BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

COLEGIO DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS DEL MODELO CLÁSICO DE RIESGO DE LUNDBERG CON IMPUESTOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

YESENIA ELIZABETH ORTIZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. FRANCISCO S. TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUEBLA JULIO 2013

Dedicado a

mi mami, porque sin ti no hubiera llegado tan lejos y porque el orgullo que sientes por mí me impulsó a continuar hasta el final;

Agradecimientos

Doy gracias a Dios, por haberme rodeado de personas maravillosas, por darme la fortaleza y los ánimos para alcanzar mis metas y permitirme llegar a este día.

A ti mami, te doy las gracias por haberme dado la vida, por tu dedicación para sacarme adelante, por tu entrega, por tu comprensión, por creer en mí y brindarme tu apoyo durante todo este trayecto. Gracias por impulsar mi carrera y ser un ejemplo de fortaleza y superación para mí.

A mis tíos: Osvaldo y Félix, gracias, porque en los momentos más difíciles ustedes me apoyaron para poder continuar con este sueño.

Jesús, gracias por acompañarme en este sueño que por fin he vuelto realidad, tú sabes lo que lograr este objetivo significa para mí. Te doy las gracias por tu apoyo incondicional, porque no recuerdo un sólo día en el que no me hayas alentado para continuar, gracias por creer en mí.

A mi asesor de tesis le doy las gracias por su apoyo, por cada clase, por cada uno de los consejos que me ha dado desde que nos conocimos; gracias por impulsarme a continuar con este viaje.

A mis profesores, gracias, de cada uno de ustedes aprendí una lección muy valiosa.

Índice general

Introducción

El riesgo puede entenderse como el sistema de transferencia que contribuye a reducir los costos económicos adversos de los siniestros en la sociedad, pues dispersa el costo de pérdidas predecibles. Los aportes de muchos cubren las pérdidas de pocos.

La noción de riesgo es un concepto importante en la economía, debido a que es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo del capital de las compañías aseguradoras, bancos y otras instituciones públicas y privadas.

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar el proceso de riesgo con impuestos; se trata de un análisis de riesgo enfocado a las compañías aseguradoras (como agentes especializados en combatir profesionalmente con los riesgos), pues éstas forman parte de la actividad económica de un país y la incertidumbre a la que se enfrentan es de gran interés dentro del área de probabilidad.

El seguro hace que exista una garantía fundamental para el desarrollo económico-social de un país. La seguridad de cobertura económica en caso de siniestro, es necesaria para el desarrollo de cualquier actividad económica y, en consecuencia, el seguro facilita el avance y el progreso de cualquier economía. De hecho, uno de los factores para medir el bienestar de una sociedad, es el nivel de aseguramiento de la misma. A mayor seguridad, mayor desarrollo de la economía, y a mayor desarrollo económico, mayor necesidad de seguridad.

De esta manera, el seguro está relacionado estrechamente con el riesgo, por lo que el servicio de una compañía aseguradora corresponde a la necesidad de protección frente al riesgo, ya que la probabilidad de ocurrencia de un siniestro motiva a los individuos, y en general a la sociedad, a contratar un seguro para disminuir o reparar posibles efectos perjudiciales.

El origen sobre los modelos de seguros y riesgos es bastante antiguo, se ve representado por un trabajo equivalente a los trabajos de Bachelier sobre el movimiento browniano para la teoría financiera, tal trabajo fue publicado por Filip Lundberg, quien en su famosa tesis doctoral en la Universidad de Uppsala en 1903, inspiró la teoría del riesgo. En su trabajo, Lundberg se percató que un proceso Poisson está vinculado con el núcleo de los modelos de seguros de no-vida (daños a propiedad), a través de una transformación (conocida como tiempo operacional); fue capaz de acotar el análisis a un proceso Poisson homogéneo.

La investigación de Filip Lundberg ha sido fundamental para comprender el comportamiento del portafolio de activos que amparan las pólizas de las aseguradoras y consecuentemente el cómo las aseguradoras manejan los riesgos en sus portafolios.

Por otro lado, entre los aspectos que afectan la estabilidad de cualquier asegurador, se encuentran: la propia incertidumbre de un proceso aleatorio, la heterogeneidad en la composición de la cartera, la inflación, las situaciones extremas, anómalas o catástrofes y los gastos en los que incurre el asegurador; siendo este último aspecto del que este trabajo de tesis se ocupa.

A partir de la consideración de una compañía aseguradora con riesgo de seguro modelado por el proceso clásico de Lundberg se investiga cómo los impuestos influyen en el comportamiento cuantitativo y cualitativo de la probabilidad de ruina, lo que deriva en un análisis del comportamiento del valor esperado de los impuestos descontados.

El objetivo principal de esta tesis es extender el modelo clásico de riesgo de Cramér-Lundberg al incluir el pago de impuestos. La regla fiscal que se considera es: pagar una cierta proporción de los ingresos por las primas, siempre que la compañía aseguradora se encuentre en una situación rentable. Para mantener el modelo simple y manejable se ha optado por no incluir las reservas de siniestros, rendimientos de las inversiones, etc.

Se muestra que la probabilidad de supervivencia resultante es una potencia de la probabilidad de supervivencia sin impuestos. Por otra parte, se deriva, de la regla fiscal mencionada y del nivel de partida óptimo (que también es determinado), una expresión para el valor esperado de la suma total de impuestos descontados.

Para llevar esto a cabo, fue necesario consultar literatura de otras áreas de la matemática, además de la teoría de riesgo, como son: las ecuaciones diferenciales ordinarias, procesos estocásticos y funciones especiales, en particular, el estudio de la serie hipergeométrica de Gauss, el cual es un material que no está establecido en ninguno de los cursos de licenciatura.

La estructura del trabajo de tesis es la siguiente:

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de la teoría de riesgo, haciendo énfasis en el modelo colectivo de riesgo. Se presentan los modelos más utilizados en dicha teoría, como son: binomial compuesto y Poisson compuesto; también se presentan algunas de sus propiedades.

En el capítulo 2 se analiza y desarrolla el modelo Clásico de Riesgo de Lundberg con impuesto. Se presenta una fórmula explícita para el valor esperado de impuestos descontado $v(s)$ y se discute cómo el nivel de excedente óptimo puede determinarse a partir de que la autoridad fiscal debe recaudar los impuestos con el fin de maximizar a $v(s)$.

En el capítulo 3 se proporciona un ejemplo numérico de los resultados y en el cual la distribución de las reclamaciones es exponencial.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo de este trabajo.

Capítulo 1

Fundamentos Básicos de Riesgo

En este capítulo se presenta el material elemental de la teoría de riesgo, así como una breve descripción de otros temas que son esenciales para el desarrollo del tema de interés en este trabajo de tesis. Se comienza desde sumas de variables aleatorias que, posteriormente, sirven para definir las propiedades en los modelos de riesgo, siendo éstos analizados desde lo más elemental, empezando por la descripción del modelo individual y el colectivo, pasando por un estudio de los procesos de riesgo y sus propiedades básicas, entre ellas el problema clásico de la probabilidad de ruina, hasta puntualizar en la ecuación íntegro-diferencial de la estrategia de barrera en el caso continuo.

1.1. Sumas Aleatorias

La importancia de tratar primero el tema de sumas aleatorias, es para facilitar la comprensión de la teoría de riesgo descrita posteriormente, además de que podrá observarse que algunas propiedades dadas en dicha teoría son válidas para estas sumas.

1.1.1. Sumas de Variables Aleatorias

Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes. La distribución de la suma $S = X + Y$ está denotada por

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s),$$

y es llamada la **convolución** de F_X y F_Y. La función de distribución de S es evaluada como

$$
\begin{aligned}
F_S(s) &= P\{S \leq s\} \\
&= \int P\{S \leq s|Y = y\}dF_Y(y) \\
&= \int P\{X \leq s - y|Y = y\}dF_Y(y) \\
&= \int F_{X|Y}(s - y|y)dF_Y(y) \\
&= \int F_X(s - y)dF_Y(y).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función de distribución de la suma de dos variables aleatorias es evaluada como

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int F_X(s - y)dF_Y(y). \tag{1.1}$$

La correspondiente función de densidad de probabilidad o función de probabilidad de S se denota de manera similar como

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int f_X(s - y)dF_Y(y). \tag{1.2}$$

Si X y Y son ambas variables aleatorias continuas, la función de densidad de probabilidad de S es:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int f_X(s - y)f_Y(y)dy. \tag{1.3}$$

(Ver capítulo 2 de la referencia [2]).

Si X y Y son ambas variables aleatorias discretas, la función probabilidad de S es igualmente

$$f_S(s) = f_X * f_Y(y) = \sum f_X(s - y)f_Y(y). \tag{1.4}$$

Las ecuaciones (1.1) a (1.4) muestran cómo la **convolución** de dos funciones de distribución o funciones de distribución de probabilidad pueden ser evaluadas.

1.1.2. Distribución de Sumas Aleatorias

Suponga que X_1, X_2, X_3,... es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con función de distribución común $F_X(x)$, función característica $\Phi_X(z)$, media μ_X y varianza σ_X^2. Entonces la suma $X_1 + X_2 + ... + X_n$ tiene función de distribución $F_X^{*n}(x)$, función característica $\{\Phi_X(z)\}^n$, media $n\mu_X$ y varianza $n\sigma_X^2$ para $n = 1, 2, ...$.

Ahora considere la suma aleatoria

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N, \tag{1.5}$$

donde N tiene una distribución contadora y $S = 0$ cuando $N = 0$. Entonces, la función de distribución de X puede ser obtenida como

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P\{S \leq x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} P\{S \leq x | N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} F_X^{*n}(x), \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta distribución de la suma aleatoria (1.5) es llamada una **distribución compuesta** y su función característica está dada por:

$$\Phi_S(z) = E[exp\{izS\}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[exp\{iz(X_1 + X_2 + ... + X_n)\}|N = n] P\{N = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} [\Phi_X(z)]^n. \tag{1.7}$$

Esto puede ser reescrito, usando la notación de [7], como

$$\Phi_S(z) = P_N(\Phi_X(z)). \tag{1.8}$$

Para las otras transformadas, las ecuaciones (1.7) y (1.8) se mantienen reemplazando Φ por el símbolo correspondiente. Por lo tanto, para la distribución compuesta, las funciones generadora de momentos y generadora de probabilidad son, respectivamente,

$$M_S(z) = P_N(M_X(z)) \tag{1.9}$$

y

$$P_S(z) = P_N(P_X(z)). \tag{1.10}$$

1.1.3. Momentos de Sumas Aleatorias

Los momentos de sumas aleatorias pueden ser evaluadas diferenciando la ecuación (1.9) y evaluándola en $z = 0$, o directamente a través de argumentos de probabilidad condicional. Diferenciando la ecuación (1.9) se obtiene

$$M_S'(z) = P_N'(M_X(z))M_X'(z). \tag{1.11}$$

Observe que para las funciones generadoras de momentos y de probabilidades se cumple que

$$M_X^k(0) = \frac{d^k}{dz^k} M_X(z)|_{z=0}, \tag{1.12}$$

para $k = 1, 2, 3....$ Y

$$P_X^k(1) = \frac{d^k}{dz^k} P_X(z)|_{z=1}. \tag{1.13}$$

Tomando $z = 0$ y usando las ecuaciones (1.12) y (1.13) se tiene que

$$M_S'(0) = P_N'(1)M_X'(0),$$

y entonces

$$E[S] = E[N]E[X]. \tag{1.14}$$

Diferenciando nuevamente la ecuación (1.11) se sigue que

$$M_S''(z) = P_N''\big(M_X(z)\big)\left[M_X'(z)\right]^2 + P_N'\big(M_X(z)\big)M_X''(z). \tag{1.15}$$

Evaluando la función anterior en $z = 0$, es claro que

$$M_S''(0) = P_N''(1)\left[M_X'(0)\right]^2 + P_N'(1)M_X''(0), \tag{1.16}$$

de donde entonces,

$$E\left[S^2\right] = E[N(N-1)]\big[E[X]\big]^2 + E[N]E[X^2]. \tag{1.17}$$

Restando el cuadrado de la ecuación (1.14) y reordenando, se obtiene la varianza de S,

$$Var[S] = Var[N]\big[E[X]\big]^2 + E[N]Var[X]. \tag{1.18}$$

Luego, diferenciando (1.15) y evaluando en $z = 0$ se obtiene el tercer momento,

$$E\left[S^3\right] = E[N(N-1)(N-2)]\big[E[X]\big]^3 + 3E[N(N-1)]E[X]E\big[X^2\big] + E[N]E\big[X^3\big]. \tag{1.19}$$

Este procedimiento general, que consiste en derivar tantas veces como sea necesario la función generadora de momentos y evaluarla en $z = 0$ (ver capítulo 1 de [7]), puede ser usado para obtener momentos superiores de S en términos de los momentos de N y X.

1.2. Modelos de Riesgo

En esta sección se presenta el concepto general de riesgo, asimismo, se muestran también, las perspectivas individual y colectiva para modelar el riesgo correspondiente al conjunto de reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. También se estudian algunas propiedades de estos modelos.

1.2.1. Modelo Individual

Suponga que se tiene un portafolio de n pólizas individuales de seguros válidas por un año. Sea p_j la probabilidad de que el j-ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación durante el tiempo de vigencia del seguro, y sea q_j la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación.

Suponga que la igualdad $p_j + q_j = 1$ se cumple, ello significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado. Tal situación corresponde, por ejemplo, a los seguros de vida.

Defina la variable aleatoria

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ 0, & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases}$$

Note que D_j tiene distribución Bernoulli con parámetro q_j.

Observe que el número total de reclamaciones está dado por la variable aleatoria $N = D_1 + D_2 + ... + D_n$. Ahora suponga artificialmente que cada póliza efectúa una reclamación, y sea la variable aleatoria $C_j > 0$ el monto de la reclamación efectuada por la póliza j. Debido a que los siniestros pueden presentarse con características distintas y ello puede derivar en distintos montos de reclamación, se considerará de manera general a C_j no como una constante sino como una variable aleatoria.

La verdadera reclamación de la póliza j está dada por el producto

$$D_j C_j = \begin{cases} C_j, & \text{si } D_j = 1, \\ 0, & \text{si } D_j = 0. \end{cases}$$

De esta forma se considera como datos en este modelo la colección de vectores aleatorios (D_1, C_1), (D_2, C_2),..., (D_n, C_n), que se suponen independientes. Considere además que las variables D_j y C_j también son independientes entre sí.

Definición 1.1 *El* ***monto de reclamaciones agregadas****, o también llamado agregado de reclamaciones, en el modelo individual, es la variable aleatoria*

$$S = \sum_{j=1}^{n} D_j C_j. \tag{1.20}$$

Esta variable es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. La ecuación (1.20) representa el modelo individual para una póliza de seguros de las características señaladas. El modelo tiene este nombre pues supone conocer las probabilidades de reclamación y posible monto de reclamación de todos y cada uno de los asegurados de manera individual. Una posible desventaja de este modelo es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante durante todo el tiempo de vigencia del seguro.

Desde el punto de vista matemático, y también desde la perspectiva del negocio del seguro, el objetivo es conocer las características de la variable S, a quien se llamará riesgo.

Si $F_j(x)$ denota la función de distribución del producto D_jC_j , entonces la función de distribución $F(x)$ del riesgo S adquiere la siguiente expresión en términos de convoluciones: $F(x) = (F_1 * ... * F_n)(x)$. Esta expresión general y compacta es, sin embargo, un tanto difícil de calcular. Como primeros resultados generales se presentan a continuación algunas características de S. Se denotará por $G_j(x)$ la función de distribución de C_j , y como es costumbre, cuando exista, $M_X(t)$ denota la función generadora de momentos de una variable X cualquiera.

Proposición 1.1 *Bajo las hipótesis y notación del modelo individual se tienen los siguientes resultados*

1. $F_j(x) = 1 + q_j(G_j(x) - 1)$, *para* $x \geq 0$.

2. $M_{D_jC_j}(t) = 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

3. $M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)\right]$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

4. $E[S] = \sum_{j=1}^{n} q_j E[C_j]$.

5. $Var[S] = \sum_{j=1}^{n} \left[q_j Var[C_j] + q_j p_j \big(E[C_j]\big)^2\right]$

Demostración:

1. Sea $x \geq 0$ un número real cualquiera,

$$\begin{aligned} F_j(x) &= P(D_jC_j \leq x) \\ &= P(D_jC_j \leq x|D_j = 0)P(D_j = 0) + P(D_jC_j \leq x|D_j = 1)P(D_j = 1) \\ &= P(0 \leq x|D_j = 0)p_j + P(C_j \leq x|D_j = 1)q_j \\ &= p_j + G_j(x)q_j \\ &= 1 + q_j(G_j(x) - 1). \end{aligned}$$

2. Observe que

$$\begin{aligned} M_{D_jC_j}(t) &= E\left[e^{tD_jC_j}\right] \\ &= E\left[e^{tD_jC_j}|D_j = 0\right] P(D_j = 0) + E\left[e^{tD_jC_j}|D_j = 1\right] P(D_j = 1) \\ &= p_j + E[e^{tC_j}]q_j \\ &= 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1). \end{aligned}$$

3. Usando la hipótesis de independencia,

$$\begin{aligned} M_S(t) = E\left[e^{tS}\right] &= E[e^{t(D_1C_1+D_2C_2+\ldots+D_nC_n)}] \\ &= \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{tD_jC_j}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n} M_{D_jC_j}(t) \\ &= \prod_{j=1}^{n} [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)]. \end{aligned}$$

4. Nuevamente, por independencia,

$$\begin{aligned} E[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{n} D_jC_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} E[D_j]E[C_j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} q_jE[C_j]. \end{aligned}$$

5. Primero,

$$Var[S] = \sum_{j=1}^{n} Var[D_j C_j].$$

Pero,

$$\begin{aligned}
Var[D_j C_j] &= E\left[(D_j C_j)^2\right] - \big(E[C_j D_j]\big)^2 \\
&= q_j E\left[C_j^2\right] - q_j^2 \big(E[C_j]\big)^2 \\
&= q_j \left[E[C_j^2] - \big(E[C_j]\big)^2 + \big(E[C_j]\big)^2\right] - q_j^2 \big(E[C_j]\big)^2 \\
&= q_j \left[Var[C_j] + \big(E[C_j]\big)^2\right] - q_j^2 \big(E[C_j]\big)^2 \\
&= q_j Var[C_j] + q_j p_j \big(E[C_j]\big)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Var[S] = \sum_{j=1}^{n} \left[q_j Var[C_j] + q_j p_j \big(E[C_j]\big)^2\right].$$

■

1.2.2. Modelo Colectivo

Considere un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un período de tiempo $[0, T]$. Éste puede corresponder a un año por ejemplo. Sea N la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en el intervalo de tiempo, y sean las variables positivas $Y_1, ..., Y_N$ los montos de estas reclamaciones.

Asuma que el número de reclamaciones y los montos de éstas son variables aleatorias independientes. Más aún, suponga que las reclamaciones mismas son independientes entre sí, y que comparten la misma distribución de probabilidad.

Definición 1.2 *El monto agregado o monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas, es la variable aleatoria S, llamada* ***riesgo****, y es definida como sigue*

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j. \tag{1.21}$$

Observe que cada sumando es una variable aleatoria y que el número de sumandos es también aleatorio. La suma (1.21) se define como cero cuando $N = 0$ y representa el **modelo colectivo** para un contrato de seguros.

Se denotará con G a la función de distribución de cada reclamación. Se asume naturalmente que $G(0) = 0$, ello equivale a decir que la variable Y es positiva. Adicionalmente se usará la notación $\mu_n = E[Y^n]$, en particular se escribe μ en lugar de $\mu_1 = E[Y]$.

Antes de enunciar los resultados referentes a la distribución de probabilidad de S y algunas de sus características numéricas, debe recordarse que la 0-convolución de una función de distribución G es

$$G^{*0} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposición 1.2 *La función de distribución del riesgo S en el modelo colectivo es*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n), \ \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(S \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x | N = n) P(N = n) \\ = P(S \leq x | N = 0) P(N = 0) &+ \sum_{n=1}^{\infty} P(S \leq x | N = n) P(N = n) \\ &= G^{*0}(x) P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n). \end{aligned}$$

■

Proposición 1.3 *El riesgo S en el modelo colectivo cumple las siguientes propiedades.*

1. $E[S] = E[N]E[Y]$.

2. $E[S^2] = E[N]E[Y^2] + E[N(N-1)](E[Y])^2$.

3. $Var[S] = Var[N](E[Y])^2 + Var[Y]E[N]$.

4. $M_S(t) = M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big)$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Note que las igualdades 1, 2 y 3 coinciden con las propiedades dadas para los momentos de sumas aleatorias de la sección 1.1.3. Sólo resta demostrar 4.

4. Condicionando sobre el valor de N,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(E\left[e^{Y_1+Y_2+\ldots+Y_N}|N=n\right]P(N=n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(E\left[e^{Y_1+Y_2+\ldots+Y_N}\right]P(N=n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((M_Y(t))^n P(N=n)) \\ &= E[(M_Y(t))^N] \\ &= E\left[e^{N\ln(M_Y(t))}\right] \\ &= M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big). \end{aligned}$$

■

A continuación se consideran los modelos Binomial Compuesto y Poisson Compuesto, dos casos particulares del modelo colectivo.

1.2.2.1. Modelo Binomial Compuesto

Si el número de reclamaciones N tiene una distribución $bin(n,p)$, se dice que el riesgo S tiene una distribución **binomial compuesta** que se denota por $S \sim bin\ comp(n,p,G)$, donde G es la función de distribución de cada sumando en la definición de S.

Proposición 1.4 *Si N tiene una distribución $bin(n,p)$, entonces*

1. $E[S] = np\mu$.

2. $Var[S] = np(\mu_2 - p\mu^2)$.

3. $E\left[(S - E[S])^3\right] = n(p\mu_3 - 3p^2\mu_2\mu + 2p^3\mu^3)$.

4. $M_S(t) = (1 - p + pM_Y(t))^n$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Note que la función generadora de momentos de N es:

$$M_N(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

1. De la proposición 1.3 se sabe que

$$E[S] = E[N]E[Y] = np\mu$$

2. Con la notación dada anteriormente,

$$Var[Y] = \mu_2 - \mu^2.$$

Luego, nuevamente de la proposición 1.3, se sigue que

$$\begin{aligned} Var[S] &= Var[N](E[Y])^2 + Var[Y]E[N] \\ &= np(1-p)\mu^2 + (\mu_2 - \mu^2)\, np \\ &= np\mu^2 - p^2\mu^2 + np\mu_2 - np\mu^2 \\ &= np(\mu_2 - p\mu^2). \end{aligned}$$

3.

$$E\left[(S - E[S])^3\right] = E\left[S^3\right] - 3E\left[S^2\right]E[S] + 2(E[S])^3. \tag{1.22}$$

Pero,

$$E\left[S^2\right] = E[N]E\left[Y^2\right] + \left(E\left[N^2\right] - E[N]\right)(E[Y])^2$$

y

$$E\left[S^3\right]=E[N]E\left[Y^3\right]+E[N(N-1)(N-2)](E[Y])^3+ \\ 3E[N(N-1)]E[Y]E\left[Y^2\right]. \qquad (1.23)$$

Luego,

$$E\left[N^2\right]=M_N''(0)$$

y

$$E\left[N^3\right]=M_N'''(0).$$

Como N tiene una distribución $bin(n,p)$, entonces

$$E\left[N^2\right]=n^2p^2-np^2+np,$$

y

$$E\left[N^3\right]=np-3p^2n+3p^2n^2+n^3p^3-3n^2p^3+2np^3.$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones anteriores en (1.22), se obtiene lo deseado.

4. De la proposición 1.3,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big) \\ &= \big(pe^{\ln M_Y(t)}+1-p\big)^n \\ &= (1-p+pM_Y(t))^n. \end{aligned}$$

■

1.2.2.2. Modelo Poisson Compuesto

Si el número de reclamaciones N tiene una distribución Poisson se dice que el riesgo S tiene una distribución **Poisson compuesta**, y se escribe $S\sim Poisson\ comp(\lambda,G)$, donde λ es el parámetro de la distribución Poisson y G es la función de distribución de cada sumando de S.

Proposición 1.5 *Si N tiene una distribución $Poisson(\lambda)$, entonces*

1. $E[S] = \lambda\mu$.

2. $E\left[S^2\right] = \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2$.

3. $E\left[S^3\right] = \lambda\mu_3 + 3\lambda^2\mu_2\mu + \lambda^3\mu^3$.

4. $Var[S] = \lambda\mu_2$.

5. $E\left[(S - E[S])^3\right] = \lambda\mu_3$.

6. $\alpha_3 = \frac{E\left[(S-E[S])^3\right]}{\left(Var[S]\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} > 0.$

7. $M_S(t) = exp[\lambda(M_y(t) - 1)]$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Note que la función generadora de momentos de N es:

$$M_N(t) = exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]$$

Usando la proposición 1.3,
1.

$$E[S] = E[N]E[Y] = \lambda\mu$$

2.

$$\begin{aligned} E\left[S^2\right] &= E[N]E\left[Y^2\right] + \left(E\left[N^2\right] - E[N]\right)E[Y]^2 \\ &= \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2. \end{aligned}$$

3. Note que,

$$E\left[N^2\right] = \lambda^2 + \lambda$$

y

$$E\left[N^3\right] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

Luego, usando la expresión (1.23) se obtiene lo deseado.

4. Usando 1 y 2 de esta proposición,

$$\begin{aligned} Var[S] &= E\Big[S^2\Big] - (E[S])^2 \\ &= \lambda\mu_2. \end{aligned}$$

5. Usando 1, 2 y 3 en la expresión (1.22), se tiene la igualdad.

6.

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{E\Big[(S-E[S])^3\Big]}{\Big(Var[S]\Big)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda\mu_3}{\sqrt{\lambda^3\mu_2^3}} = \frac{\lambda\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} \\ &= \frac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} > 0, \end{aligned}$$

si $\lambda > 0$ y $\mu_3 > 0$, lo cual tiene sentido.

7. De la proposición 1.3,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big) \\ &= exp\big(\lambda\left(e^{\ln M_Y(t)} - 1\right)\big) \\ &= exp[\lambda(M_y(t) - 1)]. \end{aligned}$$

■

1.3. Los Procesos de Riesgo y la Ruina

En esta parte, se presenta primero el concepto de proceso de riesgo a tiempo discreto y en seguida una versión a tiempo continuo (Modelo Clásico de Cramér-Lundberg). Se proporciona además, una fórmula general para el cálculo de la probabilidad de ruina en ambos casos y, una breve descripción de los coeficientes de ajuste.

1.3.1. Proceso de Riesgo a Tiempo Discreto

A continuación se define un proceso estocástico a tiempo discreto que modela de manera simplificada la evolución a lo largo del tiempo del capital de una compañía aseguradora respecto de una cartera de asegurados.

Suponga que $s \in \{1, 2, ...\}$ es el capital inicial de la aseguradora y, que en cada unidad de tiempo la compañía aseguradora recibe una unidad monetaria por concepto de las primas. Si $Y_1, Y_2, ...$ representan los tamaños de las reclamaciones en los periodos sucesivos, entonces el capital de la compañía aseguradora al tiempo $t \geq 1$ es la variable R_t definida en seguida.

Definición 1.3 *El **proceso de riesgo a tiempo discreto** está dado por*

$$R_t = s + t - \sum_{j=1}^{n} Y_j. \tag{1.24}$$

Las variables aleatorias $Y_1, Y_2, ...$ se suponen independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, ...\}$ tales que $E[Y_1] < 1$.

Definición 1.4 *Se dice que una compañía aseguradora se encuentra en **ruina** al tiempo $t \geq 1$ si*

$$R_t \leq 0,$$

*y se define el **tiempo de ruina** τ como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir,*

$$\tau = \min\{t \geq 1 | R_t \leq 0\}.$$

En la expresión anterior, cuando el conjunto indicado es vacío se define $\tau = \infty$, y equivale a la situación en la que la ruina nunca se presenta. El problema de la ruina consiste en encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra en algún conjunto de tiempos específico.

1.3.2. Modelo Clásico de Cramér-Lundberg

El modelo de Cramér-Lundberg es la versión a tiempo continuo de un proceso de riesgo a tiempo discreto y, tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg defendida en el año de 1903. En este trabajo, Lundberg analiza el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto.

El modelo clásico que se analizará en seguida, es el proceso estocástico $\{R_t : t \geq 0\}$, dado por

$$R_t = s + ct - \sum_{j=1}^{S(t)} Y_j, \tag{1.25}$$

donde s es el capital inicial de la compañía aseguradora, ct es la entrada de capital por concepto de primas hasta el tiempo t con c una constante positiva. Y_j es el tamaño de la j-ésima reclamación y $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson con parámetro λ.

Al proceso $\{R_t : t \geq 0\}$ se le llama nuevamente **proceso de riesgo**, o **proceso de superávit**. La variable aleatoria R_t se puede interpretar como el capital de la compañía aseguradora al tiempo t.

Por lo presentado en las secciones anteriores y la notación dada, es fácil ver que

1. $E[R_t] = s + t(c - \lambda\mu)$.

2. $Var[R_t] = \lambda\mu_2 t$.

En este caso, cuando $R_t \leq 0$, para algún $t > 0$, se dice que hay **ruina**.

1.3.2.1. Probabilidad de Ruina

Considere nuevamente el tiempo de ruina dado por

$$\tau = \text{mín}\{t > 0 | R_t \leq 0\},$$

en donde se define ínf $\emptyset = \infty$.

Definición 1.5 *La probabilidad de ruina en el intervalo* $[0, t]$*, o también llamada* ***probabilidad de ruina con horizonte finito*** *es*

$$\psi(s, t) = P(\tau \leq t | R_0 = s). \tag{1.26}$$

Mientras que la ***probabilidad de ruina con horizonte infinito****, o simplemente probabilidad de ruina, es*

$$\psi(s) = \lim_{t \to \infty} \psi(s, t) = P(\tau < \infty). \tag{1.27}$$

(Ver capítulo 7 de la referencia [8]).

Sea $F(x)$ la función de distribución de una reclamación Y cualquiera.

A continuación se presentan tres resultados generales sobre la probabilidad de ruina.

Proposición 1.6 *Sea $Q(s) = 1 - \psi(s)$, para $s \geq 0$. Entonces*

1. $Q'(s) = \frac{\lambda}{c}\left[Q(s) - \int\limits_0^s Q(s-y)dF(y)\right]$.

2. $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$.

3. $\psi(s) = \frac{\lambda}{c}\left[\int\limits_s^\infty (1-F(y))dy + \int\limits_0^s \psi(s-y)(1-F(y))dy\right]$.

Demostración:

Se usará un análisis del primer paso condicionando sobre el momento y monto de la primera reclamación.

$$Q(s) = P(\text{No ruina en } [0,\infty)|R_0 = s)$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty P(\text{No ruina en } [0,\infty)|T_1 = t, Y_1 = y)dF(y)dF_{T_1}(t)$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{s+ct} P(\text{No ruina en } [0,\infty)|T_1 = t, Y_1 = y)dF(y)dF_{T_1}(t)$$

$$= \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{s+ct} P(\text{No ruina en } (0,\infty)|T_1 = t, Y_1 = y)dF(y)dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{s+ct} Q(s+ct-y)dF(y)dt.$$

Sea $u(t) = s + ct$, entonces,

$$Q(s) = \frac{1}{c}\int\limits_s^\infty \lambda e^{-\lambda\frac{(u-s)}{c}} \int\limits_0^u Q(u-y)dF(y)du.$$

Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Integrando esta ecuación diferencial entre 0 y s se obtiene

$$Q(s) - Q(0) = \frac{\lambda}{c}\left[\int\limits_0^s Q(x)dx - \int\limits_0^s\int\limits_0^x Q(x-y)dF(y)dx\right]$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\left[\int_0^s Q(x)dx - \int_0^s\int_y^s Q(x-y)dxdF(y)\right]$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\left[\int_0^s Q(x)dx - \int_0^s\int_0^{s-y} Q(x)dxdF(y)\right]$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\left[\int_0^s Q(x)dx - \int_0^s\int_0^{s-x} Q(x)dF(y)dx\right]$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\int_0^s Q(x)(1-F(s-x))dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^s Q(s-x)(1-F(x))dx \tag{1.28}$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\int_0^s Q(s-x)(1-F(x))1_{[0,s]}(x)dx.$$

El siguiente paso es hacer tender a infinito a s. En tal caso, $Q(s)$ tiende a uno. Además, el integrando que aparece en el lado derecho es una función monótona creciente en s, y cuyo límite es la función integrable $(1-F(x))$. Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$1 - Q(0) = \tfrac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(x))dx = \tfrac{\lambda\mu}{c}.$$

Por lo tanto,

$$\psi(0) = 1 - Q(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{1.29}$$

De esta forma se obtiene el segundo resultado. Finalmente de (1.28) y (1.29) se sigue que

$$\psi(s) = \tfrac{\lambda}{c}\left[\mu - \int_0^s \big(1-\psi(s-x)\big)\big(1-F(x)\big)dx\right]$$

$$= \tfrac{\lambda}{c}\left[\int_s^\infty \big(1-F(x)\big)dx + \int_0^s \psi(s-x)\big(1-F(x)\big)dx\right].$$

■

Observe que la última expresión corresponde a una ecuación recursiva para encontrar la probabilidad de ruina.

1.3.3. Coeficientes de Ajuste

El **coeficiente de ajuste** es un número que aparece en el problema de calcular o estimar probabilidades de ruina. Existen varias maneras de definirlo. Considere primero la función

$$\theta(r) = \lambda\big(M_Y(r) - 1\big) - cr,$$

donde $M_Y(r)$ es la función generadora de Y, y está bien definida para valores de r en donde $M_Y(r)$ existe. Entonces suponiendo diferenciabilidad, se tiene que

$$\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c$$

y

$$\theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda E\left[Y^2 e^{rY}\right] > 0.$$

Por lo tanto, $\theta(0)$ es una función estrictamente convexa tal que $\theta(0) = 0$, y por la condición de ganancia neta

$$\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0.$$

Entonces es posible que exista un valor $R > 0$ tal que $\theta(R) = 0$.

Definición 1.6 *A la posible solución $R > 0$ de la siguiente ecuación se le llama **coeficiente de ajuste**, o **exponente de Lundberg**.*

$$\theta(R) = \lambda\big(M_Y(R) - 1\big) - cR = 0.$$

Observe que la existencia del coeficiente de ajuste depende enteramente de la distribución de las reclamaciones.

Definición 1.7 *A una distribución de probabilidad para la cual existe el coeficiente de ajuste, se le llama distribución con **cola ligera**.*

La razón de ello es que la función de densidad decae a cero exponencialmente rápido, asignando probabilidades pequeñas a reclamaciones grandes.

*Cuando no existe tal coeficiente la distribución adquiere el nombre de distribución con **cola pesada**.*

A continuación se mencionan algunos ejemplos de distribuciones de ambos tipos.

Ejemplo 1.1 *Distribuciones con cola ligera:*

1. $exp(\alpha)$.

2. $gamma(\gamma, \alpha)$.

3. $Weibull(r, \alpha)$, *para* $r \geq 1$.

4. *Normal truncada,* $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, *para* $x \geq 0$.

Ejemplo 1.2 *Distribuciones con cola pesada:*

1. $\log normal(\mu, \sigma^2)$.

2. $Pareto(a, b)$.

3. $Weibull(r, \alpha)$, *para* $0 < r < 1$.

4. $\log gamma(\gamma, \alpha)$.

Capítulo 2

Modelo de Lundberg con Impuestos

Considere una compañía aseguradora con riesgo modelado mediante el proceso clásico de Lundberg

$$R_0(t) = s + ct - S(t), \tag{2.1}$$

donde el proceso $S(t)$ es Poisson compuesto con intensidad λ y distribución del tamaño de los reclamos F, y la intensidad de la prima $c > 0$ con un factor de seguridad

$$c > \lambda\mu,$$

que es la condición de ganancia neta, donde μ es el promedio del tamaño de las reclamaciones.

Para el superávit inicial $s \geq 0$, sea $\psi_0(s)$ la probabilidad de ruina en tiempo infinito,

$$\psi_0(s) = P\{s + ct < S(t), \text{ para algún } t \geq 0\}.$$

Suponga que el impuesto se paga a una tasa fija γ de los ingresos de la compañía de seguros cada vez que se encuentra en una situación rentable, esto es, si al tiempo t su proceso de riesgo R_γ con impuesto está dado por

$$R_\gamma(t) = \text{máx}\{R_\gamma(u) : u \leq t\}. \tag{2.2}$$

Así que la aseguradora pagará una tasa de impuestos $c\gamma$ en tiempos rentables y cero en tiempos sin ganancias (pérdidas de ejercicios anteriores del sistema). Los ingresos se reducen por el pago de impuestos de c a $c(1 - \gamma)$.

Si $\gamma \geq 1$ en el modelo, entonces la ruina será determinada por el asegurador (note que para $\gamma = 1$ el proceso de riesgo resultante es idéntico a uno con estrategia de barrera horizontal [4], donde el capital inicial está en la barrera). A priori no está claro si la ruina también es cierta con $\gamma < 1$.

En este trabajo se mostrará que para $\gamma < 1$ la probabilidad de ruina es menor que 1 y, en particular, para $s \geq 0$, se cambia de $\psi_0(s)$ a

$$\psi_\gamma(s) = 1 - \Big(1 - \psi_0(s)\Big)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}. \tag{2.3}$$

Asintóticamente, por lo tanto, la probabilidad de ruina crece mediante el factor $\frac{1}{(1-\gamma)}$,

$$\psi_\gamma(s) \sim \frac{1}{(1-\gamma)}\psi_0(s). \tag{2.4}$$

En una situación con impuesto, se necesita un superávit inicial más grande para tener la misma probabilidad de ruina, comparada al caso sin impuesto. Así, para reclamaciones de cola ligera admitiendo el coeficiente de ajuste R, el capital adicional necesario es asintóticamente igual a

$$-\tfrac{1}{R}\log(1-\gamma).$$

Por ejemplo, si el tamaño de las reclamaciones es Pareto con cola indexada por α, necesita un capital adicional que es asintóticamente igual a

$$\Big((1-\gamma)^{-\frac{1}{(\alpha-1)}} - 1\Big)s.$$

Con costo de capital v, se obtiene una tasa de prima más alta que es el resultado de los impuestos pagados. Si c es la tasa de la prima neta original y s es el capital inicial, entonces la tasa de la prima llega a ser $c + vs$. Para una tasa de impuesto $\gamma > 0$, se obtiene una tasa de prima asintótica de

$$c + vs - v\tfrac{1}{R}log\,(1-\gamma)$$

y

$$c + v\Big(1-\gamma\Big)^{-\frac{1}{(\alpha-1)}}s$$

respectivamente.

El impuesto descontado esperado dado el superávit inicial $s > 0$, está dado por

$$v(s) = E\left[\int_0^\tau e^{-\delta t}\gamma(t)dt\right], \tag{2.5}$$

donde τ es el tiempo de ruina, $\delta > 0$ es la tasa de descuento, y $\gamma(t)$ es la tasa de impuesto pagado en el tiempo t, que equivale a $c\gamma$ en tiempos rentables y cero en otros tiempos. Note que la cantidad $v(s)$ permite evaluar el impuesto recaudado por el sistema tributario.

2.1. Descripción del Modelo

El proceso de riesgo $R_\gamma(t)$ con impuestos, bajo un sistema de pérdidas descrito más adelante se desarrolla de la siguiente manera:

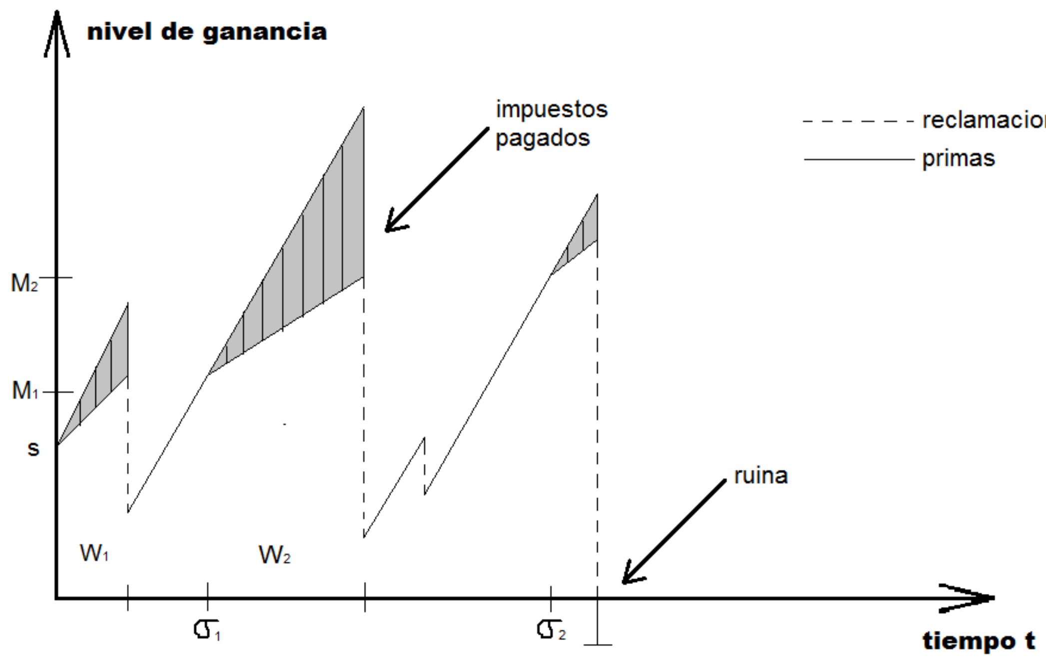

Figura 2.1: *Descripción gráfica del modelo.*

Si s es el superávit inicial, entonces se tiene un período de ganancia en el que la tasa de la prima se reduce a $c(1-\gamma)$ hasta la primera reclamación de tamaño X_1, al tiempo W_1. El nivel de ganancias $M_1 = s + c(1-\gamma)W_1$. Entonces hay un período sin ganancias en el que la tasa de la prima es c hasta que el proceso alcance a M_1, en el tiempo σ_1, por ejemplo. Entonces se tiene un período con ganancias hasta la primera reclamación, después del tiempo σ_1, que sucede en $\sigma_1 + W_2$ y tiene tamaño X_2.

El nuevo nivel de ganancias está dado por $M_2 = s + c(1-\gamma)(W_1 + W_2)$, como se muestra en la *Figura 2.1*.

Sea $N(t)$ el proceso básico de arribo de las reclamaciones, y por el momento se asume que el proceso R_γ no alcanza el tiempo de ruina. Entonces se obtiene una sucesión de: niveles de ganancia M_n, tiempos de espera W_n, tamaños de reclamación X_n y tiempos de inicio de períodos rentables σ_n, definidos formalmente como:

$\sigma_0 = 0,$
$M_0 = s,$
$W_n = \text{ínf}\{t > 0 : N(\sigma_{n-1} + t) > N(\sigma_{n-1})\},$
$X_n = R_\gamma(\sigma_{n-1} + W_{n-1}) - R_\gamma(\sigma_{n-1} + W_n),$
$M_n = M_{n-1} + c(1-\gamma)W_n,$
$\sigma_n = \text{ínf}\{t > \sigma_{n-1} + W_n : R_\gamma(t) = M_n\},\ n \geq 1.$

De donde, se observa que los intervalos de tiempo con ganancias (rentables) son:

$$(\sigma_{n-1}, \sigma_{n-1} + W_n),\ n \geq 1,$$

y los intervalos de tiempo donde la aseguradora no es rentable están dados por

$$C_n = (\sigma_{n-1} + W_n, \sigma_n),\ n \geq 1.$$

Para el proceso $R_\gamma(t)$, la ruina sucede sólo si $R_\gamma(t) < 0$ para algún $t \in C_n$, $n \geq 1$.

Los tiempos de espera $W_1,\ W_2,\ ...$ son independientes con distribución $\text{Exp}(\lambda)$, (debido a la propiedad de "falta de memoria"de esta distribución). Por lo tanto, $\sigma_n \to \infty$ y $M_n \to \infty$ casi seguramente (P-a.s).

2.2. La Probabilidad de Ruina

Teorema 2.1 *En caso de un factor de seguridad positivo $c > \lambda\mu$ y $\gamma < 1$ se tiene que $\psi_\gamma(s) < 1$ para todo $s \geq 0$. En particular, en este caso*

$$1 - \psi_\gamma(s) = \Big(1 - \psi_0(s)\Big)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}.$$

Demostración:

Sea $\phi_0(s) = 1 - \psi_0(s)$, la probabilidad de no ruina en el tiempo cero.

Para $0 \leq s \leq M$, se considera la función

$$g(s, M) = P\{R_0(t) \text{ alcance a } M \text{ antes de la ruina} | R_0(0) = s\}.$$

Entonces $\phi_0(s) = g(s, M)\phi_0(M)$, de donde se obtiene

$$g(s, M) = \frac{\phi_0(s)}{\phi_0(M)}. \tag{2.6}$$

Para $\phi_\gamma(s) = 1-\psi_\gamma(s)$, en el primer período (σ_0, σ_0+W_1) con tamaño de reclamación X_1 en el tiempo W_1, se tiene

$$\phi_\gamma(s) = E\left[1_{\{No\ ruina\ en\ C_1\}}\phi_\gamma(M_1)\right],$$

(porque la aseguradora sólo tiene dos opciones: ruina o no ruina).

Entonces

$$\phi_\gamma(s) = E\left[g(M_1 - X_1, M_1)\phi_\gamma(M_1)\right].$$

Por otro lado, note que:

Observación 1:

Si se consideran los intervalos $(\sigma_0, \sigma_0 + W_1), (\sigma_1, \sigma_1 + W_2)$, entonces

$$\phi_\gamma(s) = E\left[\tfrac{\phi_0(M_1-X_1)}{\phi_0(M_1)}\phi_\gamma(M_1)\tfrac{\phi_0(M_2-X_2)}{\phi_0(M_2)}\phi_\gamma(M_2)\right]$$

$$= E\left[\tfrac{\phi_0(M_1-X_1)}{\phi_0(M_1)}\tfrac{\phi_0(M_2-X_2)}{\phi_0(M_2)}\right]E[\phi_\gamma(M_1)\phi_\gamma(M_2)],$$

por la independencia de $X_1, X_2, M_1, M_2, W_1, W_2$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\phi_\gamma(M_1)\phi_\gamma(M_2) &= (1 - \psi_\gamma(M_1))(1 - \psi_\gamma(M_2)) \\
&= 1 - \psi_\gamma(M_2) - \psi_\gamma(M_1) + \psi_\gamma(M_1)\psi_\gamma(M_2) \\
&\approx 1 - \tfrac{1}{1-\gamma}\psi_0(M_2) - \tfrac{1}{1-\gamma}\psi_0(M_1) + \left(\tfrac{1}{1-\gamma}\right)^2\psi_0(M_1)\psi_0(M_2).
\end{aligned}$$

Tomando la esperanza en ambos lados se tiene que

$$E[\phi_\gamma(M_1)\phi_\gamma(M_2)] = 1 - \tfrac{1}{1-\gamma}E[\psi_0(M_2)] - \tfrac{1}{1-\gamma}E[\psi_0(M_1)]+$$

$$\left(\tfrac{1}{1-\gamma}\right)^2 E\left[\psi_0(M_1)\right]E[\psi_0(M_2)] = 1,$$

ya que para $i = 1, 2$ se tiene que la $E[\psi_0(M_i)] = 0$, porque si se alcanzó el nivel M_i, entonces

$$P\{M_i + ct < S(t)\} = 0.$$

De lo anterior, puede afirmarse que si $\sigma_n \to \infty$, entonces

$$E\left[\prod_{n=1}^{\infty} \phi_\gamma(M_n)\right] = 1,$$

con lo que se concluye esta primera observación.

Entonces, si $\sigma_n \to \infty$, se sigue que

$$\phi_\gamma(s) = E\left[\prod_{n=1}^{\infty} \tfrac{\phi_0(M_n - X_n)}{\phi_0(M_n)}\right].$$

Ahora se define, para $x \geq 0$, la función

$$g_0(x) = E[\phi_0(x - X)].$$

Como $X_1, X_2, ..., W_1, W_2, ...$ son independientes, entonces

$$\phi_\gamma(s) = E\left[\prod_{n=1}^{\infty} \tfrac{g_0(M_n)}{\phi_0(M_n)}\right].$$

Luego, de la ecuación íntegro-diferencial (ver (5) en [2]) para $\phi_0(s)$

$$0 = \lambda E[\phi_0(s - X) - \phi_0(s)] + c\phi_0'(s), \tag{2.7}$$

con $s \geq 0$ y sea X cualquiera de las X_i; se obtiene

$$\lambda E[\phi_0(s - X)] = \lambda E[\phi_0(s)] - c\phi_0'(s)$$

Luego,

$$E[\phi_0(s - X)] = E[\phi_0(s)] - \tfrac{c}{\lambda}\phi_0'(s),$$

de donde, para $s \geq 0$,

$$g_0(s) = \phi_0(s) - \tfrac{c}{\lambda}\phi_0'(s).$$

Entonces

$$\frac{g_0(s)}{\phi_0(s)} = 1 - \frac{c}{\lambda}\frac{\phi_0'(s)}{\phi_0(s)}.$$

Enseguida se propone, para $x \geq 0$, a la función

$$f(x) = \frac{c}{\lambda}\frac{\phi_0'(s+x)}{\phi_0(s+x)}.$$

De donde entonces, es claro que

$$\phi_\gamma(s) = E\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1 - f(M_n - s))\right].$$

Ahora note que:

Observación 2:

Si se consideran sólo las reclamaciones M_1 y M_2, entonces

$$\begin{aligned}
\phi_\gamma(s) &= E[(1 - f(M_1 - s))(1 - f(M_2 - s))] \\
&= E\left[\Big(1 - f\Big(M_0 + c(1-\gamma)W_1 - s\Big)\Big)\Big(1 - f\Big(M_1 + c(1-\gamma)W_2 - s\Big)\Big)\right] \\
&= E\left[\Big(1 - f\Big(c(1-\gamma)W_1\Big)\Big)\Big(1 - f\Big(c(1-\gamma)(W_1 + W_2)\Big)\Big)\right].
\end{aligned}$$

De la observación anterior, se sigue que, para $\sigma_n \to \infty$,

$$\phi_\gamma(s) = E\left[\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - f\Big(c(1-\gamma)(W_1 + W_2 + ...)\Big)\Big)\right].$$

Luego, las variables $c(1-\gamma)W_n$, $n = 1, 2, ...$ son independientes y tienen distribución exponencial con parámetro $\frac{\lambda}{c(1-\lambda)}$; además, la función $0 \leq f(x) \leq 1$ es no negativa e integrable, entonces por el Lema A.1 del apéndice de la referencia [2] se sigue que

$$\phi_\gamma(s) = exp\left(-\frac{\lambda}{c(1-\lambda)}\int_0^{\infty} f(x)dx\right)$$

$$= exp\Big(\frac{1}{1-\lambda}\, log\ \phi_0(s)\Big) = \Big(\phi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Por lo tanto,

$$1 - \psi_\gamma(s) = \Big(1 - \psi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

∎

Observación:

A primera vista, la siguiente prueba simple del Teorema 2.1 parece apropiada:

Al condicionar la aparición de la primera reclamación, se tiene que

$$\phi_\gamma(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^{s+c(1-\gamma)t} g\Big(s + c(1-\gamma)t - y,\ s + c(1-\gamma)t\Big)$$

$$\phi_\gamma\Big(s + c(1-\gamma)t\Big) dF(y). \tag{2.8}$$

Haciendo un cambio de variable tal que $w = s + c(1-\gamma)t$, se sigue que $dt = \frac{dw}{c(1-\gamma)}$.

Si $t = 0$, entonces $w = s$ y si $t \to \infty$, entonces $w \to \infty$.

Usando lo anterior, resulta que:

$$\phi_\gamma(s) = \int_s^\infty \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} e^{-\lambda\left(\frac{w-s}{c(1-\lambda)}\right)} dw \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y)$$

$$= e^{\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}} \int_s^\infty \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} e^{\frac{-\lambda w}{c(1-\gamma)}} dw \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y).$$

Ahora diferenciando con respecto a s se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi'_\gamma(s) &= \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) + e^{-\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}} \left(-\frac{\lambda}{c(1-\gamma)} e^{-\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}}\right) \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y) + \\
&\quad e^{\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}} \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} \frac{e^{-\frac{\lambda w}{c(1-\gamma)}}}{-\frac{\lambda}{c(1-\gamma)}} \Big|_s^\infty \ \frac{d}{ds}\left(\int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y)\right) \\
&= \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y) - \\
&\quad e^{\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}} e^{-\frac{\lambda w}{c(1-\gamma)}} \Big|_s^\infty \ \frac{d}{ds}\left(\int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y)\right) \\
&= \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y) + \\
&\quad e^{\frac{\lambda s}{c(1-\gamma)}} e^{-\frac{\lambda w}{c(1-\gamma)}} \Big|_s^\infty \ \frac{d}{ds}\left(\int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y)\right) \\
&= \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} \int_0^w g(w-y, w)\phi_\gamma(w) dF(y).
\end{aligned}$$

Recordando que, cuando $t = 0$, $w = s$, donde s es el superávit inicial, la derivada de $\phi_\gamma(s)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\phi'_\gamma(s) = \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\int_0^s g(s-y,s)\phi_\gamma(s)dF(y).$$

Ahora, usando (2.6) y (2.7); y posteriormente resolviendo la ecuación diferencial de primer grado resultante, se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi'_\gamma(s) &= \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\phi_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c(1-\gamma)}\int_0^s \frac{\phi_0(s-y)}{\phi_0(s)}\phi_\gamma(s)dF(y) \\
&\Leftrightarrow \frac{c(1-\gamma)}{\lambda}\phi'_\gamma(s) - \phi_\gamma(s) + \int_0^s \frac{\phi_0(s-y)}{\phi_0(s)}\phi_\gamma(s)dF(y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c(1-\gamma)}{\lambda}\phi'_\gamma(s) - \phi_\gamma(s) + \frac{\phi_\gamma(s)}{\phi_0(s)}\int_0^s \phi_0(s-y)f(y)dy = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c(1-\gamma)}{\lambda}\phi'_\gamma(s) - \phi_\gamma(s) + \phi_\gamma(s)\frac{E[\phi_0(s-y)]}{\phi_0(s)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c(1-\gamma)}{\lambda}\phi'_\gamma(s) - \phi_\gamma(s) + \phi_\gamma(s)\frac{g_0(s)}{\phi_0(s)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c(1-\gamma)}{\lambda}\phi'_\gamma(s) - \phi_\gamma(s) + \phi_\gamma(s)\left(1 - \frac{c}{\lambda}\frac{\phi'_0(s)}{\phi_0(s)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{\lambda}{c}$, la expresión anterior es equivalente a

$$(1-\gamma)\phi'_\gamma(s) - \frac{\lambda}{c}\phi_\gamma(s) + \frac{\lambda}{c}\phi_\gamma(s) - \phi_\gamma(s)\frac{\phi'_0(s)}{\phi_0(s)} = 0,$$

equivalentemente,

$$(1-\gamma)\frac{\phi'_\gamma(s)}{\phi_\gamma(s)} = \frac{\phi'_0(s)}{\phi_0(s)}.$$

Luego, tomando el logaritmo en ambos lados

$$\begin{aligned}
&(1-\gamma)\frac{d}{ds}log(\phi_\gamma(s)) = \frac{d}{ds}log(\phi_0(s)) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{d}{ds}log(\phi_\gamma(s)) = \frac{d}{ds}\frac{log(\phi_0(s))}{(1-\gamma)} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{d}{ds}log(\phi_\gamma(s))ds = \int \frac{d}{ds}log\Big(\phi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}ds \\
\Leftrightarrow\ &log(\phi_\gamma(s)) = log\Big(\phi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}.
\end{aligned}$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados, se tiene que

$$exp[log(\phi_\gamma(s))] = exp\left[log\Big(\phi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right].$$

De donde se concluye que

$$\phi_\gamma(s) = C\Big(\phi_0(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

para alguna constante C.

Ahora, tomando el límite en ambos lados de la expresión anterior, cuando $s \to \infty$, dicho límite es igual a uno, esto implica que $C = 1$ y por consiguiente, se concluye el mismo resultado. Sin embargo, este enfoque no incluye la posibilidad de que $\phi_\gamma(s) = 0, \forall s \geq 0$ (que también representa una solución de (2.8)), mientras que la prueba dada anteriormente lo hace. En la siguiente sección este condicionamiento será la herramienta adecuada para establecer una expresión de manera explícita para $v(s)$.

2.3. Pago Total de Impuestos Descontado Esperado

Sea $B(s, b) := E[e^{-\delta\tau^+(s,0,b)}]$ que denota la transformada de Laplace del tiempo de salida superior $\tau^+(s, 0, b)$, que es el tiempo hasta que el proceso clásico de riesgo $R_0(t)$ (con intensidad de prima c), que comienza con capital inicial $s < b$, alcanza a b sin conducir a la ruina antes del evento. La cantidad $B(s, b)$ desempeñará un papel crucial más adelante.

Note que $\tau^+(s, 0, b)$ es una variable aleatoria defectuosa porque el tiempo de recuperación no es el mismo en cada período.

Por otro lado, se deduce a partir de [5], que $B(s, b)$ puede escribirse como:

$$B(s, b) = \tfrac{h(s)}{h(b)},$$

donde la función $h(s)$ es la solución de la ecuación íntegro-diferencial

$$ch'(s) - (\lambda + \delta)h(s) + \lambda \textstyle\int_0^s h(s - y)dF(y) = 0,$$

que está determinada de manera única salvo por una constante (más adelante se asumirá sin pérdida de generalidad que $h(s) \geq 0, \forall s \geq 0$). Por ejemplo, $h(s)$ se puede expresar explícitamente como,

$$h(s) = e^{\rho s} - q_\delta(s),$$

donde $\rho > 0$ es la única solución positiva para R en la ecuación fundamental de Lundberg

$$cR - \lambda - \delta + \lambda \textstyle\int_0^\infty e^{-Ry}dF(y) = 0$$

y $q_\delta = E[e^{-\delta\tau+\rho R_0(\tau)}\, 1_{\{\tau<\infty\}}]$, donde τ denota el tiempo de ruina en el modelo clásico de riesgo.

La cantidad q_δ puede ser interpretada como el valor presente de un pago de 1 unidad en el momento de la recuperación, después del evento de la ruina, o alternativamente, como una función de penalización con descuento, con penalidad de $w(x,y) = e^{-\rho y}$.

Además se considera la función $V(s,b)$, que denota los pagos de dividendos descontados esperados en el modelo clásico de Cramér-Lundberg, con intensidad de prima c, barrera horizontal b, fuerza de descuento $\delta > 0$ y capital inicial $s < b$ (ver capítulo 6 de[4]).

Luego, para $0 \leq s \leq b$, se deduce de [4] que

$$V(s,b) = \frac{h(s)}{h'(b)}. \tag{2.9}$$

En efecto:

Suponga que se puede demostrar que la ecuación íntegro-diferencial,

$$h'(x) = \frac{\lambda+\delta}{c} h(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{x+\boldsymbol{O}} h(x-y)dF(y), \tag{2.10}$$

para $0 < x < \infty$, tiene exactamente una solución, salvo una constante multiplicativa.

Por lo tanto, puede concluirse de (A.1) que $V(s,b)$ debe tener la siguiente forma

$$V(s,b) = C(b)h(s).$$

Luego, sustituir esta expresión en (A.2) permite determinar $C(b)$,

$$C(b)h(b) = \tfrac{c}{\lambda+\delta} + \tfrac{\lambda}{\lambda+\delta} C(b) \int_0^{b+\boldsymbol{O}} h(b-y)dF(y).$$

Por lo tanto,

$$C(b)h(b) - \tfrac{\lambda}{\lambda+\delta} C(b) \int_0^{b+\boldsymbol{O}} h(b-y)dF(y) = \tfrac{c}{\lambda+\delta}$$

$$\Leftrightarrow C(b) = \frac{c}{(\lambda+\delta)h(b) - \lambda \int_0^{b+\boldsymbol{O}} h(b-y)dF(y)}.$$

Luego, por (2.10)

$$C(b) = \tfrac{1}{h'(b)}.$$

Por consiguiente,

$$V(s,b) = \tfrac{h(s)}{h'(b)}.$$

De lo anterior, se obtiene la identidad clásica

$$B(s,b) = \frac{V(s,b)}{V(b,b)}. \tag{2.11}$$

Aunque no es necesario el uso de la representación (2.11) para $B(s,b)$, en lo que sigue, esto se empleará para hacer más transparentes algunas relaciones.

Por otra parte, ya que para $\gamma = 1$ (en este caso todas las primas entrantes se pagan de impuestos) el proceso de riesgo con el pago de impuestos es idéntico al proceso de riesgo con la estrategia de barrera horizontal con barrera $b = s$ (ver capítulo 6 de [4]), resulta natural expresar los resultados para $v(s)$ en términos de la función V.

Note que dados los límites

$$\lim_{s\to\infty} q_\delta(s) = 0,$$

y

$$\lim_{s\to\infty} q'_\delta(s) = 0,$$

(ver los detalles en [5]) se deduce inmediatamente que el

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} V(s,s) &= \lim_{s\to\infty} \tfrac{h(s)}{h'(s)} \\ &= \lim_{s\to\infty} \tfrac{e^{\rho s - q_\delta(s)}}{e^{\rho s}\rho - q'_\delta(s)} = \tfrac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

Enseguida se determina una expresión explícita para $v(s)$.

Teorema 2.2 *Usando la notación anterior, el pago de impuestos descontado esperado con capital inicial $s \geq 0$ está dado por*

$$v(s) = \tfrac{\gamma}{1-\gamma} e^{\int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}} \int_s^\infty e^{-\int_0^t \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}} dt,$$

o equivalentemente

$$v(s) = \frac{\gamma}{1-\gamma} h(s)^{\frac{1}{1-\gamma}} \int_s^\infty h(t)^{-\frac{1}{1-\gamma}} dt. \tag{2.12}$$

Demostración:

Primero se determinarán los límites simples para $v(s)$.

Suponiendo que no se produce reclamación en absoluto, se tiene que

$$v(s) \leq \int_0^\infty c\gamma e^{-\delta t} dt = \frac{c\gamma}{\delta}.$$

Por otro lado, si la primera reclamación conduce ya a la ruina, el impuesto sólo se puede recoger hasta el momento de esta reclamación, lo que implica que

$$v(s) \geq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^t c\gamma e^{-\delta \xi} d\xi = \frac{c\gamma}{\lambda+\delta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{c\gamma}{\lambda+\delta} \leq v(s) \leq \frac{c\gamma}{\delta}, \forall s \geq 0. \tag{2.13}$$

Luego, al condicionar el tiempo de ocurrencia y el tamaño de la primera reclamación, la función $v(s)$ puede escribirse como:

$$v(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \left(\int_0^t c\gamma e^{-\delta \xi} d\xi + \right.$$

$$\left. e^{-\delta t} \int_0^{s+c(1-\gamma)t} B\Big(s + c(1-\gamma)t - y,\ s + c(1-\gamma)t\Big) v\Big(s + c(1-\gamma)t\Big) dF(y) \right). \tag{2.14}$$

Haciendo un cambio de variable tal que $w = s + c(1-\gamma)t$, se sigue que $dt = \frac{dw}{c(1-\gamma)}$.

Si $t = 0$, entonces $w = s$ y si $t \to \infty$, entonces $w \to \infty$.

Usando lo anterior, resulta que:

$$v(s) = \frac{c\gamma}{\lambda+\delta} + \int_s^\infty \lambda e^{-\frac{\lambda+\delta}{c(1-\gamma)}(w-s)} \frac{dw}{c(1-\gamma)} \int_0^w B(w-y, w) v(w) dF(y),$$

o equivalentemente

$$v(s) = \frac{c\gamma}{\lambda+\delta} + e^{\frac{(\lambda+\delta)s}{c(1-\gamma)}} \int_s^\infty \frac{\lambda}{c(1-\gamma)} e^{-\frac{(\lambda+\delta)}{c(1-\gamma)} w} v(w) dw \int_0^w B(w-y, w) dF(y).$$

Enseguida, sustituyendo la identidad (2.11) en la ecuación anterior se obtiene

$$v(s) = \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta} + e^{\frac{(\lambda+\delta)s}{c(1-\gamma)}} \int_s^\infty \tfrac{\lambda}{c(1-\gamma)} e^{-\frac{(\lambda+\delta)}{c(1-\gamma)}w} \tfrac{v(w)}{V(w,w)} dw \int_0^w V(w-y,w)dF(y).$$

Pero, a partir de la teoría clásica de riesgo [4], se sabe que

$$\lambda \int_0^w V(w-y,w)dF(y) = (\lambda+\delta)V(w,w) - c.$$

Por lo tanto,

$$v(s) = \frac{c\gamma}{\lambda+\delta} + e^{\frac{(\lambda+\delta)s}{c(1-\gamma)}} \int_s^\infty \frac{e^{-\frac{(\lambda+\delta)}{c(1-\gamma)}w}}{c(1-\gamma)} v(w) \left(\lambda+\delta - \frac{c}{V(w,w)}\right) dw. \tag{2.15}$$

Por otro lado, note que debido a (2.13), $v(s)$ está acotada para todo $s \geq 0$ y por consiguiente, en particular, el límite $v(\infty)$ es finito.

Tomando el límite cuando $s \to \infty$ en (2.15), se obtiene, usando la regla de L'Hopital que

$$v(\infty) = \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta} + v(\infty)\left(1 - \tfrac{c}{(\lambda+\delta)\lim\limits_{s\to\infty} V(s,s)}\right),$$

o equivalentemente

$$v(\infty) = \gamma \lim_{s\to\infty} V(s,s) = \frac{\gamma}{\rho}. \tag{2.16}$$

Ahora se puede diferenciar (2.15) con respecto a s, y se debe recordar que al tiempo 0 el capital es s;

$$v'(s) = \tfrac{(\lambda+\delta)}{c(1-\gamma)}\left(v(s) - \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta}\right) - \tfrac{v(s)}{c(1-\gamma)}\left(\lambda+\delta - \tfrac{c}{V(s,s)}\right).$$

Más aún,

$$\begin{aligned} c(1-\gamma)v'(s) &= (\lambda+\delta)\left(v(s) - \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta}\right) - v(s)\left((\lambda+\delta) - \tfrac{c}{V(s,s)}\right) \\ \Leftrightarrow \tfrac{c(1-\gamma)}{\lambda+\delta}v'(s) &= v(s) - \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta} - v(s) + \tfrac{v(s)}{V(s,s)}\tfrac{c}{(\lambda+\delta)} \\ \Leftrightarrow \tfrac{c(1-\gamma)}{\lambda+\delta}v'(s) &= \tfrac{v(s)}{V(s,s)}\tfrac{c}{(\lambda+\delta)} - \tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta}. \end{aligned}$$

Entonces, finalmente puede escribirse a $v'(s)$ como

$$v'(s) = \frac{v(s)}{(1-\gamma)V(s,s)} - \frac{\gamma}{1-\gamma}, \tag{2.17}$$

con la condición inicial (2.16).

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden está dada por

$$v(s) = \left(C - \tfrac{\gamma}{1-\gamma} U_1(s)\right) e^{\,\frac{1}{1-\gamma} U(s)},$$

donde

$$U(s) = \int_0^s \tfrac{d\xi}{V(\xi,\xi)},\ U_1(s) = \int_0^s e^{-\frac{U(t)}{1-\gamma}} dt,$$

y C es alguna constante que puede ser determinada utilizando la condición (2.16).

En efecto:

Note que (2.17) es una ecuación diferencial lineal de primer orden, por lo que se resuelve multiplicándola por $e^{-\int_0^s \frac{d\xi}{(1-\gamma)V(\xi,\xi)}}$. De manera que

$$v(s) = \frac{1}{e^{-\int_0^s \frac{d\xi}{(1-\gamma)V(\xi,\xi)}}} \left[-\int_0^s e^{-\int_0^t \frac{d\xi}{(1-\gamma)V(\xi,\xi)}} \frac{\gamma}{(1-\gamma)} dt + C \right],$$

y eligiendo a $U(s)$ y $U_1(s)$, como se especificó arriba, se tiene lo deseado.

Por otro lado, ya que $V(s,s) > 0$ para $s \geq 0$ y $\lim\limits_{s\to\infty} V(s,s) = \rho > 0$, la función $U(s)$ es no acotada en s y, en consecuencia, $U_1(s)$ converge a $\frac{1-\gamma}{\gamma} C$ cuando $s \to \infty$.

Ahora, realizando algunas manipulaciones algebraicas se tiene

$$\begin{aligned} v(s) &= \left(C - \tfrac{\gamma}{1-\gamma} U_1(s)\right) e^{\frac{1}{1-\gamma} U(s)} \\ &= C e^{\frac{1}{(1-\gamma)} \int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)}} - \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \left(\int_0^s e^{\frac{1}{(1-\gamma)} \int_0^t \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)}} dt \right) e^{\frac{1}{(1-\gamma)} \int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)}}, \end{aligned}$$

con $C = 0$, lo anterior puede escribirse como

$$v(s) = \tfrac{\gamma}{1-\gamma} e^{\int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}} \int_s^\infty e^{-\int_0^t \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}} dt\ .$$

Ahora, al evaluar (2.9) en $s = b$ se observa que

$$V(b,b) = \tfrac{h(b)}{h'(b)},$$

entonces

$$\begin{aligned}
U(s) &= \int_0^s \frac{h'(\xi)d\xi}{h(\xi)} \\
&= log(h(\xi))|_0^s \\
&= log(h(s)) - log(h(0)) \\
&= log\left(\frac{h(s)}{h(0)}\right).
\end{aligned}$$

De lo anterior, finalmente puede expresarse a $v(s)$ como;

$$v(s) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\Big(h(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}} \int_s^\infty \Big(h(t)\Big)^{-\frac{1}{1-\gamma}} dt.$$

■

Observación: En términos de la función h, la ecuación diferencial (2.17) para $v(s)$ está dada por

$$v'(s) = \frac{v(s)h'(s)}{(1-\gamma)h(s)} - \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

con condición inicial (2.16).

Para efectos numéricos, cuando la evaluación exacta de (2.12) no es factible, puede ser útil comenzar directamente desde la ecuación anterior.

Por otro lado, en varios casos, expresiones explícitas para $V(b,b)$ se conocen por el teorema anterior traducido en fórmulas explícitas para la suma de pago de impuestos descontada esperada. Por ejemplo, cuando la distribución del tamaño de la reclamación tiene una transformada de Laplace razonable, la función q_δ y subsecuentemente la función $V(b,b)$ puede ser expresada analíticamente (ver fórmula 6.54 en [5]).

A continuación se revisa un ejemplo numérico de los resultados obtenidos hasta el momento.

Ejemplo 1:

Sea $F(y) = 1 - e^{-\alpha y}$.

Diferenciando la expresión (2.10) dada anteriormente se tiene que

$$Ch''(s) = (\lambda+\delta)h'(s) - \lambda\alpha h(0)e^{-\alpha s} - \lambda\alpha \int_0^s h'(s-y)e^{-\alpha y}dy.$$

Luego, integrando por partes,

$$Ch''(s) = (\lambda+\delta)h'(s) - \lambda\alpha h(s) + \lambda\alpha^2 \int_0^s h(s-y)e^{-\alpha y}dy.$$

Si ahora se reemplaza la segunda parte, por la relación de la ecuación íntegro-diferencial original, se obtiene

$$Ch''(s) - (\lambda+\delta-C\alpha)h'(s) - \delta\alpha h(s) = 0.$$

Dividiendo entre C,

$$h''(s) - \tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)}{C}h'(s) - \tfrac{\delta\alpha}{C}h(s) = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Entonces se usa el método de Euler [9], en el que se busca una solución de la forma $y = e^{rs}$, donde r es una constante por determinar.

Se propone $y = e^{rs}$,

$$r^2 - \tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)}{C}r - \tfrac{\delta\alpha}{C} = 0,$$

equivalentemente

$$r = \tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)}{2C} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)^2}{C^2} + \tfrac{4\delta\alpha}{C}}.$$

Se denotará por ρ y r_2 a las soluciones de esta ecuación de segundo grado, es decir,

$$\rho = \tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)}{2C} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)^2}{C^2} + \tfrac{4\delta\alpha}{C}},$$

y

$$r_2 = \tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)}{2C} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{(\lambda+\delta-C\alpha)^2}{C^2} + \tfrac{4\delta\alpha}{C}}.$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$h(s) = C_1e^{\rho s} + C_2e^{r_2 s},$$

donde C_1 y C_2 son constantes por determinar. Además, puede observarse que $\rho > 0$ y $r_2 < 0$.

El siguiente paso es sustituir la solución recién hallada en la expresión (2.10) para determinar $\frac{C_2}{C_1}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
h'(s) &= \tfrac{\lambda+\delta}{C}(C_1e^{\rho s}+C_2e^{r_2 s})-\tfrac{\lambda}{C}\int\limits_0^s\left(C_1e^{\rho(s-y)}+C_2e^{r_2(s-y)}\right)dF(y)\\
&= \tfrac{\lambda+\delta}{C}C_1e^{\rho s}+\tfrac{\lambda+\delta}{C}C_2e^{r_2 s}-\tfrac{\lambda}{C}C_1\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}dF(y)-\tfrac{\lambda}{C}C_2\int\limits_0^s e^{r_2(s-y)}dF(y).
\end{aligned}$$

Primero se resolverán, por integración por partes, las siguientes integrales, $\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}dF(y)$ y $\int\limits_0^s e^{r_2(s-y)}dF(y)$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}dF(y) &= e^{\rho(s-y)}F(y)|_0^s+\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}\rho F(y)dy\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)+\rho\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}(1-e^{-\alpha y})dy\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)+\rho\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}dy-\rho\int\limits_0^s e^{\rho s-\rho y-\alpha y}dy\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)+\rho e^{\rho s}\int\limits_0^s e^{-\rho y}dy-\rho e^{\rho s}\int\limits_0^s e^{-(\rho+\alpha)y}dy\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)+\rho e^{\rho s}\left[\tfrac{e^{-\rho y}}{-\rho}\right]|_0^s-\rho e^{\rho s}\left[\tfrac{e^{-(\rho+\alpha)y}}{-(\rho+\alpha)}\right]|_0^s\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)+\rho e^{\rho s}\left[\tfrac{e^{-\rho s}}{-\rho}+\tfrac{1}{\rho}\right]-\rho e^{\rho s}\left[\tfrac{e^{-(\rho+\alpha)s}}{-(\rho+\alpha)}+\tfrac{1}{\rho+\alpha}\right]\\
&= F(s)-e^{\rho s}F(0)-1+e^{\rho s}+\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}e^{\rho s-\rho s-\alpha s}-\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}e^{\rho s}\\
&= 1-e^{-\alpha s}-e^{\rho s}*0-1+e^{\rho s}+\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}e^{-\alpha s}-\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}e^{\rho s}\\
&= \left(\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}-1\right)e^{-\alpha s}-\left(\tfrac{\rho}{\rho+\alpha}-1\right)e^{\rho s}\\
&= \tfrac{-\alpha}{\rho+\alpha}e^{-\alpha s}-\tfrac{-\alpha}{\rho+\alpha}e^{\rho s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_0^s e^{\rho(s-y)}dF(y)=\tfrac{\alpha}{\rho+\alpha}(e^{\rho s}-e^{-\alpha s}).$$

Análogamente,

$$\int\limits_0^s e^{r_2(s-y)}dF(y)=\tfrac{\alpha}{r_2+\alpha}(e^{r_2 s}-e^{-\alpha s}).$$

Entonces, retomando la igualdad para $h'(s)$, se sigue que

$$\begin{aligned} h'(s) &= \tfrac{\lambda+\delta}{C}C_1e^{\rho s} + \tfrac{\lambda+\delta}{C}C_2e^{r_2 s} - C_1\tfrac{\lambda}{C}\tfrac{\alpha}{\rho+\alpha}(e^{\rho s}-e^{-\alpha s}) - C_2\tfrac{\lambda}{C}\tfrac{\alpha}{r_2+\alpha}(e^{r_2 s}-e^{-\alpha s}) \\ &= \tfrac{\lambda}{C}C_1e^{\rho s} + \tfrac{\delta}{C}C_1e^{\rho s} + \tfrac{\lambda}{C}C_2e^{r_2 s}\tfrac{\delta}{C}C_2e^{r_2 s} - \tfrac{\lambda}{C}C_1\tfrac{\alpha}{\rho+\alpha}e^{\rho s} + \tfrac{\lambda}{C}C_1\tfrac{\alpha}{\rho+\alpha}e^{-\alpha s} - \\ &\quad \tfrac{\lambda}{C}C_2\tfrac{\alpha}{r_2+\alpha}e^{r_2 s} + \tfrac{\lambda}{C}C_2\tfrac{\alpha}{r_2+\alpha}e^{-\alpha s}. \end{aligned}$$

Luego, igualando a 0,

$$\tfrac{\lambda}{C}\alpha e^{-\alpha s}\left(\tfrac{C_1}{\rho+\alpha}+\tfrac{C_2}{r_2+\alpha}\right) - \tfrac{\lambda}{C}\alpha\left(\tfrac{C_1}{\rho+\alpha}e^{\rho s}+\tfrac{C_2}{r_2+\alpha}e^{r_2 s}\right) +$$

$$\tfrac{\lambda}{C}(C_1e^{\rho s}+C_2e^{r_2 s}) + \tfrac{\delta}{C}(C_1e^{\rho s}+C_2e^{r_2 s}) = 0.$$

Multiplicando por C en ambos lados de la ecuación anterior, resulta que

$$0 = \lambda\alpha\left[e^{-\alpha s}\left(\tfrac{C_1}{\rho+\alpha}+\tfrac{C_2}{r_2+\alpha}\right) - \left(\tfrac{C_1}{\rho+\alpha}e^{\rho s}+\tfrac{C_2}{r_2+\alpha}e^{r_2 s}\right)\right] + (\lambda+\delta)(h(s)).$$

Note que, el último sumando de la expresión anterior es igual a 0, ya que λ y δ están relacionadas; de tal forma que $\lambda = -\delta$. Entonces

$$0 = \tfrac{C_1}{\rho+\alpha}(e^{\rho s}-e^{-\alpha s}) + \tfrac{C_2}{r_2+\alpha}(e^{r_2 s}-e^{-\alpha s}).$$

Multiplicando por $\frac{\rho+\alpha}{C_1}$ se tiene que

$$0 = (e^{\rho s}-e^{-\alpha s}) + \tfrac{\rho+\alpha}{r_2+\alpha}\tfrac{C_2}{C_1}(e^{\rho s}-e^{-\alpha s}).$$

De donde entonces,

$$\tfrac{C_2}{C_1} = -\tfrac{r_2+\alpha}{\rho+\alpha}.$$

Suponga que $C_1 = \rho+\alpha$.

Por otro lado, se sabe que

$$\begin{aligned} h(s) &= C_1e^{\rho s} + C_2e^{r_2 s} \\ \Leftrightarrow \tfrac{h(s)}{C_1e^{\rho s}} &= 1 + \tfrac{C_2}{C_1}\tfrac{e^{r_2 s}}{e^{\rho s}} \\ &= 1 - \tfrac{r_2+\alpha}{\rho+\alpha}e^{(r_2-\rho)s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(s) = e^{\rho s}(\rho+\alpha)\left(1 - \tfrac{r_2+\alpha}{\rho+\alpha}e^{(r_2-\rho)s}\right).$$

Entonces

$$h(s) = (\rho+\alpha)e^{\rho s}(1-\eta(s)),$$

con $\eta(s) = \frac{\alpha+r_2}{\alpha+\rho}e^{(r_2-\rho)s}$.

Ahora, aplicando el Teorema 2.2,

$$v(s) = \tfrac{\gamma}{1-\gamma}\left(e^{\rho s}\Big(1-\eta(s)\Big)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \int\limits_0^\infty \left[\left(e^{\rho t}\Big(1-\eta(t)\Big)\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}\right] dt.$$

Enseguida, considere el cambio de variable: $w = e^{(r_2-\rho)(t-s)}$, se sigue que $dt = w^{-1}(r_2-\rho)^{-1}dw$.

Si $t=s$, entonces $w=1$ y si $t\to\infty$, entonces $w\to\infty$.

Usando lo anterior, resulta que

$$v(s) =$$

$$\tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tfrac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}\Big(e^{\rho s}\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\int\limits_1^\infty w^{-1}\left(w^{\frac{\rho}{r_2-\rho}}e^{\rho s}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}\left(1-e^{(r_2-\rho)s}\ \tfrac{\alpha+r_2}{\alpha+\rho}w\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dw$$

$$= \tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tfrac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}\int\limits_1^\infty w^{-\frac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}}\left(1-e^{(r_2-\rho)s}\tfrac{\alpha+r_2}{\alpha+\rho}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dw$$

$$= \tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tfrac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}\int\limits_1^\infty \left(w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)} - w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)+1}e^{(r_2-\rho)s}\ \tfrac{\alpha+r_2}{\alpha+\rho}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dw$$

$$= \tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tfrac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}\int\limits_1^\infty \left(w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)} - w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)+1}\eta(s)\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dw.$$

Usando el teorema del binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}
v(s) &= (-1)\ \tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tfrac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)} \\
&\quad \int\limits_1^\infty\sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{1-\gamma}}{k}\left(w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}-k}\left(-w^{\frac{\rho}{(r_2-\rho)}+(1-\gamma)+1}\eta(s)\right)^k dw \\
&= (-1)\ \tfrac{\gamma}{\rho}\Big(1-\eta(s)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\int\limits_1^\infty\sum_{k=0}^\infty\left(\tfrac{1}{1-\gamma}\right)\left(\tfrac{1}{1-\gamma}+1\right)\cdots\left(\tfrac{1}{1-\gamma}+k-1\right) \\
&\quad \tfrac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}\ \tfrac{(\eta(s))^k}{k!}\ w^{-\frac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}-\frac{\rho k}{r_2-\rho}-1-(1-\gamma)k}\left(-w^{\frac{\rho k}{r_2-\rho}+(1-\gamma)k+k}\right)dw
\end{aligned}$$

$$= \quad (-1)\,\tfrac{\gamma}{\rho}\big(1-\eta(s)\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}\Big)\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}+1\Big)\cdots\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}+k-1\Big)$$

$$\tfrac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}\;\tfrac{(\eta(s))^k}{k!}\;\int_1^{\infty} w^{-\frac{\rho}{(r_2-\rho)(1-\gamma)}-1+k}dw$$

$$= \quad (-1)\,\tfrac{\gamma}{\rho}\big(1-\eta(s)\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}\Big)\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}+1\Big)\cdots\Big(\tfrac{1}{1-\gamma}+k-1\Big)$$

$$\tfrac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}\;\tfrac{(\eta(s))^k}{k!}\;\Big(\tfrac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}+k\Big)^{-1}.$$

Finalmente, por la expresión (B.11) del apéndice B, $v(s)$ puede escribirse en términos de una serie hipergeométrica de Gauss como se muestra a continuación

$$v(s) = \tfrac{\gamma}{\rho}\big(1-\eta(s)\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$_2F_1 \times \left(\frac{1}{1-\gamma},\ \frac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)};\ \frac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}+1;\ \eta(s)\right), \tag{2.18}$$

con $Re(c) > Re(b) > 0$ (cf. por ejemplo [1]).

Observación:

La expresión (2.8) puede interpretarse como un caso especial de (2.14); para $\delta = 0$ se tiene $B(s,b) = g(s,b)$.

2.4. Pago de Impuestos a Partir de un Superávit M

Puede que sea mejor para la autoridad fiscal cobrar el impuesto sólo cuando el superávit ha superado un umbral $M > s$. Por un lado, los impuestos comenzarían más tarde y por otro, disminuiría la probabilidad de ruina

$$\phi_{\gamma,M}(s) = \tfrac{\phi_0(s)}{\phi_0(M)}\phi_\gamma(M) = \tfrac{\phi_0(s)}{\phi_0(M)}\phi_0(M)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \phi_0(s)\phi_0(M)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} > \phi_\gamma(s).$$

Nota: La expresión anterior es el resultado de generalizar $\phi_0(s) = g(s,M)\phi_0(M)$, usando $\phi_\gamma(M)$ en lugar de $\phi_0(M)$, ya que no consideramos un tiempo en particular.

Así, que a priori no está claro qué efecto domina, y por lo tanto, tiene que investigarse la cantidad $v_M(s)$, que se define como la suma del pago de impuestos descontada esperada hasta la ruina, dado que el pago de impuestos sólo comienza en un nivel excedente $M > s$,

$$v_M(s) = B(s,M)v(M) = \frac{V(s,M)}{V(M,M})v(M) = \frac{h(s)}{h(M)}v(M).$$

Acto continuo se mostrará que el valor $M = M^*$ maximiza a $v_M(s)$:

Teorema 2.3 *Si $v(0) > \frac{c}{\lambda+\delta}$, entonces para todo $s \geq 0$ el valor óptimo M^* es la solución positiva de la ecuación*

$$v'(M) = 1, \tag{2.19}$$

y el correspondiente valor del pago de impuestos descontado esperado óptimo está dado por

$$v_{M^*}(s) = \begin{cases} V(s,M^*), & \textit{si } s < M^*, \\ v(s), & \textit{si } s \geq M^*. \end{cases}$$

Si, por otro lado, $v(0) \leq \frac{c}{\lambda+\delta}$, entonces $M^* = 0$ para todo $s \geq 0$ y el valor del pago de impuestos descontado esperado óptimo está dado por

$$v_{M^*}(s) = v(s).$$

Demostración:

Debido a la regularidad de $h(s)$ y en consecuencia de $v(s)$, una condición necesaria para un valor positivo máximo $M = M^*$ es

$$\frac{\partial v_M(s)}{\partial M} = h(s)\frac{v'(M)h(M) - v(M)h'(M)}{h^2(M)} = 0,$$

lo que implica

$$0 = v'(M^*)h(M^*) - v(M^*)h'(M^*)$$

$$\Leftrightarrow v'(M^*)h(M^*) = v(M^*)h'(M^*)$$

$$\frac{v'(M^*)}{v(M^*)} = \frac{h'(M^*)}{h(M^*)} = \frac{1}{V(M^*,M^*)}.$$

Pero usando la ecuación diferencial (2.17) esto se traduce en

$$\frac{1}{(1-\gamma)V(M^*,M^*)} - \frac{\gamma}{(1-\gamma)v(M^*)} = \frac{1}{V(M^*,M^*)}$$

$$\Leftrightarrow v(M^*)(\frac{1}{1-\gamma} - 1) = \frac{V(M^*,M^*)\gamma}{(1-\gamma)} \ .$$

Por lo tanto,

$$v(M^*) = V(M^*,M^*). \tag{2.20}$$

Luego, usando de nuevo (2.17), lo anterior es equivalente a $v'(M^*) = 1$.

Recuerde además que

$$\lim_{s\to\infty} v(s) = \tfrac{\gamma}{\rho} < \tfrac{1}{\rho} = \lim_{s\to\infty} V(s,s).$$

Por lo tanto, si $v(0) > \frac{c}{\lambda+\delta} = V(0,0)$, la continuidad de $v(s)$ y $V(s,s)$ implica la existencia de una solución positiva M^* de (2.20), o equivalentemente, de (2.19).

Con el fin de garantizar que el extremo M^* es de hecho un máximo, se usará el criterio de la segunda derivada.

$$sgn\left(\tfrac{\partial^2 v_M(s)}{\partial M^2}|_{M=M^*}\right) =$$

$$sgn\Bigg(\tfrac{h(s)}{h^4(M^*)}\Bigg[v''(M^*)h(M^*)h^2(M^*) + v'(M^*)h'(M^*)h^2(M^*) - v'(M^*)h'(M^*)2h^2(M^*)$$

$$-\Big(v'(M^*)h'(M^*)h^2(M^*) + v(M^*)h''(M^*)h^2(M^*) - v'(M^*)h'(M^*)2h^2(M^*)\Big)\Bigg]\Bigg)$$

$$= sgn\Big(\tfrac{h(s)}{h^2(M^*)}[v''(M^*)h(M^*) - v(M^*)h''(M^*)]\Big).$$

Lo cual equivale a fijarse en

$$sgn\Big(v''(M^*)h(M^*) - v(M^*)h''(M^*)\Big).$$

Luego, de (2.17) y de

$$V'(s,s) = 1 - \frac{h(s)h''(s)}{h'^{\,2}(s)},\ \forall s \geq 0, \tag{2.21}$$

se puede obtener $v''(M^*)$:

$$\begin{aligned}
v''(M^*) &= \tfrac{v'(M^*)(1-\gamma)V(M^*,M^*) - v(M^*)(1-\gamma)V'(M^*,M^*)}{(1-\gamma)^2V^2(M^*,M^*)} \\
&= \tfrac{v'(M^*)(1-\gamma)V(M^*,M^*) - v(M^*)(1-\gamma)(1-\frac{h(M^*)h''(M^*)}{h'^2(M^*)})}{(1-\gamma)^2V^2(M^*,M^*)} \\
&= \tfrac{h'(M^*)}{(1-\gamma)h(M^*)} - \tfrac{h'^2(M^*) - h(M^*)h''(M^*)}{h'^2(M^*)(1-\gamma)v(M^*)} \\
&= \tfrac{h'^2(M^*)h'(M^*)(1-\gamma)\frac{h(M^*)}{h'(M^*)} - (1-\gamma)h(M^*)h'^2(M^*) - (1-\gamma)h^2(M^*)h''(M^*)}{(1-\gamma)h(M^*)h'^2(M*)(1-\gamma)v(M^*)} \\
&= \tfrac{h''(M^*)}{(1-\gamma)h'(M^*)}\tfrac{h(M^*)}{h(M^*)} \\
&= \tfrac{h''(M^*)v(M^*)}{(1-\gamma)h(M^*)}.
\end{aligned}$$

De esta manera, lo anterior puede simplificarse aún más,

$$\begin{aligned}
sgn\left(\frac{\partial^2 v_M(s)}{\partial M^2}|_{M=M^*}\right) &= sgn\Big(v''(M^*)h(M^*) - v(M^*)h''(M^*)\Big) \\
&= sgn\left(\frac{v(M^*)h''(M^*)}{(1-\gamma)h(M^*)}h(M^*) - v(M^*)h''(M^*)\right) \\
&= sgn\Big(v(M^*)h''(M^*)(\tfrac{1}{1-\gamma} - 1)\Big) \\
&= sgn\Big(v(M^*)h''(M^*)\left(\tfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)\Big).
\end{aligned}$$

Lo que equivale a fijarse en el $sgn\Big(h''(M^*)\Big)$.

Ahora, la barrera horizontal óptima b^*, en el modelo clásico de riesgo sin impuesto, se define como el valor que minimiza a $h'(b)$ $(b \geq 0)$ y de [4] se sigue que, si $b^* > 0$, entonces es la única solución positiva de $h''(b) = 0$.

Dado que $h(s) > 0$, $\forall s \geq 0$, puede deducirse de (2.21) que

$$V'(b,b) = 1 \Leftrightarrow \frac{h(b)h''(b)}{h'^2(b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow h''(b) = 0 \Leftrightarrow b = b^* > 0.$$

Luego, de $v(0) > V(0,0)$ se sigue que

$$V'(M^*, M^*) > v'(M^*) = 1,$$

que junto con la observación de que el $\lim\limits_{b\to\infty} V'(b,b) = 0$, implica que $M^* < b^*$. Por consiguiente, de (2.21), se encuentra finalmente que $h''(M^*) < 0$ y M^* representa un máximo.

Para $s < M^*$, el pago de impuestos descontado esperado óptimo resultante está dado por

$$v_M(s) = \frac{V(s,M^*)}{V(M^*,M^*)}v(M^*) = V(s,M^*).$$

Por otra parte, $s \geq M^*$ implica que los impuestos tienen que ser pagados desde el principio, por lo que, la estrategia de pago de impuestos es equivalente al caso de $M = 0$.

En el segundo caso $v(0) < \frac{c}{\lambda+\delta} = V(0,0)$, de (2.20), un posible punto M^*, debe satisfacer que $V'(M^*, M^*) < v'(M^*) = 1$, y que en vista de (2.21) debería implicar que $h''(M^*) > 0$, de modo que M^* no puede ser un máximo. Como $v_M(s) \to 0$ cuando $M \to \infty$, la ausencia de un valor máximo de $v_M(s)$ para $0 < M < \infty$ implica, en este caso, que el máximo se alcanza en $M^* = 0$.

Observación: Note que en particular el nivel óptimo de tributación M^* no depende del capital inicial s. Usando (2.12), el criterio (2.19) puede verse como

$$1 = v'(M^*) = \tfrac{\gamma}{1-\gamma} \left(\tfrac{1}{1-\gamma}\right) \Big(h(M^*)\Big)^{1-\frac{1}{1-\gamma}} h'(M^*) \int\limits_{M^*}^{\infty} \Big(h(t)\Big)^{-\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Por lo tanto, el criterio (2.19) se traduce en la búsqueda de M^* tal que

$$\tfrac{(1-\gamma)^2}{\gamma} \Big(h(M^*)\Big)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} = h'(M^*) \int\limits_{M^*}^{\infty} \Big(h(t)\Big)^{-\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Capítulo 3

Aplicación Numérica

En este capítulo se presenta una aplicación numérica de los resultados obtenidos para una distribución de cola ligera.

Considere el caso de una distribución de tamaño de reclamación exponencial con parámetro $\alpha = 1$ y elija $c = 2$, $\lambda = 1$, $\delta = 0{,}04$. Sea además $\gamma = 0{,}5$.

Entonces de (2.18) se obtiene

$$v(s) = 12{,}9642\,(0{,}463554\; e^{-0{,}557136s})_2\, F_1(2; 0{,}13845; 1{,}13845; 0{,}4636e^{-0{,}557136}).$$

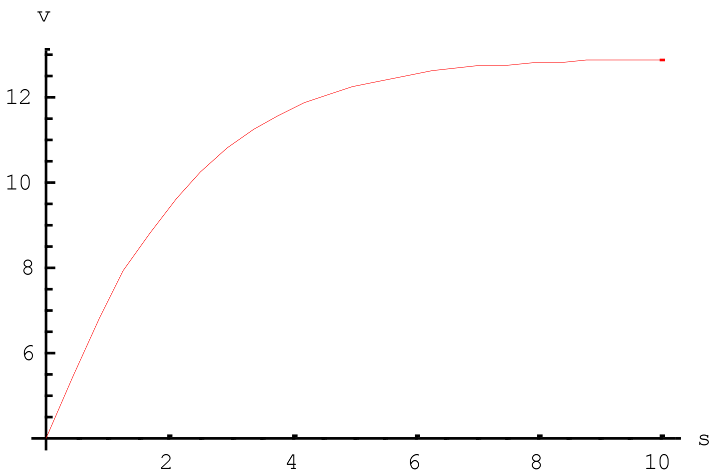

Figura 3.1: $v(s)$ *para tamaños de reclamación con distribución* $Exp(\alpha)$*, con* $c = 2$*,* $\lambda = 1$*,* $\delta = 0{,}04$ *y* $\gamma = 0{,}5$

.

La *Figura 3.1* representa el pago de impuestos descontado esperado en función del capital inicial s.

Note que los límites triviales de (2.13) son en este caso, $0{,}961538 \leq v(s) \leq 25$, $\forall s \geq 0$, mientras que el valor exacto en 0 es $v(0) = 4{,}01869$ y el límite está dado por $v(\infty) = \frac{\gamma}{\rho} = 12{,}9642$.

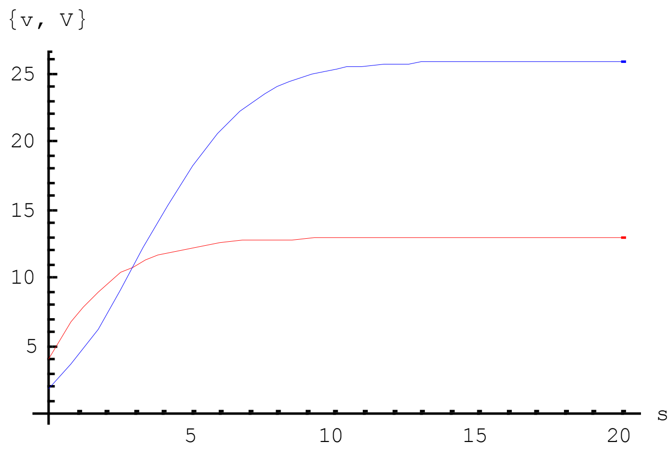

Figura 3.2: $v(s)$ *(línea roja) vs V(s,s) (línea azul)*

.

Para la determinación del nivel óptimo de partida M^*, se grafican las funciones $V(s,s)$ y $v(s)$ simultáneamente, ver *Figura 3.2*; el punto de intersección $s = M^*$, donde en este caso $M^* = 3{,}00878$ aproximadamente.

El valor de M^* recién presentado, así como la función $v(s)$, son mejores aproximaciones que las expuestas en [2]; en este trabajo $V(s,s)$ y $v(s)$ son iguales en el punto M^*, considerando 4 dígitos después del punto decimal.

Alternativamente, para $\gamma = 0{,}1$ (con el resto de los parámetros idénticos) se obtiene que

$$v(0) = 1{,}32623 < \tfrac{c}{\lambda+\delta} = 1{,}92308,$$

y por lo tanto, debido al Teorema 2.3 el valor óptimo para M está dado por $M^* = 0$.

En este caso, también se obtuvieron mejores aproximaciones que en [2].

En efecto, la *Figura 3.3* muestra que las funciones $V(s)$ y $v(s)$ no tienen punto de intersección positivo y la *Figura 3.4* ilustra,para $s = 0$, que, en este caso $M^* = 0$ maximiza el pago de impuestos descontado esperado $v_M(s)$ para elección de M.

La *Figura 3.5* representa el valor $v(0)$, donde γ varía entre 0 y 1, junto con el valor de $V(0,0) = 1{,}92308$ que no depende de γ.

El valor óptimo M^* es positivo para $\gamma > 0{,}05$ aproximadamente.

Para $\gamma \to 1$, la estrategia de pago de impuestos converge a la estrategia con barrera de dividendos horizontal y correspondientemente $M^* \to b^*$ [4].

La *Figura 3.6* representa el valor de M^* como una función de γ para el ejemplo numérico dado anteriormente. En esta gráfica, a diferencia de la fig. 5a en [2] se muestra la función $V(0,0)$ en todo el intervalo [0,1].

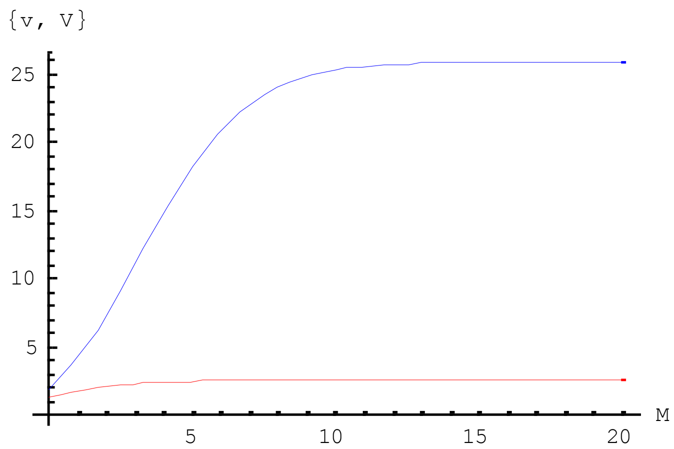

Figura 3.3: $v(s)$ *(línea roja) vs V(s,s) (línea azul) para* $\gamma = 0{,}1$.

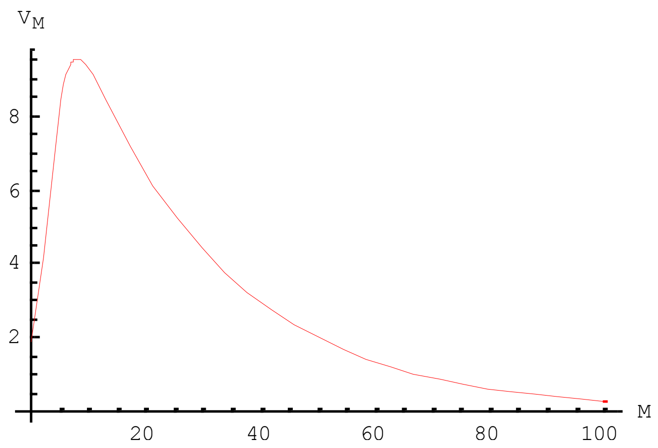

Figura 3.4: *El pago de impuestos descontado esperado* $v_M(0)$ *como función de* M *para* $\gamma = 0{,}1$.

.

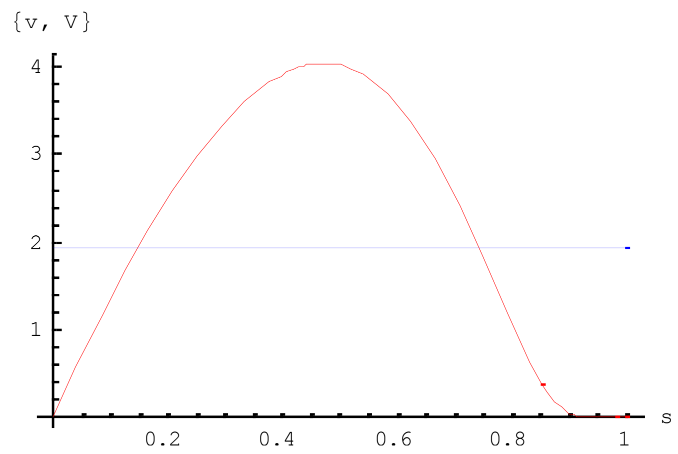

Figura 3.5: $v(0)$ *(junto con* $V(0,0) = 1{,}92308$*) como función de* γ.

.

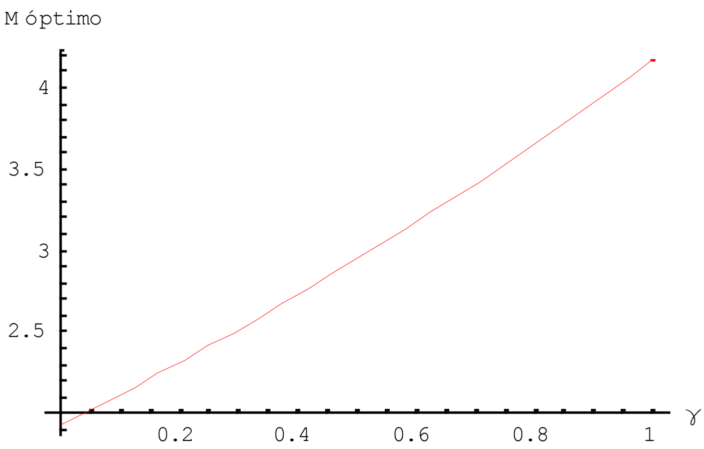

Figura 3.6: *M^* como función de γ.*

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo fundamental de esta tesis, fue analizar el modelo clásico de Lundberg con impuestos, una vez realizado un estudio previo de los conceptos fundamentales de la teoría de riesgo. Para finalizar este trabajo se mostrarán las conclusiones obtenidas en él.

• La probabilidad de ruina para el modelo clásico de Lundberg con impuestos, descrito en este trabajo, es menor que uno, es decir, no es seguro que ocurra la ruina para la compañía aseguradora por incluir el pago de impuestos.

• El valor de la función $v(s)$, que representa el pago de impuestos descontado esperado con capital inicial s, con las hipótesis dadas en el capítulo 2,se encuentra en el intervalo

$$[\tfrac{c\gamma}{\lambda+\delta}\ ,\tfrac{c\gamma}{\delta}].$$

• El pago de impuestos descontado esperado con capital inicial s, está dado por

$$v(s)=\tfrac{\gamma}{1-\gamma}e^{\int\limits_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}}\int\limits_s^\infty e^{-\int_0^t \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}}dt$$

o equivalentemente

$$v(s)=\tfrac{\gamma}{1-\gamma}h(s)^{\frac{1}{1-\gamma}}\int\limits_s^\infty h(t)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dt.$$

• Se ha determinado también el valor del pago de impuestos descontado esperado óptimo (Teorema 2.3).

• Para una distribución de cola ligera (distribución exponencial) para los tamaños de las reclamaciones, se pusieron en práctica los resultados obtenidos, con el fin de determinar el valor óptimo para el nivel M, mostrando que, efectivamente, los dos casos dados en el Teorema 2.3 pueden ocurrir, dependiendo de la tasa de impuestos γ; y esto puede apreciarse en la gráficas del capítulo 3.

• Todas las aproximaciones y resultados obtenidos para la aplicación numérica del Capítulo 3, son mejores que las presentadas en [2], ya que los valores numéricos sólo fueron truncados a 6 dígitos, no se redondearon.

Finalmente, cabe mencionar que a pesar de que el modelo usado en este trabajo, no toma en cuenta muchos aspectos reales en cuanto al funcionamiento de una compañía aseguradora, sirve como modelo de estudio básico, a partir del cual pueden incluirse consideraciones que compliquen el modelo (por ejemplo, que los tamaños de las reclamaciones no sean independientes ni estén idénticamente distribuidos, otros gastos en los que incurre la aseguradora, etc.), con el propósito de aproximar el modelo lo más cercano a la situación real.

Apéndice A

La Ecuación Íntegro-Diferencial de la Estrategia de Barrera en el Caso Continuo

Considere la estrategia de barrera, con barrera b y la suma esperada de dividendos $V(s,b)$ para la reserva libre inicial s. Observe, en primer lugar, que $V(s,b)$ es continua en s para $0 \leq s \leq b$ (aunque sólo sea por la derecha en $s=0$). Esto se deduce de la relación

$$V(s+ch,b) \geq V(s,b) \geq e^{-(\lambda+\delta)h} V(s+ch,b),$$

($e^{-\lambda h}$ es la probabilidad de que en el intervalo $(0,h]$ no haya reclamación y $e^{-\delta h}$ es el factor de descuento en el mismo intervalo) y del hecho de que $V(s,b)$ es monótona en s.

(Sea $h \to 0$). En el primer intervalo de tiempo de longitud h, con h muy pequeña, las reclamaciones ocurren, de acuerdo con un proceso de Poisson compuesto, de la siguiente forma:

Ninguna reclamación: con probabilidad, $1-\lambda h + \boldsymbol{O}(h^2)$;
una reclamación: con probabilidad, $\lambda h + \boldsymbol{O}(h^2)$;
más de una reclamación: con probabilidad, $\boldsymbol{O}(h^2)$,

donde $\boldsymbol{O}(h^2)$ es la notación de O grande. Una función $f(h)$ se dice O grande de g(h), denotada por $f(h) = \boldsymbol{O}(g(h))$, si existen K y k constantes tales que

$$|f(h)| \leq K|g(h)|, \text{ siempre que } |h| \leq k.$$

Para h suficientemente pequeña, y considerando a Y como la variable del tamaño de la reclamación y $0 \leq s < b$, se tiene

$$V(s,b) = (1-\lambda h)e^{-\delta h}V(s+ch,b) + \lambda h \int\limits_0^{s+\boldsymbol{O}} V(s-y,b)dF(y) + \boldsymbol{O}(h^2).$$

Ya que $e^{-\delta h} = 1 - \delta h + \boldsymbol{O}(h^2)$, se sigue que

$$V(s,b) = (1-\lambda h - \delta h)V(s+ch,b) + \lambda h \int\limits_0^{s+\boldsymbol{O}} V(s-y,b)dF(y) + \boldsymbol{O}(h^2).$$

Despejando

$$\tfrac{V(s+ch,b)-V(s,b)}{ch}$$

y tomando el límite cuando $h \to 0$, se obtiene, por la continuidad de $V(s,b)$ en s,

$$\frac{\partial V(s,b)}{\partial s} = \frac{\lambda+\delta}{c}V(s,b) - \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^{s+\boldsymbol{O}} V(s-y,b)dF(y), \tag{A.1}$$

que es válida para $0 \le s \le b$.

Para $s = b$ se tiene la siguiente condición de frontera,

$$V(b,b) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int\limits_0^{b+\boldsymbol{O}} V(b-y,b)dF(y). \tag{A.2}$$

Esta condición se obtiene de la siguiente forma, a partir de los dos sumandos siguientes:

1. El pago descontado esperado de dividendos hasta la primera reclamación:

La función de densidad del tiempo de inter-arribo de la reclamación es $\lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$.

Usando esto, se establece el valor esperado de $\int\limits_0^x ce^{-\delta t}dt$, lo que conduce a

$$\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^x ce^{-\delta t}dt\right)e^{-\lambda x}dx$$

$$= \tfrac{\lambda c}{\delta}\int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-\delta x}\right)e^{-\lambda x}dx$$

$$= \tfrac{\lambda c}{\delta}\left[\tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda+\delta}\right] = \tfrac{c}{\lambda+\delta}.$$

2. El pago descontado esperado de dividendos después de la primera reclamación:

$$\lambda \int_{0}^{\infty} \left[e^{-\delta x} \int_{0}^{b+\boldsymbol{O}} V(b-y,b)dF(y) \right] e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \int_0^{b+\boldsymbol{O}} V(b-y,b)dF(y).$$

Apéndice B

Serie Hipergeométrica de Gauss

La ecuación diferencial

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \{c-(a+b+1)z\}\frac{dw}{dz} - abw = 0, \tag{B.1}$$

donde a, b y c son parámetros reales o complejos, es llamada la **ecuación hipergeométrica**. Sus únicas singularidades son 0, 1 y ∞. La importancia de la ecuación (B.1) se deriva en parte del siguiente teorema.(Ver [6]).

Teorema B.1 *Cualquier ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden cuyas singularidades, incluyendo el punto en el infinito, son regulares y no más de tres, es transformable en la ecuación hipergeométrica.*

La solución en serie de la ecuación (B.1) válida alrededor de $z = 0, 1$ o ∞ se puede construir mediante la aplicación directa de los métodos 4-6 en [6]. En particular, corresponde al exponente 0 en $z = 0$ la solución, asumiendo que la unidad de valor en $z = 0$ se encuentra que

$$F(a,b,c;z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+s-1)b(b+1)\cdots(b+s-1)}{c(c+1)\cdots(c+s-1)}\frac{z^s}{s!}, \tag{B.2}$$

con la condición de que c no es cero o un entero negativo. Esta serie converge evidentemente cuando $|z| < 1$, y se conoce como la **serie hipergeométrica de Gauss** o simplemente como la **serie hipergeométrica**. La suma $F(a,b,c;z)$ es la **función hipergeométrica**.

$F(a,b,c;z)$ es la notación estándar para la solución principal de la ecuación hipergeométrica, pero es más conveniente para desarrollar la teoría en términos de la función

$$\mathbf{F}(a,b;c;z) = \frac{F(a,b,c;z)}{\Gamma(c)}, \tag{B.3}$$

porque esto conduce a un menor número de restricciones y fórmulas simples. La mayor parte de los resultados obtenidos se actualizan en la notación F. De (B.1) y (B.2), se tiene que

$$\mathbf{F}(a, b; , c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{\Gamma(c+s)} \frac{z^s}{s!}, \qquad (|z| < 1), \tag{B.4}$$

donde, por razones de simplicidad, se usó la notación de Pochhammer $(a)_0 = 1$, y

$$(a)_s = a(a+1)\cdots(a+s-1), \tag{B.5}$$

para $s = 1, 2, ...$

A diferencia de $F(a, b; c; z)$, la función $\mathbf{F}(a, b; c; z)$ existe y satisface (B.1) para todos los valores de a, b y c; a partir de (B.4) se verifica fácilmente que cuando n es un número entero no negativo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(a, b; -n; z) &= (a)_{n+1}(b)_{n+1}\ z^{n+1}\ \mathbf{F}(a+n+1, b+n+1; n+2; z) \\ &= (a)_{n+1}(b)_{n+1}\ z^{n+1}\ \frac{F(a+n+1, b+n+1; n+2; z)}{(n+1)!}\ . \end{aligned} \tag{B.6}$$

Por consiguiente, en estos valores excepcionales $\mathbf{F}(a, b; , c; z)$ corresponde al exponente $1 - c$ y no 0.

Una representación integral para $\mathbf{F}(a, b; c; z)$ se puede encontrar mediante el uso de la integral de la función Beta. Asuma que

$$Re\ c > Re\ b > 0,\ |z| < 1. \tag{B.7}$$

Usando el símbolo de Pochhammer (B.5), se tiene que

$$\mathbf{F}(a, b; c; z) = \tfrac{1}{\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} z^s \tfrac{(a)_s}{s!} \tfrac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{s=0}^{\infty} z^s frac(a)_s s! \int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c-b-1} dt, \tag{B.8}$$

donde tanto t^{b+s-1} y $(1-t)^{c-b-1}$ asumen sus principales valores.

Como $|z| < 1$, el M-test prueba que la serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{s!} z^s t^{b+s-1}(1-t)^{c-b-1} \tag{B.9}$$

converge uniformemente en cualquier intervalo compacto t dentro de $(0,1)$. Utilizando las condiciones (B.7) y haciendo uso del Teorema 8.1 (Cap. 2 en [6]), se sigue que, el orden de la suma y la integración en (B.8) pueden ser intercambiados. Esto produce el resultado deseado,

$$\mathbf{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-\alpha} dt. \tag{B.10}$$

La ecuación (B.10) se ha establecido en el supuesto de que $|z| < 1$. Pero, como función de z, la integral en el lado derecho converge uniformemente en cualquier dominio compacto que excluye todos los puntos del intervalo $[1,\infty)$. Por lo tanto, cuando $Re\ c > Re\ b > 0$ la integral (B.10) proporciona el valor principal de $\mathbf{F}(a,b;c;z)$, excepto a lo largo de $1 \leq z < \infty$.

De esta manera,

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-\alpha} dt. \tag{B.11}$$

Bibliografía

.

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I. 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover Publications.

[2] Albrecher, H., and Hipp, C. 2007. *Lundberg's Risk Process with Tax*. s.l., Blätter DGVFM 28: 13-28.

[3] Bowers, N., Gerber, H., and Nesbitt, C. 1986. *Actuarial Mathematics*. Itasca, Society of Actuaries.

[4] Bühlmann, H. 1970. *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York, Springer-Verlag.

[5] Gerber, H. and Shiu, E. 1998. *On the time value of ruin*. s.l., North American Actuarial Journal. 2: 48-78

[6] Olver, F. W. J. 1974. *Asymptotics and Special Functions*. New York and London, Academic Press, Inc.

[7] Panjer, H. H., and Willmot, G. E. 1992. *Insurance Risk Models*. s.l., Society of Actuaries.

[8] Rincón, L. 2011. *Introducción a la Teoría de Riesgo*. México, D.F, s.e. (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM).

[9] Simmons, G. F., and Robertson, J. S. 1991. *Differential equations with applications and historical notes*. 2a ed. New York, McGraw-Hill.