$ pertenece al conjunto $G(f) \cap \triangle_+$ y $(1,0)$ pertenece al conjunto $G(f) \cap \triangle_-$. En resumen, $G(f)$ es la unión de dos de sus conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos. Esto prueba que la función f de Ciesielski-Kellum no es conexa. $\square$

Con los Teoremas 3.8 y 3.41, se tiene el resultado siguiente.

3.42 Corolario. La función de Ciesielski-Kellum no es una función de conectividad.

3.43 Teorema. La función de Ciesielski-Kellum es una función de Darboux.

Demostración. Sea E un subconjunto conexo del intervalo cerrado $[0,1]$. Si E consiste de un único punto entonces $f(E)$ también es un conjunto con un único punto, por lo cual es conexo. En lo que sigue suponemos que E contiene más de un punto. Fijemos dos puntos, x y y en E, con $x < y$. Denotemos $a = \text{ínf}\, E$ y $b = \sup E$. Notamos que $a \leq x < y \leq b$. Así $a < b$. Observamos que $(a,b) \subset E \subset [a,b]$: porque si $w \in (a,b)$, entonces $a < w < b$. Luego, por la definición de a y de b, existen puntos r y s en el conjunto E tales que $r < w < s$. Como E es conexo, se tiene que el intervalo abierto (r,s) está contenido en E. Se sigue que $w \in E$. Esto prueba que $(a,b) \subset E$. Por otra parte, por la definición de a y de b también se tiene que, para todo punto $z \in E$ se tiene que $a \leq z \leq b$. Por ésto, $E \subset [a,b]$. Ahora, de acuerdo al Teorema 2.11, analizamos dos casos:

Caso 1. Existe un entero positivo m tal que el intervalo abierto (a,b) contiene una componente del conjunto A_m. En este caso sea B_k una componente del conjunto A_m tal que $B_k \subset (a,b)$. Recordemos que B_k contiene a la unión de las cerraduras de sus quintos medios. Se sigue que $\overline{T(B_k)} \subset (a,b)$. Como la función que estamos analizando, f, coincide con la función $f_{m,k}$ en el conjunto $\overline{T(B_k)}$, y como $f_{m,k} : \overline{T(B_k)} \to [0,1]$ es una función sobreyectiva. Se obtiene que $f((a,b)) = [0,1]$ y, puesto que $(a,b) \subset E$, se sigue que $f(E) = [0,1]$. Luego, en este caso, $f(E)$ es conexo.

Caso 2. El intervalo abierto (a,b) está contenido en algún intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{K}_5$. En este caso, existen números enteros positivos n y k tales que $0 \leq k \leq (5^{n-1}) - 1$ y el intervalo (a,b) está contenido en el quinto medio izquierdo, o en el quinto medio derecho, de la componente B_k del conjunto A_n. Es decir. $(a, b) \subset T_l(B_k)$ o $(a, b) \subset T_r(B_k)$. Ahora, como la función f, coincide con la función $f_{n,k}$ en cada uno de estos quintos medios, y como la función $f_{n,k}$ es continua en cada uno de estos quintos medios, se obtiene que $f(E)$ es un conjunto conexo. $\square$

3.44 Observación. La función de Ciesielski-Kellum muestra que existen funciones de Darboux, que son discontinuas en cada punto de un conjunto no numerable. Por otra parte, observamos que la función de Ciesielski-Kellum es continua en cada punto de todo intervalo contiguo al conjunto de Cantor. En relación con esto reiteramos que no sabemos la respuesta la cuestión que planteamos en el Problema 3.30.

Referencias

[1] A. M. Bruckner, J. G. Ceder, *Darboux Continuity*, Jber. Deutsch Math.-Verein. **67** (1964/1965), 93-117.

[2] F. Casarrubias and Á. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2015.

[3] K. Ciesielski and K. R. Kellum, *Compositions of Darboux and connectivity functions*, Real Anal. Exchange, **24**(2) (1998), 599-605.

[4] G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **4** (1875), 57-122.

[5] K.P. Hart, J. Nagata and J.E. Vaughan, *Encyclopedia of general topology*, Math. Intell., 2004.

[6] F. Jordan, *When are local connectivity functions connectivity?*, Topology Proc. **29**(1) (2005), 185-192.

[7] J. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, Madrid, 2002.

[8] S. B. Nadler Jr., *A proof of Darboux's theorem*, The American Mathematical Monthly, **117**(2) (2010), 174-175.

[9] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol 158. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.

[10] S. B. Nadler Jr., *Local connectivity functions on arcwise connected spaces and certain continua*, Topology and its Applications, **153**(8) (2006), 1279-1290.

[11] M. G. Raggi, J. A. Escamilla and F. J. Mendoza, *Introducción a la teoría de espacios métricos*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[12] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.