Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

ITERACIÓN DE PICARD EN ESPACIOS G-MÉTRICOS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
TANIA IVETTE GONZÁLEZ IBARRA

DIRECTOR DE TESIS
DR. SLAVISA DJORDJEVIC

PUEBLA, PUE. 05 de noviembre de 2015

A mi mamá.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por su cariño y ejemplo, por estar siempre a mi lado y apoyar cada una de mis decisiones.

A todos y cada uno de los profesores que me dieron clase, por su dedicación y apoyo.

Al Dr. Slavisa Djordjevic, por haber aceptado ser mi asesor.

A la Dra. María de Jesús López Toriz, al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres y al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por el tiempo dedicado en la revisión de esta tesis y por sus valiosas sugerencias.

Introducción

La teoría métrica del punto fijo es una rama de la teoría del punto fijo la cual encuentra sus principales aplicaciones en el análisis funcional. En las últimas dos décadas el desarrollo de la teoría de punto fijo en espacios métricos ha atraído considerable atención debido a numerosas aplicaciones en áreas como optimización, modelación matemática y teoría de aproximación. Los espacios métricos desempeñan un papel cada vez mayor en las matemáticas y las ciencias aplicadas. Diferentes generalizaciones de la noción usual de un espacio métrico han sido propuestas por varios matemáticos tales como Gahler [1] y[2] (llamados espacios 2-métricos) y Dhage [3], [4] (llamados espacios D-métricos). Sin embargo, K.S.Ha, J. Cho y A. White en [5] han señalado que los resultados citados por Gäler son independientes, en lugar de generalizaciones, de los resultados correspondientes en espacios métricos. Por otra parte, se demostró en [6] que la noción de espacio D-métrico de Dhage adolece de errores y la mayoría de los resultados establecidos por él y otros autores no son válidos. Estos hechos motivaron a Mustafa y Sims [7] a introducir un nuevo concepto en el área, llamado espacio G-métrico. Un espacio G-métrico es un par (X, G), donde X es un conjunto no vacio y G es una función de $X \times X \times X$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para todo $x, y, z, a \in X$:

(GM1) $G(x, y, z) = 0$ si $x = y = z$,

(GM2) $0 < G(x, x, y)$; siempre que $x \neq y$,

(GM3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ siempre que $z \neq y$,

(GM4) $G(x, y, z) = G(p\{x, y, z\})$, donde p es una permutación de x, y, z (simetría en las tres variables), y

(GM5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ (desigualdad rectangular).

Recientemente, Z. Mustafa, B. Sims, H. Obiedat, F. Awawdeh, W. Shatanawi, M. Bataineh, R. Karapynar y R. Agarwal han estudiado varios teoremas de punto fijo para funciones en los espacios G-métricos completos (ver [8]-[11]). El objetivo de este trabajo es presentar condiciones tipo contractivas en

espacios G-métricos que aseguren la G-convergencia de la iteración de Picard a un punto fijo de una función.
La estructura de esta tesis es la siguiente:
En el primer capítulo se presentan los resultados necesarios para desarrollar este trabajo.
En el capítulo 2 se introduce el concepto de espacio G-métrico y se estudian algunas de sus propiedades más importantes.
En el último capítulo se enuncian y demuestran algunos teoremas de punto fijo en espacios G-métricos, donde la iteración de Picard es G-convergente a un punto fijo de una función. Estos resultados de punto fijo no se pueden deducir a otros ya conocidos en el contexto de espacios métricos.

Índice general

ITERACIÓN DE PICARD EN ESPACIOS G-MÉTRICOS

Tania Ivette González Ibarra

05 de noviembre de 2015

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es exponer los conceptos básicos de la teoría de punto fijo. Se enuncian sin pruebas, algunos resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Antecedentes de la Teoría Métrica del Punto Fijo

Sean X un conjunto no vacio y $T : X \to X$ una función. Decimos que $x \in X$ es un punto fijo de T si y sólo si,

$$T(x) = x$$

y denotamos por F_T el conjunto de todos los puntos fijos de T.

Ejemplo 1.1. *1) Si $X = \mathbb{R}$ y $T(x) = x^2 + x - 1$, entonces $F_T = \{1, -1\}$;*

2) Si $X = [0, 1]$ y $T(x) = x^2$, entonces $F_T = \{0, 1\}$;

3) Si $X = \mathbb{R}$ y $T(x) = x + 2$, entonces $F_T = \emptyset$;

4) Si $X = \mathbb{R}$ y $T(x) = x$, entonces $F_T = \mathbb{R}$;

Sean X cualquier conjunto no vacio y $T : X \to X$ una función. Para cualquier $x_0 \in X$ dado, definimos $T^n(x)$ inductivamente por $T^0(x) = x$ y $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$; llamamos a $T^n(x)$ la n-ésima iteración de x bajo T.

Para simplificar las notaciones, usaremos Tx en lugar de $T(x)$.

La función T^n $(n \geq 1)$ es llamada la n-ésima iteración de T. Para cualquier $x \in X$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ dada por

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

es llamada la sucesión de aproximaciones sucesivas con el valor inicial x_0. También se conoce como la iteración de Picard a partir de x_0.
Sea $T : X \to X$ una función. Las siguientes propiedades se cumplen:

1) $F_T \subset F_{T^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

2) si $F_{T^n} = \{x\}$, para algún $n \in \mathbb{N} \Rightarrow F_T = \{x\}$;

El recíproco de 2) no se cumple, en general, como se muestra por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Sea $T : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ una función tal que $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ y $T(3) = 1$. Entonces $F_{T^n} = \{1, 2, 3\}$ pero $F_T = \{2\}$.*

La teoría del punto fijo se ocupa de encontrar condiciones sobre la estructura que debe tener el conjunto X, así como propiedades de la función $T : X \to X$ con el fin de obtener resultados principalmente sobre:

a) la existencia y unicidad de puntos fijos;

b) la aproximación de puntos fijos;

c) la construcción de puntos fijos.

Los teoremas de punto fijo se han estudiado en una variedad de espacios: retículo, espacio métrico, espacio lineal normado, espacio métrico generalizado, espacio uniforme, espacio topológico lineal, etc., mientras que las condiciones impuestas sobre la función son generalmete tipo métricas o de compacidad. En esta tesis, se estudian puntos fijos de funciones tipo contractivas en un espacio métrico generalizado, llamado espacio G-métrico.

Espacio Métrico

Un espacio métrico es un conjunto en donde se introduce la noción de distancia entre sus elementos. Para abstraer el concepto de distancia, hay que captar lo esencial de dicha noción, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 1.3. *Sean X un conjunto y d una función real definida sobre el producto cartesiano $X \times X$. Entonces d es llamada una métrica sobre X si, y sólo si, para cada $a, b, c \in X$*

(MS1) (Positividad) $d(a, b) \geq 0$;

(MS2) (Idéntica) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;

(MS3) (Simetría) $d(a, b) = d(b, a)$; *y*

(MS4) (Desigualdad Triangular) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Un conjunto X equipado con una métrica d es llamado espacio métrico y se denota por (X, d).

Para cada $a, b \in X$, llamamos al número $d(a, b)$ la distancia entre a y b con respecto a la métrica d.

Ejemplo 1.4 (El espacio discreto)**.** *Sea X un conjunto no vacío. La métrica d sobre X dada por, $x, y, \in X$,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

es llamada la métrica discreta en X. Esta métrica se puede definir en cualquier conjunto no vacío.

Ejemplo 1.5 (La recta real)**.** *Sean $X = \mathbb{R}$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = |x - y|$. Entonces d es una métrica sobre X, llamada la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}$ y se denota por $|\cdot|$.*

Sea n un entero positivo, la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}$ se extiende de varias maneras naturales para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, que consiste de todas las n-tuplas de números reales. Tal vez la mejor manera es la extensión que da a los espacios Euclideanos $\mathbb{R}^n_2$. Para estos espacios la distancia $d_2(x, y)$ entre dos puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como $(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 1.6 ($\mathbb{R}^n_\infty$)**.** *La pareja (X, d_∞) es un espacio métrico, donde X es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y para cada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ en X, la métrica d_∞ se define como*

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\}.$$

Ejemplo 1.7 ($\mathbb{R}^n_p$, $1 \leq p < \infty$)**.** *Sea X el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. La función d_p definida como*

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para cada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ en X, es una métrica en $\mathbb{R}^n$. La métrica d_1 se conoce como la métrica del taxista en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.8 (El espacio l_∞)**.** *La pareja (X, d_∞) es un espacio métrico, donde $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} |\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} es\ acotada\}$ y la función $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ es definida como*

$$d_\infty(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sup\{|x_n - y_n||\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplo 1.9 (El espacio $l_p, 1 \leq p < \infty$)**.** *Sea $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, donde $p \in \mathbb{R}$, $p > 1 fijo$. Entonces la función $d_p : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d_p(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una métrica sobre X.

Ejemplo 1.10 (El espacio $\mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$)**.** *Sean A es un conjunto no vacio y $X = \mathfrak{B}(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f$ es una función acotada en $A\}$. La función $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in A\}$$

es una métrica sobre X, conocida como la métrica uniforme en $\mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$.

Ejemplo 1.11. *Sea $X = C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid$ es continua en $[a, b]\}$. Entonces la función $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{\ |f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

es una métrica sobre X.

Dada una métrica d sobre X, podemos costruir una nueva métrica sobre X, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces d_1 y d_2 son también métricas sobre X, donde,*

(1) $d_1(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$, *y*

(2) $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, *para todo $x, y \in X$.*

Ejemplo 1.13. *Sean (X_i, d_i) espacios métricos y $n \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Sea $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Entonces las funciones*

(1) $d^{'}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$, *y*

(2) $d^{''}(x, y) = \text{máx}\{d_i(x_i, y_i)|\ i \in \{1, 2, ..., n\}\}$.

son métricas sobre X, donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X$.

Ahora que ya hemos definido los espacios métricos, ¿qué significa que dos espacios métricos son iguales? Como la idea fundamental es la distancia, tiene sentido decir que dos espacios métricos son iguales si hay una una función (necesariamente uno-a-uno) que preserve la distancia de uno "sobre" el otro. Tales funciones son llamadas isometrías.

Definición 1.14. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $T : X \to Y$ se llama isometría si $d_Y(T(x), T(y)) = d_X(x, y)$ para cada $x, y \in X$. Si T es sobreyectiva, entonces decimos que X y Y son isométricos. Una isometría sobreyectiva $T : X \to X$ es llamada una moción de X.*

La relación ser "isométrico" es una relación de equivalencia sobre la familia de espacios métricos. Así, podemos hablar sencillamente de espacios métricos isométricos. Dos espacios métricos isométricos pueden diferir en la naturaleza específica de sus puntos, pero son indistinguibles en cuanto a su comportamiento como espacios métricos.

Ahora veremos que la colección de subconjuntos abiertos de un espacio métrico es tan importante que se le da un nombre especial: la topología del espacio métrico.

Definición 1.15. *Una topología sobre un conjunto X es cualquier familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X que satisface los siguientes axiomas:*

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$.

(2) La unión de cualquier coleccion de $\mathfrak{F}$ es un miembro de $\mathfrak{F}$.

(3) La intersección de cualquier colección finita de $\mathfrak{F}$ es un miembro de $\mathfrak{F}$.

El par $(X, \mathfrak{F})$ es llamado un espacio topológico.

Un subconjunto U se denomina conjunto abierto si $U \in \mathfrak{F}$. Un conjunto cerrado en X es un conjunto cuyo complemento es abierto. Así $B \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $X \backslash B \in \mathfrak{F}$, donde

$$X \backslash B = \{x \in X : x \notin B\}.$$

Si $(X, \mathfrak{F})$ es un espacio topológico, entonces es claro a partir de la definición, que:

(1') $\emptyset, X$ son conjuntos cerrados.

(2') La intersección de cualquier colección de subconjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado.

(3') La unión de cualquier colección finita de subconjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado.

La mayoría de los espacios topológicos, satisfacen una propiedad adicional. Un espacio topológico $(X, \mathfrak{F})$ se llama Hausdorff si dados cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un espacio topológico X se denomina convergente a $x \in X$ (escrito $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) si dado cualquier conjunto abierto U que contiene a x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, $x_n \in U$. La suposición de que el espacio X es Hausdorff asegura que los límites de sucesiones convergentes en X son siempre únicos.
Hay dos maneras naturales de introducir la topología métrica en un espacio métrico (X, d). Para $x_0 \in X$ y $r > 0$ sea

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x_0, x) < r\}.$$

$B(x_0, r)$ es llamada la bola abierta con centro en x_0 y radio r. La topología métrica sobre un espacio métrico (X, d) es la topología obtenida tomando como conjuntos abiertos $\mathfrak{F}$ todos los conjuntos S en X que tienen la propiedad $S \in \mathfrak{F}$ siempre que cada punto $x \in S$ es el centro de alguna bola abierta

$B(x, r)$ tal que $B(x, r) \in S$. En [18, Proposición 1.4, pág. 47] se encuentra una prueba de que $\mathfrak{F}$ es una topología Hausdorff.
Esto da lugar a una caracterización importante de los conjuntos cerrados en un espacio métrico.

Teorema 1.16. *Un subconjunto B de un espacio métrico (X, d) es cerrado si y sólo si*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in B.$$

Una prueba del Teorema 1.16 se encuetra en [15, Teorema 2.1, pág. 16].

Otra manera eficiente de introducir la topología métrica en un espacio métrico es definir primero "conjuntos cerrados".

Definición 1.17. *Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos a un punto $x \in X$ un punto límite de $S \subseteq X$, si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en S tal que $\lim_{n\to\infty} = x$.*

Ahora definimos los conjuntos cerrados en X como aquellos conjuntos que contienen todos sus puntos límites, y definimos los conjuntos abiertos como aquellos conjuntos cuyos complementos son cerrados. En vista del Teorema 1.16 la topología obtenida de esta forma es de hecho la topología métrica.

Definición 1.18. *Dos métricas d_1 y d_2 sobre X se llaman topológicamente equivalentes, si inducen la misma topología sobre X, y en tal caso se dice que (X, d_1) y (X, d_2) son espacios métricos topológicamente equivalentes.*

No es complicado ver que la relación "topológicamente equivalentes" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas sobre X.

Si S es un subconjunto de un espacio topológico X entonces la clausura $\overline{S}$ de S se define como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a S. Un conjunto S en un espacio topológico es cerrado si y sólo si $\overline{S} = S$.

Definición 1.19. *Un subespacio S de un espacio métrico (X, d) es denso en X si $\overline{S} = X$.*

Otra consecuencia del Teorema 1.16 es el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [15, Teorema 2.2, pág. 16].

Teorema 1.20. *Sea B un subconjunto de un espacio métrico (X, d), entonces $x \in \overline{B}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Para sucesiones de números reales se tiene un criterio de convergencia que depende únicamente de la sucesión misma: si una sucesión de números reales es de Cauchy entonces converge. La noción de sucesión de Cauchy se extiende de manera natural a espacios métricos. Sin embargo, no es cierto en general que cualquier sucesión de Cauchy en un espacio métrico converge. A los espacios métricos en los que cualquier sucesión de Cauchy converge se les llama completos. La completitud es una propiedad muy importante. Permite, por ejemplo, obtener soluciones de sistemas de ecuaciones numéricas, de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones integrales mediante un proceso de iteración.

Definición 1.21. *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d) se denomina una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > \mathbb{N}$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Proposición 1.22. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico (X, d) es de Cauchy.*

En [19, Proposición 2.3.6, pág. 44] se encuentra una prueba de la Proposición 1.22 y se muestra que el recíproco, en general, no es cierto.

Definición 1.23. *Un espacio métrico (X, d) es completo si cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ es convergente en X.*

Es importante hacer notar que en un espacio métrico completo, no hay puntos "desaparecidos" y cualquier sucesión divergente es "verdaderamente"divergente, en el sentido de que no hay otro espacio métrico más grande en donde sea convergente.

Ejemplo 1.24. *a) El espacio $\mathbb{R}$ con la métrica usual ($d(x, y) = |x - y|$) es un espacio métrico completo;*

b) El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo;

c) $X = \mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$ *con la métrica uniforme es un espacio métrico completo;*

d) $X = \mathbb{Q}$ *con la métrica Euclideana,* $(X, |\cdot|)$*, no es un espacio métrico completo.*

Definición 1.25. *Un subconjunto* S *de un espacio métrico* (X, d) *es acotado si* S *esta contenido en alguna bola* $B(x, r)$ *de* X*.*

Teorema 1.26. *Una sucesión de Cauchy en un espacio métrico* (X, d) *siempre es acotada.*

Teorema 1.27. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una sucesión de Cauchy* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x \in X$ *si y sólo si tiene una subsucesión* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *que converge a* x*.*

En [19, Proposición 2.3.6, pág. 44] se encuentra una prueba de los teoremas (1.26) y (1.27).

El siguiente resultado sobre completitud es bastante útil.

Teorema 1.28. *Sean* (X, d_X) *un espacio métrico completo y* $S \subseteq X$*. El subespacio métrico* (S, d_X) *es completo si y sólo si,* S *cerrado en* X*.*

Demostración. Sea S un subconjunto cerrado en X y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ una sucesión de Cauchy. Como (X, d_X) es completo, existe un punto $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces por el Teorema (1.19), $x \in S$. Por lo tanto, (S, d_x) es completo. Ahora, sea (S, d_X) completo y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ una sucesión convergente en S. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy convergente en S. Del Teorema (1.16) se sigue que S es cerrado.

Como hemos visto, no todo espacio métrico es completo, la pregunta es ¿todo espacio métrico puede completarse? Es decir, ¿siempre pueden ser rellenados los "agujeros" en un espacio métrico incompleto? La respuesta es sí.

Definición 1.29. *Sea* (X, d_X) *un espacio métrico. Un espacio métrico* (Y, d_Y) *es una completación de* (X, d_X) *si*

(1.) (Y, d_Y) *es completo, y*

(2.) existe una isometría ϕ *de* X *sobre* Y *tal que* $\phi(X)$ *es denso en* Y*.*

Teorema 1.30. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces existe una completación de (X, d).*

Todas las completaciones de un espacio métrico son iguales en el sentido de que existe una isometría entre ellas.

Definición 1.31. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \to X$ es llamada*

(C1) Lipschitziana (o L-Lipschitziana) si existe $L > 0$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq L\ d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X;$$

(C2) contracción (o a-contracción) si T es a-Lipschitziana, con $a \in [0, 1)$;

(C3) no expansiva si T es 1-Lipschitziana;

(C4) contractiva si $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, para todo $x, y \in X$, con $x \neq y$.

Ejemplo 1.32. *a) La función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x/2 + 3$, es una contracción y $F_T = \{6\}$;*

b) la función $T : [1/2, 2] \to [1/2, 2]$ dada por $T(x) = 1/x$ es 4-Lipschitziana con $F_T = \{1\}$;

c) la función $T : [1, +\infty] \to [1, +\infty]$ definida por $T(x) = x + 1/x$ es contractiva y $F_T = \emptyset$;

d) la función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 0$ es no expansiva y $F_T = \{0\}$.

El Teorema de Punto Fijo de Banach (también conocido como el Principio de Contracción de Banach) es una herramienta importante en la teoría de espacios métricos. Garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de ciertos mapeos de espacios métricos, y proporciona un método constructivo para encontrar esos puntos fijos. Aunque la idea básica era conocida por otros anteriormente, el principio apareció por primera vez en forma explícita en 1922 en la tesis de Stefan Banach (1892-1945), en la que se utilizó para establecer la existencia de una solución a una ecuación integral.

Teorema 1.33 (Principio de Contracción de Banach)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una contracción. Entonces T tiene un único punto fijo x_0, y para cada $x \in X$, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0.$$

Hay varias generalizaciones del Teorema 1.33, obtenidas de dos maneras:
1. debilitando las propiedades de contracción de la función T y, posiblemente, al mismo tiempo dando al espacio X una estructura suficientemente rica, con el fin de compensar la relajación de los supuestos de contractividad;
2. ampliando la estructura del espacio X.

Varios teoremas de punto fijo se han obtenido mediante la combinación de las dos formas descritas anteriormente o mediante la adición de condiciones suplementarias.

Uno de la maneras más importantes en la extensión de Teorema 1.33 consiste en reemplazar la condición estricta de contracción $(C2)$ por una condición similar pero más débil:

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)), \quad \text{para todo} \quad x, y \in X, \tag{1.2}$$

donde $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función de comparación que preserva algunas propiedades esenciales de la condición que aparece en $(C2)$, $\varphi(t) = at, \ \ 0 \leq a < 1$.

Una alternativa es extender $(C2)$ a la siguiente condición más general:

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), d(x, Ty), d(y, Tx)), \tag{1.3}$$

para todo $x, y \in X$, donde $\varphi : \mathbb{R}^5_+ \to \mathbb{R}_+$ se generaliza a una función de comparación de 5 dimensiones.

1.2. Método Iterativo de Picard

Sean (X, d) un espacio métrico, D un subconjunto cerrado de X (a menudo tenemos $D = X$) y $T : X \to X$ una función con al menos un punto fijo

p. Para cualquier $x_0 \in X$ consideramos la sucesión de iteraciones $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ determinado por el método de iteración sucesiva

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n \in \{1, 2, ...\}. \tag{1.4}$$

Estamos interesados en obtener condiciones (adicionales) en T, D y X, lo más generales posibles, para poder garantizar la (fuerte) convergencia de la sucesión de iteraciones $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a un punto fijo de T en D.

Como ya hemos mencionado, la sucesión definida por 1.4 se conoce como la sucesión de aproximaciones sucesivas o, simplemente, iteración de Picard asociada a T.

Por otra parte, si la iteración de Picard converge a un punto fijo de T, nos interesa estimar el error del método y obtener un criterio para detener la sucesión de aproximaciones sucesivas.

El Principio de Contracción de Banach, cuya versión breve fue dada en la Sección 1.1 (Teorema 1.33) y por lo general llamado Teorema de Contracción de Banach o Teorema de Picard-Banach Caccioppoli, se reformula aquí en su forma completa.

Teorema 1.34. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una a-contracción. Entonces*

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T converge a x^*, para cualquier valor inicial $x_0 \in X$;

(3) las siguientes estimaciones de error a priori y a posteriori, respectivamente, se cumplen:

$$d(x_n, x^*) \le \frac{a^n}{1-a}\, d(x_0, x_1), \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}. \tag{1.5}$$

$$d(x_n, x^*) \le \frac{a}{1-a}\, d(x_{n-1}, x_n), \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}. \tag{1.6}$$

(4) la velocidad de convergencia está dada por

$$d(x_n, x^*) \leq a\ d(x_{n-1}, x^*) \leq a^n\ d(x_0, x^*), \qquad n \in \{1, 2, ...\}. \tag{1.7}$$

Una prueba del Teorema 1.34 se encuentra en [17, Teorema 2.1, pág. 31]
Observaciones.

1) La estimación de error apriori 1.5 muestra que, a partir de una estimación (valor) inicial $x_0 \in X$, el error de aproximación de la n-ésima iteración está completamente determinado por el coeficiente de contracción a y el desplazamiento inicial $d(x_1, x_0)$.

2) La estimación de error a posteriori muestra que, para obtener la aproximación de error deseada del punto fijo por medio de la iteración de Picard, es decir, para tener $d(x_n, x^*) < \epsilon$, tenemos que detener el proceso iterativo en el primer n paso para el cual el desplazamiento entre dos iteraciones consecutivas es como máximo es a lo más $(1-a)\epsilon/a$.
Por lo tanto, la estimación de error a posteriori ofrece un criterio de finalización directo para la aproximación iterativa de puntos fijos usando la iteración de Picard.

3) Es fácil ver que una estimación de error a posteriori es mejor que la estimación a priori, en el sentido de que a partir de 1.6 podemos obtener 1.5.

4) Cada una de las tres estimaciones dadas en el Teorema 1.33 demuestra que la convergencia de la iteración de Picard es al menos tan rápida como la de la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$.

Ejemplo 1.35. *Consideremos la ecuación polinómica*

$$x^5 - x - 1 = 0 \tag{1.8}$$

que se puede escribir en la forma $Tx = x$ de varias maneras. Aquí hay tres de ellas:

$$(a)\ x = x^5 - 1; \quad (b)\ x = \sqrt[5]{x+1}; \quad (c)\ x = \frac{4x^5+1}{5x^4-1}.$$

Es fácil ver que (1.8) tiene solución única en el intervalo $[1, \infty)$*.*
Denotemos:

$$T_1(x) = x^5 - 1, \quad T_2(x) = \sqrt[5]{x+1} \quad y \quad T_3(x) = \frac{4x^5+1}{5x^4-1}, x \in [1, \infty).$$

Entonces la iteración de Picard asociada a T_1 *no converge, cualquiera que sea la aproximación inicial* $x_0 \in [1, \infty)$*, mientras que en el caso de* T_2 *o* T_3*, si lo hace. De hecho,* T_2 *es una* $\frac{1}{5}$*-contracción. La función de iteración* T_3 *se obtuvo por el algoritmo de Newton. La siguiente tabla muestra las primeras iteraciones para los tres procesos iterativos definidos por las funciones* T_1*,* T_2 *y* T_3*, respectivamente, y para ciertos valores iniciales* x_0*.*

$x_{n+1} = T_1 x_n$	$x_{n+1} = T_2 x_n$	$x_{n+1} = T_3 x_n$
$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
....	....	....
$x_1 = 0$	$x_1 = 1.149$	$x_1 = 1.25$
$x_2 = -1$	$x_2 = 1.165$	$x_2 = 1.178$
$x_3 = -2$	$x_3 = 1.167$	$x_3 = 1.168$
$x_4 = -33$	$x_4 = 1.167$	$x_4 = 1.168$
$x_5 = -39135394$	$x_5 = 1.167$	$x_5 = 1.168$
$x_0 = 1{,}167$	$x_0 = 10$	$x_0 = 10$
....	....	....
$x_1 = 1.164$	$x_1 = 1{,}615$	$x_1 = 8$
$x_2 = 1.141$	$x_2 = 1.212$	$x_2 = 6.401$
$x_3 = 0.936$	$x_3 = 1.172$	$x_3 = 5.121$
$x_4 = -0.282$	$x_4 = 1.168$	$x_4 = 4.098$
$x_5 = -1.002$	$x_5 = 1.167$	$x_5 = 3.282$
		$x_5 = 2.632$
		...
		$x_{12} = 1.168$
		$x_{12} = 1.167$

En el Ejemplo 1.35 el proceso iterativo definido por de la función de iteración T_2 (es decir, la iteración de Picard) es rápido (más rápido que la iteración de Newton). Sin embargo, como se muestra en (1.7), la velocidad de convergencia de la iteración de Picard para cualquier contracción es lineal.

En la mayoría de los casos, la condición de contracción (C1) no se cumple en todo el espacio X, sólo localmente. En este contexto, una versión local del Principio de Contracción de Banach es muy útil para ciertos fines prácticos.

Corolario 1.36. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : B(y_0, R) \to X$ una a-contracción, tal que*

$$d(Ty_0, y_0) < (1 - a)R. \tag{1.9}$$

Entonces T tiene un punto fijo que se puede obtener utilizando el método iterativo de Picard, a partir de cualquier $x_0 \in B(y_0, R)$.

Una demostración del Corolario 1.36 se encuentra en [17, Corolario 2.1, pág. 33]

Definición 1.37. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Una función $T : X \to X$ es llamada un operador de Picard (estricto) si existe x^* tal que $F_T = \{x^*\}$ y*

$$T^n(x_0) \to x^* \quad \textit{(uniformemente)} \quad \text{para todo } x_0 \in X.$$

Ejemplo 1.38. *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces cualquier contracción $T : X \to X$ es un operador de Picard.*

Al debilitar la condición de contracción de una función T, las conclusiones del Teorema 1.34 ya no son válidas, como se muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.39. *Si $X = [1, \infty)$ y $T : X \to X$ es definida por $T(x) = x + \frac{1}{x}$, entonces:*

(1) T no es una contracción;

(2) T es contractiva;

(3) $F_T = \emptyset$;

(4) la iteración de Picard asociada a T no converge, para cualquier valor inicial $x_0 \in X$.

Sin embargo, es posible imponer algunas condiciones adicionales al espacio X, para garantizar que una función contracción sea un operador de Picard.

Definición 1.40. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que X es compacto si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in X$ convergente en X. Un subconjunto A de X se dice compacto si (A, d_A) es un espacio compacto.*

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [17, Teorema 2.2, pág. 34]

Teorema 1.41 (Teorema de Nemytzki-Edelstein)**.** *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una función contractiva. Entonces T es un operador de Picard estricto.*

Corolario 1.42. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una función contractiva. Si existe $x_0 \in X$ tal que la iteración de Picard $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a $x \in X$, entonces $F_T = \{x^*\}$ y $x = x^*$.*

Observación. Para una función contractiva, por lo general, no tenemos información sobre la velocidad de convergencia de la iteración de Picard.

Teorema 1.43. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una función para la cual existe $a \in [0, \frac{1}{2})$ tal que*

$$d(Tx, Ty) < a[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad \textit{para cada } x, y \in X. \tag{1.10}$$

Entonces T es un operador de Picard.

Una pruba del Teorema 1.43 se encuentra en [17, Teorema 2.3, pág. 36].

Ejemplo 1.44. *Sean $X = \mathbb{R}$ y $T : X \to X$ dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in (-\infty, 2] \\ \\ -\frac{1}{2} & si \quad x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Entonces (i) T no es continua; (ii) T satisface (1.10) (con $a = \frac{1}{5}$) y por el Teorema 1.43, T es un operador de Picard.

Corolario 1.45. *Sean los supuestos del Teorema 1.43. Entonces, las estimaciones de error de la iteración de Picard están dadas por*

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1), \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}, \tag{1.11}$$

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}, \tag{1.12}$$

donde $\alpha = \frac{a}{1-a}$.

La clase de operadores contractivos están incluidos en la clase de funciones no expansivas. Para una función no expansiva T, sin embargo, la conclusión $F_T \neq \emptyset$ generalmente no es cierto. Una generalización de una función no expansiva, con al menos un punto fijo, es la de las funciones cuasi no expansivas.

Una función $T : X \to X$ es cuasi no expansiva si T tiene al menos un punto fijo en X y, para cada punto fijo p y $x \in X$, se cumple

$$d(Tx, p) \leq d(x, p), \quad \forall\, x \in X.$$

Una definición contractiva que se incluye en la clase de funciones cuasi no expansivas fue obtenida por Zamfirescu en 1972. El Teorema de Zamfirescu es una generalización de los teoremas de punto fijjo de Banach, Kannan y Chatterjea.

Teorema 1.46 (Teorema de Zamfirescu)**.** *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T : X \to X$ *una función para la cual existen los números reales* α, β, γ *satisfaciendo* $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ *y* $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$, *tal que, para cada* $x, y \in X$, *al menos una de las siguientes condiciones se cumple:*

(Z1) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$;

(Z2) $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(Z3) $d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Entonces T *es un operador de Picard.*

Una demostración del Teorema de Zamfirescu se encuentra en [17, Teorema 2.4, pág. 37].

Una función T que satisface el Teorema de Zamfirescu se denomina operador de Zamfirescu.

La estimación de error de la iteración de Picard asociado a un operador de Zamfirescu está dada por las mismas estimaciones (1.11) y (1.12), pero con α reemplazado por

$$\delta = \text{máx}\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}.$$

Ejemplo 1.47. *Si T es un operador de Kannan (es decir, T cumple la condición (1.10)), entonces T es una función cuasi no expansiva.*

Definición 1.48. *Sea X un conjunto no vacio. Una función $T : X \to X$ es un operador de Bessaga si existe $x^* \in X$ tal que*

$$F_{T^n} = \{x^*\}, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 1.49. *Si T es un operador de Picard, entonces T es un operador de Bessaga.*

Si T es un operador de Bessaga sobre el conjunto X, entonces X puede ser organizado como un espacio métrico completo, tal que T debe ser una contracción en X.

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [17, Teorema 2.5, pág. 40].

Teorema 1.50. *Sean X un conjunto no vacio, T un operador de Bessaga y $a \in (0,1)$ un número dado. Entonces existe una métrica d sobre X tal que*

(a) (X, d) es un espacio métrico completo;

(b) T es una contracción con respecto a d.

Por el Teorema 1.50 y el Ejemplo 1.49 tenemos que, para cualquier función T que satisfaga una de las condiciones contractivas del Teorema de Zamfirescu, es posible encontrar otro métrica d' sobre X tal que (X, d') es un espacio métrico completo y T es una contracción con respecto a d'.

Ejemplo 1.51. *La función lineal*

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \textit{dado por} \quad T(x,y) = \left(\frac{8x+8y}{10}, \frac{x+y}{10}\right)$$

no es una contracción con respecto a la métrica Euclideana, pero es una $\frac{9}{10}$-contracción con respecto a la métrica del Ejemplo 1.7 con $p = 1$.

Sin embargo, para un determinado operador de Bessaga, prácticamente no es una tarea fácil construir la métrica d con la cual (X, d) es un espacio métrico completo. Una alternativa a este intento es transferir una parte de las hipótesis de la métrica d a una segunda métrica ρ, como se muestra en el Teorema del Punto Fijo de Maia. Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [17, Teorema 2.6, pág. 52]

Teorema 1.52 (Teorema del Punto Fijo de Maia). *Sean X un conjunto no vacio, d y ρ dos métricas sobre X y $T : X \to X$ una función tales que,*
(i) $d(x, y) \leq \rho(x, y)$, para todo $x, y \in X$;
(ii) (X, d) es un espacio métrico completo;
(iii) $T : (X, d) \to (X, d)$ es continua;
(iv) $T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ es una a-contracción con $a \in [0, 1)$.
Entonces T es un operador de Picard.

Definición 1.53. *Una función $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función comparación si*
(i) φ es monótona creciente, y
(ii) $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0 para todo $t \geq 0$.

Ejemplo 1.54. *(1) $\varphi(t) = at$, $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in [0, 1)$, es una función comparación;*

(2) $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, es una función comparación.

Definición 1.55. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \to X$ es una φ-contración si existe una función comparación φ tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)), \quad \text{para todo} \quad x, y \in X.$$

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [17, Teorema 2.7, pág. 42]

Teorema 1.56. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una φ-contración. Entonces T es un operador de Picard.*

Corolario 1.57. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una función con la propiedad de que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que T^k es una φ-contración. Entonces existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$.*

La teoría métrica del punto fijo es muy rica en teoremas de punto fijo para diversas clases de φ-contracciones, que se obtienen combinando diferentes propiedades de la función de comparación φ. Como se ilustra el Teorema 1.56, casi todos ellos demuestran solamente la convergencia de la iteración de Picard al único punto fijo de T. Sólo unos pocos de estos teoremas de punto fijo son capaces de proporcionar información sobre la velocidad de convergencia de la iteración de Picard.

El siguiente teorema, transpone todas las conclusiones, en el Teorema de Punto Fijo de Banach (1.34) a una clase de φ-contracciones.

Teorema 1.58. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una φ-contracción tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ converge para todo $t > 0$. Entonces*
(i) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;
(ii) la iteración de Picard $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x^*, para cada $x_0 \in X$;
(iii) la siguiente estimación se cumple

$$d(x_n, x^*) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(d(x_n, x_{n+1})), \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}. \tag{1.13}$$

Una demostración del Teorema 1.58 [17, Teorema 2.8, pág. 43]

Note que con $\varphi(t) = at$, $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in [0, 1)$ en el Teorema 1.58, obtenemos el Teorema 1.34.

1.2.1. T-Estabilidad

Intuitivamente, un procedimiento iterativo de punto fijo es numéricamente estable si, modificaciones pequeñas en los datos iniciales o en los datos que están involucrados en el proceso de cálculo, producirán una influencia pequeña en el valor calculado del punto fijo.
La forma general para un procedimiento iterativo de punto fijo es:

$$x_{n+1} = f(T, x_n) \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}, \tag{1.14}$$

donde $T : X \to X$ es una función y $x_0 \in X$ es dado. Observe que el lado derecho de (1.14) contiene todos los parámetros que definen el proceso iterativo. En la iteración de Picard, $f(T, x_n) = Tx_n$.

Sean (X, d) un espacio métrico, $T : X \to X$ una función con $F_T \neq \emptyset$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión obtenida por un proceso iterativo de punto fijo que asegura su convergencia a un punto fijo p de T.

En aplicaciones concretas, cuando calculamos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, usualmente seguimos los siguientes pasos:

1. Elegimos la aproximación inicial $x_0 \in X$.

2. Calculamos $x_1 = Tx_0$ pero, debido a varios errores que se producen durante los cálculos (errores de redondeo, aproximaciones numéricas de funciones, derivadas o integrales), no obtenemos el valor exacto de x_1, pero uno diferente, digamos y_1, que sin embargo está lo suficientemente cerca de x_1, es decir, $x_1 \approx y_1$.

3. En consecuencia, cuando se calcula $x_2 = Tx_1$ calculamos realmente $x_2 = Ty_1$ y así, en lugar del valor teórico x_2, obtendremos, de hecho, otro valor lo suficientemente cercano, y_2, es decir, $x_2 \approx y_2$, ..., y así sucesivamente.

De esta manera, en lugar de la sucesión teórica $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por el método iterativo dado, prácticamente vamos a obtener una sucesión aproximada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vamos a decir que el método iterativo de punto fijo dado es numéricamente estable si y sólo si, para y_n lo suficientemente cerca (en algún sentido) a x_n en cada etapa, la sucesión aproximada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ aún converge al punto fijo de T.
Siguiendo básicamente esta idea, se introdujo el siguiente concepto de estabilidad.

Definición 1.59. *Sean (X, d) un espacio métrico, $T : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Supongamos que el procedimiento de iteración (1.14) converge a un punto fijo p de T. Sean $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en X y*

$$\epsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \quad n \in \{1, 2, ...\}. \tag{1.15}$$

Diremos que el proceso iterativo de punto fijo (1.14) es T-estable o estable con respecto a T si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = p. \tag{1.16}$$

Si las condiciones de la Definición 1.59 se cumplen para $x_{n+1} = Tx_n$, entonces diremos que la iteración de Picard es T-estable.

En [17, Teorema 7.1, pág. 159] se prueba que la iteración de Picard es T-estable con respecto a cualquier a-contracción y también con respecto a cualquier operador de Zamfirescu T.

Capítulo 2

Espacios G-Métricos

El concepto de espacio G-métrico fue introducido por Zead Mustafa y Brailey Sims en [7] con el fin de generalizar la noción de espacio métrico.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacio y sea $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ una función que satisface, para todo $x, y, z, a \in X$,*

(GM1) $G(x, y, z) = 0$ *si* $x = y = z$,

(GM2) $0 < G(x, x, y)$; *siempre que* $x \neq y$,

(GM3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ *siempre que* $z \neq y$,

(GM4) $G(x, y, z) = G(p\{x, y, z\})$, *donde* p *es una permutación de* x, y, z *(simetría en las tres variables), y*

(GM5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ *(desigualdad rectangular),*

entonces la función G es llamada una métrica generalizada, o, más específicamente una G-métrica en X, y el par (X, G) es un espacio G-métrico.

Claramente estas propiedades se cumplen cuando $G(x, y, z)$ es el perímetro del triángulo con vértices en $x, y, z \in \mathbb{R}^2_2$, tomando además a en el interior del triángulo se visualiza (GM5) lo mejor posible. De hecho, la naturaleza de un espacio G-métrico es entender la geometría de tres puntos en lugar de dos puntos a través de perímetro de un triángulo.

2.1. Ejemplos y Propiedades

Ejemplo 2.2. *Sea X el conjunto de número reales. La función $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|, \text{ para todo } x, y, z \in X$$

es una G-métrica sobre X.

Ejemplo 2.3. *Sea X un conjunto no vacío. La función $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ definida como*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0 & si\ x = y = z \\ 1 & si\ x \neq y \quad y \quad y \neq z \quad y \quad z \neq x \\ \frac{1}{2} & \text{de otra manera} \end{cases}$$

es una G-métrica sobre X. Esta G-métrica se puede definir en cualquier conjunto no vacío.

El siguiente ejemplo es importante porque nos dice cómo construir una G-métrica a partir de una métrica dada.

Ejemplo 2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si las funciones $G_s, G_m : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ se definen como*
$G_s(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$,
$G_m(x, y, z) = \text{máx}\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$, *para todo $x, y, z \in X$.*
Entonces (X, G_s) y (X, G_m) son espacios G-métricos.

Definición 2.5. *Un espacio G-métrico (X, G) es simétrico si*

$$G(x, y, y) = G(x, x, y), \forall x, y \in X.$$

De otra manera, (X, G) es no simétrico.

Note que (X, G_s) y (X, G_m) son simétricos, esto se sigue directamente de la propiedad simétrica de la métrica d.

Hasta ahora sólo hemos visto ejemplos de espacios G-métricos simétricos. A continuación se presenta un ejemplo de un espacio G-métrico no simétrico, que además no surge a través de G_s o G_m [7, Ejemplo 1, pág. 3].

Ejemplo 2.6. *Si* $X = \{a, b\}$ *y se define*
$G(a, a, a) = G(b, b, b) = 0$
$G(a, a, b) = 1$, $G(a, b, b) = 2$
y se extiende G *a todos los elemntos de* $X \times X \times X$ *por la propiedad* $(GM4)$. *Entonces* (X, G) *es un espacio G-métrico no simétrico, ya que* $G(a, a, b) \neq G(a, b, b)$.

Proposición 2.7. *Sea* (X, G) *un espacio G-métrico, entonces para cualesquiera* $x, y, z, a \in X$ *las siguientes propiedades se cumplen:*

(1) si $G(x, y, z) = 0$, *entonces* $x = y = z$,

(2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$,

(3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$,

(4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$.

Demostración. Sean $x, y, z, a \in X$. (1) Suponga que $G(x, y, z) = 0$, $x \neq y$ y $z \neq y$. Entonces por $(GM2)$ y $(GM3)$, tenemos $0 < G(x, x, y) \leq 0$. Así, $x = y = z$.
(2) Si $a = y$ en $(GM5)$, entonces tenemos

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) + G(y, y, z).$$

Luego, intercambiando x y y, tenemos

$$G(y, x, z) \leq G(y, x, x) + G(x, x, z).$$

Usando $(GM4)$, obtenemos

$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z).$$

(3) Si $a = y$ y $z = x$ en $(GM5)$, tenemos

$$G(x, y, x) \leq G(x, y, y) + G(y, y, x).$$

Intercambiando x y y, obtenemos

$$G(y, x, y) \leq G(y, x, x) + G(x, x, y).$$

Usando $(GM4)$, obtenemos

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x).$$

(4) De $(GM5)$ y $(GM3)$, tenemos

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z).$$

Proposición 2.8. *Sea (X,G) un espacio G-métrico y $k>0$, entonces G_1 y G_2 son también G-métricas sobre X, donde, para todo $x,y,z\in X$,*

(1) $G_1(x,y,z)=\text{mín}\{k,G(x,y,z)\}$, *y*

(2) $G_2(x,y,z)=\frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)}$, *para todo $x,y,z\in X$.*

Demostración. (1) Sean $x,y,z,a\in X$.
(i) Como $k>0$, entonces

$$G_1(x,y,z)=\text{mín}\{k,G(x,y,z)\}=\text{mín}\{k,0\}=0$$

si $x=y=z$.
(ii) Si $x\neq y$, entonces $0<G(x,x,y)$. Además, como $k>0$, tenemos que

$$0<\text{mín}\{k,G(x,x,y)\}=G_1(x,x,y).$$

(iii) Si $z\neq y$, entonces $G(x,x,y)\leq G(x,y,z)$. Se sigue que

$$G_1(x,x,y)=\text{mín}\{k,G(x,x,y)\}\leq\text{mín}\{k,G(x,y,z)\}=G_1(x,y,z).$$

(iv) La propiedad $(GM4)$ se sigue directamente de la simetría en todas las variables de G.
(v) Dado que $G(x,y,z)\leq G(x,a,a)+G(a,y,z)$, tenemos que

$$\begin{aligned}G_1(x,y,z)&=\text{mín}\{k,G(x,y,z)\}\leq\text{mín}\{k,G(x,a,a)+G(a,y,z)\}\\&\leq\text{mín}\{k,G(x,a,a)\}+\text{mín}\{k,G(a,y,z)\}\\&=G_1(x,a,a)+G_1(a,y,z).\end{aligned}$$

Por lo tanto, G_1 satisface los 5 axiomas de G-métrica.
(2) Sean $x,y,z,a\in X$. (i) Como $k>0$, entonces

$$G_2(x,y,z)=\frac{G(x,y,z)}{k+G(x,y,z)}=\frac{0}{k}=0$$

si $x=y=z$.
(ii) Si $x\neq y$, entonces $0<G(x,x,y)$. Además, como $k>0$, tenemos que

$$0<\frac{G(x,x,y)}{k+G(x,x,y)}=G_2(x,x,y).$$

(iii) Si $z \neq y$, entonces $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$. Como $k > 0$, tenemos que

$$kG(x,x,y) \leq kG(x,y,z).$$

Luego, sumando en ambos lados de la desigualdad $G(x,y,z)G(x,x,y)$ y factorizando obtenemos

$$G(x,x,y)(k + G(x,y,z)) \leq G(x,y,z)(k + G(x,x,y)).$$

Así,

$$G_2(x,x,y) = \frac{G(x,x,y)}{k + G(x,x,y)} \leq \frac{G(x,y,z)}{k + G(x,y,z)} = G_2(x,y,z).$$

(iv) La propiedad $(GM4)$ se sigue directamente de la simetría en todas las variables de G.
(v) Con el fin de reducir notación, sean $a = G(x,y,z)$, $b = G(x,a,a)$ y $c = G(a,y,z)$. Dado que $a \leq b + c$ y $k > 0$, tenemos que

$$ak^2 \leq bk^2 + ck^2. \tag{2.1}$$

Sumando abk en ambos lado de (2.1) obtenemos

$$ak^2 + abk \leq bk^2 + ck^2 + abk. \tag{2.2}$$

Además,

$$ak < ak + ab + 2bk. \tag{2.3}$$

Multiplicando por c en ambos lados de (2.3) obtenemos

$$cak < cak + cab + c2bk. \tag{2.4}$$

Ahora, sumando (2.2) y (2.4) tenemos

$$ak^2 + abk + cak \leq bk^2 + ck^2 + abk + ack + abc + 2bck. \tag{2.5}$$

Sumando abc en ambos lados de 2.5 nos queda

$$abc + ak^2 + abk + cak \leq bk^2 + ck^2 + abk + ack + 2abc + 2bck.$$

Luego, factorizando obtenemos

$$c(ab + ak) + k(ak + ab) \leq a(2bc + bk + ck) + k(bk + ck + 2bc)$$

$$\Rightarrow (ab + ak)(c + k) \leq (bk + ck + 2bc)(a + k)$$
$$\Rightarrow a(b + k)(c + k) \leq (bk + ck + 2bc)(a + k).$$

Pero $(bk + ck + 2bc) = bk + ck + bc + bc = b(c + k) + c(b + k)$. Así

$$a(b + k)(c + k) \leq (b(c + k) + c(b + k))(a + k)$$
$$\Rightarrow a(b + k)(c + k) \leq (b(c + k) + c(b + k))(a + k)$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a + k} \leq \frac{b(c + k) + c(b + k)}{(b + k)(c + k)} = \frac{b}{b + k} + \frac{c}{c + k}.$$

Por lo tanto, (X, G_2) es un espacio G-métrico.

Proposición 2.9. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) (X, G) es simétrico.

(b) $G(x, y, y) \leq G(x, y, a)$, $\forall x, y, a \in X$.

(c) $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$, $\forall x, y, z, a, b \in X$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) De $(GM3)$ tenemos

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z), \forall x, y, z \in X \text{ con } y \neq z.$$

Como (X, G) es simétrico,

$$G(y, y, x) \leq G(x, y, z), \forall x, y, z \in X \text{ con } x \neq z.$$

Poniendo $z = a$, $G(y, y, x) \leq G(x, y, a), \forall x, y, a \in X$ con $x \neq a$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Si $a = x$ en (b) entonces (X, G) es simétrico.
(b) $\Rightarrow$ (c) De (2) de la Proposición 2.7,

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) + G(z, y, y).$$

De (b) tenemos,

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b) \forall x, y, z, a, b \in X.$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Si $a = x$ y $b = y$ en (c)

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, x) + G(z, y, y).$$

2.2. La topología G-métrica

Hemos visto que para cualquier conjunto no vacío X, podemos construir una G-métrica sobre X a partir de cualquier métrica sobre X (por G_s y G_m), la siguiente proposición nos dice que inversamente también es posible, es decir, se puede obtener una métrica sobre X a partir de una G-métrica dada.

Proposición 2.10. *Sea G una G-métrica sobre X. Entonces para todo $x, y \in X$, las funciones $d_s, d_m : X \times X \to R$ definidas por,*

(1) $d_s(x,y) = G(x,y,y) + G(y,x,x)$, *y*

(2) $d_m(x,y) = \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\}$

son métricas sobre X.

Demostración. Para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple lo siguiente.

$$\begin{aligned}
(1)\ d_s(x,y) &= G(x,y,y) + G(y,x,x) \geq 0, \\
d_s(x,y) &= 0 \Leftrightarrow G(x,y,y) + G(y,x,x) = 0 \\
&\Leftrightarrow G(x,y,y) = G(x,x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \\
d_s(x,y) &= G(x,y,y) + G(y,x,x) = G(y,y,x) + G(x,x,y) = d_s(y,x). \\
d_s(x,y) &= G(x,y,y) + G(y,x,x) \\
&\leq G(z,y,y) + G(x,z,z) + G(z,x,x) + G(y,z,z) \\
&= (G(z,x,x) + G(x,z,z)) + (G(z,y,y) + G(y,z,z)) \\
&= d_s(x,z) + d_s(z,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (X, d_s) es un espacio métrico.

$$\begin{aligned}
(2)\ d_m(x,y) &= \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} \geq 0, \\
d_m(x,y) &= 0 \Leftrightarrow \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} = 0 \\
&\Leftrightarrow G(x,y,y) = G(y,x,x) = 0 \Leftrightarrow x = y. \\
d_m(x,y) &= \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} = \max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\} = d_m(y,x). \\
d_m(x,y) &= \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} \\
&\leq \max\{G(x,z,z) + G(z,y,y), G(y,z,z) + G(z,x,x)\} \\
&\leq \max\{G(x,z,z) + G(z,x,x)\} + \max\{G(z,y,y), G(y,z,z)\} \\
&= d_s(x,z) + d_s(z,y).
\end{aligned}$$

Por lo anterior, (X, d_m) es un espacio métrico.

Definición 2.11. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces para $x_0 \in X$, $r > 0$, la G-bola con centro x_0 y radio r es*

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}.$$

Proposición 2.12. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces para cualesquiera $x_0 \in X$ y $r > 0$, tenemos*

(a) si $G(x_0, x, y) < r$ entonces $x, y \in B_G(x_0, r)$,

(b) si $y \in B_G(x_0, r)$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$.

Demostración. (a) De $(GM3)$ tenemos que $G(x_0, x, x) \leq G(x_0, x, y) < r$ con $x_0 \neq y$, esto implica que $x \in B_G(x_0, r)$. Similarmente, $G(x_0, y, y) \leq G(x_0, y, x) < r$ con $x_0 \neq x$, implica que $y \in B_G(x_0, r)$. Por lo tanto, si $G(x_0, x, y) < r$, entonces $x, y \in B_G(x_0, r)$.
(b) Sea $\delta = r - G(x_0, y, y)$. Luego, si $z \in B_G(y, \delta)$ entonces $G(y, z, z) < \delta = r - G(x_0, y, y)$, lo cual implica que $G(y, z, z) + G(x_0, y, y) < r$. Por $(GM5)$, tenemos que $G(x_0, z, z) < r$, esto es, $z \in B_G(x_0, r)$. Así, $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$.

Se sigue del inciso (b) de la Proposición 2.12 que la familia de G-bolas, $\mathfrak{B} = \{B_G(x, r) : x \in X, r > 0\}$ es la base de una topología $\tau(G)$ sobre X, la topología G-métrica.

Proposición 2.13. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces para todo $x_0 \in X$ y $r > 0$, tenemos*

(1) $B_G(x_0, \frac{r}{3}) \subseteq B_{d_s}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$.

(2) $B_G(x_0, \frac{r}{2}) \subseteq B_{d_m}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$.

Demostración. (1) Si $z \in B_G(x_0, \frac{r}{3})$ entonces $G(x_0, z, z) < \frac{r}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned} d_s(x_0, z) &= G(x_0, z, z) + G(z, x_0, x_0) \\ &\leq G(x_0, z, z) + 2G(x_0, z, z) \\ &= 3G(x_0, z, z) < (3)\frac{r}{3} = r. \end{aligned}$$

Así, $z \in B_{d_s}(x_0, r)$. Ahora, si $z \in B_{d_s}(x_0, r)$ entonces

$$\begin{aligned} d_s(x_0, z) &= G(x_0, z, z) + G(z, z, x_0) < r \\ &\Rightarrow G(x_0, z, z) < r. \end{aligned}$$

Así, $z \in B_G(x_0, r)$. Por lo tanto $B_G(x_0, \frac{r}{3}) \subseteq B_{d_s}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$.
(2) Si $z \in B_G(x_0, \frac{r}{2})$ entonces $G(x_0, z, z) < \frac{r}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} d_m(x_0, z) &= \text{máx}\{G(x_0, z, z), G(z, x_0, x_0)\} \\ &\leq \text{máx}\{G(x_0, z, z), 2G(x_0, z, z)\} \\ &= 2G(x_0, z, z) < (2)\frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Así, $z \in B_{d_m}(x_0, r)$. Ahora, si $z \in B_{d_m}(x_0, r)$ entonces

$$\begin{aligned} d_m(x_0, z) &= \text{máx}\{G(x_0, z, z), G(z, z, x_0)\} < r \\ &\Rightarrow G(x_0, z, z) < r. \end{aligned}$$

Así, $z \in B_G(x_0, r)$. Por lo tanto $B_G(x_0, \frac{r}{2}) \subseteq B_{d_m}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$.†

Note que si (X, G) es simétrico, entonces $B_{d_m}(x_0, r) = B_G(x_0, r)$.

En consecuencia, la topología G-métrica $\tau(G)$ coincide con la topología métrica derivada de d_s y d_m. Así, mientras isométricamente son distintos en general, todo espacio G-métrico es topologicamente equivalente a un espacio métrico. Esto nos permite transportar fácilmente muchos conceptos y resultados de los espacios métricos en el contexto de un espacio G-métrico.

2.3. Convergencia y Continuidad

Definición 2.14. *Sean (X, G) un espacio G-métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X. Decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es G-convergete a x si $\text{lím}_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $G(x, x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$. Llamamos a x el límite de la sucesión y escribimos $x_n \to x$ o $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$.*

Proposición 2.15. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces para una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ y un punto $x \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es G-convergente a* x.

(b) $d_s(x_n, x) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

(c) $d_m(x_n, x) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

(d) $G(x_n, x_n, x) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

(e) $G(x_n, x, x) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

(f) $G(x_m, x_n, x) \to 0$, *cuando* $m, n \to \infty$.

Demostración. La equivalencia de (1) y (2) se sigue de (1) de la Propisición 2.13. La equivalencia de (1) y (3) se sigue de (2) de la Propisición 2.13.
$(b) \Rightarrow (d)$ y $(b) \Rightarrow (e)$ Se sigue de,

$$d_s(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x),$$

ya que si $d_s(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$,

$$\Rightarrow G(x_n, x_n, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ y } G(x_n, x, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

$(d) \Rightarrow (e)$ se sigue de

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x),$$

porque si $G(x_n, x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty \Rightarrow G(x_n, x, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. $(e) \Rightarrow (f)$ De (2) de la Proposición 2.7, tenemos que

$$G(x_n, x_m, x) \leq G(x_n, x_n, x) + G(x_n, x_n, x_m).$$

Pero de $(GM5)$ tenemos

$$G(x_n, x_n, x_m) \leq G(x_n, x_n, x) + (x, x, x_m).$$

Entonces $G(x_n, x_m, x) \leq 2G(x_n, x_n, x) + (x, x, x_m)$. Así,

$$G(x_n, x_n, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ y } G(x_m, x, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\Rightarrow G(x_n, x_m, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

$(f) \Rightarrow (b)$ De la definición d_s tenemos

$$d_s(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x, x_n, x_n) \leq 3G(x_n, x, x).$$

Luego, por $(GM5)$

$$3G(x_n, x, x) \leq 3G(x_n, x, x_m) + 3G(x_m, x_m, x).$$

Por lo tanto, si

$$G(x_n, x, x_m) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ y } G(x_m, x_m, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\Rightarrow d_s(x_n, x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.\dagger$$

Definición 2.16. *Sean (X, G), (X', G') espacios G-métricos. Una función $f : X \to X'$ es G-continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{si } x, y \in X \textit{ y } G(x_0, x, y) < \delta \Rightarrow G'(f(x_0), f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Una función es G-continua en X si y sólo si es G-continua en todo punto $a \in X$.

Dado que las topologías G-métricas son topologías métricas, de manera similar que en espacios métricos, tenemos un criterio muy importante equivalente a la G-continuidad de una función en un punto, el criterio de G-secuencialmente continua.

Definición 2.17. *Sean (X, G), (X', G') espacios G-métricos y $x_0 \in X$. La función f es G-secuencialmente continua en el punto x_0 si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ G-convergente a x implica que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es G-convergente a $f(x)$*

Proposición 2.18. *Sean (X, G), (X', G') espacios G-métricos, entonces una función $f : X \to X'$ es G-continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si es G-secuencialmente continua en X.*

Proposición 2.19. *Sea (X, G) un espacio G-métrico, entonces la función $G(x, y, z)$ es conjuntamente continua en sus tres variables.*

Demostración. Sean $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{z=1}^{\infty}$ sucesiones G-convergentes a x, y y z, respectivamente. Entonces por $(GM5)$ tenemos,

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(y_m, x, z)$$
$$G(z, x, y_m) \leq G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z)$$
$$G(z, x_k, y_m) \leq G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k)$$

Así, sumando de estas tres condiciones, obtenemos

$$G(x,y,z) - G(z_n,y_m,x_k) \leq G(y,y_m,y_m) + G(x,x_k,x_k) + G(z,z_n,z_n) \quad (2.6)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} G(x_k,y_m,z_n) &\leq G(x_k,x,x) + G(x,y_m,z_n) \\ G(z,y_m,x) &\leq G(y_m,y,y) + G(y,x,z) \\ G(x,z_n,y_m) &\leq G(z,z_n,z_n) + G(z,y_m,x) \end{aligned}$$

Sunmando las anteriores desigualdades, obtenemos

$$G(x_k,y_m,z_n) - G(x,y,z) \leq G(y,y,y_m) + G(x,x,x_k) + G(z,z,z_n) \quad (2.7)$$

Combinando (2.6) y (2.7), y usando (3) de la Proposición 2.7

$$|G(x_k,y_m,z_n) - G(x,y,z)| \leq 2(G(x,x_k,x_k) + G(y,y_m,y_m) + G(z,z_n,z_n)).$$

Por lo tanto, $G(x_k,y_m,z_n) \to G(x,y,z)$ cuando $k,m,n \to \infty$.

2.4. Completitud

Definición 2.20. *Sea (X,G) un espacio G-métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$ es G-Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $G(x_n,x_m,x_l) < \epsilon$ para todo $n,m,l \geq N$.*

La siguiente proposición se sigue directamente de las definiciones y de la Proposición 2.15.

Proposición 2.21. *En un espacio G-métrico (X,G) las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es G-Cauchy.*

(b) $G(x_n,x_m,x_m) \to \infty$ *cuando* $m,n \to \infty$.

(c) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en el espacio métrico* (X,d_s).

(d) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en el espacio métrico* (X,d_m).

El siguiente corolario se sigue directamente de las proposiciones 1.22 y 2.21.

Corolario 2.22. *Toda sucesión G-convergente en un espacio G-métrico es G-Cauchy.*

Corolario 2.23. *Si* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión G-Cauchy en un espacio G-métrico* (X, G) *y contiene una subsucesión G-convergente, entonces* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es G-convergente.*

Definición 2.24. *Un espacio G-métrico* (X, G) *es G-completo si toda sucesión G-Cauchy en* (X, G) *es G-convergente en* (X, G).

Proposición 2.25. *Sea* (X, G) *un espacio G-métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) (X, G) *es G-completo.*

(2) El espacio métrico (X, d_s) *es completo.*

(3) El espacio métrico (X, d_m) *es completo.*

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Sea (X, G) G-completo. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X, d_s) si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es G-Cauchy en (X, G). Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es G-convergente en (X, G), lo cual es equivalente a que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en (X, d_s). Por lo tanto (X, d_s) es completo. De manera similar se tiene la equivalencia de (1) y (3).

Si un espacio G-métrico (X, G) es G-completo, lo llamaremos espacio G-métrico completo.

La propiedad de completez (o G-completez) de un espacio G-métrico es importante para la teoría G-métrica de punto fijo, sin embargo, no todo espacio G-métrico es completo (o G-completo). La pregunta es ¿Se puede completar un espacio G-métrico no completo? Para contestar esta pregunta, primero hay que definir lo que entendemos por G-completación de un espacio G-métrico. Antes de continuar veamos el siguiente resultado.

Corolario 2.26. *Para toda métrica* d *sobre* X *existe una G-métrica* G *tal que* $d = d_m$.

Demostración. Sea $G(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$. Ahora, tenemos

$$d_m(x, y) = \max\{G(x, y, y), G(y, x, x)\}.$$

Como (X, G) es simétrico,

$$d_m(x, y) = G(x, y, y) = \max\{d(x, y), 0, d(y, x)\} = d(x, y).\dagger$$

Note que si (X, G) es un espacio G-métrico simétrico, entonces $d(x, y) = G(x, x, y)$ define una métrica sobre X. Si (X, G) no es simétrico, entonces $\rho_1(x, y) = G(x, x, y)$ y $\rho_2(x, y) = G(x, y, y)$ son cuasi-métricas sobre X.

Ahora, tenemos que (X, G) un espacio G-métrico no completo si y sólo si (X, d_m) (o (X, d_s)) es un espacio métrico no completo. Sea (Y, d_Y) la completación de (X, d_m). Entonces, por el Corolario 2.28, existe una G-métrica $G(d_Y)$ sobre Y tal que $(Y, G(d_Y))$ es un espacio G-métrico completo.

Capítulo 3

Teoremas de Punto Fijo en Espacios G-métricos

Además de introducir una nueva estructura de espacios métricos generalizados, Mustafa y Sims introdujeron y desarrollaron una teoría de punto fijo para varias funciones en esta nueva estructura.

3.1. Puntos fijos de funciones tipo contractivas

Definición 3.1. *Sea (X, G) un espacio G-métrico. Una función $T : X \to X$ es una G-contracción si existe una constante α, con $0 \leq \alpha < 1$, tal que*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha G(x, y, z) \text{ para todo } x, y, z \in X. \tag{3.1}$$

Mustafa extendió el bien conocido Teorema de Punto Fijo de Banach (Teorema 1.33) en el contexto de los espacios G-métricos de la siguiente manera.

Teorema 3.2. *Sean (X, G) un espacio G-métrico completo y $T : X \to X$ una G-contracción. Entonces T tiene un único punto fijo $x_0 \in X$.*

Demostración. De (3.1), tenemos

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq \alpha G(x, y, y) \text{ y } G(Ty, Tx, Tx) \leq \alpha G(y, x, x).$$

Así, para todo $x, y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} d_s(Tx, Ty) &= G(Tx, Ty, Ty) + G(Ty, Tx, Tx) \\ &\leq \alpha(G(x, y, y) + G(y, x, x)) \\ &= \alpha d_s(x, y). \end{aligned}$$

Esto es, T es una contracción en el espacio métrico completo (X, d_s). Por lo tanto, la existencia y unicidad del punto fijo está garantizada por el Teorema 1.33. †

Note que, por la Proposición 2.21, la iteración de Picard en G-convergente al punto fijo de T. Obviamente, las estimaciones de error (1.5) y (1.6) se cumplen para T, con respecto a la métrica d_s. Ahora, calcularemos éstas estimaciones en el contexto de la G-métrica G.

Por (3.1), tenemos que

$$G(x_3, x_2, x_1) = G(Tx_2, Tx_1, Tx_0) \leq \alpha G(x_2, x_1, x_0),$$

y por inducción

$$G(Tx_{n+2}, Tx_{n+1}, Tx_n) \leq \alpha^n G(x_2, x_1, x_0) \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}. \tag{3.2}$$

Así, para cualesquiera números $n, p, q \in \mathbb{N}$, $p > 0, q > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+p}, x_{n+q}) &\leq G(x_n, x_n, x_{n+p}) + G(x_n, x_n, x_{n+q}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} G(x_k, x_k, x_{k+1}) + \sum_{k=n}^{n+q-1} G(x_k, x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k G(x_2, x_1, x_0) + \sum_{k=n}^{n+q-1} \alpha^k G(x_2, x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} G(x_2, x_1, x_0) + \frac{\alpha^n}{1-\alpha} G(x_2, x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} 2G(x_2, x_1, x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como

$$G(x_n, x_{n+p}, x_{n+q}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} 2G(x_2, x_1, x_0) \text{ para todo } p, q \in \mathbb{N}^*,$$

y por la continuidad de la G-métrica, y tomando el límite cuando $p \to \infty$ y $q \to \infty$, encontramos que

$$G(x_n, x^*, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} 2G(x_2, x_1, x_0), \quad n \geq 0. \tag{3.3}$$

La estimación a priori (3.3) de la iteración de Picard de una función que satisface el Teorema (3.2) muestra que, para cualquier valor inicial $x_0 \in X$, el error aproximado de la n-ésima iterada está completamente determinado por el coeficiente de G-contracción α y el desplazamiento inicial $G(x_2, x_1, x_0)$. Para obtener la estimación a posteriori de la iteración de Picard, observamos que por (3.1) tenemos

$$G(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) \leq \alpha G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}),$$

y, por inducción,

$$G(x_{n+k}, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) \leq \alpha^k G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \quad k \in \mathbb{N}^*, \tag{3.4}$$

así,

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_{n+p}, x_{n+q}) &\leq G(x_n, x_n, x_{n+p}) + G(x_n, x_n, x_{n+q}) \\
&\leq (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^p) G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\
&\quad\; (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^q) G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{\alpha}{1-\alpha} G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha} 2G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Ahora, por la continuidad de la G-métrica, y tomando el límite cuando $p \to \infty$ y $q \to \infty$, entonces tenemos

$$G(x_n, x^*, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} 2G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \geq 0. \tag{3.5}$$

En la demostración del Teorema 3.2, mostramos que si T es una G-contracción en (X, G), entonces T es una contacción en (X, d_s). Inversamente también se cumple, es decir, si T es una contracción en (X, d), entonces T es una G-contracción en (X, G_s).

Ejemplo 3.3. *Sea $T_2(x)$ del Ejemplo 1.35. Entonces el número máximo de iteraciones para alcanzar un nivel de precisión $\epsilon = 0.001$, tomando $x_0 = 1$, es $n = 3$. Mientras que, si consideramos las G-métrica G_s, tenemos que el número máximo de iteraciones es $n = 5$. Ahora, la estimación a posteriori, para $n = 3$, con respecto a la métrica euclideana es 0.0005, mientras que para lá G-métrica G_s es de 0.018 (aproximadamente).*

Por argumentos similares a los de la prueba del Teorema 3.2 se puede demostrar que muchas condiciones tipo contractivas sobre espacios G-métricos se reducen a condiciones contractivas ya conocidas sobre espacios métricos (ver [13]). Recientemente, Erdal Karapinar, M. Asadi y P. Salimi obtuvieron condiciones tipo contractivas en espacios G-métricos que no pueden ser expresadas en dos variables. A continuación presentamos algunos de éstos resultados.

Teorema 3.4. *Sean (X, G) un espacio G-métrico completo y $T : X \to X$ una función tal que*

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(x, Tx, y) \tag{3.6}$$

para todo $x, y \in X$, donde $k \in [0, 1)$. Entonces

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T G-converge a x^*, para cualquier valor $x_0 \in X$;

(3) las siguientes estimaciones de error a priori y a posteriori se cumplen;

$$G(x_n, x^*, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1) \quad n \in \{0, 1, 2, ...\} \tag{3.7}$$

$$G(x_n, x^*, x^*) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \quad n \in \{0, 1, 2, ...\} \tag{3.8}$$

(4) La velocidad de convergencia esta dada por

$$G(x_n, x^*, x^*) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x^*) \leq k^n G(x_0, x_1, x^*) \quad n \in \{1, 2, ...\} \tag{3.9}$$

Demostración. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario, y definimos la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ por $x_n = T^n(x_0)$. Por (3.6), tenemos

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n).$$

Continuando con el mismo argumento, obtenemos

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_0, x_1, x_1).$$

Por otra parte, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos por la desigualdad rectangular que

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1), \end{aligned}$$

y así, $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$, cuando $n, m \to \infty$. Así, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es G-Cauchy. Debido a la completez de (X, G), existe $u \in X$ tal que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es G-convergente a u.
Suponga que $Tu \neq u$, entonces

$$G(x_n, Tu, Tu) \leq kG(x_{n-1}, x_n, u)$$

tomando cuando el límite cuando $n \to \infty$, y usando el hecho de que la función G es continua, entonces

$$G(u, Tu, Tu) \leq kG(u, u, u) = 0.$$

Esta contradicción implica que $Tu = u$.
Para probar la unicidad, suponga que existe $v \neq u$ tal que $Tv = v$, entonces

$$G(u, u, v) = G(Tu, Tu, Tv) \leq kG(u, Tu, v) = k(u, u, v),$$

lo cual implica que $u = v$.
Para probar (3.7) usamos,

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1)$$

y la continuidad de la G-métrica y así, haciendo que $p \to \infty$, encontramos

$$G(x_n, x^*, x^*) = \lim_{m\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1), \quad n \geq 0$$

así (3.7) se prueba.
Para obtener la estimación a posteriori (3.8) usamos,

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n),$$

y, por inducción

$$G(x_{n+r-1}, x_{n+r}, x_{n+r}) \leq k^r G(x_{n-1}, x_n, x_n), \quad r \in \mathbb{N}^*,$$

así, si $p \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$\begin{aligned} G(x^*, x_n, x_n) = \lim_{p\to\infty} G(x_{n+p}, x_n, x_n) &\leq (k + k^2 + \cdots + k^p) G(x_{n-1}, x_n, x_n) \\ &\leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora, para obtener (3.9), note que

$$\begin{aligned} G(x_n, x^*, x^*) &\leq kG(x_{n-1}, x_n, x^*) \\ &\leq k(kG(x_{n-2}, x_{n-1}, x^*)) \leq \cdots \leq k^n G(x_0, x_1, x^*), \quad n > 0.\dagger \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. *Sean* $X = [0, \infty)$ *y*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0, & si\ x = y = z, \\ \text{máx}\{x, y, z\}, & c.\ o.\ c. \end{cases}$$

una G-métrica sobre X*. Definimos* $T : X \to X$ *por* $T(x) = \frac{1}{5}x$*. Note que* (X, G) *es G-completo ya que* (X, d_m) *es completo, donde* $d_m(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$*. Luego*

$$G(Tx, Ty, Ty) = \frac{1}{5} \text{máx}\{x, y\}$$

y

$$G(x, Tx, y) = \text{máx}\{x, y\}.$$

Así, $G(Tx, Ty, Ty) \leq \frac{1}{4} G(x, Tx, y)$*. Por lo tanto, las condiciones del Teorema 3.4 se cumplen para este ejemplo.*

Corolario 3.6. *Sea (X, G) un espacio G-métrico completo y $T : X \to X$ una función tal que satisface la siguiente condición, para cualesquiera $x, y, z \in X$*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq aG(x, Tx, z) + bG(x, Tx, y),$$

donde $0 \leq a + b < 1$. Entonces T tiene un único punto fijo.

La prueba del Corolario 3.6 se sigue inmediatamente del Teorema 3.4 tomando $y = z$, además las estimaciones (3.7), (3.8) y (3.9) se cumplen tomando $k = a + b$.

Teorema 3.7. *Sean (X, G) un espacio G-métrico completo y $T : X \to X$ una función tal que satisface la siguiente condición, para todo $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} G(Tx, Ty, T^2y) \leq & aG(x, Tx, T^2x) + bG(y, Ty, T^2y) + \\ & cG(x, Tx, Ty) + dG(y, Ty, T^3x), \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $a + b + c + d < 1$. Entonces

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T G-converge a x^*, para cualquier valor $x_0 \in X$.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Se construye la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de puntos en X de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = Tx_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Note que si $x_{n'} = x_{n'+1}$ para algún $n' \in \mathbb{N}$, entonces es evidente que T tiene un punto fijo. Así, suponemos que $x_n \neq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, tenemos $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) > 0$.

De (3.17) con $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$, obtenemos

$$\begin{aligned} G(Tx_{n-1}, Tx_n, T^2x_n) \leq & aG(x_{n-1}, Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}) + bG(x_n, Tx_n, T^2x_n) \\ & + cG(x_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_n) + dG(x_n, Tx_n, T^3x_{n-1}) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq & aG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + b(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \\ & + cG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \end{aligned}$$

y así,

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),$$

donde $k = \frac{a+c}{1-b-d} < 1$. Entonces

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_2), \tag{3.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que de $(GM3)$, sabemos que

$$G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

con $x_n \neq x_{n+1}$ y se sabe que

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2G(x_n, x_n, x_{n+1}).$$

Entonces por (3.11), obtenemos

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2k^n G(x_0, x_1, x_2).$$

Además, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, tenemos por la desigualdad rectangular que

$$\begin{aligned} G(x_m, x_n, x_n) &= G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &= 2(k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + +k^{m-1})G(x_0, x_1, x_2) \\ &\leq \frac{2k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_2), \end{aligned}$$

y así, $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$, cuando $n, m \to \infty$. Así, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, debido a que (X, G) es G-completo, existe un $z \in X$ tal que x_n es G-convergente a z. De (3,17), con $x = x_n$ y $y = z$, se sigue que

$$\begin{aligned} G(Tx_n, Tz, T^2z) \leq& aG(x_n, Tx_n, T^2x_n) + bG(z, Tz, T^2z) \\ &+ cG(x_n, Tx_n, Tz) + dG(z, Tz, T^3x_n). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \leq& aG(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) + bG(z, Tz, T^2z) \\ &+ cG(x_n, x_{n+1}, Tz) + dG(z, Tz, x_{n+3}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Luego, tomando límites cuando $n \to \infty$ en la desigualdad (3.12), obtenemos

$$G(z, Tz, T^2z) \leq \frac{(c+d)}{1-b} G(z, z, Tz)$$

lo cual implica que $G(z, Tz, T^2z) = 0$, es decir, $z = Tz = T^2z$.

Antes de presentar el siguiente resultado, recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es abierto. Consideremos los siguientes conjuntos.

$$\Psi = \{\psi : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ tal que } \psi \text{ es no decreciente y continua}\}$$

y

$$\Phi = \{\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \text{ tal que } \phi \text{ es semicontinua inferiormente}\},$$

donde $\psi(t) = \phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.

Teorema 3.8. *Sean (X, G) un espacio G-métrico completo y $T : X \to X$ una función tal que para todo $x, y \in X$, cumplen que*

$$\psi(G(Tx, T^2x, Ty)) \leq \psi(G(x, Tx, y)) - \phi(G(x, Tx, y)), \tag{3.13}$$

donde $\psi \in \Psi$ y $\phi \in \Phi$. Entonces

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T G-converge a x^*, para cualquier valor $x_0 \in X$.

Demostración. Tómese $x_0 \in X$. Construimos la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de puntos en X de la siguiente manera

$$x_{n+1} = Tx_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Note que si $x_{n'} = x_{n'+1}$ para algún $n' \in \mathbb{N}$, entonces es evidente que T tiene un punto fijo. Por esta razón, suponemos que $x_{n'} \neq x_{n'+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por $(GM2)$, obtenemos que:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) > 0.$$

De (3.30), con $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$, obtenemos

$$\psi(G(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}, Tx_n)) \leq \psi(G(x_{n-1}, Tx_{n-1}, x_n)) - \phi(G(x_{n-1}, Tx_{n-1}, x_n))$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\psi(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) &\leq \psi(G(x_{n-1}, x_n, x_n)) - \phi(G(x_{n-1}, x_n, x_n)) \\ &\leq \psi(G(x_{n-1}, x_n, x_n)),\end{aligned} \tag{3.14}$$

entonces, como ψ es no decreciente, $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n)$. Así la sucesión $\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}^+$, y por lo tanto, es convergente, llamemos $t \in \mathbb{R}^+$ a su límite. Veamos que $t = 0$. Para esto supongamos, que $t > 0$. Tomando límites cuando $n \to \infty$ en (3.14), obtenemos que

$$\psi(t) \leq \psi(t) - \phi(t),$$

lo cual implica que $\phi(t) = 0$. Es decir, $t = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $t = 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0. \tag{3.15}$$

Ahora probaremos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión G-Cauchy. Suponga que existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \tag{3.16}$$

con $n(k) \geq m(k) > k$. Además, correspondiente a $m(k)$, podemos elegir $n(k)$ de tal forma que este sea el entero más pequeño con $n(k) > m(k)$ que satisface (3.16). Por lo tanto

$$G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon \tag{3.17}$$

Por $(GM5)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) = G(x_{n(k)}, x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) \\ &\leq G(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}) + G(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)}, x_{m(k)}) \\ &\leq G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + 2s_{n(k)-1} \\ &\leq \varepsilon + 2s_{n(k)-1},\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $s_{n(k)-1} = G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)})$. Dejando que $k \to \infty$ en (3.18), deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon. \tag{3.19}$$

Otra vez, por $(GM5)$, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) \\
&= G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) \\
&\leq G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\
&\quad + G(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) \\
&\leq 2s_{m(k)-1} + 2s_{n(k)-1} + G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

y

$$\begin{aligned}
G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) &\leq G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)}) + G(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) \\
&= G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)}) + G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) \\
&\leq G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)}) + G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) \\
&\quad + G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) \\
&= s_{n(k)-1} + 2s_{m(k)-1} + G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dejando que $k \to \infty$ en (3.21) y aplicando (3.19), encontramos que

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) = \varepsilon. \tag{3.22}$$

Una vez más, por (GM5), tenemos

$$\begin{aligned}
G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) &= G(Tx_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\
&= G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) + G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\
&= G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) + G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq 2s_{m(k)} + G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

y

$$\begin{aligned}
G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)+1}, x_{m(k)+1}) + G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) + G(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}, x_{m(k)+1}) \\
&\quad + G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&= s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&= s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&< s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$ en (3.23) y (3.24) y aplicando (3.22), obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \varepsilon. \tag{3.25}$$

Por (3.30), con $x = x_{m(k)-1}$ y $y = x_{n(k)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)})) &= \psi(G(Tx_{m(k)-1}, T^2x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1})) \\ &\leq \psi(G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \\ &\quad - \phi(G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ en las desigualdades (3.24) y (3.26), y aplicando (3,25), obtenemos

$$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon),$$

Lo que implica que $\varepsilon = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces:

$$\lim_{m,\to\infty} G(x_m, Tx_m, x_n) = \lim_{m,\to\infty} G(x_m, x_{m+1}, x_n) = 0$$

Es decir, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión G-Cauchy. Como (X, G) es G-completo, entonces existe $z \in X$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$. De (3.30), con $x = x_n$ y $y = z$, obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(G(x_{n+1}, x_{n+2}, Tz)) &= \psi(G(Tx_n, T^2x_n, Tz)) \\ &\leq \psi(G(x_n, Tx_n, z)) - \phi(G(x_n, Tx_n, z)) \\ &= \psi(G(x_n, x_{n+1}, z)) - \phi(G(x_n, x_{n+1}, z)). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos

$$\psi(G(z, z, Tz)) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0.$$

Entonces $G(z, z, Tz) = 0$, es decir $z = Tz$. Para probar la unicidad, suponga que $z \neq u$, es tal que $Tu = u$. Ahora, por (3.30), obtenemos

$$\psi(G(Tz, T^2z, Tu)) \leq \psi(z, Tz, u)) - \phi(G(z, Tz, u)), \tag{3.27}$$

lo cual implica que $\phi(G(z, Tz, u)) = 0$, es decir, $z = u$.†
Si tomamos $\psi(t) = t$ y $\phi(t) = (1 - r)t$ en el Teorema 3.8, donde $0 \leq r < 1$, entonces deducimos el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Sea (X, G) un espacio G-métrico completo. Si $T : X \to X$ una función tal que para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$G(Tx, T^2x, Ty) \leq rG(x, Tx, y),$$

donde $0 \leq r < 1$, entonces T tiene un único punto fijo.

Ejemplo 3.10. *Sean $X = [0, \infty)$ y*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0, & si\ x = y = z, \\ \max\{x, y\} + \max\{z, y\} + \max\{x, z\}, & c.\ o.\ f. \end{cases}$$

una G-métrica sobre X. Definimos $T : X \to X$ por $T(x) = \frac{1}{4}x$. Entonces (X, G) es G-completo. Luego

$$G(Tx, T^2x, Ty) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\max\{\frac{1}{4}x, y\} + \frac{1}{4}\max\{x, y\}$$

y

$$G(x, Tx, y) = x + \max\{\frac{1}{4}x, y\} + \max\{x, y\}.$$

Así, $G(Tx, T^2x, Ty) \leq \frac{1}{2}G(x, Tx, y)$. Por lo tanto, las condiciones del Corolario 3.9 se cumplen para este ejemplo.

Corolario 3.11. *Sea (X, G) un espacio G-métrico completo. Si $T : X \to X$ es una función tal que para todo $x, y, z \in X$, donde $0 \leq a + b < 2$, cumple que*

$$G(Tx, T^2x, Ty) + G(Tx, T^2x, Tz) \leq aG(x, Tx, y) + bG(x, Tx, z),$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración. Tomando $y = z$, obtenemos que

$$G(Tx, T^2x, Ty) \leq \frac{a+b}{2}G(x, Tx, y),$$

donde $0 \leq \frac{a+b}{2} \leq 1$. Es decir, se cumplen las condiciones del Teorema 3.17 y así, T tiene un único punto fijo.

Los siguientes teoremas no requiere la condición de G-completez para garantizar la existencia de un punto fijo.

Teorema 3.12. *Sea (X, G) un espacio G-métrico. Sea $T : X \to X$ una función tal que para todo $x, y, z \in X$, cumplen que*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq kM(x, y, z), \tag{3.28}$$

donde $k \in [0, \frac{1}{2})$ y

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \leq \text{máx}\{&G(x, y, z), G(y, T^2x, Ty), G(x, T^2x, Ty), G(y, Ty, Ty), \\ &G(z, T^2x, Tz), G(Tx, T^2x, Tz), G(z, Tx, Ty), \\ &G(y, Tx, Ty), G(x, Tx, z), G(x, Tx, y), G(x, Tx, Tx), \\ &G(z, Tz, Tz), G(z, Tx, Tx), G(x, Ty, Ty), G(y, Tz, Tz)\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Entonces

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T G-converge a x^*, para cualquier valor $x_0 \in X$.

Una prueba del Teorema 3.12 se encuentra en [12, Teorema 3.1, pág. 5].

En el Teorema 3.12, el intervalo de la constante de contracción se puede extender al intervalo $[0, 1)$ eliminando algunos términos de 3.29.

Teorema 3.13. *Sea (X, G) un espacio G-métrico. Sea $T : X \to X$ una función tal que para todo $x, y, z \in X$, cumplen que*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq kM(x, y, z), \tag{3.30}$$

donde $k \in [0, 1)$ y

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \leq \text{máx}\{&G(x, y, z), G(y, T^2x, Ty), G(x, T^2x, Ty), G(y, Ty, Ty), \\ &G(z, T^2x, Tz), G(Tx, T^2x, Tz), G(x, Tx, z), G(x, Tx, y), \\ &G(z, Tz, Tz), G(z, Tx, Tx), G(x, Tx, Tx), G(y, Tz, Tz)\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Entonces

(1) existe $x^* \in X$ tal que $F_T = \{x^*\}$;

(2) la iteración de Picard asociada a T G-converge a x^*, para cualquier valor $x_0 \in X$.

Una prueba del Teorema 3.13 se encuentra en [12, Teorema 3.2, pág. 9].

Conclusión

Un espacio G-métrico es una generalización de un espacio métrico, en el sentido de que ahora se considera la distancia entre tres puntos de un conjunto. La noción de espacio G-métrico es abstraer las propiedaes geométricas de tres puntos en lugar de dos puntos a través del perímetro de un triángulo. Una G-métrica G sobre un conjunto no vacío X, induce dos métricas sobre X, $d_s(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x)$ y $d_m(x, y) = \max\{G(x, y, y), G(y, x, x)\}$. A través de la métrica d_m se demuestra que varias condiciones tipo contractivas para funciones sobre el espacio G-métrico (X, G) se reducen a condiciones contractivas sobre el espacio métrico (X, d_m). Existen condiciones tipo contractivas en espacios G-métricos que garantizan que la iteración de Picard de una función $T : X \to X$ converge a un único punto fijo de T. En algunos de estos resultados es posible calcular estimaciones de error a priori y a posteori, pero en otros, la complejidad de las condiciones contractivas no permite aproximar con claridad estas estimaciones.

Bibliografía

[1] S. Gahler, *2-metriche raume und ihre topologische strukture*, Math. Nachr, **26** (1963), 115-148.

[2] S. Gahler, *Zur geometric 2-metriche raume*, Reevue Roumaine de Math.Pures et Appl., **XI** (1966), 664-669.

[3] B. C. Dhage, *Generalized metric spaces and mappings with fixed point*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol.84, no. 4, pp. 329-336, 1992.

[4] B. C. Dhage, *Generalized metric spaces and topological structure- I*, Analele Stiintifice ale Universit¡atii Al.I.Cuza din Iasi. Serie Nouă. Matematic¡a, vol.46 (2000), pp. 3-24.

[5] K. S. Ha, Y. J. Cho, y A. White, *Strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces*, Mathematica Japonica, vol.33, (1988) pp. 375-384.

[6] Z. Mustafa, B. Sims, *Some Remarks Concerninig D-Metric Spaces*, Proceedings of the Internatinal Conferences on Fixed Point Theorey and Applications, Valencia (Spain), July (2003). 189-198.

[7] Z. Mustafa, B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **7**(2) (2006), 289-297.

[8] Z. Mustafa and B. Sims, *Fixed point theorems for contractive mappings in complete G-metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, Article ID 917175 (2009), 10 pages.

[9] Z. Mustafa, H. Obiedat, and F. Awawdeh, *Some fixed point theorem for mapping on complete G-metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, Article ID 189870 (2008) 12 pages.

[10] Z. Mustafa, W. Shatanawi, and M. Bataineh, *Existence of fixed point results in G-metric spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 283028 (2009), 10 pages.

[11] Z. Mustafa and H. Obiedat. *A fixed points theorem of Reich in G-metric spaces.* Cubo A Mathematics Journal, vol. 12 (2010), pp. 83-93.

[12] R. Agarwal, R. Karapynar. *Further fixed point results on G-metric spaces.* Fixed Point Theory Appl. **154** (2013).

[13] B. Samet, C. Vetro, F. Vetro, *Remarks on G-metric spaces.* Int. J. Anal. (2013).

[14] M. J. M. Díaz, (1998). *Introducción a la topología de los espacios métricos*, Cádiz: Universidad de Cádiz.

[15] M. A. Khamsi y W. A. Kirk, (2001). *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, New York: John Wiley.

[16] T. M. Apostol, *Análisis matemático.* Barcelona: Reverté, (1976).

[17] V. Berinde, *Iterative Aproximation of Fixed Points*, Romania: Springer, (2007).

[18] J. Delgado, A. Wawrzynczyk, *Introducción al Análisis*, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA UNIDAD IZTAPALAPA, (1993).

[19] S. Kumaresan, *Topology of Metric Spaces*, Alpha Science, (2005).