BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EXTENSIÓN DE LOS TEOREMAS DE CONSISTENCIA PARA SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES SEMI-INFINITOS

Tesis para obtener el título de:
Licenciado en Matemáticas

Presenta:
Abraham Benito Barragán Amigon

Directores de tesis:
Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

Agosto 2011

Dedicatorias

A Dios:

Por compartir conmigo momentos de alegría y tristeza. Por ayudarme en situaciones difíciles, por ayudarme a cumplir todas mis metas, por todo su amor incondicional y por toda la paciencia que me tiene.

A mis abuelos:
Senorina Amigon Sirena
Dionisio Barragán Arellano

Por el gran amor incondicional que me han tenido, por su gran apoyo moral, por todos los consejos y palabras de aliento, por todos sus cuidados, por las noches de desvelo que les hice pasar, porque siempre estuvieron a mi lado en los momentos más difíciles y por apoyarme en las decisiones más importantes de mi vida.

A mi mama:
Ana María Barragán Amigon

Por el gran apoyo económico, por todo el amor que siempre me ha tenido, por nunca dejarse caer para poder sacarme adelante, por sus consejos y por confiar siempre en mi.

A Valeria

Por su apoyo y comprensión.

A mis hermanos:

Por su cariño, por su apoyo moral, económico y por toda su fe y confianza depositada en mí.

A la familia
Serrano Barragan

Por su apoyo económico y moral constante que siempre he recibido y por sus palabras de aliento.

A mis compañeros universitarios:
Elizabeth, Rosalba, Vianey, Yoana, Diana, Noemí, Pilar, Cesar Santiago, Jesús, Jesús Santanero, Rogelio, Vicente, Manuel, Sergio, Ana Laura y a los que no mencione.

Por compartir muchos momentos que marcaron nuestras vidas.

Agradecimientos

- Agradezco a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por dirigirme y por el gran apoyo en la elaboración de este trabajo.
- A la comisión revisora integrada por los doctores en matemáticas: Esperanza Guzmán Ovando, Juan Francisco Leyva Cuevas y Francisco Javier Mendoza por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.
- A todos mis maestros de la facultad de matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por contribuir en mi formación.

Índice general

Introducción

El término de programación lineal semi-infinita se aplica a problemas en los que se debe minimizar una función lineal en n-variables reales las cuales están sujetas a un sistema lineal con un número infinito de desigualdades. Una diferencia notable entre la programación lineal semi-infinita y la programación lineal ordinaria (n-variables, m-desigualdades) es que en esta última, el conjunto factible es un poliedro y por tanto un conjunto convexo y cerrado, mientras que en la semi-infinita el conjunto factible es un conjunto convexo y cerrado, pero ya no tiene por qué ser poliedro.

En programación lineal ordinaria es equivalente resolver el problema de optimización a resolver el sistema de restricciones. Es decir, un método que sirve para resolver el problema de optimización sirve también para resolver el sistema de inecuaciones. Pero en la programación semi-infinita esto no se cumple, es más, por lo general, en este caso, es necesario resolver primero el sistema de restricciones para resolver el problema de optimización. Es por esto que, en este trabajo mostraremos algunos teoremas de consistencia para los sistemas lineales semi-infinitos además, probaremos que mucha de la teoría que se cumple para los sistemas de desigualdades lineales ordinarios pueden extenderse a los sistemas de desigulaldades semi-infinitos.

En el capítulo uno hacemos una revisión de los conceptos básicos necesarios para la comprensión de la teoría que se desarrolla más adelante. En el capítulo dos presentaremos la teoría de consistencia de los sistemas de inecuaciones lineales ordinarios, finalmente, en el capítulo tres desarrollamos la extensión de la teoría presentada en el capítulo dos a los sistemas de inecuaciones lineales semi-infinitos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

En esta sección revisaremos algunas definiciones y resultados básicos de subespacios lineales de $\mathbf{R}^n$ que nos permitirán desarrollar la teoría sobre sistemas de desigualdades lineales que se presentará en el capitulo 2.

Un vector en $\mathbf{R}^n$ es una n-ada (o arreglo) de números escritos en un renglón o columna. En este trabajo un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se considerará escrito en forma de columna y se denotará $\mathbf{x}^T$ a su vector transpuesto.

Producto interior

Cualesquiera dos n-vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ se pueden multiplicar. El resultado de esta multiplicación es un número real denominado producto interior o producto punto de los dos vectores, el cual se define como sigue:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

En este trabajo se tomará el producto escalar de un vector renglón y un vector columna, es decir

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Norma de un vector

Se pueden usar varias normas de un vector. Aquí se usará la norma euclidiana. Esta norma es la raíz cuadrada del producto interior del vector consigo mismo. En otras palabras, la norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, que se denota por $||\mathbf{x}||$, está dada por

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Distancia entre dos puntos

La distancia Euclidiana entre dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ es la raíz cuadrada del producto punto del vector diferencia consigo mismo. Esto es, la distancia entre dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, que se denota por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ esta dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Bolas y esfera

Con la distancia Euclidiana se pueden definir conjuntos en $\mathbf{R}^n$.
Sean $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y $\epsilon > 0$ un número real positivo,

(i) El conjunto

$$B(\mathbf{x}, \epsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon\}$$

se llama bola abierta con centro en $\mathbf{x}$ y radio ϵ.

(ii) El conjunto

$$\overline{B(\mathbf{x}, \epsilon)} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \epsilon\}$$

se llama bola cerrada con centro en $\mathbf{x}$ y radio ϵ.

(iii) El conjunto

$$S = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \epsilon\}$$

se llama esfera con centro en $\mathbf{x}$ y radio ϵ.

Subespacios lineales

Definición 1.1. *Diremos que un subconjunto S_L no vacío de $\mathbf{R}^n$ es un subespacio lineal o simplemente espacio lineal (de $\mathbf{R}^n$) si satisface las siguientes propiedades.*

(i) Si $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in S_L$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_L$.
(ii) Si $\mathbf{x} \in S_L,\ \alpha \in \mathbf{R}$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in S_L$.

Así todo subespacio de $\mathbf{R}^n$ contiene al $\mathbf{0}_n$.
Dado un conjunto no vacío $X \subset \mathbf{R}^n$, se llama **envoltura lineal** de X al menor subespacio vectorial que contiene a X, que denotaremos por *span* X.

Conjuntos afines

Definición 1.2. *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que A es* ***afín*** *si $A = \mathbf{x} + S_L$ para algún $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y S_L algún subespacio lineal de $\mathbf{R}^n$. Esto es, un conjunto es afín, si es el resultado de sumar un vector fijo a un subespacio lineal.*

A S_L se le llama subespacio paralelo de A.
Dado un conjunto no vacío $X \subset \mathbf{R}^n$, se llama **envoltura afín** de X, al menor conjunto afín que contiene a X, que denotaremos por $aff\ X$.

Combinaciones lineales

Una combinación lineal (CL) de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^p \in \mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}^i$, con $\alpha_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \ldots, p$.

Conjunto generador

Se dice que los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n \in \mathbf{R}^n$ generan a $\mathbf{R}^n$, si todo vector en $\mathbf{R}^n$ se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}^n.$$

Espacio generado por un conjunto de vectores

Sean $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n \in \mathbf{R}^n$. El espacio generado por $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ es decir,

$$gen\ \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}^n\}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares arbitarios.

Independencia y dependencia lineal

Una colección de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ de dimensión n es linealmente independiente si

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n \text{ implica que } \lambda_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Una colección de vectores se denomina linealmente dependiente si los vectores no son linealmente independientes. Por tanto, $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ son linealmente dependientes si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, no todos cero, tales que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n$.

Base

Definición 1.3. *Un subconjunto finito de vectores* $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\}$ *de un subespacio lineal* S_L *es una base de* S_L *si*

(i) $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*
(ii) $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\}$ *genera a* S_L*.*

Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$ es una base para $\mathbf{R}^n$.

Ejemplo 1.1. *En* $\mathbf{R}^n$ *se definen*

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ \mathbf{e}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix},$$

así $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base para* $\mathbf{R}^n$*. Esta base se llama base canónica para* $\mathbf{R}^n$*.*

Definición 1.4. *La dimensión de un subespacio lineal* S_L *de* $\mathbf{R}^n$ *es la cardinalidad de cualquiera de sus bases, la cual denotaremos por dim* S_L*.*

Con lo anterior tenemos que $dim\ \mathbf{R}^n = n$, $dim\ \{\mathbf{0}_n\} = 0$.

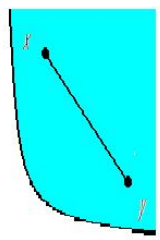
Definición 1.5. *La dimensión de un conjunto afín* $A = \mathbf{x} + S_L$ *es la de* S_L*. Esto es dim* $A =$ *dim* S_L*.*

1.2. Conjuntos convexos

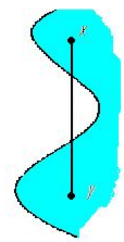
En esta sección se introduce una familia de conjuntos, llamados convexos, además se considerarán algunas de sus propiededes básicas, ya que son de gran utilidad en la construcción y análisis de los modelos de programación matemática y en particular, de programación lineal.

Definición 1.6. $C \subset \mathbf{R}^n$ *es* ***convexo*** *si* $(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in C$ *cualesquiera que sean* $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2 \in C$ *y* $\lambda \in [0,1]$*. La* ***dimensión*** *de* $C \neq \varnothing$ *es la de su envoltura afín, es decir, dim* $C :=$ *dim* $aff\ C$*.*

En otras palabras un conjunto $C \subseteq \mathbf{R}^n$ es convexo si para cualquier pareja de puntos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in C$, el segmento de recta que une estos dos puntos está también en C.



conjunto convexo



conjunto no convexo

Observación 1.1. *Por convenio, $\varnothing$ también es convexo y dim $\varnothing = -1$.*

Ejemplo 1.2. ***(a)*** *Los puntos son convexos de dimensión* 0.

(b) *Las rectas, los segmentos y las semirectas son convexos de dimensión* 1.

(c) *Un cubo en* $\mathbf{R}^3$ *es un conjunto convexo de dimensión* 3.

(d) *Sea* $\mathbf{0}_n \in \mathbf{R}^n$, *entonces* $C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{0}_n, \mathbf{x}) < 1\} = B(\mathbf{0}_n, 1)$ *es un conjunto convexo en* $\mathbf{R}^n$ *de dimensión* n.

(e) *Los subespacios lineales en* $\mathbf{R}^n$ *son conjuntos convexos.*

(f) *Los conjuntos afines son conjuntos convexos.*
Prueba: Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *y definamos,* $A = \mathbf{x} + S_L$ *donde* S_L *es un subespacio lineal de* $\mathbf{R}^n$. *Si* $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2 \in A$ *y* $\lambda \in [0,1]$, *se puede escribir* $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x} + \mathbf{s}_l^1$ *y* $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} + \mathbf{s}_l^2$, *donde* $\mathbf{s}_l^1,\ \mathbf{s}_l^2 \in S_L$, *entonces*

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} + \mathbf{s}_l^1 - \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{s}_l^1 + \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}_l^2 = \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{s}_l^1 + \lambda\mathbf{s}_l^2 \in A,$$

pues $(1-\lambda)\mathbf{s}_l^1 + \lambda\mathbf{s}_l^2 \in S_L$.

(g) *El conjunto* $\mathbf{R}^n$ *sin el origen* $\mathbf{0}_n$ *no es convexo.*

Teorema 1.1. *Si* $\{C_i, i \in I\}$ *es una familia de conjuntos convexos, entonces* $\bigcap_{i\in I} C_i$ *también es convexo.*

Demostración. Si $\bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$ no hay nada que probar.
Sean $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2 \in \bigcap_{i\in I} C_i$ y sea $\lambda \in [0,1]$. Entonces, $(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in C_i$, para todo $i \in I$, es decir, $(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in \bigcap_{i\in I} C_i$. $\square$

Definición 1.7. *Un conjunto no vacío es un* ***poliedro*** *si es el conjunto de soluciones de cierto sistema (finito) de inecuaciones (débiles) lineales.*

Recordemos que una **combinación lineal** (**CL**) de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \ldots, \mathbf{x}^p \in \mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}^i$, con $\alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, \ldots, p$. Dicha **CL** se dice que es **no negativa** cuando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, p$. Si $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$, la **CL** se dice que es **afín**. Una **CL** es **convexa** cuando es no negativa y afín. Así una combinación lineal convexa de un número finito de puntos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \ldots, \mathbf{x}^p$ se define como el punto

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}^i, \text{ donde } \alpha_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, p; \qquad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1.$$

Proposición 1.1. *Sea $\varnothing \neq C \subset \mathbf{R}^n$. C es convexo si y sólo si C contiene todas las combinaciones lineales convexas de elementos de C.*

Demostración. Supongamos que C es convexo. Probaremos, por inducción sobre el número de elementos, p, que C contiene a cualquier combinación convexa de puntos de C.

Para $p = 1$ es trivial. Supongamos cierto el enunciado para combinaciones lineales convexas de hasta p puntos, y consideremos $\mathbf{x} := \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \mathbf{x}^i$, con $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{p+1}\} \subset C$, $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, p+1$. Si algún $\lambda_i = 0$ ya no hay nada que probar, por hipótesis de inducción. Supongamos, pues, $\lambda_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, p+1$. Al ser $1 - \lambda_{p+1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i > 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{p+1})} = 1$$

y, por hipótesis de inducción

$$\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{p+1})} \mathbf{x}^i \in C.$$

Entonces como C es convexo y $\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_{p+1})} \mathbf{x}^i, \; \mathbf{x}^{p+1} \in C$,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}^i + \lambda_{p+1} \mathbf{x}^{p+1} = (1 - \lambda_{p+1}) \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{p+1})} \mathbf{x}^i + \lambda_{p+1} \mathbf{x}^{p+1} \in C.$$

El recíproco es trivial: Si C contiene todas las combinaciones lineales convexas de puntos de C, entonces C contiene todas las combinaciones lineales convexas de dos puntos de C y, por tanto, C es convexo. $\square$

Definición 1.8. *La* ***Envoltura convexa*** *de un conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ es el menor conjunto convexo que lo contiene. Se denota por conv X y es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X.*

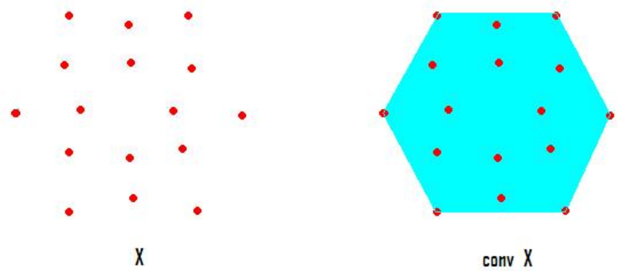


Figura 1.1: Envoltura convexa

Observación 1.2. *conv $\varnothing = \varnothing$.*

Proposición 1.2. *Si $X \neq \varnothing$, conv X es el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de X.*

Demostración. Sea C el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de X. Por la proposición 1.1, $X \subset C \subset conv X$. La demostración se completa probando que C es convexo. Dados dos elementos de C, es decir, dos combinaciones lineales convexas de puntos de X, puede suponerse (añadiendo ceros como coeficientes si fuera necesario) que lo son del mismo conjunto $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\} \subset X$. Sean $\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}^i$ y $\sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{x}^i$ dos combinaciones lineales convexas del conjunto $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$, y sea $\lambda \in [0, 1]$. Se tiene

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}^i + \lambda \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^p [(1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i]\mathbf{x}^i,$$

con

$$(1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p$$

y

$$\sum_{i=1}^p [(1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i] = (1-\lambda)\sum_{i=1}^p \alpha_i + \lambda \sum_{i=1}^p \beta_i = 1.$$

Así, pues, $(1-\lambda)\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}^i + \lambda \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{x}^i \in C$, lo que prueba la convexidad de C. $\square$

Hiperplanos y semiespacios

Definición 1.9. *Un* ***hiperplano*** H *en* $\mathbf{R}^n$ *es un conjunto afín de dimensión* $n-1$.

Otra definición es la que se presenta en [4]. Un hiperplano H en $\mathbf{R}^n$ es un conjunto de la forma $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T\mathbf{x} = k\}$, en donde $\mathbf{p}$ es un vector distinto de cero en $\mathbf{R}^n$ y k es un escalar.

De manera equivalente, un hiperplano consta de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen la ecuación $\sum_{i=1}^n p_i x_i = k$. Si $\mathbf{x}^0 \in H$, entonces $\mathbf{p}^T\mathbf{x}^0 = k$, y para cualquier $\mathbf{x} \in H$, se tiene $\mathbf{p}^T\mathbf{x} = k$. Restando se obtiene $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$. En otras palabras, H se puede representar como la colección de todos los puntos que satisfacen la ecuación $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$, en donde $\mathbf{x}_0$ es cualquier punto fijo en H.

Observación 1.3. *Sea* $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T\mathbf{x} = k\}$ *un hiperplano en* $\mathbf{R}^n$. *Si* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in H$ *y* $\lambda \in [0,1]$, *entonces*

$$\mathbf{p}^T[(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2] = \mathbf{p}^T\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}^T\lambda\mathbf{x}^1 + \boldsymbol{p}^T\lambda\boldsymbol{x}^2 = k - \lambda k + \lambda k = k,$$

por lo tanto H *es convexo.*

Un hiperplano divide a $\mathbf{R}^n$ en dos regiones denominadas semiespacios cerrados (sustituyendo $=$ por $\geq$ y $\leq$) y dos regiones denominadas semiespacios abiertos (sustituyendo $=$ por $>$ y $<$), cuya frontera común es H. Por tanto, un semiespacio cerrado es una colección de puntos de la forma $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq k\}$, en donde $\mathbf{p}$ es un vector distinto de cero en $\mathbf{R}^n$ y k es un escalar. El otro semiespacio se puede representar como el conjunto de la forma $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} \leq k\}$. La unión de los dos semiespacios cerrados $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq k\}$ y $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T\mathbf{x} \leq k\}$ es $\mathbf{R}^n$. Si se hace referencia a un punto fijo $\mathbf{x}^0$ en el hiperplano que define al semiespacio, entonces este último se puede representar como $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq 0\}$ o como $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0\}$. Luego el primer semiespacio consta de puntos para los cuales $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ forman un ángulo agudo ($\leq 90^{\circ}$) con $\mathbf{p}$, mientras que el segundo semiespacio está integrado por puntos $\mathbf{x}$ tales que $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ forman un ángulo abtuso ($\geq 90^{\circ}$) con $\mathbf{p}$.

Observación 1.4. *Los semiespacios cerrados (abiertos) determinados por un hiperplano son conjuntos convexos.*

Rayos y direcciones

Otro ejemplo de conjunto convexo es el rayo.

Definición 1.10. *Un **rayo** es una colección de puntos de la forma* $\{\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{d} \mid \lambda \geq 0\}$*, en donde* $\mathbf{d}$ *es un vector distinto de cero. En este caso,* $\mathbf{x}^0$ *se denomina **vértice** del rayo, y* $\mathbf{d}$ *es la dirección del rayo.*

Definición 1.11. *Dado un conjunto convexo, un vector* $\mathbf{d}$*, distinto de cero, se denomina **dirección** (de recesión) del conjunto si, para todo* $\mathbf{x}^0$ *en el conjunto, el rayo* $\{\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{d} \mid \lambda \geq 0\}$ *también pertenece al conjunto.*

Observación 1.5. *Si el conjunto está acotado, entonces no tiene direcciones.*

Conos convexos

Una clase muy importante de conjuntos convexos es la de los conos convexos.

Definición 1.12. *Un conjunto* K *tal que* $\mathbf{0}_n \in K \subset \mathbf{R}^n$ *es un **cono** si* $\lambda\mathbf{x} \in K$ *cualesquiera que sean* $\mathbf{x} \in K$ *y* $\lambda \geq 0$.

En otras palabras, son conos aquellos conjuntos de $\mathbf{R}^n$ que contienen a todas las semirectas que parten de $\mathbf{0}_n$ y que pasan por un punto del mismo. Cualquier subespacio vectorial es un cono (aunque $\mathbf{0}_n$ no sea un vértice del mismo). El único conjunto acotado que es cono es $\{\mathbf{0}_n\}$.

Definición 1.13. *Un conjunto K es* ***cono convexo*** *si es cono y es un conjunto convexo.*

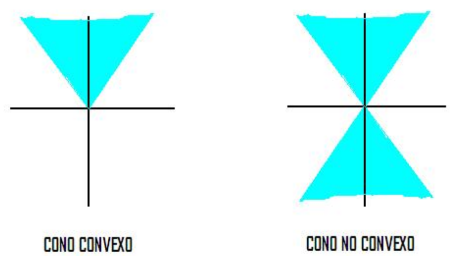


Figura 1.2: Cono convexo y cono no convexo

Proposición 1.3. *Sea $\varnothing \neq K \subset \mathbf{R}^n$. K es cono convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones lineales no negativas de elementos de K.*

Demostración. Supongamos que K es un cono convexo. Tomemos una combinación lineal no negativa arbitraria de elementos de K, $\mathbf{x} := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i$, con $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, p$. Si $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, p$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in K$ y no hace falta seguir. De no ser así, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0$ y podemos escribir

$$\mathbf{x} = (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i) \sum_{i=1}^{p} (\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}) \mathbf{x}^i,$$

nótese que

$$\sum_{i=1}^{p} (\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}) = 1,$$

entonces como consecuencia de la proposición (1.1),

$$\sum_{i=1}^{p} (\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}) \mathbf{x}^i \in K,$$

luego como K es cono

$$\mathbf{x} = (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i) \sum_{i=1}^{p} (\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}) \mathbf{x}^i \in K.$$

El recíproco es consecuencia directa de las definiciones de cono y de convexo.

□

Definición 1.14. *La* ***envoltura cónica*** *(se sobre entiende que convexa) de un conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ es el menor cono convexo que contiene a X. Se denota por cone X y es la intersección de todos los conos convexos que contienen a X.*

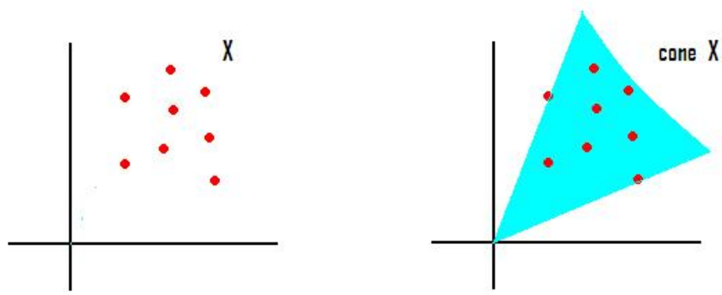


Figura 1.3: Envoltura cónica

Observación 1.6. *cone* $\varnothing = \{\boldsymbol{0}_n\}$.

Proposición 1.4. *Si $X \neq \varnothing$, cone X es el conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas de puntos de X.*

Demostración. Semejante a la caracterización de *conv* X. □

Un **cono poliédrico** es un conjunto que es a la vez cono y poliédro. El conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales homogéneo, $\{{a_i}^T\mathbf{x} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ es poliedro y cono, ya que si $\overline{\mathbf{x}}$ es solución, $\lambda\overline{\mathbf{x}}$ también lo es, para todo $\lambda \geq 0$. Hay, sin embargo, sistemas no homogéneos cuyo conjunto solución es cono poliédrico. Por ejemplo, el sistema $\{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq -1\}$ tiene por solución el primer cuadrante del plano. Nótese, sin embargo, que $\{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 0\}$ es un sistema equivalente (con igual conjunto de soluciones) al anterior y homogéneo.

Definición 1.15. *Dado un sistema de inecuaciones*

$$\sigma = \{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

el ***conjunto factible*** *de σ se define como*

$$F := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {\mathbf{a}_i}^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

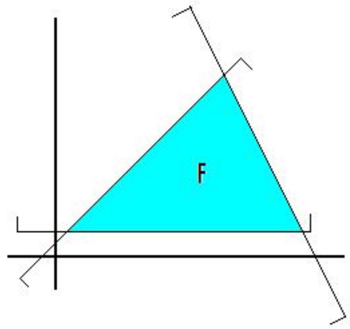


Figura 1.4: Conjunto factible

Proposición 1.5. *Si* $F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {\mathbf{a}_i}^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ *es un cono, entonces* $F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {\mathbf{a}_i}^T\mathbf{x} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Demostración. Denotamos $F^{'} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {\mathbf{a}_i}^T\mathbf{x} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ y probaremos que $F = F'$. Por ser F un cono, $\mathbf{0}_n \in F$, luego $0 \geq b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Si $\overline{\mathbf{x}} \in F^{'}$, entonces ${\mathbf{a}_i}^T\overline{\mathbf{x}} \geq 0 \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m$, así que $\overline{\mathbf{x}} \in F$.

Para el recíproco, si $\overline{\mathbf{x}} \in F$, se cumple que ${\mathbf{a}_i}^T\overline{\mathbf{x}} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, ya que, de lo contrario, si ${\mathbf{a}_i}^T\overline{\mathbf{x}} < 0$, para algún i, entonces para $\lambda > 0$ suficientemente grande se tiene que $\lambda{\mathbf{a}_i}^T\overline{\mathbf{x}} = {\mathbf{a}_i}^T(\lambda\overline{\mathbf{x}}) < b_i$, contradiciendo que F es un cono. Por tanto, $\overline{\mathbf{x}} \in F^{'}$ □

Definición 1.16. *Sea* $\varnothing \neq C \subset \mathbf{R}^n$ *un conjunto convexo. El* ***cono de recesión*** *de* C*, se define como*

$$O^+C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{y} + \gamma\mathbf{x} \in C,\ \mathbf{y} \in C,\ \gamma \geq 0\}.$$

Observación 1.7. *Si* C *es acotado, se tiene que* $O^+C = \{\mathbf{0}_n\}$.

Definición 1.17. *Sean* $\varnothing \neq C \subset \mathbf{R}^n$ *un conjunto convexo y* $\mathbf{x} \in C$ *un punto cualquiera en* C*. El* ***cono de direcciones factibles*** *de* C *en* $\mathbf{x}$*, se define como*

$$D(C, \mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} + \gamma\mathbf{y} \in C,\ \textit{para algún}\ \gamma > 0\}.$$

Definición 1.18. *Al conjunto* $(O^+C) \cap (-O^+C)$ *le llamaremos* ***espacio de linealidad*** *de* C *y se denotará* lin C.

Capítulo 2

Sistemas de inecuaciones lineales ordinarios

Para empezar a hablar de los sistemas de inecuaciones lineales, presentamos la introducción que hace Goberna en [2].

Los sistemas de inecuaciones lineales empezaron a interesar a los físicos en el siglo XIX, en relación con la determinación de los puntos de equilibrio en sistemas mecánicos. No es casualidad que el primer método numérico para tales sistemas lo propusiese el físico Fourier en 1827, quien pensaba que "el estudio profundo de la naturaleza es la más fértil de las fuentes de descubrimientos matemáticos". En la misma línea de Fourier, tratando de identificar los puntos de equilibrio en sistemas mecánicos, el físico húngaro Farkas probó en 1901, tras varios intentos infructuosos (pruebas incompletas), el resultado fundamental de la teoría de inecuaciones lineales (el Teorema de Farkas-Minkowski). Clarificado el asunto, los físicos dejaron de interesarse por los problemas de equilibrio y por sus inseparables sistemas de inecuaciones lineales. Por esa época los matemáticos más importantes habían
dejado de considerar a la física como su principal fuente de inspiración para centrar su atención en la fundamentación de las matemáticas y en su estructuración.

No es de extrañar, que diferentes matemáticos se ocuparan, sin otra motivación que la curiosidad intelectual, de los sistemas de inecuaciones durante el primer tercio del siglo XX tanto desde el punto de vista teórico como de los métodos numéricos. En el primer aspecto hay que destacar la aportación de Minkowski, quien se interesó por los conjuntos convexos y por los sitemas de inecuaciones lineales como herramientas para la teoría de números, dando diferentes versiones del teorema de separación y del lema de Farkas. Por lo que se refiere a los métodos, Dines, en 1918, y Motzkin, en 1936, redescubrieron el método de Fourier, que actualmente está más valorado por su importacia teórica que práctica.

En la sección 2.1 analizaremos el método de eliminación de Fourier pues es una herramienta útil en la demostración del teorema de Weyl presentado en la sección 2.2, donde además los conjuntos convexos cerrados (con el importante teorema de separación) son analizados. Finalmente, el Teorema de Farkas-Minkowski, el lema de Farkas, y otros resultados sobre sistema de inecuaciones lineales son demostrados en la sección 2.3.

2.1. El método de eliminación de Fourier

La idea de este método es extender a sistemas de inecuaciones lineales el método de eliminación de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales que procede a la eliminación, una a una de las variables. Desde el punto de vista geométrico, la eliminación de una variable x_i proporciona una representación de la proyección ortogonal del conjunto de soluciones del sistema actual sobre el subespacio $x_i = 0$. Dicha representación lineal es el **sistema reducido**.

Eliminando sucesivamente todas las variables menos una, se obtiene el intervalo de variación de esta última, que puede ser vacío o no, siendo el sistema dado **inconsistente** (carente de soluciones) o **consistente**, respectivamente. En el último caso, para calcular una solución del sistema, se toman valores arbitrarios, sucesivamente, para cada una de las variables en sus respectivos intervalos de variación en el orden inverso al de su eliminación.

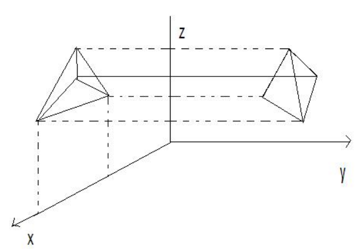


Figura 2.1: Grafica

Sin merma de generalidad, formulamos el procedimiento para eliminar la primera variable, x_1, de un sistema dado $\sigma = \{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, cuyo sistema reducido denotaremos por $\sigma^{'}$. Si descomponemos la incógnita $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ en la forma $\mathbf{x} = \binom{x_1}{\mathbf{x}^{'}}$, donde $\mathbf{x}^{'} = (x_2, \ldots, x_n)^T$, y dividimos ambos miembro de cada inecuación de σ por el valor absoluto del coeficiente de x_1, siempre que no sea nulo, obtenemos un **sistema equivalente** a σ, que escribimos como

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + \mathbf{c}_i{}^T \mathbf{x}^{'} \geq d_i,\ i \in I \\ -x_1 + \mathbf{c}_j{}^T \mathbf{x}^{'} \geq d_j,\ j \in J \\ \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}^{'} \geq d_k,\ k \in K \end{array} \right\} \tag{2.1.1}$$

donde I, J, K es una partición de $1, \ldots, m$, pudiendo ser vacío alguno de estos conjuntos (aunque $K \neq \varnothing$ si $I = J = \varnothing$).

Algoritmo de eliminación de Fourier

(a) Si $I \neq \varnothing \neq J$, el sistema reducido es

$$\sigma^{'} = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j)^T \mathbf{x}^{'} \geq d_i + d_j,\ (i,j) \in I \times J \\ \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}^{'} \geq d_k,\ k \in K \end{array} \right\}.$$

De no ser así, dos casos son posibles:

(b) Si $K \neq \varnothing$, el sistema reducido es $\sigma^{'} = \{\mathbf{c}_k^T \mathbf{x}^{'} \geq d_k,\ k \in K\}$.

(c) Si $K = \varnothing$ (en cuyo caso bien $I \neq \varnothing$ o bien $J \neq \varnothing$), el sistema reducido es $\sigma^{'} = \{\mathbf{0}_{n-1}^T \mathbf{x}^{'} \geq 0\}$.

Si el sistema dado, σ, es homogéneo ($b_i = 0$, para todo i), entonces el sistema reducido, $\sigma^{'}$, tambien es homogéneo.

Ejemplo 2.1. *Hallaremos una solución del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ x_2 - x_3 \geq -1 \\ x_1 + 2x_3 \geq -2 \end{array} \right\} \tag{2.1.2}$$

mediante la eliminación sucesiva de x_1 y de x_2.

Dividiendo por el coeficiente de x_1 (cuando es no nulo) cada inecuación de (2.1.2) y ordenando las inecuaciones convenientemente, expresamos el sistema en el formato (2.1.1):

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_3 \geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -1 \\ -x_2 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ x_2 - x_3 \geq -1 \end{array} \right\}. \tag{2.1.3}$$

Como $I = \{1\}$, $J = \{2, 3\}$ y $K = \{4\}$, (2.1.3) es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{c} -2 - 2x_3 \leq x_1 \leq min\{1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 - x_3\} \\ x_2 - x_3 \geq -1 \end{array} \right\}, \tag{2.1.4}$$

por lo que el sistema reducido de (2.1.2) es

$$\left\{ \begin{array}{c} -2 - 2x_3 \leq 1 - 2x_2 + x_3 \\ -2 - 2x_3 \leq x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \geq -1 \end{array} \right\}$$

o, en formato (2.1.1),

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 + x_3 \geq -2 \\ x_2 - x_3 \geq -1 \\ -x_2 + \frac{3}{2}x_3 \geq -\frac{3}{2} \end{array} \right\}, \tag{2.1.5}$$

que describe la proyección ortogonal de F sobre el plano $x_1 = 0$. Las cotas para x_2 en (2.1.5) vienen dadas por

$$\left\{ max\{-x_3 - 2,\ x_3 - 1\} \leq x_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3 \right\},$$

por lo que el sistema reducido de (2.1.5) es

$$\left\{ \begin{array}{c} -x_3 - 2 \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3 \\ \\ x_3 - 1 \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} x_3 \geq -\frac{7}{5} \\ \\ x_3 \geq -5 \end{array} \right\} \equiv \left\{ x_3 \geq -\frac{7}{5} \right\}.$$

Así el intervalo de variación de x_3 es $[-\frac{7}{5}, +\infty)$, que es la proyección ortogonal de F sobre el eje x_3. Luego si tomamos $x_3 = 0$, x_2 deberá satisfacer $-1 \leq x_2 \leq \frac{3}{2}$ por (2.1.5). Podemos tomar $x_2 = 0$, en cuyo caso x_1 verificará, de acuerdo con (2.1.4), $-2 \leq x_1 \leq 0$. Eligiendo finalmente $x_1 = 0$, obtenemos $(0,0,0)^T \in F$.

Teorema 2.1. *(Fourier, 1827) Sea $F \subset \mathbf{R}^n$ el conjunto de soluciones de $\sigma = \{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ y sea $F^{'} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ el conjunto de soluciones del sistema reducido $\sigma^{'}$. Entonces $\mathbf{x}^{'} \in F^{'}$ si y sólo si existe $x_1 \in \mathbf{R}$ tal que $\binom{x_1}{\mathbf{x}^{'}} \in F$ (por lo que $\sigma^{'}$ es consistente si y sólo si σ también lo es). Además, si F es acotado, necesariamente $I \neq \varnothing \neq J$.*

Demostración. Como cada conjunto I, J, K puede ser vacío o no, discutiremos los siete casos posibles (no pueden ser simultáneamente vacíos).

Caso 1: $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $K \neq \varnothing$. Entonces σ es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{c} max_{i \in I}\ \{d_i - \mathbf{c}_i^T\mathbf{x}^{'}\} \leq x_1 \leq min_{j \in J}\ \{\mathbf{c}_j^T\mathbf{x}^{'} - d_j\} \\ \mathbf{c}_k^T\mathbf{x}^{'} \geq d_k,\ k \in K \end{array} \right\}.$$

Es inmediato comprobar que si $\binom{x_1}{\mathbf{x}'} \in F$, entonces $\mathbf{x}' \in F'$. Recíprocamente, si $\mathbf{x}' = (x_2, \ldots, x_n)^T \in F'$, entonces $\mathbf{x}'$ es solución de σ', por lo que

$$max_{i \in I} \ \{d_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}'\} \leq min_{j \in J} \ \{\mathbf{c}_j^T \mathbf{x}' - d_j\}$$

y puede tomarse $x_1 \in [max_{i \in I} \ \{d_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}'\}, min_{j \in J} \ \{\mathbf{c}_j^T \mathbf{x}' - d_j\}]$, de tal manera que $\mathbf{x} := \binom{x_1}{\mathbf{x}'}$ satisface σ, es decir, $\mathbf{x} \in F$. La afirmación adicional sobre la acotación de F no requiere prueba en este caso.

Caso 2: $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $K = \varnothing$. Entonces σ es equivalente a

$$\{max_{i \in I} \ \{d_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}'\} \leq x_1 \leq min_{j \in J} \ \{\mathbf{c}_j^T \mathbf{x}' - d_j\}\},$$

y se repite el argumento.

Caso 3: $I \neq \varnothing$, $J = \varnothing$, $K \neq \varnothing$. Es fácil ver que $\binom{x_1}{\mathbf{x}'} \in F$ implica $\mathbf{x}' \in F'$ y que dado $\mathbf{x}' \in F'$, si se toma $x_1 \in [max_{i \in I} \ \{d_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}'\}, +\infty)$ se tiene $\binom{x_1}{\mathbf{x}'} \in F$. En este caso, F es no acotado.

Caso 4: $I \neq \varnothing, J = \varnothing, K = \varnothing$. Entonces dado $\mathbf{x}' \in F' = \mathbf{R}^{n-1}$, se completa una solución de σ tomando $x_1 \in [max_{i \in I} \ \{d_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}'\}, +\infty)$.

Caso 5: $I = \varnothing, J \neq \varnothing, K \neq \varnothing$. Dado $\mathbf{x}' \in F'$, se completa una solución tomando $x_1 \in (-\infty, min_{i \in J} \ \{\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}' - d_j\}]$.

Caso 6: $I = \varnothing, J \neq \varnothing, K = \varnothing$. Se toman $\mathbf{x}' \in R^{n-1}$ y $x_1 \in (-\infty, min_{i \in J} \ \{\mathbf{c}_j^T \mathbf{x}' - d_j\}]$.

Caso 7: $I = \varnothing$, $J = \varnothing$, $K \neq \varnothing$. Dado $\mathbf{x}' \in F'$, se completa una solución tomando cualquier $x_1 \in \mathbf{R}$. Obsérvese que $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n-1}$ equivale a afirmar que $x_2, \ldots, x_n$ son libres. $\square$

En general, el método de Fourier elimina las variables sucesivamente, sin que importe el orden de eliminación.

2.2. Conjuntos convexos cerrados

Los conjuntos factibles en programación lineal, programación cuadrática y programación fraccional son poliedros (intersecciones de semiespacios), que son convexos y cerrados. Lo mismo ocurre con otras clases de problemas de programación no lineal.

Definición 2.1. *Un hiperplano separa estrictamente dos conjuntos cuando cada uno de los semiespacios abiertos que determina dicho hiperplano contiene a uno de los dos conjuntos.*

Teorema 2.2. *(de separación) Si C es un convexo cerrado no vacío e $\mathbf{y} \notin C$, existe entonces un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_n$ y un escalar b tales que $\mathbf{a}^T\mathbf{y} > b$ y $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$, para todo $\mathbf{x} \in C$.*

Demostración. Sea $\overline{B}$ una bola cerrada de centro $\mathbf{y}$, con radio δ tan grande como haga falta para que $\overline{B} \cap C \neq \varnothing$. Como la distancia a $\mathbf{y}$, $d(\mathbf{y}, .)$, es una función continua sobre $\mathbf{R}^n$, al igual que su cuadrado, $d^2(\mathbf{y}, .)$, y $\overline{B} \cap C$ es un compacto, existe un punto $\mathbf{z} \in \overline{B} \cap C$ tal que

$$||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2 \leq ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2, \tag{2.2.1}$$

cualquiera que sea $\mathbf{x} \in \overline{B} \cap C$. Por otro lado, si $\mathbf{x} \in C - \overline{B}$, tenemos

$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 > \delta^2 \geq ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2,$$

por lo que se cumple (2.2.1), para todo $\mathbf{x} \in C$. Ahora si definimos $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z}$ y $b = \mathbf{a}^T\mathbf{z}$, se tiene que

$$\mathbf{a}^T\mathbf{y} = \mathbf{a}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z} + \mathbf{z}) = ||\mathbf{a}||^2 + \mathbf{a}^T\mathbf{z},$$

de donde $\mathbf{a}^T\mathbf{y} > b$ y sólo falta probar que $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$, para todo $\mathbf{x} \in C$.
Sea, pues, $\mathbf{x} \in C$. Como $\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\} \subset C$, si $0 < \lambda < 1$, $(1-\lambda)\mathbf{z} + \lambda\mathbf{x} \in C$ y, aplicando (2.2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} ||\mathbf{z} - \mathbf{y}||^2 &\leq ||(1-\lambda)\mathbf{z} + \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||(\mathbf{z} - \mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z}||^2 = \\ &= ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2 + \lambda^2||\mathbf{x} - \mathbf{z}||^2 + 2\lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Por (2.2.2), y teniendo en cuenta que $\lambda > 0$,

$$\lambda||\mathbf{x} - \mathbf{z}||^2 - 2\mathbf{a}^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \geq 0. \tag{2.2.3}$$

Tomando $\lim_{\lambda \to 0}$ en (2.2.3), se obtiene $-2\mathbf{a}^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \geq 0$, es decir $b = \mathbf{a}^T\mathbf{z} \geq \mathbf{a}^T\mathbf{x}$. $\square$

Corolario 2.1. *Si K es un cono convexo cerrado e $\mathbf{y} \notin K$, existe un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_n$ tal que $\mathbf{a}^T\mathbf{y} > 0$ y $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in K$.*

Demostración. Por el teorema de separación, existen $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_n$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $\mathbf{a}^T\mathbf{y} > b$ y $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$, para todo $\mathbf{x} \in K$. Debemos probar que puede ponerse $b = 0$.
Al ser $\mathbf{0}_n \in K$, se debe cumplir $\mathbf{a}^T\mathbf{0}_n = 0 \leq b < \mathbf{a}^T\mathbf{y}$.
Por otro lado, dado $\mathbf{x} \in K$ (fijo), $\lambda\mathbf{x} \in K$ cualquiera que sea $\lambda > 0$, por lo que $\mathbf{a}^T(\lambda\mathbf{x}) \leq b$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq \frac{b}{\lambda}$. Tomando límites cuando λ tiende a $+\infty$, en esta última desigualdad queda $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq 0$. $\square$

Definición 2.2. *Un hiperplano H es* ***de apoyo*** *para X en un punto $\overline{\mathbf{x}} \in X$ si $\overline{\mathbf{x}} \in H$ y X está contenido en uno de los dos semiespacios cerrados que determina H.*

Teorema 2.3. *(del hiperplano de apoyo) Si C es un convexo y cerrado y $\overline{\mathbf{x}}$ es un punto de la frontera de C, existe entonces un hiperplano de apoyo para C en $\overline{\mathbf{x}}$.*

Demostración. Como $\overline{\mathbf{x}}$ pertenece a la frontera de C, podemos tomar una sucesión $\{\mathbf{y}^k\} \subset \mathbf{R}^n - C$ tal que $\lim_k \mathbf{y}^k = \overline{\mathbf{x}}$. Por el teorema de separación, para cada k existe $\mathbf{a}_k \in \mathbf{R}^n$, con $||\mathbf{a}_k|| = 1$, tal que

$$\mathbf{a}_k^T\mathbf{y}^k > \mathbf{a}_k^T\mathbf{x}, \tag{2.2.4}$$

para todo $\mathbf{x} \in C$. Como $\{\mathbf{a}_k\}$ está contenida en la esfera unidad, que es compacta, $\{\mathbf{a}_k\}$ contiene una subsucesión convergente que podemos suponer sin merma de generalidad que es ella misma. Sea $\lim_k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$, con $||\mathbf{a}_k|| = 1$.

Tomando límites en (2.2.4) cuando $k \to \infty$ se obtiene $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{a}^T\mathbf{x}$, y eso para todo $\mathbf{x} \in C$. Por tanto, $H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}}\}$ es un hiperplano de apoyo para C en $\overline{\mathbf{x}}$. $\square$

Corolario 2.2. *Si K es un cono convexo y cerrado existen hiperplanos de apoyo para K en todos sus puntos frontera y tales hiperplanos también son de apoyo en el origen.*

Demostración. Si $\overline{\mathbf{x}}$ pertenece a la frontera de K, sabemos que existen $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_n$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$, para todo $\mathbf{x} \in K$ y $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} = b$. Bastará probar que $b = \mathbf{a}^T\mathbf{0}_n = 0$.

Para empezar, al ser $\mathbf{0}_n \in K$, se tiene $0 = \mathbf{a}^T\mathbf{0}_n \geq b$. Por otro lado, como $\mathbf{a}^T(\lambda\overline{\mathbf{x}}) \geq b$, para todo $\lambda > 0$, $b = \mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} \geq \frac{b}{\lambda}$ y, al tomar límites cuando $\lambda \to +\infty$, se obtiene $b \geq 0$. Se concluye que $b = 0$. □

Definición 2.3. *El conjunto* $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\} \subset \mathbf{R}^n$ *es* ***afinamente independiente*** *(AI) cuando* $\left\{\binom{\mathbf{x}^1}{1}, \ldots, \binom{\mathbf{x}^p}{1}\right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *es linealmente independiente (LI).*

Proposición 2.1. *Dados* $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p$ *en* $\mathbf{R}^n$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$ *es AI.*

(ii) Si $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *son escalares tales que* $\sum_{i=1}^p \beta_i\mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n$ *y* $\sum_{i=1}^p \beta_i = 0$*, entonces* $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

(iii) $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p$ *determinan una variedad afín de máxima dimensión, es decir,* $dim\ aff\ \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\} = p - 1$.

Demostración. Probaremos la equivalencia entre las negaciones de (i), (ii) y (iii).

Si $\mathbf{x} = aff\ \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$, entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\mathbf{x}^i, \text{ donde } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p \text{ y } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

De donde

$$\lambda_p = 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i,$$

luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^p) \text{ y } \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^p) \in span\ \{\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^p, \ldots, \mathbf{x}^{p-1} - \mathbf{x}^p\},$$

así se concluye que

$$dim\ aff\ \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\} = dim\ span\ \{\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^p, \ldots, \mathbf{x}^{p-1} - \mathbf{x}^p\}.$$

Ahora por hipótesis

$$dim\ aff\ \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\} = dim\ span\ \{\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^p, \ldots, \mathbf{x}^{p-1} - \mathbf{x}^p\} < p - 1,$$

si y sólo si existen escalares $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, p-1$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^p) = \mathbf{0}_n,$$

o lo que es lo mismo existen escalares $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, p-1$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^p) + \cdots + \alpha_{p-1}(\mathbf{x}^{p-1} - \mathbf{x}^p) = \mathbf{0}_n,$$

si y sólo si existen β_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{p} \beta_i = 0,$$

$$\text{donde } \beta_i = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, p-1 \text{ y } \beta_p = -\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i,$$

si y sólo si existen β_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}^i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n+1},$$

si y sólo si $\left\{ \binom{\mathbf{x}^1}{1}, \binom{\mathbf{x}^2}{1}, \ldots, \binom{\mathbf{x}^p}{1} \right\}$ es linealmente dependiente. □

Definición 2.4. *La envoltura convexa de un conjunto finito no vacío se denomina* ***polítopo****.*

Teorema 2.4. *(Carathéodory, 1911) Sea $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$. Se cumple:*

(i) Toda combinación lineal no negativa de elementos de X, con $X \neq \{\mathbf{0}_n\}$, es también combinación lineal no negativa de un subconjunto LI de X (con un máximo de n elementos).

(ii) Toda combinación lineal convexa de puntos de X es también combinación lineal convexa de un subconjunto AI de X (con un máximo de $n+1$ puntos).

Demostración. (i) Sea $\mathbf{x} \in$ *cone* X, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. Se puede escribir

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}^i \in X,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, p, \tag{2.2.5}$$

siendo p el menor número de elementos de X necesarios para expresar $\mathbf{x}$ como CL no negativa de elementos de X (existe dicha CL por ser $(N, \geq)$ un buen orden).

Si $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$ fuese linealmente dependiente, se podría escribir

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n, \tag{2.2.6}$$

donde podemos suponer $\alpha_j > 0$ para cierto $j \in \{1, \ldots, p\}$ (si es menester se cambia el signo de todos los α_i). Como consecuencia de (2.2.5) y (2.2.6), se tiene

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu\alpha_i)\mathbf{x}^i = \mathbf{x} \tag{2.2.7}$$

cualquiera que sea $\mu \in \mathbf{R}$. Al ser $\alpha_j > 0$, está bien definido el número positivo $\overline{\mu} = \min \{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0\}$, y tomando $\mu = \overline{\mu}$, todos los coeficientes del primer miembro de (2.2.7) son no negativos y al menos uno de ellos es 0. Tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \overline{\mu}\alpha_i)\mathbf{x}^i = \mathbf{x},\ \lambda_i - \overline{\mu}\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p, \tag{2.2.8}$$

siendo nulo al menos uno de los p escalares de (2.2.8). Tenemos una contradicción.

(ii) Sea $\mathbf{x} \in conv\ X$. Entonces podemos escribir

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \mathbf{x}^i \in X,\ i = 1, \ldots, p,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}^i \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_i \geq 0, \mathbf{x}^i \in X,\ i = 1, \ldots, p.$$

Como consecuencia de (i), podemos suponer que $\left\{ \binom{\mathbf{x}^1}{1}, \ldots, \binom{\mathbf{x}^p}{1} \right\}$ es LI, en cuyo caso $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$ es AI. Como $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{x}$ y $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, concluimos que $\mathbf{x}$ es CL convexa de un subconjunto de X que es AI. $\square$

Las envolturas lineal y afín de un conjunto arbitrario, finito o no, son conjuntos cerrados (pues los conjuntos afines son intersección de hiperplanos). Por el contrario, ni la envoltura convexa ni la envoltura cónica de un conjunto cerrado, son en general, cerradas. La finitud del conjunto generador, en cambio, sí garantiza la clausura de ambas envolturas, según probaremos a continuación.

Teorema 2.5. *(Weyl, 1935) Si $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ son conjuntos finitos, con $X \neq \varnothing$, entonces:*

(i) El polítopo conv X es un poliedro compacto;
(ii) El ***cono finitamente generado*** *cone Y es el conjunto solución de un sistema homogéneo (por lo que es un* ***cono poliédrico****), y*
(iii) La suma de Minkowski de ambos conjuntos, conv $X +$ cone Y, también es un poliedro.

Demostración. Sean $X = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$ e $Y = \{\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q\}$

(i) $\mathbf{x} \in$ *conv* X si y sólo si tiene solución el sistema (con variables λ_i, $i = 1, \ldots, p$)

$$\left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i;\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p \right\}.$$

En consecuencia, *conv* X es el conjunto de soluciones del sistema resultante de eliminar las variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ en el sistema (con variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; $x_1, \ldots, x_n$)

$$\left\{ \begin{array}{c} x_k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_k^i,\ k = 1, \ldots, n; \\ \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1;\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p \end{array} \right\}.$$

Entonces, por el teorema de Fourier (aplicado p veces), *conv* X es un poliedro. Además, *conv* X es acotado porque, dado $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i \in$ *conv* X, con $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1;\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p$, se tiene

$$||\mathbf{x}|| \leq \sum_{i=1}^{p} ||\lambda_i \mathbf{x}^i|| \leq \sum_{i=1}^{p} ||\mathbf{x}^i||,$$

que es un número real , por lo que *conv* X es un poliedro compacto.

(ii) Si $Y = \varnothing$ no hay nada que probar, pues *cone* $\varnothing = \{\mathbf{0}_n\}$ es el conjunto solución de $\{x_k = 0,\ k = 1, \ldots, n\}$. Suponemos, pues, $Y \neq \varnothing$. Argumentando como antes, *cone* Y es el conjunto de soluciones del sistema que resulta de eliminar $\mu_1, \ldots, \mu_q$ en el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{c} x_k = \sum_{j=1}^{q} \mu_j \mathbf{y}_k^j, \ k = 1, \ldots, n; \\ \\ \mu_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, q \end{array} \right\}.$$

(iii) Finalmente, *conv* X + *cone* Y también es un poliedro, ya que

$$conv\ X + cone\ Y = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \mathbf{y}^j \ \mid \ \sum_{j=1}^{p} \lambda_i = 1; \\ \\ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, p; \ \mu_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, q \end{array} \right\}.$$

Esto completa la prueba. □

Definición 2.5. *Dado un cono convexo $K \subset \mathbf{R}^n$, se define su* ***cono polar*** *(positivo) como*

$$K^0 = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} \geq 0, \ \textit{para todo } \mathbf{x} \in K\}.$$

Observación 2.1. *K^0 es un cono convexo cerrado por ser intersección de semiespacios cuyas fronteras contienen al origen.*

Observación 2.2. *Considérese $X = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^p\} \subset \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Si $\mathbf{x} \in$ cone X, entonces*

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{x}^p \ \textit{y} \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots p.$$

Ahora $\mathbf{y} \in X^0$, si y sólo si $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} \geq 0$, si y sólo si

$$\lambda_1\mathbf{y}^T\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{y}^T\mathbf{x}^2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{y}^T\mathbf{x}^p \geq 0 \ \textit{y} \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots p,$$

si y sólo si

$$\mathbf{y}^T\mathbf{x}^1 \geq 0, \ \mathbf{y}^T\mathbf{x}^2 \geq 0, \ \ldots, \ \mathbf{y}^T\mathbf{x}^p \geq 0 \ \textit{y} \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots p.$$

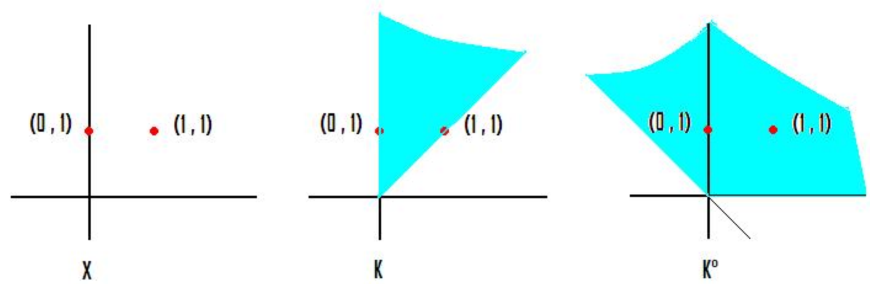
De la observación anterior se concluye que si X es finito, entonces

$$(cone\ X)^0 = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} \geq 0, \ \text{para todo } \mathbf{x} \in K\}, \tag{2.2.9}$$

por lo que el polar de un cono finitamente generado también es un cono poliédrico. Los conos convexos $\mathbf{R}^n$ y $\{\mathbf{0}_n\}$ son polar uno del otro, mientras que $\mathbf{R}_+^n$ es el polar de sí mismo. Para tales conos se cumple la relación $K^{00} = K$, que es una importante propiedad de los conos convexos cerrados.

Ejemplo 2.2. *Sea K el cono generado por $X = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$. Su cono polar es*

$$K^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 0 \right\}.$$



Lema 2.1. *(de Farkas para conos) Si K es un cono convexo cerrado, entonces $K^{00} = K$.*

Demostración. La inclusión $K \subset K^{00}$ es trivial.

Para probar la inclusión opuesta, supongamos que $\mathbf{a} \notin K$. Entonces, por el Corolario 2.1, existe un $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{a}^T\mathbf{z} < 0$ y $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in K$ (es decir, $\mathbf{z} \in K^0$). Por tanto, $\mathbf{a} \notin K^{00}$. □

2.3. Teoría de los sistemas de inecuaciones lineales

Todo sistema de m inecuaciones lineales en $\mathbf{R}^n$ puede escribirse en la forma $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$, donde $I = \{1, \ldots, m\}$ es el **conjunto de índices** (que identifican a las inecuaciones del sistema). El objetivo de esta sección es determinar si un sistema dado $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i \in I\}$ es consistente o no, y si lo es, caracterizar a las inecuaciones que son consecuencia del mismo. También probaremos el recíproco del teorema 2.5.

Definición 2.6. *Una inecuación $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ es **consecuencia** del sistema $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$ si toda solución de este sistema satisface dicha inecuación.*

Definición 2.7. *El **cono característico** del sistema*

$$\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\} \text{ es}$$

$$K := cone\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}_i\\ b_i\end{pmatrix}, i \in I; \begin{pmatrix}\mathbf{0}_n\\ -1\end{pmatrix}\right\}. \tag{2.3.1}$$

El polar de K lo denotaremos

$$F_{n+1} = \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ x_{n+1}\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + b_i x_{n+1} \geq 0,\ i \in I; -x_{n+1} \geq 0\right\}. \tag{2.3.2}$$

Lema 2.2. *(i) $F = \varnothing$ si y sólo si $x_{n+1} = 0$, para todo $\binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}} \in F_{n+1}$.*
(ii) Suponiendo $F \neq \varnothing$, $\mathbf{x} \in F$ si y sólo si $\binom{\mathbf{x}}{-1} \in F_{n+1}$.

Demostración. (i) Si $\binom{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{x}_{n+1}} \in F_{n+1}$ y $\overline{x}_{n+1} \neq 0$, entonces $\overline{x}_{n+1} < 0$ (por (2.3.2)). Dividiendo por $-\overline{x}_{n+1} > 0$ ambos miembros de

$$\mathbf{a}_i^T\overline{\mathbf{x}} + b_i\overline{x}_{n+1} \geq 0, i \in I,$$

se concluye que $-\frac{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{x}_{n+1}} \in F$. Y recíprocamente, si

$$\overline{\mathbf{x}} \in F,\ \mathbf{a}_i^T\overline{\mathbf{x}} + b_i(-1) \geq 0,\ \text{para todo } i \in I.$$

Por tanto, $\binom{\overline{\mathbf{x}}}{-1} \in F_{n+1}$.

(ii) Es inmediato. □

Teorema 2.6. *(de caracterización de inecuaciones consecuentes, Farkas-Minkowski,1911) Sea $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$ un sistema consistente y sea K su cono característico. Una inecuación $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ es consecuencia de dicho sistema si y sólo si $\binom{\mathbf{a}}{b} \in K$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $\binom{\mathbf{a}}{b} \in K = (F_{n+1})^0$, entonces, de acuerdo con el lema 2.2, parte (ii), para todo $\overline{\mathbf{x}} \in F$ se cumple

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}\\ -1\end{pmatrix} \geq 0,$$

es decir, $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} \geq b$, para todo $\overline{\mathbf{x}} \in F$.

($\Rightarrow$) Supondremos ahora que $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ es consecuencia de $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$ y demostraremos que $\binom{\mathbf{a}}{b} \in (F_{n+1})^0 = K$, es decir, que $\binom{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{x}_{n+1}} \in F_{n+1}$ implica $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} + b\overline{x}_{n+1} \geq 0$. Como $\overline{x}_{n+1} \leq 0$, dos casos pueden darse:

<u>*Caso 1*</u>: $\overline{x}_{n+1} < 0$.

Po ser F_{n+1} un cono, multiplicando por $\gamma = -\frac{1}{\overline{x}_{n+1}} > 0$ se obtiene

$$\gamma\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}\\ \overline{x}_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\overline{\mathbf{x}}\\ -1\end{pmatrix} \in F_{n+1},$$

por lo que $\mathbf{a}_i^T(\gamma\overline{\mathbf{x}}) \geq b_i$, y esto para todo $i \in I$. Como $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ es consecuencia de $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$, debe ser $\mathbf{a}^T(\gamma\overline{\mathbf{x}}) \geq b$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} + b\overline{x}_{n+1} \geq 0$.

<u>*Caso 2*</u>: $\overline{x}_{n+1} = 0$.

Tenemos ahora $\binom{\overline{\mathbf{x}}}{0} \in F_{n+1}$. Tomando $\overline{\mathbf{z}} \in F$ arbitrario, al ser $\binom{\overline{\mathbf{z}}}{-1} \in F_{n+1}$, se tiene

$$(1-\lambda)\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}\\ 0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{z}}\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-\lambda)\overline{\mathbf{x}} + \lambda\overline{\mathbf{z}}\\ -\lambda\end{pmatrix} \in F_{n+1},$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. Dicho punto está en el caso 1, por lo que $\mathbf{a}^T[(1-\lambda)\overline{\mathbf{x}} + \lambda\overline{\mathbf{z}}] - \lambda b \geq 0$. Tomando límites cuando $\lambda \to 0$ se obtiene $\mathbf{a}^T\overline{\mathbf{x}} \geq 0$. □

Corolario 2.3. *(Lema de Farkas, 1910)* $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq 0$ *es consecuencia de* $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq 0,\ i \in I\}$ *si y sólo si* $\mathbf{a} \in$ *cone* $\{\mathbf{a}_i,\ i \in I\}$.

Demostración. $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq 0$ es consecuencia de $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq 0,\ i \in I\}$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ 0\end{pmatrix} \in \textit{cone}\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}_i\\ 0\end{pmatrix},\ i \in I; \begin{pmatrix}\mathbf{0}_n\\ -1\end{pmatrix}\right\},$$

si y sólo si $\mathbf{a} \in$ *cone* $\{\mathbf{a}_i,\ i \in I\}$. □

Ejemplo 2.3. *Considérese el sistema* $\sigma = \{x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \geq 0\}$, *se tiene que*

$$K = cone\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

luego $3x_1 - x_2 \geq -2$ *es consecuencia de* σ, *pues*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.7. *(de existencia, Zhu, 1966)* $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq 0,\ i \in I\}$ *es consistente si y sólo si* $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin K$ *(el cono característico del sistema).*

Demostración. Supongamos que el sistema es consistente y sea $\overline{\mathbf{x}} \in F$. Entonces, por el lema 2.2, parte (ii), $\binom{\overline{\mathbf{x}}}{-1} \in F_{n+1}$ y $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin (F_{n+1})^0 = K$.

Recíprocamente, si el sistema es inconsistente (es decir, $F = \varnothing$), el cono F_{n+1} está contenido en el hiperplano $\left\{\binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}}\right\} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ (por el lema 2.2, parte (i)). Por tanto, $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in (F_{n+1})^0 = K$. □

Teorema 2.8. *(de representación de poliedros, Motzkin, 1936) Los poliedros diferentes del vacío son las sumas de polítopos con conos finitamente generados.*

Demostración. Dado un poliedro $F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$, probaremos que existen dos conjuntos finitos $X, Y \subset \mathbf{R}^n$, con $X \neq \varnothing$, tales que $F = conv\ X + cone\ Y$.

El cono característico K del sistema $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i \in I\}$ es un cono finitamente generado. Aplicando el teorema de Weyl, K es el conjunto solución de un sistema homogéneo

$$\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{c}_i \\ d_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0,\ j = 1, \ldots, p\right\},$$

es decir, $K = \left[cone\left\{\binom{\mathbf{c}_j}{d_j},\ j = 1, \ldots, p\right\}\right]^0$. Tomando polares en ambos miembros, y aplicando el lema de Farkas, se obtiene

$$F_{n+1} = K^0 = cone\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 1, \ldots, p\right\},$$

con $d_j \leq 0$, para todo $j = 1, \ldots, p$ (por la definición de F_{n+1}). Sin merma de generalidad, podemos suponer que d_j es -1 o 0 para todo j.

Si fuese $d_j = 0$, para todo j, podríamos escribir

$$F_{n+1} = cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \; j = 1, \ldots, p \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\},$$

por lo que $F = \varnothing$ por el lema 2.2, en contradicción con la hipótesis. En consecuencia, hay al menos un $d_j = -1$, y luego de reordenar los índices si fuera necesario, podemos escribir

$$F_{n+1} = cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ -1 \end{pmatrix}, \; j = 1, \ldots, s; \; \begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \; j = s+1, \ldots, p \right\}.$$

De nuevo por el lema 2.2, $\mathbf{x} \in F$ si y sólo si $\binom{\mathbf{x}}{-1} \in F_{n+1}$ si y sólo si podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{j=s+1}^{p} \lambda_j \begin{pmatrix} \mathbf{c}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, p,$$

es decir,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbf{c}_j + \sum_{j=s+1}^{p} \lambda_j \mathbf{c}_j, \; \sum_{i=1}^{p} \lambda_j = 1, \; \lambda_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, p,$$

que equivale a afirmar $\mathbf{x} \in conv \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s\} + cone \{\mathbf{c}_{s+1}, \ldots, \mathbf{c}_p\}$. por tanto,

$$F = conv \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s\} + cone \{\mathbf{c}_{s+1}, \ldots, \mathbf{c}_p\}.$$

Si $s = p$ (es decir, $d_j = -1$, para todo j), la descomposición buscada es $F = conv \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s\} + cone \varnothing$ (y F es un polítopo). $\square$

Corolario 2.4. *(Minkowski, 1896) Los poliedros compactos son los polítopos y los conos poliédricos son los conos finitamente generados.*

DEMOSTRACIÓN. Recordando el teorema primero de Weyl, basta probar que un poliedro F es polítopo cuando F es acotado y es un cono finitamente generado cuando F es cono. En ambos casos, podemos escribir $F = P + C$, donde P es un polítopo y C es un cono finitamente generado.

(i) $F = P + C$ es acotado si y sólo si $C = \{\mathbf{0}_n\}$. Por tanto, bajo la hipótesis de acotación, $F = P + \{\mathbf{0}_n\} = P$.

(ii) Probaremos que si F es cono poliédrico, $F = C$.

Sea $\overline{\mathbf{x}} \in F$. Dado $r \in \mathbf{N}$, $r\overline{\mathbf{x}} \in F = P + C$, por lo que existen $\mathbf{y}^r \in P$ y $\mathbf{z}^r \in C$ tales que $r\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{y}^r + \mathbf{z}^r$. Dividiendo por r y tomando límites cuando $r \to \infty$, teniendo en cuenta la acotación de $\{\mathbf{y}^r\}_{r=1}^{\infty} \subset P$ y que C es cerrado, se tiene $\overline{\mathbf{x}} = \text{lím}_{r\to\infty} \frac{\mathbf{z}^r}{r} \in C$.

Por último, sea $\overline{\mathbf{z}} \in C$. Tomando un $\mathbf{y} \in P$ arbitrario, como $\mathbf{y} + r\overline{\mathbf{z}} \in P + C = F$, para todo $r \in \mathbf{N}$, existe un $\mathbf{x}^r \in F$ tal que $\mathbf{y} + r\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{x}^r$. Repitiendo la argumentación anterior,

$$\overline{\mathbf{z}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathbf{x}^r}{r} \in F.$$

$\square$

Capítulo 3

Sistemas de inecuaciones lineales semi-infinitos

La programación lineal semi-infinita surge de manera natural al modelar situaciones, o reformular modelos, en diferentes campos de aplicación, como aproximación funcional, estimación de parámetros y reconocimiento de patrones.

En este capítulo tratamos con los sistemas de desigualdades lineales semi-infinitos, pues estos describen los conjuntos factibles en programación lineal semi-infinita. En la sección 3.1 se presenta la extensión de algunos teoremas y lemas sobre los sistemas de desigualdades lineales presentados en el capítulo anterior, entre los que se destaca la generalización del teorema de Farkas, que permite saber cuándo un sistema de desigualdades es consistente. Además se generaliza cuándo una desigualdad es consecuencia de un sistema. En la sección 3.2 se presentan los teoremas alternativos de Motzkin y el teorema de Gordan, que permite identificar cuándo un sistema homogéneo de desigualdades estrictas es consistente. Po último en la sección 3.3 se introduce el concepto de solución extendida.

En lo que sigue denotaremos el vector transpuesto de $\mathbf{x}$ como $\mathbf{x}'$. Además si $X \subset \mathbf{R}^n$, denotaremos por $int\ X$, $rint\ X$ y $cl\ X$ al interior, al interior relativo y a la causura de X respectivamente.

Un sistema lineal semi-infinito, es un sistema lineal de la forma

$$\sigma = \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\},$$

donde T es un conjunto arbitrario de índices (infinito), $\mathbf{a}_t = \mathbf{a}(t)$ con $\mathbf{a} : T \to \mathbf{R}^n$ y $b_t = b(t)$ con $b : T \to \mathbf{R}$.

Ejemplo 3.1. *Sea*

$$\sigma = \{\frac{1}{t}x_1 \geq 1,\ t \in \mathbf{N}\},$$

luego σ es un sistema lineal semi-infinito donde

$$T = \mathbf{N}, \qquad \mathbf{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \qquad b : \mathbf{N} \to \{1\},$$

$$\textit{con } \mathbf{a}(t) = \frac{1}{t} \qquad y \qquad b(t) = 1.$$

Denotaremos por F el conjunto de soluciones de σ y diremos que σ es consistente, si $F \neq \varnothing$. Cuando todos los coeficientes de una desigualdad lineal son cero se dice que esta desigualdad es trivial. Un sistema lineal semi-infinito es trivial cuando todas sus desigualdades son triviales.

Asociados al sistema σ se definen los llamados conos de primer y segundo momento

$$M := cone\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}, \qquad N := cone\ \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}_t \\ b_t\end{pmatrix},\ t \in T\right\},$$

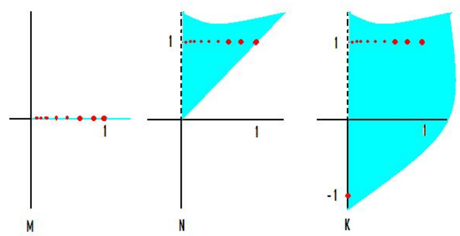
su cono característico

$$K := cone\ \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}_t \\ b_t\end{pmatrix},\ t \in T; \begin{pmatrix}\mathbf{0}_n \\ -1\end{pmatrix}\right\}.$$

y su correspondiente sistema homogéneo

$$\sigma_0 := \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq 0,\ t \in T\}.$$

Ejemplo 3.2. *En este ejemplo se ilustran los conjuntos M, N y K asociados al sistema de inecuaciones lineal semi-infinito presentado en el ejemplo (3.1)*



3.1. Teoremas alternativos de Farkas y Gale

Teorema 3.1. *(generalización del teorema de Farkas) El sistema*

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, \ t \in T \\ \mathbf{a}^{'}\mathbf{x} < b \end{Bmatrix}$$

es consistente si y sólo si

$$\binom{\mathbf{a}}{b} \notin cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, \ t \in T; \ \binom{\mathbf{0}_n}{-1} \right\}$$
$$y \ \binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, \ t \in T \right\}.$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Demostraremos que si σ es inconsistente, entonces

$$\binom{\mathbf{a}}{b} \in cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, \ t \in T, \binom{\mathbf{0}_n}{-1} \right\}$$
$$o \ \binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, \ t \in T \right\}.$$

Si σ es inconsistente, dos casos son posibles:

(i-a) La solución del sistema consistente $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, \ t \in T\}$ satisface la relación $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$.

(ii-a) El sistema $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, \ t \in T\}$ es inconsistente.

(i-a) Suponemos que $\binom{\mathbf{a}}{b} \notin cl\ K$. Entonces por [3, Th. A.6] existe un hiperplano en $\mathbf{R}^{n+1}$, $\overline{\mathbf{c}}'\binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}} = \gamma$, con $\overline{\mathbf{c}} = \binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, tal que

$$\overline{\mathbf{c}}'\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ b\end{pmatrix} = \gamma \qquad y \qquad \overline{\mathbf{c}}'\overline{\mathbf{v}} > \gamma, \text{ para todo } \overline{\mathbf{v}} \in cl\ K. \tag{3.1.1}$$

Como $\binom{\mathbf{0}_n}{0} \in K$ se tiene, $\overline{\mathbf{c}}'\binom{\mathbf{0}_n}{0} > \gamma$, entonces $0 > \gamma$.
Además $\overline{\mathbf{c}}'\overline{\mathbf{v}} \geq 0$ para todo $\overline{\mathbf{v}} \in K$, en particular, $\overline{\mathbf{c}}'\binom{\mathbf{0}_n}{-1} \geq 0$ de donde se deduce que $c_{n+1} \leq 0$.

Si $c_{n+1} = 0$, entonces

$\binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}}'\binom{\mathbf{a}}{b} = \mathbf{a}'\mathbf{c} = \gamma < 0$ y $\binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}}'\binom{\mathbf{a}_t}{b_t} = \mathbf{a}_t'\mathbf{c} \geq 0$, para todo $t \in T$.

Sea $\mathbf{x}^0$ solución del sistema $\{\mathbf{a}_t'\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ y definamos $\mathbf{z} = \mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}$, entonces $\mathbf{a}_t{}'\mathbf{z} = \mathbf{a}_t{}'\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}_t{}'\alpha\mathbf{c} \geq b_t + \mathbf{a}_t{}'\alpha\mathbf{c} \geq b_t$, es decir, $\mathbf{z}$ es solución de $\{\mathbf{a}_t'\mathbf{x} \geq b_t, t \in T\}$. Luego $\mathbf{a}'\mathbf{z} = \mathbf{a}'\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}'\alpha\mathbf{c} \geq b + \mathbf{a}'\alpha\mathbf{c}$, pero para α suficientemente grande $\mathbf{a}'\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}'\alpha\mathbf{c} < b$ lo cual contradice la hipótesis.

Si $c_{n+1} < 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix}\mathbf{c}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{a}_t\\ b_t\end{pmatrix} = \mathbf{a}_t'\mathbf{c} + b_t c_{n+1} \geq 0, \text{ para todo } t \in T,$$

es decir, $\mathbf{a}_t'\mathbf{c} \geq -b_t c_{n+1}$, luego $\frac{\mathbf{a}_t'\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} \geq -\frac{b_t c_{n+1}}{|c_{n+1}|}$, de donde, si definimos $\mathbf{x}^1 = |c_{n+1}|^{-1}\mathbf{c}$, se tiene $\mathbf{a}_t'\mathbf{x}^1 \geq b_t$, para todo $t \in T$. Además por (3.1.1),

$$\begin{pmatrix}\mathbf{c}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ b\end{pmatrix} = \mathbf{a}'\mathbf{c} + bc_{n+1} = \gamma < 0$$

de donde $\mathbf{a}'\mathbf{c} < -bc_{n+1}$. Dividiendo por $|c_{n+1}|$ ambos miembros de la inecuación anterior, se tiene $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} < -\frac{bc_{n+1}}{|c_{n+1}|}$, entonces $\mathbf{a}'\mathbf{x}^1 = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} < b$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por tanto $\binom{\mathbf{a}}{b} \in cl\ K$.

(ii-a) Consideremos el siguiente sistema en $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\sigma_1 = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} + b_t x_{n+1} \geq 0, \ t \in T \\ x_{n+1} < 0 \end{array} \right\},$$

nótese que σ_1 es inconsistente de no serlo, $-\frac{\mathbf{x}^{'}}{x_{n+1}}$ sería una solución para $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, \ t \in T\}$, lo cual contradiría nuestra hipótesis. Así cada solución $\binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}}$ del sistema consistente $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} + b_t x_{n+1} \geq 0, \ t \in T\}$ satisface $x_{n+1} \geq 0$. Entonces este sistema homogéneo está en el caso (i-a). Por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in cl \ cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl \ cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T \right\}.$$

($\Rightarrow$) Ahora probaremos que si

$$\begin{array}{c} \binom{\mathbf{a}}{b} \in cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, t \in T, \binom{\mathbf{0}_n}{-1} \right\} \\ o \ \binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl \ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, \ t \in T \right\}, \end{array}$$

entonces

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, \ t \in T \\ \mathbf{a}^{'}\mathbf{x} < b \end{array} \right\} \text{ es inconsistente.}$$

Se tienen dos casos:

(i-b) $\binom{\mathbf{a}}{b} \in cl \ K$. Entonces existe una sucesión $\{\binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k}\}$, tal que

$\lim_{k\to\infty} \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} = \binom{\mathbf{a}}{b}$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \lambda_0^k \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda^k \in \mathbf{R}_+^{(T)}, \ \lambda_0^k \geq 0, \ k = 1, 2, \dots \ ,$$

donde $\mathbf{R}_+^{(T)} = \{\lambda \mid T \to \mathbf{R}_+\}$ y $\lambda_t = \lambda(t)$. Entonces

$$\mathbf{d}^k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t \qquad y \qquad \delta_k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t - \lambda_0^k,\ k = 1, 2, \ldots \ .$$

Luego cada solución $\mathbf{x}$, del sistema $\{\mathbf{a}_t{}' \mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ satisface

$$\begin{array}{l} (\mathbf{d}^k)' \mathbf{x} = (\sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t)' \mathbf{x} \geq \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t \geq \\ \geq \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t - \lambda_0^k = \delta_k,\ k = 1, 2, \ldots .\ , \end{array} \tag{3.1.2}$$

tomando límites cuando $k \to \infty$ en (3.1.2) se tiene que $\mathbf{a}' \mathbf{x} \geq b$. Así

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_t' \mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T \\ \mathbf{a}' \mathbf{x} < b \end{array} \right\} \text{ es inconsistente.}$$

(ii-b) Si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t},\ t \in T \right\}$ razonando como en el caso anterior, existe una sucesión $\left\{ \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} \right\}$, tal que $\lim_{k\to\infty} \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} = \binom{\mathbf{0}_n}{1}$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ \lambda^k \in \mathbf{R}_+^{(T)},\ k = 1, 2, \ldots \ ,$$

donde $\mathbf{R}_+^{(T)} = \{\lambda \mid T \to \mathbf{R}_+\}$ y $\lambda_t = \lambda(t)$. Entonces

$$\mathbf{d}^k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t \qquad y \qquad \delta_k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t,\ k = 1, 2, \ldots \ .$$

Ahora supongamos que $\{\mathbf{a}_t' \mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ es consistente. Luego cada solución $\mathbf{x}$, del sistema $\{\mathbf{a}_t' \mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ satisface

$$(\mathbf{d}^k)' \mathbf{x} = (\sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t)' \mathbf{x} \geq \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t = \delta_k,\ k = 1, 2, \ldots .\ , \tag{3.1.3}$$

tomando límites cuando $k \to \infty$ en ambos miembros de (3.1.3) se tiene que $0 = \mathbf{0}_n \mathbf{x} \geq 1$ lo cual es una contradicción. Así

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_t' \mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T \\ \mathbf{a}' \mathbf{x} < b \end{array} \right\} \text{ es inconsistente.}$$

□

Corolario 3.1. *(generalización del teorema de Gale)*

$$\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\},$$

es consistente si y sólo si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin$ *cl cone* $\left\{\binom{\mathbf{a}_t}{b_t},\ t \in T\right\}$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Demostraremos que si $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ es inconsistente, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathit{cl\ cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

Si $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ es inconsistente. Consideremos el sistema inconsistente en $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} + b_t x_{n+1} \geq 0,\ t \in T \\ x_{n+1} < 0 \end{array} \right\},$$

cada solución $\binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}}$ del sistema consistente $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} + b_t x_{n+1} \geq 0,\ t \in T\}$ satisfece $x_{n+1} \geq 0$. Así este sistema homogéneo está en el caso (i-a) del teorema anterior. Por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathit{cl\ cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathit{cl\ cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ es consistente y que $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in \mathit{cl\ cone} \left\{\binom{\mathbf{a}_t}{b_t},\ t \in T\right\}$.

Si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in \mathit{cl\ cone} \left\{\binom{\mathbf{a}_t}{b_t},\ t \in T\right\}$, entonces existe una sucesión $\left\{\binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k}\right\}$, tal que $\lim_{k\to\infty} \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} = \binom{\mathbf{0}_n}{1}$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ \lambda^k \in \mathbf{R}_+^{(T)},\ k = 1, 2, \ldots\ ,$$

donde $\mathbf{R}_+^{(T)} = \{\lambda \mid T \to \mathbf{R}_+\}$ y $\lambda_t = \lambda(t)$. Entonces

$$\mathbf{d}^k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t \qquad y \qquad \delta_k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t,\ k = 1, 2, \dots \quad .$$

Luego cada solución $\mathbf{x}$, del sistema $\{\mathbf{a}_t x \geq b_t,\ t \in T\}$ satisface

$$(\mathbf{d}^k)^{'} \mathbf{x} = (\sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t)^{'} \mathbf{x} \geq \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t = \delta_k,\ k = 1, 2, \dots \quad , \tag{3.1.4}$$

tomando límites cuando $k \to \infty$ en ambos miembros de (3.1.4) se tiene que $0 = \mathbf{0}_n \mathbf{x} \geq 1$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin cl\ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t},\ t \in T \right\}$. $\square$

Ejemplo 3.3. *Considérese el sistema del ejemplo (3.1), luego el ejemplo (3.2) ilustra el resultado anterior, como* $\binom{0}{1} \in cl\ N$*,* σ *es inconsistente.*

Corolario 3.2. *(lema extendido de Farkas) La inecuación* $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$ *es una consecuencia del sistema* $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ *si y sólo si*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \in cl\ cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que la inecuación $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$ es una consecuencia del sistema $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ y que $\binom{\mathbf{a}}{b} \notin cl\ K$. Entonces existe un hiperplano en $\mathbf{R}^{n+1}$, $\overline{\mathbf{c}}^{'} \binom{\mathbf{x}}{x_{n+1}} = \gamma$, con $\overline{\mathbf{c}} = \binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, tal que

$$\overline{\mathbf{c}}^{'} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = \gamma \qquad y \qquad \overline{\mathbf{c}}^{'}\overline{\mathbf{v}} > \gamma,\ \text{para todo } \overline{\mathbf{v}} \in cl\ K. \tag{3.1.5}$$

Como $\binom{\mathbf{0}_n}{0} \in K$ se tiene, $\overline{\mathbf{c}}^{'} \binom{\mathbf{0}_n}{0} > \gamma$, entonces $0 > \gamma$.
Además $\overline{\mathbf{c}}^{'}\overline{\mathbf{v}} \geq 0$ para todo $\overline{\mathbf{v}} \in K$, en particular, $\overline{\mathbf{c}}^{'} \binom{0}{-1} \geq 0$ de donde se deduce que $c_{n+1} \leq 0$.

Si $c_{n+1} = 0$, entonces

$\binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}}^{'} \binom{\mathbf{a}}{b} = \mathbf{a}^{'}\mathbf{c} = \gamma < 0$ y $\binom{\mathbf{c}}{c_{n+1}}^{'} \binom{\mathbf{a}_t}{b_t} = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c} \geq 0$, para todo $t \in T$. Sea $\mathbf{x}^0$ solución del sistema $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ y definamos $\mathbf{z} = \mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}$, entonces $\mathbf{a}_t{}^{'}\mathbf{z} = \mathbf{a}_t{}^{'}\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}_t{}^{'}\alpha\mathbf{c} \geq b_t + \mathbf{a}_t{}^{'}\alpha\mathbf{c} \geq b_t$, esto es, $\mathbf{z}$ es solución de $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t, t \in T\}$. Luego $\mathbf{a}^{'}\mathbf{z} = \mathbf{a}^{'}\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}^{'}\alpha\mathbf{c} \geq b + \mathbf{a}^{'}\alpha\mathbf{c}$, pero para α suficientemente grande $\mathbf{a}^{'}\mathbf{z} = \mathbf{a}^{'}\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}^{'}\alpha\mathbf{c} < b$, lo cual contradice que $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$

es consecuencia del sistema $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$.

Si $c_{n+1} < 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}^{'} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c} + b_t c_{n+1} \geq 0,\ \text{para todo } t \in T,$$

es decir, $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c} \geq -b_t c_{n+1}$, luego $\frac{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} \geq -\frac{b_t c_{n+1}}{|c_{n+1}|}$, de donde, si definimos $\mathbf{x}^1 = |c_{n+1}|^{-1}\mathbf{c}$, se tiene $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^1 \geq b_t$, para todo $t \in T$. Además por (3.1.5),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}^{'} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{'}\mathbf{c} + b c_{n+1} = \gamma < 0,$$

es decir, $\mathbf{a}^{'}\mathbf{c} < -b c_{n+1}$. Dividiendo por $|c_{n+1}|$ ambos miembros de la inecuación anterior, se tiene $\frac{\mathbf{a}^{'}\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} < -\frac{b c_{n+1}}{|c_{n+1}|}$, entonces $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x}^1 = \frac{\mathbf{a}^{'}\mathbf{c}}{|c_{n+1}|} < b$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por tanto $\binom{\mathbf{a}}{b} \in cl\ K$.

($\Leftarrow$) Si $\binom{\mathbf{a}}{b} \in cl\ K$. Entonces existe una sucesión $\{\binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k}\}$, tal que

$\lim_{k\to\infty} \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} = \binom{\mathbf{a}}{b}$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \lambda_0^k \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda^k \in \mathbf{R}_+^{(T)}, \lambda_0^k \geq 0,\ k = 1, 2, \dots \quad ,$$

donde $\mathbf{R}_+^{(T)} = \{\lambda \mid T \to \mathbf{R}_+\}$ y $\lambda_t = \lambda(t)$. Entonces

$$\mathbf{d}^k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t \qquad y \qquad \delta_k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t - \lambda_0^k,\ k = 1, 2, \dots \quad .$$

Luego cada solución $\mathbf{x}$, del sistema $\{\mathbf{a}_t\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$ satisface

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}^k)^{'}\mathbf{x} = (\textstyle\sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t)^{'} x \geq \textstyle\sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t \geq \\ \geq \textstyle\sum_{t\in T} \lambda_t^k b_t - \lambda_0^k = \delta_k,\ k = 1, 2, \dots \quad , \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

tomando límites cuando $k \to \infty$ en ambos miembros de (3.1.6) se tiene que $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$, es decir $\mathbf{a}^{'}\mathbf{x} \geq b$ es consecuencia del sistema $\{\mathbf{a}_t\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$. $\square$

Corolario 3.3. *(lema de Farkas homogéneo extendido) La inecuación* $\mathbf{a}'\mathbf{x} \geq 0$ *es una consecuencia del sistema* $\{\mathbf{a}_t'\mathbf{x} \geq 0,\ t \in T\}$ *si y sólo si* $\mathbf{a} \in cl\ cone\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\mathbf{a}'\mathbf{x} \geq 0$ es una consecuencia de $\{\mathbf{a}_t'\mathbf{x} \geq 0,\ t \in T\}$ por el corolario anterior $\binom{\mathbf{a}}{0} \in cl\ cone \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{0},\ t \in T; \binom{\mathbf{0}_n}{-1} \right\}$, entonces existe una sucesión $\left\{\binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k}\right\}$, tal que $\lim_{k\to\infty} \binom{\mathbf{d}^k}{\delta_k} = \binom{\mathbf{a}}{0}$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0^k \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda^k \in \mathbf{R}_+^{(T)}, \lambda_0^k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots \quad ,$$

donde $\mathbf{R}_+^{(T)} = \{\lambda \mid T \to \mathbf{R}_+\}$ y $\lambda_t = \lambda(t)$. Entonces

$$\mathbf{d}^k = \sum_{t\in T} \lambda_t^k \mathbf{a}_t \qquad y \qquad \delta_k = \sum_{t\in T} \lambda_0^k (-1),\ k = 1, 2, \ldots \quad ,$$

luego $\mathbf{a} \in cl\ cone\ \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$.

($\Leftarrow$) Nótese que $0 \in cone\ \{-1\} = cl\ cone\ \{-1\}$.
Ahora sea $\mathbf{a} \in cl\ cone\ \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in cl\ cone\ \{\mathbf{a}_t, t \in T\}\ \times\ cl\ cone\ \{-1\}$$

pero

$$cl\ cone\ \{\mathbf{a}_t, t \in T\}\ \times\ cl\ cone\ \{-1\} = cl\ cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in cl\ cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

luego por el corolario anterior $\mathbf{a}'\mathbf{x} \geq 0$ es consecuencia del sistema $\{\mathbf{a}_t'\mathbf{x} \geq 0,\ t \in T\}$. $\square$

3.2. Otros teoremas alternativos

Los sistemas de inecuaciones que involucran inecuaciones estrictas son importantes en aplicaciones, por ejemplo en geometría computacional, análisis convexo y teoría de juegos.

Teorema 3.2. *(teorema de Gordan generalizado) El sistema*

$$\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} > 0,\ t \in T\}$$

es consistente si y sólo si $\mathbf{0}_n \notin conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$*. Bajo la suposición de que* $conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$ *o* $cone\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$ *sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathbf{a}_t \neq \mathbf{0}_n$ para todo $t \in T$. Pues en otro caso el resultado es trivial.
Asumimos que $M = cone\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$ es cerrado.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} > 0,\ t \in T\}$ es inconsistente.
Si $int\ M^0 \neq \varnothing$ (donde $int\ M^0$ denota el interior del cono polar de M), entonces existe $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ y $\epsilon > 0$, tal que $\mathbf{y} + \epsilon(cl\ B) \subset M^0$ ($B = B(\mathbf{0}_n, 1)$). Entonces, si $\mathbf{v} \in M, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_n$ se tiene

$$0 \leq \mathbf{y}^{'}\mathbf{v} < \mathbf{y}^{'}\mathbf{v} + (\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v})^{'}\mathbf{v} = (\mathbf{y} + (\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v}))^{'}\mathbf{v}.$$

Además $\mathbf{a}_t^{'}(\mathbf{y} + (\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v})) = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{y} + \mathbf{a}_t^{'}(\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v}) \geq 0 + \mathbf{a}_t^{'}(\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v}) > 0$, para todo $t \in T$. Así $(\mathbf{y} + (\epsilon||\mathbf{v}||^{-1}\mathbf{v}))$ es solución de $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} > 0,\ t \in T\}$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $int\ M^0 = \varnothing$, entonces $dim\ M^0 < n$ y $dim\ lin\ M = n - dim\ M^0 > 0$ [3, Th. A.2]. Tomamos $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}_n$, tal que $\pm\mathbf{z} \in M$. Como $\mathbf{0}_n = \mathbf{z} + (-\mathbf{z})$, luego

$$\mathbf{z} = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t, \qquad -\mathbf{z} = \sum_{t \in T} \gamma_t \mathbf{a}_t, \qquad \lambda \in \mathbf{R}_+^{(T)}, \qquad \gamma \in \mathbf{R}_+^{(T)}.$$

Entonces $\mathbf{0}_n = \sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t)\mathbf{a}_t$, con $\sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t) > 0$, de donde

$$\frac{\mathbf{0}_n}{\sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t)} = \frac{\sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t)\mathbf{a}_t}{\sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t)},$$

así

$$\mathbf{0}_n = \sum_{t \in T} \frac{(\lambda_t + \gamma_t)}{\sum_{t \in T}(\lambda_t + \gamma_t)}\mathbf{a}_t,$$

nótese que

$$\sum_{t\in T}\frac{(\lambda_t+\gamma_t)}{\sum_{t\in T}(\lambda_t+\gamma_t)}=\frac{\sum_{t\in T}(\lambda_t+\gamma_t)}{\sum_{t\in T}(\lambda_t+\gamma_t)}=1.$$

por lo tanto $\mathbf{0}_n \in conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t\in T\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}>0,\ t\in T\}$ es consistente y que $\mathbf{0}_n \in conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t\in T\}$, entonces

$$\mathbf{0}_n=\sum_{t\in T}\lambda_t\mathbf{a}_t, \qquad \lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)}, \qquad \sum_{t\in T}\lambda_t=1.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_s\neq 0$. Entonces

$$\mathbf{z}=-\lambda_s\mathbf{a}_s=\sum_{\substack{t\in T\\ t\neq s}}\lambda_t\mathbf{a}_t,$$

así, para cada solución $\mathbf{x}$ del sistema $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}>0,\ t\in T\}$, se tiene que $\mathbf{z}^{'}\mathbf{x}=-\lambda_s\mathbf{a}_s^{'}\mathbf{x}<0$. Por otra parte

$$\mathbf{z}^{'}\mathbf{x}=\sum_{\substack{t\in T\\ t\neq s}}\lambda_t\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}>0,$$

lo cual es una contradicción.

Omitimos la prueba de la afirmación cuando $conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t\in T\}$ es cerrado, ya que, es un caso particular de la generalización del teorema de Motzkin, tomando $S=P=\varnothing$. □

Teorema 3.3. *(generalización del teorema de Motzkin) El sistema*

$$\sigma_2=\left\{\begin{array}{c}\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}>0,\ t\in T,\ T\neq\varnothing\\ \\ \mathbf{a}_s^{'}\mathbf{x}\geq 0,\ s\in S\\ \\ \mathbf{a}_p^{'}\mathbf{x}=0,\ p\in P\end{array}\right\}$$

es consistente si y sólo si

$$\mathbf{0}_n\notin conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t\in T\}+cone\ \{\mathbf{a}_s,\ s\in S\}+span\ \{\mathbf{a}_p,\ p\in P\}.$$

Bajo la suposición de que
$conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t\in T\}+cone\ \{\mathbf{a}_s,\ s\in S\}+span\ \{\mathbf{a}_p,\ p\in P\}$ sea cerrado.

Demostración. Primero, asumamos que $S \neq \varnothing \neq P$.

($\Rightarrow$) Supongamos que σ_2 es consistente y que

$$\mathbf{0}_n \in conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\} + cone\ \{\mathbf{a}_s,\ s \in S\} + span\ \{\mathbf{a}_p,\ p \in P\}.$$

Sea $\mathbf{x}^0$ una solución de σ_2. Por hipótesis,

$$\mathbf{0}_n = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t + \sum_{s \in S} \mu_s \mathbf{a}_s + \sum_{p \in P} \rho_p \mathbf{a}_p,$$

con $\lambda \in \mathbf{R}_+^{(T)}$, $\mu \in \mathbf{R}_+^{(S)}$, $\rho \in \mathbf{R}^{(P)}$ y $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$.
Entonces

$$0 = \mathbf{0}_n^{'} \mathbf{x}^0 = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t^{'} \mathbf{x}^0 + \sum_{s \in S} \mu_s \mathbf{a}_s^{'} \mathbf{x}^0 + \sum_{p \in P} \rho_p \mathbf{a}_p^{'} \mathbf{x}^0 > 0$$

lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Asumamos que

$$A := conv\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\} + cone\ \{\mathbf{a}_s,\ s \in S\} + span\ \{\mathbf{a}_p,\ p \in P\}$$

es cerrado.
Si $\mathbf{0}_n \notin A$, entonces existe un vector $\mathbf{c}$ tal que, $\mathbf{c}^{'}\mathbf{a} > 0$ para todo $\mathbf{a} \in A$. Como $\mathbf{a}_t \in A$ para todo $t \in T$, $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c} > 0$. Nótese que $\mathbf{a}_t + \mu\mathbf{a}_s$, pertenece a A para todo $t \in T$, $\mathbf{s} \in S$ y $\mu > 0$, entonces $(\mathbf{a}_t + \mu\mathbf{a}_s)^{'}\mathbf{c} > 0$, o eqivalentemente, $\mathbf{a}_s^{'}\mathbf{c} > -\frac{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c}}{\mu}$. Entonces $\mathbf{a}_s^{'}\mathbf{c} \geq 0$ para todo $\mathbf{s} \in S$. Nótese también que $\mathbf{a}_t + \rho\mathbf{a}_p$ pertenecen a A para todo $t \in T$, $\mathbf{p} \in P$, $\rho > 0$ y $\rho < 0$, entonces $(\mathbf{a}_t + \rho\mathbf{a}_p)^{'} c > 0$, luego $\mathbf{a}_p^{'}\mathbf{c} > -\frac{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c}}{\rho}$ para $\rho > 0$ y $\mathbf{a}_p^{'}\mathbf{c} < -\frac{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{c}}{\rho}$ para $\rho < 0$ y esto para todo $\mathbf{p} \in P$, de donde se deduce que $\mathbf{a}_p^{'}\mathbf{c} = 0$ para todo $\mathbf{p} \in P$. Por lo tanto $\mathbf{c}$ es solución de σ_1. Así σ_1 es consistente.

Una demostración similar puede darse cuando alguno de los dos conjuntos S y P es vacío. □

En el siguiente ejemplo se muestra que la hipótesis de cerradura de los conjuntos en el teorema de Gordan generalizado no son superfluas.

Ejemplo 3.4. *Considérese*

$$\sigma = \{tx_1 + x_2 > -t,\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\};\ -x_2 > 0\ (t = 0)\}.$$

Supongamos que $\boldsymbol{x}^1 = (x_1, x_2)$ *satisface* $tx_1 + x_2 > -t$ *para todo* $t > 0$, *tomando límites en ambos miembros de la inecuación cuando* $t \to 0$, *se tiene que* $x_2 \geq 0$, *entonces* σ *es inconsistente.*

Nótese que $\binom{0}{0}$ *no está en conv* $\left\{\binom{t}{1},\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\}; \binom{0}{-1}\right\}$ *pues si lo estuviera, entonces*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ T = \mathbf{R}_+ - \{0\}, \lambda \in \mathbf{R}_+^{(\mathbf{R}_+)}, \sum_{t \in \mathbf{R}_+} \lambda_t = 1,$$

entonces

$$0 = \sum_{t \in T} \lambda_t t \qquad y \qquad 0 = \sum_{t \in T} \lambda_t - \lambda_0,$$

de donde $\lambda_t = 0$, *para todo* $t > 0$, *luego* $\lambda_0 = 0$, *así* $\sum_{t \in \mathbf{R}_+} \lambda_t = 0$, *lo cual es una contradicción.*

Nótese además que

$$\text{conv } \{\boldsymbol{a}_t,\ t \in T\} = \text{conv } \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

y

$$\text{cone } \{\boldsymbol{a}_t,\ t \in T\} = \text{cone } \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

no son cerrados, pues

$$\lim_{t \to 0} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pero

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{conv } \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cone } \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}_+ - \{0\}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3.3. Soluciones extendidas

Muchas veces es difícil encontrar una solución particular para un sistema lineal semi-infinito $\sigma = \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$, en estos casos nos gustaría tener una solución oproximada. En esta sección se consideran 2 definiciones alternativas que permiten tener una solución aproximada.

Definición 3.1. *Una sucesión $\{\mathbf{x}^r\}$ en $\mathbf{R}^n$ es una **solución asintótica** del sistema σ si y sólo si para todo $t \in T$,*

$$\lim_r inf\ \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^r \geq b_t,$$

donde $+\infty$ es permitido como límite.

Lema 3.1. *Sea $\sigma = \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$, si $\mathbf{x}$ es el punto límite de una solución asintótica de σ, entonces $\mathbf{x}$ es una solución ordinaria de σ.*

Demostración. Si $\mathbf{x}$ es el punto límite de una solución asintótica, entonces, para cada $t \in T$, tenemos que

$$b_t \geq \lim_r inf\ \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^r = \lim_r \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^r = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x},$$

por lo tanto, $\mathbf{x}$ es solución ordinaria de σ. □

Lema 3.2. *$\sigma = \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T\}$, es consistente si y sólo si tiene una solución asintótica acotada.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $\{\mathbf{x}^r\}$ es solución asintótica acotada para σ, entonces $cl\ \{\mathbf{x}^r, r = 1, 2, \ldots\}$ es compacto, luego existe una sucesión convergente cuyo punto límite es solución deσ.

($\Rightarrow$) Si $\mathbf{x}$ es solución ordinaria de σ, entonces la sucesión constante $\{\mathbf{x}^r = \mathbf{x},\ r = 1, 2, \ldots\}$ es una solución asintótica de σ. □

Consideremos el anillo de los polinomios $\mathbf{R}[y]$, con el orden lexicográfico. Donde un polinomio es considerado positivo, cuando el coeficiente de la potencia más grande de la variable y es positivo.

Definición 3.2.

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^{'} \in (\mathbf{R})^n$$

*es una **solución polinomial** de σ, si $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p} := \sum_{i=1}^{n} a_i(t)p_i \geq b_t$ para todo $t \in T$ (de acuerdo al orden lexicográfico).*

Lema 3.3. *Se cumplen las siguientes relaciones entre N, K y sus clausuras*

(i) $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in N$ *si y sólo si* $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in K$.
(ii) $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ N$ *si y sólo si* $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ K$.

Demostración. (i) Nótese que $N \subset K$, así es suficiente probar que si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in K$, entonces $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in N$. En efecto, si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in K$, entonces existe $\lambda \in \mathbf{R}_+^{(T)}$ y $\gamma \in \mathbf{R}_+^{(T)}$, tales que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathbf{0}_n = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t \qquad \text{y} \qquad 1 = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t - \gamma,$$

de la segunda igualdad se tiene que

$$0 < 1 + \gamma = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t,$$

entonces

$$\frac{\mathbf{0}_n}{1+\gamma} = \frac{\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t}{1+\gamma} \qquad \text{y} \qquad \frac{1+\gamma}{1+\gamma} = \frac{\sum_{t \in T} \lambda_t b_t}{1+\gamma},$$

luego

$$\mathbf{0}_n = \frac{\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t}{1+\gamma} \qquad \text{y} \qquad 1 = \frac{\sum_{t \in T} \lambda_t b_t}{1+\gamma},$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} (1+\gamma)^{-1} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} \in N.$$

(ii) Lo que tenemos que probar nuevamente es que si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ K$, entonces $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ N$. Si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ K$ y U es una bola con centro en $\mathbf{0}_{n+1}$, entonces $[\binom{\mathbf{0}_n}{1} + U] \cap K \neq \varnothing$. Entonces existen escalares $\lambda \in [0,1]$ y $\gamma \geq 0$ tales que

$$\sum_{t\in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} + U.$$

luego

$$\sum_{t\in T} (1+\gamma)^{-1} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} + (1+\gamma)^{-1} U \subset \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} + U,$$

por lo tanto $N \cap [\binom{\mathbf{0}_n}{1} + U] \neq \varnothing$. Es decir, $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in cl\ N$. □

Lema 3.4. *Si σ es un sistema inconsistente tal que cada subsistema finito es consistente, entonces su sistema homogéneo correspondiente σ_0, tiene una solución distinta de $\mathbf{0}_n$ en el span $\{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$.*

Demostración. Por el teorema alternativo de Gale,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\ K \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin K.$$

Pues si $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \in K$ por el lema (3.3)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N = cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\},$$

pero por hipótesis se tiene que si $S \subset T$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cone \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in S \right\}.$$

Así $\binom{\mathbf{0}_n}{1} \notin rint\ cl\ K = rint\ K \subset K$.
Entonces por [3. Th. A.6], existe un hiperplano de soporte no trivial de la $cl\ K$ que contiene a $\binom{\mathbf{0}_n}{1}$. Más aún, este hiperplano H también contiene al origen, porque $cl\ K$ es un cono, y su vector de dirección puede ser remplazado por su proyección ortogonal sobre el $span\ cl\ K = span\ K$. Entonces existe un vector diferente de cero $\binom{\mathbf{v}}{\alpha} \in span\ K$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, tal que $\binom{\mathbf{v}}{\alpha}' \mathbf{z} \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in cl\ K$ y $\alpha = \binom{\mathbf{v}}{\alpha}' \binom{\mathbf{0}_n}{1} = 0$. Entonces $\mathbf{a}_t' \mathbf{v} \geq 0$ para todo $t \in T$, es decir, $\mathbf{v}$ es una solución para σ_0.
Finalmente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{t\in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

para algún $\lambda \in \mathbf{R}^{(T)}$ y $\beta \in \mathbf{R}$. por lo tanto $\mathbf{v} \in span\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}$. □

Teorema 3.4. *Dado un sistema σ, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) σ tiene una solución asintótica;

(ii) Todo subsistema finito de σ es consistente;

(iii) σ tiene una solución polinomial.

Demostración. (i) ($\Rightarrow$) (ii) La afirmación es trivial si σ es consistente. Asumamos que σ es inconsistente y al mismo tiempo que σ contiene un subsistema finito inconsistente $\{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in 1, \ldots, m\}$. Entonces por el corolario (3.1), existen escalares positivos $\lambda_i = 1, \ldots, m$, tales que $\binom{\mathbf{0}_n}{1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \binom{\mathbf{a}_{t_i}}{b_{t_i}}$, pues un cono convexo finitamente generado es cerrado. Ahora sea $\{\mathbf{x}^r\}$ una solución asintótica, se tiene que

$$-1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^r \\ -1 \end{pmatrix}^{'} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^r \\ -1 \end{pmatrix}^{'} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i} \\ b_{t_i} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\mathbf{a}_{t_i}^{'}\mathbf{x}^r - b_{t_i} \right),$$

para $\binom{\mathbf{x}^r}{-1} \in \mathbf{R}^{n+1}$ y $r = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$-1 = lim_r\ inf\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\mathbf{a}_{t_i}^{'}\mathbf{x}^r - b_{t_i} \right) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[lim_r\ inf\ \left(\mathbf{a}_{t_i}^{'}\mathbf{x}^r - b_{t_i} \right) \right].$$

Luego $\lim_r\ inf\ \left(\mathbf{a}_{t_i}^{'}\mathbf{x}^r - b_{t_i} \right) < 0$, para algún i, $1 \leq i \leq m$ en contradicción con que $\{\mathbf{x}^r\}$ es una solución asintótica.

(ii) ($\Rightarrow$) (iii) Probaremos por inducción sobre

$$d = dim\ span\{\mathbf{a}_t,\ t \in T\},$$

la existencia de una solución polinomial de σ, $\mathbf{p}$, tal que las componentes de $\mathbf{p}$ son polinomios de grado menor o igual que d, es decir $grad\ (p_i) \leq d$, $i = 1, \ldots, n$.

Si $d = 0$, entonces $\mathbf{a}_t = \mathbf{0}_n$. En tal caso trivial, cada $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es solución ordinaria para σ, así definiendo las componentes de $\mathbf{x}$ con los correspondientes polinomios constantes, la afirmación se cumple.

Ahora, asumamos que la afirmación es válida para esos sistemas que contienen subsistemas finitos consistentes y tal que la dimensión del subespacio lineal generado por los vectores coeficientes del lado izquierdo es menor que d. Asumamos que σ es inconsistente sin perder generalidad. Entonces de acuerdo al lema (3.4), existe un vector

$$\mathbf{u} \in span\ \{\mathbf{a}_t,\ t \in T\}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}_n,$$

tal que $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{u} \geq 0$ para todo $t \in T$. Este vector $\mathbf{u}$ induce la siguiente partición de T:

$$T_1 = \{t \in T \mid \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{u} = 0\} \text{ y } T_2 = \{t \in T \mid \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{u} > 0\}.$$

La elección de $\mathbf{u}$ garantiza que *dim span* $\{\mathbf{a}_t,\ t \in t_1\} \leq d-1$. Además, por hipótesis cada subsistema finito de $\sigma_1 := \{\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x} \geq b_t,\ t \in T_1\}$ es consistente. Por consiguiente, si σ_1, es inconsistente y por inducción, existe una solución polinomial para σ_1, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)^{'} \in (\mathbf{R}[y])^n$, tal que

$$grad(q_i) \leq d-1,\ i = 1, \ldots, n.$$

Demostraremos que $\mathbf{p} := \mathbf{u}\mathbf{y}^d + \mathbf{q}$ es una solución polinomial para σ.
Dos casos pueden ocurrir:
(a) si $t \in T_1$, entonces $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p} = (\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{u})\mathbf{y}^d + \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{q} = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{q} \geq b_t$;
(b) si $t \in T_2$, entonces $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p} = (\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{u})\mathbf{y}^d + \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{q} > b_t$ porque el coeficiente del término de grado más grande es positivo.

Finalmente, si σ_1 es consistente, podemos reemplazar $\mathbf{q}$ con cualquier solución ordinaria de σ_1 en el argumento anterior.

(iii) ($\Rightarrow$) (i) Sea $\mathbf{p} \in (\mathbf{R}[y])^n$ una solución polinomial para σ, y consideremos la sucesión, en $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}^r = (p_1(r), \ldots, p_n(r))^{'}$, $r = 1, 2, \ldots$.
Discutiremos dos casos para $t \in T$:
(a) si $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p}$ no depende de y (es decir, es un escalar) entonces $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^r = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p} \geq b_t$;
(b) si *grad* $(\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p}) \geq 1$, entonces $lim_{y\to\infty}\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p}(y) = +\infty$, así $\mathbf{a}_t^{'}\mathbf{x}^r = \mathbf{a}_t^{'}\mathbf{p}(r) > b_t$, para valores suficientemente grandes de $r \in \mathbf{N}$.

Por lo tanto la sucesión $\{\mathbf{x}^r\}$ es una solución asontótica para σ. Esto completa la prueba. $\square$

Conclusiones

En este trabajo se proporcionó la teoría básica para adentrarnos en el campo de la programación lineal semi-infinita. Se presentaron algunos resultados, los cuales nos proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la consistencia de los sistemas de desigualdades lineales semi-infinitos, esto es importante porque, para resolver el problema de optimización, es necesario primero encontrar un punto que satisfaga el sistema de restricciones. Se pudo observar que mucha de la teoría para la consistencia de los sistemas de desigualdades lineales ordinarios puede extenderse para la consistencia de los sistemas de desigualdades lineales semi-infinitos. Uno de los resultados más importantes que se extendieron fue el de Farkas.

Bibliografía

[1] Bazaraa M. (2005). *Programación Lineal y Flujo en Redes*. Limusa, México.

[2] Goberna M.A., Jornet V. y Puente R., (2004).*Optimización Lineal. Teoría, Métodos y Modelos*. Mc Graw Hill, España.

[3] Goberna M.A. y López M. (1998), *Linear Semi-infinite Optimization*. John Wiley and Sons. England.

[4] E.J. Anderson y A.S. Lewis.*An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming, Math.* Programming 44, 247-269, 1989.

[5] Ezio Marchi, Rubén Puente y Virginia N. Vera de Serio. *Quasipolyhedral Sets in Linear Semiinfinite inequality Systems. Linear Algebra and its applications, Elsevier Science Inc.* No. 255, pp.157-169, 1997.

[6] Hillier F. S., Lieberman G. J., (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Novena edición. Ma Graw Hill, México.

[7] Rockafellar R. T. (1970).*Convex Analysis*. Princenton Landmark in Mathematics. USA.