Semi fronteras en hiperespacios de continuos

Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Vicente Sánchez Gutiérrez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

16 de julio del 2012

Agradecimientos

Esta tesis pudo ser realizada gracias al apoyo de muchas personas y con estas líneas quiero expresarles un poco de mi gratitud.

Agradezco en primer lugar a mis padres, Ángel Sánchez Sánchez y Candelaria Patricia Gutiérrez Flores, por todo su apoyo y comprensión durante este largo camino.

De igual manera agradezco a mis hermanos, especialmente a mi hermana Flor que siempre me apoyo, aún cuando no lo merecia.

Támbien agradezco a mis asesores, el Dr. Rául Escobedo Conde y la Dra. María de Jesús López Toriz, por darme la oportunidad de trabajar con ellos, por el apoyo escolar y economico que me otorgaron, espero que este trabajo refleje un poco de este agradecimiento.

Gracias a todos los amigos que de una u otra forma ayudaron a que esta tesis pudiera ser escrita, especialmente a Benito, Areli, Bety, Manuel, Juan Carlos, Chus, Sergio, René y Lulu. De igual manera agradezco a los amigos del fut particularmente a Chava, Nacho, Adin, Javier y Shagy que tanto dentro y fuera de la cancha me ofrecieron su apoyo y amistad.

Finalmente agradezco a los doctores Ivan Martínez Ruiz, Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco, por haber aceptado dedicar una parte de su tiempo a revisar este trabajo.

Introducción

En esta tesis presentamos un estudio del concepto de semi frontera en hiperespacios de continuos. Este trabajo se ubica dentro de la topología de conjuntos, más precisamente, dentro de la teoría de los continuos y sus hiperespacios.

Un continuo es un espacio metrizable, compacto y conexo. La colección de todos los continuos contenidos en un continuo X se denota por $C(X)$ y, equipada con la topología de Vietoris o, equivalentemente, con la métrica de Hausdorff, se denomina el hiperespacio de los subcontinuos de X.

Notamos que si A es un elemento de $C(X)$, entonces $C(A)$ es naturalmente un subespacio del hiperespacio $C(X)$. La semi frontera de $C(A)$ es una parte de la frontera de $C(A)$ en $C(X)$, intuitivamente son los elementos de la frontera de $C(A)$ que son accesibles por trayectorias desde el exterior de $C(A)$, véase la Definición 2.2 de esta tesis. Esta noción fue introducida por A. Illanes en 1991, en [4], y ha sido explotada por varios autores para resolver diversas cuestiones en hiperespacios, véase por ejemplo [1], [6] y [7].

La meta principal de este trabajo es exponer detalladamente los resultados presentados en [4], elaborando un texto al alcance de los principiantes que incluye, además del estudio de semi fronteras en hiperespacios, una introducción a la teoría general de hiperespacios de espacios topológicos.

Organizamos la exposición en dos capítulos. En el primero, por una parte, presentamos elementos de la topología general, como los resultados de conexidad, en espacios Hausdorff compactos, conocidos como teoremas de golpes en la frontera, y dos resultados de naturaleza más conjuntista: el Lema de Alexander (caracterización de la compacidad con cubiertas contenidas en una subbase) y el Teorema de reducción de Brouwer (existencia de elementos maximales y minimales en colecciones de conjuntos) y, por otra parte, presentamos elementos de la teoría general de hiperespacios de espacios topológicos, iniciando con el estudio de la compacidad y la conexidad del hiperespacio de los subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico, con la topología de Vietoris, y mostrando su metrizabilidad, con la métrica de Hausdorff, en la clase de los espacios métricos compactos. También incluimos el análisis clásico de la convergencia de sucesiones con límites de conjuntos, y una prueba de la arco conexidad de los hiperespacios de continuos. El material de este primer capítulo es incluido para facilitar la lectura del segundo, y hacer esta monografía, en la medida de lo posible, autocontenida.

En el segundo capítulo presentamos nuestro estudio de semi fronteras en hiperespacios de continuos. Empezamos con resultados generales, que proporcionan condiciones para localizar elementos en la semi frontera. Luego, usando las semi fronteras, exponemos caracterizaciones de varias clases de continuos, a saber: el arco, los continuos que contienen n-odos, los continuos que no contienen triodos, los continuos localmente conexos y los hereditariamente indescomponibles. También notamos que la cerradura de la semi frontera del hiperespacio de cada sub-

continuo propio de un continuo X es un subcontinuo de $C(X)$, es decir, es un elemento del hiperespacio de subcontinuos de $C(X)$. Esto nos permite considerar la semi frontera en hiperespacios como una función definida en $C(X) - \{X\}$ con rango en $C(C(X))$. Demostramos que la continuidad de esta función implica que cada subcontinuo propio es unicoherente. Además, probamos que esta función no es continua para los continuos llamados dendroides. Terminamos esta tesis caracterizando a la circunferencia, como el único continuo arco conexo para el cual la función semi frontera es continua.

Vicente Sánchez Gutiérrez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Verano de 2012

Índice

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos

En este capítulo exponemos algunas nociones y resultados básicos de la topología general, y de la teoría de los continuos y sus hiperespacios. En la primera sección presentamos, entre otros, algunos teoremas relacionados con componentes de subconjuntos en espacios Hausdorff, compactos y conexos, conocidos como teoremas de golpes en la frontera. En la segunda sección presentamos la teoría básica de los hiperespacios de espacios topológicos.

1.1 Elementos de topología

En esta sección incluimos resultados relacionados con componentes (conexas) de subconjuntos en espacios topológicos, particularmente en espacios Hausdorff, compactos y conexos. También exponemos dos resultados fuertes de la topología general, de naturaleza más conjuntista: el Lema de Alexander (una caracterización de la compacidad) y el Teorema de reducción de Brouwer (existencia de elementos maximales y minimales en colecciones de conjuntos).

Notación. El interior, la frontera, y la cerradura de un subconjunto A de un espacio topológico X, se denotan por $\mathrm{int}(A)$, $Fr(A)$ y $\overline{A}$, respectivamente. El complemento de A en X se denota por $X-A$. Si A y B son conjuntos, entonces $A \approx B$ denota que A es homeomorfo a B. Si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ y $\bigcap \mathcal{A}$ denotan la unión y la intersección de los elementos de la familia $\mathcal{A}$, respectivamente. La cardinalidad de A es $|A|$. Si X es un espacio métrico y A es acotado, $\mathrm{diam}(A)$ denota el diámetro del conjunto A; y si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $B(x, \varepsilon)$ denota la bola en X con centro en el punto x y de radio ε. Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ denotan los conjuntos de los números naturales y números reales, respectivamente. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en un espacio topológico X y x es un punto de X, entonces $x_n \to x$ significa que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto x. Por otro lado, cuando escribimos, un espacio X significa que X es un espacio topológico.

1.1.1 Teoremas de golpes en la frontera

1.1 Definición. Una **componente** de un espacio topológico X es un subconjunto conexo maximal de X.

1.2 Observación. Notamos que si $p \in X$, entonces la unión de todos los subconjuntos conexos de X que tienen a p es una componente de X, la cual denotamos por $C(p)$, y referimos como la componente de p en X.

1.3 Definición. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. La casi componente de p en X, denotada por $Q(p)$, es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen al punto p.

1.4 Observación. Como la cerradura de un conjunto conexo es un conjunto conexo, se tiene que las componentes son conjuntos cerrados. También, como la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, se tiene que las casi componentes son conjuntos cerrados.

1.5 Proposición. El conjunto de las componentes de un espacio topológico X es una partición de X. También el conjunto de las casi componentes lo es.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $X = \cup\{C(p) : p \in X\}$. Ahora, si $C(p) \cap C(q) \neq \emptyset$, entonces $C(p) \cup C(q)$ es un conjunto conexo que contiene a los puntos p y q. Se sigue $C(p) \cup C(q) \subset C(p)$ y $C(p) \cup C(q) \subset C(q)$. Así, $C(p) = C(q)$. Esto prueba que la colección de las componentes es una partición del espacio.

Por otra parte, también es claro que $X = \cup\{Q(p) : p \in X\}$. Ahora sean $p, q \in X$ con $p \neq q$ y supongamos que $Q(p) \neq Q(q)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $Q(p) \not\subset Q(q)$. Consideremos $x \in Q(p) - Q(q)$. Luego, existe un conjunto abierto y cerrado en X, B, tal que $q \in B$ y $x \notin B$. Notemos que $p \notin B$. Se tiene que $p \in X - B$, donde $X - B$ es un conjunto abierto y cerrado en X, por lo cual $Q(p) \subset X - B$ y así $B \subset X - Q(p)$. Ahora, dado que B es un conjunto abierto y cerrado en X que contiene al punto q se sigue que $Q(q) \subset B \subset X - Q(p)$ lo que implica que $Q(q) \subset X - Q(p)$. Por lo tanto $Q(q) \cap Q(p) = \emptyset$. Así, la colección de las casi componentes es una partición de X.

$\square$

El resultado que sigue indica que la colección de las componentes de un espacio topológico es una partición más fina que la partición que origina la colección de las casi componentes.

1.6 Proposición. Cada componente de un espacio topológico X está contenida en una casi componente de X.

Demostración. Fijamos un punto $p \in X$ y consideramos su componente y su casi componente, $C(p)$ y $Q(p)$, respectivamente. Probaremos que $C(p) \subset Q(p)$. Para esto, supongamos que existe un punto $x \in C(p) - Q(p)$. Existe un conjunto abierto y cerrado en X, digamos A, tal que $p \in A$ y $x \notin A$. Se tiene que $A \cap C(p)$ es un subconjunto abierto y cerrado de $C(p)$, no vacío. Note que $x \in C(p)$ y $x \notin A \cap C(p)$, así $A \cap C(p)$ es un subconjunto propio de $C(p)$. Esto contradice la conexidad de $C(p)$. □

El ejemplo que sigue muestra que la inclusión de una componente en una casi componente puede ser propia.

1.7 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por L_n al segmento del plano euclidiano con puntos extremos $x_n = (0, \frac{1}{n})$ y $y_n = (1, \frac{1}{n})$. Sean $p = (0, 0)$ y $q = (1, 0)$. Consideremos el espacio

$$X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n) \cup \{p, q\}.$$

Se tiene que $C(p) = \{p\}$ y $Q(p) = \{p, q\}$.

Demostración. Para demostrar que $Q(p) = \{p, q\}$, probaremos las propiedades en (a) y (b) enunciadas a continuación.

(a) Todo conjunto abierto y cerrado en X que contiene al punto p también contiene al punto q.

Consideramos un conjunto abierto y cerrado, A, en X tal que $p \in A$. Como $x_n \to p$ y A es un conjunto abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $x_n \in A$. Así, para todo $n \geq N$, $A \cap L_n$ es un conjunto no vacío, abierto y cerrado en L_n, por lo que $A \cap L_n = L_n$ (ya que L_n es conexo), es decir, $L_n \subset A$. Se sigue que, para todo $n \geq N$, $y_n \in A$. Luego, como $y_n \to q$ y A es cerrado, se obtiene que $q \in A$.

(b) Si $x \in X - \{p, q\}$, entonces $x \notin Q(p)$.

Sea $x \in X - \{p, q\}$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_m$. Tomemos $r \in \mathbb{R}$ con $m < r < m + 1$, y denotemos $A = (\mathbb{R} \times (-\frac{1}{r}, \frac{1}{r})) \cap X$. Notemos que $A = (\mathbb{R} \times [-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}]) \cap X$. Así, A es un conjunto abierto y cerrado en X que tiene a p y no a x. Así, $x \notin Q(p)$.

Por otra parte, como $C(p) \subset Q(p)$ y $Q(p)$ no es conexo, es claro que $C(p) = \{p\}$. □

1.8 Teorema. En cada espacio Hausdorff compacto las componentes coinciden con las casi componentes.

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff compacto y p un punto en X. Por la Proposición 1.6, tenemos que $C(p) \subset Q(p)$. Para demostrar que $Q(p) \subset C(p)$, basta probar que $Q(p)$ es conexo.

Supongamos que $Q(p)$ no es conexo, es decir, existen conjuntos, H y K, cerrados en $Q(p)$, y así cerrados en X (Observación 1.4), ajenos y no vacíos tales que $Q(p) = H \cup K$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in H$. Como X es Hausdorff compacto, se tiene que X es un espacio normal [10, Teorema 2.4, p. 198]. Así, existen conjuntos abiertos y ajenos, U y V, en X tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Denotemos $L = X - (U \cup V)$. Notemos que $L \cap Q(p) = \emptyset$, además, $L \neq \emptyset$, pues de lo contrario $X = U \cup V$, por lo cual U es un conjunto abierto y cerrado en X y $p \in U$, así $Q(p) \subset U$, lo que implica que $K \subset U$ y esto contradice que U y V son ajenos.

Ahora, para cada punto $y \in L$, se tiene que $y \notin Q(p)$, así existe un conjunto abierto y cerrado A_y en X, tal que $p \in A_y$ y

$y \in X - A_y$. Luego, $L \subset \cup\{X - A_y : y \in L\}$, donde A_y es como se indicó. Dado que L es cerrado en X y X es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y puntos $y_1, ..., y_n \in L$ tales que $L \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X - A_{y_i})$.

Denotemos $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i}$ y $B = X - A$. Como cada A_{y_i} es un conjunto abierto y cerrado en X, y contiene al punto p, tenemos que $Q(p) \subset A$. Notemos que A es un conjunto abierto y cerrado en X.

Denotemos $C = U \cap A$. Como A y U son abiertos en X, se tiene que C es abierto en X. Veamos que C también es cerrado en X. Para esto, notemos que $L \subset B$ y $A = X - B \subset X - L = U \cup V$, luego $C = (X - V) \cap A$ y, en consecuencia, C es cerrado en X. Entonces C es un conjunto abierto y cerrado en X que contiene al punto p, de donde $Q(p) \subset C$, es decir, $H \cup K \subset U \cap A \subset U$, lo cual es una contradicción pues K es un conjunto no vacío contenido en V y $U \cap V = \emptyset$. Esto demuestra que $Q(p)$ es conexo. $\square$

1.9 Teorema. (cable cortado) Si A y B son conjuntos cerrados en un espacio Hausdorff compacto X tales que, para cada conjunto conexo C en X se tiene que $C \cap A = \emptyset$ o $C \cap B = \emptyset$, entonces existen conjuntos ajenos y cerrados en X, H y K, tales que $X = H \cup K$, $A \subset H$ y $B \subset K$.

Demostración. Sean X, A y B como se indica.

Afirmamos que para todo $a \in A$, existe un conjunto abierto y cerrado en X, H_a, tal que $a \in H_a$ y $H_a \cap B = \emptyset$.

Para probar esta afirmación, notemos que, por hipótesis, dado $a \in A$ se tiene que $C(a) \cap B = \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.8, $Q(a) \cap B = \emptyset$. Por la definición de casi componente, se sigue que

$B \subset X - \cap\{H \subset X : H$ es abierto y cerrado en X con $a \in H\}$. Así, $B \subset \cup\{X - H : H$ es abierto y cerrado en X con $a \in H\}$.

Como B es cerrado en el compacto X, se tiene que B es compacto. Así, existen $k \in \mathbb{N}$ y conjuntos abiertos y cerrados en X, $H_1, ..., H_k$, que contienen al punto a y $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} (X - H_i)$. Es decir, $B \subset X - (\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i)$.

Denotemos $H_a = \bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$. Notemos que H_a es un conjunto abierto y cerrado en X tal que $a \in H_a$ y $H_a \cap B = \emptyset$. Así, la afirmación está demostrada.

Ahora, notemos que $A \subset \cup\{H_a : a \in A\}$, donde H_a es como en la afirmación demostrada. Por la compacidad de A, existen $m \in \mathbb{N}$ y puntos $a_1, ..., a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} H_{a_j}$. Denotemos $H = \bigcup\limits_{j=1}^{m} H_{a_j}$ y $K = X - H$. Es fácil ver que H y K satisfacen la conclusión del teorema. □

1.10 Teorema. (primer teorema de golpes en la frontera) Si U es un conjunto abierto, propio y no vacío en un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, y K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.

Demostración. Considerando las hipótesis indicadas, supongamos que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Notemos que si C es un conjunto conexo en $\overline{U}$ tal que $C \cap K \neq \emptyset$, entonces $C \subset K$ y, en consecuencia, $C \cap Fr(U) = \emptyset$. Esto significa que, para cada conjunto conexo C en $\overline{U}$ se tiene que $C \cap K = \emptyset$ o $C \cap Fr(U) = \emptyset$. Luego, por el teorema del cable cortado, Teorema 1.9, existen conjuntos ajenos y cerrados en $\overline{U}$, M_1 y M_2, tales que $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, $K \subset M_1$ y $Fr(U) \subset M_2$.

Denotemos $M_3 = M_2 \cup (X - U)$. En lo que sigue vamos a demostrar que M_1 y M_3 son una disconexión de X.

(a) Notemos que $M_1 \cup M_3 = M_1 \cup M_2 \cup (X - U) = \overline{U} \cup (X - U) \supseteq \overline{U} \cup (X - \overline{U}) = X$. Se concluye que $X = M_1 \cup M_3$.

(b) Notemos que M_1 y M_2 son cerrados en X ya que M_1 y M_2 son cerrados en $\overline{U}$ y $\overline{U}$ es cerrado en X. Ahora, como U es abierto en X se tiene que $X - U$ es cerrado en X. Así M_3 es cerrado en X.

(c) M_1 y M_3 son no vacíos: dado que $K \neq \emptyset$ y $K \subset M_1$, se tiene que $M_1 \neq \emptyset$; además, U es un subconjunto abierto propio de X y $X - U \subset M_3$, así $M_3 \neq \emptyset$.

(d) Por último veamos que M_1 y M_3 son ajenos: notemos que $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap [M_2 \cup (X - U)] = (M_1 \cap M_2) \cup [M_1 \cap (X - U)] = M_1 \cap (X - U) \subset \overline{U} \cap \overline{(X - U)} = Fr(U) \subset M_2$, es decir, $M_1 \cap M_3 \subset M_2$, de donde $M_1 \cap M_3 = \emptyset$, ya que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Hemos demostrado que M_1 y M_3 constituyen una separación de X, lo cual es una contradición con la conexidad de X. Esta contradicción prueba que $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. $\square$

1.11 Teorema. Si A es un conjunto compacto, conexo, propio y no vacío, en un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, y U es un conjunto abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe un conjunto compacto, conexo, B, en X tal que $A \subset B \subset U$ y $A \neq B$.

Demostración. Sean A, U y X como se indican. Dado que X es Hausdorff y compacto se tiene que X es normal. Ahora, como A es cerrado en X, existe un conjunto abierto, V, en X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Supongamos que $V \neq X$ (en otro caso, la conclusión se tiene haciendo $B = X$). Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A (B existe porque $A \subset \overline{V}$ y A es conexo). Es claro que B es compacto, pues B es cerrado en X y X es compacto. También se tiene que $A \subset B \subset U$. Además, por el primer teorema de golpes en la frontera, Teorema 1.10, se tiene que $B \cap (X - V) \neq \emptyset$. Así, $A \neq B$. $\square$

1.12 Teorema. (segundo teorema de golpes en la frontera) Si E es un subconjunto propio y no vacío, de un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, y K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap \overline{X - E} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\overline{K} \cap \overline{X - E} = \emptyset$. Dado que $K \neq \emptyset$ y E es un subconjunto propio de X tenemos que $\overline{K} \neq \emptyset$ y $\overline{X - E} \neq \emptyset$. Notemos que $\overline{K}$ es un conjunto compacto, conexo y propio en X. Denotemos $U = X - \overline{X - E}$. Por el Teorema 1.11, existe un conjunto compacto y conexo, B, en X tal que $\overline{K} \subset B \subset U$ y $\overline{K} \neq B$. Por otro lado, como $X - E \subset X - \operatorname{int}(E) = \overline{X - E}$, se tiene que $U \subset E$. En consecuencia, B es un conjunto conexo en E que contiene propiamente a K. Esto contradice el hecho de que K es una componente de E . Esta contradición demuestra que $\overline{K} \cap \overline{X - E} \neq \emptyset$. $\square$

1.13 Teorema. (tercer teorema de golpes en la frontera) Sean E un subconjunto propio y no vacío de un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, y K una componente de E. Si E es abierto en X, entonces $\overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$; y si E es cerrado en X, entonces $K \cap \overline{X - E} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que E es abierto en X, se tiene que $X - E$ es cerrado en X, es decir, $X - E = \overline{X - E}$. Luego, por el segundo teorema de golpes en la frontera, Teorema 1.12, se tiene que $\overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$.

Por otro lado, si E es cerrado en X, entonces K es cerrado en X, es decir, $K = \overline{K}$. Luego, por el segundo teorema de golpes en la frontera, Teorema 1.12, se tiene que $K \cap \overline{X - E} \neq \emptyset$. $\square$

1.14 Lema. Sean A y B subconjuntos compactos, conexos, propios y no vacíos, de un espacio Hausdorff, compacto y conexo X tales que $A \subset B$. Si K es una componente de $X - B$ tal que $\overline{K} - K \subset A$, entonces $K \cup A$ es un conjunto compacto y conexo en X.

Demostración. Como B es un subconjunto cerrado, propio y no vacío de X, se tiene que $X - B$ es un subconjunto abierto, propio, no vacío de X. Luego, por el tercer teorema de golpes en la frontera, Teorema 1.13, se tiene que $\overline{K} \cap [X - (X - B)] = \overline{K} \cap B \neq \emptyset$. Se sigue que $\overline{K} - K \neq \emptyset$ pues de lo contrario, $\overline{K} = K \subset X - B$, de donde $\overline{K} \cap B = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{K} - K \neq \emptyset$. Con esto y la hipótesis de este lema se tiene que $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$. En consecuencia, $\overline{K} \cup A$ es un conjunto conexo en X. Por otra parte, notamos que $\overline{K} \cup A = (\overline{K} - K) \cup K \cup A = K \cup A$. Se sigue que $K \cup A$ es un conjunto cerrado y conexo en X. $\square$

1.15 Teorema. Si A es un subconjunto compacto, conexo y propio de un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, y K es una componente de $X - A$, entonces $K \cup A$ es un conjunto compacto y conexo en X.

Demostración. Considerando las hipótesis indicadas, vamos a demostrar que $\overline{K} - K \subset A$. Para esto, supongamos que existe un punto $x \in \overline{K} - K$ tal que $x \in X - A$. Se tiene que $x \in \overline{K} \cap (X - A)$. Como K es una componente de $X - A$, se tiene que K es un conjunto cerrado en $X - A$, por lo cual $\overline{K} \cap (X - A) = K$. Se sigue que $x \in K$, lo cual es una contradicción pues $x \in \overline{K} - K$. Esto prueba que $\overline{K} - K \subset A$. Luego, tomando $B = A$ en el Lema 1.14, se obtiene la conclusión de este teorema. $\square$

1.16 Definición. Una colección de subconjuntos $\mathcal{F}$ de un espacio X es una **cadena** en X si para cualesquiera elementos A y B en $\mathcal{F}$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

1.17 Teorema. Si $\mathcal{F}$ es una cadena de conjuntos cerrados en un espacio compacto X, y U es un conjunto abierto en X tal que $\bigcap \mathcal{F} \subset U$, entonces existe un elemento A en $\mathcal{F}$ tal que $A \subset U$.

Demostración. Sean X y $\mathcal{F}$ como se indican. Supongamos que, para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \not\subset U$. Denotemos $\mathcal{A} = \{A - U : A \in \mathcal{F}\}$. Se tiene que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Veamos que la colección $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita: como $\mathcal{F}$ es una cadena, para cada subcolección finita, $A_1, ..., A_n$, de elementos de $\mathcal{F}$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $A_i \subset A_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, luego, $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (A_j - U) = A_i - U \neq \emptyset$.

Ahora, como X es compacto, se sigue que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, [10, Teorema 5.9, p. 170]. Luego, puesto que $\bigcap \mathcal{A} = (\bigcap \mathcal{F}) - U$, se obtiene que $\bigcap \mathcal{F} \not\subset U$. Así, el teorema está demostrado. $\square$

1.18 Corolario. Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de espacios Hausdorff y compactos; y U es un conjunto abierto en X_1 tal que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para todo $n \geq N$.

Demostración. Notemos que la colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de subconjuntos cerrados de X_1, así, el corolario se sigue directamente del Teorema 1.17. $\square$

1.19 Teorema. Si $\mathcal{F}$ es una cadena de subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos, de un espacio Hausdorff, compacto y conexo X, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto compacto, conexo y no vacío en X.

Demostración. Como la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto cerrado y, en consecuencia, es un conjunto compacto en X. Por otra parte, notemos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita (ya que es una cadena de conjuntos no vacíos), luego, por la compacidad de X, se obtiene que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, [10, Teorema 5.9, p. 170]. Así, resta mostrar que $\bigcap \mathcal{F}$ es conexo.

Supongamos que $\bigcap \mathcal{F} = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados y ajenos. Probaremos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Como X es Hausdorff y compacto, se tiene que X es un espacio normal, así podemos considerar conjuntos abiertos y ajenos, U y V, en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Se tiene que $\bigcap \mathcal{F} \subset U \cup V$ y $U \cup V$ es un conjunto abierto en X. Luego, por el Teorema 1.17, existe un elemento $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset U \cup V$. Como F es conexo y U y V son abiertos ajenos, se tiene que $F \subset U$ o $F \subset V$. Sin perder generalidad, suponemos que $F \subset U$. Ahora, puesto que $\bigcap \mathcal{F} \subset F$, se tiene que $A \cup B \subset F$ y, en consecuencia, $B \subset U$. Así, $B \subset U \cap V = \emptyset$, por lo cual $B = \emptyset$. Esto prueba que $\bigcap \mathcal{F}$ es conexo. $\square$

1.1.2 Teoremas de topología de conjuntos

Finalizamos esta subsección con dos resultados fundamentales de la topología general: el Lema de Alexander, el cual usaremos en la sección que sigue para demostrar que los espacios compactos tienen hiperespacio compacto (Teorema 1.31) y el Teorema de reducción de Brouwer, el cual usaremos en el capítulo siguiente para demostrar la existencia de elementos minimales en las semi fronteras de los hiperespacios (Teorema 2.19) y para demostrar la existencia de arcos maximales en dendroides (Teorema 2.39). Para esto, conviene recordar los conceptos de elemento maximal y elemento minimal en conjuntos parcialmente ordenados (la noción de orden parcial puede consultarse en [2, p. 4] o en [10, p. 24-28]).

1.20 Definición. Sean α y β elementos de un conjunto parcialmente ordenado, Γ, por una relación $\leq$. Decimos que α es un elemento maximal en Γ si, para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $\alpha \leq \gamma$, se tiene que $\alpha = \gamma$. Decimos que β es un elemento minimal en Γ si, para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \leq \beta$, se tiene que $\gamma = \beta$.

1.21 Teorema. (Lema de Alexander) Un espacio es compacto si, y sólo si, toda cubierta del espacio, con elementos de una subbase dada, tiene una subcubierta finita.

Demostración. Que la condición en el teorema es necesaria se sigue inmediatamente, porque los elementos de cualquier subbase son conjuntos abiertos.

Para demostrar que la condición es suficiente, consideramos un espacio X y una subbase $\mathcal{S}$ para la topología de X; supongamos que X no es compacto y fijemos una cubierta abierta $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{W}$ no tiene subcubiertas finitas.

Sea $\mathbb{H}$ la colección de todas las cubiertas abiertas de X que no tienen subcubiertas finitas. Observemos que $\mathbb{H}$ no es vacío, ya que $\mathcal{W} \in \mathbb{H}$.

Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{H}, \leq)$, donde el orden parcial es la inclusión, es decir, dados $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{H}$, se tiene que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si, y sólo si, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Vamos a demostrar que $\mathbb{H}$ tiene un elemento maximal (naturalmente, para esto usaremos el Lema de Zorn, [2, Proposición 0.D.3, p. 7]).

Sea $\mathbb{D}$ una cadena en $\mathbb{H}$, es decir, $\mathbb{D}$ es un subconjunto de $\mathbb{H}$ tal que cualesquiera dos de sus elementos son comparables con la inclusión. Denotemos $\mathcal{F} = \bigcup \mathbb{D}$. Es claro que, para todo $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$, se tiene que $\mathcal{D} \leq \mathcal{F}$. Vamos a probar que $\mathcal{F} \in \mathbb{H}$ (así, tendremos que $\mathcal{F}$ es una cota superior de la cadena $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}$).

Es claro que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{F} \notin \mathbb{H}$, es decir, supongamos que $\mathcal{F}$ tiene una subcubierta finita. Esto significa que existen elementos, $V_1, ..., V_n$, de $\mathcal{F}$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Por otro lado, por la definición de $\mathcal{F}$, existen elementos en la cadena $\mathbb{D}$, digamos $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, tales que $V_i \in \mathcal{D}_i$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\mathbb{D}$ es una cadena, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_j$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se sigue que los elementos $V_1, ..., V_n$ pertenecen a $\mathcal{D}_j$, lo cual significa que $\mathcal{D}_j$ tiene una subcubierta finita. Esto es una contradicción, ya que $\mathcal{D}_j \in \mathbb{H}$. Así, hemos demostrado que $\mathcal{F}$ pertenece a la colección $\mathbb{H}$.

Ahora, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathbb{H}$, el cual denotamos por $\mathcal{V}$. Demostraremos la afirmación que sigue.

Afirmación: si $M \in \mathcal{V}$ y $V_1, ..., V_k$ son conjuntos abiertos en

X tales que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset M$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $V_i \in \mathcal{V}$.

Para probar esta afirmación, supongamos que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $V_i \notin \mathcal{V}$. Se sigue que cada $\mathcal{V} \cup \{V_i\}$ es una cubierta abierta de X que contiene propiamente a la cubierta $\mathcal{V}$. Dado que $\mathcal{V}$ es un elemento maximal de $\mathbb{H}$, se tiene que $\mathcal{V} \cup \{V_i\}$ no pertenece a la colección $\mathbb{H}$, por lo cual cada una de estas cubiertas tiene una subcubierta finita. Se sigue, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe un número $n_i \in \mathbb{N}$ y elementos, $M_{i1}, ..., M_{in_i}$, en $\mathcal{V}$ tales que

$$X = V_i \cup M_{i1} \cup ... \cup M_{in_i}.$$

De aquí se obtiene que

$$X = (\bigcap_{i=1}^{k} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{ij}).$$

Luego, puesto que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset M$, se sigue que

$$X = M \cup (\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{ij}).$$

Esto significa que la colección $\{M\} \cup \{M_{ij} : 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n_i\}$ es una subcubierta finita de la cubierta $\mathcal{V}$. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{V} \in \mathbb{H}$. Así la afirmación está mostrada.

Ahora, vamos a demostrar que la colección $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ es una cubierta del espacio X. Dado $x \in X$, existe $M \in \mathcal{V}$ tal que $x \in M$. Como $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de X, existen $k \in \mathbb{N}$ y elementos, $S_1, \ldots, S_k$, en $\mathcal{S}$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} S_i \subset M$.

Luego, por la afirmación anterior, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $S_i \in \mathcal{V}$. Se obtiene que $x \in S_i \cap M$ y $S_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$. Así, $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ es una cubierta de X.

Por lo anterior, tenemos que $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ es una cubierta de X cuyos elementos pertenecen a la subbase $\mathcal{S}$, y no tiene subcubiertas finitas (pues está contenida en $\mathcal{V}$, que es un elemento de $\mathbb{H}$).

En resumen, hemos demostrado que si un espacio X no es compacto y $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de X, entonces existe una cubierta de X, formada por elementos de $\mathcal{S}$ que no tiene subcubiertas finitas. $\square$

1.22 Teorema. (Teorema de reducción de Brouwer) Sean X un espacio con una base numerable y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos cerrados de X, ordenada parcialmente por la inclusión de conjuntos.

(a) Si para toda sucesión decreciente en $\mathcal{C}$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$, entonces existe un elemento minimal en $\mathcal{C}$.

(b) Si para toda sucesión creciente en $\mathcal{C}$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe un elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset C$, entonces existe un elemento maximal en $\mathcal{C}$.

Demostración. (a) Fijemos una base numerable para X, digamos $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, y un elemento $C_0 \in \mathcal{C}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : C \subset C_0 \cap (X - B_1)\}.$$

Si $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$, entonces fijamos un elemento $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y, si $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, entonces denotamos $C_1 = C_0$.

Ahora, supongamos que se han determinado n elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, C_2, \dots, C_n$, tales que $C_i \subset C_{i-1} \subset C_0$ y, si C_i está contenido propiamente en C_{i-1}, entonces $C_i \cap B_i = \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_n = \{C \in \mathcal{C} : C \subset C_n \cap (X - B_{n+1})\}.$$

Si $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$, entonces fijamos un elemento $C_{n+1} \in \mathcal{C}_n$ y, si $\mathcal{C}_n = \emptyset$, entonces denotamos $C_{n+1} = C_n$.

De este modo, inductivamente, hemos determinado una sucesión decreciente, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{C}$ con la propiedad adicional de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si C_{n+1} está contenido propiamente en C_n, entonces $C_{n+1} \cap B_{n+1} = \emptyset$.

Denotemos $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Por hipótesis se tiene que $E \in \mathcal{C}$. Vamos a probar que E es un elemento minimal en $\mathcal{C}$.

Para esto supongamos lo contrario y fijemos $D \subset E$ con $D \neq E$ tal que $D \in \mathcal{C}$. Fijemos un punto $x \in E - D$. Como D es cerrado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k \subset (X - D)$. Notemos que $B_k \cap E \neq \emptyset$, $B_k \cap D = \emptyset$ y $D \subset E \subset C_{k-1}$. Se sigue que $D \subset C_{k-1} \cap (X - B_k)$, así, $\mathcal{C}_{k-1} \neq \emptyset$. Luego, C_k está determinado de modo que $C_k \in \mathcal{C}$ y $C_k \subset C_{k-1} \cap (X - B_k)$. Dado que $E \subset C_k \subset (X - B_k)$, se obtiene que $E \cap B_k = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Esta contradicción demuestra que E es un elemento minimal en $\mathcal{C}$.

(b) Como en (a), fijamos una base numerable para X, digamos $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, y un elemento $C_0 \in \mathcal{C}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : C_0 \subset C \text{ y } C \cap B_1 \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{C}_0$ no es vacío fijamos un elemento $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y si la colección $\mathcal{C}_0$ es vacía definimos $C_1 = C_0$.

Ahora, supongamos que se han determinado n elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tales que $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n$ y, si C_{i-1} está contenido propiamente en C_i, entonces $C_i \cap B_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_n = \{C \in \mathcal{C} : C_n \subset C \text{ y } C \cap B_{n+1} \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$, entonces fijamos un elemento $C_{n+1} \in \mathcal{C}_n$ y, si $\mathcal{C}_n = \emptyset$, entonces denotamos $C_{n+1} = C_n$.

De este modo, inductivamente, hemos determinado una sucesión creciente, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{C}$ con la propiedad adicional de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si C_{n-1} está contenido propiamente en C_n, entonces $C_n \cap B_n \neq \emptyset$.

Por hipótesis, existe un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset C$. Demostraremos que C es un elemento maximal en $\mathcal{C}$.

Supongamos, por el contrario, que existe un elemento D en $\mathcal{C}$ que contiene propiamente a C y fijemos un punto $x \in D - C$. Se tiene que $X - C$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto x. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset X - C$. Por una parte, como $C_m \subset C$ y $C \cap B_m = \emptyset$, se tiene que $C_m \cap B_m = \emptyset$. Por otra parte, puesto que $C_{m-1} \subset C$ y C está contenido en D, entonces C_{m-1} está contenido en D. Además, como $x \in D \cap B_m$, se tiene que $D \cap B_m \neq \emptyset$. Luego, D es un elemento de la colección $\mathcal{C}_{m-1}$. Esto significa que la colección $\mathcal{C}_{m-1}$ no es vacía. Luego, el elemento C_m está determinado de tal forma que $C_m \cap B_m \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. Esta contradicción demuestra que C es un elemento maximal en $\mathcal{C}$. $\square$

1.2 Elementos de hiperespacios de conjuntos

En esta parte, presentamos elementos básicos de la teoría de hiperespacios de espacios topológicos, iniciando con la exposición de la topología de Vietoris y el estudio de la compacidad y la conexidad del hiperespacio de los subconjuntos cerrados no vacíos con esta topología. Además, mostramos la metrizabilidad de la topología de Vietoris, con la métrica de Hausdorff, en la clase de los espacios métricos compactos. También incluimos el análisis clásico de la convergencia de sucesiones con límites de conjuntos y una prueba de la arco conexidad de los hiperespacios de continuos.

1.2.1 Topología de Vietoris

Aquí exponemos la topología de Vietoris para la familia de subconjuntos cerrados, no vacíos, de un espacio topológico. Primero consideramos la siguiente notación.

1.23 Notación. Para un espacio topológico X, denotamos

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío en } X\}.$$

1.24 Notación. Para un subconjunto U de un espacio X, denotamos

$$U^+ = \{A \in 2^X : A \subset U\} \;\text{ y }\; U^- = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

1.25 Definición. Dado un espacio X, la topología de Vietoris es la topología en 2^X que tiene como subbase a la colección $\mathcal{S}$ definida por

$$\mathcal{S} = \{U^+ : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{V^- : V \text{ es abierto en } X\}.$$

1.26 Definición. El hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio X es el conjunto 2^X con la topología de Vietoris.

1.27 Notación. Para un espacio X, la topología de Vietoris del hiperespacio 2^X es denotada por τ_V.

1.28 Observación. Una base, $\beta_{\mathcal{S}}$, para la topología de Vietoris del hiperespacio 2^X de un espacio X, se describe como la colección de las intersecciones finitas de elementos de la colección $\mathcal{S}$. Es decir, los elementos de la base $\beta_{\mathcal{S}}$ son de la forma

$$U_1^+ \cap \cdots \cap U_n^+ \cap V_1^- \cap \cdots \cap V_m^- \tag{1.1}$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$ y U_i y V_j son conjuntos abiertos en X para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

A continuación vemos otra forma de determinar los elementos básicos de la topología de Vietoris. Para esto, consideramos la notación que sigue.

1.29 Notación. Para una colección finita de subconjuntos de un espacio X, digamos $E_1, ..., E_n$, denotamos $\langle E_1, ..., E_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y $A \cap E_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}\}$.

También denotemos $\beta_V = \{\langle W_1, ..., W_n \rangle : n \in \mathbb{N}$ y W_i es abierto en X para todo $i \in \{1, ..., n\}\}$.

1.30 Teorema. Para un espacio X, la colección β_V es una base para la topología de Vietoris del hiperespacio 2^X.

Demostración. Probaremos que $\beta_V = \beta_{\mathcal{S}}$, donde $\beta_{\mathcal{S}}$ es la base de τ_V, que se indica en la Observación 1.28.

Dado $\langle W_1, ..., W_n\rangle \in \beta_V$, denotemos $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Notemos que $\langle W_1, ..., W_n\rangle = W^+ \cap W_1^- \cap W_2^- \cap \cdots \cap W_n^-$. Así, $\langle W_1, ..., W_n\rangle \in \beta_{\mathcal{S}}$. Por lo tanto $\beta_V \subset \beta_{\mathcal{S}}$.

Ahora, para mostrar que $\beta_{\mathcal{S}} \subset \beta_V$ probaremos lo que se indica en (a) y (b):

(a) Se tiene que $\mathcal{S} \subset \beta_V$: esto resulta porque para cualesquiera conjuntos abiertos, U y V, en X, $U^+ = \langle U\rangle$ y $V^- = \langle V, X\rangle$.

(b) Se tiene que β_V es cerrado bajo intersecciones finitas: para justificar esto, dados dos elementos de β_V, digamos $\langle W_1, ..., W_n\rangle$ y $\langle O_1, ..., O_m\rangle$ denotemos $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ y $O = \bigcup_{i=1}^{m} O_i$.

Probaremos la siguiente afirmación:

La intersección $\langle W_1, ..., W_n\rangle \cap \langle O_1, ..., O_m\rangle$ coincide con el conjunto

$$\langle W \cap O_1, ..., W \cap O_m, W_1 \cap O, ..., W_n \cap O\rangle. \tag{1.2}$$

Para probar esta afirmación, primero notemos que

$$(W \cap O_1) \cup \cdots \cup (W \cap O_m) \cup (W_1 \cap O) \cup \cdots \cup (W_n \cap O) =$$

$$[W \cap (\bigcup_{j=1}^{m} O_j)] \cup [(\bigcup_{i=1}^{n} W_i) \cap O)] =$$

$$(W \cap O) \cup (W \cap O) = W \cap O. \tag{1.3}$$

Ahora, dado $A \in \langle W_1, ..., W_n \rangle \cap \langle O_1, ..., O_m \rangle$ se tiene que $A \in \langle W_1, ..., W_n \rangle$ y $A \in \langle O_1, ..., O_m \rangle$, así A es un elemento de 2^X tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, $A \cap W_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} O_j$ y $A \cap O_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$. Se sigue que $A \in 2^X$, $A \subset (\bigcup_{i=1}^{n} W_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} O_j)$, $A \cap W_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y $A \cap O_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$, es decir, $A \in 2^X$, $A \subset W \cap O$, $A \cap (W \cap O_j) \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$ y $A \cap (O \cap W_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Con esto, y lo indicado en (1.3), se sigue que

$$A \in \langle W \cap O_1, ..., W \cap O_m, W_1 \cap O, ..., W_n \cap O \rangle.$$

Por otro lado, si $B \in \langle W \cap O_1, ..., W \cap O_m, W_1 \cap O, ..., W_n \cap O \rangle$, entonces B es un elemento de 2^X y, por lo que se indica en (1.3), $B \subset W$ y $B \subset O$. Además, $B \cap (W \cap O_j) \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$, y $B \cap (W_i \cap O) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, así $B \cap W_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y $B \cap O_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$. Esto significa que $B \in \langle W_1, ..., W_n \rangle \cap \langle O_1, ..., O_m \rangle$.

De esta manera, hemos demostrado la afirmación en (1.2), la cual demuestra lo indicado en (b).

Finalmente, con (a) y (b), y la definición de $\beta_{\mathcal{S}}$, se obtiene que $\beta_{\mathcal{S}} \subset \beta_V$. Con todo, $\beta_V = \beta_{\mathcal{S}}$. $\square$

1.31 Teorema. El espacio X es compacto si, y sólo si, el hiperespacio 2^X es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es compacto. Consideramos la subbase $\mathcal{S}$ de la topología de Vietoris en 2^X, dada en la Definición 1.25. Por el lema de Alexander (Teorema 1.21), basta mostrar que cualquier cubierta de 2^X formada por elementos de $\mathcal{S}$, tiene una subcubierta finita.

Fijemos una cubierta de 2^X, digamos $\mathcal{U}$, formada por elementos de la subbase $\mathcal{S}$. Podemos denotar $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$, donde cada elemento de $\mathcal{U}^+$ es de la forma U^+ para algún conjunto abierto U en X, y cada elemento de $\mathcal{U}^-$ es de la forma V^- para algún conjunto abierto V en X. En lo que sigue consideremos dos casos.

(1) La colección $\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\}$ es una cubierta de X: en este caso existe una colección finita de conjuntos abiertos en X, $V_1, ..., V_n$, tales que $V_i^- \in \mathcal{U}^-$, $i \in \{1, ..., n\}$, y $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Ahora, notamos que si $A \in 2^X$, entonces $A \cap V_i \neq \emptyset$, para algún $i \in \{1, ..., n\}$, así $A \in V_i^-$. Se sigue que la colección $\{V_1^-, ..., V_n^-\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

(2) La colección $\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\}$ no es una cubierta de X: en este caso, denotamos $F = X - \cup\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\}$ y notamos que $F \in 2^X$. Además, por la definición de F, si V es un abierto en X y $V^- \in \mathcal{U}^-$, entonces $F \cap V = \emptyset$, así, $F \notin V^-$. Esto significa que F no pertenece a ningún elemento de la colección $\mathcal{U}^-$. Luego, puesto que $\mathcal{U}$ cubre a 2^X, se tiene que F pertenece a algún elemento de la colección $\mathcal{U}^+$. Es decir, existe un conjunto abierto en X, U_F, tal que $F \in U_F^+ \in \mathcal{U}^+$. Se tiene que $F \subset U_F$. Es decir, $X - \cup\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\} \subset U_F$. Así, $X = U_F \cup (\cup\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\})$, o sea que la colección $\{V : V^- \in \mathcal{U}^-\} \cup \{U_F\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, por la compacidad de X, existe una colección finita de conjuntos abiertos en X, $V_1, ..., V_m$, tales

que $V_i^- \in \mathcal{U}^-$, $i \in \{1, ..., m\}$, y $X = U_F \cup (\bigcup_{i=1}^{m} V_i)$.

Ahora, si $A \in 2^X$ y $A \notin V_i^-$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$, entonces $A \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_i) = \emptyset$. Se tiene que $A \subset U_F$, es decir, $A \in U_F^+$. Esto demuestra que la colección $\{V_1^-, ..., V_m^-\} \cup \{U_F^+\}$ es una subcubierta finita de la cubierta $\mathcal{U}$.

Hemos probado que la compacidad de X implica la compacidad del hiperespacio 2^X.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio tal que su hiperespacio 2^X es compacto y consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Denotemos $\mathcal{U}^- = \{U^- : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que $\mathcal{U}^-$ es una cubierta abierta de 2^X, porque si $A \in 2^X$ fijando un punto $a \in A$, determinamos un elemento U de $\mathcal{U}$ tal que $a \in U$, así $A \cap U \neq \emptyset$ es decir $A \in U^-$.

Ahora, por la compacidad de 2^X, existe una colección finita de elementos de $\mathcal{U}^-$, digamos $U_1^-, ..., U_n^-$, tal que $2^X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^-$. Observamos que si $x \in X$, entonces $\overline{\{x\}} \in 2^X$. Luego, $\overline{\{x\}} \in U_j^-$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$. Es decir, $\overline{\{x\}} \cap U_j \neq \emptyset$. Como U_j es abierto, se sigue que $\{x\} \cap U_j \neq \emptyset$, lo cual significa que $x \in U_j$. Esto prueba que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Es decir, la colección $\{U_1, ..., U_n\}$ es una subcubierta finita de la cubierta $\mathcal{U}$. Así, X es compacto. $\square$

1.32 Teorema. El espacio X es conexo si el hiperespacio 2^X es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X no es conexo y consideremos conjuntos abiertos, ajenos, y no vacíos, U y V, en X tales que $X = U \cup V$.

Notemos que, para cada $A \in 2^X$, se tiene que $A \subset U$ o $A \cap V \neq \emptyset$, es decir, $A \in U^+$ o $A \in V^-$. Esto significa que $2^X = U^+ \cup V^-$. También se tiene que U y V son cerrados no vacíos en X, es decir, son elementos de 2^X; además, $U \in U^+$ y $V \in V^-$. Así, $U^+ \neq \emptyset$ y $V^- \neq \emptyset$. También, puesto que $U \cap V = \emptyset$, se tiene que, $U^+ \cap V^- = \emptyset$. Esto prueba que 2^X no es conexo si X no es conexo. □

1.33 Problema. ¿El espacio X es conexo sólo si el hiperespacio 2^X es conexo?, es decir, determinar si la conexidad de X implica o no la conexidad de 2^X.

En lo que sigue mostramos que en los espacios T_1, la conexidad del espacio implica la conexidad del hiperespacio. Así, en esta clase de espacios, la conexidad de X y de 2^X son equivalentes. Con este fin, a continuación incluimos productos simétricos en hiperespacios.

1.34 Notación. Para un espacio X y cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$F_n(X) = \{A \subset X : 1 \leq |A| \leq n\} \quad \text{y}$$

$$F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X).$$

Denotamos por X^n al producto $\Pi_{i=1}^n X_i$, donde $X_i = X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideramos la función $f_n : X^n \to F_n(X)$ definida por $f_n((x_1, ..., x_n)) = \{x_1, ..., x_n\}$ para cada elemento $(x_1, ..., x_n)$ de X^n.

1.35 Observación. El conjunto $F_n(X)$ es referido como el n-ésimo producto simétrico del espacio X. Notamos que si X es un espacio T_1, es decir, si todos los subconjuntos finitos son cerrados en X, entonces $F_n(X)$ es un subconjunto del hiperespacio 2^X. Así, en este caso, $F_n(X)$ tiene la topología de subespacio heredada por la topología de Vietoris en 2^X. A continuación veremos que, con esta topología, f_n es un función continua del producto X^n sobre $F_n(X)$.

1.36 Lema. Si X es un espacio T_1 entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es una función continua y suprayectiva del producto X^n en el producto simétrico $F_n(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Primero demostremos que f_n es continua. Para esto, considerando la subbase de la topología de Vietoris (Definición 1.25), basta demostrar que para cualquier conjunto abierto, U, en X se tiene que $f_n^{-1}(U^+ \cap F_n(X))$ y $f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X))$ son conjuntos abiertos en el producto X^n. Notemos lo que sigue:

(1) $f_n^{-1}(U^+ \cap F_n(X)) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : \{x_1, ..., x_n\} \subset U\} = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : x_i \in U \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}\} = U^n$.

(2) $f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X)) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : \{x_1, ..., x_n\} \cap U \neq \emptyset\} = (U \times X^{n-1}) \cup (X \times U \times X^{n-2}) \cup \cdots \cup (X^{n-1} \times U)$.

Con (1) y (2) se obtiene que f_n es una función continua.

Ahora, probaremos que f_n es sobreyectiva. Para esto, sea $A \in F_n(X)$. Se tiene que $A = \{y_1, ..., y_k\}$ donde $y_i \in X$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$ y $k \leq n$. Pongamos $x_i = y_i$ si $1 \leq i \leq k$, y $x_i = y_k$ si $k \leq i \leq n$. Se tiene que $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $f_n((x_1, ..., x_n)) = A$. Así, f_n es sobreyectiva. $\square$

1.37 Lema. Si X es un espacio T_1 entonces, $F(X)$ la colección de todos los subconjuntos finitos de X, es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X.

Demostración. Considerando la base de la topología de Vietoris (Teorema 1.30), fijemos una colección finita de conjuntos abiertos no vacíos en X, digamos $W_1, ..., W_n$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tomemos un punto $x_i \in W_i$. Como X es T_1, el conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ es un elemento de 2^X. Además, es claro que $\{x_1, ..., x_n\} \in \langle W_1, ..., W_n \rangle \cap F(X)$. Esto prueba que $F(X)$ es denso en 2^X. $\square$

1.38 Teorema. Sea X un espacio T_1. Entonces X es conexo si, y sólo si, 2^X es conexo.

Demostración. Que la condición es sufiente está demostrada en el Teorema 1.32. Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que X es un espacio conexo. Luego, el producto X^n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, considerando que X es un espacio T_1, sabemos que el producto simétrico $F_n(X)$ es una imagen continua del producto X^n (Lema 1.36). Así, se tiene que $F_n(X)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, puesto que $F_1(X) \subset F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$, se sigue que $F(X)$ es conexo. Por otro lado, sabemos que $F(X)$ es denso en 2^X (Lema 1.37). Con esto, se concluye que 2^X es conexo. $\square$

Terminamos esta subsección con dos resultados básicos respecto del producto simétrico $F_n(X)$ cuando $n = 1$. En este caso, tenemos que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$, el cual, cuando X es un espacio T_1, es un subespacio de 2^X y es referido como el hiperespacio de los singulares de X.

1.39 Proposición. Si X es un espacio T_1, entonces $F_1(X)$ es una copia topológica del espacio X dentro del hiperespacio 2^X.

Demostración. Como X es T_1, para cada $x \in X$ se tiene que el conjunto singular $\{x\}$ es cerrado en X. Así, $F_1(X)$ es un subespacio de 2^X. Por otra parte, la función $f_1 : X \to F_1(X)$ definida por $f_1(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$, es una biyección continua (Lema 1.36). Además, tenemos que f_1 es una función abierta, esto se sigue porque para cualquier conjunto abierto, U, en X se tiene que $f_1(U) = \{\{x\} : x \in U\} = \langle U \rangle \cap F_1(X)$, el cual es un conjunto abierto en $F_1(X)$. Así, f_1 es un homeomorfismo entre X y $F_1(X)$. $\square$

1.40 Proposición. El espacio X es de Hausdorff si, y sólo si, el hiperespacio de los singulares de X, $F_1(X)$, es un subconjunto cerrado del hiperespacio 2^X.

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Hausdorff y fijemos $A \in 2^X - F_1(X)$. Así, A tiene por lo menos dos elementos. Tomamos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in A$. Existen conjuntos abiertos y ajenos, U y V, en X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$. En lo que sigue, consideramos dos casos.

(1) $A \subset U \cup V$: en este caso $\langle U, V \rangle$ es un conjunto abierto en 2^X tal que $A \in \langle U, V \rangle$. Como U y V son conjuntos ajenos, se sigue que $\langle U, V \rangle \cap F_1(X) = \emptyset$, ya que si existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in \langle U, V \rangle$, entonces $x \in U$ y $x \in V$, en contradición con el hecho de que U y V son ajenos.

(2) $A \not\subset U \cup V$: en este caso denotamos $W = X - \{x_1, x_2\}$ y notamos que $\langle U, V, W \rangle$ es un conjunto abierto en 2^X que contiene a A. Además, como en el caso (1), se verifica que $\langle U, V, W \rangle \cap F_1(X) = \emptyset$.

Con (1) y (2), se tiene que $2^X - F_1(X)$ es un conjunto abierto en 2^X. En consecuencia, $F_1(X)$ es cerrado en 2^X.

Recíprocamente, supongamos que X no es de Hausdorff. Fijemos dos puntos distintos x_1 y x_2 en X que no se pueden separar con conjuntos abiertos, ajenos en X.

Probaremos que $\{x_1, x_2\}$ pertenece a la cerradura de $F_1(X)$ en 2^X, la cual denotamos por $\overline{F_1(X)}$. Para esto consideremos un conjunto abierto básico en 2^X que contiene a $\{x_1, x_2\}$, es decir, consideremos una colección finita de conjuntos abiertos en X, digamos $U_1, \ldots, U_n$, tales que $\{x_1, x_2\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Denotamos

$$I_1 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_1 \in U_i\} \ \text{ e } \ I_2 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_2 \in U_i\}.$$

Notemos que $\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \neq \emptyset$ e $I_2 \neq \emptyset$. Denotemos

$$U = \bigcap_{i \in I_1} U_i \ \text{ y } \ V = \bigcap_{i \in I_2} U_i.$$

Es claro que U y V son abiertos en X, $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Así, $\{x_1, x_2\} \in \langle U, V \rangle$.

Veremos que $\langle U, V \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Para esto, sea $A \in \langle U, V \rangle$. Se tiene que $A \subset U \cup V \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Además, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Es decir, $A \cap U_i \neq \emptyset$ si $i \in I_1$; y $A \cap U_i \neq \emptyset$ si $i \in I_2$. Como $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, n\}$, se sigue que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.

Por otro lado, por la elección de x_1 y x_2, $U \cap V \neq \emptyset$. Fijemos un punto $x \in U \cap V$. Se tiene que $\{x\} \in \langle U, V \rangle$, por lo cual $\{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Es decir, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X) \neq \emptyset$. Esto demuestra que $\{x_1, x_2\} \in \overline{F_1(X)}$.

Por lo anterior tenemos que $F_1(X) \neq \overline{F_1(X)}$, es decir, $F_1(X)$ no es cerrado en 2^X. $\square$

1.2.2 Métrica de Hausdorff

En esta parte, introducimos la métrica de Hausdorff para el hiperespacio 2^X de un espacio métrico compacto X. Además, entre otros resultados básicos, probamos que la topología inducida por esta métrica en el hiperespacio coincide con la topología de Vietoris (definida en la sección previa).

1.41 Definición. Sean X un espacio métrico, con métrica d, A un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$. La ε-nube alrededor de A en X, denotada por $N(\varepsilon, A)$, se define por

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

A continuación revisamos algunas propiedades de las nubes de conjuntos cerrados, en espacios métricos compactos.

1.42 Proposición. Sean X un espacio métrico compacto, con métrica d, A un subconjunto cerrado, no vacío, de X y $\varepsilon > 0$. Se tiene lo que sigue:

(a) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$;

(b) $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ para cada $\delta \in (0, \varepsilon]$;

(c) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$;

(d) Si U es un conjunto abierto en X y $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$; y

(e) Si B es un conjunto cerrado, no vacío, en X y $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \cap N(\delta, B) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. (a) y (b) se obtienen directamente de la definición de nube.

(c) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Fijamos un número δ tal que $d(x, a) < \delta < \varepsilon$. Notamos que $0 < \delta < \varepsilon$ y $x \in N(\delta, A)$. Por lo tanto $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. La inclusión contraria se sigue de (b).

(d) Para cada $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_a) \subset U$. Notemos que la colección $\{B(a, \frac{\varepsilon_a}{2}) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto. Así, existe un subconjunto finito, $\{a_1, \ldots, a_n\}$, de A tal que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\varepsilon_{a_i}}{2})$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\varepsilon_{a_i}}{2}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Veamos que $N(\delta, A) \subset U$. Sea $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in B(a_i, \frac{\varepsilon_{a_i}}{2})$. Como $d(x, a_i) \leq d(x, a) + d(a, a_i)$, se sigue que $d(x, a_i) < \frac{\varepsilon_{a_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{a_i}}{2}$. Así, $x \in B(a_i, \varepsilon_{a_i})$, por lo cual $x \in U$. Esto prueba (d).

(e) Puesto que A y B son compactos ajenos en X se tiene que $d(A, B) > 0$. Sea $\delta = \frac{d(A,B)}{2}$. Es claro que $\delta > 0$. Notemos que si $z \in N(\delta, A) \cap N(\delta, B)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \delta$ y $d(b, z) < \delta$. De lo cual se sigue que $d(a, b) \leq d(a, z) + d(b, z) < 2\delta = d(A, B)$ lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $N(\delta, A) \cap N(\delta, B) = \emptyset$. $\square$

1.43 Notación. Dados A y B subconjuntos cerrados, no vacíos de un espacio métrico X, denotamos

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En relación con esta notación, notemos que si X es compacto, entonces $\mathrm{diam}(X)$ es un número que pertenece al conjunto $E(A, B)$. Además, es claro que este conjunto está acotado inferiormente (por el número 0). Así, en este caso, consideramos la definición que sigue.

1.44 Definición. Para un espacio métrico compacto X se define la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ por $H(A, B) = \inf E(A, B)$, para todo par (A,B) en el producto $2^X \times 2^X$.

1.45 Nota. En el teorema que sigue demostramos que la función H es una métrica para el hiperespacio 2^X, de un espacio métrico compacto X. Ésta es referida como la métrica de Hausdorff.

1.46 Teorema. Para un espacio métrico compacto X, la función H es una métrica para el hiperespacio 2^X.

Demostración. Sean A, B y C elementos del hiperespacio 2^X. Es claro que $H(A, B) \geq 0$. También es claro que si $A = B$ entonces $H(A, B) = 0$. Veamos que en esto último también se verifica la implicación contraria. En efecto, supongamos que $H(A, B) = 0$ y fijemos un punto $b \in B$. Probaremos que $b \in \overline{A}$. Para esto, fijamos $\delta > 0$. Por la definición de $H(A, B)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset N(\varepsilon, B)$, $B \subset N(\varepsilon, A)$ y $\varepsilon < \delta$. Se sigue, de la Proposición 1.42 (b) que $B \subset N(\delta, A)$. Así, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \delta$. Luego, $B(b, \delta) \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $b \in \overline{A}$. Como $A = \overline{A}$, se tiene que $b \in A$. Hemos demostrado que $B \subset A$. Similarmente, $A \subset B$. Por lo tanto $A = B$.

Por otra parte, es obvio que $E(A, B) = E(B, A)$, por lo cual H tiene la propiedad de simetría. En lo que sigue verificamos que H satisface la desigualdad del triángulo.

Para probar esta desigualdad primero notamos que si $A \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\delta, B)$, entonces $A \subset N(\varepsilon + \delta, B)$. En efecto, sea $a \in A \subset N(\varepsilon, C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \varepsilon$. Como $c \in C \subset N(\delta, B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(c, b) < \delta$. De aquí que $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < \varepsilon + \delta$. De manera que $A \subset N(\varepsilon + \delta, B)$. De esta última propiedad se deduce que

$$\{\varepsilon + \delta : \varepsilon \in E(A, C) \text{ y } \delta \in E(C, B)\} \subset E(A, B).$$

Se sigue que $H(A, C) + H(C, B) = \inf\, E(A, C) + \inf\, E(C, B) = \inf\{\varepsilon + \delta : \varepsilon \in E(A, C) \text{ y } \delta \in E(C, B)\} \geq \inf E(A, B) = H(A, B)$.

Está demostrado que H es una métrica para 2^X. $\square$

1.47 Teorema. Sean A y B elementos del hiperespacio 2^X de un espacio métrico compacto X y $\varepsilon > 0$. Se tiene que $H(A, B) < \varepsilon$ si, y sólo si, $\varepsilon \in E(A, B)$.

Demostración. Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$. Por la Proposición 1.42 (b), se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Así, $\varepsilon \in E(A, B)$.

Recíprocamente, supongamos que $\varepsilon \in E(A, B)$. Es decir, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Por la Proposición 1.42 (c), se tiene que $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, B)$. Dado que A es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, ..., \delta_n \in (0, \varepsilon)$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \max\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Notemos que $0 < \alpha < \varepsilon$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga, existe $\beta \in$

$(0, \varepsilon)$ tal que $B \subset N(\beta, A)$. Sea $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Se tiene que $A \subset N(\gamma, B)$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Así $\gamma \in E(A, B)$. Se sigue que $H(A, B) \leq \gamma$. Como $\gamma < \varepsilon$, se concluye que $H(A, B) < \varepsilon$. $\square$

1.48 Teorema. En el hiperespacio 2^X de un espacio métrico compacto X, la topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por τ_V y τ_H a la topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff, respectivamente. Primero probemos que $\tau_V \subset \tau_H$. Basta demostrar que la subbase de la topología τ_V (véase la Definición 1.25) está contenida en τ_H. Para esto, fijamos un conjunto abierto, U, de X. Debemos demostrar que U^+ y U^- son elementos de τ_H.

Si $U = X$, entonces $U^+ = U^- = 2^X$ y, si $U = \emptyset$, entonces $U^+ = U^- = \emptyset$. Así, $U^+, U^- \in \tau_H$ si $U = X$ o $U = \emptyset$. En lo que sigue, suponemos que $U \neq X$ y $U \neq \emptyset$. Fijemos $A \in U^+$ y denotemos $\varepsilon = d(A, X - U)$. Dado que A y $X - U$ son compactos ajenos se tiene que $\varepsilon > 0$. Veremos que

(1) $B_H(A, \varepsilon) \subset U^+$. En consecuencia, $U^+ \in \tau_H$.

Sea $B \in B_H(A, \varepsilon)$ y supongamos que existe $b \in B \cap (X - U)$. Por el Teorema 1.47 se tiene que $B \subset N(\varepsilon, A)$, lo que implica que existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Se sigue que $d(A, X - U) \leq d(a, b) < \varepsilon = d(A, X - U)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $B \cap (X - U) = \emptyset$, es decir, $B \subset U$. Por lo tanto $B \in U^+$. Así, lo indicado en (1) está demostrado.

Ahora fijemos $A \in U^-$ y un punto $p \in A \cap U$. Pongamos $\varepsilon = d(p, X - U)$. Es claro que $\varepsilon > 0$. Probaremos que

(2) $B_H(A, \varepsilon) \subset U^-$. En consecuencia, $U^- \in \tau_H$.

En efecto, sea $B \in B_H(A, \varepsilon)$ y supongamos que $B \subset (X-U)$. Por el Teorema 1.47 se tiene que $A \subset N(\varepsilon, B)$. En consecuencia existe $b \in B$ tal que $d(p, b) < \varepsilon$. Se sigue que $d(p, X-U) \leq d(p, b) < \varepsilon = d(p, X-U)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B \not\subset (X-U)$, es decir, $B \cap U \neq \emptyset$. De esta manera lo que se indica en (2) está demostrado.

De (1) y (2) se obtiene que $\tau_V \subset \tau_H$.

Ahora, vamos a probar que $\tau_H \subset \tau_V$. Para esto fijamos $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que

(3) $B_H(A, \varepsilon) \in \tau_V$. En consecuencia, $\tau_H \subset \tau_V$.

Como A es compacto y $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_d(a, \frac{\varepsilon}{2})$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Denotamos $U_i = B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Observemos que $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ es un elemento de la topología τ_V y $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Veremos que

(4) $\langle U_1, ..., U_n \rangle \subset B_H(A, \varepsilon)$.

Tomemos $B \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Se tiene que $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Así, $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

Por otra parte, si $a \in A$ existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a \in U_i$. Como $B \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$, se tiene que $B \cap U_i \neq \emptyset$. Fijemos $b \in B \cap U_i$. Así, $a, b \in U_i$. Luego, $d(a, b) \leq d(a, a_i) + d(a_i, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$.

Hemos demostrado que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Del Teorema 1.47, se obtiene que $H(A, B) < \varepsilon$, es decir, $B \in$

$B_H(A, \varepsilon)$. Esto demuestra lo que se indica en (4), lo cual a su vez demuestra lo que se afirma en (3).

Con todo esto, la prueba de que $\tau_V = \tau_H$ está completa. $\square$

1.2.3 Límites de sucesiones de conjuntos

En esta parte, probamos resultados acerca de límites de sucesiones de conjuntos en espacios topológicos. En particular, mostramos una alternativa para determinar la convergencia de sucesiones en hiperespacios con la métrica de Hausdorff.

1.49 Definición. El **límite inferior** y el **límite superior** de una sucesión de conjuntos, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en un espacio X, denotados por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ respectivamente, se definen como sigue:

$\liminf A_n = \{x \in X :$ para cada conjunto abierto U en X que contiene al punto x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N\}$.

$\limsup A_n = \{x \in X :$ para cada conjunto abierto U en X que contiene al punto x, existe un subconjunto infinito, J, de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J\}$.

1.50 Definición. Decimos que el **límite** de una sucesión de conjuntos, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en un espacio X existe y es igual al conjunto A si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. Para indicar esto escribimos $\lim A_n = A$.

1.51 Proposición. Dada una sucesión, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de conjuntos en un espacio X, se tiene que:

(a) $\lim\inf A_n \subset \lim\sup A_n$;

(b) $\lim\inf A_n$ y $\lim\sup A_n$ son conjuntos cerrados en X y;

(c) Si X es secuencialmente compacto y cada A_n es no vacío, entonces $\lim\sup A_n$ es no vacío.

Demostración. (a) Sean $x \in \lim\inf A_n$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Tomando $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$, se justifica que $x \in \lim\sup A_n$.

(b) Veamos que $\overline{\lim\sup A_n} \subset \lim\sup A_n$.

Sea $x \in \overline{\lim\sup A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Se sigue que $U \cap (\lim\sup A_n) \neq \emptyset$, de manera que podemos tomar un punto $z \in (\lim\sup A_n) \cap U$. Luego, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. Por tanto $x \in \lim\sup A_n$.

De manera similar se demuestra que $\lim\inf A_n$ es cerrado.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos un punto $a_n \in A_n$. Por la hipótesis sobre X, existen una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un punto $x \in X$ tales que $a_{n_k} \to x$. Ahora, dado un conjunto abierto, U, en X existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \in U$ para toda $k \geq K$. Considerando el conjunto $J = \{n_k : k \geq K\}$, se justifica que $x \in \lim\sup A_n$. $\square$

1.52 Teorema. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, no vacíos, de un espacio métrico compacto X y x un punto en X. Se tiene que:

(a) $x \in \lim\inf A_n$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $x \in$ lim sup A_n si, y sólo si, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que $x_{n_k} \to x$.

DEMOSTRACIÓN. (a) supongamos que $x \in$ lim inf A_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $x_n \in A_n$ de tal forma que $d(x, x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\}$, donde d es la métrica de X, tal punto x_n existe por la compacidad del conjunto A_n. Veamos que $x_n \to x$. Para esto fijemos $\varepsilon > 0$. Como $x \in$ lim inf A_n, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. De modo que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$. Note que $d(x, x_n) \leq d(x, a_n) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$. Así, $x_n \to x$.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$. Se sigue que $x_n \in A_n \cap B(x, \varepsilon)$ para cada $n \geq N$. Así, $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $x \in$ lim inf A_n.

(b) Supongamos que $x \in$ lim sup A_n. Existe un subconjunto infinito, J_1, de $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \in J_1$, $B(x, 1) \cap A_n \neq \emptyset$. Fijemos $n_1 \in J_1$ y un punto $x_{n_1} \in B(x, 1) \cap A_{n_1}$. También, existe un subconjunto infinito, J_2, de $\mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in J_2$, $B(x, \frac{1}{2}) \cap A_n \neq \emptyset$. Fijamos $n_2 \in J_2$ tal que $n_2 > n_1$ y tomamos un punto $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{n_2}$.

De esta manera, inductivamente, se determina una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, un punto $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A_{n_k}$. Se tiene que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $x_{n_k} \to x$.

Recíprocamente, supongamos que existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \to x$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existe

$K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Denotamos $J = \{n_k : k \geq K\}$. Notamos que J es infinito y $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$. Así, $x \in \lim\sup A_n$. $\square$

1.53 Nota. Las pruebas de los recíprocos en (a) y (b) del Teorema 1.52 no requieren que el espacio sea métrico compacto, ni que los conjuntos de la sucesión sean cerrados. Es decir, en general, la existencia de sucesiones de puntos con las propiedades indicadas en ese teorema implica que los puntos límite pertenecen al límite inferior y límite superior, respectivamente.

1.54 Teorema. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de conjuntos en un espacio X y A y B subconjuntos de X, tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. se tiene que

(a) $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$;

(b) Si existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B_n$, para todo $n \in J$, entonces $A \subset B$;

(c) Si X es secuencialmente compacto y existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. (a) Por la Proposición 1.51 (a), basta demostrar que $\lim\sup (A_n \cup B_n) \subset A \cup B \subset \lim\inf (A_n \cup B_n)$.

Sea $x \in X - (A \cup B)$. Se tiene que $x \notin \lim\sup A_n$ y $x \notin \lim\sup B_n$. Así, existen conjuntos abiertos, U y V, en X que contienen al punto x y existen enteros positivos, N_1 y N_2 tales que $U \cap A_n = \emptyset$, para cada $n \geq N_1$, y $V \cap B_n = \emptyset$, para cada $n \geq N_2$. Denotemos $W = U \cap V$ y $N = \max\{N_1, N_2\}$. Es claro que W es un conjunto abierto en X que contiene a x y

$W \cap (A_n \cup B_n) = \emptyset$, para cada $n \geq N$. Así, $x \notin$ lim sup $(A_n \cup B_n)$. Esto demuestra que lim sup $(A_n \cup B_n) \subset A \cup B$.

Ahora, fijemos un punto $x \in A \cup B$ y un conjunto abierto U en X que contiene a x. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$. Se tiene que $x \in$ lim inf A_n, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Luego $U \cap (A_n \cup B_n) \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Esto prueba que $x \in$ lim inf $(A_n \cup B_n)$, con lo cual (a) está demostrado.

(b) Sean $x \in A$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Se tiene que $x \in$ lim inf A_n. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Denotemos $J' = J \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$. Claro que si $n \in J'$, entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$. Dado que $A_n \subset B_n$ para todo $n \in J$, se sigue que $U \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J'$. Como J' es infinito, se obtiene que $x \in$ lim sup B_n. Así, $x \in B$. Por lo tanto $A \subset B$.

(c) Para cada $n \in J$, fijamos un punto $x_n \in A_n \cap B_n$. Dado que X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in J}$ tiene una subsucesión, $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge a un punto $x \in X$. Luego, por el Teorema 1.52 (b), $x \in$ lim sup $A_n = A$ y $x \in$ lim sup $B_n = B$ (véase también la Nota 1.53). Así, $x \in A \cap B$. $\square$

1.55 Teorema. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos en un espacio X, entonces lim $A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$.

Demostración. Por la Proposición 1.51 (a), basta probar que lim sup $A_n \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \subset$ lim inf A_n.

Sea $x \in$ lim sup A_n y fijemos un conjunto abierto U en X que contiene a x. Existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. Así, $x \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$.

Ahora, dados $x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x, se tiene que $U \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \emptyset$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_N \neq \emptyset$. Dado que $A_N \subset A_n$, para todo $n \geq N$, se tiene que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Así, $x \in \liminf A_n$. $\square$

1.56 Teorema. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos en un espacio X, entonces $\lim A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Demostración. Por la Proposición 1.51 (a), basta probar que $\limsup A_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \liminf A_n$.

Sea $x \in \limsup A_n$ y y fijemos un conjunto abierto U en X que contiene a x. Existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_m \neq \emptyset$, para todo $m \in J$. Fijemos un número natural arbitrario $n \in \mathbb{N}$. Como J es infinito, existe $m \in J$ tal que $m > n$. Por hipótesis $A_m \subset A_n$. Puesto que $U \cap A_m \neq \emptyset$, se sigue que $U \cap A_n \neq \emptyset$. Esto demuestra que $x \in \overline{A_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Ahora, dados $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x, se tiene que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $x \in \liminf A_n$. $\square$

1.57 Teorema. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos del hiperespacio 2^X de un espacio métrico compacto X y A un subconjunto de X. Se tiene que $\lim A_n = A$ si, y sólo si, A es un elemento de 2^X y la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en 2^X.

Demostración. Como X es métrico compacto, por el Teorema 1.48, en el hiperespacio 2^X podemos considerar la métrica de Hausdorff H.

Supongamos que lim $A_n = A$. Por (b) y (c) de la Proposición 1.51, se tiene que A es un elemento del hiperespacio 2^X. Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a probar lo que sigue.

(i) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para cada $n \geq M_1$; y

(ii) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\varepsilon, A)$, para cada $n \geq M_2$.

(i) Dado que la familia $\{B(a, \frac{\varepsilon}{2}) : a \in A\}$ es una cubierta abierta del compacto A, existen $m \in \mathbb{N}$ y puntos $a_1, ..., a_m \in A$ tales que $A \subset B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B(a_m, \frac{\varepsilon}{2})$.

Como A = lim inf A_n, cada a_i es un elemento del lim inf A_n. De manera que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$, entonces $A_n \cap B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$. Definamos $M_1 = \max\{N_1, ..., N_m\}$. Afirmamos que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para cada $n \geq M_1$. En efecto, sean $n \geq M_1$ y $a \in A$, entonces existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $a \in B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Dado que $n \geq M_1$, existe $x \in B(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_n$. Notamos que $d(a, x) \leq d(a, a_j) + d(a_j, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $a \in N(\varepsilon, A_n)$. De manera que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para todo $n \geq M_1$. Así, (i) está demostrado.

(ii) Supongamos que lo indicado en (ii) es falso. Existe $n_1 > 1$ tal que A_{n_1} no está contenido en $N(\varepsilon, A)$. También existe $n_2 > n_1$ tal que A_{n_2} no está contenido en $N(\varepsilon, A)$. Continuando este procedimiento, se determina una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ tales que A_{n_k} no está contenido en $N(\varepsilon, A)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $x_{n_k} \in A_{n_k} - N(\varepsilon, A)$. Como X es compacto, existen una subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, y un punto $x_0 \in X$, tales que $x_{k_l} \to x_0$. Dado que $x_{n_{k_l}} \in X - N(\varepsilon, A)$, para cada $l \in \mathbb{N}$ y este conjunto es cerrado (es el complemento de un abierto) tenemos que $x_0 \in X - N(\varepsilon, A)$. Se sigue que $x_0 \notin A$. Por otra parte, puesto que $x_{n_{k_l}} \to x_0$ y $\{A_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por el Teorema 1.52 (b), se tiene que $x_0 \in \lim\sup A_n = A$. Así, $x_0 \in A$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto (ii) está demostrado.

Ahora, tomemos $N = \max\{M_1, M_2\}$. Si $n \geq N$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$. Por el Teorema 1.47, $H(A, A_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Esto muestra que $A_n \to A$ con la métrica de Hausdorff.

Recíprocamente supongamos que $A \in 2^X$ y que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en el hiperespacio 2^X. Veamos que lim inf $A_n = A =$ lim sup A_n. Por la Proposición 1.51 (a), basta mostrar que lim sup $A_n \subset A \subset$ lim inf A_n.

Supongamos que existe un punto $x \in (\lim\sup A_n) - A$. Dado que A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Como $x \in \lim\sup A_n$, existe un conjunto infinito, J, de $\mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$. Dado que $A_n \to A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N$. Por el Teorema 1.47, se tiene que $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, para todo $n \geq N$. Fijemos $m \geq N$ tal que $m \in J$ y un punto $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_m$. Notemos que $z \in A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Luego, existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que $d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \varepsilon$. Por lo tanto $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Esto contradice la condición sobre ε y prueba que lim sup $A_n \subset A$.

Ahora, veamos que $A \subset$ lim inf A_n. Para esto fijamos un punto $a \in A$ y un número $\varepsilon > 0$. Dado que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. Por el Teorema 1.47, se tiene que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para todo $n \geq N$. Así, $a \in N(\varepsilon, A_n)$, para todo $n \geq N$. Ahora, para cada $n \geq N$, tomemos un punto $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \varepsilon$. Se sigue que $A_n \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Esto muestra que $a \in \liminf A_n$. $\square$

1.58 Definición. El hiperespacio de los subcontinuos de un espacio X, denotado por $C(X)$, es el subespacio del hiperespacio 2^X que consiste de los subconjuntos de X que son cerrados, no vacíos y conexos.

1.59 Nota. Remarcamos, el hiperespacio de los subcontinuos de un espacio X es

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un subconjunto conexo de } X\},$$

con la topología de subespacio inducida por la topología de Vietoris del hiperespacio 2^X.

A continuación, como una aplicación del Teorema 1.57, mostramos que para cada espacio métrico compacto, el hiperespacio de los subcontinuos también es compacto, compare esto con el Teorema 1.31. Con este objetivo incluimos el lema que sigue.

1.60 Lema. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en el hiperespacio $C(X)$ de un espacio métrico compacto X, tal que $\liminf A_n$ es no vacío, entonces $\limsup A_n$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\limsup A_n$ no es conexo. Por la Proposición 1.51 (b) tenemos que $\limsup A_n$ es cerrado en X. Luego, existen subconjuntos cerrados, disjuntos, no vacíos, A y B de X tales que $\limsup A_n = A \cup B$. Por normalidad, existen conjuntos abiertos, ajenos, U y V, en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Por la Proposición 1.51 (a), tenemos que $\liminf A_n \subset U \cup V$. Sea $x \in \liminf A_n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in U$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$.

Por otro lado, tomemos un punto $y \in B$. Tenemos que $y \in \limsup A_n$ y $y \in V$. Luego, existe un conjunto infinito, J, de $\mathbb{N}$ tal que $V \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$.

Denotamos $J' = J \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$. Notemos que J' es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Además, para todo $n \in J'$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ y $V \cap A_n \neq \emptyset$. Dado que A_n es conexo, entonces $A_n \not\subset U \cup V$ (si $A_n \subset U \cup V$ entonces $A_n \cap U$ y $A_n \cap V$ son una disconexion de A_n).

Ahora, para cada $n \in J'$ tomemos un punto $x_n \in A_n - (U \cup V)$. Por compacidad, existen una subsucesión, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, de la sucesión $\{x_n\}_{n\in J'}$, y un punto $x_0 \in X$, tales que $x_{n_k} \to x_0$. Notemos que cada x_{n_k} pertenece al conjunto $X - U \cup V$ y este conjunto es cerrado, así $x_0 \in X - U \cup V$. Por otra parte, por el Teorema 1.52 (b), tenemos que $x_0 \in \limsup A_n$, por lo que $x_0 \in U \cup V$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\limsup A_n$ es conexo. $\square$

1.61 Teorema. El hiperespacio de los subcontinuos, $C(X)$, de un espacio métrico compacto X, es un subconjunto compacto del hiperespacio 2^X.

Demostración. Por el Teorema 1.31, se tiene que el hiperespacio 2^X es compacto. Así, basta mostrar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Para esto fijamos un elemento en la cerradura de $C(X)$ en 2^X, digamos $A \in \overline{C(X)}$. Como X es métrico compacto, por el Teorema 1.48, el hiperespacio 2^X es metrizable (con la métrica de Hausdorff). Luego, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C(X)$ tal que $A_n \to A$. Por el Teorema 1.57, se tiene que $\lim\inf A_n = A = \lim\sup A_n$. Además, puesto que $A \in 2^X$, se tiene que $A \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $\lim\inf A_n \neq \emptyset$. Luego, del Teorema 1.60, se obtiene que A es conexo. Es decir, $A \in C(X)$. Esto prueba que $C(X)$ es un subconjunto cerrado, y así compacto, de 2^X. $\square$

Para finalizar este apartado, como otra aplicación del Teorema 1.57, incluimos dos resultados relacionados con uniones de elementos de subconjuntos de hiperespacios.

1.62 Teorema. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado, no vacío, del hiperespacio 2^X de un espacio métrico compacto X, entonces $\bigcup\mathcal{A}$ es un elemento de 2^X.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos $A_0 = \bigcup\mathcal{A}$. Debemos probar que A_0 es un subconjunto cerrado y no vacío de X. Como cada elemento de $\mathcal{A}$ es un subconjunto de X, se tiene que A_0 es un subconjunto de X. Dado que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, podemos considerar un elemento A de $\mathcal{A}$. Notemos que $A \in 2^X$, así $A \neq \emptyset$. Como $A \subset A_0$, se sigue que $A_0 \neq \emptyset$.

Resta verificar que A_0 es cerrado en X. Para esto, tomamos un punto en la cerradura en X de A_0, digamos $x \in \overline{A_0}$, y consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$de puntos en A_0, convergente al punto x. Ahora, para cada $n \in \mathrm{N}$, fijamos un elemento A_n de $\mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Se tiene que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio métrico compacto 2^X, por lo cual tiene una subsucesión, $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge a algún elemento A' de 2^X. Como $\mathcal{A}$ es un cerrado en 2^X, se tiene que $A' \in \mathcal{A}$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in A_{n_k}$, además $x_{n_k} \to x$. Luego, por el Teorema 1.52

(a), se tiene que $x \in \lim\inf A_n$. Por el Teorema 1.57, se sigue que $x \in A'$. Por lo tanto $x \in A_0$. $\square$

1.63 Teorema. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío, del hiperespacio 2^X, de un espacio métrico compacto X, tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un elemento de $C(X)$.

Demostración. Denotemos $A_0 = \bigcup \mathcal{A}$. Por el Teorema 1.62, A_0 es un elemento del hiperespacio 2^X. Resta probar que A_0 es un subconjunto conexo de X.

Supongamos que A_0 no es conexo. Como A_0 es cerrado en X, existen B y C, conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, en X tales que $A_0 = B \cup C$. Fijemos un elemento $E \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Se tiene que $E \subset A_0$ y E es conexo. Se sigue que $E \subset B$ o $E \subset C$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $E \subset B$.

Sean $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}$ y $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap C \neq \emptyset\}$. Es claro que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ y, como $B \cap C = \emptyset$, también es claro que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Además, considerando la notación de los abiertos subbásicos de la topología de Vietoris en 2^X (vea la Definición 1.25), notamos que $2^X - \mathcal{B} = (X - B)^-$ y $2^X - \mathcal{C} = (X - C)^+$. Así, puesto que $X - B$ y $X - C$ son abiertos en X, se sigue que $2^X - \mathcal{B}$ y $2^X - \mathcal{C}$ son abiertos en el hiperespacio 2^X, por lo cual $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son cerrados en 2^X. Finalmente, como $E \subset B$ y $C \neq \emptyset$, observamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son no vacíos. Esto significa que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ constituyen una separación de $\mathcal{A}$, en contradicicón con la hipótesis. Esto demuestra que A_0 es conexo. $\square$

1.2.4 Arcos ordenados en hiperespacios

En esta parte mostramos la existencia de arcos ordenados, en el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo. A partir de este momento, y hasta el final de este trabajo, los espacios considerados son continuos. A continuación la definición formal de este concepto.

1.64 Definición. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un continuo es no degenerado si contiene más de un punto.

1.65 Nota. Para cada continuo X, existe una función continua, $\mu : 2^X \to [0, \infty)$, tal que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Diversas demostraciones de este hecho pueden consultarse en [5, Capítulo 5], [6, Capítulo VII], [12, (0.50)] y [13, p. 67].

1.66 Definición. Un **arco ordenado** en el hiperespacio 2^X de un continuo X es una función continua, $\alpha : [0, 1] \to 2^X$, tal que si $s < t$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

1.67 Nota. Si $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ es un arco ordenado y denotamos $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, decimos que α es un arco ordenado desde A hasta B en 2^X. Si $\alpha(t) \in C(X)$ para cada $t \in [0, 1]$, decimos que α es un arco ordenado en $C(X)$.

1.68 Lema. Para un subconjunto Λ del hiperespacio 2^X de un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Λ es una cadena y un continuo no degenerado.

(b) Λ es la imagen de un arco ordenado en 2^X.

Demostración. Para ver que (a) implica (b) consideremos una función continua, $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ tal que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$ (vea la Nota 1.65). Denotemos $a = \min \mu(\Lambda)$

y $b = \max \mu(\Lambda)$. Por la compacidad de Λ, a y b están bien determinados y, como Λ es cadena, $a < b$. Además, por la conexidad de Λ, se tiene que $\mu(\Lambda) = [a, b]$.

Notamos que $\mu|_\Lambda : \Lambda \to [a, b]$ es una función inyectiva. En efecto, si $L, M \in \Lambda$ con $L \neq M$, entonces $L \subsetneq M$ o $M \subsetneq L$ (ya que Λ es una cadena), lo que implica que $\mu|_\Lambda(L) < \mu|_\Lambda(M)$ o $\mu|_\Lambda(M) < \mu|_\Lambda(L)$. Así, $\mu|_\Lambda(L) \neq \mu|_\Lambda(M)$. Luego, se tiene que $\mu|_\Lambda : \Lambda \to [a, b]$ es una biyección continua y, como también es una función cerrada, es un homeomorfismo.

Consideramos un homeomorfismo, $h : [0, 1] \to [a, b]$, tal que $h(0) = a$ y $h(1) = b$, y denotamos $\gamma = (\mu|_\Lambda)^{-1}$ y $\beta = \gamma \circ h$. Es claro que β es un arco ordenado en 2^X tal que $\beta([0, 1]) = \Lambda$.

Para ver (b) implica (a), consideramos un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to 2^X$, tal que $\alpha([0, 1]) = \Lambda$. Claramente se tiene que Λ es un continuo no degenerado. Ahora, dados $M, N \in \Lambda$, existen $s, t \in [0, 1]$ tales que $\alpha(s) = M$ y $\alpha(t) = N$. Como $s \leqslant t$ o $t \leqslant s$ y α es un arco ordenado se tiene que $M \subset N$ o $N \subset M$. $\square$

1.69 Definición. Sean X un espacio métrico, con métrica d, y $\varepsilon > 0$. Una (d, ε)-cadena en X es un subconjunto finito, $\{x_1, ..., x_n\}$, de X tal que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ si $i \in \{1, ..., n-1\}$. Decimos que una (d, ε)-cadena, $\{x_1, ..., x_n\}$, con $x_1 = p$ y $x_n = q$, une a p y q en X. Un subconjunto Z de X está (d, ε)-encadenado si cada par de elementos de Z se pueden unir por una (d, ε)-cadena en Z.

1.70 Lema. Sean X un espacio métrico compacto, con métrica d, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X que converge a un elemento A de 2^X, y ε_n una sucesión de números positivos que converge a 0.

Si cada A_n está (d, ε_n)-encadenado, entonces A es un elemento del hiperespacio $C(X)$.

Demostración. Basta probar que A es conexo. Para esto, suponemos que no es así y consideramos conjuntos cerrados, ajenos, no vacíos, K y L, en X tales que $A = K \cup L$. Por normalidad, existen conjuntos abiertos, U y V, en X tales que $K \subset U$, $L \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Denotemos $\delta = \inf\{d(x, y) : x \in \overline{U}$ y $y \in \overline{V}\}$. Observemos que $\delta > 0$ ya que $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son compactos ajenos.

Dado que $A_n \to A$ y $\langle U, V\rangle$ es un conjunto abierto en 2^X que tiene a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle U, V\rangle$ para todo $n \geq N$. Por otro lado, como $\varepsilon_n \to 0$, existe $k \geq N$ tal que $\varepsilon_k < \delta$.

Se tiene que $A_k \in \langle U, V\rangle$, es decir, $A_k \subset U \cup V$, $A_k \cap U \neq \emptyset$ y $A_k \cap V \neq \emptyset$. Tomemos puntos $a \in A_k \cap U$ y $b \in A_k \cap V$. Como A_k está (d, ε_k)-encadenado existe un conjunto finito $\{x_1, ..., x_m\} \subset A_k$ tal que $x_1 = a$, $x_m = b$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon_k$ para todo $i \in \{1, ..., m-1\}$.

Sea $j = \max\{i \in \{1, ..., m-1\} : x_i \in U\}$. Notemos que $x_{j+1} \in V$ y $d(x_j, x_{j+1}) < \varepsilon_k < \delta$, lo cual contradice la propiedad de δ. Por lo tanto A es conexo. $\square$

1.71 Teorema. Si A es un subcontinuo propio de un continuo X, entonces existe un arco ordenado desde A hasta X en $C(X)$.

Demostración. Primero probamos lo que se indica a continuación en (a), (b) y (c).

(a) Si $0 < \varepsilon < H(A, X)$, entonces existe un elemento A_ε en $C(X)$ tal que $A \subset A_\varepsilon$ y $H(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$.

(b) Si $0 < \varepsilon < H(A, X)$, entonces existe una (H, ε)-cadena, $\mathcal{C}_\varepsilon$, que une a A y X en $C(X)$ la cual también es una cadena, en el sentido de la Definición 1.16.

(c) Existe un subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(X)$ que contiene a A y X el cual también es una cadena, en el sentido de la Definición 1.16.

Prueba de (a): dado que $0 < \varepsilon < H(A, X)$, por el Teorema 1.47, se tiene que $X \not\subset N(\varepsilon, A)$. Notemos que $N(\varepsilon, A)$ es un subconjunto abierto, propio y no vacío de X. Sea A_ε la componente de $\overline{N(\varepsilon, A)}$ que contiene a A. Es claro que $A_\varepsilon \in C(X)$.

Probaremos que $H(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$. Para esto, primero demostramos lo que sigue:

(1) $Fr(N(\varepsilon, A)) \subset \{x \in X : d(x, A) = \varepsilon\}$.

Para probar (1) fijamos un punto $x \in Fr(N(\varepsilon, A))$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos puntos $y_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap N(\varepsilon, A)$ y $a_n \in A$ tales que $d(y_n, a_n) < \varepsilon$. Se sigue que $d(x, a_n) \leq d(x, y_n) + d(y_n, a_n) < \frac{1}{n} + \varepsilon$. Con esto hemos mostrado que $d(x, A) < \frac{1}{n} + \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $d(x, A) \leq \varepsilon$.

Por otra parte, afirmamos que si $x \in Fr(N(\varepsilon, A))$, entonces $\varepsilon \leq d(x, A)$. En efecto, si $d(x, A) < \varepsilon$ existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Veamos que $B(x, \delta) \subset N(\varepsilon, A)$ donde $\delta = \frac{\varepsilon - d(x,a)}{2}$. Sea $y \in B(x, \delta)$, se tiene que $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(x, a) + \delta = d(x, a) + \frac{\varepsilon - d(x,a)}{2} = \frac{\varepsilon + d(x,a)}{2} < \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $x \notin Fr(N(\varepsilon, A))$. Así, la afirmación con que inicia este párrafo está mostrada.

Lo anterior justifica lo que se indica en (1).

Ahora estamos en condiciones para demostrar que $H(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$. Debemos justificar que $\varepsilon = \inf E(A, A_\varepsilon)$, vea la Notación 1.43. Por el primer teorema de golpes en la frontera, vea el Teorema 1.10, podemos tomar un punto $x \in A_\varepsilon \cap Fr(N(\varepsilon, A))$. Ahora, fijamos un número $r \in E(A, A_\varepsilon)$. En particular, se tiene que $A_\varepsilon \subset N(r, A)$, así, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$. Por (1) se tiene que $d(x, A) = \varepsilon$. Se sigue que $\varepsilon \leqslant d(x, a) < r$. Hemos demostrado que ε es una cota inferior del conjunto $E(A, A_\varepsilon)$.

Por otro lado, fijemos un número $t > \varepsilon$. Consideramos un número r tal que $\varepsilon < r < t$. Veremos que $r \in E(A, A_\varepsilon)$. Por la definición de A_ε, es claro que $A \subset N(r, A_\varepsilon)$. Para justificar que $A_\varepsilon \subset N(r, A)$, fijemos un punto $x \in A_\varepsilon$ y denotemos $s = r - \varepsilon$. Claro que $s > 0$. Considerando nuevamente la definición de A_ε, notamos que $x \in \overline{N(\varepsilon, A)}$. Así, podemos tomar un punto $y \in B(x, s) \cap N(\varepsilon, A)$. Se sigue que $d(x, y) < s$ y existe un punto $a \in A$ tal que $d(y, a) < \varepsilon$. Luego, $d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a) < s + \varepsilon = r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Así, $x \in N(r, A)$. Esto demuestra que $r \in E(A, A_\varepsilon)$.

Con los argumentos de los dos últimos párrafos, se tiene que $H(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$. De esta forma, lo indicado en (a) está demostrado.

Prueba de (b): sea $A_1 = A$. Apliquemos (a) para obtener un elemento A_2 en $C(X)$ tal que $A_1 \subset A_2$ y $H(A_1, A_2) = \frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos que hemos determinado k subcontinuos de X, $A_1, ..., A_k$, tales que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$ y $H(A_j, A_{j+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $j \in \{1, ..., k-1\}$. Para determinar A_{k+1}, consideramos dos casos:

(i) $H(A_k, X) \leq \frac{\varepsilon}{2}$; en este caso hacemos $A_{k+1} = X$.

(ii) $H(A_k, X) > \frac{\varepsilon}{2}$; en este caso, aplicamos (a) para obtener un subcontinuo A_{k+1} de X tal que $A_k \subset A_{k+1}$ y $H(A_k, A_{k+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$.

De este modo, inductivamente, se determina una sucesión de subcontinuos de X, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y satisface una de las siguientes condiciones:

(1) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = X$, para todo $n \geq N$ y $H(A_n, A_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \in \{1, ..., N-1\}$; o

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $H(A_n, A_{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$ y $A_n \neq X$.

Notemos que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición (2), entonces ésta no es una sucesión de Cauchy, en consecuencia, en este caso $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente. Por otro lado, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, sabemos que converge, de hecho $\lim A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, vea el Teorema 1.55. Esta contradicción muestra que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que satisface la condición (1). Finalmente, denotamos $\mathcal{C}_\varepsilon = \{A_1, \ldots, A_N\}$, para tener lo que se indica en (b).

Prueba de (c): fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < H(A, X)$. Usando (b) para todo $n \geq m$, podemos tomar una $(H, \frac{1}{n})$-cadena, $\mathcal{C}_n$, que une a A y a X en $C(X)$ tal que $\mathcal{C}_n$ es también una cadena en el sentido de la Definición 1.16. Es decir, para todo $n \geq m$, $\mathcal{C}_n$ es un subconjunto finito de $C(X)$, digamos $\mathcal{C}_n = \{A_{1,n}, ..., A_{k_n,n}\}$, donde $A_{1,n} = A$, $A_{k_n,n} = X$, $H(A_{i,n}, A_{i+1,n}) < \frac{1}{n}$ y $A_{i,n} \subset A_{i+1,n}$ para todo $i \in \{1, ..., k_n\}$.

Notemos que cada $\mathcal{C}_n$ es un subconjunto cerrado, no vacío de $C(X)$, así $\{\mathcal{C}_n\}_{n\geq m}$ es una sucesión de elementos de $2^{C(X)}$. Dado que $C(X)$ es un espacio métrico compacto (vea el Teorema 1.61), se tiene que $2^{C(X)}$ también es un espacio métrico compacto, así la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n\geq m}$ tiene una subsucesión que converge a un elemento $\mathcal{L}$ en $2^{C(X)}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{C}_n \to \mathcal{L}$. Dado que cada $\mathcal{C}_n$ está $(H, \frac{1}{n})$-encadenado y $\frac{1}{n} \to 0$, aplicando el Teorema 1.70 con $C(X)$ en lugar de X, se tiene que $\mathcal{L} \in C(C(X))$, es decir, $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $C(X)$.

Por otra parte, como $A \in \mathcal{C}_n$ y $X \in \mathcal{C}_n$, para todo $n \geq m$, se obtiene que $A \in \mathcal{L}$ y $X \in \mathcal{L}$.

Veamos que $\mathcal{L}$ es una cadena. Fijemos E y F en $\mathcal{L}$. Por el Teorema 1.52 (a) existen sucesiones $\{A_{i_n,n}\}_{n\geq m}$ y $\{B_{j_n,n}\}_{n\geq m}$ en $C(X)$ tales que $A_{i_n,n} \in \mathcal{C}_n$, $B_{j_n,n} \in \mathcal{C}_n$, $A_{i_n,n} \to E$ y $B_{j_n,n} \to F$.

Dado que cada $\mathcal{C}_n$ es una cadena y $A_{i_n,n}, B_{j_n,n} \in \mathcal{C}_n$ se tiene que $A_{i_n,n} \subset B_{j_n,n}$ o $B_{j_n,n} \subset A_{i_n,n}$. Se sigue que existe un conjunto infinito de números enteros positivos, J, tal que para todo $n \in J$, $A_{i_n,n} \subset B_{j_n,n}$; o, para todo $n \in J$, $B_{j_n,n} \subset A_{i_n,n}$. Así, por el Teorema 1.54 (b), se obtiene que $E \subset F$ o $F \subset E$. Esto prueba que $\mathcal{L}$ es una cadena.

Finalmente, por el Lema 1.68, $\mathcal{L}$ es la imagen de un arco ordenado, con lo cual el Teorema 1.71 está demostrado. □

1.72 Corolario. Para cualesquiera elementos A y B del hiperespacio $C(X)$ de un continuo X tales que $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado desde A hasta B en $C(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que $A \in C(B)$ y $A \neq B$. Por el Teorema 1.71, existe un arco ordenado desde A hasta B, en $C(B)$. Como $C(B) \subset C(X)$ se tiene la conclusión. □

Capítulo 2

Semi fronteras en hiperespacios

En este capítulo presentamos nuestro estudio de semi fronteras en hiperespacios de continuos. Empezamos con resultados que proporcionan condiciones para localizar elementos en la semi frontera de hiperespacios. Luego, usando las semi fronteras, exponemos caracterizaciones del arco, los continuos que contienen n-odos, los continuos que no contienen triodos, los continuos localmente conexos y los hereditariamente indescomponibles. También notamos que la cerradura de la semi frontera del hiperespacio de cada subcontinuo propio de un continuo, X, es un subcontinuo de $C(X)$. Esto nos permite considerar la semi frontera en hiperespacios como una función definida en $C(X) - \{X\}$ con rango en $C(C(X))$. Demostramos que la continuidad de esta función implica que cada subcontinuo propio es unicoherente. Además, probamos que esta función no es continua para los continuos llamados dendroides. Terminamos esta tesis caracterizando a la circunferencia, como el único continuo arco conexo para el cual la función semi frontera es continua.

2.1 Resultados generales

En esta parte introducimos la noción central de esta tesis: la semi frontera en hiperespacios de continuos y demostramos resultados básicos que más adelante son herramientas importantes. Por simplicidad consideramos la siguiente notación.

2.1 Notación. Para un continuo X denotamos,

$$C^*(X) = \{A \in C(X) : A \neq X\}.$$

2.2 Definición. Sean X un continuo y A un elemento de $C^*(X)$. La **semi frontera** de $C(A)$, en el hiperespacio $C(X)$, denotada por $SB(A)$, es definida por

$SB(A) = \{B \in C(A)$: existe una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t)$ no está contenido en A, para todo $t \in (0,1]\}$.

2.3 Nota. Para cualquier continuo X y cualquier elemento A de $C^*(X)$, se tiene que:

(a) $A \in SB(A)$: para esto, basta considerar un arco ordenado desde A hasta X en $C(X)$.

(b) $SB(A)$ es un subconjunto de $Fr(C(A))$, la frontera de $C(A)$ en $C(X)$: si $B \in SB(A)$ y $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en $C(X)$ que contiene a B, considerando una función α como en la Definición 2.2, por continuidad existe un número $t > 0$ tal que $\alpha(t) \in \mathcal{U}$. Se sigue que $\mathcal{U} \cap (C(X) - C(A)) \neq \emptyset$. Así, $B \in Fr(C(A))$.

(c) Si $B \in SB(A)$, entonces $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$: con la notación de los abiertos básicos en el hiperespacio, notamos que $\langle \text{int}(A) \rangle \cap C(X) \subset \text{int}(C(A))$. Ahora, si $B \in SB(A)$, por (b), $B \in Fr(C(A))$. Luego, $B \notin \text{int}(C(A))$, así $B \notin \langle \text{int}(A) \rangle$, es decir, B no está contenido en $\text{int}(A)$, por lo cual $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

2.4 Ejemplo. En relación con (b) y (c) de la nota previa, aquí mostraremos un continuo X que tiene un subcontinuo propio A tal que $SB(A)$ no es un conjunto cerrado en $C(X)$, de este modo, no coincide con $Fr(C(A))$. Además, notaremos que A tiene un subcontinuo B tal que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$ y $B \notin SB(A)$.

Determinamos el continuo X como sigue: para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por L_n al segmento del plano euclidiano con puntos extremos $(0, \frac{1}{n})$ y $(1, \frac{1}{n})$. Además, denotamos por L_0 al segmento con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 0)$; y por L al segmento con puntos extremos $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Consideremos el continuo

$$X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n) \cup L_0 \cup L.$$

Ahora, para cada $n \geq 2$, denotemos por A_n el segmento con puntos extremos $(0, \frac{1}{n})$ y $(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Consideremos el elemento $A \in C^*(X)$ dado por

$$A = (\bigcup_{n \geq 2} A_n) \cup L_0 \cup L.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $p_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y $p = (1, 0)$. Notemos que $\{p_n\} \to \{p\}$. Mostraremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{p_n\} \in SB(A)$ y $\{p\} \notin SB(A)$. De esta manera el conjunto $SB(A)$ no es cerrado en $C(X)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\alpha_n : [0,1] \to C(X)$ por $\alpha_n(t) = L_n(t)$ donde, para cada $t \geq 0$, $L_n(t)$ es el subsegmento del segmento L_n que tiene puntos extremos p_n y $(1 - \frac{1}{n} + \frac{t}{n}, \frac{1}{n})$. Es claro que α_n es una función continua, $\alpha_n(0) = \{p_n\}$ y $\alpha_n(t)$ no está contenido en A para todo $t > 0$. Así, $\{p_n\} \in SB(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, denotemos $U = B(p, \frac{1}{2})$ y sea D la componente de U que contiene al punto p. Notemos que $D \subset A$, de hecho $D \subset L_0$. Consideremos una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$. Dado que $\langle U \rangle$ es un abierto en 2^X que contiene al elemento $\{p\}$ y α es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in (0, \varepsilon)$, $\alpha(t) \in \langle U \rangle$, es decir, $\alpha(t) \subset U$. Fijemos $t_0 \in (0, \varepsilon)$ y denotemos $E = \cup\{\alpha(t) : t \in [0,1]\}$. Por el Teorema 1.63, se tiene que E es un subcontinuo de X. Además, como $\alpha(t) \subset U$, para cada $t \in [0, t_0]$ se tiene que $p \in E \subset U$. Se sigue que $E \subset D$. Como $\alpha(t_0) \subset E$ y $D \subset A$, se obtiene que $\alpha(t_0) \subset A$. En consecuencia, $\{p\} \notin SB(A)$.

Lo anterior prueba que $SB(A)$ no es cerrado en $C(A)$. Así, puesto que $Fr(C(A))$ es un conjunto cerrado en $C(A)$, concluimos que $SB(A) \neq Fr(C(A))$, compare con (b) de la Nota 2.3. Por otra parte, pongamos $B = \{p\}$ y notemos que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$ y $B \notin SB(A)$, compare con (c) de la Nota 2.3.

2.5 Teorema. Para cualquier continuo X, cualquier elemento A de $C^*(X)$ y cualquier elemento B de $C(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $B \in SB(A)$;

(b) existe una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$, $\alpha(t) \not\subset A$ para todo $t \in (0,1]$ y, si $s < t$ entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$; y

(c) existe un arco ordenado $\beta : [0,1] \to C(X)$ tal que $\beta(0) = B$ y $\beta(t) \not\subset A$ para todo $t \in (0,1]$.

Demostración. (a) implica (b): supongamos que $B \in SB(A)$ y consideremos una función continua $\beta : [0,1] \to C(X)$ tal que $\beta(0) = B$ y $\beta(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$, vea la Definición 2.2.

Definamos $\alpha : [0,1] \to C(X)$ como $\alpha(t) = \cup\{\beta(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ para cada $t \in [0,1]$. Observe que si $t \in [0,1]$ entonces $\beta([0,t])$ es un subcontinuo de $C(X)$, así, por el Teorema 1.63, la función α esta bien definida. Además, no es difícil justificar que α es continua. Es claro que la función α satisface las condiciones que se indican en (b).

(b) implica (c): denotemos $\Lambda = \alpha([0,1])$. Es claro que Λ es una cadena y un continuo no degenerado de 2^X. Luego por el Lema 1.68, existe un arco ordenado $\beta : [0,1] \to 2^X$ tal que $\beta([0,1]) = \Lambda$.

Como $\beta([0,1]) = \alpha([0,1])$, existen números r y s en el intervalo $[0,1]$ tales que $\beta(0) = \alpha(r)$ y $\beta(s) = \alpha(0)$. Como $\alpha(0) \subset \alpha(r)$, se tiene que $\beta(s) \subset \beta(0)$. Se sigue que $s = 0$, ya que β es un arco ordenado. Así, $\beta(0) = \alpha(0)$. Luego, $\beta(0) = B$. Además, dado $t > 0$ existe $r > 0$ tal que $\beta(t) = \alpha(r)$, de donde $\beta(t) \not\subset A$. Esto demuestra lo indicado en (c).

(c) implica (a): esto es claro. □

2.6 Teorema. Sean X un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B, D \in C(A)$. Si $B \in SB(A)$ y $B \subset D$, entonces $D \in SB(A)$.

Demostración. Por el Teorema 2.5, podemos considerar un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \not\subset A$, para todo $t > 0$. Definamos $\beta : [0,1] \to C(X)$ como $\beta(t) =$

$\alpha(t) \cup D$, para todo $t \in [0,1]$. Observemos que β está bien definida y es continua (vea el Teorema 1.54 (a)). Además $\beta(0) = \alpha(0) \cup D = B \cup D = D$ y, dado que $\alpha(t) \not\subset A$, para todo $t > 0$, se tiene que $\beta(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$. Así, $D \in SB(A)$. $\square$

2.7 Nota. Recordamos que un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Un subconjunto, A, de un espacio X, es un **conjunto arco conexo** si cualesquiera dos puntos de A pertenecen a un arco contenido en A.

2.8 Corolario. Si X es un continuo y $A \in C^*(X)$, entonces $SB(A)$ es un subconjunto arco conexo de $C(A)$.

Demostración. Dado $B \in SB(A) - \{A\}$, por el Corolario 1.72, podemos considerar un arco ordenado, $\beta : [0,1] \to C(X)$, desde B hasta A. Se tiene que $B \subset \beta(t) \subset A$ para todo $t \in [0,1]$. Luego, por el Teorema 2.6, $\beta(t) \in SB(A)$, para todo $t \in [0,1]$. Es decir, $\beta([0,1])$ es un arco en $SB(A)$ que contiene a los elementos B y A. $\square$

2.9 Teorema. Sean X un continuo y $B, D \in C^*(X)$ tales que $B \cap D \neq \emptyset$, $B \not\subset D$ y $D \not\subset B$. Si E es una componente de $B \cap D$, entonces $E \in SB(B) \cap SB(D)$.

Demostración. Consideremos un arco ordenado en $C(X)$ desde E hasta B, $\alpha : [0,1] \to C(X)$. Notemos que si $\alpha(t) \subset D$, entonces $\alpha(t) \subset B \cap D$ y, puesto que $E \subset \alpha(t)$ y E es una componente de $B \cap D$, se sigue que $E = \alpha(t)$, por lo cual $t = 0$. Esto prueba que $\alpha(t) \not\subset D$ para todo $t \in (0,1]$. Así, $E \in SB(D)$. Análogamente se tiene que $E \in SB(B)$. $\square$

Notamos que si $B \in Fr(C(A))$, donde A es un subcontinuo propio de un continuo X, entonces, por definición de frontera, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X) - C(A)$ (i.e., $B_n \not\subset A$) que converge a B. El resultado que sigue indica que si tal sucesión se puede elegir decreciente (i.e., $B_{n+1} \subset B_n$), entonces B, más que a la frontera, pertenece a la semi frontera de $C(A)$.

2.10 Teorema. Sean X un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B \in C(A)$. Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $C(X)$ que converge a B y $B_n \not\subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $B \in SB(A)$.

Demostración. Como $B \subset A$ y $B_n \not\subset A$, podemos suponer que $B_n \neq B_m$ si $n \neq m$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos un arco ordenado, α_n, desde B_{n+1} hasta B_n en $C(X)$, véase el Corolario 1.72. Por un homeomorfismo entre los intervalos $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ y $[0, 1]$, podemos suponer que el dominio de definición de α_n es el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Así, $\alpha_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to C(X)$, $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = B_{n+1}$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = B_n$.

Definamos $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ por $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ si $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Es claro que α está bien definida y que $\alpha(t) \not\subset A$ si $t > 0$. Resta justificar que α es continua. Para esto, sean $t \in [0, 1]$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, 1]$ tales que $t_n \to t$. En lo que sigue consideramos dos casos.

(1) $t \neq 0$: en este caso existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$.

Subcaso (i) $n = 1$; es decir, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. En este subcaso, el intervalo $(\frac{1}{3}, 1]$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $t \in (\frac{1}{3}, 1]$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (\frac{1}{3}, 1]$ para todo $n \geq N$. Definimos $g : [\frac{1}{3}, 1] \to C(X)$ como

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_2(x), & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \alpha_1(x), & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que g es una función continua, así, $g(t_n) \to g(t)$. Además, $g(t) = \alpha(t)$ y $g(t_n) = \alpha(t_n)$ si $n \geq N$. Se sigue que $\alpha(t_n) \to \alpha(t)$.

Subcaso (ii) $n \geq 2$; en este subcaso se tiene que $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-1})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $t \in (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-1})$, por lo que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-1})$ para todo $n \geq M$. Definimos $h : [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-1}] \to C(X)$ como

$$h(x) = \begin{cases} \alpha_{n+1}(x), & \text{si} \quad \frac{1}{n+2} \leq x \leq \frac{1}{n+1}; \\ \alpha_n(x), & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ \alpha_{n-1}(x), & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n-1}. \end{cases}$$

Claramente h es una función continua, por lo cual $h(t_n) \to h(t)$. Además, $h(t) = \alpha(t)$ y $h(t_n) = \alpha(t_n)$ si $n \geq M$. Se sigue que $\alpha(t_n) \to \alpha(t)$.

(2) $t = 0$: en este caso podemos suponer que $0 < t_{n+1} < t_n$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_n+1} \leq t_n \leq \frac{1}{k_n}$. Se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(t_n) = \alpha_{k_n}(t_n)$, en consecuencia $B_{k_{n+1}} \subset \alpha(t_n) \subset B_{k_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $B_{k_{n+1}} \to B$ y $B_{k_n} \to B$, se sigue que $\alpha(t_n) \to B$. Finalmente, puesto que $B = \alpha(0)$, se concluye que $\alpha(t_n) \to \alpha(0)$.

Los argumentos dados en los casos (1) y (2) demuestran que α es una función continua. $\square$

Como una aplicación del teorema previo, a continuación presentamos otro resultado que es útil para determinar elementos en la semi frontera con sucesiones de continuos.

2.11 Teorema. Sean X un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B \in C(A)$. Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a B, $B_n \not\subset A$ y $B_n \cap B \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $B \in SB(A)$.

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_m = B \cup (\cup\{B_n : n \geq m\}).$$

Como $B_n \cap B \neq \emptyset$, se tiene que C_m es conexo. Por otro lado, notemos que si $\mathcal{C}_m = \{B\} \cup \{B_n : n \geq m\}$, entonces $C_m = \bigcup \mathcal{C}_m$. Ahora, puesto que $B_n \to B$, se tiene que $\mathcal{C}_m$ es un conjunto cerrado en 2^X ($\mathcal{C}_m$ es una subsecesión de la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ junto con su límite). Luego, por el Teorema 1.62, se obtiene que C_m es un conjunto cerrado en X. Así, cada C_m es un subcontinuo de X.

En lo que sigue verificamos que la sucesión $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ cumple las hipótesis del Teorema 2.10.

(i) La sucesión $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a B: dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_n, B) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, ya que $B_n \to B$. Luego, por el Teorema 1.47, se tiene que $B \subset N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$, para todo $n \geq N$. Por esto, y por la definición de C_m, se sigue que, si $m \geq N$, entonces $B \subset N(\varepsilon, C_m)$ y $C_m \subset N(\varepsilon, B)$. Luego, por el Teorema 1.47, $C_m \to B$.

(ii) $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es un sucesión decreciente: esto es claro por la definición de C_m.

(iii) $C_m \not\subset A$, para todo $m \in \mathbb{N}$: esto resulta porque $B_m \subset C_m$ y $B_m \not\subset A$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Con lo anterior, aplicando el Teorema 2.10, se concluye que $B \in SB(A)$. $\square$

En el continuo del Ejemplo 2.4, vimos que el límite de una sucesión de elementos en la semi frontera de un hiperespacio no necesariamente pertenece a tal semi frontera. El teorema que sigue indica que con una condición adicional el límite se queda en la semi frontera. La prueba de éste es una aplicación del Teorema 2.11.

2.12 Teorema. Sean X un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B \in C(A)$. Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $SB(A)$ que converge a B y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap B \neq \emptyset$, entonces $B \in SB(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.5, para cada elemento B_n, existe una función continua $\alpha_n : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha_n(0) = B_n$, $\alpha_n(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$ y, si $s < t$, entonces $\alpha_n(s) \subset \alpha_n(t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos $t_n > 0$ tal que $H(B_n, \alpha_n(t_n)) < \frac{1}{n}$. Notemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. Claro que podemos suponer que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $H(\alpha_n(t_n), B) \leq H(\alpha_n(t_n), B_n) + H(B_n, B)$, se sigue que para todo $n \geq N$, $H(\alpha_n(t_n), B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Esto demuestra que $\alpha_n(t_n) \to B$.

Notemos que, dado $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(t_n) \not\subset A$ ya que $t_n > 0$, además $\alpha_n(t_n) \cap B \neq \emptyset$, esto porque $B_n \subset \alpha_n(t_n)$ y $B_n \cap B \neq \emptyset$. Se sigue que $\{\alpha_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que cumple con las hipótesis del Teorema 2.11, por lo cual $B \in SB(A)$. $\square$

2.2 Caracterizaciones de continuos

En esta sección, como su título lo indica, exponemos caracterizaciones de algunas clases de continuos, mediante las semi fronteras en hiperespacios. Específicamente, probamos teoremas de caracterización para el arco, los continuos que contienen, o no, n-odos, en particular los continuos atriódicos, los continuos localmente conexos y los hereditariamente indescomponibles.

2.2.1 El arco

Aquí presentamos una caracterización del arco, en términos de las semi fronteras. Primero mostramos que la semi frontera de cualquier subcontinuo propio no degenerado de un arco es también un arco.

Usamos la notación que sigue: para un punto p y un subcontinuo A de un continuo X, denotamos

$$C(p, A) = \{B \in C(A) : p \in B\}.$$

2.13 Ejemplo. Si A es un subcontinuo propio, no degenerado, del intervalo $[0, 1]$, entonces la semi frontera de $C(A)$ en $C([0, 1])$ es un arco. Más preciso, se tiene lo que sigue:

(1) Si $A = [a, 1]$, con $0 < a < 1$, entonces $SB(A) = C(a, A)$;

(2) Si $A = [0, b]$, con $0 < b < 1$, entonces $SB(A) = C(b, A)$; y

(3) Si $A = [a, b]$, con $0 < a < b < 1$, entonces $SB(A) = C(a, A) \cup C(b, A)$.

A continuación justificamos el caso (3). En este caso, notamos que $Fr(A) = \{a, b\}$, por lo cual $SB(A) \subset C(a, A) \cup C(b, A)$, véase la Nota 2.3. Por otra parte, si $B \in C(a, A)$, entonces $B = [a, c]$ para algún $c \in [a, b]$. Luego, definimos $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ por $\alpha(t) = [a - at, c]$ para todo $t \in [0, 1]$. Es claro que α es una función continua tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t)$ no está contenido en A si $t > 0$. Esto prueba que $C(a, A) \subset SB(A)$. Similarmente se demuestra que $C(b, A) \subset SB(A)$.

2.14 Teorema. Un continuo no degenerado X es un arco si, y sólo si, X es homeomorfo a $SB(A)$, para cada subcontinuo propio no degenerado, A, de X.

Demostración. La necesidad está probada en el Ejemplo 2.13.

Recíprocamente, supongamos que $X \approx SB(A)$, para cada $A \in C^*(X) - F_1(X)$. Por el Corolario 2.8, sabemos que las semi fronteras son conjuntos arco conexos. Se sigue que X es arco conexo. Consideremos puntos, p y q, y un arco, L, en X, con puntos extremos p y q. Notemos que $SB(L) \subset C(L) \approx [0,1] \times [0,1]$, lo que nos dice que X es homeomorfo a un subcontinuo del plano.

Afirmamos que $SB(L) \subset C(p, L) \cup C(q, L)$.

Para mostrar esto, supongamos que lo afirmado es falso y fijemos un elemento E en $SB(L)$ tal que $E \cap \{p, q\} = \emptyset$. Denotemos $\mathcal{D} = \{B \in C(L) : E \subset B\}$. No es difícil verificar que $\mathcal{D}$ es una 2-celda, es decir, $\mathcal{D} \approx [0,1] \times [0,1]$. Además, por el Teorema 2.6, se tiene que $\mathcal{D} \subset SB(L)$. Dado que $SB(L) \approx X$, existe un subconjunto D de X tal que $D \approx [0,1] \times [0,1]$.

Ahora, consideramos un subcontinuo T de D homeomorfo al continuo del plano determinado por $([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$, el continuo T es llamado un triodo simple en D. Notamos que dado $B \in C(T)$ podemos determinar un subcontinuo B_0 de D, que contiene propiamente a B y tal que $B_0 \cap T = B$. Ahora, si $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado desde B hasta B_0 se tiene que $\alpha(t) \not\subset T$ para todo $t > 0$ (ya que si $\alpha(t) \subset T$, entonces $\alpha(t) \subset T \cap B_0 = B$, por lo cual $t = 0$). Lo anterior prueba que $SB(T) = C(T)$. Por otro lado, como T es un triodo simple, sabemos que $C(T)$ contiene una 3-celda, digamos Y, es decir $Y \subset C(T)$ y $Y \approx [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Luego, dado que $SB(T) = C(T)$ y $SB(T) \approx X$, se obtiene que X contiene un subespacio Y_0 homeomorfo a una 3-celda, contradiciendo el hecho de que X es homeomorfo a un subcontinuo del plano.

Esta contradicción demuestra nuestra afirmación.

Finalmente, no es difícil verificar que $C(p,L) \cup C(q,L)$ es un arco en $C(L)$. Se concluye que $SB(L)$, y así X, es un arco. $\square$

2.2.2 Continuos con n-odos

Es esta parte caracterizamos a los continuos que contienen n-odos, en términos de la cardinalidad del conjunto de los elementos minimales en las semi fronteras. En este mismo sentido, también exponemos un ejemplo y un teorema respecto de continuos que contienen ∞-odos.

Primero anotamos formalmente los términos involucrados y acordamos alguna notación.

2.15 Definición. Sea n un entero positivo. Un **n-odo** en un continuo X es un elemento B de $C(X)$ para el cual existe un elemento A de $C(B)$ tal que $B - A$ tiene al menos n componentes.

2.16 Definición. Un **∞-odo** en un continuo X es un elemento B de $C(X)$ para el cual existe un elemento A de $C(B)$ tal que $B - A$ tiene un número infinito de componentes.

2.17 Lema. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si A y B son subcontinuos de un continuo X tales que $A \cap B$ tiene al menos n componentes, entonces X contiene un n-odo.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos n componentes diferentes de $A \cap B$, digamos $C_1, \ldots, C_n$. Por normalidad, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un conjunto abierto, U_i, en B tal que $C_i \subset U_i$

y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por el Teorema 1.11, podemos considerar un subcontinuo, D_i, de B tal que $C_i \subsetneq D_i \subset U_i$. Denotemos $D = A \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$. Es claro que D es un subcontinuo de X. Se tiene que $D - A = (D_1 - A) \cup \cdots \cup (D_n - A)$. Además, $D_i - A \neq \emptyset$ (porque si $D_i - A = \emptyset$, entonces $D_i \subset A$, así $D_i \subset A \cap B$, de donde $D_i = C_i$, una contradicción). También se tiene que $D_i - A$ y $D_j - A$ son conjuntos separados, ya que están contenidos en los conjuntos abiertos y ajenos U_i y U_j, respectivamente. Esto significa que D es un n-odo en X. $\square$

2.18 Definición. Sean X un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B \in SB(A)$. Un **elemento minimal** en $SB(A)$ respecto de B es un elemento C de $SB(A)$ tal que $C \subset B$ y si $D \in SB(A)$ con $D \subset C$, entonces $D = C$. Si $B = A$ omitimos la frase respecto de A.

El lema que sigue garantiza la existencia de elementos minimales en semi fronteras.

2.19 Lema. Si X es un continuo, $A \in C^*(X)$ y $B \in SB(A)$, entonces existe un elemento minimal en $SB(A)$ respecto de B.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{C \in C(B) : C \in SB(A)\}$. Notamos que $B \in \mathcal{C}$. Consideramos una sucesión decreciente, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $\mathcal{C}$ y denotamos $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Por el Teorema 1.19, se tiene que $E \in C(B)$, y, por el Teorema 1.56, se tiene que $C_n \to E$. Luego, por el Teorema 2.12, se obtiene que $E \in SB(A)$. Así, $E \in \mathcal{C}$. Ahora, por el Teorema de reducción de Brouwer (Teorema 1.22), se deduce que existe un elemento minimal en la colección $\mathcal{C}$. Esto prueba el lema. $\square$

2.20 Notación. Dados un continuo X y $A \in C^*(X)$, el conjunto de todos los elementos minimales de $SB(A)$ se denota por $m(A)$. Notamos que, por el Lema 2.19, $m(A)$ no es vacío.

2.21 Teorema. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X contiene un n-odo si, y sólo si, existe $E \in C^*(X)$ tal que el conjunto de los elementos minimales $m(E)$ tiene al menos n elementos.

Demostración. Supongamos que X es un continuo que contiene un n-odo. Si $n = 1$, la conclusión se tiene trivialmente ya que $m(E) \neq \emptyset$ para todo elemento $E \in C^*(X)$ (Lema 2.19). Así, en lo que sigue suponemos que $n \geq 2$.

Consideremos un n-odo contenido en X, digamos B. Así, existe un subcontinuo A de B, tal que $B - A$ tiene al menos n componentes. Consideremos n componentes de $B-A$, $D_1, ..., D_n$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, consideremos un punto $x_i \in D_i$. Luego, por la normalidad de X, existe un conjunto abierto, U, en X tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset X - \{x_1, \ldots, x_n\}$. Se tiene que $D_i \not\subset \overline{U}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Denotemos por E a la componente de $\overline{U}$ que contiene a A. Se tiene que $D_i \not\subset E$ y, así, $\overline{D_i} \not\subset E$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Por otra parte, notemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $A \cup D_i$ es un continuo en X (Corolario 1.15). Ahora, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ consideremos un arco ordenado, α_i, desde A hasta $A \cup D_i$ (Corolario 1.72). Dado que α_i es continua y $A \in \langle U \rangle$ existe $\varepsilon_i > 0$ tal que si $t < \varepsilon_i$, entonces $\alpha_i(t) \in \langle U \rangle$. Fijemos un número $t_i \in (0, \varepsilon_i)$ y denotemos $B_i = \alpha_i(t_i)$. Notemos que $A \subset B_i \subset U$, por lo cual $B_i \subset E$. Además, como $A \neq B_i$ y $B_i \subset A \cup D_i$, se sigue que $B_i \cap D_i \neq \emptyset$, por lo cual $E \cap D_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por esto, y considerando que $\overline{D_i} \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $E \not\subset \overline{D_i}$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Notemos que $B - A$ es un conjunto abierto, propio y no vacío de B, así por el Teorema 1.13, $\overline{D_i} \cap A \neq \emptyset$ en consecuencia $\overline{D_i} \cap E \neq \emptyset$. Consideremos una componente F_i de $\overline{D_i} \cap E$. Por el Teorema 2.9, se tiene que $F_i \in SB(E)$. Ahora, por el Teorema 2.19, podemos considerar un elemento minimal en $SB(E)$ con respecto de F_i, el cual denotamos por E_i.

Afirmamos que $E_1, ..., E_n$ son n elementos diferentes en $m(E)$.

Para probar esta afirmación, primero mostremos que $E_i \not\subset A$. Supongamos que $E_i \subset A$ y consideremos un arco ordenado, β, en $C(X)$ tal que $\beta(0) = E_i$. Dado que U es un conjunto abierto en X que contiene a E_i se tiene que $E_i \in \langle U \rangle$. Luego por la continuidad de β, existe $t > 0$ tal que $\beta(t) \in \langle U \rangle$, es decir, $\beta(t) \subset U$. Es claro que $A \cup \beta(t) \in C(X)$ y $A \subset A \cup \beta(t) \subset U \subset \overline{U}$, por lo cual $A \cup \beta(t) \subset E$. En particular $\beta(t) \subset E$ donde $t > 0$ lo cual contradice el hecho de que $E_i \in SB(E)$. Así $E_i \not\subset A$.

Ahora, veamos que $E_i \cap D_i \neq \emptyset$. Para esto, supongamos que $E_i \cap D_i = \emptyset$. Dado que $E_i \not\subset A$ y $E_i \subset F_i \subset E \cap \overline{D_i} \subset B$ se tiene que $E_i \cap (B - A) \neq \emptyset$. Se sigue que existe $j \in \{1, ..., n\}$ con $j \neq i$ tal que $E_i \cap D_j \neq \emptyset$ lo que implica que $\overline{D_i} \cap D_j \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $E_i \cap D_i \neq \emptyset$.

Fijamos $i \neq j$ y un punto $x_j \in E_j \cap D_j$. Como $\overline{D_i} \cap D_j = \emptyset$, se sigue que $x_j \notin \overline{D_i}$, y así $x_j \notin E_i$. Luego, $E_i \neq E_j$. Así, $E_1, ..., E_n$ son n elementos diferentes en $m(E)$. Hemos demostrado la primera parte del teorema.

Recíprocamente, fijemos un elemento $E \in C^*(X)$ tal que $m(E)$ tiene al menos n elementos y fijemos n de esos elementos, digamos $E_1, ..., E_n$ tales que $E_i \neq E_j$, si $i \neq j$. Ahora, para cada

$j \in \{1, ..., n\}$, consideremos un arco ordenado, α_j, en $C(X)$ tal que $\alpha_j(0) = E_j$ y $\alpha_j(t) \not\subset E$ para todo $t > 0$, vea el Teorema 2.5. Por la minimalidad de los E_j, $E_j \not\subset E_i$ para $i \neq j$. Luego, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, existe un conjunto abierto, U_j, en X tal que $E_j \subset U_j$ y $E_i \not\subset \overline{U_j}$ para todo $i \in \{1, ..., n\} - \{j\}$. Dado que α_j es continua, existe $t_j > 0$ tal que $\alpha_j(t_j) \subset U_j$ y, en consecuencia:

$$E_i \not\subset \alpha_j(t_j), \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\} - \{j\}. \tag{2.1}$$

Afirmación 1. Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ existe $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t_j) \subset E$.

Para probar esta afirmación fijemos $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$. Si ocurre que $E_i \cap \alpha_j(t_j) = \emptyset$, entonces, por la continuidad de α_i, existe $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t_j) = \emptyset$, así tal número s cumple lo requerido en la afirmación. Luego, en lo que sigue suponemos que $E_i \cap \alpha_j(t_j) \neq \emptyset$. Ahora, notamos que si $E_i \cap \alpha_j(t_j)$ tiene al menos n componentes, entonces la conclusión del teorema se sigue por el Lema 2.17. Así, en lo que sigue denotamos por $C_1, ..., C_r$ a las componentes de $E_i \cap \alpha_j(t_j)$ y notamos que $r < n$.

Ahora, supongamos que no existe $s > 0$ que cumple con lo indicado en la Afirmación 1. Dado $k \geq 1$, $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j) \not\subset E$. Podemos suponer que $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ tiene menos de n componentes, pues en otro caso la conclusión del teorema se sigue por el Lema 2.17. Sea C la unión de las componentes de $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ que no intersectan a E_i. Es claro que C es un conjunto compacto, posiblemente vacío, ajeno de E_i.

Ahora, dado $k \in \mathbb{N}$, por la continuidad de α_i, podemos tomar un número $z_k \in (0, \frac{1}{k})$ tal que $\alpha_i(z_k) \cap C = \emptyset$. Fijemos un punto $x \in ([\alpha_i(z_k) \cap \alpha_j(t_j)] - E)$. Sea D_k la componente de $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ que contiene a x. Dado que $x \in \alpha_i(z_k)$, se tiene que $x \notin C$, así $D_k \cap E_i \neq \emptyset$. Fijemos un punto $y \in D_k \cap E_i$. Como $D_k \subset \alpha_j(t_j)$

se obtiene que $y \in E_i \cap \alpha_j(t_j)$, luego existe $l_k \in \{1, ..., r\}$ tal que $y \in C_{l_k}$. Notemos que $C_{l_k} \subset E_i \cap \alpha_j(t_j) \subset \alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ y $y \in C_{l_k} \cap D_k$. Así $C_{l_k} \subset D_k$.

Con lo anterior hemos mostrado que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe una componente D_k de $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ y existe $l_k \in \{1, ..., r\}$ tales que $C_{l_k} \subset D_k$.

Dado $l \in \{1, ..., r\}$, denotamos $J_l = \{k \in \mathbb{N} : l = l_k\}$. Es claro que $\mathbb{N} = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_r$. Así, existe $l_0 \in \{1, ..., r\}$ tal que J_{l_0} es un conjunto infinito. Denotemos $J_{l_0} = \{k_m : m \in \mathbb{N}\}$ donde $k_m < k_{m+1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Notemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $D_{k_m} \in C(X)$, $D_{k_m} \not\subset E$ y $C_{l_0} \subset D_{k_m}$ ($k_m \in J_{l_0}$ lo que implica que $l_0 = l_{k_m}$ así $C_{l_0} \subset D_{k_m}$), además puesto que $\alpha_i(\frac{1}{k_{m+1}}) \cap \alpha_j(t_j) \subset \alpha_i(\frac{1}{k_m}) \cap \alpha_j(t_j)$ se obtiene que $D_{k_{m+1}} \subset D_{k_m}$ (ya que estas son componentes respectivas y $C_{l_0} \subset D_{k_{m+1}} \cap D_{k_m}$).

Denotemos $D = \cap\{D_{k_m} : m \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $D \in C(X)$, además por el Teorema 1.56, $D_{k_m} \to D$. Por otra parte, notemos que $D_{k_m} \subset \alpha_i(\frac{1}{k_m})$ y $\alpha_i(\frac{1}{k_m}) \to E_i$. Se sigue, por el Teorema 1.54 que $D \subset E_i$, así $D \subset E$. Luego $\{D_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a D tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, $D_{k_m} \not\subset E$ y $D_{k_{m+1}} \subset D_{k_m}$ por lo cual $D \in SB(E)$, vea el Teorema 2.10. Además, $D \subset E_i \cap \alpha_j(t_j)$. Como $E_i \in m(E)$ y $D \in SB(E)$ se tiene que $D = E_i$. Luego $E_i \subset E_i \cap \alpha_j(t_j) \subset E_i$, así $E_i = E_i \cap \alpha_j(t_j)$ lo que implica que $E_i \subset \alpha_j(t_j)$ lo cual contradice la condición sobre t_j indicada en (2.1). Así la Afirmación 1 está mostrada.

Ahora, considerando la Afirmación 1, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ fijamos $s_i \in (0, t_i)$ tal que $\alpha_i(s_i) \cap \alpha_j(t_j) \subset E$, para todo $j \in \{1, ..., n\} - \{i\}$. Denotemos $B = E \cup \alpha_1(s_1) \cup \alpha_2(s_2) \cup \cdots \cup \alpha_n(s_n)$. Es claro que B es un subcontinuo de X.

Afirmación 2. El continuo B es un n-odo en X.

Notemos que $B - E = (\alpha_1(s_1) - E) \cup \cdots \cup (\alpha_n(s_n) - E)$ y $(\alpha_i(s_i) - E) \neq \emptyset$. Así, resta mostrar que $\alpha_i(s_i) - E$ y $\alpha_j(s_j) - E$ son conjuntos separados. Para probar esto supongamos que existe un punto $x \in \overline{(\alpha_i(s_i) - E)} \cap (\alpha_j(s_j) - E)$. Se tiene que $x \in \alpha_i(s_i)$ y $x \in \alpha_j(s_j)$. Luego, puesto que s_i y s_j cumplen lo indicado en la Afirmación 1, se obetiene que $x \in E$, lo cual es una contradicción. Así $B - E$ es la unión de n conjuntos separados dos a dos, es decir, B es un n-odo en X. □

2.22 Nota. Parece natural conjeturar un resultado similar al Teorema 2.21 con la noción de ∞-odo. Sin embargo, como probamos a continuación, un resultado así sólo es válido en una dirección. Concretamente, el teorema que sigue prueba que si existe un subcontinuo propio de un continuo que tiene un conjunto infinito de elementos minimales, entonces el continuo debe contener un ∞-odo; y finalizamos esta subsección con el Ejemplo 2.25, donde mostramos un continuo que es un ∞-odo y para el cual todo subcontinuo propio tiene un conjunto finito de elementos minimales.

2.23 Teorema. Sea X un continuo. Si existe $E \in C^*(X)$ tal que el conjunto de elementos minimales $m(E)$ es infinito, entonces X contiene un ∞-odo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $E \in C^*(X)$ tal que $m(E)$ es infinito. Consideremos un sucesión en $m(E)$, de elementos diferentes dos a dos, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por la compacidad del hiperespacios, podemos suponer que existe $E_0 \in C(X)$ tal que $E_n \to E_0$. Notamos que $E_0 \in C(E)$. Si existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ infinito tal que $E_0 \subset E_k$ para todo $k \in J$, se obtiene que $E_0 \in SB(E)$, véase el Teorema 2.12. Dado que cada E_k es un elemento minimal en $SB(E)$, se sigue que $E_0 = E_k$ para todo $k \in J$, lo cual contradice el hecho de que $E_i \neq E_j$ para todo $i \neq j$.

Por lo anterior, podemos suponer que $E_0 \not\subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos una función continua, $\alpha_n : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha_n(0) = E_n$, $\alpha_n(t) \not\subset E$ para todo $t > 0$ y, si $s < t$, entonces $\alpha_n(s) \subset \alpha_n(t)$, véase el Teorema 2.5 (b).

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y un punto $x_0 \in E_0 - E_n$. Se tiene que $E_n \in \langle X - \{x_0\} \rangle$. Luego, por la continuidad de α_n existe $t > 0$ tal que $\alpha_n(t) \in \langle X - \{x_0\} \rangle$, lo que implica que $\alpha_n(t) \subset X - \{x_0\}$, y así $E_0 \not\subset \alpha_n(t)$. Considerando el Teorema 1.54 (b), se justifica que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $E_m \not\subset \alpha_n(t)$, para todo $m \geq M$. Ahora, para cada $m \in \{1, ..., M-1\} - \{n\}$, tomamos un punto $x_m \in (E_m - E_n)$. Se tiene que $E_n \in \langle X - \{x_m\} \rangle$ para cada $m \in \{1, ..., M-1\} - \{n\}$. Se sigue que existe $t_m > 0$ tal que $E_m \not\subset \alpha_n(t_m)$. Denotemos $t_n = \inf\{t_1, t_2, ..., t_{M-1}, t\}$. Se obtiene que $E_m \not\subset \alpha_n(t_n)$ para todo $m \neq n$.

Hemos demostrado que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que $E_m \not\subset \alpha_n(t_n)$ para todo $m \neq n$. Podemos suponer que la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X tiene sólo un número finito de componentes, pues en otro caso, usando el Teorema 14 de [11], es posible demostrar que X contiene un ∞-odo, con lo cual se concluye la prueba. Considerando esto último, la afirmación que sigue se demuestra de manera similar a la Afirmación 1 de la demostración del Teorema 2.21.

Afirmación 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in (0, t_n)$ tal que $\alpha_n(s_n) \cap (\alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1})) \subset E$.

Por la continuidad de α_n, el número s_n de esta afirmación se puede elegir de modo que $H(E_n, \alpha_n(s_n)) < \frac{1}{n}$. Denotamos

$$B = E \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n(s_n)).$$

Afirmación 2. El conjunto B es un subcontinuo de X.

Primero notemos que B es conexo, ya que $E_n \subset \alpha_n(s_n) \cap E$. En lo que sigue probamos que B es un conjunto cerrado en X. Fijemos un punto $b \in \overline{B}$ y una sucesión, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en B tales que $b_n \to b$. Consideramos los siguientes casos:

Caso 1. Existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in J$, $b_n \in E$ o , para todo $n \in J$, $b_n \in \alpha_j(s_j)$ para algún $j \in \mathbb{N}$. En este caso, se obtiene que $b \in E$ o $b \in \alpha_j(s_j)$, respectivamente, y así $b \in B$.

Caso 2. Existe una subsucesión, $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, de la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_{n_k} \in \alpha_{n_k}(s_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En este caso, vamos a demostrar que $b \in E_0$, demostrando que, para todo $\varepsilon > 0$, $d(b, E_0) < \varepsilon$. Para esto fijemos $\varepsilon > 0$, y $N_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{6}$. Dado que $E_{n_k} \to E_0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(E_{n_k}, E_0) < \frac{\varepsilon}{6}$, para todo $k \geq N_2$. Denotemos $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.

Como $H(E_{n_k}, \alpha_{n_k}(s_{n_k})) < \frac{1}{n_k}$, para todo $k \geq N_3$ existen puntos $y_{n_k} \in E_{n_k}$ y $z_{n_k} \in E_0$ tales que $d(y_{n_k}, b_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{6}$ y $d(y_{n_k}, z_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{6}$. Por la desigualdad triangular, se sigue que $d(b_{n_k}, z_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por otro lado, por compacidad, podemos suponer que existe un punto $z_0 \in E_0$ tal que $z_{n_k} \to z_0$. Así, existe $N_4 > N_3$ tal que $d(z_{n_k}, z_0) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $k \geq N_4$. Además, puesto que $b_{n_k} \to b$, existe $N_5 > N_4$ tal que $d(b_{n_k}, b) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $k \geq N_5$. Se sigue que, si $k > N_5$ entonces $d(b, z_0) \leq d(b, b_{n_k}) + d(b_{n_k}, z_{n_k}) +$

$d(z_{n_k}, z_0) < \varepsilon$. Con lo anterior se obtiene que $d(b, E_0) < \varepsilon$, por lo que $b \in E_0 \subset E$.

Hemos demostrado que B es un subcontinuo de X.

Afirmación 3. El continuo B es un ∞-odo en X.

Es claro que E es un subcontinuo de B. Además,

$$B - E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n(s_n) - E).$$

También, puesto que $E_n \in SB(E)$, y por la elección de las funciones α_n, se tiene que $\alpha_n(s_n) - E \neq \emptyset$. Resta ver que los conjuntos en esta unión son conjuntos separados. Para esto, sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m < n$ y supongamos que existe un pnto $y \in \overline{(\alpha_n(s_n) - E)} \cap (\alpha_m(s_m) - E)$. Se sigue que $y \in \alpha_n(s_n)$ y $y \in (\alpha_m(s_m) - E)$, lo que implica que $y \in (\alpha_n(s_n) \cap \alpha_m(s_m)) - E$, lo cual contradice la propiedad de s_n indicada en la Afirmación 1. Esto demuestra que B es un ∞-odo en X. $\square$

2.24 Definición. Un continuo es **indescomponible** si no se puede representar como la unión de dos de sus subcontinuos propios; y es **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

2.25 Ejemplo. Presentamos un continuo X tal que X es un ∞-odo y, para todo $E \in C^*(X)$, el conjunto de los elementos minimales $m(E)$ es finito.

Este continuo X se determina como sigue: consideremos un continuo hereditariamente indescomponible, Z, en el plano $\mathbb{R}^2$ tal que $(0, 0) \in Z$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$Z_n = \{(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{\|(x, y)\|}{n^2}) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Z\}.$$

Notemos que cada Z_n es un subcontinuo del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, y Z_n es homeomorfo a Z. Además, si $n \neq m$, entonces $Z_n \cap Z_m = \{(0,0,0)\}$. También, notamos que $Z_n \to \{(0,0,0)\}$, en la topología de Vietoris del hiperespacio de $\mathbb{R}^3$. Denotamos

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Es claro que X es un continuo y $X - \{(0,0,0)\}$ tiene un número infinito de componentes. Así X es un ∞-odo. En lo que sigue demostraremos que:

$$\text{Para cada } E \in C^*(X), \text{ el conjunto } m(E) \text{ es finito.} \tag{2.2}$$

Para demostrar esto, fijamos un elemento $E \in C^*(X)$, y consideramos dos casos:

Caso 1. $(0,0,0) \notin E$: en este caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset Z_n$. Dado que Z_n es hereditariamente indescomponible, se tiene que $SB(E) = \{E\}$, esto quedará justificado más adelante, con el Teorema 2.32. Así, en este caso, $m(E) = \{E\}$.

Caso 2. $(0,0,0) \in E$: en este caso, primero demostramos dos afirmaciones que hacemos a continuación:

Afirmación 1. Si $K \in C(X)$ y $(0,0,0) \in K$, entonces $K \cap Z_n \in C(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para esto fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos conjuntos abiertos, U y V, en $K \cap Z_n$ tales que $K \cap Z_n = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que $(0,0,0) \in U$. Notemos que U y V son cerrados en el conjunto $K \cap Z_n$ y este conjunto es cerrado en X. Así, U y V son cerrados en X. También, puesto que $Z_n \to \{(0,0,0)\}$, notamos que $\bigcup_{m\neq n} Z_m$ es cerrado en X. Además, notamos que

$$K = (K \cap Z_n) \cup (K \cap (\bigcup_{m\neq n} Z_m)) = V \cup [U \cup (K \cap (\bigcup_{m\neq n} Z_m))].$$

Observemos que V y $U \cup (K \cap (\bigcup_{m \neq n} Z_m))$ son conjuntos ajenos y cerrados en X. Luego, puesto que K es conexo, se tiene que $V = \emptyset$. Esto demuestra la afirmación 1.

Afirmación 2. Si $A \in m(E)$, entonces $(0, 0, 0) \in A$.

Para probar esta afirmación supongamos que $(0, 0, 0) \notin A$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset Z_n$. Consideramos un arco ordenado, α, en $C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$. Notemos que $Z_n - \{(0, 0, 0)\}$ es un conjunto abierto en X (ya que su complemento es cerrado) que contiene a A, así $A \in \langle Z_n - \{(0, 0, 0)\}\rangle$. Luego, por la continuidad de α, existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \in \langle Z_n - \{(0, 0, 0)\}\rangle$, es decir, $\alpha(t) \subset Z_n - \{(0, 0, 0)\}$. Ahora, notemos que $E \cap Z_n$ es un subcontinuo de Z_n (por la Afirmación 1) y $(E \cap Z_n) \cap \alpha(t) \neq \emptyset$. Así, $(E \cap Z_n) \cup \alpha(t) \in C(Z_n)$. Como Z_n es hereditariamente indescomponible, se sigue que $E \cap Z_n \subset \alpha(t)$ o $\alpha(t) \subset E \cap Z_n$. Como $(0, 0, 0) \in E$ y $(0, 0, 0) \notin \alpha(t)$, se tiene que $E \cap Z_n \not\subset \alpha(t)$. Luego, se obtiene que $\alpha(t) \subset E \cap Z_n$, y así $\alpha(t) \subset E$. Hemos demostrado que, para cualquier arco ordenado α, en $C(X)$, tal que $\alpha(0) = A$, existe $t > 0$, tal que $\alpha(t) \subset E$. Esto significa que $A \notin SB(E)$, véase el Teorema 2.5. Esto demuestra la Afirmación 2.

Ahora, continuamos con la prueba de lo indicado en (2.2), en el Caso 2, donde suponemos que $(0, 0, 0) \in E$. Para eso consideramos dos subcasos:

Subcaso 2.1. Existe una sucesión, $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, en $\mathbb{N}$ tal que $Z_{n_k} \not\subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema 2.19 podemos considerar un elemento $A \in m(E)$. Por la afirmación 2, $(0, 0, 0) \in A$ y, puesto que $Z_{n_k} \not\subset E$ y $Z_{n_k} \to \{(0, 0, 0)\}$, por el Teorema 2.11, $\{(0, 0, 0)\} \in SB(E)$. Luego, como A es minimal en $SB(E)$ se tiene que $A = \{(0, 0, 0)\}$.

Así, en este subcaso, $m(E)$ tiene a $\{(0,0,0)\}$ como único elemento.

Subcaso 2.2. El conjunto $\{n \in \mathbb{N} : Z_n \not\subset E\}$ es finito.

En este subcaso, como E es un subcontinuo propio de X, notamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : Z_n \not\subset E\}$ no es vacío, y lo denotamos por $\{n_1, ..., n_r\}$. Ahora probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 3. $E \cap Z_{n_i} \in SB(E)$, para cada $i \in \{1, ..., r\}$.

Para mostrar esta afirmación, fijamos $i \in \{1, ..., r\}$. Por la Afirmación 1, se tiene que $E \cap Z_{n_i}$ es un subcontinuo de Z_{n_i}. Como $Z_{n_i} \not\subset E$, también se tiene que $E \cap Z_{n_i} \neq Z_{n_i}$. Consideramos un arco ordenado, α, en $C(X)$ desde $E \cap Z_{n_i}$ hasta Z_{n_i}. Notamos que, si $t \in [0,1]$ y $\alpha(t) \subset E$, entonces $\alpha(t) \subset E \cap Z_{n_i}$, por lo cual $t = 0$. Es decir, $\alpha(t) \not\subset E$ si $0 < t \leq 1$. Por lo tanto, $E \cap Z_{n_i} \in SB(E)$. Así, la Afirmación 3 está demostrada.

Afirmación 4. $m(E) \subset \{E \cap Z_{n_1}, ..., E \cap Z_{n_r}\}$.

Para mostrar esto, fijamos un elemento $A \in m(E)$ y suponemos que $E \cap Z_{n_i} \not\subset A$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Consideremos un arco ordenado α, en $C(X)$, tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(t) \not\subset E$, si $0 < t \leq 1$, veáse el Teorema 2.5. Por la continuidad de α, existe $t > 0$ tal que $E \cap Z_{n_i} \not\subset \alpha(t)$, para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Por la Afirmación 1, notamos que $E \cap Z_{n_i}$ y $\alpha(t) \cap Z_{n_i}$, son subcontinuos de Z_{n_i} y, como ambos contienen al continuo A, se tiene que $E \cap Z_{n_i} \cup \alpha(t) \cap Z_{n_i}$ es un subcontinuo de Z_{n_i}. Como Z_{n_i} es hereditariamente indescomponible, se tiene que $E \cap Z_{n_i} \subset \alpha(t) \cap Z_{n_i}$ o $\alpha(t) \cap Z_{n_i} \subset E \cap Z_{n_i}$. Como $E \cap Z_{n_i} \not\subset \alpha(t)$, se sigue que $\alpha(t) \cap Z_{n_i} \subset E \cap Z_{n_i}$. Esto, para todo $i \in \{1, ..., r\}$.

Ahora, veremos que $\alpha(t) \subset E$: fijamos $x \in \alpha(t)$. Si $x \in Z_{n_i}$ para algún $i \in \{1, ..., r\}$, entonces $x \in \alpha(t) \cap Z_{n_i} \subset E \cap Z_{n_i}$, por lo que $x \in E$. Por otro lado, si $x \notin Z_{n_i}$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$, entonces $x \in Z_m$ para algún $m \notin \{n_1, ..., n_r\}$. Notamos que $Z_m \subset E$, así $x \in E$. Esto demuestra que $\alpha(t) \subset E$, lo cual contradice el hecho de que $\alpha(t) \not\subset E$ si $0 < t \leq 1$.

Con lo anterior hemos demostrado que existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $E \cap Z_{n_i} \subset A$. Por la Afirmación 3, $E \cap Z_{n_i} \in SB(E)$, luego la minimalidad de A implica que $E \cap Z_{n_i} = A$. Esto prueba la Afirmación 4.

Con todo, en cualquiera de los casos, hemos demostrado que el conjunto de los elementos minimales, $m(E)$, es finito para todo $E \in C^*(X)$. Con esto finalizamos el Ejemplo 2.25.

2.2.3 Continuos atriódicos

En esta parte, mostramos dos condiciones equivalentes a la propiedad de ser un continuo atriódico, en términos de semi fronteras. Recordamos que un 3-odo, también llamado triodo, en un continuo X es un subcontinuo B de X que contiene un subcontinuo A tal que $B - A$ tiene al menos tres componentes, véase la Definición 2.15.

2.26 Definición. Un continuo X es **atriódico** si no contiene triodos.

Usaremos el lema que sigue, el cual es un resultado obtenido por Sorgenfrey en 1944, en [15]. Una prueba detallada de éste se encuentra en el teorema final de la tesis de licenciatura de Alberto Mercado [9, Teorema 13.1].

2.27 Lema. Si A_1, A_2 y A_3 son subcontinuos de un continuo X tales que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ y $A_i \not\subset A_j \cup A_k$, donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces X contiene un triodo.

2.28 Teorema. Para cualquier continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) El continuo X es atriódico;

(b) Para cada $A \in C^*(X)$ se tiene que $|m(A)| \leq 2$; y

(c) Para cada $A \in C^*(X)$, $SB(A)$ es un punto o un arco.

DEMOSTRACIÓN. (a) implica (b): esta parte es inmediata por el Teorema 2.21.

(b) implica (c): fijemos un elemento $A \in C^*(X)$ y supongamos que $SB(A)$ no es un punto, es decir, $SB(A) \neq \{A\}$. Supongamos que $m(A) = \{B_1, B_2\}$ donde $B_1 \neq B_2$ (la prueba del caso en que $m(A)$ tiene un único elemento es análoga). Consideremos arcos ordenados desde B_1 hasta A y desde B_2 hasta A en $C(X)$, digamos β_1 y β_2 respectivamente. Por el Teorema 2.5, podemos considerar arcos ordenados, α_1 y α_2, en $C(X)$ tales que $\alpha_1(0) = B_1$, $\alpha_1(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$, $\alpha_2(0) = B_2$ y $\alpha_2(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$.

Afirmación 1. Si $B \in C(X)$ y $B_1 \subset B \subset A$, entonces $B \in \mathrm{Im}\beta_1$.

Para mostrar esta afirmación supongamos que $B \notin \mathrm{Im}\beta_1$. Denotemos $t_0 = \max\{t \in [0, 1] : \beta_1(t) \subset B\}$ (es claro $0 \in \{t \in [0, 1] : \beta_1(t) \subset B\}$ y que este conjunto es cerrado). Se tiene que $\beta_1(t_0) \subset B$ y $B \neq \beta_1(t_0)$. Fijemos un punto $p \in B - \beta_1(t_0)$. Notemos que $\langle X - \{p\}\rangle$ es un conjunto abierto en

2^X que tiene a $\beta_1(t_0)$. Como β_1 es continua existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, entonces $\beta_1(t) \subset X - \{p\}$. Fijamos $t_1 \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Se tiene que $t_1 > t_0$ y $p \notin \beta_1(t_1)$. Luego, por la definición de t_0, se tiene que $\beta_1(t_1)$ no está contenido en B.

Fijemos un punto $q \in \beta_1(t_1) - B$. Notemos que $p, q \notin B_1$, así, $\langle X - \{p, q\} \rangle$ es un conjunto abierto en el hiperespacio que contiene al elemento B_1. Luego, por la continuidad de α_1 existe $t_2 > 0$ tal que $\alpha_1(t_2) \subset X - \{p, q\}$, es decir, $p, q \notin \alpha_1(t_2)$. Notemos lo que sigue:

(i) $B_1 \subset B \cap \beta_1(t_1) \cap \alpha_1(t_2)$;

(ii) $p \in B - (\beta_1(t_1) \cup \alpha_1(t_2))$;

(iii) $q \in \beta_1(t_1) - (B \cup \alpha_1(t_2))$; y

(iv) $\alpha_1(t_2) \not\subset B \cup \beta_1(t_1)$ (ya que $B \cup \beta_1(t_1) \subset A$ y $\alpha_1(t_2) \not\subset A$).

Se tiene que B, $\beta_1(t_1)$ y $\alpha_1(t_2)$ son tres subcontinuos de X con intersección no vacía y ninguno de ellos está contenido en la unión de los otros dos. Por el Lema 2.27 se tiene que X contiene un triodo. Luego, por el Teorema 2.21, X contiene un subcontinuo que tiene al menos tres elementos minimales en su semi frontera, en contradicción con la hipótesis en (b). Esto demuestra la afirmación 1.

De manera análoga se muestra que si $B \in C(X)$ y $B_2 \subset B \subset A$, entonces $B \in \mathrm{Im}\beta_2$.

Notamos que si $B \in SB(A)$, entonces B contiene a B_1 o a B_2 ya que todo elemento en la semi frontera contiene elementos minimales (vea el Lema 2.19) y, por hipótesis, estos son los únicos elementos minimales. Se sigue que $SB(A) \subset \mathrm{Im}\beta_1 \cup \mathrm{Im}\beta_2$.

Por otra parte, considerando el Teorema 2.6, se obtiene que $SB(A) = \mathrm{Im}\beta_1 \cup \mathrm{Im}\beta_2$.

Afirmación 2. $\mathrm{Im}\beta_1 \cap \mathrm{Im}\beta_2 = \{A\}$.

Para probar esta afirmación supongamos que existe un elemento $E \in \mathrm{Im}\beta_1 \cap \mathrm{Im}\beta_2$ con $E \neq A$. Considerando la hipótesis en (2), el Teorema 2.21 y el Lema 2.17, notamos que la intersección de cualesquiera dos subcontinuos tiene a lo más dos componentes. Usando esto, de manera similar a la demostración de la Afirmación 1 en la prueba del Teorema 2.21, se verifica que existen $t_1 > 0$ y $t_2 > 0$ tales que $\alpha_1(t_1) \cap \alpha_2(t_2) \subset E$.

Ahora fijemos un punto $x_0 \in A - E$. Considerando que $B_1 \cup B_2 \subset E$, y la continuidad de los arcos ordenados α_1 y α_2, existen números s_1 y s_2 tales que $0 < s_1 < t_1$, $0 < s_2 < t_2$ y $x_0 \notin \alpha_1(s_1) \cup \alpha_2(s_2)$. Se tiene que $\alpha_1(s_1) \cap \alpha_2(s_2) \subset E$. Notamos lo que sigue:

(i) $B_1 \subset A \cap (E \cup \alpha_1(s_1)) \cap (E \cup \alpha_2(s_2))$;

(ii) $A \not\subset E \cup \alpha_1(s_1) \cup \alpha_2(s_2)$ (el punto x_0 está en la diferencia);

(iii) $E \cup \alpha_1(s_1) \not\subset A \cup E \cup \alpha_2(s_2)$: ya que si $\alpha_1(s_1) \subset A \cup E \cup \alpha_2(s_2)$, entonces $\alpha_1(s_1) = (\alpha_1(s_1) \cap A) \cup (\alpha_1(s_1) \cap E) \cup (\alpha_1(s_1) \cap \alpha_2(s_2)) \subset A \cup E = A$, una contradicción; y, similarmente,

(iv) $E \cup \alpha_2(s_2) \not\subset A \cup E \cup \alpha_1(s_1)$.

Luego A, $E \cup \alpha_1(s_1)$ y $E \cup \alpha_2(s_2)$ son tres subcontinuos de X con intersección no vacía, tal que ninguno de ellos está contenido en la unión de los otros dos. Por el Lema 2.27 se tiene que X contiene un triodo. Luego, por el Teorema 2.21, X contiene un subcontinuo que tiene al menos tres elementos minimales en su semi frontera, en contradicción con la hipótesis en (b). Así, la Afirmación 2 está mostrada.

Se concluye que $SB(A)$ es la unión de dos arcos con únicamente un punto extremo en común, y así, $SB(A)$ es un arco. Hemos demostrado que (b) implica (c).

(c) implica (a): supongamos que X no es atriódico. Por el Teorema 2.21 existe $E \in C^*(X)$ tal que $m(E)$ tiene al menos tres elementos. Consideremos tres elementos diferentes, B_1, B_2 y B_3, en $m(E)$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tomemos un arco ordenado, γ_i, en $C(X)$ desde B_i hasta E. Observe que $\mathrm{Im}\gamma_i \subset SB(E)$.

Notemos que si $B_i \in \mathrm{Im}\gamma_j$ para algún $j \neq i$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $B_j \subset B_i$ lo cual contradice la minimalidad de B_i.

De acuerdo con lo último, se tiene que para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$, $B_i \notin \mathrm{Im}\gamma_j$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tomamos un conjunto abierto, U_i, en $C(X)$, de modo que $B_i \in U_i$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $U_i \cap (\mathrm{Im}\gamma_j \cup \mathrm{Im}\gamma_k) = \emptyset$ donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ sea $r_i > 0$ tal que $\gamma_i([0, r_i]) \subset U_i$. Denotemos $\mathcal{T} = \mathrm{Im}\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\gamma_2 \cup \mathrm{Im}\gamma_3$ y $\mathcal{A} = \gamma_1([r_1, 1]) \cup \gamma_2([r_2, 1]) \cup \gamma_3([r_3, 1])$.

Notemos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{A}$ son continuos tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \subset SB(E)$. Además, $\mathcal{T} - \mathcal{A} = \gamma_1([0, r_1)) \cup \gamma_2([0, r_2)) \cup \gamma_3([0, r_3))$. Por lo que $\mathcal{T} - \mathcal{A}$ tiene al menos tres componentes. Esto significa que $\mathcal{T}$ es un triodo en $SB(E)$. Así, $SB(E)$ no es un punto ni un arco. Esto demuestra que (c) implica (a). $\square$

2.2.4 Continuos localmente conexos

En esta parte, dentro de la clase de los continuos localmente conexos, caracterizamos al arco y a la curva cerrada simple en términos de la semi frontera. También mostramos que la conexidad local es una condición necesaria y suficiente para que la semi frontera y la frontera coincidan.

2.29 Teorema. Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es un arco o una curva cerrada simple si, y sólo si, $SB(A)$ es un arco, para todo subcontinuo propio no degenerado A de X.

Demostración. Supongamos que X es un arco y consideramos un elemento $A \in C^*(X)$. Así, por el Teorema 2.14, $SB(A)$ es un arco. Ahora, supongamos que X es una curva cerrada simple. Consideramos un elemento $A \in C^*(X)$. Notemos que A es un arco. Siguiendo las mismas ideas que en el Ejemplo 2.13, se prueba que $SB(A)$ es un arco.

Recíprocamente, por el Teorema 2.28 se tiene que X es un continuo atriódico. Por hipótesis, X es localmente conexo. Así, de acuerdo con [13, 8.40 (b)] o [3, Proposición 2.10] se obtiene que X es un arco o una curva cerrada simple. $\square$

2.30 Teorema. Para cualquier continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es localmente conexo;

(b) Si $A \in C^*(X)$ y $p \in Fr(A)$, entonces $\{p\} \in SB(A)$; y

(c) $SB(A) = Fr(C(A))$, para cada $A \in C^*(X)$.

Demostración. (a) implica (b): sean $A \in C^*(X)$ y un punto $p \in Fr(A)$. Dado que X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo, U_1, en X, tal que $p \in U_1 \subset B(p,1)$. Luego, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B(p, \delta_2) \subset U_1$. Sea $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, \delta_2\}$. Se sigue que existe un conjunto abierto y conexo, U_2, en X tal que $p \in U_2 \subset B(p, \varepsilon_2) \subset U_1$. Continuando este procedimiento se determina una sucesión decreciente, $\{\overline{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $C(X)$ tal que $\overline{U_n} \to \{p\}$ y $\overline{U_n} \not\subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 2.10 se obtiene que $\{p\} \in SB(A)$.

(b) implica (c): sea $A \in C^*(X)$. Notemos que $Fr(C(A)) \subset C(A)$. Dado que $SB(A) \subset Fr(C(A))$, veáse la Nota 2.3 (b), basta mostrar que $Fr(C(A)) \subset SB(A)$. Para esto primero mostramos la afirmación que sigue:

Afirmación. Si $B \in Fr(C(A))$, entonces $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

Para mostrar esta afirmación supongamos que $B \cap Fr(A) = \emptyset$. Se tiene que $B \subset \text{int}(A)$ o $B \subset \text{int}(X - A)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $B \subset \text{int}(A)$. Luego, $B \in \langle \text{int}(A) \rangle \cap C(X) \subset C(A)$. Notemos que $\langle \text{int}(A) \rangle$ es un conjunto abierto en 2^X. Así, $\langle \text{int}(A) \rangle \cap C(X)$ es un conjunto abierto en $C(X)$, contenido en $C(A)$ que contiene al elemento B. Se sigue que $B \notin Fr(C(A))$. Así, la afirmación está demostrada.

Ahora, consideremos un punto $p \in B \cap Fr(A)$. Por hipótesis, $\{p\} \in SB(A)$. Dado que $p \in B \in C(A)$ se tiene, por el Teorema 2.6 que $B \in SB(A)$. Por lo tanto, $SB(A) = Fr(C(A))$.

(c) implica (a): supongamos que X no es localmente conexo. Así, existe un conjunto abierto, U, de X y una componente, D, de U tal que D no es un conjunto abierto en X. Sean $p \in D - \text{int}(D)$ y V un conjunto abierto en X tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Denotemos por E la componente de $\overline{V}$ que contiene al punto

p. Es claro que $E \in C(X)$, $p \in E \subset D$. Notemos que para todo conjunto abierto, W, de X que tiene a p se cumple que $W \cap (X - D) \neq \emptyset$, así $W \cap (X - E) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $p \in Fr(E)$ lo que implica que $\{p\} \in Fr(C(E))$.

Por otro lado, consideremos un arco ordenado, α, en $C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$. Como $\{p\} \in \langle V \rangle$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(t) \in \langle V \rangle$, para todo $t \in [0, \varepsilon)$, es decir, $\alpha(t) \subset V \subset \overline{V}$, para todo $t \in [0, \varepsilon)$. De aquí se sigue que $\alpha(t) \subset E$, para todo $t \in [0, \varepsilon)$. Por lo tanto, $\{p\} \notin SB(E)$, así $SB(E) \neq Fr(C(E))$. $\square$

2.2.5 Continuos hereditariamente indescomponibles

Aquí caracterizamos los continuos hereditariamente indescomponibles, como aquéllos en los cuales todo subcontinuo propio tiene un único elemento en la semi frontera. Para esto primero demostramos el siguiente lema.

2.31 Lema. Un continuo X es hereditariamente indescomponible si, y sólo si, para cualesquiera $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Demostración. Supongamos que existen $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Denotemos $C = A \cup B$. Es claro que $C \in C(X)$. Notemos que A y B son subcontinuos propios de C. Con esto se tiene que C es un continuo descomponible.

Recíprocamente, supongamos que X no es hereditariamente indescomponible. Así, podemos considerar un subcontinuo descomponible de X, digamos C. Denotemos $C = A \cup B$ donde

A y B son subcontinuos propios de C. Notemos que $B \not\subset A$ y $A \not\subset B$. Es claro que $A, B \in C(X)$ y $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

2.32 Teorema. Un continuo X es hereditariamente indescomponible si, y sólo si, $SB(A) = \{A\}$ para todo $A \in C^*(X)$.

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente indescomponible. Sean $A \in C^*(X)$ y $B \in SB(A)$. Por el Teorema 2.5, podemos considerar un arco ordenado, α, en $C(X)$, tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \not\subset A$, para todo $t > 0$. Luego, por el Teorema 2.31, $A \subset \alpha(t)$ para todo $t > 0$. En particular, si $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $[0,1]$ tal que $t_n \to 0$, obtenemos que $\alpha(t_{n+1}) \subset \alpha(t_n)$ y $\alpha(t_n) \to \alpha(0) = B$. Así, por el Teorema 1.56, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha(t_n) = B$. Notemos que $B \subset A \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha(t_n)$. Se sigue que $A = B$. Por lo tanto $SB(A) = \{A\}$.

Recíprocamente, supongamos que X no es hereditariamente indescomponible. Así, existe un subcontinuo, C, de X tal que $C = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de C. Sea E una componente de $A \cap B$. Notemos que E es un subcontinuo propio de A, pues de lo contrario, si $A = E$, entonces $A = E \subset A \cap B \subset A$ lo que implica que $A \cap B = A$. Se sigue que $A \subset B$ de donde se obtiene que $A \cup B = B$, así $B = C$ lo cual es una contradicción. Ahora, por el Teorema 2.9 se tiene que $E \in SB(A)$. Por lo tanto $SB(A) \neq \{A\}$. $\square$

2.3 La semi frontera como función

Notamos que, para cada subcontinuo propio, A, de un continuo X, la semi frontera, $SB(A)$, del hiperespacio $C(A)$, es un conjunto conexo (de hecho, arco conexo) no vacío de $C(X)$, vea el Corolario 2.8, así su cerradura, $\overline{SB(A)}$, es un subcontinuo de $C(X)$, es decir, es un elemento de $C(C(X))$. Esto permite definir, de manera natural, la función semi frontera

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} : C^*(X) & \longrightarrow & C(C(X)) \\ A & \longmapsto & \overline{SB(A)} \end{array}$$

En esta parte, incluimos algunos resultados respecto de la función semi frontera. Específicamente, probamos que la continuidad de esta función implica la unicoherencia de los subcontinuos propios de un continuo; demostramos que esta función no es continua en los continuos llamados dendroides; y caracterizamos a la circunferencia como el único continuo arco conexo para el cual la función semi frontera es continua.

2.3.1 Continuidad implica unicoherencia

Aquí demostramos que si A es un subcontinuo propio de un continuo X y la función semi frontera restringida a $C(A)$ es continua, entonces A es hereditariamente unicoherente. Primero recordamos el concepto de unicoherencia.

2.33 Definición. Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera subcontinuos, A y B, de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un continuo es hereditariamente unicoherente si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

2.34 Teorema. Sean X un continuo y $A \in C^*(X)$. Si la restricción de la función semi frontera al hiperespacio $C(A)$, $\mathcal{S}|_{C(A)}$, es continua, entonces A es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Supongamos que A no es hereditariamente unicoherente, esto es, A contiene un subcontinuo, digamos B, que no es unicoherente. Así, existen subcontinuos propios, H y K, de B tales que $B = H \cup K$ y $H \cap K$ no es conexo. Consideremos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, P y Q, en X tales que $H \cap K = P \cup Q$.

Fijemos un punto $p \in P$ y consideremos un arco ordenado, $\alpha : [0,1] \to C(H)$, tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = H$. Denotemos $t_0 = \min\{t \in [0,1] : \alpha(t) \cap Q \neq \emptyset\}$ (t_0 está bien determinado, ya que $1 \in \{t \in [0,1] : \alpha(t) \cap Q \neq \emptyset\}$ y este conjunto es cerrado). Observemos que $\alpha(t_0) \cap Q \neq \emptyset$, así $t_0 > 0$. Consideremos una sucesión creciente, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $[0, t_0)$ tal que $t_n \to t_0$. Notemos que $\alpha(t_n) \cap Q = \emptyset$ y $\alpha(t_n) \subset \alpha(t_{n+1}) \subset \alpha(t_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotemos $B_0 = \alpha(t_0) \cup K$ y $B_n = \alpha(t_n) \cup K$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro B_0 y B_n son subcontinuos de A (ya que $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_n)$ y K son subcontinuos de A que contienen al punto p). Además, B_n converge a B_0 en $C(X)$.

Afirmación 1. $\alpha(t_0) \in \mathcal{S}(B_0) = \overline{SB(B_0)}$.

Para probar esta afirmación, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por C_n a la componente de $B_n \cap \alpha(t_0)$ que contiene a $\alpha(t_n)$.

Notemos que $B_n \cap \alpha(t_0) = (\alpha(t_n) \cup K) \cap \alpha(t_0) = \alpha(t_n) \cup (K \cap \alpha(t_0)) = \alpha(t_n) \cup (\alpha(t_0) \cap P) \cup (\alpha(t_0) \cap Q)$.

Se sigue que $B_n \cap \alpha(t_0) = [\alpha(t_n) \cup (\alpha(t_0) \cap P)] \cup [\alpha(t_0) \cap Q]$.

También notemos que $[\alpha(t_n) \cup (\alpha(t_0) \cap P)] \cap [\alpha(t_0) \cap Q] = \emptyset$ ya que P y Q son ajenos y $\alpha(t_n) \cap Q = \emptyset$. Además, $[\alpha(t_n) \cup (\alpha(t_0) \cap P)] \neq \emptyset$ y $\alpha(t_0) \cap Q \neq \emptyset$.

De todo lo anterior se tiene que $B_n \cap \alpha(t_0)$ no es conexo. Se sigue que $B_n \cap \alpha(t_0) \neq B_n$ y $B_n \cap \alpha(t_0) \neq \alpha(t_0)$ ya que B_n y $\alpha(t_0)$

son conexos. Se tiene que $B_n \not\subset \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_0) \not\subset B_n$. Luego, por el Teorema 2.9, $C_n \in SB(B_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, como B_0 y B_n son subcontinuos de A tales que $B_n \to B_0$, y $\mathcal{S}|_{C(A)}$ es continua, se tiene que $\mathcal{S}(B_n) \to \mathcal{S}(B_0)$.

Por otra parte, notemos que $\alpha(t_n) \subset C_n \subset \alpha(t_0)$ de donde $C_n \to \alpha(t_0)$. Además, puesto que $C_n \in \mathcal{S}(B_n)$ se tiene que $\alpha(t_0) \in \mathcal{S}(B_0)$, veáse el Teorema 1.52 (a). Así la afirmación 1 está demostrada.

Ahora, consideremos conjuntos abiertos y ajenos, U y V, en X tales que $P \subset U$, $Q \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Notemos que $\alpha(t_0) - (U \cup V)$ y $K - (U \cup V)$ son conjuntos cerrados en X. En seguida veamos que son no vacíos y ajenos.

Supongamos que $\alpha(t_0) - (U \cup V) = \emptyset$, es decir, $\alpha(t_0) \subset U \cup V$, se sigue que $\alpha(t_0) = (\alpha(t_0) \cap U) \cup (\alpha(t_0) \cap V)$. Además, $p \in \alpha(t_0) \cap U$ y $\emptyset \neq \alpha(t_0) \cap Q \subset \alpha(t_0) \cap V$ lo cual contradice la conexidad de $\alpha(t_0)$. De manera análoga se muestra que $K - (U \cup V) \neq \emptyset$. Ahora, como $\alpha(t_0) \subset H$ se sigue que $\alpha(t_0) \cap K \subset H \cap K = P \cup Q \subset U \cup V$. Luego, $[\alpha(t_0) - (U \cup V)] \cap [K - (U \cup V)] = (\alpha(t_0) \cap K) - (U \cup V) = \emptyset$.

Ahora, consideremos conjuntos abiertos y ajenos, W y Z, en X tales que $[\alpha(t_0) - (U \cup V)] \subset W$ y $[K - (U \cup V)] \subset Z$. Dado que $\alpha(t_0) \in \mathcal{S}(B_0) = \overline{SB(B_0)}$, existe una sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $SB(B_0)$ que converge a $\alpha(t_0)$. Se tiene que $\alpha(t_0) \not\subset K$ ya que de lo contrario $\alpha(t_0) - (U \cup V) \subset K - (U \cup V)$ lo que contradice el hecho de que estos conjuntos son ajenos.

Afirmación 2. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_N \not\subset K,\ C_N \subset U \cup V \cup W,\ C_N \cap U \neq \emptyset \ \text{ y } \ C_N \cap V \neq \emptyset.$$

Para esto notemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \not\subset K$ para todo $n \geq N_1$: ya que de lo contrario, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $n_1 > m$ tal que $C_{n_1} \subset K$. Existe $n_2 > n_1$ tal que $C_{n_2} \subset K$. Siguiendo de esta manera se tiene una subsucesión, $\{C_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, de la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_{n_k} \subset K$ y $C_{n_k} \to \alpha(t_0)$. Por el Teorema 1.54 (b), $\alpha(t_0) \subset K$, lo cual es una contradicción.

Ahora, dado que $\alpha(t_0) \subset U \cup V \cup W$ y $C_n \to \alpha(t_0)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \subset U \cup V \cup W$ para todo $n \geq N_2$.

Por otro lado, como $p \in P \cap \alpha(t_0) \subset U$ y $C_n \to \alpha(t_0)$, por el Teorema 1.52 (a), existe una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n \in C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $c_n \to p$. Luego existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \in U$ para todo $n \geq N_3$, esto es, $C_n \cap U \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_3$. De igual forma se muestra que existe $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_4$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Se tiene que N satisface la Afirmación 2.

Consideramos un entero positivo N como en la Afirmación 2. Como $C_N \subset B_0 = \alpha(t_0) \cup K$, se obtiene que $C_N \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$. Elijamos un punto $q \in \alpha(t_0) \cap Q$ y sea L_1 la componente de $\alpha(t_0) \cap Q$ que contiene al punto q. Notemos que $L_1 \subset \alpha(t_0) \cap Q \subset Q \subset V$.

Consideremos un arco ordenado, β, en $C(X)$ desde L_1 hasta K. Existe $L \in C(X)$ tal que $L_1 \subset L \subset K$, $L_1 \neq L$ y $L \subset V$; para esto basta tomar $t > 0$ tal que $\beta(t) \subset V$ y denotar $L = \beta(t)$.

Supongamos que $L \subset \alpha(t_0) \subset H$, entonces $L \subset H \cap K = P \cup Q$. Puesto que $q \in L_1 \subset L$, $q \in Q$, P y Q son ajenos se tiene que $L \subset \alpha(t_0) \cap Q$ y $q \in L$. Se sigue que $L = L_1$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $L \cap (V - \alpha(t_0)) \neq \emptyset$.

Definamos $M = C_N \cup \alpha(t_0) \cup L$. Es claro que M es cerrado en B_0. Además, puesto que $C_N \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$ y $q \in \alpha(t_0) \cap L_1 \subset \alpha(t_0) \cap L$, se tiene que M es conexo y, en consecuencia, $M \in C(B_0)$.

Como $C_N \in SB(B_0)$ y $C_N \subset M \subset B_0$, considerando el Teorema 2.6, se tiene que $M \in SB(B_0)$. Se sigue que $M \in \overline{SB(B_0)} = \mathcal{S}(B_0)$. Luego, puesto que $\mathcal{S}(B_0) = \lim \mathcal{S}(B_n) = \lim \overline{SB(B_n)}$, se obtiene que $M \in$lim $\overline{SB(B_n)}$.

Ahora, por el Teorema 1.52 (a), existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $M_n \in \overline{SB(B_n)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $M_n \to M$. Notemos que $M_n \subset \alpha(t_n) \cup K$ y $M \not\subset \alpha(t_0)$.

De manera análoga a la Afirmación 2 se prueba la siguiente afirmación.

Afirmación 3. Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_r \subset U \cup V \cup W,\ M_r \cap U \neq \emptyset,\ M_r \cap V \neq \emptyset \text{ y } M_r \cap (V - \alpha(t_0)) \neq \emptyset.$$

Ahora, probaremos las siguientes afirmaciones sobre los conjuntos $K \cap \overline{V}$ y $\alpha(t_r) \cup \overline{U}$.

Afirmación 4. $M_r \subset (K \cap \overline{V}) \cup (\alpha(t_r) \cup \overline{U})$

Para probar esta afirmación, supongamos lo contrario y consideremos un punto $x \in M_r - [(K \cap \overline{V}) \cup (\alpha(t_r) \cup \overline{U})]$. Se sigue que $x \in M_r$, $x \notin K \cap \overline{V}$, $x \notin \alpha(t_r)$ y $x \notin \overline{U}$. Dado que $x \in M_r \subset B_r = \alpha(t_r) \cup K$ y $x \notin \alpha(t_r)$ se tiene que $x \in K$. Luego, $x \in M_r$, $x \notin \overline{V}$ y $x \notin \overline{U}$. Así, $x \in [M_r - (U \cup V)] \subset Z$ y en consecuencia $x \in Z$. Por otro lado, $x \in M_r \subset U \cup V \cup W$ y $x \notin U \cup V$ lo que implica que $x \in W$. De esta manera se tiene que $x \in W \cap Z$, una contradicción ya que W y Z son ajenos. Así, la afirmación 4 esta demostrada.

Afirmación 5. $M_r \cap (K \cap \overline{V}) \neq \emptyset$ y $M_r \cap (\alpha(t_r) \cup \overline{U}) \neq \emptyset$.

Por la Afirmación 3, $M_r \cap (V - \alpha(t_0)) \neq \emptyset$. Ahora, considerando que $M_r \subset \alpha(t_r) \cup K$, $\alpha(t_r) \subset \alpha(t_0)$, $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ y también considerando la Afirmación 4, se tiene que $[M_r \cap (V - \alpha(t_0))] \subset K \cap \overline{V}$.

Por otra parte, por la Afirmación 3, $M_r \cap U \neq \emptyset$ y por la Afirmación 4 se tiene que $M_r \cap U \subset \alpha(t_r) \cup \overline{U}$.

Afirmación 6. $(K \cap \overline{V}) \cap (\alpha(t_r) \cup \overline{U}) = \emptyset$

Para probar esto se tiene que $(K \cap \overline{V}) \cap (\alpha(t_r) \cup \overline{U}) = [(K \cap \overline{V}) \cap \alpha(t_r)] \cup [(K \cap \overline{V}) \cap \overline{U}] = (K \cap \overline{V}) \cap \alpha(t_r) = (\overline{V} \cap K) \cap (H \cap \alpha(t_r)) = (H \cap K) \cap (\overline{V} \cap \alpha(t_r)) = (P \cup Q) \cap (\overline{V} \cap \alpha(t_r)) = [(P \cup Q) \cap \overline{V}] \cap \alpha(t_r) = [(P \cap \overline{V}) \cup (Q \cap \overline{V})] \cap \alpha(t_r) = Q \cap \overline{V} \cap \alpha(t_r) \subset Q \cap \alpha(t_r) = \emptyset$. Esto demuestra lo indicado en la Afirmación 6.

Con todo lo anterior, hemos demostrado que M_r no es conexo. Esta contradicción demuestra que A es un continuo hereditariamente unicoherente. $\square$

2.35 Corolario. Sea X un continuo. Si la función $\mathcal{S}$ es continua, entonces cada subcontinuo propio de X es unicoherente.

2.3.2 No continuidad en dendroides

Como ya comentamos al inicio de esta sección, en esta parte vamos a demostrar que la función semi frontera no es continua en los dendroides. Para esto iniciamos atendiendo un par de propiedades sobre dendroides.

2.36 Definición. Un continuo X es un **dendroide** si es arco conexo y hereditariamente unicoherente.

2.37 Notación. Sean p y q puntos en un continuo X. Si p y q son puntos diferentes, denotamos por pq al arco en X con puntos extremos p y q. Si $p = q$, entonces pq denota el conjunto $\{p\}$.

2.38 Lema. Si X es un dendroide y $a, b_1, b_2, \ldots,$ son puntos en X tales que $ab_1 \subset ab_2 \subset \ldots$, entonces existe $x \in X$ tal que $ab_n \subset ax$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero vamos a probar la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Si $m < n < r$, entonces $b_m b_n \subset b_m b_r$.

Para esto consideremos una parametrización del arco ab_r, digamos $\alpha : [0,1] \to ab_r$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b_r$. Dado que $ab_m \subset ab_n \subset ab_r$ se tiene que $b_m, b_n \in ab_r$. Sean $s, t \in [0,1]$ tal que $\alpha(s) = b_m$ y $\alpha(t) = b_n$. Notemos que $s \leq t \leq 1$. Se sigue que $[s,t] \subset [s,1]$ lo que implica que $\alpha([s,t]) = b_m b_n \subset b_m b_r = \alpha([s,1])$. Así, la afirmación 1 está mostrada.

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $Y_m = \overline{(\bigcup_{n \geq m} b_m b_n)}$. Notemos que Y_m es un subcontinuo de X. No es difícil probar que los subcontinuos de los dendroides son dendroides, y que los dendroides son descomponibles, véase por ejemplo [8, p. 11]. De este modo, se tiene que Y_m es descomponible. Consideremos subcontinuos propios, A_m y B_m, de Y_m tales que $Y_m = A_m \cup B_m$. Como la familia $\{b_n : n > m\}$ está contenida en $A_m \cup B_m$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el conjunto $\{n > m : b_n \in B_m\}$ es infinito.

Afirmación 2. Dado $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in B_m$ para todo $n \geq N_m$.

Para probar esta afirmación fijemos $m \in \mathbb{N}$. Existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $b_{N_m} \in B_m$. Ahora, dado $n > N_m$ existe $r > n$ tal que

$b_r \in B_m$. Se sigue de la Afirmación 1 que $b_{N_m}b_n \subset b_{N_m}b_r \subset B_m$ y, por lo tanto, $b_n \in B_m$. Así, la afirmación 2 está demostrada.

Afirmación 3. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $b_m \in A_m - B_m$.

Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \in B_m$. Dado $n > m$, existe $r > n$ tal que $b_r \in B_m$. Como B_m es un subcontinuo de Y_m se tiene que B_m es un dendroide y, en particular, es un conjunto arco conexo por lo cual $b_mb_r \subset B_m$. Luego, por la Afirmación 1 se tiene que $b_mb_n \subset b_mb_r \subset B_m$. De aquí que, para todo $n > m$, $b_mb_n \subset B_m$. Así, $Y_m = \overline{(\bigcup_{n \geq m} b_mb_n)} \subset B_m$ y por tanto, $Y_m = B_m$, lo cual contradice la elección de B_m. En consecuencia $b_m \notin B_m$, es decir, $b_m \in A_m - B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4. La familia $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Para probar esta afirmación, sean $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, consideramos un número positivo N_{m_i} como en la Afirmación 2. Consideremos $n > N_{m_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se tiene que $b_n \in \bigcap_{i=1}^{k} B_{m_i}$. Esto demuestra la Afirmación 4.

Finalmente, por la Afirmación 4 y la compacidad de X, podemos considerar un punto $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m$. Probaremos que $b_m \in ax$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $r > m$ tales que $b_r \in B_m$. Por hipótesis, sabemos que $ab_m \subset ab_r$; además, como $ax \cup B_m$ es un conjunto arco conexo que tiene a a y a b_r, tenemos que $ab_r \subset ax \cup B_m$. Luego, $ab_m \subset ab_r \subset ax \cup B_m$ y así, $b_m \in ax \cup B_m$. Dado que $b_m \notin B_m$ (Afirmación 3), se tiene que $b_m \in ax$. Se concluye que

$ab_m \subset ax$, para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

2.39 Teorema. Si X es un dendroide entonces, para cualesquiera puntos a y b en X, existe un arco maximal que los contiene.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{cd : c, d \in X \text{ y } ab \subset cd\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ tiene un elemento maximal, usando el Teorema de Reducción de Brouwer (Teorema 1.22). Sea $\{c_n d_n : n \in \mathbb{N}\}$ una subfamilia de $\mathcal{B}$ tal que $c_n d_n \subset c_{n+1} d_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y elijamos $a_0 \in ab - \{a, b\}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b \in a_0 c_n$ o $b \in a_0 d_n$. Consideremos que los puntos extremos, c_n y d_n, del arco $c_n d_n$ se han indexado de tal forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a \in c_n a_0$ y (en consecuencia) $b \in a_0 d_n$.

Se sigue que $a_0 d_1 \subset a_0 d_2 \subset \ldots$ y $a_0 c_1 \subset a_0 c_2 \subset \ldots$. Luego, por el Lema 2.38, existen puntos c y d en X tales que $a_0 c_n \subset a_0 c$ y $a_0 d_n \subset a_0 d$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $a_0 c_n \cup a_0 d_n \subset a_0 c \cup a_0 d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $c_n d_n \subset cd$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene, por el Teorema de Reducción de Brouwer, que $\mathcal{B}$ tiene un elemento maximal; o sea, un arco maximal. $\square$

2.40 Teorema. Si X es un dendroide, entonces la función $\mathcal{S}$ no es continua.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un arco maximal en X (Teorema 2.39), digamos $w_0 z_0$. Supongamos que $X \neq w_0 z_0$. En caso de que X es un arco, no es difícil probar que la función semi frontera no es continua. Sea U un conjunto abierto en X tal que $w_0 z_0 \subset U$ y $U \neq X$. Denotemos por A a la componente de $\overline{U}$ que contiene al arco $w_0 z_0$. Ahora fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $z_0 \notin B(w_0, \varepsilon)$. Denotemos por A_n a la componente de $A - B(w_0, \frac{\varepsilon}{n})$ que contiene al punto z_0, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que $A, A_n \in C(X)$ y $z_0 \in A_n \subset A_{n+1}$. Definamos $A_0 = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$. Por el Teorema 1.55, $A_n \to A_0$.

Afirmación. Se tiene que $A = A_0$.

Para probar esta afirmación, notemos que $A_n \subset A \subset \overline{U}$, de aquí se sigue que $A_0 \subset A$. Así, basta probar que $A \subset A_0$. Para esto, sea $x \in A - \{w_0, z_0\}$. Se sigue que existe un punto $y \in w_0z_0$ tal que $xy \cap w_0y_0 = \{y\}$. Dada la maximalidad del arco w_0z_0 se tiene que $y \notin \{w_0, z_0\}$. Así $w_0 \notin xy \cup yz_0$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(w_0, \frac{\varepsilon}{n}) \cap xz_0 = \emptyset$, es decir, $xz_0 \subset A - B(w_0, \frac{\varepsilon}{n})$. Se sigue que $xz_0 \subset A_n$ de donde $x \in A_n$. Así $x \in A_0$. Con lo anterior hemos mostrado que $A - \{w_0, z_0\} \subset A_0$, por lo cual $A \subset A_0$. Se concluye que $A = A_0$.

Consideremos una parametrización del arco maximal, digamos $\alpha : [0,1] \to w_0z_0$ tal que $\alpha(0) = w_0$ y $\alpha(1) = z_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $t_n > 0$ tal que $\alpha([0, t_n]) \subset B(w_0, \frac{\varepsilon}{n}) \cap (X - A_n)$. Denotemos $w_n = \alpha(t_n)$ y notemos que $\alpha([0, t_n]) = w_0w_n$, $d(w_0, w_n) < \frac{1}{n}$, se sigue que $w_n \to w_0$ y $w_0w_n \cap A_n = \emptyset$. Sea $B_n = A_n \cup w_nz_0$. Luego B_n es un subcontinuo de X tal que $B_n \to A$. Se tiene que $\{w_n\} \in SB(B_n)$ (para esto basta considerar una parametrización del arco w_nw_0, digamos $\beta : [0,1] \to w_nw_0$ tal que $\beta(0) = w_n$ y $\beta(1) = w_0$, y definir $\gamma : [0,1] \to C(X)$ por $\gamma(t) = \beta([0,t])$ para todo $t \in [0,1]$).

Ahora, si suponemos que $\mathcal{S}$ es continua, entonces $\{w_0\} \in \mathcal{S}(A) = \overline{SB(A)}$, vea el Teorema 1.52 (a). Se sigue que $\langle U \rangle \cap SB(A) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $B \in SB(A)$ tal que $B \subset U$. Tomemos un arco ordenado, β, en $C(X)$ tal que $\beta(0) = B$ y $\beta(t) \not\subset A$ para todo $t \in (0,1]$. Luego, existe $t_0 > 0$ tal que $\beta(t_0) \subset U$. Se tiene que $\beta(t_0)$ es un subcontinuo de X tal que

$\beta(t_0) \cap A \neq \emptyset$ y $\beta(t_0) \subset U$, de donde $\beta(t_0) \subset A$ (A es una componente de $\overline{U}$). Esto contradice la elección de B. Así, $\mathcal{S}$ no es continua. $\square$

2.3.3 Continuidad en la circunferencia

Finalizamos nuestro trabajo de tesis mostrando, dentro de los continuos arco conexos, una caracterización de la curva cerrada simple en términos de la semi frontera de hiperespacios y la continuidad de la función semi frontera. Para esto necesitamos el concepto de círculo de Varsovia y algunos resultados relacionados con éstos.

2.41 Definición. Un continuo X es un **círculo de Varsovia** si, y sólo si, existe una función biyectiva y continua, $f : [0, \infty) \to X$, tal que $f([0, 1]) = \overline{f([t, \infty))} - f([t, \infty))$, para todo $t > 1$.

2.42 Teorema. Si X es un círculo de Varsovia y f es una función continua como en la Definición 2.41, entonces $C(X) = \{f([a, b]) : 0 \leq a \leq b\} \cup \{f([0, b]) \cup f([a, \infty)) : a \geq 0, b \geq 1\}$.

Demostración. Es claro que $\{f([a, b]) : 0 \leq a \leq b\} \cup \{f([0, b]) \cup f([a, \infty)) : a \geq 0, b \geq 1\} \subset C(X)$.

Por otro lado, sea $A \in C(X)$. Consideremos dos casos:

Caso 1. $f^{-1}(A)$ es un conjunto acotado, en este caso notemos que $f^{-1}(A)$ es un conjunto cerrado y no vacío de $[0, \infty)$. Denotemos $a = \inf f^{-1}(A)$ y $b = \sup f^{-1}(A)$. Observemos que $a, b \in f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(A) \subset [a, b]$. Luego, $A \subset f([a, b])$. Supongamos que existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $f(t_0) \notin A$. Dado que f es continua en t_0 y $f(t_0) \in X - A$, donde $X - A$ es un conjunto abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $a \leq t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \leq b$, entonces $f(t) \in X - A$. Luego $f^{-1}(A) \subset [a, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, b]$, lo que implica que $A \subset f([a, t_0 - \varepsilon]) \cup f([t_0 + \varepsilon, b])$, donde $A \cap f([a, t_0 - \varepsilon]) \neq \emptyset$, $A \cap f([t_0 + \varepsilon, b]) \neq \emptyset$ y, $f([a, t_0 - \varepsilon])$ y $f([t_0 + \varepsilon, b])$ son continuos ajenos en X. Esta contradicción muestra que $f([a, b]) \subset A$. Por lo tanto, $A = f([a, b])$ donde $0 \leq a \leq b$.

Caso 2. $f^{-1}(A)$ no es un conjunto acotado, en este caso supongamos que existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $f(t_0) \notin A$ ya que de lo contrario $A = X$. Dado que $f^{-1}(A)$ es un conjunto no acotado existe $r \in f^{-1}(A)$ tal que $r > 1$ y $r > t_0$.

Afirmación. Se tiene que $f([r, \infty)) \subset A$.

Para probar esta afirmación supongamos que existe $s \in (r, \infty)$ tal que $f(s) \notin A$. Como f es continua y $X - A$ es un conjunto abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) \in X - A$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cup (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Se sigue que $f^{-1}(A) \subset [0, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, s - \varepsilon] \cup [s + \varepsilon, \infty)$. Luego, $A \subset f([0, t_0 - \varepsilon]) \cup f([s + \varepsilon, \infty)) \cup f([t_0 + \varepsilon, s - \varepsilon])$, donde $f([0, t_0 - \varepsilon]) \cup f([s + \varepsilon, \infty))$ y $f([t_0 + \varepsilon, s - \varepsilon])$ son continuos ajenos. Así, la afirmación está mostrada.

Por otro lado, denotemos $b = \sup\{t \in [0, t_0] : f(t) \in A\}$ y $a = \inf\{t \in (t_0, \infty) : f(t) \in A\}$. Dado que $f([0, 1]) \subset \overline{f([r, \infty))} \subset \overline{A} = A$ se tiene que $1 \leq b < t_0$, además notemos que $b < a$. Luego, $f^{-1}(A) \subset [0, b] \cup [a, \infty)$ se sigue que $A \subset f([0, b]) \cup f([a, \infty))$.

Finalmente, de manera análoga a la Afirmación se demuestra que $f([0, b]) \cup f([a, \infty)) \subset A$. Por lo tanto, $A = f([0, b]) \cup f([a, \infty))$, con $a \geq 0$ y $b \geq 1$. $\square$

2.43 Lema. Si X es un círculo de Varsovia y $J = f([0,1])$, donde f es como en la Definición 2.41, entonces $SB(J) = \{A \in C(X) : f(1) \in A \subset J\}$.

Demostración. Sean f y J como en el enunciado. Sea $A \in C(X)$ tal que $f(1) \in A$ y $A \subset J$.

Afirmación 1. Se tiene que $A \in SB(J)$.

Para probar esta afirmación definamos $\alpha : [0,1] \to C(X)$ por $\alpha(t) = A \cup f([1, 1+t])$ para todo $t \in [0,1]$. Es claro que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$. Probemos que α es continua. Para esto sean un punto $t_0 \in [0,1]$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $t_n \to t_0$. Se sigue que $[1, 1+t_n] \to [1, 1+t_0]$. Dado que f es continua se puede probar que $f([1, 1+t_n]) \to f([1, 1+t_0])$. Luego $\alpha(t_n) = A \cup f([1, 1+t_n]) \to \alpha(t_0) = A \cup f([1, 1+t_0])$. Así α es continua. Con todo esto, la Afirmación 1 está demostrada.

Ahora, probaremos que si $A \in SB(J)$, entonces $A \in C(X)$ tal que $f(1) \in A \subset J$. Para esto, sea $A \in C(X)$ tal que $f(1) \notin A$ y $A \subset J$. Consideremos un conjunto abierto U en X tal que $A \subset U$ y $f(1) \notin \overline{U}$.

Denotemos por K a la componente de $\overline{U}$ que contiene a A. Vamos a probar la siguiente afirmación.

Afirmación 2. Se tiene que $K \subset J$.

Para probar esta afirmación supongamos que $K \not\subset J$, es decir, existe $t > 1$ tal que $f(t) \in K$. Notemos que $K \in C(X)$. Por el Teorema 2.42 tenemos dos casos:

Caso (i). $K = f([a,b])$, donde $0 \leq a \leq 1 < b$ y;

Caso (ii). $K = f([0,b]) \cup f([a,\infty))$, donde $b > 1$ y $0 \leq a$.

Observemos que en cualquiera de los casos, $f(1) \in K$. Notemos que $K \subset \overline{U}$ lo cual contradice la elección de U. Por lo tanto la Afirmación 2 está mostrada.

Ahora consideremos un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$. Como $A \in \langle U \rangle$ y α es continua existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in (0, \varepsilon)$, entonces $\alpha(t) \subset U \subset \overline{U}$. Luego, para todo $t \in (0, \varepsilon)$ se tiene que $\alpha(t) \subset \overline{U}$ y $A \subset \alpha(t) \cap K$. De esto último y la Afirmación 2 tenemos que $\alpha(t) \subset K \subset J$. Por lo tanto $A \notin SB(J)$. $\square$

2.44 Lema. Si X es un continuo arco conexo que contiene un triodo, entonces existen $C \in C(X)$ y arcos γ_1, γ_2 y γ_3 en X tales que $\gamma_1 - C$, $\gamma_2 - C$ y $\gamma_3 - C$ son conjuntos ajenos en X y $\gamma_i \cap C$ es un punto extremo de γ_i, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Es claro que si X contiene un triodo simple, entonces se cumple la conclusión del lema.

En lo que sigue supongamos que

$$X \text{ no contiene un triodo simple.} \tag{2.3}$$

Por otro lado, dado que X contiene un triodo tenemos que X no es una curva cerrada simple. Ahora, si X contiene una curva cerrada simple, digamos S, considerando un punto $x \in X - S$ se determina un triodo simple en X contradiciendo (2.3). Así, obtenemos que

$$X \text{ no contiene curvas cerradas simples.} \tag{2.4}$$

Se sigue que X es únicamente arco conexo. Sea Z un triodo en X y consideremos un subcontinuo Y de Z tal que $Z - Y = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, donde H_i y H_j son conjuntos separados en X

para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Tomemos puntos $x_i \in H_i$, $y \in Y$ y consideremos los arcos $x_i y$ en X, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Denotemos $A = x_1 y \cup x_2 y \cup x_3 y$. Es claro que A es un subcontinuo de X. Además, A es localmente conexo (un arco es localmente conexo y la unión finita de localmente conexos es localmente conexo).

Por otra parte, por la suposición en (2.3), A no contiene triodos simples. Luego, por la Proposición 2.10 de [3] y el supuesto en (2.4) se tiene que A es un arco en X. Tomemos una parametrización del arco A, digamos $\alpha : [0, 1] \to A$ y, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, denotemos $t_i = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) = x_i\}$. Ahora, consideremos tres casos:

Caso 1. $A \subset Z$ y y es un punto extremo de A.

En este caso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha(0) = y$ y $t_1 < t_2 < t_3$. Sea $r_i = \sup\{t \in [0, t_i) : \alpha(t) \in Y \cup H_j \cup H_k\}$ donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Notemos que $\alpha((r_i, t_i]) \subset H_i$ y $\alpha(r_i) \in \overline{H_i}$.

Probemos que $C = Y$ y, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $\gamma_i = \alpha([r_i, t_i])$ satisfacen la conclusión del lema. Para esto basta mostrar que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha(r_i) \in Y$. Fijemos $i \in \{1, 2, 3\}$ y tomemos una sucesión creciente, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en $[0, 1]$ tal que $t_n \to r_i$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(t_n) \in Y \cup H_j \cup H_k$ donde $j, k \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$. Supongamos que $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(t_n) \in Y\}$ es finito. Luego para algún $j \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$ el conjunto $J = \{n \in \mathbb{N} : \alpha(t_n) \in H_j\}$ es infinito. Se sigue que $\{t_{n_k}\}_{k \in J}$ es una subsucesión de $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\alpha(t_{n_k}) \in H_j$ para todo $k \in J$. Como α es continua y $t_{n_k} \to r_i$ se tiene que $\alpha(t_{n_k}) \to \alpha(r_i)$, así, $\alpha(r_i) \in \overline{H_j}$. Luego, dado que H_i y H_j son conjuntos separados para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $\alpha(r_i) \notin H_s$ para cada $s \in \{1, 2, 3\}$. Se sigue que

$\alpha(r_i) \in Y$. Por otro lado, si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(t_n) \in Y\}$ es infinito es claro que $\alpha(r_i) \in Y$.

Así, en el caso 1 se obtiene la conclusión del lema.

Caso 2. $A \subset Z$ y y no es punto extremo de A.

En este caso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha(0) = x_1$. Sean $r_1 = \inf\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in Y\}$ y $r_j = \sup\{t \in [0, t_j) : \alpha(t) \in Y \cup H_1 \cup H_k\}$ con $\{j,k\} = \{2,3\}$. De manera análoga al Caso 1 se demuestra que $C = Y$, $\gamma_1 = \alpha([0, r_1])$, $\gamma_2 = \alpha([r_2, t_2])$ y $\gamma_3([r_3, t_3])$ satisfacen la conclusión del lema.

Caso 3. $A \not\subset Z$.

En este caso, sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha(0) = x_1$, $\alpha(1) = x_3$ y consideremos $r_1 = \inf\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin Z\}$ y $r_2 = \inf\{t \in (r_1, 1] : \alpha(t) \in Z\}$. Luego tenemos dos subcasos:

Subcaso (i). Para todo $t \in (r_2, 1]$, $\alpha(t) \in Z$.

En este subcaso notemos que $\alpha(r_1), \alpha(r_2) \in Z$ y $r_1 < r_2$. Se sigue que $\alpha([r_1, r_2])$ es un arco que intersecta a lo más dos elementos de $\{H_1, H_2, H_3\}$, $(\alpha([r_1, r_2]) \cap Z = \{\alpha(r_1), \alpha(r_2)\})$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha([r_1, r_2]) \cap H_3 = \emptyset$. Denotemos $r_3 = \sup\{t \in [0, t_3) : \alpha(t) \in Y \cup H_1 \cup H_2\}$. Consideremos $t_1, t_2 \in (r_1, r_2)$ con $t_1 < t_2$. Se sigue que $C = Y \cup H_1 \cup H_2$, $\gamma_1 = \alpha([r_1, t_1])$, $\gamma_2 = \alpha([t_2, r_2])$ y $\gamma_3 = \alpha([r_3, t_3])$ satisfacen la conclusión del lema.

Subcaso (ii) Existe $t_0 \in (r_2, 1)$ tal que $\alpha(t_0) \notin Z$.

En este subcaso denotamos $r_3 = \inf\{t \in (r_2, 1] : \alpha(t) \notin Z\}$ y $r_4 = \inf\{t \in (r_3, 1] : \alpha(t) \in Z\}$. Sea $s \in (r_3, r_4)$. Luego $C = Z$, $\gamma_1 = \alpha([r_1, t_1])$, $\gamma_2 = \alpha([t_2, r_2])$ y $\gamma_3 = \alpha([r_3, s])$ satisfacen la conclusión del lema. $\square$

Para demostar nuestro último teorema, vamos a usar un resultado de Nadler y Quinn [14, Teorema 2].

2.45 Teorema. Si X es un continuo, entonces X es un conjunto arco conexo y atriódico si, y sólo si, X es una curva cerrada simple, un arco o un círculo de Varsovia.

2.46 Teorema. Si X es un continuo arco conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es una curva cerrada simple;

(b) La función $\mathcal{S}$ es continua;

(c) $SB(A)-\{A\}$ no es conexo para cada subcontinuo, propio, no degenerado, A, de X; y

(d) $SB(A)\cap F_1(X)$ tiene exactamente dos elementos para cada subcontinuo, propio, no degenerado, A, de X.

Demostración. (a) implica (b): sean $A_0 \in C^*(X)$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C^*(X)$ tal que $A_n \to A_0$. Denotemos $A_n = a_nb_n$, para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, donde $a_n \to a_0$ y $b_n \to b_0$. Demostraremos que $\lim \mathcal{S}(A_n) = \mathcal{S}(A_0)$. Por el Teorema 1.57 y por la Proposición 1.51 basta mostrar que $\limsup \mathcal{S}(A_n) \subset \mathcal{S}(A_0) \subset \liminf \mathcal{S}(A_n)$.

Primero demostremos que $\limsup \mathcal{S}(A_n) \subset \mathcal{S}(A_0)$. Sea $B \in \limsup \mathcal{S}(A_n)$. Luego, por el Teorema 1.52 (b), existen una sucesión creciente, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, en $\mathbb{N}$ y elementos $B_{n_k} \in \mathcal{S}(A_{n_k})$ tales que $B_{n_k} \to B$. Por el Teorema 2.30, $SB(A_{n_k}) = Fr(C(A_{n_k}))$. Se sigue que, $SB(A_{n_k}) = \{B_{n_k} \in C(A_{n_k}) : B_{n_k}\cap\{a_{n_k}, b_{n_k}\} \neq \emptyset\}$. Dado que $B_{n_k} \subset A_{n_k}$, $B_{n_k} \to B$ y $A_{n_k} \to A_0$ se tiene que $B \subset A_0$, vea el Teorema 1.54. Así $B \in C(A_0)$. Por otro lado, existe un conjunto infinito, J, en $\mathbb{N}$ tal que para cada $j \in J$, $a_{n_j} \in B_{n_j}$ o $b_{n_j} \in B_{n_j}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_{n_j} \in B_{n_j}$ para todo $j \in J$. Como $a_{n_j} \to a_0$ se tiene que $a_0 \in B$, veáse el Teorema 1.52 (b). Así $B \in Fr(C(A_0))$, luego por el Teorema 2.30, $B \in SB(A_0) = \mathcal{S}(A_0)$.

Ahora, veamos que $\mathcal{S}(A_0) \subset \liminf \mathcal{S}(A_n)$. Nuevamente, por el Teorema 2.30 basta probar que $SB(A_0) \subset \liminf \mathcal{S}(A_n)$. Para esto, fijemos un elemento B en $SB(A_0)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_0 \in B$. Denotemos $B = a_0c_0$. Dado que $A_n \to A_0$ y $c_0 \in A_0$ se tiene, por el Teorema 1.52 (a), que existe una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $c_n \to c_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in A_n$. Notemos que $a_nc_n \to a_0c_0$ y $a_nc_n \in SB(A_n) = \mathcal{S}(A_n)$. Por lo tanto $B \in \liminf \mathcal{S}(A_n)$.

Por lo tanto $\lim \mathcal{S}(A_n) = \mathcal{S}(A_0)$, así $\mathcal{S}$ es continua.

(a) implica (c): para esto, consideremos un elemento $A \in C^*(X) - F_1(X)$. Denotemos $A = ab$. Por hipótesis, X es localmente conexo, luego por el Teorema 2.30, $SB(A) = Fr(C(A))$. Además, sabemos que $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : a \in B \text{ o } b \in B\}$ y que este es un arco con puntos extremos $\{a\}$ y $\{b\}$. Se sigue que A es un elemento del arco $SB(A)$ y A no es un punto extremo de este arco, en consecuencia se tiene que $SB(A) - \{A\}$ no es un conjunto conexo.

(a) implica (d): fijemos un elemento $A \in C^*(X) - F_1(X)$. Denotamos $A = ab$. Por el Teorema 2.30, es claro que $\{\{a\}, \{b\}\} \subset SB(A)$. Además, si $B \in SB(A) - \{\{a\}, \{b\}\}$, entonces $\{a\} \subset B \neq \{a\}$ o $\{b\} \subset B \neq \{b\}$. Se sigue que $B \notin F_1(X)$, es decir, $SB(A) \cap F_1(X) = \{\{a\}, \{b\}\}$.

(b) implica (a): por el Corolario 2.35, cada subcontinuo propio de X es unicoherente. Supongamos que X no contiene curvas cerradas simples, pues de lo contrario, si X contiene una curva cerrada simple, digamos S, como S no es unicoherente se tiene que $X = S$. Así, se tiene la conclusión. Ahora, se sigue que para cada $x, y \in X$ existe un único arco que une a x con y el cual denotaremos por xy (de lo contrario podríamos construir una curva cerrada simple en X).

Afirmación 1. X es hereditariamente arco conexo.

Para probar esta afirmación supongamos que existen $A \in C^*(X)$ y puntos $x_0, y_0 \in A$ tales que $x_0y_0 \cap A = \{x_0, y_0\}$. Notemos que $A - \{x_0, y_0\}$ y $x_0y_0 - \{x_0, y_0\}$ son conjuntos separados. Además, $A \cup x_0y_0$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente. Así $X = A \cup x_0y_0$. Elijamos un punto $p \in x_0y_0 - \{x_0, y_0\}$. Dado $a \in A$, $x_0 \in ap$ o $y_0 \in ap$. Definamos $H = \{a \in A : x_0 \in ap\}$ y $K = \{a \in A : y_0 \in ap\}$. Luego $A = H \cup K$.

Afirmación 2. Se tiene que los conjuntos H y K son ajenos y arco conexos.

Para probar esta afirmación, primero veamos que $H \cap K = \emptyset$: supongamos que existe $a \in A$ con $a \in H \cap K$. Se sigue que $x_0, y_0 \in ap$. Tomemos $\alpha : [0, 1] \to X$ una parametrización del arco ap tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = p$. Denotemos por s, t los elementos en $[0, 1]$ tal que $\alpha(s) = x_0$ y $\alpha(t) = y_0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s < t$. Luego $\alpha([0, s]) \cup x_0p$ es un arco de a a p diferente del arco ap ya que $y_0 \notin \alpha([0, s]) \cup x_0p$ contradiciendo el hecho de que X es únicamente arco conexo.

Dado que A es conexo podemos suponer que $\overline{H} \cap K \neq \emptyset$. Dado $b \in H$, $bx_0 - \{x_0\}$ es un subconjunto conexo de $(A - \{x_0, y_0\}) \cup (x_0y_0 - \{x_0, y_0\})$ lo que implica que $bx_0 \subset A$. Además, dado $c \in bx_0$, se tiene que $cx_0 \cup x_0p$ es el arco de c a p, de donde

$c \in H$. Así $bx_0 \subset H$ $(x_0 \in H)$. Por lo tanto, para cualquier $b \in H$ el arco que une a b con x_0 se queda contenido en H. Con lo cual se concluye que H es arco conexo. De manera análoga se obtiene que K es arco conexo. Así la Afirmación 2 está probada.

Por otro lado, elijamos un punto $x_1 \in \overline{H} \cap K$ y supongamos que $x_1y_0 \cap \overline{H} = \{x_1\}$. Notemos que $x_1 \neq x_0$ ya que $x_1 \in K$ y $x_0 \in H$. Se sigue que $y_0 \in x_1p$, de donde $x_1x_0 = x_1y_0 \cup y_0x_0$, así $p \in x_1x_0 - \{x_1, x_0\}$. Además, como $x_1y_0 \cap \overline{H} = \{x_1\}$ y $x_0y_0 \cap A = \{x_0, y_0\}$, se tiene que $x_1x_0 \cap \overline{H} = \{x_1, x_0\}$. En consecuencia $\overline{H} \cup x_1x_0$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente, por lo cual $X = \overline{H} \cup x_1x_0$. Ahora, vamos a probar la siguiente afirmación.

Afirmación 3. Se tiene que $\overline{H} \cap K = \{x_1\}$.

Para probar esta afirmación supongamos que existe $x_2 \in (\overline{H} \cap K) - \{x_1\}$. Entonces $x_2 \notin x_1x_0$ ya que de lo contrario $x_2p = x_2x_0 \cup x_0p$, es decir, $x_2 \in H \cap K$ lo cual es una contradicción. Se sigue que $x_2 \in \operatorname{int}(\overline{H})$, así $\{x_2\} \notin \overline{SB(\overline{H})}$. Dado que X es segundo numerable podemos considerar un subconjunto denso numerable de H, digamos $\{a_1, a_2, ...\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = x_0a_1 \cup \cdots \cup x_0a_n$. Observemos que $B_n \subset H$ y $x_2 \notin B_n$ $(x_2 \notin H)$. Sea $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_2, a_{m_n}) < \frac{1}{n}$ y $a_{m_n} \notin B_n$. Es claro que $m_n > n$ ya que $a_n \in B_n$. Elijamos un punto $c_n \in x_0a_{m_n} - \{a_{m_n}\}$ tal que $c_na_{m_n} \cap B_n = \emptyset$ y $d(a_{m_n}, c_n) < \frac{1}{n}$. Definimos $C_n = B_n \cup x_0c_n$. Notemos que $C_n \in C(H) \subset C(\overline{H})$ y $c_na_{m_n} \cap C_n = \{c_n\}$. Veamos que $C_n \to \overline{H}$. Sea $\varepsilon > 0$, basta probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{H} \subset N(\varepsilon, C_n)$ para todo $n \geq N$. Como $\overline{H}$ es un conjunto compacto, existe $\{z_1, ..., z_k\} \subset \overline{H}$ tal que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(z_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, para cada

$i \in \{1, ..., k\}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_i} \in B(z_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Dado que para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $B(z_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(a_{n_i}, \varepsilon)$ se tiene que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_{n_i}, \varepsilon)$. Si tomamos $N = \max\{n_i : i \in \{1, ..., k\}\}$, entonces $\{a_{n_1}, ..., a_{n_k}\} \subset \{a_1, ..., a_N\} \subset B_N \subset B_n \subset C_n$ para todo $n \geq N$. Se sigue que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_{n_i}, \varepsilon) \subset N(\varepsilon, C_n)$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $C_n \to \overline{H}$.

Notemos que $\{c_n\} \in SB(C_n)$ y $\{c_n\} \to \{x_2\}$ (para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $\alpha_n : [0,1] \to c_n a_{m_n} \subset X$ una parametrización del arco $c_n a_{m_n}$ tal que $\alpha_n(0) = c_n$ y definamos $\beta_n : [0,1] \to C(X)$ por $\beta_n(t) = \alpha_n([0,t])$ para todo $t \in [0,1]$). Luego, por hipótesis $\mathcal{S}(C_n) \to \mathcal{S}(\overline{H})$. Así, por el Teorema 1.52 (a), $\{x_2\} \in \mathcal{S}(\overline{H}) = \overline{SB(\overline{H})}$. Esta contradicción prueba la Afirmación 3.

Ahora, dado que H es un conjunto arco conexo se tiene que H es conexo y, por tanto $\overline{H}$ es conexo. Consideremos un arco ordenado, α, en $C(X)$ desde $\{x_1\}$ hasta $\overline{H}$. Para cada número $n \in \mathbb{N}$ denotemos $t_n = \frac{1}{n}$ y elijamos un punto $p_n \in \alpha(t_n) - (\alpha(t_{n+1}) \cup x_0x_1)$. Como $p_n \in \overline{H} \subset A$, $\overline{H} \cap K = \{x_1\}$, $p_n \neq x_1$ y $A = H \cup K$ se tiene que $p_n \in H$. Luego $x_0 \in p_np$ y $p \in p_nx_1$ ($p_n \in H$ y $p_nx_1 = p_np \cup px_1$). Notemos que $\alpha(t_n) \cap p_nx_1$ no es conexo ya que $\alpha(t_n) \cap p_nx_1 \subset (p_np - \{p\}) \cup (px_1 - \{p\})$ donde estos son conjuntos separados, $p_n \in \alpha(t_n) \cap (p_np - \{p\})$ y $x_1 \in \alpha(t_n) \cap (px_1 - \{p\})$ ($p_n \in H \subset A$, $p \notin A$ ya que $A \cap x_0y_0 = \{x_0, y_0\}$ y $p \in x_0y_0 - \{x_0, y_0\}$). Por otro lado $x_1 \in \alpha(t_n) \cap p_nx_1$ y tanto $\alpha(t_n)$ como p_nx_1 son subcontinuos de X, en consecuencia $\alpha(t_n) \cup p_nx_1$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente. Se sigue que $X = \alpha(t_n) \cup p_nx_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in (p_{n+1}x_1 - \{p_{n+1}\})$ ya que $X = \alpha(t_{n+1}) \cup p_{n+1}x_1$ y $p_n \notin \alpha(t_{n+1})$. Se sigue que $(p_{n+1}p_n - p_n) \cap p_n x_1 = \emptyset$ lo que implica que $p_{n+1}p_n \subset \alpha(t_n)$. Así $p_n p_{n+1} \to \{x_1\}$. Denotemos $S = x_1 p_1 \cup p_1 p_2 \cup \cdots$. Dado que $p_n \in p_{n+1}x_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $p_n p_{n+1} \to \{x_1\}$ se tiene que S es una curva cerrada simple. Esta contradicción prueba la Afirmación 1.

Afirmación 4. X es hereditariamente unicoherente.

Para probar esta afirmación, se tiene que X es un continuo hereditariamente arco conexo (Afirmación 1) y no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que existen $Y, Z \in C(X)$ tales que $Y \cap Z$ tiene al menos dos componentes. Sean D_1 y D_2 componentes distintas de $Y \cap Z$. Consideremos $y \in D_1$ y $z \in D_2$. Sean L_1 y L_2 arcos de y a z tales que $L_1 \subset Y$ y $L_2 \subset Z$. Se sigue que $L_1 \cup L_2$ es un subcontinuo de X el cual contiene una curva cerrada simple. Esta contradicción prueba la Afirmación 4.

Finalmente, se sigue de las afirmaciones 1 y 4 que X es un dendroide. Luego, por el Lema 2.40, $\mathcal{S}$ no es continua. Esta contradicción demuestra que X es una curva cerrada simple.

(c) implica (a): primero probemos las siguientes dos afirmaciones:

Afirmación 1. El continuo X es atriódico.

Para probar esta afirmación, supongamos por el contrario, esto es, supongamos que X contiene un triodo. Luego por el Lema 2.44 existen $C \in C(X)$ y arcos γ_1, γ_2, y γ_3 en X tales que $\gamma_1 - C$, $\gamma_2 - C$ y $\gamma_3 - C$ son conjuntos ajenos de X y $\gamma_i \cap C$ es un punto extremo, digamos a_i, de γ_i, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ denotemos por b_i el punto extremo de γ_i con $b_i \neq a_i$. Sean $c_i \in \gamma_i - \{a_i, b_i\}$ y B_i el subarco de γ_i que une a a_i con c_i.

Definamos $A = C \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Es claro que $A \in C(X)$. A continuación probaremos que $\{\{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}\} \subset SB(A)$. Para esto observemos que $\{c_i\} \in C(A)$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado $i \in \{1, 2, 3\}$, consideremos una parametrización, α_i, del arco γ_i. Sea $\{t_{i(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, 1]$ tal que $0 < \alpha_i^{-1}(c_i) < t_{i(n+1)} < t_{i(n)}$ y $t_{i(n)} \to \alpha_i^{-1}(c_i)$. Notemos lo siguiente:

(i) $\alpha_i([t_{i(n+1)}, \alpha_i^{-1}(c_i)]) \subset \alpha_i([t_{i(n)}, \alpha_i^{-1}(c_i)])$,

(ii) $\alpha_i([t_{i(n)}, \alpha_i^{-1}(c_i)]) \to \{c_i\}$ y,

(iii) $\alpha([t_{i(n)}, \alpha_i^{-1}(c_i)]) \not\subset A$.

Luego, por el Teorema 2.10 se tiene que $\{c_i\} \in SB(A)$.

Afirmación 2. El conjunto $SB(A) - \{A\}$ es arco conexo en $SB(A)$.

Para probar esta afirmación, sea $\mathcal{C}$ la arco componente de $\{c_1\}$ en el espacio $SB(A) - \{A\}$. Considerando un arco ordenado desde $\{c_1\}$ hasta $B_1 \cup B_2 \cup C$ se tiene que $B_1 \cup B_2 \cup C \in \mathcal{C}$ y tomando un arco ordenado desde $\{c_2\}$ hasta $B_1 \cup B_2 \cup C$ se tiene que $\{c_2\} \in \mathcal{C}$. Similarmente $\{c_3\} \in \mathcal{C}$.

Sea $D \in SB(A) - \{A\}$. Si $c_1 \in D$, entonces tomando un arco ordenado desde $\{c_1\}$ hasta D se tiene que $D \in \mathcal{C}$. Ahora, si $c_1 \notin D$, entonces existe $d_1 \in B_1 - \{c_1, a_1\}$ tal que el subarco de B_1, α, que une a c_1 con d_1 cumple que $\alpha \cap D = \emptyset$. Definamos $D_1 = (A - \alpha) \cup \{d_1\}$. Notemos que D_1 es un subcontinuo propio de A tal que $c_1, c_2 \in D_1$ y $D \subset D_1$. Luego, por el Teorema 2.6 se tiene que $D_1 \in SB(A)$. Así, tomando arcos ordenados, uno desde $\{c_2\}$ hasta D_1 y otro desde D hasta D_1 se concluye que $D_1, D \in \mathcal{C}$. En consecuencia, la Afirmación 2 está probada.

Ahora, $SB(A) - \{A\}$ es un conjunto arco conexo de $SB(A)$ y, por tanto conexo. Esto contradice la hipótesis, con lo cual se muestra la Afirmación 1.

Finalmente, por la hipótesis y la Afirmación 1, X es un continuo arco conexo y atriódico, luego, por el Teorema 2.45 X es un arco, una curva cerrada simple o un círculo de Varsovia. Ahora, si X es un arco, entonces X no satisface lo indicado en (c) (véase Ejemplo 2.13 (1) o (2)). Por otro lado, si X es un círculo de Varsovia, entonces considerando $A = f([0,1])$, donde f es como en la Definición 2.41, se tiene por el Lema 2.43 que $SB(A) = \{f([a,1]) : a \in [0,1]\}$. Luego, $SB(A) - \{A\}$ es un intervalo semi-abierto el cual es un conjunto conexo y así no satisface lo indicado en (c). Por lo tanto, X es una curva cerrada simple.

(d) implica (a): notemos que X es atriódico, pues de lo contrario, si X contiene un triodo siguiendo las ideas probadas en (c) implica (a), obtenemos un elemento $A \in C^*(X)$ tal que $SB(A) \cap F_1(X)$ tiene al menos tres elementos esto contradice nuestra hipótesis en (d). Ahora, como X es un continuo arco conexo y atriódico, por el Teorema 2.45 se tiene que X es un arco, una curva cerrada simple o un círculo de Varsovia. Si X es un arco, entonces X no satisface lo indicado en (d) (véase Ejemplo 2.13 (1) o (2)). Ahora, supongamos que X es un círculo de Varsovia. Consideremos $A = f([0,1])$ donde f es como en la Definición 2.41. Se sigue del Lema 2.43 que $SB(A) = \{B \in C(A) : f(1) \in B\}$. Así, $SB(A) \cap F_1(X) = \{f(1)\}$ con lo cual no se satisface lo indicado en (d).

Por lo tanto X es una curva cerrada simple. $\square$

Referencias

[1] G. Acosta, *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 1999.

[2] C. O. Chirstenson and W. L. Voxman, *Apsects of Topology*, BCS Associates, Moscow, Idaho, 1998

[3] R. Escobedo, M. de J. López e I. Puga, *El intervalo cerrado, la circunferencia y sus funciones continuas*, Capítulo 8 en Topología y Sistemas Dinámicos IV, Editores J. Angoa y otros. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, textos científicos, 2011.

[4] A. Illanes, *Semi-boundaries in hyperspaces*, Topology Proceedings, Vol. 16, (1991), 63–87.

[5] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, serie textos nivel medio 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamental and recent advances,* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.

[7] M. de J. López, *Hiperespacios homeomorfos a conos*, Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.

[8] S. Macías, *La estructura de los dendroides suaves*, Aportaciones Matemáticas, serie comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[9] A. C. Mercado, *Propiedades topológicas de continuos*, Tesis de Licenciatura, Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, 1998.

[10] J. R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[11] S. B. Nadler, Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math. 79 (1973), 233–250.

[12] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*. Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[14] S. B. Nadler, Jr. and J. Quinn, *Embedding certain compactifications of a half-ray*, Fund. Math. 78 (1973), 217–225.

[15] R. H. Sorgenfrey, *Concernig triodic continua*, Amer. J. Math., 66 (1944), 439–460

Índice alfabético