Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tishbe Pilarh Herrera Ramírez

presenta

PROBLEMA INVERSO DE DETERMINACIÓN DE LA FRONTERA DE CONTACTO ENTRE UN MEDIO CONDUCTOR PLANO Y UN CONDUCTOR IDEAL

Tesis para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

dirigida por

Dr. Andrés Fraguela Collar

Puebla - Agosto 2014

Dedicado a

A mis papás:

María del Pilar Ramírez Juárez y
José Alberto Herrera Escutia

A mis hermanos:

José Guillermo y Angel Alberto Herrera Ramírez

A Arturo A. Castellanos Posadas

A mis amigos.

Agradecimientos

A mis padres:

Mamá, gracias por todo el apoyo emocional, espiritual y económico que siempre me has dado, esta tesis es tan tuya como mía, por comprender y apoyar siempre mis esfuerzos en busca de alcanzar mis metas, por cada tarde que llena de cansancio, que abriste tus brazos para mí y por ser un ejemplo de dedicación. Esta culminación es reflejo de tus enseñanzas. Te adoro mamá.

Papá, gracias por dedicar tu tiempo en la revisión exhaustiva de esta tesis, tus consejos fueron fundamentales en la culminación de la escritura de la misma; por enseñarme a estudiar desde pequeña y formar en mí hábitos de estudio que llevo presentes y han sido cruciales en esta licenciatura, por tantas tardes de acompañamiento y por todas esas noches que sin decir palabra cuidaste mi desvelo. Te adoro papá.

A mis queridos hermanos:

Memo, gracias por ser mi cómplice cada día en busca de esta meta, por siempre estar a mi lado, por intentar despejar mis dudas y pasarme los apuntes, por esas noches de acompañar nuestros desvelos y por siempre estar al pendiente de mí . Esta tesis tiene plasmados tus consejos, te quiero mucho.

Angel, gracias por motivar con tu cariño inmenso la culminación de este trabajo, por las innumerables ocasiones que tuviste que hacer en casa lo que yo no podía por mi cantidad de trabajo, por enseñarme a luchar por mis metas y compartirme esa visión tan tuya de la vida, te admiro y quiero mucho.

A Arturo Castellanos, por tu apoyo, compresión y motivación tanto en el desarrollo de este trabajo como en cada día juntos durante mi licenciatura, por dedicar a mi lado tantas horas de esfuerzo, estudio y mágicos momentos, por compartir y disfrutar esta etapa conmigo, pero sobre todo por darme ese abrazo de aliento que tantas veces me hizo continuar.

A mi asesor el Dr. Andrés Fraguela por permitirme trabajar bajo su tutela, compartirme sus conocimientos, apoyarme para culminar exitosamente esta tesis y demás eventos que se suscitaron en el desarrollo de la misma.

A mis sinodales: Dra. Monserrat Morín, Dr. Juan Escamilla, Dr. Jacobo Oliveros que a pesar de la premura revisaron esta tesis con la mayor disposición y me dieron sus valiosos comentarios. A quienes también agradezco su apoyo, en todos los sentidos, el cual ha sido atinado y muy importante en la culminación no solo de este trabajo sino de la licenciatura.

A todos mis profesores que al compartirme y heredarme sus conocimientos, generaron en mí aprendizajes de vida, en especial a quienes fueron determinantes para que hoy me encuentre culminando esta licenciatura y que por supuesto llevaré en mi corazón: Profra. Trinidad, Ing. Araceli León, Mtra. Verónica Morales, Profe. Juan José Parres, Dra. Araceli Juárez, Mtro. Manuel Ibarra, Dra. Lidia Hernández.

A Eduardo Hernández, por su invaluable apoyo, tiempo y paciencia tanto en el desarrollo de esta tesis como durante mi estancia en esta etapa académica.

A quienes tomaron de su tiempo para ayudarme a escribir y revisar esta tesis, sin duda un gran apoyo: Ozkar, René, Yuli, Jorgito.

A quienes se desvelaron conmigo una cantidad finita de noches, que hicieron al menos, no tan difícil mi estancia en la licenciatura, Ciri, Gaby, Jessy, Mary, Rosita y Ruth, por cada día que juntas compartimos, cada abrazo, cada cumpleaños, cada examen, cada jornada maratónica en la biblioteca, cada plática; por ustedes esta etapa de mi vida se llenó de momentos maravillosos. Niñas las quiero.

A mis cuatro formadoras no académicas las cuales llenaron mi infancia y adolescencia de emociones, alegrías y sueños. Van thi tha, Geli, Ednita y Gema con su apoyo, enseñanzas y cariño incondicional me siento bendecida.

S.L.P.S. Tishbe Pilarh Herrera Ramírez

Pilih

Índice general

Lista de figuras **VII**

Introducción **1**

1. Preliminares **5**

2. Planteamiento Operacional **9**
- 2.1. Subespacios de Hilbert y normas equivalentes 11
- 2.2. Planteamiento del problema auxiliar 13
- 2.3. Solución del problema principal y los Datos Exactos 19

3. Representación de Hilbert Schmidt **23**

Conclusión **35**

A. A **37**

Bibliografía **41**

Índice de figuras

1. Región sobre la cual se define el problema de Cauchy. . . . 1
2. *Sinopsis de las transformaciones requeridas para llevar una región rectangular de altura h, a una región circular que contiene en su interior una región conductora ideal con una frontera irregular.* 3

Introducción

En una región conductora, la tomografía eléctrica permite, la visualización de medios conductores utilizando mediciones parciales de potencial y corriente en una parte asequible de la frontera de la región. Con ello surge, por ejemplo, el problema de determinar la frontera de un aislante ideal inmerso en dicha región. Este problema puede formularse en el marco de la teoría general de problemas inversos, mediante un modelo simplificado, como un problema de tipo Cauchy para la ecuación de Laplace, donde la región conductora es homogénea. Los datos de Cauchy son los pares (ϕ, ψ) que representan el potencial y corriente en una parte de la frontera de la región de interés.

En el presente trabajo de tesis se plantea este problema de Cauchy para el caso bidimensional donde la región conductora es un rectángulo (ver Figura 1), para el cual se supone que existe una altura h donde la región se comporta como un aislante ideal. El problema de interés es (bajo la suposición de ciertas condiciones de periodicidad) determinar dicha altura a partir de los datos (ϕ, ψ) en la base del rectángulo.

Se demuestra que este problema es "mal planteado"(en el sentido de Hadamard), por lo cual no podemos asegurar la existencia y unicidad de

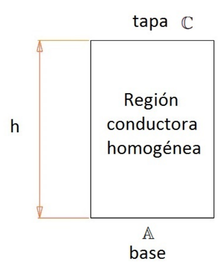

Figura 1: Región sobre la cual se define el problema de Cauchy.

la solución para cualesquiera pares de Cauchy. Además, la solución del problema es muy sensible a los errores en la medición de dichos datos de Cauchy; por eso, la importancia de este trabajo. En consecuencia el objetivo es determinar las condiciones que deben satisfacer las mediciones del potencial y la corriente en la base de la región para que exista la frontera con la propiedad deseada. Estas condiciones determinan a qué altura se encuentra dicha frontera aislante ideal.

En el Capítulo 1 se presentan conceptos y resultados importantes que serán utilizados en toda la tesis y que permiten contextualizar el desarrollo de la misma.

En el Capítulo 2 se plantea el problema de Cauchy y se demuestra que es " mal planteado". Este problema se reduce a un planteamiento operacional equivalente, que caracteriza los pares de Cauchy para los que es posible determinar la altura a la que se encuentra una frontera aislante ideal.

Se comenzará definiendo un problema auxiliar y se demostrará la existencia y unicidad de su solución débil. Esta solución débil permitirá formular la ecuación operacional que da respuesta al problema inverso y con ello se describirán las condiciones que deben satisfacer los pares de Cauchy para que dicho problema inverso tenga solución única.

El planteamiento operacional del problema antes mencionado, caracterizará las clases de lo que llamaremos "datos exactos", que representan los pares de Cauchy. Los datos de Cauchy exactos están relacionados a través de un operador compacto y determinan cuando existe una sección transversal que se comporta como un aislante ideal.

En el Capítulo 3 bajo la suposición de que existe la sección transversal a altura h que se comporta como un aislante, se da una representación explícita del operador compacto antes mencionado en términos de una serie; con ello se determinan las condiciones sobre los coeficientes de Fourier que representan a cada dato de Cauchy exacto. Por último, se demuestra que a partir de los datos exactos la altura h es única.

Pretendemos que los resultados obtenidos permitan resolver el problema

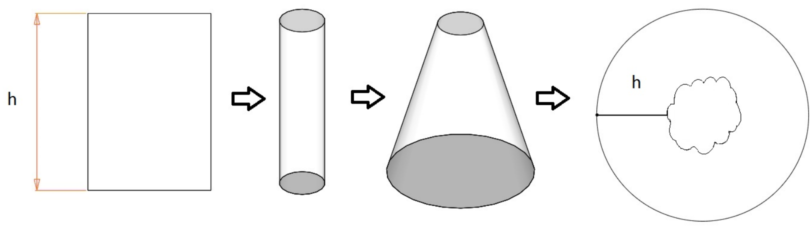

Figura 2: *Sinopsis de las transformaciones requeridas para llevar una región rectangular de altura h, a una región circular que contiene en su interior una región conductora ideal con una frontera irregular.*

inverso más general, de determinar la frontera interna aislante o conductora ideal, dentro de un medio conductor plano, a partir de mediciones de potencial y corriente en la frontera externa. En la Figura 2 se ejemplifica el sentido en que este trabajo puede ser utilizado con este objetivo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan definiciones y resultados que serán utilizados en el desarrollo de este trabajo, cabe mencionar que todos son conocidos en la Teoria de Problemas Inversos y Análisis Funcional.

En todo el trabajo se denotará por $\partial\Gamma$ a la frontera de $\Gamma \subset R^N$ un dominio acotado,es decir, un conjunto abierto, conexo y acotado.

Definición 1.1. *([9], KIRSCH, pág. 10) Sean X y Y espacios normados y $\mathfrak{A} : X \to Y$ un operador (lineal o no lineal), se dice que el problema $\mathfrak{A}x = y$ es **bien planteado** en el sentido de Hadamard si $\mathfrak{A}$ si se cumple:*

- *Para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{A}x = y$ (existencia de la solución).*
- *Para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $\mathfrak{A}x = y$ (unicidad de la solución).*
- *La solución x depende continuamente de y es decir para cada sucesión $\{x_n\}$ en X, si $\mathfrak{A}x_n \to \mathfrak{A}x$ cuando $n \to \infty$, entonces $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ (estabilidad de la solución).*

Si alguna de las condiciones no se satisface entonces se dice que el problema $\mathfrak{A}x = y$ es ***mal planteado***.

Sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, donde α_k es un entero no negativo para cada $k = 1, \ldots, N$. Se define $|\alpha| = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$ y

$$D^{\alpha}v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}(x) \text{ para cada } v \in C^{|\alpha|}(\Gamma).$$

Se denota con $C_0^\infty(\Gamma)$ al conjunto de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto en Γ, esto es, funciones que se anulan en una vecindad de la $\partial\Gamma$.

Definición 1.2. *Una función v de cuadrado integrable en Γ, se llama* ***derivada generalizada*** *de orden $|\alpha|$ (derivada en el sentido de Sobolev) de la función de cuadrado integrable u en el dominio Γ, si para cualquier función $\phi \in C_0^\infty(\Gamma)$ se satisface*

$$\int_\Gamma u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Gamma v\phi dx$$

donde $C_0^\infty(\Gamma)$ denomina la clase de las funciones de prueba.

Durante este trabajo se considerará el espacio $L_2(\Gamma)$ de las funciones de cuadrado integrable en Γ y el espacio $H^1(\Gamma)$ de las funciones en $L_2(\Gamma)$ que tienen derivada generalizada en $L_2(\Gamma)$. Se define en $L_2(\Gamma)$ y $H^1(\Gamma)$ respectivamente las normas:

$$\| v \|^2 = \int_\Gamma | v(x) |^2 \, dx \quad \text{y} \tag{1.1}$$

$$\| v \|^2_{H^1(\Gamma)} = \| v \|^2 + \| \nabla v \|^2, \tag{1.2}$$

donde $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N})$ es el gradiente de v en el sentido generalizado y

$$\| \nabla f \|^2 = \int_\Gamma \nabla f \cdot \nabla f = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{i=N} |\frac{\partial f}{\partial x_i}|^2.$$

Es conocido que los espacios $L_2(\Gamma)$ y $H^1(\Gamma)$ provistos de las normas (1.1), (1.2) son espacios de Hilbert y además $H^1(\Gamma)$ está compactamente sumergido en $L_2(\Gamma)$ (Teorema A.3).

Definición 1.3. *([2], BREZIS, pág.217) El espacio $H_0^1(\Gamma)$ es el completamiento de $C_0^\infty(\Gamma)$, en la norma de $H^1(\Gamma)$.*

Teorema 1.1. *([2], BREZIS, pág.217) Sea $u \in H_0^1(\Gamma)$ si y sólo si $u \in H_1(\Gamma)$ y $u = 0$ en $\partial\Gamma$*

Teorema 1.2. *([2], BREZIS, pág.109) $C_0^\infty(\Gamma)$ es denso en $L_2(\Gamma)$.*

Consideraremos además el espacio $H^2(\Gamma)$ como el conjunto de los elementos en $L_2(\Gamma)$ para los cuales existe en $L_2(\Gamma)$ la derivada generalizada D^α de orden α, para $|\alpha| \leq 2$.

Teorema 1.3. *([12], MIJAILOV pág. 86)* ***Teorema de Riesz.*** *Para toda funcional lineal acotada ℓ definida en el espacio de Hilbert H, existe un sólo elemento $h \in H$, tal que para todos los $f \in H$ se cumple*

$$\ell(f) = < f, h > .$$

Definición 1.4. *Sea $\triangle : H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ el operador de Laplace, dado por*

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Definición 1.5. *Sea $v \in H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ no nula, v es función propia del operador de Laplace si existe λ tal que*

$$\triangle v = \lambda v,$$

donde λ es el valor propio de $\triangle$ asociado a v.

Observación 1.1. *La función propia v del operador $\triangle$ para el valor propio λ también es solución del problema*

$$\triangle v = \lambda v$$

$$v|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Definición 1.6. *Se dice que $v \in H_0^1(\Gamma)$ es una función generalizada propia del problema de Dirichlet homogéneo para el operador de Laplace, si existe λ tal que*

$$\int_\Gamma \nabla u \cdot \nabla g = -\lambda \int_\Gamma u\, g \quad \text{para cada } g \in H_0^1(\Gamma).$$

Definición 1.7. *([10], KOLMOGOROV, pág.250) Un operador T de un espacio de Banach E en si mismo se llama totalmente continuo, cuando trasnforma cada conjunto acotado en uno relativamente compacto.*

Definición 1.8. *([10], KOLMOGOROV, pág.247) Un operador lineal y acotado que actua de un espacio normado E se llama autoconjugado si*

$$< A(x), y > = < x, A(y) > \quad \text{para cada } x, y \in E.$$

Teorema 1.4. *([10], KOLMOGOROV, pág.260)* ***Representación de Hilbert Schmidt.*** *Para cualquier operador lineal T autoadjunto y totalmente continuo en un espacio de Hilbert H existe un sistema ortonormal $\{v_k\}$ de vectores propios, correspondientes a los valores propios $\{\lambda_k\}$ tal que todo $x \in H$ se puede escribir de forma única*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k + x' \quad \textit{donde } x' \textit{ verifica } Tx' = 0,$$

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k v_k \quad y \; lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Nota 1.1. *En este trabajo los resultados anteriores serán utilizados para $N = 2$, donde la primera variable se denotará por x y la segunda variable por y.*

Capítulo 2

Planteamiento Operacional

En una región conductora homogénea $\Omega := (0,1) \times (0,h)$, para la cual se conocen los datos de potencial y corriente en la base $\mathbb{A} := \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ y que cumple con ciertas condiciones de periodicidad en los costados, denotados por $\mathbb{B} := \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h\}$ y $\mathbb{D} := \{(x,y) : x = 1, 0 < y < h\}$, se busca determinar una altura h, tal que la sección transversal $\mathbb{C} := \{(x,y) : 0 < x < 1, y = h\}$ a la que llamaremos tapa, se comporte como un conductor ideal.

En este capítulo primero se planteará el problema de determinación de la altura a la que se encuentra una tapa aislante, a partir de los datos de potencial y corriente en la base, como un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace sobre el rectángulo Ω con condiciones de periodicidad en las paredes laterales $\mathbb{B}$ y $\mathbb{D}$, con datos de Neumann y Dirichlet en la base $\mathbb{A}$, esto es:

$$\begin{aligned}
\triangle u &= 0 \text{ en } \Omega, && (2.1)\\
u(0,y) &= u(1,y) \text{ en } \mathbb{B} \cup \mathbb{D}, && (2.2)\\
u_x(0,y) &= u_x(1,y) \text{ en } \mathbb{B} \cup \mathbb{D}, && (2.3)\\
u(x,0) &= \phi(x) \text{ en } \mathbb{A}, && (2.4)\\
u_y(x,0) &= \psi(x) \text{ en } \mathbb{A}, && (2.5)
\end{aligned}$$

además se desea que $u(x,h) = 0$. Las condiciones (2.2)-(2.5) son condiciones en el sentido de la traza a $\partial\Omega$, en adelante se entenderá esta notación como la traza de la función u en la base, tapa o costados según corresponda. Las condiciones (2.2) y (2.3) son las condiciones de periodicidad antes

mencionadas. Veamos que el problema de encontrar una solución u en Ω que satisfaga las condiciones anteriores es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard, ya que no es estable con respecto a cualquier par de Cauchy. En efecto,
sea $(\frac{1}{n^4} sen(2n\pi x), \frac{2\pi}{n^3} sen(2n\pi x))_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de pares de Cauchy para los cuales existe la solución del problema (2.1)-(2.5) respecto a cada n la solución está dada por $u_n(x,y) = \frac{1}{n^4} e^{2n\pi y} sen(2n\pi x)$. Pues se verifica que u_n es armónica (2.1), cumple las condiciones de periodicidad en los costados (2.2) , (2.3). Además se cumple que $(\frac{1}{n^4} sen(2n\pi x), \frac{2\pi}{n^3} sen(2n\pi x)) \to (0,0)$ cuando $n \to \infty$ en la normas correspondientes, [1] debido a que la función *seno* es acotada y $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ cuando $n \to \infty$, sin embargo, tenemos que:

$$\| u_n \|_{H^2} \geq \| u_n \| = \| \frac{1}{n^2} e^{2n\pi y} sen(2n\pi x) \| = \frac{1}{8n^7\pi}(e^{4n\pi h} - 1),$$

pero $\frac{1}{8n^5\pi}(e^{4n\pi h} - 1) > \frac{e^{4n\pi h}}{8n^5\pi} - 1$, para cada $n \in$ N y como la sucesión $\{\frac{e^{4n\pi h}}{8n^5\pi} - 1\}_n$ diverge cuando $n \to \infty$, no es posible acotar $\| u_n \|_{H^2}$, por lo tanto $\{u_n\}$ no converge a 0, esto es, el problema (2.1)-(2.5) no es bien planteado pues no depende continuamente de los datos.

Como el problema (2.1)-(2.5) no es estable para los datos de Cauchy, si existe una solución $\tilde{u}$ del problema para datos $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ cercanos de (ϕ, ψ), dicha $\tilde{u}$ podría ser muy lejana a la solución para (ϕ, ψ). Por ello, para mediciones de potencial y corriente dadas con error, no podríamos asegurar que su solución del problema (2.1)-(2.5) represente lo que sucede en Ω, y aunado a ello no podríamos determinar que la tapa se comporte como una aislante ideal incluso cuando los datos con error lo indiquen. Es de interés, buscar las condiciones que deben cumplir los datos de Cauchy para que exista una única solución u del problema (2.1)-(2.5) tal que $u|_A \equiv 0$. Posteriormente se reducirá este problema a un planteamiento operacional equivalente, que caracterice los pares de Cauchy (correspondientes a mediciones de potencial y de corriente), para los cuales existe la solución u del problema (2.1)-(2.5) tal que u se anule en la tapa $u|_A \equiv 0$. Dicha caracterización se dará en terminos de una relación operacional en un espacio de Hilbert conveniente.

[1] Los datos de Cauchy (ϕ, ψ) en la base, pertenecen a la traza en $\mathbb{A}$ de la solución del problema y de su derivada normal, por lo tanto esta convergencia es en la norma $\| \cdot \|_{H^{3/2}}$ y $\| \cdot \|_{H^{1/2}}$ respectivamente.

Con base en la teoría desarrollada en *Ecuaciones diferenciales en Derivadas Parciales* [1] y siguiendo la idea presentada en *Regularización del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un cilindro*[2] se planteará un problema auxiliar para el cual se demostrará la existencia y unicidad de la solución débil y a partir de ella se definirá una ecuación operacional que caracterice las condiciones que deben de cumplir los datos de Cauchy. Este planteamiento operacional del problema inverso se utilizará para caracterizar la clase de los que llamaremos "datos exactos"(mediciones de potencial y corriente de la base), a través de un operador compacto que determine cuándo se puede hablar de la existencia de una altura h donde la solución del problema (2.1)-(2.5) se anule, es decir, que la tapa del rectángulo se comporte como un aislante.

2.1. Subespacios de Hilbert y normas equivalentes

A lo largo de este trabajo consideraremos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, definido por

$$H^*(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(0,y) = v(1,y), v(x,h) = 0\},$$

el hecho de que $H^*(\Omega)$ sea cerrado en $H^1(\Omega)$ es una consecuencia de la continuidad del operador traza de $H^1(\Omega)$ en $L_2(\partial\Omega)$.

Lema 2.1. *En $H^*(\Omega)$ la única función constante es la identicamente nula*

DEMOSTRACIÓN Veamos que $f \equiv 1$ en Ω no es elemento de $H^*(\Omega)$, en efecto, sea $f \equiv 1 \in H^1(\Omega)$, y supongamos que existe f^* extensión continua f a $\overline{\Omega}$, tal que f^* está en $H^*(\Omega)$, notemos que $f^*|_{\mathbb{B}} = f^*|_{\mathbb{D}} = 1$ pero $f^*|_{\mathbb{C}} = 0$, así que para w en la base de Ω, existe una vecindad U de w, tal que $|f^*| < \frac{1}{2}$ para cualquier valor en U, así que hay elementos en $U \cap \Omega$, tal que en su imagen bajo f es estrictamente menor que $\frac{1}{2}$, lo cual claramente no puede suceder. Por lo tanto, como no existe extensión de f en $H^*(\Omega)$, $f \equiv 1$ no pertenece a $H^*(\Omega)$, análogamente para cualquier constante no

[1] MIJÁILOV,V.P.; FOMIN,S.V.;*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*;(URSS, 1978). Edit. Mir.

[2] HERNÁNDEZ, MONTERO EDUARDO;(Puebla, 2014).*Regulación del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un cilindro*; Tesis de Maestria, Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas, B.U.A.P.

cero.$\blacksquare$

Se puede ver que

$$< u, v >_{H^*} = \int_\Omega \nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^{2} \int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{2.6}$$

define un producto interior en $H^*(\Omega)$. En efecto de la relación $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} =< \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} >_{L_2}$, se tiene que para que (2.6) defina un producto interior sólo hace falta demostrar que $< u, u >= 0$ si $u = 0$, ya que las demás propiedades se verifican por la definición de producto interior en $L_2(\Omega)$.

Sea $< u, u >_{H^*(\Omega)} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2, \end{aligned}$$

y como el integrando es no negativo, $\mid \nabla u \mid^2 = 0$ si y sólo si $\nabla u \equiv 0$, entonces $u = Cte$ y, por el Lema 2.1 $u \equiv 0$.

Así tenemos que $< \cdot, \cdot >_{H^*(\Omega)}$ es un producto interior en $H^*(\Omega)$; en adelante denotaremos por $\| f \|_{H^*(\Omega)}$ a la norma inducida por (2.6).

Se sabe que $H^*(\Omega)$ está inmerso compactamente en $L_2(\Omega)$, pues la inmersión de $H^*(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es continua[2], entonces por el Lema A.2 se cumple la desigualdad de Poincaré, esto es, existe $K > 0$ tal que para todo $f \in H^*(\Omega)$ se verifica:

$$0 \leq \| f \|^2_{L_2(\Omega)} \leq (K^2 - 1) \| \nabla f \|^2,$$

$$\| f \|^2_{H^*(\Omega)} \leq \| f \|^2_{H^1(\Omega)} \leq K^2 \| f \|^2_{H^*(\Omega)} \tag{2.7}$$

así podemos concluir que en $H^*(\Omega)$ las normas $\| f \|_{H^1(\Omega)}$ y $\| f \|_{H^*(\Omega)}$ son equivalentes (ver A.1).

Veamos que $\| f \|_{H^*(\Omega)} = \| \nabla f \|$; en adelante utilizaremos indistintamente cualquiera de estas notaciones.

[2]ya que H^* es subespacio de H^1

Consideraremos también $H_0^*(\Omega) = \{v \in H^*(\Omega) : v(0,y) = 0, v(1,y) = 0\}$, donde $H_0^1 \subset H_0^*(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

2.2. Planteamiento del problema auxiliar

Consideremos en Ω el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned}
\triangle u &= 0 \text{ en } \Omega, && (2.8)\\
u(0,y) &= u(1,y) \text{ en } \mathbb{B} \cup \mathbb{D}, && (2.9)\\
u_x(0,y) &= u_x(1,y) \text{ en } \mathbb{B} \cup \mathbb{D}, && (2.10)\\
u_y(x,0) &= \psi(x) \text{ en } \mathbb{A}, && (2.11)\\
u(x,h) &= 0\text{en } \mathbb{C}, && (2.12)
\end{aligned}$$

para el cual daremos la siguente definición.

Definición 2.1. *Sea $u \in H^*(\Omega)$, se dice que u es solución débil del problema auxiliar* (2.8)-(2.12)*, si cumple*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy = -\int_0^1 \psi(x) v(x,0) dx \quad \textit{para cada } v \in H^*(\Omega). \tag{2.13}$$

Observación 2.1. *La definición anterior se deriva de suponer que existe u, solución clásica del problema auxiliar* (2.8)-(2.12) *e integrando la ecuación $\triangle u = 0$ tenemos que para todo $v \in C_1(\overline{\Omega})$, se cumple*

$$0 = \int_\Omega \triangle u v,$$

usando la Fórmula de Integración por partes (Teorema A.1)

$$0 = \int_\Omega \triangle u = \int_\Omega div(v \nabla u) - \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

y usando la Fórmula de Green de la divergencia sobre Ω tenemos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds. \tag{2.14}$$

donde η denota la normal exterior unitaria a $\partial\Gamma$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ es la derivada normal. Desarrollando la integral sobre la frontera como una integral *sobre la longitud de arco para α una parametrización de $\partial\Omega$, recorrida en el sentido de las manecillas del reloj* [1], *definida como sigue:*

$$\alpha : (0, 2+2h) \to \partial\Omega$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{\mathbb{A}} = (1-t, 0), & \mathrm{t} \in [0,1]; \\ \alpha_{\mathbb{B}} = (0, t-1), & \mathrm{t} \in [1, 1+\mathrm{h}]; \\ \alpha_{\mathbb{C}} = (t-1+h, 0), & \mathrm{t} \in [1+\mathrm{h}, 2+\mathrm{h}]; \\ \alpha_{\mathbb{D}} = (1, 2h+h-t), & \mathrm{t} \in [2+\mathrm{h}, 2+2\mathrm{h}]. \end{cases} \tag{2.15}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\eta} ds =& - \int_0^1 v(x,0)u_y(x,0)dx - \int_0^h v(0,y)u_x(0,y)dy \\ &+ \int_0^1 v(x,h)u_y(x,h)dx + \int_0^h v(1,y)u_x(1,y)dx \end{aligned}$$

y como u cumple la condiciones de periodicidad (2.9)- (2.10) *en los costados de Ω y la condición de Neumann en la base* (2.11), *tenemos que para todo $v \in C_1(\overline{\Omega})$ (2.14) queda dada por:*

$$\begin{aligned} \int\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dxdy =& - \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx \\ &+ \int_0^h u_x(0,y)(v(1,y)-v(0,y))dy \\ &+ \int_0^1 v(x,h)u_y(x,h)dx \end{aligned} \tag{2.16}$$

como $C_1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ la ecuación (2.16) se cumple para todo $v \in H^1(\Omega)$. Debido a que deseamos eliminar las ultimas dos integrales podemos construir un espacio de prueba al que llamaremos $H^*(\Omega)$ ya definido en la sección anterior, y si tomamos $v \in H^*(\Omega)$ en (2.16) tenemos (2.13).

Proposición 2.1. *Sea $u \in H^2(\Omega)$ tal que cumple la Definición 2.1 entonces u es solución clásica del problema auxiliar denotado por* (2.8)-(2.12).

[1] según la regla de la mano derecha al recorrer las curvas en este sentido el pulgar apunta hacia la dirección de la normal exterior a la frontera de Ω

DEMOSTRACIÓN Como u es solución débil del problema auxiliar, cumple la condición de periodicidad (2.9) y se anula en la tapa (2.12), además por la Definición 2.1 u cumple

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy = 0 \text{ para cada } v \in C_0^\infty \tag{2.17}$$

y por la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $L_2(\Omega)$ (2.17) se cumple para todo $v \in L_2(\Omega)$, así que $\triangle u$ es ortogonal a todo $v \in L_2(\Omega)$, y por tanto $\triangle u \equiv 0$.

Enseguida se demuestra

- $\psi(x) = u_y(x, 0)$
- $u_x(1, y) = u_x(0, y)$

Ahora como u cumple 2.13 entonces

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy + \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx = 0. \tag{2.18}$$

Aplicando la Fórmula de integración por partes, (Teorema A.1) al producto $v\nabla u$ con $v \in H^*(\Omega)$, se verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy + \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS + \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx$$

y por 2.18 tenemos:

$$0 = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS + \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx \quad \text{para cada } u \in H^*(\Omega). \tag{2.19}$$

a) Descomponiendo en (2.19) la integral sobre la frontera, tenemos para todo $v \in H^*(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
0 =- & \int_0^1 v(x,0)u_y(x,0)dx \\
+ & \int_0^h u_x(1,y)v(1,y)dy \\
+ & \int_0^1 u_y(x,h)v(x,h)dx \\
- & \int_0^h u_x(1,y)v(1,y)dy \\
+ & \quad \int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

y si tomamos $v \in H^*(\Omega)$ se cumple

$$
0 = \int_0^1 v(x,0)(\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,0) + \psi(x)) + \int_0^h v(1,y)(u_x(1,y) - u_x(1,y)dy, \tag{2.21}
$$

por lo tanto

$$
0 = \int_0^1 v(x,0)(\psi(x) - u_y(x,0)dx) \quad \text{para cada } v \in H_0^*(\Omega) \tag{2.22}
$$

ahora, notemos que $v(x,0) \in C_0^\infty(\mathbb{A})$, es la traza de $v \cdot f \in H_0^*(\Omega)$ en $\mathbb{A}$, donde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ es tal que cumple $f(x,h) = f(1,y) = f(0,y) = 0$, entonces (2.22) se cumple para todo $v(x,0) \in C_0^\infty(\mathbb{A})$, como $C_0^\infty(\mathbb{A})$ es denso en $L_2(\mathbb{A})$, la integral (2.22) se cumple para todo $v \in L_2(\mathbb{A})$. Por lo tanto, $\psi(x) - u_y(x,0)$ es ortogonal a todos los v en $L_2(\mathbb{A})$ así $\psi(x) = u_y(x,0)$ para todo $x \in (0,1)$.

b) De a) tenemos que para todo $v \in H^*(\Omega)$ (2.21) queda

$$
0 = \int_0^h v(1,y)(u_x(1,y) - u_x(1,y))dy, \tag{2.23}
$$

notemos que para $v \in H^*(\Omega)$, $v(0,y) = v(0,y) \in C_0^\infty(0,h)$ están contenidos en las trazas de $H^*(\Omega)$, es decir $v(0,y)$ es la traza de la función $v \cdot f \in H^*(\Omega)$ en $\mathbb{B}$, y $v(1,y)$ es la traza de la función $v \cdot f \in H^*(\Omega)$ en $\mathbb{D}$ donde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ cumple $f(x,h) = 0$, $f(1,y) = f(0,y) =$

1, como $C_0^\infty(0,h)$ es denso en $L_2(0,h)$, la integral (2.23) se cumple para todo $v(1,y) \in L_2(0,h)$, esto es, $u_x(0,y) - u_x(1,y)$ es ortogonal a todos los elementos en $L_2(0,h)$, por lo tanto $u_x|_{\mathbb{D}} - u_x|_{\mathbb{B}} = 0$, luego

$$u_x|_{\mathbb{D}} = u_x|_{\mathbb{B}}.$$

Finalmente si $u \in H_2(\Omega)$ cumple la Definición 2.1, entonces u cumple las condiciones de contorno del problema auxiliar (2.8)-(2.12).$\blacksquare$

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución débil para el problema (2.8)-(2.12).

Teorema 2.1. *Para $\psi \in L_2[0,1]$, existe en $H^*(\Omega)$ una única solución débil del problema* (2.8)-(2.12).

DEMOSTRACIÓN Sea $\psi \in L_2[0,1]$ llamaremos $\ell_\psi(v)$ al funcional lineal de $H^*(\Omega)$ a R definido por:

$$\ell_\psi(v) = -\int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx =< \psi(x), v(x,0) >_{L_2[0,1]}$$

veamos que es acotado en $H^*(\Omega)$, en efecto, usando la desigualdad de Hölder, el Teorema A.4 y la Desigualdad de Poincaré (2.7), tenemos que:

$$\begin{aligned} |\ell_\psi(v)| &= \| -\int_0^1 \psi(x)v(x,0)dx\| \leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} \| v \|_{L_2(0,1)} \\ &\leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} \| v \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} \, K \, \| v \|_{H^*(\Omega)} \end{aligned}$$

luego

$$|\ell_\psi(v)| \leq K \| \psi \|_{L_2(0,1)} \tag{2.24}$$

donde K es la constante en (2.7), por lo tanto $\ell_\psi(v)$ es un funcional lineal y continuo. Ahora, aplicando el Teorema de Riez, este funcional se representa de forma única en $H^*(\Omega)$, es decir, existe un único $u \in H^*(\Omega)$, tal que:

$$< u, v >_{H^*(\Omega)} = \ell_\psi(v) \quad \text{para cada } v \in H^*(\Omega) \tag{2.25}$$

de (2.25) es inmediato que u es solución débil del problema auxiliar (2.8)-(2.12).$\blacksquare$

Corolario 2.1. *Dadas* $\psi \in L_2[0,1]$ *y* u *solución débil del problema auxiliar* (2.8)-(2.12) *entonces se cumple*

$$\| u \|_{H^*(\Omega)} \leq K \| \psi \|_{L_2[0,1]} . \tag{2.26}$$

Este resultado se obtiene directamente de (2.25) y (2.24).

Observación 2.2. *El Corolario 2.1 nos dice que u, solución del problema* (2.8)-(2.12)*, depende continuamente de* ψ*.*

Lema 2.2. *Si* $\Lambda : L_2[0,1] \to H^*(\Omega)$ *es decir, a cada* $\psi \in L_2[0,1]$ *le hace corresponder la solución débil del problema* (2.8)-(2.12)*,* $\Lambda\psi = u$*, entonces* Λ *es lineal y continuo.*

DEMOSTRACIÓN Para $\psi \in L_2[0,1]$, por el Teorema 2.1 tenemos que existe un único $u \in H^*(\Omega)$ tal que

$$< u, v >_{H^*(\Omega)} = - < \psi, v >_{L_2[0,1]} \tag{2.27}$$

y Λ está bien definido; de (2.27) se verifica que Λ es lineal; ahora veamos que Λ es un operador acotado de $L_2[0,1]$ en $H^*(\Omega)$, en efecto, por el Corolario 2.1 tenemos que

$$|\Lambda\psi| = \| u \|_{H^*(\Omega)} \leq K \| \psi \|_{L_2[0,1]}$$

donde K es la constante de la Desigualdad de Pioncaré (2.7) por lo tanto Λ es continuo de $L_2[0,1]$ en $H^*(\Omega)$ y (2.27) queda dado por:

$$< \Lambda\psi, v >_{H^*(\Omega)} = - < \psi, v >_{L_2[0,1]} . \blacksquare$$

Observación 2.3. *Debido a que la inmersión de* $H^1(\Omega)$ *en* $L_2(\Omega)$ *es compacta,* Λ *es un operador compacto de* $L_2[0,1]$ *en* $L_2(\Omega)$*.*

Finalmente, la solución del problema auxiliar está dada por la ecuación operacional

$$\Lambda\psi = u, \tag{2.28}$$

donde Λ es el operador compacto que a cada $\psi \in L_2[0,1]$ lo envía a la solución del problema (2.8)-(2.12).

2.3. Solución del problema principal y los Datos Exactos

Recordemos que el objetivo de este trabajo es determinar los pares de Cauchy para los cuales el problema (2.1)-(2.5) tiene solución en Ω, así que, de existir u, solución de (2.1)-(2.5) que además se anule en la tapa (2.12), u deberá ser solución débil del problema auxiliar (2.8)-(2.12) y además su traza en $\mathbb{A}$ sea el dato $\phi \in L_2([0,1])$, esto es:

$$\Lambda\psi|_{\mathbb{A}} = \phi.$$

Denotemos Υ el operador traza en $\mathbb{A}$, tal que a cada elemento de $H^*(\Omega)$ le hace corresponder su traza en $\mathbb{A}$; definimos el operador T_h de $L_2[0,1]$ a $L_2[0,1]$ por,

$$T_h := \Upsilon \circ \Lambda, \tag{2.29}$$

tal que a cada $\psi \in L_2[0,1]$, le hace corresponder la traza en $\mathbb{A}$ de la solución débil del problema auxiliar (2.8)-(2.12).

Lema 2.3. *T_h es un operador lineal y compacto de $L_2[0,1]$ en $L_2[0,1]$.*

DEMOSTRACIÓN Se sabe que Υ operador de traza es compacto y como la composición de un operador continuo con un operador compacto es compacta Υ es compacto; por la linealidad de Λ y del operador traza se tiene el resultado.■

Lema 2.4. *T_h es un operador inyectivo y autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN Por la definición de solución débil se cumple (2.13). Entonces

$$\| \nabla u \|^2 = -\int_0^1 \psi T_h(\psi).$$

Ahora si $T_h(\psi) = 0$, entonces $\| \nabla u \|^2 = \| \nabla\Lambda\psi \|^2_{H^*(\Omega)} = 0$, por lo tanto $u_y|_{\mathbb{A}} = 0$, luego $\psi = 0$ y el $\mathrm{Ker}(T_h) = 0$ y T_h es inyectivo.

Como T_h está definido de $L_2[0,1]$ en $L_2[0,1]$ para verificar que es autoadjunto bastará con demostrar que es simétrico, en efecto, para ψ_1 y ψ_2 en

$L_2[0,1]$, existen u_1, y u_2 en $H^*[0,1]$ tal que $\Lambda\psi_1 = u_1$ y $\Lambda\psi_2 = u_2$, luego por la Definición 2.1 se tienen las siguientes identidades:

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 = -\int_0^1 \psi_1 u_2|_{\mathbb{A}} \quad y \quad \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 = -\int_0^1 \psi_2 u_1|_{\mathbb{A}}$$

veamos que $T_h(\psi_1) = u_1|_{\mathbb{A}}$ y $T_h(\psi_2) = u_2|_{\mathbb{A}}$ entonces

$$\int_0^1 \psi_1 T_h(\psi_2) = \int_0^1 \psi_2 T_h(\psi_1)$$

por lo tanto T_h es autoadjunto.■

Teorema 2.2. *Dadas ϕ y ψ de cuadrado integrable, existe solución u del problema principal* (2.1)-(2.5)*, donde $u|_{\mathbb{A}} = \phi$ y $u_y|_{\mathbb{A}} = \psi$ si y sólo si (ϕ, ψ) están relacionados a través de la ecuación operacional*

$$T_h\psi = \phi \tag{2.30}$$

donde u es $\Lambda\psi$, solución del problema (2.8)-(2.12)*.*

DEMOSTRACIÓN Para una condición sabemos que para $\psi \in L_2[0,1]$, u corresponde a la solución del problema auxiliar (2.8)-(2.12) y cumple $\Lambda\psi = u$ luego como $u|_{\mathbb{A}} = \phi$ entonces por definición de T_h se tiene (2.30).

Ahora para (ψ, ϕ) tales que se cumple (2.30), se satisface:

$$\int_{\mathbb{A}} \phi g = \int_\Omega T_h \psi g \ \text{ para cada } g \in L_2(\mathbb{A})$$

luego recurriendo a la Fórmula de integración por partes

$$\int_{\mathbb{A}} \phi g = \int_\Omega \nabla \Lambda\psi \nabla g \ \text{ para cada } g \in L_2(\mathbb{A})$$

por la definición de solución débil (Definición 2.1), tenemos

$$\int_\Omega \nabla \Lambda\psi \nabla g = \int_{\mathbb{A}} u|_{\mathbb{A}} g \ \text{ para cada } g \in L_2(\mathbb{A})$$

por lo tanto podemos concluir que

$$\int_\Omega (u|_{\mathbb{A}} - \phi) g = 0 \ \text{ para cada } g \in L_2(\mathbb{A}),$$

Esto es,

$$u|_{\mathbb{A}} = \phi,$$

es decir u es solución de (2.1)-(2.5).$\blacksquare$

Observación 2.4. *Del Teorema 2.2 se concluye que en una región rectangular conductora homogéna, existe una sección transversal a altura h que es un aislante ideal, si y sólo si los datos de Cauchy cumplen la ecuación operacional $T_h\psi = \phi$.*

Definición 2.2. *Sean T_h definido en* (2.30) *y*

$$\mathbb{M}_h = \{(\phi, \psi) \in L_2[0,1] \times L_2[0,1] : T_h\psi = \phi\},$$

M_h se dirá el conjunto de "datos exactos", es decir todos los pares de Cauchy para los cuales existe la solución u del problema principal (2.1)-(2.5)*, donde u estará dada por $\Lambda\psi = u$ y es tal que*

$$u(x, h) = 0.$$

Observación 2.5. *Los pares de Cauchy $(\phi, \psi) \in \mathbb{M}_h$ corresponden a mediciones de potencial y corriente en una región conductora homogénea de forma rectangular en la que a una altura h cumple $u(x, h) = 0$, es decir, la sección transversal $\mathbb{C}$ se comporta como un aislante ideal.*

Capítulo 3

Representación de Hilbert Schmidt

Dado el problema inverso planteado en el capítulo anterior, se desea caracterizar, en términos funcionales los pares de Cauchy que satisfacen la ecuación operacional $T_h\psi = \phi$, es decir, que pertenezcan a M_h; recordemos que M_h representa los datos exactos para los cuales el problema (2.1)-(2.5) tiene solución u tal que en alguna altura h, $u(x, h) = 0$. En este capítulo se expresará en términos de la representación de Hilbert Schmidt el operador T_h, esto es, se dará, en forma de igualdad de Series de Fourier la relación (2.30) que permitira hacer explícitas las condiciones que los pares (ϕ, ψ) deben cumplir para pertencer a M_h.

Las propiedades sobre los pares de Cauchy se darán bajo relaciones que deben guardar sus coeficientes de Fourier en función de h y finalmente se demostrará que dicha altura es única.

Comenzaremos con algunos resultados que nos permitan llegar a la representación de T_h y M_h.

Lema 3.1. *El problema de Dirichlet para el operador de Laplace $\triangle$ define un operador inyectivo.*

DEM. Sea $v \in H^1_0(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ tal que $\triangle u = 0$, integrando por partes tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_\Omega v\triangle u = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

por lo tanto

$$< \nabla v, \nabla u >= 0 \text{ para todo } v \in H^1_0(\Omega),$$

luego por el Teorema de Representación de Riez $u = 0$.■

Con el resultado anterior podemos definir el operador $\triangle^{-1} : Im(\triangle) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.2. *El operador $\triangle^{-1}$ es acotado y compacto de $Im(\triangle)$ en $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

DEM. Integrando por partes a $\triangle u$ y $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u = -\int_\Omega v \triangle u \tag{3.1}$$

para $u = v$ y por la desigualdad de Hölder

$$\| \nabla u \|^2 \leq \| u \|^2 \| \triangle u \|^2$$

multiplicando por $\frac{K^2}{\|u\|}$, $u \neq 0$, y ya que en $H_0^1(\Omega)$ verifica la Desigualdad de Poincaré (Teorema A.2), se tiene

$$K^2 \| \triangle u \| \geq \| \nabla u \| \geq \| u \|,$$

luego se deduce que $\triangle^{-1}$ es acotado. Además, por el Lema A.1, $\triangle^{-1}$ es compacto.■

Observación 3.1. *En ([12], MIJAILOV) se prueba que el operador de Laplace es autoadjunto, por lo tanto su inverso también lo es; luego, por Lema A.3, todos sus valores propios son reales.*

Observación 3.2. *Por la observación anterior y* (3.1) *se puede ver que el operador $-\triangle^{-1}$ tiene valores propios positivos; ahora, se sabe que un operador compacto tiene a lo más un numéro numerable de valores propios y además los valores propios de $-\triangle$ serán los inversos multiplicativos de los valores propios de $-\triangle^{-1}$, luego, si $\{\frac{1}{\lambda_k^2}\}$ son los valores propios de $-\triangle^{-1}$ y se pueden ordenar $\frac{1}{\lambda_1^2} > \frac{1}{\lambda_2^2} > \frac{1}{\lambda_3^2}...$, entonces $\{\lambda_k^2\}$ cumplen $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < ...$, y $\lambda_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además se sabe por el Lema A.4 que para λ_k^2, λ_j^2 para $k \neq j$ las funciones propias correspondientes son ortogonales, y cada valor propio genera a lo más una función propia, entonces por el Teorema de Representación de Hilbert Schmidt (Teorema 1.4), existe un sistema $\{v_k\}$ ortonormal de $L_2(\Omega)$ donde cada v_k es una función propia de $-\triangle$.*

Observación 3.3. *Las funciones propias $\{v_k\}$ mencionadas también forman un subconjunto ortogonal de $H_0^1(\Omega)$. En efecto, sean v_j, v_i en el sistema $\{v_k\}$. Tenemos que*

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla v_i = -\int_\Omega v_j \triangle v_i = \lambda_k^2 \int_\Omega v_j, v_i$$

$$< v_j, v_i >= \begin{cases} \lambda_k^2, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \tag{3.2}$$

Definimos $\mathbb{A}_y := \{(x,y) : x \in [0,1]\}$ para cada $y \in (0,h)$. Vemos que si tomamos $u \in H^1(\Omega)$, entonces $u|_{\mathbb{A}_y}$ es una función en $L_2(\mathbb{A}_y)$, por lo tanto para $\{v_k\}$ un sistema ortonormal de $L_2(\mathbb{A}_y)$ existen $\{w_n(y)\}$ coeficientes de Fourier tales que:

$$u|_{\mathbb{A}_y} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(y) v_k, \quad w_k(y) = \int_0^1 u|_{\mathbb{A}_y} v_k dx \tag{3.3}$$

Lema 3.3. *Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces los w_k definidos en* (3.3) *pertenecen a* $L_2(0,h)$.

DEM. Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$, u^2 verifica el Teorema de Fubini ([12], MIJAILOV, pág.66) entonces:

$$\begin{aligned}
\int\int_\Omega u^2 dxdy &= \int_0^h \int_0^1 (\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k)^2 \geq \int_0^h \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (w_k v_k)^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{N} (w_k v_k)^2 dxdy = \lim_{N\to\infty} \int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{N} (w_k v_k)(w_j v_j \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_0^h (w_k w_j) dy \int_0^1 (v_k v_j) dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_0^h (w_j)^2 dy \\
&= \int_0^h \sum_{k=1}^{\infty} (w_j)^2 dy \geq \int_0^h (w_j)^2 dy
\end{aligned}$$

por lo tanto para $u \in H^1(\Omega)$, $\int_\Omega u^2$ existe, luego $w_k \in L_2(0,h)$, y por la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $L_2(\Omega)$ se tiene el resultado.$\blacksquare$

Lema 3.4. *Si* $u \in H^2(\Omega) \cap H^*(\Omega)$, *entonces los* w_k *definidos en* (3.3) *pertenecen a* $H^1(0,h)$,

$$\frac{du}{dy}|_{\mathbb{A}_y} = \frac{dw_k}{dy}.$$

DEM. Si $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{du}{dy} \in H^1(\Omega)$ y, por el Lema 3.3, existen $\zeta_n \in L_2[0,h]$ tales que

$$\frac{du}{dy}|_{\mathbb{A}_y} = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k v_k.$$

Sabemos por el Teorema de la Divergencia que para $v \in H^* \cap \{v : v|_{\mathbb{A}_y} = 0\}$ se cumple

$$\int_\Omega u\frac{dv}{dy} = -\int_\Omega \frac{du}{dy}v,$$

luego, si tomamos $v = \zeta v_j$ para $j \in \mathrm{N}$, $\zeta \in C_0^\infty(0,h)$, y $u \in H^*$,

$$\Rightarrow \int_\Omega uvdxdy = \int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(w_k v_k)\zeta v_j dxdy = -\int_0^h \int_0^1 \frac{du}{dy}\zeta v_j dxdy$$

$$\Rightarrow \int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(w_k v_k)\zeta v_j dxdy = -\int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_k v_k)\zeta v_j$$

$$\Rightarrow \int_0^h w_j \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \int_0^h \zeta_j \zeta \quad \text{para cada } \zeta \in C_0^\infty(0,h)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \zeta_j$$

en el sentido generalizado, luego $w_k \in H^1(0,h)$.■

Lema 3.5. *Toda función generalizada propia del operador de Laplace en algún intervalo* $(0,h)$ *es una función propia en el sentido clásico.*

DEM. Sea $w \in H^1(0,h)$ una función propia generalizada del operador $\frac{d^2}{dy^2}$ para λ, luego

$$\int_0^h \frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy}dy = -\lambda \int_0^h wv, \quad \text{para cada } v \in H_0^1(0,h)$$

veamos que $w \in H^2(0,h)$, como la integral anterior se cumple para los elementos de $H_0^1(0,h)$ en particular para las funciones de soporte compacto en $(0,h)$ luego para $[y_0, y_1]$ se cumple

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy}dy = -\lambda \int_{y_1}^{y_0} wv, \;\; \text{para cada } v \in H_0^1(0,h)$$

por lo tanto tenemos que

$$\frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy}dy = -\lambda wv, \;\; \text{para cada } v \in H_0^1(0,h).$$

Sea v tal que $\frac{dv}{dy} = v$ y derivando con respecto a y la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(d\frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy})}{dy} &= \frac{d^2w}{dy^2}v + \frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy} \\ &= \frac{d^2w}{dy^2}v + \frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy} \\ &= \frac{d^2w}{dy^2}v - \lambda wvdy \\ &= (\frac{d^2w}{dy^2} - \lambda w)v \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} -\lambda\frac{dwv}{dy} &= -\lambda(\frac{dw}{dy}v + w\frac{dv}{dy}) \\ &= -\lambda(\frac{dw}{dy}\frac{dv}{dy} + wv) \\ &= -\lambda(-\lambda wv + wv) \\ &= (\lambda^2 w - \lambda w)v \end{aligned} \tag{3.5}$$

por lo tanto de (3.4) y (3.5) tenemos

$$(\frac{d^2w}{dy} - \lambda w)v = (\lambda^2 w - \lambda w)v$$

entonces

$$\frac{d^2w}{dy}v = \lambda^2 wv$$

y para que v cumpla la condición mencionada debe ser múltiplo de funciones exponenciales, entonces v no es cero, por lo tanto

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \lambda^2 w$$

y como w esta en $H^2(0,h)$, w es una función propia en el sentido clásico del operador $\frac{d^2}{dy^2}$.■

Lema 3.6. *El conjunto*

$$\{\sqrt{2}cos(2n\pi x), \sqrt{2}sen(2n\pi x)\} \quad \textit{para cada } n \in \mathrm{N} \tag{3.6}$$

es una sistema ortonormal de $L_2[0,1]$ *formada con funciones propias del operador* $-\frac{d^2}{dx^2}$ *para un problema de contorno sobre la región* $[0,1]$ *que cumple condiciones de simetría.*

DEM. Veamos que (3.6) esta formado por funciones propias del operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ para el problema de contorno, con condiciones simétricas sobre $[(0,1)]$ esto es, si w_k es función propia de $-\frac{d^2}{dx^2}$ debe cumplir

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda w = 0 \text{ para } \lambda > 0.$$

Es conocido que las soluciones de esta ecuación diferencial son combinaciones de funciones senos y funciones cosenos. Así como función de su primera variable tenemos:

$$w(x,y) = Acos(\lambda x) + Bsen(\lambda x) \text{ para } y \in [0,h].$$

Además como es de interés que se cumplan las condiciones de periodicidad; (para cumplir (2.2) y (2.3)) basta resolver un sistema de ecuaciones para verificar que para $\lambda_n = 2n\pi$ el problema tiene soluciones no triviales; entonces (3.6) esta formado por funciones propias del operador $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Ahora, partiendo de las siguientes identidades

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}(cos(m-n)x - cos(m+n)x)$$
$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}(cos(m-n)x + cos(m+n)x)$$
$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}(sen(m-n)x - sen(m+n)x)$$

se verifica que (3.6) es un sistema ortonormal para $L_2[(0,1)]$.

Teorema 3.1. *Dado el dato de Cauchy* $\psi \in L_2(A)$, *si* $u \in H^2(\Omega)$ *es la solución débil del problema auxiliar, u será de la forma*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n senh(2n\pi(h-y))}{\sqrt{2}n\pi cosh(h2n\pi)}sen(2n\pi x) + \frac{b_n senh(2n\pi(h-y))}{\sqrt{2}n\pi cosh(2n\pi h)}cos(2n\pi x)$$

donde $\{a_n, b_n\}$ *son los coeficientes de Fourier de* ψ *en el sistema* (3.6)

DEM. Si u es solución débil del problema auxiliar entonces está en $H^1(\Omega)$, por el Lema 3.4 se tiene que

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)v_n(y)$$

y además cumple (2.13) para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$, así

$$\int_\Omega \nabla(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)v_n(x))\nabla v(x,y) = 0,$$

en particular $v = wv_j$ para $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n)\nabla(wv_j) = 0$$

entonces

$$0 = \int_\Omega \nabla(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n)\nabla(wv_j) = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty}(\nabla v_n v_n)\nabla wv_j$$

$$\int_\nabla \sum_{n=1}^{\infty}(\nabla(c_n v_n)\nabla(wv_j)) = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty}(\nabla c_n \nabla w(v_k v_j) + (c_n w)\nabla v_n \nabla v_j)$$

como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$ por (3.2)

$$0 = \int_0^h \frac{dc_j}{dy}\frac{dw}{dy} + \lambda_j^2 \int_0^h c_j w$$

Así c_n es valor propio generalizado del operador de segunda derivada y, por el Lema 3.5, c_n cumple

$$\frac{d^2 c_n}{dy} = \lambda_n^2 c_n, \lambda_n^2 > 0.$$

Por lo tanto c_n para cada n es de la forma

$$c_n = A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}$$

y, por el Lema 3.6, u queda dada por

$$u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n y}(\alpha_n sen(\lambda_n x) + \gamma_n cos(\lambda_n x)) + e^{-\lambda_n y}(\beta_n sen(\lambda_n x)\eta_n cos(\lambda_n x)) \tag{3.7}$$

luego, como $\psi \in L_2[(0,1)]$

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(\lambda_n x) + b_n cos\lambda_n x$$

como $u \in H^2(\Omega)$, entonces $u_y(x,0) = \psi$; luego

$$a_n = \frac{\partial(e^{\lambda_n y}\alpha_n)}{\partial y}|_{y=0} + \frac{\partial(e^{-\lambda_n y}\beta_n)}{\partial y}|_{y=0} = \lambda_n(\alpha_n - \beta_n) \tag{3.8}$$

$$a_n = \frac{\partial(e^{\lambda_n y}\gamma_n)}{\partial y}|_{y=0} + \frac{\partial(e^{-\lambda_n y}\eta_n)}{\partial y}|_{y=0} = \lambda_n(\gamma_n - \eta_n) \tag{3.9}$$

esto es, el coeficiente de Fourier de ψ con respecto a (3.6) debe corresponder con el coeficiente de Fourier de $u_y|_{y=0}$.

Por otro lado, $u(x,h) = 0$, entonces

$$0 = e^{\lambda_n h}\alpha_n + e^{-\lambda_n h}\beta_n \tag{3.10}$$

$$0 = e^{\lambda_n h}\gamma_n + e^{-\lambda_n h}\eta_n \tag{3.11}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (3.8)-(3.11), tenemos

$$\alpha_n = \frac{a_n e^{-\lambda_n h}}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)} \quad \beta_n = \frac{-a_n e^{\lambda_n h}}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)}$$

$$\eta_n = \frac{-b_n e^{\lambda_n h}}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)} \quad \gamma_n = \frac{b_n e^{-\lambda_n h}}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)}$$

así

$$e^{\lambda_n h}\alpha_n + e^{-\lambda_n h}\beta_n = \frac{a_n senh(\lambda_n(y-h))}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)} \quad \text{y} \quad e^{\lambda_n h}\gamma_n + e^{-\lambda_n h}\eta_n = \frac{b_n senh(\lambda_n(y-h))}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)}$$

sustituyendo en (3.7)

$$u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n senh(\lambda_n(h-y))}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)} sen(\lambda_n x) + \frac{b_n senh(\lambda_n(h-y))}{\lambda_n cosh(\lambda_n h)} cos(\lambda_n x) \tag{3.12}$$

y el resultado se obtiene del Lema 3.6 ya que $\lambda_n = 2n\pi$ para que u cumpla las condiciones de periodicidad (2.2) y (2.3) .■

Teorema 3.2. *Si $\psi \in L_2[0,1]$, entonces T_h definido en (2.29) cumple*

$$T_h(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}cos(2n\pi x)$$

donde $\{a_n, b_n\}$ son los Coeficientes de Fourier de ψ en el sistema (3.6).

DEM. Sea $\psi \in L_2[0,1]$ talque $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{2}sen(\lambda_n x) + b_n\sqrt{2}cos\lambda_n x$. Por el Lema 2.4 y el Lema 2.3 se cumplen las hipótesis de Teorema 1.4, por lo tanto

$$T_h(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a_n\sqrt{2}sen(\lambda_n x) + b_n\sqrt{2}cos(\lambda_n x)) \tag{3.13}$$

luego, por el Teorema 3.1, u solución del problema auxiliar estará dada por (3.12), y por la definición de T_h (2.29)

$$T_h(\psi) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}cos(2n\pi x) \tag{3.14}$$

Así que de (3.13) y (3.14) podemos concluir que

$$\mu_n = \frac{senh(2n\pi h)}{2n\pi cosh(2n\pi h)} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$$

por lo tanto

$$T_h(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}cos(2n\pi x). \blacksquare$$

Corolario 3.1. *Sean $\phi \in L_2[0,1]$ y $\psi \in L_2[0,1]$ tales que*

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(\lambda_n x) + b_n cos\lambda_n x \quad y$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n sen(\lambda_n x) + t_n cos\lambda_n x,$$

entonces $(\phi, \psi) \in M_h$ si y sólo si

$$s_n = \frac{a_n}{\sqrt{2}n\pi}\frac{senh(\sqrt{2}n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}$$

,

$$t_n = \frac{b_n}{2n\pi}\frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}$$

DEM. $\Rightarrow$] Para $(\phi, \psi) \in M_h$, se cumple (2.30) $T_h\psi = \phi$, así que por el Teorema 3.2 tenemos el resultado.
$\Leftarrow$] Sabemos que para $\psi \in L_2[0,1]$ existe solución u del problema auxiliar y podemos ver que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2}n\pi} \frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)} sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{\sqrt{2}n\pi} \frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)} cos(2n\pi x)$$

luego, por hipótesis se tiene que $u(x,0) = \phi(x)$. Por lo tanto se cumple $T_h\psi = \phi$, esto es, $(\phi, \psi) \in M_h$.$\blacksquare$

Observación 3.4. *El Teorema 3.1 nos permite caracterizar en función de h los "datos exactos", que corresponden a mediciones de potencial y corriente en la base de Ω, para los cuales se cumple que la sección transversal a la altura h se comporta como un aislante ideal.*

Lema 3.7. *Sean los datos exactos $(\phi, \psi) \in M_{h_1}$ tales que que pertenecen a M_{h_2} entonces $(\phi, \psi) = (0,0)$ o $h_1 = h_2$.*

DEM. Como $(\phi, \psi) \in M_{h_1}$ y $(\phi, \psi) \in M_{h_2}$ entonces

$$T_{h_1}\psi = \phi \text{ y } T_{h_2}\psi = \phi$$

luego

$$T_{h_1}\psi = T_{h_2}\psi$$

esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} cos(2n\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)} sen(2n\pi x) + \frac{b_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)} cos(2n\pi x)$$

por lo tanto

$$\frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} = \frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)},$$

entonces

$$\frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} - \frac{a_n}{n\pi} \frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)} = 0$$

luego si $a_n = 0$, entonces $\psi = 0$ y $T_h\psi = \phi = 0$, entonces $(\phi, \psi) = (0, 0)$, pero, si

$$\frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} - \frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)} = 0,$$

entonces

$$\frac{e^{2n\pi h_1} - e^{2n\pi h_1}}{e^{2n\pi h_1} + e^{2n\pi h_1}} = \frac{e^{2n\pi h_2} - e^{2n\pi h_2}}{e^{2n\pi h_2} + e^{2n\pi h_2}}$$

de donde se puede concluir

$$e^{2n\pi(h_2 - h_1)} - e^{-2n\pi(h_2 - h_1)} = 0.$$

Análogamente para

$$\frac{b_n}{n\pi}\frac{senh(2n\pi h_1)}{cosh(2n\pi h_1)} = \frac{b_n}{n\pi}\frac{senh(2n\pi h_2)}{cosh(2n\pi h_2)}$$

se puede concluir que $h_1 = h_2$.$\blacksquare$

Finalmente, ahora conocemos las relación que deben cumplir los datos de Cauchy para resolver el Problema (2.1)-(2.5) se podrá determinar de forma única el valor de h para los datos en los que sabemos que existe una solución u del Problema (2.1)-(2.5) tal que $u(x, h) = 0$, es decir, a la altura h el rectángulo conductor se comporta como un aislante.

Conclusión

En una región rectangular conductora homogénea existe una sección transversal que se comporta como un conductor ideal, si las mediciones de potencial y corriente en la base (ϕ, ψ) pertenecen a algún M_h. Los pares $(\phi, \psi) \in M_h$ están relacionados a través de

$$T_h \psi = \phi$$

y h es la altura a la que se encuentra dicha sección transversal.

Los pares (ϕ, ψ) que pertenecen a M_h para alguna h, donde $\{a_n, b_n\}$ y $\{s_n, t_n\}$ son respectivamente los coeficientes de Fourier en el sistema de funciones propias del operador de segunda derivada $(\sqrt{2}\text{sen}(2n\pi), \sqrt{2}\text{cos}(2n\pi))$, cumplen

$$s_n = \frac{a_n}{2n\pi} \frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)},$$
$$t_n = \frac{b_n}{2n\pi} \frac{senh(2n\pi h)}{cosh(2n\pi h)}.$$

Para $(\phi, \psi) \in M_h$, mediciones exactas de potencial y corriente en la base del rectángulo, la altura a la que se encuentra la sección transversal que se comporta como un aislante es única.

Como trabajo a futuro se pretende que a partir de las caracteristicas de los datos exactos determinar dicha altura, a la que se encuentra la sección transversal que se comporta como un aislante ideal, en función de las propiedades de los datos exactos y con ello aproximar dicha altura para mediciones de potencial y corriente dados con error.

Una vez resuelto este problema, para esta región rectangular se pretende, mediante trasformaciones conformes, obtener un resultado equivalente para una región circular que en su interior contiene una región conductora ideal con frontera irregular.

Apéndice A

A

En esta sección se dan algunos resultados que fueron utilizados en esta tesis para construir las demostraciones presentadas. Es importante decir que se presentan de forma más general a la que son utilizados nos centramos en $p = 2$ y $N = 2$.

Teorema A.1. ***Fórmula de Integración por Partes.*** *([12] MIJAILOV pág. 156) Sea Γ una región acotada en $\mathbb{R}^N$ tal que $\partial\Gamma$ es de clase C^1 mientras que f y g son elementos de $H^1(\Gamma)$, entonces para todo $i = 1, \dots N$ es valida la fórmula de integración por partes*

$$\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x_i} g = \int_{\partial\Gamma} f g \eta_i dS - \int_\Gamma f \frac{\partial g}{\partial x_i} g$$

donde $\eta_i = cos(\eta, x_i)$ el coseno del ángulo entre la normal η exterior a $\partial\Gamma$ y el eje x_i. Se deduce que para $g \in H^1(\Gamma)$ y las componentes $f_1, \dots f_{N-1} y f_N$ en $H^1(\Gamma)$, tales que $f = (f_1, \dots f_N)$

$$\int_\Gamma g\, div f = \int_{\partial\Gamma} g(f \cdot \eta) dS - \int_\Gamma f \nabla g$$

donde η denota la normal exterior unitaria a $\partial\Gamma$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ es la derivada normal.

Teorema A.2. *([2], BREZIS, pág. 90)* ***Teorema de la convergencia Dominada****. Sea $\{u_n : \Gamma \to \mathrm{R}\}$ una sucesión de funciones integrables que converge casi en cualquier punto a una función f. Si existe una función v tal que $|u_n| \leq v$ para todo natural n, entonces f es integrable y se cumple*

$$\int_\Gamma f = lim \int_\Gamma f_n$$

Lema A.1. *Sea Γ una región acotada en $\mathbb{R}^N$ tal que $\partial\Gamma$ es regular, si $k_1 > k_2 \geq 0$, entonces la inmersión $H^{k_1} \rightarrow H^{k_2}$ es compacta.*

Teorema A.3. *([12] MIJAILOV pág. 160) Todo conjunto acotado en $H_1(\Gamma)$ es compacto en $L_2(\Gamma)$.*

Teorema A.4. *([12] MIJAILOV pág. 153) Sea Γ un domino acotado en R^N y S una superficie de dimensión $N-1$ y de clase C^1 en $\overline{\Gamma}$, entonces para toda f en H^1 existe la traza de f en S y se verifica la relación*

$$\| f|_S \|_{L_2(\Gamma)} \leq \| f \|_{H^1(\Gamma)} .$$

Definición A.1. *([10], KOLMOGOROV, pág. 152) Dos normas $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ en un espacio vectorial V son equivalentes, si existen k_1, k_2 positivas tales que*

$$k_1 \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq k_2 \| x \|_1 \quad \textit{para cada } x \in V.$$

Definición A.2. *([14], TARTAR, pág.50)* ***Desigualdad de Poincaré.*** *Si $1 \leq p \leq \infty$ y Γ es un subconjunto abierto no vacio de R^{N} se dice que se verifica la desigualdad de Poincaré en V subespacio de H^1, si existe una constante K tal que $\| u \|_p \leq K \| \nabla u \|_p$.*

Lema A.2. *([14], TARTAR, pág.50) Sean $1 \leq p \leq \infty$, V subespacio de H^1 y Γ subconjunto abierto no vacio de R^{N}, si es compacta la inmersión de V en $L^p(\Gamma)$, entonces la desigualdad de Poincaré se verifica en el subespacio V si y sólo si la constante 1 no es elemento de V.*

Lema A.3. *([10], KOLMOGOROV, pág. 260) Sea T un operador autoadjunto entonces todos sus valores propios son reales.*

Lema A.4. *([10], KOLMOGOROV, pág. 260) Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos son ortogonales.*

Definición A.3. *([12], MIJAILOV pág. 254) u es una* ***función armónica*** *en el dominio Γ de R^N, si cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

1. *u dos veces continuamente diferenciable en Γ y en todo $x \in \Gamma$ satisface la Ecuación de Laplace*

$$\triangle u = 0.$$

2. *$u \in H^1_{loc}(\Gamma)$, Γ dominio de R^N y si satisface la identidad integral*

$$\int_\Gamma \nabla u \nabla v dx = 0 \ \ \textit{para cada } v \in H^1(\Gamma),$$

terminales en Γ (es decir son iguales a cero casi siempre en $\Gamma \backslash \Gamma'$ para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$).

Teorema A.5. *([12], MIJAILOV pág. 237) Supongamos $f \in L_2(\Gamma)$ y $u \in H^1(\Gamma)$ que satisface para toda $v \in H_1^0(\Gamma)$ la identidad integral*

$$\int_\Gamma \nabla u \nabla v dx = -\int f v dx$$

entonces u satisface en Γ la ecuación

$$\triangle u = 0.$$

Bibliografía

[1] APOSTOL,T.M.;*Calculus*; Vol.I.(Nueva York, 1967). Edit.J.Wiley.

[2] BREZIS,H.;*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*;(Nueva York, 2011). Edit. Springer-Verlag.

[3] BUGROV,S.Y.;NIKOLSKI,S.M.;*Matemáticas Superiores, Ecuaciones Diferenciales, Integrales Múltiples, Series de funciones de Variable Compleja*;(Moscú, 1981). Edit. Mir.

[4] FRAGUELA,C.A.;*Análisis Matemático Avanzado*;(Puebla, 2004). Edit. Siena.

[5] FRAGUELA, COLLAR ANDRÉS;(México, 1991).*Teoría espectral de Operadores Diferenciales*; VII Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

[6] FRAGUELA, COLLAR ANDRÉS;(México, 2008).*Teoría Matemática de Problemas Inversos*; Curso CADI, Tecnológico de Monterrey.

[7] HERNÁNDEZ, MONTERO EDUARDO;(Puebla, 2014).*Regulación del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un cilindro*; Tesis de Maestria, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B.U.A.P.

[8] ISAKOV,V.;*Inverse Problems for Partial Differential Equations*;(Nueva York, 1998). Edit. Springer-Verlag.

[9] KIRSCH,A.;*An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*;(Nueva York, 1996). Edit. Springer-Verlag.

[10] KOLMOGOROV,A.N.; FOMIN,S.V.;*Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*;(Moscú, 1975). Edit. Mir.

[11] MARSDEN,J.E.; TOMBA,A.J.;*Cálculo Vectorial*;(Madrid, 2004). Edit. Pearson Educación, S.A.

[12] MIJÁILOV,V.P.; FOMIN,S.V.;*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*;(URSS, 1978). Edit. Mir.

[13] MYINT-U,T.;DEBNATH, L.;*Linear Partial Differential Equation for Scientists and Engineers*;(Boston, 2007). Edit. Birkhausa.

[14] TARTAR,L.;*An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*;(Berlin, 2007). Edit. Springer-Verlag.