Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Transformaciones entre soluciones completas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

Tesis presentada como requisito para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

por

Ruth Corona Moreno

Director de tesis

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.

(Octubre 2015)

A quienes a pesar de la distancia
y el tiempo, siempre están presentes:
mis papás, mi hermana y mis abuelitos.

Agradecimientos

Agradezco de todo corazón a mis papás Alejandro y Elena por todo su apoyo en esta etapa de mi vida y por ser un modelo a seguir en muchos aspectos. También a mi hermana Judith por todos los consejos, por el tiempo que pasó a mi lado a pesar de nuestras ocupaciones y por incluirme en sus actividades de ocio, que también formaron parte importante de mi vida.

A mis abuelitos Alejandro, Gloria y Martina por el amor y enseñanzas que me brindaron en vida y por alentarme siempre a ser una mejor persona. A mi abuelito Joaquín por ser la persona que es y por ello, ser un modelo a seguir para mí.

A Joshua por su apoyo incondicional que me ha brindado para alcanzar esta meta y sobre todo por su comprensión y amor, que ha sido indispensable en todo momento.

A mis amigos dentro y fuera de la universidad, porque siempre me apoyaron tanto en situaciones personales como escolares y porque gracias a ellos, esta etapa queda marcada con momentos inolvidables que me han ayudado, creo yo, a ser una mejor persona. En especial agradezco a Ángel, Arturo, Ciria, Gonzalo, Iván, Jessica, Jorge, Jerónimo, Laura, Lucía, Mónica, Rosa Ibeth, Socorro, Tishbe y Ulises, por estar presentes cuando más lo necesité y por dejarme ser parte de su vida

A mi asesor de tesis, el Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo, por aceptarme como su tesista, por su paciencia y sobre todo por el tiempo dedicado a resolver cada duda y a la revisión de este trabajo.

A mis sinodales el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, el Dr. Jacobo Oliveros Oliveros y el Dr. Jorge Velázquez Castro por su tiempo dedicado a la revisión de mi tesis y sobre todo por sus críticas y correcciones que permitieron su conclusión.

Finalmente agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por el apoyo económico otorgado para la realización e impresión de este trabajo.

¡Muchas gracias a todos!

Introducción

En el estudio y uso de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden existe un concepto llamado *solución completa*, que por sí sólo tiene interpretaciones importantes en ramas de la física como la óptica y la mecánica, aunque también este tipo de solución es usado para hallar la solución general o singular de la ecuación diferencial parcial en cuestión, que en ciertas aplicaciones no es tan importante como lo es una solución completa. Sin embargo para cada ecuación diferencial parcial existe una infinidad de soluciones de este tipo que pueden representar diferentes familias de superficies o hipersuperficies, dependiendo de la dimensión en la que se trabaje; y el hallarlas de forma explícita y no mediante aproximaciones numéricas, suele ser complicado usando los métodos conocidos .

En esta tesis se tratarán únicamente las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y se estudiarán los métodos para obtener de forma explícita sus soluciones, haciendo a un lado los métodos numéricos que las pueden aproximar. Se comenzará con una breve recapitulación del surgimiento de las ecuaciones diferenciales parciales a través de la historia y la importancia que representó su desarrollo e interpretación geométrica de las soluciones. Enseguida, en el Capítulo 1, se mencionarán los métodos desarrollados por Cauchy, Charpit y Jacobi que permiten hallar soluciones completas de las ecuaciones y, por lo tanto, también su solución general. Además en el desarrollo del método de Jacobi se mencionará una dificultad, poco detallada en las referencias bibliográficas, que puede presentarse al momento de hallar una solución completa por este método.

A pesar de que los métodos del Capítulo 1 son muy conocidos y útiles, pueden resultar ser complicados al hallar más de una solución completa, por lo que podría llegar a pensarse que las familias de superficies o hipersuperficies ya encontradas son las únicas soluciones de la ecuación, lo cual es completamente erróneo; por lo que surge el interés de encontrar métodos que faciliten el hallazgo de otras soluciones completas. Además este resultado trae beneficios en el estudio de algunos fenómenos físicos, en especial en ótica geométrica donde frecuentemente es importante conocer dos soluciones completas diferentes.[10]

Uno de los métodos comúnmente usados para hallar otra solución completa a partir de una conocida será expuesto al inicio del Capítulo 2, mismo que llevará al planteamiento y desarrollo del tema de tesis que retomará el método de Jacobi, que a pesar de ser poco mencionado en libros referentes al tema, facilitará el manejo de las ecuaciones diferenciales parciales permitiendo observar la existencia de funciones que relacionan diferentes soluciones completas de la misma ecuación; lo cual dará pauta para establecer una forma alternativa de hallar nuevas soluciones completas a partir de una conocida, sin necesidad de retomar los métodos usuales para hallarlas.

Aunque los métodos desarrollados en la tesis facilitan los procesos de hallar la relación entre soluciones completas y de hallar nuevas soluciones a partir de una, cabe recalcar que en el Capítulo 2 se mostrarán ejemplos donde se señalan dificultades o errores que pueden llegar a cometerse al tratar de hallar la función que relaciona dos soluciones completas. Además es importante mencionar que los procesos operacionales pueden ser tediosos y en cierta medida difíciles ya que implican la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, lo cual aumenta la dificultad en el momento que se trabaja con más de dos variables independientes.

Finalmente, en el Capítulo 3 se hace una breve mención a la ecuación diferencial parcial de primer orden más importante en la física-matemática, la ecuación de Hamilton-Jacobi, estudiando su origen a partir del punto de vista del cálculo variacional.

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Parciales

1.1. Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales es un área de las matemáticas bastante amplia, cuyo inicio data de la cuarta década del siglo XVIII con trabajos de Euler, a los que llega gracias a sus investigaciones dentro de la geometría pero no adquieren interpretación en otra área de estudio independiente. De forma paralela Clairaut y D´Alembert hicieron aportaciones al comienzo de esta nueva rama, por una parte, Clairaut estudió las ecuaciones de primer orden trabajando con lo que ahora se conoce como ecuación diferencial total, dándole una interpretación dentro de la mecánica de fluidos; y por otro lado D´Alembert planteó ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con aplicaciones en la física y desarrolló un método de solución de las mismas, que aunque carecía de interpretación geométrica, dió lugar al desarrollo de métodos de solución basados en la reducción de una ecuación diferencial parcial en ecuaciones diferenciales ordinarias.[4][7]

Con estos resultados se da inicio a una nueva etapa del análisis, enfocando las investigaciones a las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden debido a sus aplicaciones en la mecánica, que era la ciencia dominante del siglo XVIII. Sin embargo no es hasta finales de ese siglo y principios del siglo XIX que se profundiza en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, gracias a los trabajos de Lagrange, quien logró plantear la definición conocida de solución completa de una ecuación diferencial parcial y además, demostró que a partir de ella es posible obtener su solución general y singular. Siguiendo los pasos de Lagrange, Charpit desarrolló otro método para resolver este tipo de ecuaciones con dos variables independientes, el cual consiste en la introducción de otra ecuación diferencial parcial. Además, otro resultado importante de esa época fue el desarrollo de las interpretaciones geométricas de las ecuaciones diferenciales parciales gracias a los trabajos de Monge, Pfaff, Cauchy y Jacobi.[4]

Hasta ese momento, todos esos avances se habían estudiado únicamente para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con dos variables independientes pero existía el problema de ampliar esa teoría para ecuaciones con un número arbitrario de variables, el cual persistió por décadas hasta 1838 cuando Jacobi pudo generalizar los métodos de Lagrange y de Charpit; sin embargo su trabajo fue hallado después de su muerte y no fue publicado hasta 1862.[4]

Estas investigaciones forman parte de la teoría conocida de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, misma que en este capítulo se expone.

1.2. Ecuaciones Diferenciales Parciales de primer orden

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la función desconocida $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una relación entre u, las variables independientes $x_1, x_2, .., x_n$ y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ...$$

escrita de la forma

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...\right) = 0 \qquad (1.2.1)$$

El orden de una EDP es definido en analogía con el de una ecuación diferencial ordinaria (EDO), como el mayor orden de la derivada que aparece en 1.2.1 y determina el número de funciones arbitrarias que debe contener la solución general de la ecuación.

Una solución de la EDP 1.2.1 es una función $u = u(x_1, x_2, ...x_n)$ definida en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo llamado *dominio*, donde u es continuamente diferenciable tal que todas sus derivadas parciales involucradas en la EDP existen y están bien definidas, tales que satisfacen la ecuación 1.2.1 idénticamente.

Partiendo del aspecto geométrico tridimensional, considerando una familia de superficies en el espacio XYU, llámese

$$f(x, y, u, a, b) = 0 \qquad (1.2.2)$$

donde a y b son parámetros arbitrarios, es posible llegar a una EDP de primer orden de la forma

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.2.3)$$

mediante la resolución de un sistema de ecuaciones para los parámetros arbitrarios. El sistema de ecuaciones a resolver está formado por la ecuación de la familia de superficies y por las siguientes ecuaciones que resultan al diferenciarla con respecto de las variables independientes x y y

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1.2.4)$$

De esta forma se ve que una EDP de primer orden con dos variables independientes surge a partir de una familia de superficies de la forma 1.2.2 pero, si se considerara un mayor número de variables, se llegaría a un resultado análogo en un espacio de mayor dimensión. En este trabajo se estudian las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para el caso tridimensional, llamando a sus soluciones *superficies integrales* en el espacio XYU. Además el trabajar con dos variables independientes permite introducir una notación estándar para las derivadas parciales, donde

$$p := u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad q := u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.2.5}$$

Así, la forma más general para una EDP de primer orden con dos variables independientes x, y puede ser escrita como:

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1.2.6}$$

y al resolverla, se busca hallar una función continuamente diferenciable en D tal que relacione x, y y u.

1.3. Ecuaciones Diferenciales Parciales cuasilineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden se pueden clasificar en cuasilineales o no lineales de acuerdo a las características de los coeficientes, tanto de la función desconocida como de sus derivadas parciales. Así, la forma más general para expresar una EDP de primer orden cuasilineal con variables independientes x, y es mediante la ecuación conocida como la *ecuación de Lagrange*:

$$Pp + Qq = R \tag{1.3.1}$$

donde la cuasilinealidad se refiere a que los términos p y q son de primer grado, por lo que P, Q y R son funciones continuas de clase C^1 en una vecindad del punto donde se estudia la ecuación y dependen únicamente de x, y y u.

Debido a que en la ecuación 1.3.1 no se exige la linealidad para el término u dentro de las funciones P, Q y R entonces, podemos especificar una clasificación más minuciosa dentro de las consideradas ecuaciones cuasilineales de primer orden con variables independientes x, y.

a) EDP cuasilineal: Es lineal en p y q, dando la libertad de que las funciones P, Q y R dependan de x, y y u

$$P(x, y, u)p + Q(x, y, u)q = R(x, y, u)$$

b) EDP semilineal: Si P, Q son funciones que no dependen de u.

$$P(x, y)p + Q(x, y)q = R(x, y, u)$$

c) EDP lineal: Si es lineal en las variables u, p y q y además sus coeficientes son funciones únicamente de las variables independientes x, y.

$$P(x, y)p + Q(x, y)q + R(x, y)u = S(x, y)$$

Si $S \equiv 0$ o en su caso $R \equiv 0$, se dice que la ecuación es homogénea, de lo contrario es llamada inhomogénea.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales lineales, indicando la clasificación a la que pertenecen son

$$\begin{array}{rcll} xp + yq &=& u^2 + x^2 & \text{b)} \\ x^2p + y^2q &=& (x + y)u & \text{c) homogénea} \\ uxp - zyq &=& y^2 - x^2 & \text{a)} \\ (y + ux)p - (x + yu)q &=& x^2 - y^2 & \text{a)} \\ (y^2 - u^2)u_x - xyu_y &=& xu & \text{a)} \end{array}$$

Al generalizar esta notación de la ecuación de Lagrange, se tiene que una EDP cuasilineal de primer orden con n variables independientes es de la forma

$$X_1p_1 + X_2p_2 + ... + X_np_n = Y$$

donde $X_1, ..., X_n$ son funciones de la variable dependiente u y de las variables independientes $x_1, x_2, ..., x_n$, tal que para toda $i = 1, ...n$, $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

1.3.1. Solución general de una EDP cuasilineal

Al resolver una ecuación cuasilineal de primer orden se busca hallar directamente su *solución general*, ya que el hallarla no representa gran dificultad como lo es para el caso no lineal. Cabe recordar que por tratarse de una ecuación de primer orden, su solución general debe tener sólo una función arbitraria.

En primer lugar se verá cómo hallar la solución general de una ecuación homogénea con tres variables independientes x, y, z dada de la forma

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + T\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{1.3.2}$$

y para ello se supondrá que $u(x, y, z) = 0$ es una solución de la EDP cuyo diferencial total es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0 \tag{1.3.3}$$

Con esto se puede ver que las ecuaciones 1.3.2 y 1.3.3 son proporcionales, esto es que existe una función μ tal que

$$dx = Pd\mu, \qquad dy = Qd\mu, \qquad dz = Td\mu \tag{1.3.4}$$

de lo cual se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias, conocidas como *ecuaciones características*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{T} \tag{1.3.5}$$

Generalmente el número de ecuaciones características es uno menos que el número de variables independientes en la EDP, cuyas soluciones son funcionalmente independientes entre sí, es decir que no existe una función que las relacione; y son llamadas *funciones o curvas características* o simplemente *características*. De esta forma, como la relación que debe existir entre las variables independientes de la solución de la EDP está dada por las soluciones de las ecuaciones 1.3.5, entonces la solución general de la ecuación 1.3.2 debe ser una función arbitraria de esas dos características.

Ahora, para el caso de una EDP inhomogénea con variables independientes x, y, z de la forma

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + T\frac{\partial u}{\partial z} = R \tag{1.3.6}$$

se supondrá que $\psi(u, x, y, z) = c$ es solución de la EDP dada de forma implícita, donde c es una constante y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

de lo cual podemos deducir que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big/\frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}\Big/\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 1.3.6, notamos que el problema se reduce a resolver la siguiente ecuación homogénea de cuatro variables independientes:

$$P\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \psi}{\partial y} + T\frac{\partial \psi}{\partial z} + R\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \tag{1.3.7}$$

donde ahora las ecuaciones características son:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{T} = \frac{du}{R} \tag{1.3.8}$$

De esta forma se puede ver que este método puede generalizarse a ecuaciones que involucran cualquier número de variables independientes no importando si son homogéneas o inhomogénas. Este resultado es conocido como el método de solución de Lagrange y se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *La solución general de la EDP*

$$Pp + Qq = R \tag{1.3.9}$$

es

$$f(v, w) = 0 \tag{1.3.10}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}$ *es una función arbitraria continua y de clase* C^1 *de las características* $v(x, y, u) = c_1$ *y* $w(x, y, u) = c_2$*; las cuales son* *curvas solución de las ecuaciones características*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} \tag{1.3.11}$$

Cabe recalcar que la solución general 1.3.10 también puede expresarse como la variable dependiente u igualada a una función de las variables independientes x, y

$$u = u(x, y)$$

A este método de solución se le da la siguiente interpretación geométrica que viene de considerar a la solución $u = u(x, y)$ o dada de forma implícita por $f(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0$, como una superficie solución en el espacio XYU. Esta consideración permite ver a la EDP 1.3.9 como un producto escalar entre el vector gradiente, que es normal a la superficie en cada punto (x, y, u) de la misma, definido como $\nabla f := (f_x, f_y, f_u) = (u_x, u_y, -1) = (p, q, -1)$ y el vector (P, Q, R)

$$Pp + Qq - R = (P, Q, R) \cdot (p, q, -1) = 0$$

Lo anterior indica que el vector (P, Q, R) es tangente a la superficie integral f en el punto (x, y, u) y por lo tanto debe pertenecer a un plano tangente a la superficie f. De esta forma, (P, Q, R) determina un campo direccional llamado *dirección característica* o *eje de Monge*, que para las ecuaciones lineales es único en cada punto .

Por lo anterior, se concluye que $f(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0$ es una solución de 1.3.1 si y sólo si el campo vectorial de direcciones (P, Q, R) se encuentra en los planos tangentes de la superficie integral $f(x, y, u) = 0$ para cada punto (x, y, u), donde $\nabla f \neq 0$ (ver Figura 1.1). Esto se logra haciendo a f una función de curvas en el espacio XYU cuya tangente en cada punto coincida con el campo de direcciones (P, Q, R), lo cual conlleva al establecimiento de las ecuaciones características 1.3.11, ya que si se supone que las ecuaciones paramétricas de una de estas curvas son

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad u = u(t)$$

entonces su vector tangente es $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}\right)$, lo cual origina el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, u), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, u), \quad \frac{du}{dt} = R(x, y, u) \qquad (1.3.12)$$

que a su vez permite llegar a las ecuaciones características 1.3.11. Por lo tanto la solución general f debe ser función de las curvas características.

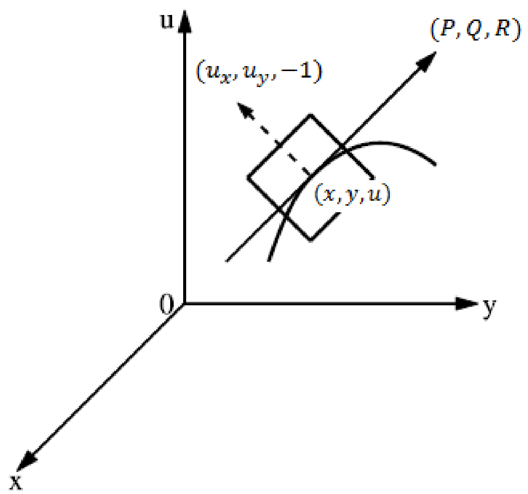

Figura 1.1: Campo vectorial normal y tangente de una superficie solución en el punto (x, y, u)

En resumen, el método de Lagrange establece que todas las superficies integrales de 1.3.9 son generadas por las curvas integrales de las ecuaciones 1.3.11 y de igual forma, todas las superficies generadas por las curvas integrales de las ecuaciones 1.3.11 son superficies integrales de la ecuación 1.3.9.

Ejemplo 1. *Hallar la integral general de la EDP lineal*

$$px(x + y) = qy(x + y) - (x - y)(2x + 2y + u)$$

Solución: Las ecuaciones características para esta EDP son

$$\frac{dx}{x(x + y)} = \frac{dy}{-y(x + y)} = \frac{du}{(y - x)(2x + 2y + u)}$$

Se puede ver que de la ecuación $\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)}$ *se obtiene que*

$$xy = c_1 \tag{1.3.13}$$

Por otro lado se tiene

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dx+dy}{x^2-y^2}$$

lo cual implica que

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{du}{(y-x)(2x+2y+u)}$$

que es equivalente a

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)} = -\frac{du}{2(x+y)+u}$$

Como se trata de una EDO homogénea, su solución es

$$(x+y)^2\left(\frac{u}{x+y}+1\right) = c_2$$

que es equivalente a

$$(x+y)(u+x+y) = c_2 \tag{1.3.14}$$

Por lo tanto de las ecuaciones 1.3.13 y 1.3.14 se tiene que

$$f\left(xy, (x+y)(x+y+u)\right) = 0$$

es la integral general de la EDP, o de forma equivalente $g(xy) = (x+y)(x+y+u)$ *con* g *una función arbitraria.*

La generalización del **Teorema 1.3.1** para el caso de una EDP cuasilineal de primer orden con n variables independientes, se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 1.3.2. *Si para toda* $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_i(x_1, x_2, ..., x_n, u) =$

c_i son soluciones independientes de las ecuaciones

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{R}$$

Entonces la relación $\Phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$, donde $\Phi : D \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria continua y de clase C^1 con D un dominio, es una solución general de la EDP lineal

$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = R$$

donde para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ P_i es una función de $x_1, x_2, ..., x_n, u$.

Ahora, si se tuviera el problema de hallar una superficie integral particular que pase sobre alguna curva C, con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, donde t es un parámetro, entonces se buscaría una solución de las ecuaciones 1.3.11 tal que satisfaga

$$v(x(t), y(t), u(t)) = c_1 \qquad w(x(t), y(t), u(t)) = c_2$$

lo cual, permitiría eliminar el parámetro t y llegar a una relación $f(c_1, c_2) = 0$, que sería la solución deseada.

Este problema puede ser formulado en términos de un problema de Cauchy o *problema de valor inicial:*

Teorema 1.3.3 (Problema de Cauchy para una ecuación cuasi lineal)**.** *Sea la EDP $Pp + Qq = R$ tal que P, Q, R tienen primeras derivadas parciales continuas con respecto a sus argumentos en algún dominio D del espacio XYU y sea la curva Γ en el espacio XYU con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$ con parámetro t, tal que*

$$Py_t - Qx_t \neq 0 \tag{1.3.15}$$

Entonces, existe una única solución $u = u(x, y)$ de la ecuación que pasa por Γ, es decir,

$$u(t) = u(x(t), y(t))$$

Si se tuviera que $Py_t - Qx_t = 0$ entonces la curva inicial Γ coincidiría con una curva característica y por lo tanto, existiría una infinidad de soluciones del problema de valor inicial.

1.4. Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales surgen de varias áreas de la física como la óptica geométrica, la dinámica de fluidos y la dinámica analítica; sin embargo uno de los principales problemas que impulsaron su desarrollo es el de propagación de onda no lineal, por ejemplo, las ondas de choque, ondas de agua, solitones y ondas solitarias.

Este tipo de ecuaciones a resolver en esta sección se suelen representar como

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1.4.1}$$

donde la función F no necesariamente es cuasilineal en p y q, aunque de serlo nos lleva a considerar a las ecuaciones cuasilineales como un caso particular de las ecuaciones no lineales.

Cauchy, uno de los contribuyentes al desarrollo de la interpretación geométrica de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, desarrolló una forma de resolverlas, dando lugar al planteamiento de los problema de Cauchy, que ya han sido mencionados para el caso de una ecuación cuasi lineal en la sección anterior.

El método de Cauchy parte de considerar a un punto (x, y, u, p, q) del dominio $D \subseteq XYUPQ$ de la EDP que la satisface, como un plano tangente a la solución que pasa por el punto (x, y, u) con normal $(p, q, -1)$, al cual Cauchy le llamó *elemento integral* de la ecuación 1.4.1 en el punto (x, y, u). Dado ese punto y asegurando que en la EDP aparecen las derivadas parciales p y q, se puede afirmar que la ecuación 1.4.1 puede resolverse en alguna vecindad del mismo punto para p o q en términos de las cuatro variables restantes, por ejemplo $q = G(x, y, u, p)$, donde al variar p y dejar fijos x, y y u, se obtiene un conjunto de planos que dependen únicamente del parámetro p, que pasan por el punto (x, y, u) con normales $(p, q, -1)$. Ese conjunto de planos se encuentra envuelto por un cono con vértice en el punto (x, y, u), llamado *cono de Monge en el punto* (x, y, u). De esta forma se concluye que cualquier superficie solución que pasa a través de un punto en el espacio, debe ser tangente al correspondiente cono de Monge en ese punto, como se muestra en la Figura 1.2. Cabe mencionar que para el caso lineal, el cono de Monge se degenera, convirtiéndose en el vector (P, Q, R).

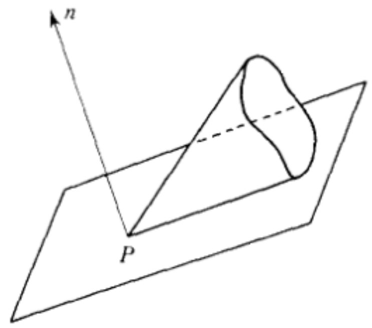

Figura 1.2: Cono de Monge.

Con base en lo anterior, un generador del cono de Monge se encuentra en el plano tangente a cada punto de la solución $u = u(x, y)$ de 1.4.1 y define una única dirección en la superficie u. Este campo direccional comprende las tangentes de una familia uniparamétrica de curvas que recorren la solución, a las cuales nuevamente se les denomina *características* de la EDP; sin embargo, dado que la ecuación es no lineal, entonces muchas curvas características pueden pasar a través de un mismo punto en el espacio, cada una surgiendo de una solución diferente de 1.4.1.

Al igual que para el caso cuasilineal, es posible encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para obtener las curvas características, las cuales ahora serán descritas como *bandas*, ya que junto con las variables x, y y u se debe incluir a p y q como variables dependientes sobre cada una de ellas. Para hallarlas es necesario retormar el concepto de envolvente de una familia de curvas.

Definición 1.4.1. La envolvente a una familia de curvas $F(x, y, \alpha) = 0$ es una curva que en cada punto es tangente a algún miembro de la familia.

La envolvente de una familia de curvas $F(x,y,\alpha)=0$ se halla eliminando α del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x,y,\alpha) &= 0 \\ F_\alpha(x,y,\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, considérese el cono de Monge correspondiente al punto (x_0,y_0,u_0) que satisface la EDP, el cual es la envolvente de la familia uniparamétrica de planos tangentes al punto (x_0,y_0,u_0) con parámetro α:

$$u-u_0=(x-x_0)p_0(\alpha)+(y-y_0)q_0(\alpha) \tag{1.4.2}$$

por lo tanto, dicho cono de Monge se halla eliminando el parámetro α de las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} (x-x_0)p_0(\alpha)+(y-y_0)q_0(\alpha) &= u-u_0 \\ (x-x_0)p_0'(\alpha)+(y-y_0)q_0'(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

donde para cada α fijo, estas ecuaciones describen una recta que es generadora del cono de Monge para cada (x,y,u).

Si por otro lado se toma en cuenta la diferenciación con respecto de α de $F(x_0,y_0,u_0,p_0(\alpha),q_0(\alpha))=0$

$$F_p p_0'(\alpha)+F_q q_0'(\alpha)=0 \tag{1.4.3}$$

entonces se evita mencionar $p_0'(\alpha)$ y $q_0'(\alpha)$, permitiendo llegar a la relación

$$\frac{x-x_0}{F_p}=\frac{y-y_0}{F_q} \tag{1.4.4}$$

lo cual implica que esta característica debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q} \tag{1.4.5}$$

Por otro lado, también se necesita obtener una ecuación diferencial similar para u, p y q, ya que las cinco cantidades aparecen como argumentos de F_p y F_q. Estas ecuaciones surgen al considerar la diferencial total de la función u

$$du = pdx + qdy$$

y la igualdad 1.4.5, obteniendo

$$\frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{pdx + qdy}{pF_p + qF_q} = \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} \tag{1.4.6}$$

Ahora, para hallar expresiones para dp y dq, se diferencía la ecuación original 1.4.1 con respecto de x y y, obteniendo

$$\begin{aligned} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x &= 0 \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y &= 0 \end{aligned}$$

luego entonces considerando la ecuación 1.4.5 y como $p_y = q_x$, se deduce que

$$\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{p_x dx + p_y dy}{p_x F_p + p_y F_q} = -\frac{dx}{F_p} \tag{1.4.7}$$

y análogamente

$$\frac{dq}{F_y + qF_u} = -\frac{q_x dx + q_y dy}{q_x F_p + q_y F_q} = -\frac{dy}{F_q} \tag{1.4.8}$$

Entonces las ecuaciones 1.4.5, 1.4.7 y 1.4.8 se resumen en el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} \tag{1.4.9}$$

para determinar x, y, u, p y q a lo largo de una banda característica.

Se puede ver que introduciendo un parámetro apropiado s, el sistema de ecuaciones 1.4.9 se expresa como

$$\begin{gathered} \frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q \\ \frac{dp}{ds} = -F_x - pF_u, \qquad \frac{dq}{ds} = -F_y - qF_u \end{gathered} \tag{1.4.10}$$

Estas ecuaciones son las *ecuaciones características* de 1.4.1 y si las funciones que aparecen en ellas son de Lipschitz, entonces existe una única solución de las ecuaciones para cada conjunto de valores iniciales de las variables establecido. Por lo tanto la banda característica es determinada de forma única por algún elemento inicial $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ y un valor inicial s_0 de s.

Así, las condiciones de existencia de una solución para una EDP de primer orden, se establecen a partir del problema clásico de Cauchy, enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Si las funciones $x_0(\mu), y_0(\mu), u_0(\mu)$ son de clase C^1 en un intervalo $M = (\mu_1, \mu_2)$ y si $F(x, y, u, p, q)$ es una función continua en una región S del espacio $XYUPQ$, entonces existe una función $\phi(x, y)$ tal que*

1. $\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ *son funciones continuas en* $R \subseteq \mathbb{R}^2$
2. $\forall x, y \in R$, $(x, y, \phi(x, y), \phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) \in U$ *y* $F(x, y, \phi(x, y), \phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) = 0$
3. $\forall \mu \in M$, $(x_0(\mu), y_0(\mu)) \in R$ *y* $\phi(x_0(\mu), y_0(\mu)) = u_0$

La interpretación geométrica del teorema anterior es que se busca probar la existencia de una superficie $u = \phi(x, y)$ que pasa sobre una curva Γ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = x_0(\mu), \qquad y = y_0(\mu), \qquad u = u_0(\mu)$$

y que en cada punto de ésta, la dirección de la normal $(p, q, -1)$ sea tal que $F(x, y, u, p, q) = 0$; para lo cual, se hace uso del siguiente teorema

Teorema 1.4.2. *A lo largo de cualquier banda característica de la ecuación $F(x, y, u, p, q) = 0$, la función $F(x, y, u, p, q)$ es una constante.*

De esta forma, los valores iniciales de p, q son determinados por las relaciones

$$\chi'(v) = p_0\theta'(v) + q_0\phi'(v)$$
$$F(\theta(v), \phi(v), \chi(v), p_0, q_0) = 0$$

Luego, si se sustituyen x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 y el valor apropiado de t_0 en la solución de las características, se obtiene que x, y, u pueden ser expresadas en términos de v, t como

$$x = X_1(v,t), \qquad y = Y_1(v,t), \qquad z = Z_1(v,t)$$

pero si se eliminan v y t de estas ecuaciones se llega a una relación $\psi(x, y, u) = 0$, que es la ecuación de la superficie integral buscada que pasa por la curva Γ.

Ejemplo 2. *Hallar la solución de la ecuación*

$$z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y)$$

que pasa a través del eje X
Solución: *Unas ecuaciones paramétricas del eje X son*

$$x(v) = v, \quad y(v) = 0, \quad z(v) = 0$$

Así los valores iniciales son $x_0(v) = v$, $y_0(v) = 0$, $z_0(v) = 0$ y para p_0 y q_0 se debe notar que

$$(x_0', y_0', z_0') \cdot (p_0, q_0, -1) = 0$$

por lo que se tiene

$$(1, 0, 0) \cdot (p_0, q_0, -1) = 0$$

lo cual implica que $p_0 = 0$. Luego entonces sustituyendo estos valores iniciales en la EDP, se tiene que

$$0 = \frac{1}{2}q_0^2 - vq_0$$

lo cual implica que

$$q_0 = \frac{2v \pm \sqrt{4v}}{2}$$

y como p y q no pueden ser 0 al mismo tiempo, entonces se concluye que $q_0 = 2v$.
Por otro lado se tiene que las ecuaciones características de esta EDP

son

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = x'(t) &= p + q - y \\
\frac{dy}{dt} = y'(t) &= q + p - x \\
\frac{dz}{dt} = z'(t) &= p(p + q - y) + q(p + q - x) \\
\frac{dp}{dt} = p'(t) &= q - y + p \\
\frac{dq}{dt} = q'(t) &= p - x + q
\end{aligned}$$

de donde por la ecuación $\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt}$ *se tiene que* $x = p + c$ *donde* c *es una constante que por los valores iniciales resulta ser* $c = x_0 - p_0 = v$. *Por lo tanto* $x = p + v$.
Por otro lado de la ecuación $\frac{dy}{dt} = \frac{dq}{dt}$ *se tiene que* $y = q + a$ *donde* a *es una constante que por los valores iniciales resulta ser* $a = y_0 - q_0 = -2v$. *Por lo tanto* $y = q - 2v$.
Se puede ver que

$$\frac{d}{dt}(p + q - x) = p + q - x$$

de donde se tiene que $\log(p+q-x) = t+b$ *con* b *una constante, lo cual es equivalente a* $p+q-x = ke^t$ *con* k *una constante arbitraria, la cual por los valores iniciales resulta ser* $k = v$. *Por lo tanto* $p+q-x = ve^t$
También se puede ver

$$\frac{d}{dt}(p + q - y) = p + q - y$$

de donde se tiene que $\log(p+q-y) = t+a$ *con* a *una constante, lo cual es equivalente a* $p+q-y = ke^t$ *con* k *una constante arbitraria, que por los valores iniciales resulta ser* $k = 2v$. *Por lo tanto* $p+q-y = 2ve^t$.
Ahora, como $x = p+v$, $y = q-2v$ *entonces* $p = x-v$, $q = y+2v$*; por lo que de la ecuación* $p + q - x = ve^t$ *se concluye que* $y = v(e^t - 1)$.
Y análogamente de la ecuación $p + q - y = 2ve^t$ *se concluye que* $x = v(2e^t - 1)$

Luego

$$\begin{aligned} p &= v(2e^t - 1) - v = 2v(e^t - 1) \\ q &= v(e^t - 1) + 2v = v(e^t + 1) \end{aligned}$$

Así, sustituyendo estos valores en la ecuación característica de z' *se tiene*

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p(p+q-y) + q(p+q-x) \\ &= 5v^2e^{2t} - 3v^2e^t \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que

$$z = \frac{5}{2}v^2e^{2t} - 3v^2e^t + c \tag{1.4.11}$$

donde "c" es una constante que por los valores iniciales resulta ser $k = -\frac{5}{2}v^2 + 3v^2$
Por lo tanto se tiene que $z = \frac{5}{2}v^2(e^{2t} - 1) - 3v^2(e^t - 1)$*, pero es necesario eliminar* e^t *de esta expresión, para lo cual se retomarán las ecuaciones* $x = v(2e^t - 1)$*,* $y = v(e^t - 1)$*, de donde se tiene que* $x - 2y = v$ *y por otro lado también se tiene* $y - x = -ve^t$*, por lo que surge la ecuación*

$$e^t = \frac{y-x}{-v} = \frac{y-x}{2y-x}$$

Así, sustituyendo este resultado en la ecuación 1.4.11 se tiene que la solución de la EDP que pasa a través del eje X *es*

$$z = \frac{1}{2}y(4x - 3y)$$

1.4.1. Tipos de soluciones de una EDP no lineal de primer orden

Toda EDP de primer orden de la forma 1.4.1 posee una solución dependiente de una función arbitraria, que es la solución general, sin embargo, en muchas aplicaciones físicas, esta solución es menos importante que las llamadas *soluciones completas*, que son del tipo

$$f(x, y, u, a, b) = 0$$

con a, b constantes arbitrarias denominadas *parámetros*. Estas familias de soluciones son soluciones particulares de la EDP que contienen tantas constantes arbitrarias como variables independientes que intervienen en la ecuación. Cabe resaltar que la familia de soluciones biparamétricas no es única, es decir que es posible tener dos soluciones completas particulares que no pertenezcan a la misma familia biparamétrica f.

Por otro lado, si nos fijamos en la envolvente del sistema biparamétrico $f(x, y, u, a, b) = 0$ notamos que ésta es tocada en cada uno de sus puntos por algún miembro del sistema; por lo que posee el mismo conjunto de valores (x, y, u, p, q) de la superficie particular y por lo tanto, también debe ser solución de la ecuación diferencial.

De esta forma, se tienen los siguientes tres tipos de integrales o soluciones de una EDP del tipo 1.4.1

a) Una familia de superficies biparamétrica $f(x, y, u, a, b) = 0$ llamada *integral* o *solución completa.*

b) La envolvente de un subsistema arbitrario uniparamétrico

$$f(x, y, u, a, \phi(a)) = 0$$

de la familia de superficies biparamétrica, llamada *integral* o *solución general.* Cabe recalcar que toda EDP posee este tipo de soluciones y que si ϕ es fija, obtenemos un caso particular de la integral general de la ecuación.

c) En caso de existir la envolvente del sistema biparamétrico

$$f(x, y, u, a, b) = 0$$

ésta es llamada *integral* o *solución singular* de la EDP. Para una EDP de primer orden invariablemente existe este tipo de solución.

Por lo tanto podemos decir que el hallar soluciones de una EDP no lineal, se reduce a encontrar soluciones completas y al cálculo de envolventes de familias de superficies.

Teóricamente siempre es posible obtener integrales completas diferentes no equivalentes a otras, es decir, soluciones que no pueden obtenerse de otra al cambiar la elección de la constante arbitraria. Sin embargo cuando se ha obtenido una integral completa, cualquier otra solución correspondiente a esta, es del tipo b) o c) (Ver Sec.1.5).

Ejemplo 3. *Se hallarán los tres tipos de solución para la EDP*

$$u^2(1+p^2+q^2)=1$$

<u>Solución:</u> *Para comenzar resulta sencillo ver que la ecuación*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1$$

con a y b constantes arbitrarias, es solución completa de la EDP, ya que al diferenciar con respecto de x se tiene $2(x-a)+2up=0$ que es equivalente a

$$u^2p^2=(a-x)^2$$

y al diferenciar con respecto de y se tiene $2(y-b)+2uq=0$ que es equivalente a

$$u^2q^2=(b-y)^2$$

Lo cual implica

$$u^2p^2+u^2q^2=(a-x)^2+(b-y)^2$$

y si se considera la igualdad inicial se tiene

$$u^2p^2+u^2q^2=1-u^2$$

que es equivalente a la EDP $u^2(p^2+q^2+1)=1$

Por lo tanto $(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1$ es solución completa *de la EDP.*

Ahora si en la solución completa se considera $b=a$, se obtiene el *subsistema uniparamétrico*

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + u^2 = 1$$

cuya envolvente se obtiene eliminando "a" del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 + u^2 &= 1 \\ x + y - 2a &= 0 \end{cases}$$

de lo cual se tiene

$$\left(x - \left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 + u^2 = 1$$

que es equivalente a

$$(x-y)^2 + 2u^2 = 2$$

Por lo tanto $(x-y)^2 + 2u^2 = 2$ *es un caso particular de la* integral general *de la EDP.*
Por otro lado, al diferenciar $(x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1$ *con respecto de los parámetros* a, b, *se tiene el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 &= 1 \\ x - a &= 0 \\ y - b &= 0 \end{cases}$$

de donde se tiene que $u^2 = 1$ *y por lo tanto, la envolvente del sistema biparamétrico o integral singular es el par de planos* $u = \pm 1$.

A continuación se estudiarán métodos para hallar soluciones completas de una EDP no lineal de primer orden.

1.4.2. Método de separación de variables

Este método consiste en reducir una EDP con n variables independientes a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, buscando expresar la solución de la EDP como una función formada al operar n funciones que dependen de una variable diferente cada una. Sin embargo, esto mismo, conlleva al problema de que este método no es aplicable a cualquier EDP, ya que existen ecuaciones diferenciales parciales que no poseen soluciones completas expresadas de esta forma.

Aunque este método es muy usado para resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, en especial para resolver problemas que involucran condiciones iniciales y/o de frontera, es posible aplicarlo a algunas ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, buscando expresar su solución como una suma de funciones de una variable. Dada la EDP de la forma $F(x, y, u, p, q) = 0$, se busca una solución $u(x, y) = f(x) + g(y)$ que será solución completa de la EDP, ya que incluirá dos constantes arbitrarias, por el número de integrales que involucra.

Ejemplo 4. *Sea la siguiente EDP aplicable en óptica geométrica*

$$p^2 + q^2 = 1 \tag{1.4.12}$$

Se buscan soluciones de la forma

$$u = f(x) + g(y) \tag{1.4.13}$$

las cuales al sustituirse en la EDP 1.4.12 resultan ser

$$(f'(x))^2 + (g'(y))^2 = 1$$

por lo que para tener la igualdad se concluye que $f'(x)$ y $g'(y)$ son constantes. Por otro lado, si se retoma la identidad trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *para todo valor de x, se concluye que*

$$f'(x) = \cos(a), \qquad g'(y) = \sin(a)$$

lo cual implica que

$$f(x) = x\cos(a) + c_1, \qquad g(y) = y\sin(a) + c_2$$

Por lo tanto se tiene que una familia de soluciones completas de la

EDP 1.4.12 es de la forma

$$u = x\cos(a) + y\sin(a) + b$$

1.4.3. Método de Charpit

Este método para hallar soluciones completas de la EDP $F(x, y, u, p, q) = 0$, se basa en introducir una segunda EDP de primer orden $G(x, y, u, p, q) = 0$ tal que

a) Las ecuaciones sean funcionalmente independientes, permitiendo que el sistema de ecuaciones formado por ambas pueda resolverse para p y q, describiéndolas como funciones de x, y y u. Para esto es necesario que

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0 \tag{1.4.14}$$

donde $\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} := \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}$

b) Ambas ecuaciones sean compatibles, es decir, que toda solución de la primer ecuación sea solución de la segunda y viceversa.

Estas dos condiciones que deben cumplir las ecuaciones se satisfacen simultáneamente al pedir que

$$[F, G] :\equiv \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, p)} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, q)} = 0 \tag{1.4.15}$$

lo cual a su vez permite resolver el problema de hallar la segunda EDP mediante la resolución de la siguiente EDP lineal que surge al expandir la ecuación 1.4.15

$$F_p\frac{\partial G}{\partial x} + F_q\frac{\partial G}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial G}{\partial u} - (F_x + pF_u)\frac{\partial G}{\partial p} - (F_y + qF_u)\frac{\partial G}{\partial q} = 0 \tag{1.4.16}$$

que de acuerdo al Teorema 1.3.2, su solución se halla mediante las siguientes ecuaciones auxiliares conocidas ahora como *ecuaciones de Charpit*, que son equivalentes a las ecuaciones características 1.4.10

del método de Cauchy[8]:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_u)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_u)} \tag{1.4.17}$$

A pesar de que mediante estas ecuaciones auxiliares es posible hallar la solución general de la EDP 1.4.16, que viene siendo la segunda EDP $G = 0$, se sabe que por la forma en que fue construida, las expresiones para p y q también deben satisfacer la EDP $F = 0$, por lo tanto basta hallar estas funciones a partir de las ecuaciones 1.4.17 y sustituirlas en el diferencial total de la función u

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= pdx + qdy \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

para que así, mediante la integración de esta última ecuación, se obtenga una expresión de la solución completa $f(x, y, u, a, b) = 0$ de la EDP original.

Ejemplo 5. *Se hallará una integral completa de la siguiente ecuación por el método de Charpit*

$$(p^2 + q^2)y = qu$$

<u>Solución:</u> Se tiene que $f(x, y, u, p, q) = (p^2 + q^2)y - qu$
Las ecuaciones de Charpit para esta EDP son:

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - u} = \frac{du}{2p^2y + 2q^2y - qu} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$

Se puede ver que de la ecuación $\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$ *se tiene que*

$$p^2 = -q^2 + c \qquad \text{con } c \text{ una constante.}$$

Entonces se busca resolver el siguiente sistema de ecuaciones para p *y* q*:*

$$\begin{cases} (p^2 + q^2)y - qu &= 0 \\ p^2 + q^2 &= c \end{cases}$$

de donde se tiene que $cy - qu = 0$ *y así*

$$q = \frac{cy}{u}$$

Luego entonces se tiene

$$p^2 + \left(\frac{cy}{u}\right)^2 = c$$

que es equivalente a

$$p = \pm\left(c - \left(\frac{cy}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Así la ecuación 1.4.18 resulta

$$\left(c - \left(\frac{cy}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{cy}{u}dy = du$$

que es equivalente a

$$udu - cydy = \left(cu^2 - c^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

de donde se tiene

$$\frac{udu - cydy}{\sqrt{u^2 - cy^2}} = \sqrt{c}dx$$

o escrito de otra manera

$$d(\sqrt{u^2 - cy^2}) = \sqrt{c}dx$$

Por lo tanto, la integral completa es $\sqrt{u^2 - cy^2} = \sqrt{c}x + d$ *con* c, d *constantes.*

A pesar de que en 1784 Charpit logró establecer un método para la resolución de las ecuaciones no lineales de primer orden con dos variables independientes, este no fue posible generalizarlo para resolver ecuaciones con $n > 2$ variables independientes, ya que presenta el problema de asegurar la independencia funcional entre ecuaciones que dependen de $n > 2$ variables, para lo cual es necesario tener el mismo número de ecuaciones que de variables. Este problema persistió durante más de medio siglo hasta la publicación en 1862 de uno de los artículos póstumos de Jacobi escrito en 1838, donde logra generalizar los métodos de Lagrange y de Charpit para la resolución de una EDP con un número arbitrario de variables independientes, mismo que será expuesto en la siguiente sección. [4]

1.4.4. Método de Jacobi

Este método desarrollado por Jacobi para hallar una solución completa de la EDP
$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1.4.19}$$
extiende los métodos de Lagrange y de Charpit, con la ventaja de poder generalizarlo directamente para una EDP no lineal con un número arbitrario de variables independientes, a diferencia del método de Charpit.

Para la explicación de este método, se modificará la notación con la que se ha estado trabajando para facilitar su escritura, denotando a la variable dependiente o función buscada como z y por v a la función que lleva implícita la solución de la EDP.

Este método consiste en expresar una EDP de una forma equivalente donde la variable dependiente aparezca únicamente mediante sus derivadas, para lo cual se parte de suponer que una solución de la EDP original esta dada de forma implícita por $v(x, y, z) = 0$ y por lo tanto, suponiendo que en una vecindad del punto (x, y, z) donde se satisfacen las condiciones del Teorema de la función implícita se llega a que
$$p := \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial z}}, \qquad q := \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} \tag{1.4.20}$$
por lo que si se define a $v_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2, 3$ y $x_1 := x$, $x_2 := y$, $x_3 := z$, entonces se tiene
$$p = -\frac{v_1}{v_3}, \qquad q = -\frac{v_2}{v_3} \tag{1.4.21}$$
Mediante la sustitución de esta redefinición de términos en la EDP

original, se genera una EDP auxiliar equivalente donde la variable dependiente aparece únicamente mediante sus derivadas y donde el número de variables independientes es igual al de la EDP original más uno, es decir, se incrementa la dimensión del espacio donde se trabaja, ya que ahora consideraremos a z como variable independiente y como variable dependiente o solución buscada a v. De esta forma, una solución completa de la EDP original es una solución completa particular de la EDP auxiliar dada de la forma

$$F(x, y, z, v_1, v_2, v_3) = 0 \tag{1.4.22}$$

Basándose en el método de Charpit, Jacobi plantea su método de solución introduciendo dos ecuaciones diferenciales parciales más de primer orden

$$G(x, y, z, v_1, v_2, v_3) = 0 \qquad \text{y} \qquad H(x, y, z, v_1, v_2, v_3) = 0 \tag{1.4.23}$$

tales que las ecuaciones 1.4.22 y 1.4.23 puedan resolverse para alguna expresión de v_1, v_2 y v_3. Estas nuevas ecuaciones G y H se hallan al satisfacer la condición de compatibilidad con la ecuación F, dada mediante las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v_1)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v_2)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v_3)} = 0$$

$$\frac{\partial(F,H)}{\partial(x,v_1)} + \frac{\partial(F,H)}{\partial(y,v_2)} + \frac{\partial(F,H)}{\partial(z,v_3)} = 0$$

que al extender se pueden ver como las siguientes ecuaciones diferenciales parciales lineales

$$\begin{aligned}
F_{v_1}\frac{\partial G}{\partial x} + F_{v_2}\frac{\partial G}{\partial y} + F_{v_3}\frac{\partial G}{\partial z} - F_x\frac{\partial G}{\partial v_1} - F_y\frac{\partial G}{\partial v_2} - F_z\frac{\partial G}{\partial v_3} &= 0 \\
F_{v_1}\frac{\partial H}{\partial x} + F_{v_2}\frac{\partial H}{\partial y} + F_{v_3}\frac{\partial H}{\partial z} - F_x\frac{\partial H}{\partial v_1} - F_y\frac{\partial H}{\partial v_2} - F_z\frac{\partial H}{\partial v_3} &= 0
\end{aligned}$$

las cuales por el Teorema 1.3.2 originan las ecuaciones auxiliares

$$\frac{dx}{F_{v_1}} = \frac{dy}{F_{v_2}} = \frac{du}{F_{v_3}} = \frac{dv_1}{-F_x} = \frac{dv_2}{-F_y} = \frac{dv_3}{-F_z} \tag{1.4.24}$$

Aunque mediante estas ecuaciones es posible hallar las ecuaciones G y H, no es necesario conocerlas explícitamente, ya que basta usar las ecuaciones 1.4.24 para hallar expresiones de v_1, v_2 y v_3 en función de x, y y z, que por construcción también satisfacen a la EDP original F.

Una vez teniendo las expresiones para las v_i es posible sustituirlas en el diferencial total de v

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ &= v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz \end{aligned}$$

y así, mediante la integración de esta ecuación, se halla la expresión $v(x, y, z, a, b, c)$ para la solución de la EDP 1.4.22, que por el número de integrales involucradas posee tres contantes. Sin embargo, si la EDP está dada en la forma 1.4.19, únicamente se necesitan dos constantes arbitrarias en la solución, para lo cual se opta por dar un valor específico a alguna de las tres constantes arbitrarias de $v(x, y, z, a, b, c)$.

Ejemplo 6. *Se hallará la integral completa de la siguiente EDP por el método de Jacobi.*

$$p^2 + qy - z = 0 \tag{1.4.25}$$

Solución: *Como $p = -\frac{v_1}{v_3}$, $q = -\frac{v_2}{v_3}$ entonces la EDP se reescribe como*

$$v_1^2 - v_2 v_3 y - v_3^2 z = 0 \tag{1.4.26}$$

Las ecuaciones auxiliares que nos permiten hallar una solución completa de esta EDP son

$$\frac{dx}{2v_1} = \frac{dy}{-v_3 y} = \frac{dz}{-v_2 y - 2v_3 z} = \frac{dv_1}{0} = \frac{dv_2}{v_2 v_3} = \frac{dv_3}{v_3^2}$$

De lo cual se concluye que

$$v_1 = a \qquad \text{con “}a\text{” una constante}$$

Además de la ecuación $\frac{dy}{-v_3 y} = \frac{dv_2}{v_2 v_3}$ *se obtiene que*

$$v_2 = \frac{b}{y} \qquad \textit{con "b" una constante}$$

Luego, sustituyendo v_1 *y* v_2 *en la EDP 1.4.26 se tiene que*

$$a^2 - \frac{b}{y} v_3 y - v_3^2 z = 0$$

lo cual implica que

$$v_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4za^2}}{2z}$$

Así se tiene que

$$dv = adx + \frac{b}{y} dy + \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4za^2}}{2z} \right) dz$$

Por lo tanto $v = ax + b \ln y + \sqrt{b^2 + 4az^2} - b \ln\left(\sqrt{b^2 + 4az^2} + b\right) + c$ *es solución completa de la EDP 1.4.26 y si* $c = 0$ *entonces se tiene que una familia de soluciones completas de la ecuación 1.4.25 es*

$$v = ax + b \ln y + \sqrt{b^2 + 4az^2} - b \ln\left(\sqrt{b^2 + 4az^2} + b\right)$$

Al generalizar este resultado para una EDP con $n - 1$ variables independientes, se tiene que si su solución está dada de forma implícita por $v(x_1, ...x_{n-1}, z)$ y si se define a v_i como $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ y a v_n como $\frac{\partial v}{\partial z}$, entonces la EDP a resolver es de la forma

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, v_1, ..., v_n) = 0 \tag{1.4.27}$$

Así las ecuaciones auxiliares quedan expresadas como

$$\frac{dx_1}{F_{v_1}} = \frac{dx_2}{F_{v_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{F_{v_n}} = \frac{dv_1}{-F_{x_1}} = \frac{dv_2}{-F_{x_2}} = \cdots = \frac{dv_n}{-F_{x_n}} \tag{1.4.28}$$

y al resolver estas ecuaciones para $v_1, v_2, ..., v_n$, es posible determinar v integrando la siguiente ecuación, cuya solución contiene n constantes arbitrarias

$$dv = \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i \tag{1.4.29}$$

En este método se tiene que recalcar que el hecho de hallar expresiones para las v_i a partir de las ecuaciones auxiliares, no garantiza llegar a un diferencial 1.4.29 exacto, es decir, donde las parciales cruzadas sean iguales

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad \text{con } i \neq j$$

lo cual conlleva al problema de no hallar una solución completa de la EDP, por lo que será necesario hallar otras expresiones para las v_i e integrar la nueva diferencial que se origine.

Ejemplo 7. *Sea la EDP*

$$2(z + xp + yq) = yp^2$$

que por el método de Jacobi es equivalente a

$$2(zv_3^2 - xv_1v_3 - yv_2v_3) - yv_1^2 = 0$$

y sus ecuaciones auxiliares son

$$\begin{aligned} \frac{dx}{-2xv_3 - 2yv_1} = \frac{dy}{-2yv_3} &= \frac{dz}{4zv_3 - 2xv_1 - 2yv_2} = \frac{dv_1}{2v_1v_3} \\ = \frac{dv_2}{2v_2v_3 + v_1^2} &= \frac{dv_3}{-2v_3^2} \end{aligned}$$

Se puede ver que de la ecuación $\frac{dy}{-2yv_3} = \frac{dv_3}{-2v_3^2}$ *se concluye que*

$$v_3 = ay \qquad \text{con } a \text{ una constante}$$

y de la ecuación $\frac{dv_1}{2v_1v_3} = \frac{dv_3}{-2v_3^2}$ *se tiene que*

$$v_1 = \frac{c}{v_3} = \frac{c}{ay} = \frac{b}{y}$$

Además la ecuación $\frac{dx}{-2xv_3-2yv_1} = \frac{dy}{-2yv_3}$ *es equivalente a*

$$\frac{ydx}{-2yxv_3 - 2y^2v_1} = \frac{xdy}{-2xyv_3} = \frac{xdy - ydx}{y^2v_1} = -\frac{1}{v_1}d\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1.4.30)$$

y por otro lado la ecuación $\frac{dv_1}{2v_1v_2} = \frac{dv_2}{2v_2v_3+v_1^2}$ *es equivalente a*

$$\frac{v_2dv_1}{2v_1v_2v_3} = \frac{v_1dv_2}{2v_1v_2v_3 + v_1^2} = \frac{v_1dv_2 - v_2dv_1}{v_1^3} = \frac{1}{v_1}d\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad (1.4.31)$$

De esta forma usando las ecuaciones 1.4.30 y 1.4.31 resulta

$$-\frac{1}{v_1}d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{v_1}d\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

que equivale a

$$-d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

lo cual implica que

$$-\frac{x}{y} = \frac{v_2}{v_1}$$

y por lo tanto se tiene que

$$v_2 = -\frac{bx}{y^2}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} dv &= v_1dx + v_2dy + v_3dz \\ &= \frac{b}{y}dx - \frac{bx}{y^2}dy + aydz \end{aligned}$$

que no es una diferencial exacta, ya que

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = a, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

Método de Jacobi para ecuaciones cuasilineales

Como se mencionó con anterioridad, las ecuaciones cuasilineales pueden considerarse como una forma particular de una ecuación no lineal, por lo que en este caso, el método de Jacobi se reduce al método de Lagrange. A continuación se mostrará que las ecuaciones auxiliares del método de Jacobi aplicado a una EDP lineal se reducen a las ecuaciones características 1.3.11 del método de Lagrange.

Sea la EDP cuasilineal inhomogénea de dos variables independientes

$$Pp + Qq = R$$

Se puede ver que aplicando el cambio de variables requerido para el método de Jacobi, esta ecuación se transforma en la EDP cuasilineal homogénea con tres varibles independientes

$$Pv_1 + Qv_2 + Rv_3 = 0 \tag{1.4.32}$$

cuyas ecuaciones auxiliares del método de Jacobi resultan ser

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{P} &= \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dv_1}{\frac{\partial P}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x}P + \frac{\partial Q}{\partial x}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x}Q + \frac{\partial R}{\partial x}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x}R} \\
&= \frac{dv_2}{\frac{\partial P}{\partial y}v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y}P + \frac{\partial Q}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y}Q + \frac{\partial R}{\partial y}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial y}R} \\
&= \frac{dv_3}{\frac{\partial P}{\partial z}v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial z}P + \frac{\partial Q}{\partial z}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z}Q + \frac{\partial R}{\partial z}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial z}R}
\end{aligned}$$

Sin embargo estas cinco ecuaciones se reducen a

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

ya que como v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z sólamente entonces

$$\frac{dv_1}{d\mu} = \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{dy}{d\mu} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{dz}{d\mu}$$

$$\frac{dv_2}{d\mu} = \frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{dy}{d\mu} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\frac{dz}{d\mu}$$

$$\frac{dv_3}{d\mu} = \frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\frac{dy}{d\mu} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\frac{dz}{d\mu}$$

y si se retoman las ecuaciones 1.3.4 se puede ver que

$$\frac{dv_1}{d\mu} = P\frac{\partial v_1}{\partial x} + Q\frac{\partial v_1}{\partial y} + R\frac{\partial v_1}{\partial z}$$

$$\frac{dv_2}{d\mu} = P\frac{\partial v_2}{\partial x} + Q\frac{\partial v_2}{\partial y} + R\frac{\partial v_2}{\partial z}$$

$$\frac{dv_3}{d\mu} = P\frac{\partial v_3}{\partial x} + Q\frac{\partial v_3}{\partial y} + R\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

además suponiendo que las parciales cruzadas son iguales entonces se llega a que

$$\frac{dv_1}{d\mu} = P\frac{\partial v_1}{\partial x} + Q\frac{\partial v_2}{\partial x} + R\frac{\partial v_3}{\partial x}$$

$$\frac{dv_2}{d\mu} = P\frac{\partial v_1}{\partial y} + Q\frac{\partial v_2}{\partial y} + R\frac{\partial v_3}{\partial y}$$

$$\frac{dv_3}{d\mu} = P\frac{\partial v_1}{\partial z} + Q\frac{\partial v_2}{\partial z} + R\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

que es equivalente a

$$\frac{dv_1}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial x}(Pv_1 + Qv_2 + Rv_3) - v_1\frac{\partial P}{\partial x} - v_2\frac{\partial Q}{\partial x} - v_3R\frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{dv_2}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial y}(Pv_1 + Qv_2 + Rv_3) - v_1\frac{\partial P}{\partial y} - v_2\frac{\partial Q}{\partial y} - v_3R\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{dv_3}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial z}(Pv_1 + Qv_2 + Rv_3) - v_1\frac{\partial P}{\partial z} - v_2\frac{\partial Q}{\partial z} - v_3R\frac{\partial R}{\partial z}$$

y por la ecuación 1.4.32 se tiene que

$$\frac{dv_1}{d\mu} = -v_1\frac{\partial P}{\partial x} - v_2\frac{\partial Q}{\partial x} - v_3\frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{dv_2}{d\mu} = -v_1\frac{\partial P}{\partial y} - v_2\frac{\partial Q}{\partial y} - v_3\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{dv_3}{d\mu} = -v_1\frac{\partial P}{\partial z} - v_2\frac{\partial Q}{\partial z} - v_3\frac{\partial R}{\partial z}$$

de donde se concluye que

$$\begin{aligned} d\mu &= \frac{dv_1}{-v_1\frac{\partial P}{\partial x} - v_2\frac{\partial Q}{\partial x} - v_3\frac{\partial R}{\partial x}} = \frac{dv_2}{-v_1\frac{\partial P}{\partial y} - v_2\frac{\partial Q}{\partial y} - v_3\frac{\partial R}{\partial y}} \\ &= \frac{dv_3}{-v_1\frac{\partial P}{\partial z} - v_2\frac{\partial Q}{\partial z} - v_3\frac{\partial R}{\partial z}} \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

pero las ecuaciones 1.3.5 también satisfacen esta condición de ser idénticas a $d\mu$, por lo que las ecuaciones 1.4.33 resultan ser redundantes a ellas y por lo tanto no es necesario considerarlas para resolver una EDP lineal por el método de Jacobi.

1.5. Soluciones que satisfacen condiciones dadas

En esta sección se determinarán superficies solución de la EDP

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1.5.1}$$

que satisfacen alguna otra condición, como lo son el pasar a través de una curva dada o circunscribir una superficie dada. Además se mostrará una forma de hallar una integral completa a partir de otra.

1.5.1. Soluciones que pasan por una curva dada

Sea una curva C con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), y = y(t), u = u(t) \quad \text{con } t \text{ parámetro.}$$

Si existe una superficie integral de la ecuación 1.5.1 a través de la curva C, entonces ésta puede ser de tres tipos

a) Un caso particular de la integral completa

$$f(x, y, u, a, b) = 0 \tag{1.5.2}$$

obtenida al dar valores particulares de a y b.

b) Un caso particular de la integral general correspondiente a 1.5.2, es decír, la envolvente de un subsistema uniparamétrico de 1.5.2

$$f(x, y, u, a, \phi(a)) = 0$$

c) La envolvente del sistema biparamétrico 1.5.2.

Sin embargo, es poco probable que la solución sea del tipo a) o c), por lo que tratará únicamente el caso b).

Se busca una superficie solución E que sea envolvente del subsistema uniparamétrico 1.5.2 cuyos miembros también toquen la curva C.

Por esta razón, para determinar E se debe considerar el subsistema de los miembros de la familia 1.5.2 que tocan la curva C. Los puntos de intersección de la familia 1.5.2 y la curva C están determinados por la siguiente ecuación en términos del parámetro t

$$f(x(t), y(t), z(t), a, b) = 0 \tag{1.5.3}$$

y la condición de que la curva C debe tocar la superficie 1.5.2 se satisface al pedir que la ecuación 1.5.3 tenga dos raíces iguales, ya que la curva C también toca a la envolvente de esas superficies en ese mismo punto. De forma equivalente, para satisfacer esta condición se pide que la ecuación 1.5.3 y la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t), u(t), a, b) = 0$$

deben tener una raíz en común.

Ejemplo 8. *Se hallará una integral completa de la siguiente EDP y se deducirá la solución que pasa a través de la curva $x = 0$, $u^2 = 4y$*

$$(p^2 + q^2)x = pu$$

<u>Solución:</u> Se tiene que $f(x, y, u, p, q) = (p^2 + q^2)x - pu$.
Por el método de Charpit, las ecuaciones auxiliares son

$$\frac{dx}{2xp - u} = \frac{dy}{2xq} = \frac{du}{2xp^2 - up + 2xq^2} = \frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq}$$

de donde la ecuación $\frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq}$ implica que

$$p^2 + q^2 = a \qquad \text{con } a \text{ una constante}$$

Así se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (p^2 + q^2)x &= pu \\ p^2 + q^2 &= a \end{cases}$$

de donde se obtiene que

$$p = \frac{ax}{u} \qquad y \qquad q = \sqrt{a - \frac{a^2x^2}{u^2}}$$

luego entonces

$$du = \frac{ax}{u}dx + \left(a - \frac{a^2x^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

que es equivalente a

$$udu - axdx = (au^2 - a^2x^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

o visto de otra forma como

$$\frac{\frac{1}{2}d(u^2 - ax^2)}{\sqrt{u^2 - ax^2}} = \sqrt{a}dy$$

que equivale a

$$d(\sqrt{u^2 - ax^2}) = \sqrt{a}dy$$

lo cual implica que

$$u^2 - ax^2 = (\sqrt{a}y + b)^2$$

Ahora, como las ecuaciones paramétricas de la curva dada son $x = 0$, $y = t^2$, $u = 2t$ *entonces la intersección de la integral completa 1.5.4 con esta curva es*

$$a^2t^4 + (2ab - 4)t^2 + b^2 = 0$$

la cual tiene raíces iguales si $(ab-2)^2 = a^2b^2$ *o equivalentemente si* $ab = 1$. *Por esto, el sistema uniparamétrico apropiado es*

$$u^2 = a^2x^2 + (ay + \frac{1}{a})^2$$

o visto de forma equivalente $a^4(x^2+y^2) + a^2(2y - u^2) + 1 = 0$; *cuya envolvente se obtiene al eliminar el parámeto "a" del sistema*

$$\begin{cases} u^2 &= a^2x^2 + (ay + \frac{1}{a})^2 \\ 0 &= 4a^3(x^2+y^2) + 2a(2y - u^2) \end{cases}$$

lo cual implica que $a^2 = -\frac{2y-u^2}{2(x^2+y^2)}$ *Luego se tiene*

$$u^2 = \left[-\frac{2y-u^2}{2(x^2+y^2)}\right](x^2+y^2) + 2y - \frac{2(x^2+y^2)}{2y-u^2}$$

que es equivalente a

$$2(x^2+y^2)u^2 = -2y(x^2+y^2)+u^2(x^2+y^2)+4y(x^2+y^2)-\frac{4(x^2+y^2)^2}{2y-u^2}$$

Por lo tanto $4(x^2+y^2) = 2y - z^2$ *es la solución del problema. Ver Figura 1.3*

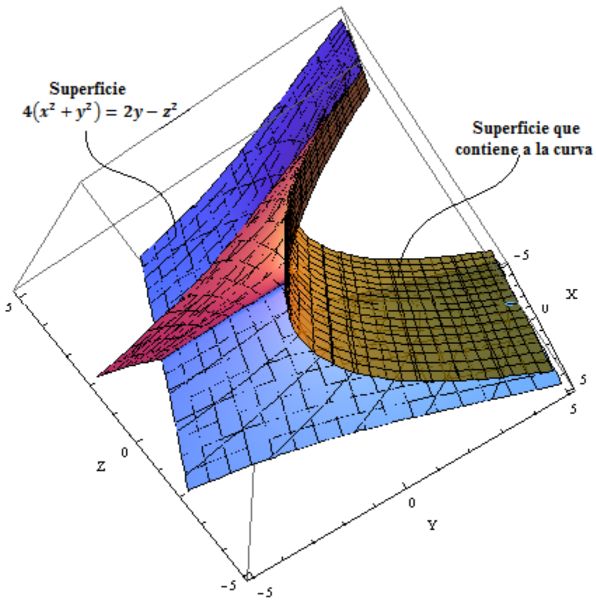

Figura 1.3: Superficie solución que pasa por la curva dada

1.5.2. Solución completa a partir de otra solución completa usando curvas

El resultado de hallar una solución de una EDP que pase por una curva es usado para hallar una solución completa de una EDP a partir de otra solución completa.

Se supondrá que dada una EDP de la forma $F(x, y, u, p, q) = 0$ se conoce una de sus soluciones completas de la forma

$$f(x, y, u, a, b) = 0 \tag{1.5.4}$$

y se busca hallar otra solución completa $g(x, y, u, h, k) = 0$ con h, k constantes.

Para esto se requiere dar una curva Γ en forma paramétrica por la que se quiere que pase la solución, tal que en ella aparezcan las dos constantes arbitrarias h, k como parámetros independientes; y después se halla la ecuación de la envolvente del subsistema uniparamétrico de 1.5.4 donde cada miembro toca esta curva Γ.

Ejemplo 9. *Dada la EDP $xpq + yq^2 = 1$ y una de sus integrales completas $(z+b)^2 = 4(ax+y)$, se deducirá otra integral completa que pase por la curva con ecuaciones paramétricas $y = 0$, $x = k(z + h)$.*
Solución: Se puede notar que la intersección de la integral completa ya dada y la curva es

$$(z + b)^2 - 4ak(z + b) + 4ak(b - h) = 0$$

la cual es una ecuación cuadrática que tiene raíces iguales si

$$16a^2k^2 - 16ak(b - h) = 0$$

esto es, si $ak = 0$ o $b = h + ak$.
Si se considerase $ak = 0$ entonces se tendría $(z + b)^2 = 0$ y su envolvente no dependería de h y k. Por lo tanto se puede hacer $b = h + ak$, con lo que se obtiene

$$(u + h + ak)^2 = 4(ax + y)$$

cuya envolvente es $(k(u + h) - 2x)^2 = ((u + h)^2 - 4y)k^2$
Por lo tanto $kx(u + h) = k^2y + x^2$ es una solución completa de la EDP que pasa por la curva dada.

Capítulo 2

Soluciones Completas

En el capítulo anterior se mencionaron métodos para hallar soluciones completas de una EDP de primer orden, sin embargo, estos procesos pueden tornarse difíciles al momento de combinar las ecuaciones auxiliares; por lo que podría pensarse que todas las soluciones completas de la EDP pertenecen a las familias de superficies encontradas, lo cual es erróneo. Es posible hallar una infinidad de soluciones completas de una EDP que pertenezcan a distintas familias de superficies.

En la sección 1.5.2 se introdujo una forma de hallar una solución completa de una EDP a partir de otra ya conocida, sin embargo, este método no se puede aplicar considerando cualquier curva, ya que se puede llegar a proponer curvas que no intersecten a ninguna superficie solución de la EDP en ningún punto.

Debido a las dificultades que presentan estos métodos para hallar otras soluciones completas de las EDP, surge la necesidad de establecer otras formas de abordar este problema.

Un método para hallar otra solución completa a partir de una conocida $f(x, y, u, a, b)$, donde a y b son constantes arbitrarias, es considerar a b como una función de a donde se involucre también otras dos constantes arbitrarias, digamos c y d; tal que ahora se tenga una expresión de la forma $f(x, y, u, a, b(a, c, d))$.

Con esta redefinición de b, la solución f ya no es una solución completa de la EDP en cuestión, ya que involucra tres parámetros arbitrarios, por lo que es necesario eliminar un parámetro, digamos a. Esto se logra mediante la obtención de una expresión para este parámetro en función de x, y, c y d, a partir de la derivada parcial de $f(x, y, u, a, b(a, c, d))$ con respecto de a; y posteriormente sustituyéndola en $f(x, y, u, a, b(a, c, d))$.

Ejemplo 10. *Retomando la EDP del ejemplo 6, $p^2 + qy - z = 0$ y una de sus soluciones completas*

$$v(x, y, a, b, z) = ax + \ln y - \frac{\ln z}{2} + \sqrt{1 + 4za^2} + \ln\left(\frac{2az^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + 4za^2} + 1}\right) + \frac{b}{2}$$

se hallará otra solución completa para esta EDP definiendose $b = ac - d$.

<u>*Solución:*</u> *Con base en los requisitos se tiene la expresión*

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a, c, d) &= ax + \ln(y) - \frac{\ln(z)}{2} + \sqrt{1 + 4za^2} \\ &+ \ln\left(\frac{2a\sqrt{z}}{\sqrt{1 + 4za^2} + 1}\right) + \frac{ac - d}{2} \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

De donde se obtiene que

$$\frac{\partial z}{\partial a} = x + \frac{4za}{\sqrt{1 + 4za^2}} + \frac{1}{a} - \frac{4za}{(\sqrt{1 + 4za^2})(\sqrt{1 + 4za^2} + 1)} + \frac{c}{2}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial a} = 0$ si y sólo si

$$\frac{4za}{\sqrt{1 + 4za^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4za^2} + 1}\right) + \frac{1}{a} = -\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

o de forma equivalente

$$\frac{4za}{\sqrt{1 + 4za^2} + 1} + \frac{1}{a} = -\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

de donde se tiene

$$a^2 = \frac{1}{(x + c/2)^2 - 4z}$$

Luego, sustituyendo $a = -\frac{1}{\sqrt{(x+c/2)^2 - 4z}}$ en la ecuación 2.0.1 y haciendo la simplificación, se tiene que otra solución completa de la

EDP es

$$\widetilde{u} = \log(y) - \frac{\log(z)}{2} + \log\left(-\frac{2\sqrt{z}}{x + c/2 + \sqrt{(x+c/2)^2 - 4z}}\right) - \frac{d}{2}$$

Cabe mencionar que para obtener otra solución completa de la EDP no importa el parámetro que se elija a eliminar, sin embargo, si se desea que la nueva solución pertenezca a otra familia de superficies es necesario eliminar el "viejo" parámetro, es decir, el que aparece en la solución completa original.

2.1. Relación entre soluciones completas de una EDP

El método de la sección anterior hace ver que existe una relación entre las soluciones completas de una EDP, la cual parece depender de los parámetros arbitrarios de las soluciones. Éste es precisamente el trabajo desarrollado en esta tesis, basado en el artículo [10], donde se retomará el método de Jacobi, expuesto en la sección 1.4.4, mediante el cual una EDP con n variables independientes se expresa de forma equivalente como

$$F(x_1, ..., x_n, z, v_1, ..., v_n, v_{n+1}) = 0 \tag{2.1.1}$$

donde v es considerada una solución completa de la EDP original dada de forma implícita, $v_i = \partial v/\partial x_i$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y $v_{n+1} = \frac{\partial v}{\partial z}$. Cabe recordar que una solución completa de esta EDP es una función de $2n + 2$ variables, por lo que una solución completa de la EDP original es una función de $2n + 1$ variables $v(x_1, ..., x_n, P_1, ..., P_n, z)$, donde P_i son las constantes arbitrarias y z la variable dependiente.

Para el desarrollo de este trabajo es importante suponer que se conoce una solución completa de la EDP original, dada de la forma

$$v(x_1, ..., x_n, P_1, ..., P_n, z)$$

tal que cumpla con la condición de que

$$\det\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial P_j}\right) \neq 0 \tag{2.1.2}$$

ya que esto permite garantizar poder expresar a las constantes arbitrarias P_i únicamente en función de las variables x_i y z, o a la variables x_i en función de z y las constantes P_i.

Ahora, si en la EDP 2.1.1 se despeja la variable $v_{n+1} = \partial v/\partial z$, entonces ésta se puede expresar como

$$G(x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n, z) + v_{n+1} = 0 \tag{2.1.3}$$

lo cual permite escribir el diferencial de la solución completa v como

$$dv = \sum_{i=1}^{n} (p_i(x_j, P_j, z)dx_i + Q_i(x_j, P_j, z)dP_i) - G(x_i, p_i(x_j, P_j, z), z)dz \tag{2.1.4}$$

donde p_i y Q_i son funciones de x_j, P_j y z definidas como

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial v}{\partial P_i} \tag{2.1.5}$$

De forma análoga, si se supone que $\widetilde{v}(x_1, ..., x_n, \widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n, z)$ es otra solución completa de la EDP 2.1.1 tal que se satisface la ecuación 2.1.2, entonces el diferencial total de $\widetilde{v}$ es expresado como

$$d\widetilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{p}_i(x_j, \widetilde{P}_j, z)dx_i + \widetilde{Q}_i(x_j, \widetilde{P}_j, z)d\widetilde{P}_i\right) - \widetilde{G}(x_i, \widetilde{p}_i(x_j, \widetilde{P}_j, z), z)dz \tag{2.1.6}$$

donde $\widetilde{p}_i$ y $\widetilde{Q}_i$ son funciones de x_i, $\widetilde{P}_i$ y z definidas como

$$\widetilde{p}_i = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i}, \qquad \widetilde{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \widetilde{P}_i} \tag{2.1.7}$$

Luego, como v y $\widetilde{v}$ son soluciones completas de la EDP 2.1.1, entonces v_i es equivalente a $\widetilde{v}_i$ para toda $i \in \{1, ..., n+1\}$; por lo que al restar las ecuaciones 2.1.4 y 2.1.6 se tiene que

$$d(\widetilde{v}-v)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i d\widetilde{P}_i-\sum_{i=1}^{n}Q_i dP_i \tag{2.1.8}$$

Por otro lado, si se toma en cuenta a la función $\widetilde{v}-v$ que depende de x_i, P_i, $\widetilde{P}_i$ y z, se tiene que su diferencial total es

$$\begin{aligned} d(\widetilde{v}-v) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial P_i}dP_i+\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i\right] \\ &+ \frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial z}dz \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x_i}dx_i-\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial P_i}dP_i-\frac{\partial v}{\partial P_i}dP_i+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i-\frac{\partial v}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i\right] \\ &+ \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial z}dz-\frac{\partial v}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

donde $\partial\widetilde{v}/\partial P_i=0$, $\partial v/\partial\widetilde{P}_i=0$ ya que $\widetilde{v}$ no depende de P_i y v no depende de $\widetilde{P}_i$.

De esta forma, como las ecuaciones 2.1.8 y 2.1.9 deben ser iguales entonces se tiene que satisfacer que

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x_i}dx_i-\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial z}dz-\frac{\partial v}{\partial z}dz=0$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial z}dz=0$$

pero como v_i es equivalente a $\widetilde{v}_i$ para toda $i\in\{1,...,n\}$ entonces se debe cumplir que

$$\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial x_i}=0 \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial z}=0 \tag{2.1.11}$$

La ecuación 2.1.11 se satisface automáticamente ya que v y $\widetilde{v}$ son soluciones de la EDP, pero por otro lado, las ecuaciones de 2.1.10 constituyen un sistema de n ecuaciones que, bajo la condición de que v y $\widetilde{v}$ satisfacen 2.1.2, determinan a las x_i como funciones de P_i, $\widetilde{P}_i$ y z para toda $i\in\{1,...,n\}$.

Ahora, si se retoma la ecuación 2.1.8 se tiene que al integrarla resulta la ecuación

$$\widetilde{v} - v = F(x_i, P_i, \widetilde{P}_i, z) \tag{2.1.12}$$

pero si en la función F se sustituyen las expresiones para x_i provenientes del sistema 2.1.10, se puede notar que ésta únicamente depende de los parámetros P_i y $\widetilde{P}_i$ ya que la variable z desaparece automáticamente por pertenecer a las soluciones v, $\widetilde{v}$. Cabe recalcar que los parámetros P_i y $\widetilde{P}_i$ deben ser funcionalmente independientes entre sí para poder hallar la función $F(P_i, \widetilde{P}_i)$ que relaciona a las dos soluciones completas v y $\widetilde{v}$; de lo contrario, se estaría tratando con soluciones equivalentes.

Ejemplo 11. *Sea la EDP*

$$p^2 + qy - z = 0$$

misma que se trabajó en el Ejemplo 6 donde por el método de Jacobi se halló que una de sus soluciones completas es

$$v = ax + b\ln y + \sqrt{b^2 + 4az^2} - b\ln\left(\sqrt{b^2 + 4az^2} + b\right) \tag{2.1.13}$$

Si nuevamente se consideran las ecuaciones auxiliares para hallar otra solución completa tenemos que de la ecuación $\frac{dy}{-\widetilde{v}_3 y} = \frac{d\widetilde{v}_3}{\widetilde{v}_3^2}$ *se tiene que*

$$\widetilde{v}_3 = \frac{c}{y} \qquad \text{con } c \text{ una constante}$$

Por otro lado, se tiene de forma directa que $\widetilde{v}_1 = k$ *con* k *una constante arbitraria.*

Así al sustituir $\widetilde{v}_1$ *y* $\widetilde{v}_3$ *en la ecuación 1.4.26 resulta*

$$k^2 - \widetilde{v}_2\left(\frac{c}{y}\right)y - \frac{c^2 z}{y^2} = 0$$

lo cual implica que

$$\widetilde{v}_2 = \frac{k^2}{c} - \frac{cz}{y^2}$$

Luego entonces se tiene

$$\begin{aligned} d\widetilde{v} &= \widetilde{v}_1 dx + \widetilde{v}_2 dy + \widetilde{v}_3 dz \\ &= kdx + \left(\frac{k^2}{c} - \frac{cz}{y^2}\right) dy + \frac{c}{y} dz \\ &= kdx + \frac{k^2}{c} dy + cd(\frac{z}{y}) \end{aligned}$$

con lo que se implica que

$$\widetilde{v} = kx + \frac{k^2 y}{c} + \frac{cz}{y} + d$$

Por lo tanto si $d = 0$, entonces otra solución completa de la EDP 1.4.25 es

$$\widetilde{v} = kx + \frac{k^2 y}{c} + \frac{cz}{y} \tag{2.1.14}$$

Ahora, como las soluciones 2.1.13 y 2.1.14 son completas en el sentido de que satisfacen 2.1.2, entonces es posible hallar la función dependiente de los parámetros a, b, k y c que las relaciona.
Sea

$$\widetilde{v} - v = kx + \frac{k^2 y}{c} + \frac{cz}{y} - ax - b\ln(y) - \sqrt{b^2 + 4az^2} + b\ln\left(\sqrt{b^2 + 4az^2} + b\right) \tag{2.1.15}$$

de donde el sistema de ecuaciones a resolver para x, y en función de z, a, b, c, k

$$\begin{cases} \frac{\partial(\widetilde{v} - v)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\widetilde{v} - v)}{\partial y} &= 0 \end{cases} \tag{2.1.16}$$

resulta ser

$$\begin{cases} k - a &= 0 \\ \frac{k^2}{c} - \frac{cz}{y^2} - \frac{b}{y} &= 0 \end{cases} \tag{2.1.17}$$

De aquí se obtiene que $k = a$ y al sustituir esto en la segunda ecuación del sistema se llega a que

$$y = \frac{bc + c\sqrt{b^2 + 4a^2 z}}{2a^2}$$

Con lo que al sustituir estos valores en la ecuación 2.1.15 se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{v} - v &= \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2+4a^2z}}{2} + \frac{2a^2z}{b+\sqrt{b^2+4a^2z}} - b\ln\left(\frac{c(b+\sqrt{b^2+4za^2})}{2a}\right)\\ &+ b\ln\left(b+\sqrt{b^2+4za^2}\right)\\ &= -b\ln\left(\frac{c}{2a}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto la función que relaciona a las soluciones completas $\widetilde{v}$ *y* v *es*

$$F(a,b,c,k) = -b\ln\left(\frac{c}{2a}\right)$$

pero como $a = k$*, por la primer ecuación del sistema 2.1.17, la función es equivalente a*

$$F(a,b,c,k) = -b\ln\left(\frac{c}{a+k}\right)$$

En este ejemplo cabe mencionar que la primer función obtenida F únicamente depende de tres parámetros ya que a y k no son funcionalmente independientes, como lo muestra la primer ecuación del sistema 2.1.17.

Ejemplo 12.

Este es un ejemplo que permite ver que si los parámetros de dos soluciones completas no son funcionalmente independientes, no es posible hallar una función F *que las relacione. La dependencia funcional de los parámetros se dará mediante la obtención de la otra solución completa por medio del método de la sección anterior de este capítulo.*

Sea la EDP

$$zpq = p + q \tag{2.1.18}$$

que por el método de Jacobi es equivalente a

$$zv_1v_2 + v_3v_1 + v_3v_2 = 0$$

y las ecuaciones auxiliares son

$$\frac{dx}{zv_2 + v_3} = \frac{dy}{zv_1 + v_3} = \frac{dz}{v_1 + v_2} = \frac{dv_1}{0} = \frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{v_1 v_2}$$

de donde se obtiene que $v_1 = a$ *y* $v_2 = b$ *donde* a *y* b *son constantes arbitrarias.*
Luego, de la ecuación $\frac{dz}{v_1+v_2} = \frac{v_3}{v_1 v_2}$ *se tiene que*

$$v_3 = \frac{abz}{a+b} \tag{2.1.19}$$

Así

$$\begin{aligned} dv &= v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz \\ &= adx + bdy + \frac{abz}{a+b} dz \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$v = ax + by + \frac{abz^2}{2(a+b)} + c$$

Por lo tanto, si $c = 0$ *entonces una solución completa de la EDP 2.1.18 es*

$$v = ax + by + \frac{abz^2}{2(a+b)} \tag{2.1.20}$$

Ahora, para hallar otra solución completa de la EDP 2.1.18, defínase $b = ac - d$ *donde* c *y* d *son otras constantes arbitrarias, con lo que se tiene*

$$\widehat{v} = ax + (ac-d)y - \frac{a(ac-d)z^2}{2(a+ac-d)} \tag{2.1.21}$$

que no es una solución completa de la EDP 2.1.18, ya que posee tres constantes arbitrarias.
Luego, partiendo de la ecuación $\frac{\partial \widehat{v}}{\partial a} = 0$ *se busca expresar a la constante "a" en función de* x, y, z, c *y* d *para así poder eliminarla de la ecuación anterior.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial a} &= x + cy - \frac{2(2z^2ac - z^2d)(a+ac-d) - 2(1+c)(z^2a(ac-d))}{4(a(1+c)-d)^2} \\ &= x + cy - \frac{z^2(a^2c + a^2c^2 - 2acd + d^2)}{2(a(1+c)-d^2)} \end{aligned}$$

Luego entonces $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} = 0$ *si y sólo si*

$$x + cy - \frac{z^2(a^2c + a^2c^2 - 2acd + d^2)}{2(a(1+c) - d^2)} = 0$$

es decir

$$a = \frac{d}{1+c} - \frac{zd}{(1+c)\sqrt{2(1+c)(x+cy) - cz^2}}$$

Así, sustituyendo "a" en la ecuación 2.1.21 se tiene que otra solución completa de la EDP 2.1.18 es

$$\widetilde{v} = \frac{(x-y)d}{1+c} - \frac{zd}{(1+c)^2}\left(\sqrt{2(1+c)(x+cy) - cz^2} + \frac{z(c-1)}{2}\right) \tag{2.1.22}$$

Podría pensarse que como las soluciones 2.1.20 y 2.1.21 son completas en el sentido de que satisfacen 2.1.2, entonces podría hallarse una función dependiente de los parámetros arbitrarios que las relacione, sin embargo, el sistema de ecuaciones 2.1.10 correspondiente a estas soluciones completas es indeterminado para x, y, *por la forma como se contruyó la segunda solución completa.*

2.2. Obtención de otra solución completa

Retomando la ecuación 2.1.12 de la sección anterior, se puede ver que mediante un despeje se obtiene la ecuación

$$\widetilde{v}(x_i, \widetilde{P}_i, z) = v(x_i, P_i, z) + F(P_i, \widetilde{P}_i) \tag{2.2.1}$$

lo cual parece indicar otra forma de hallar una nueva solución completa de la EDP, sin embargo en esta expresión $\widetilde{v}$ también depende de P_i, es decir, posee más de n constantes arbitrarias, lo cual no la hace una solución completa. Pero se puede notar que al diferenciar esta ecuación, del lado izquierdo de la igualdad resulta

$$d\widetilde{v} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i\right] + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z}dz \tag{2.2.2}$$

y del lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned} d(v+F) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial v}{\partial P_i}dP_i + \frac{\partial F}{\partial P_i}dP_i + \frac{\partial v}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i\right) \\ &+ \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial z}dz \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial (v+F)}{\partial P_i}dP_i + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{P}_i}d\widetilde{P}_i\right) + \frac{\partial v}{\partial z}dz \qquad (2.2.3) \end{aligned}$$

por lo tanto, para tener la igualdar de las ecuaciones 2.2.2 y 2.2.3 es necesario que

$$\frac{\partial (v+F)}{\partial P_i} = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \qquad (2.2.4)$$

ya que los otros términos mantienen la relación automáticamente por ser v y $\widetilde{v}$ soluciones completas de la misma EDP y por la definición de $\widetilde{v}$ en la ecuación 2.2.1.

De esta forma, para que $\widetilde{v}$, definida como en 2.2.1, sea solución completa de la EDP es necesario resolver el sistema de n ecuaciones 2.2.4 para P_i en función de x_i, $\widetilde{P}_i$, z y sustituir estas expresiones en la ecuación 2.2.1.

Cabe recalcar que por el sistema de ecuaciones 2.2.4, $\widetilde{v}(x_i, \widetilde{P}_i, z) = 0$ es la envolvente de la familia de superficies $v(x_i, P_i, z) + F(P_i, \widetilde{P}_i) = 0$, parametrizada por las P_i. Además otro detalle importante que es necesario remarcar es que si el número de parámetros $\widetilde{P}_i$ contenidos en F es menor que n, entonces la función $\widetilde{v}$ obtenida en términos de las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.4, no será una solución completa pero sí una solución de la EDP, ya que se puede pensar que las constantes arbitrarias faltantes han tomado ciertos valores fijos.[10]

Ejemplo 13. *Considerando la EDP 1.4.25 del ejemplo 6 y su solución obtenida por el método de Jacobi, se buscará hallar otra solución completa $\widetilde{v}$ para la EDP mediante la suma de una función F a la primer solución.*
Sea

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = v(x, y, a, c, z) + F(a, c, \widetilde{a}, \widetilde{b})$$

tal que $F(a,c,\widetilde{a},\widetilde{b}) = \ln(a\widetilde{a}) + c^2\widetilde{b}$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}(x,y,\widetilde{a},\widetilde{b},z) &= ax + \ln y - \frac{\ln z}{2} + \sqrt{1+4za^2} + \ln\left(\frac{2az^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4za^2}+1}\right) \\
&+ \frac{c}{2} + \ln(a\widetilde{a}) + c^2\widetilde{b}
\end{aligned}$$

Luego, se busca resolver el siguiente sistema de ecuaciones para "a" y "c"

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial c} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} &= x + \frac{4az}{\sqrt{1+4a^2z}} + \frac{\sqrt{1+4a^2z}+1}{2az^{1/2}}\left(\frac{2z^{1/2}(\sqrt{1+4a^2z}+1) - 2az^{1/2}\left(\frac{4az}{\sqrt{1+4a^2z}}\right)}{(\sqrt{1+4a^2z}+1)^2}\right) + \frac{1}{a} \\
&= x + \frac{4az}{\sqrt{1+4a^2z}} + \frac{\sqrt{1+4a^2z}+1-\frac{4a^2z}{\sqrt{1+4a^2z}}}{a(\sqrt{1+4a^2z}+1)} + \frac{1}{a} \\
&= x + \frac{4az}{\sqrt{1+4a^2z}} + \frac{1}{a\sqrt{1+4a^2z}} + \frac{1}{a} \\
&= x + \frac{\sqrt{1+4a^2z}}{a} + \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} = 0$ *si y sólo si*

$$x + \frac{\sqrt{1+4a^2z}}{a} + \frac{1}{a} = 0$$

es decir

$$a = \frac{2x}{4z - x^2}$$

Por otro lado $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial c} = 0$ *si y sólo si*

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial c} = \frac{1}{2} + 2c\widetilde{b}$$

lo cual implica que $c = -\frac{1}{4\widetilde{b}}$*. Por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\widetilde{v} &= \frac{2x^2}{4z-x^2} + \ln y - \frac{\ln z}{2} + \frac{\sqrt{(4z-x^2)^2 - 16x^2z}}{4z-x^2} \\
&+ \ln\left(\frac{4xz^{1/2}}{\sqrt{(4z-x^2)^2-16x^2z} + 4z - x^2}\right) + \ln\left(\frac{2x\widetilde{a}}{4z-x^2}\right) - \frac{1}{16\widetilde{b}}
\end{aligned}$$

es otra solución completa de la EDP 1.4.25.

Ejemplo 14. *Sea la EDP*

$$pq - z^2 = 0 \tag{2.2.5}$$

que por el método de Jacobi resulta ser equivalente a la EDP

$$v_1v_2 - v_3^2z^2 = 0 \tag{2.2.6}$$

Las ecuaciones auxiliares que permiten hallar soluciones completas de esta EDP son

$$\frac{dx}{v_2} = \frac{dy}{v_1} = \frac{dz}{-2v_3z^2} = \frac{dv_1}{0} = \frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{2v_3^2z}$$

De donde se puede concluir que

$v_1 = a$ *con* a *una constante arbitraria*

$v_2 = b$ *con* b *una constante arbitraria*

Así, al sustituir estos valores en la ecuación 2.2.6 se tiene que

$$ab - v_3^2z^2 = 0 \Leftrightarrow v_3 = \frac{\sqrt{ab}}{z}$$

y por lo tanto

$$dv = adx + bdy + \frac{\sqrt{ab}}{z}dz$$

lo cual implica que $v = ax + by + \sqrt{ab}\ln z + c$ *es solución completa de la EDP 2.2.6. Pero si se considera* $c = 0$, *entonces una solución completa para la EDP 2.2.5 es*

$$v = ax + by + \sqrt{ab}\ln z$$

Ahora se hallará otra solución completa para la EDP 2.2.5 mediante la ecuación

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = v(x, y, a, b, z) + F(a, b, \widetilde{a}, \widetilde{b})$$

donde $F(a,b,\widetilde{a},\widetilde{b}) = \widetilde{a}\sqrt{a} + \widetilde{b}\sqrt{b}$, *entonces*

$$\widetilde{v}(x,y,\widetilde{a},\widetilde{b},z) = ax + by + \sqrt{ab}\ln z + \widetilde{a}\sqrt{a} + \widetilde{b}\sqrt{b} \tag{2.2.7}$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} = x + \frac{\sqrt{b}\ln z}{2\sqrt{a}} + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}, \qquad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial b} = y + \frac{\sqrt{a}\ln z}{2\sqrt{b}} + \frac{\widetilde{b}}{2\sqrt{b}}$$

Entonces se busca resolver el siguiente sistema de ecuaciones para a y b

$$\begin{cases} x + \frac{\sqrt{b}\ln z}{2\sqrt{a}} + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}} &= 0 \\ y + \frac{\sqrt{a}\ln z}{2\sqrt{b}} + \frac{\widetilde{b}}{2\sqrt{b}} &= 0 \end{cases}$$

Se puede ver que

$$\frac{\sqrt{b}\ln z}{2\sqrt{a}} = -\left(x + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}\right) \Rightarrow \sqrt{b} = -\frac{2\sqrt{a}\left(x + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}\right)}{\ln z}$$

Así

$$y - \frac{(\ln z)^2}{4\left(x + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}\right)} - \frac{\widetilde{b}\ln z}{4\sqrt{a}\left(x + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}\right)} = 0$$

lo cual implica que

$$y - \left(\frac{\sqrt{a}(\ln z)^2 + \widetilde{b}\ln z}{4\sqrt{a}\left(x + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}}\right)}\right) = 0$$

que a su vez implica que

$$\sqrt{a}\left((\ln z)^2 - 4yx\right) = 2y\widetilde{a} - \widetilde{b}\ln z$$

de donde se concluye que

$$a = \left(\frac{2y\widetilde{a} - \widetilde{b}\ln z}{(\ln z)^2 - 4yx}\right)^2$$

Por otro lado la ecuación

$$x + \frac{\sqrt{b}\ln z}{2\sqrt{a}} + \frac{\widetilde{a}}{2\sqrt{a}} = 0$$

implica que

$$\sqrt{b} = -\frac{2x\widetilde{b}\ln z + \widetilde{a}(\ln z)^2}{\ln(z)\left[(\ln z)^2 + 4yx\right]}$$

y por lo tanto

$$b = \left(\frac{2x\widetilde{b} - \widetilde{a}\ln z}{(\ln z)^2 - 4yx}\right)^2$$

De esta forma, al sustituir a y b en la ecuación 2.2.7 y simplificar, se tiene que otra solución completa para la EDP 2.2.5 es

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = \frac{x\widetilde{b}^2 + y\widetilde{a}^2 - \widetilde{a}\widetilde{b}\ln z}{(\ln z)^2 - 4xy}$$

Un aspecto importante que se debe recalcar es que, para obtener otra solución completa a partir de la suma de una función dependiente de los parámetros y de una solución completa conocida, es necesario que ésta satisfaga la ecuación 2.1.2, ya que de no hacerlo la expresión que se obtenga será solución de la EDP pero no será una solución completa. Un ejemplo de esto es desarrollado a continuación.

Ejemplo 15. *Sea la EDP*

$$p^2 - 3q^2 - z = 0 \tag{2.2.8}$$

que por el método de Jacobi resulta ser equivalente a la EDP

$$v_1^2 - 3v_2^2 - v_3^2 z = 0 \tag{2.2.9}$$

Las ecuaciones auxiliares que permiten hallar una solución completa de esta EDP son

$$\frac{dx}{2v_1} = \frac{dy}{-6v_2} = \frac{dz}{-2v_3 z} = \frac{dv_1}{0} = \frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{v_3^2}$$

De donde se concluye que

$$v_1 = a \qquad \textit{con } a \textit{ una constante arbitraria}$$

$$v_2 = b \qquad \textit{con } b \textit{ una constante arbitraria}$$

Así, al sustituir estas expresiones en la ecuación 2.2.9 se tiene

$$a^2 - 3b^2 - v_3^2 z = 0$$

de donde se obtiene $v_3 = \sqrt{\frac{a^2-3b^2}{z}}$ *y por lo tanto*

$$dv = adx + bdy + \sqrt{\frac{a^2-3b^2}{z}}dz$$

lo cual implica que

$$v = ax + by + 2\sqrt{a^2-3b^2}\sqrt{z} + c \tag{2.2.10}$$

Esta última es una solución completa de la EDP 2.2.9 y si, por ejemplo, $b = 1$ *entonces se tiene que*

$$v = ax + y + 2\sqrt{z(a^2-3)} + c$$

es una solución completa de la EDP 2.2.8, sin embargo no es completa en el sentido de satisfacer 2.1.2.
Ahora, omitiendo que la solución no satisface 2.1.2 se buscará hallar otra solución mediante la expresión

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = v(x, y, a, c, z) + F(a, c, \widetilde{a}, \widetilde{b})$$

donde $F(a, c, \widetilde{a}, \widetilde{b}) = ac + \widetilde{a}\widetilde{b}$, *entonces*

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = ax + y + 2\sqrt{z(a^2-3)} + c + ac + \widetilde{a}\widetilde{b}$$

Ahora $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial a} = 0$ *si y sólo si*

$$x + \frac{2za}{\sqrt{z(a^2-3)}} + c = 0$$

Por otro lado $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial c} = 0$ *si y sólo si* $a = -1$, *y por lo tanto*

$$c = \frac{2z}{\sqrt{-2z}} - x$$

Así sustituyendo "a" y "c" se tiene que

$$\widetilde{v}(x, y, \widetilde{a}, \widetilde{b}, z) = -x + y + 2\sqrt{-2z} + \widetilde{ab}$$

es otra solución de la EDP 2.2.8, sin embargo ésta no es una solución completa ya que aunque parece depender de dos constantes arbitrarias $\widetilde{a}$ *y* $\widetilde{b}$*, estas aparecen solamente en la combinación "ab", y no de forma separada.*

De esta forma los resultados de este capítulo se pueden resumir de la siguiente manera.

- Sea una EDP $F(x_1, ..., x_n, z, p_1, ..., p_n) = 0$ tal que dos de sus soluciones completas $v(x_i, P_i, z)$ y $\widetilde{v}(x_i, \widetilde{P}_i, z)$ son conocidas y satisfacen det $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial P_j}\right) \neq 0$. Entonces el sistema de n ecuaciones

$$\frac{\partial(\widetilde{v} - v)}{\partial x_i} = 0$$

  tiene solución y existe $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{v} - v = F(P_i, \widetilde{P}_i)$$

- Sea una EDP $F(x_1, ..., x_n, z, p_1, ..., p_n) = 0$ cuya solución completa $v(x_i, P_i, z)$ es conocida tal que det $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial P_j}\right) \neq 0$. Dada cualquier función $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, el sistema de n ecuaciones

$$\frac{\partial(v + F)}{\partial P_i} = 0$$

  tiene solución y

$$\widetilde{v}(x_i, \widetilde{P}_i, z) := v(x_i, P_i, z) + F(P_i, \widetilde{P}_i)$$

  es solución completa de la EDP.

Capítulo 3

Ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi es una EDP de primer orden que puede considerarse como la ecuación de esta clase más importante de la física-matemática, debido a que permiten simplificar las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton para hallar las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, entre otras aplicaciones en la física. [8]

Esta EDP se obtiene usualmente mediante transformaciones canónicas y tiene sus orígenes en el cálculo variacional, que es un área de las matemáticas que permite estudiar métodos para hallar valores máximos y mínimos de funcionales, que en términos generales son funciones cuyo dominio es un conjunto de funciones y su codominio el conjunto de los números reales

$$v : A \to \mathbb{R}$$

$$v = v[y(x)] \qquad y(x) \in A$$

Ejemplos de funcionales son la longitud de arco de una cruva plana y los momentos de inercia.

Para comenzar con el estudio de los funcionales, es necesario introducir una definición básica dentro del cálculo variacional que es la de incremento o variación del argumento $y(x)$ de un funcional v, definido como la diferencia entre dos funciones y es denotado por δy:

$$\delta y = y(x) - y_1(x) \text{ con } y(x),\, y_1(x) \in A$$

De esta forma se define el incremento de un funcional como

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

y por consiguiente la variación del funcional v es la derivada con respecto de α del funcional $v[y(x) + \alpha\delta y]$ evaluada en $\alpha = 0$.[5]

Para el desarrollo de esta sección se trabajará con funcionales de la forma

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

donde x_0, x_1 son los extremos de las curva y y se supondrá que en la curva $y^* = y^*(x)$, que es dos veces derivable, se tiene un extremo; además se considerará una cierta curva $y = \overline{y}(x) \in A$ cercana a y^*, es decír, tal que la norma entre y y y^* es menor que un $\varepsilon > 0$ dado.[5]

Como la variación $\delta y = \overline{y}(x) - y^*(x)$ es una función de x entonces es posible derivarla obteniendo que $(\delta y)' = \overline{y}' - y^{*'}(x) = \delta y'$, es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada; y análogamente para derivadas de mayor orden.[5]

De este modo si se considera únicamente a la familia de curvas $y = y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, que para $\alpha = 0$ contiene a la curva en la cual se alcanza el extremo del funcional y para $\alpha = 1$ se alcanza la curva cercana y, llamada *curva de comparación*; entonces la funcional $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_0} F(x, y, y')dx$ se transforma en una función de α

$$\varphi(\alpha) = v[y(x, \alpha)]$$

la cual tiene un extremo en $\alpha = 0$, por lo que también se necesita que en este valor se anule su derivada donde

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x, \alpha) \right] dx \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

con

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x) + \alpha\delta y] = \delta y$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x) + \alpha\delta y'] = \delta y'$$

Entonces la condición necesaria para que la funcional tenga un extremo es la anulación de su variación, esto es

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y + F_{y'}\delta y']dx = 0$$

De aquí se nota que integrando por partes el segundo sumando y tomando en cuenta que $\delta y' = (\delta y)'$, se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' dx = 0$$

que es equivalente a

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\delta y dx + F_{y'}\delta y|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y\frac{d}{dx}F_{y'}dx = 0$$

y a su vez es equivalente a

$$F_{y'}\delta y|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0$$

Pero

$$\delta y|_{x=x_0} = \overline{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \qquad \delta y|_{x=x_1} = \overline{y}(x_1) - y(x_1) = 0$$

Por lo tanto se tiene que $\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx$

De este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0 \tag{3.0.1}$$

pero a esta ecuación es posible aplicarle el siguiente lema.[5]

Lema fundamental del cálculo variacional. *Si para cada función continua $\eta(x)$ tal que $\eta(x_0) = 0 = \eta(x_1)$, se tiene que*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0$$

siendo $\Phi(x)$ una función continua en el segmento $[x_0, x_1]$, entonces *en dicho segmento*

$$\Phi(x) \equiv 0$$

De esta forma, sabiendo que se cumplen las condiciones del lema para la ecuación 3.0.1, se tiene que la condición para que haya un extremo en la curva y es que se satisfaga la ecuación

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

que de forma desarrollada es vista como

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

la cual es conocida como la *ecuación de Euler-Lagrange*. En resumen, la condición necesaria para que la funcional v tenga un extremo, consiste en la anulación de la variación: $\delta v = 0$. [5]

Estos resultados son aplicados a sistemas mecánicos conservativos con n grados de libertad, cuyo movimiento puede ser descrito por expresiones conocidas para ciertas coordenadas generalizadas $x_1, ..., x_n$ y sus derivadas generalizadas $\dot{x_1}, ..., \dot{x_n}$ como funciones del tiempo t, que representan posibles estados del sistema. Estas expresiones están dadas por la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V del sistema, llamadas Lagrangianas del sistema

$$L(t, x_1, ..., x_n; \dot{x_1}, ..., \dot{x_n}) = T - V$$

donde t es un parámetro.[6]

De esta forma, la acción física del sistema se define como una integral de línea sobre las trayectorias de movimiento γ, cuyos extremos son t_0 y t_1; y se busca hallar la trayectoria real del sistema a partir de extremar el funcional

$$S(\gamma) = \int_{t0}^{t1} L(t, x_1, ..., x_n; \dot{x_1}, ..., \dot{x_n})dt$$

lo cual se logra anulando su variación δS mediante la resolución de las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}} = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{3.0.2}$$

Estas ecuaciones forman un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden conocidas como *ecuaciones de movimiento*, las cuales mediante una transformación de Legendre del Lagrangiano se transforman en un sistema equivalente de $2n$ ecuaciones de primer orden, llamado *sistema hamiltoniano de ecuaciones.*[6][5]

En el sistema hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento están dadas por una función H, llamada *hamiltoniano*, que en ciertos casos puede representar la energía total del sistema

$$H(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x_i} p_i - L(x_1, ..., x_n, \dot{x_1}, ..., \dot{x_n}, t) \tag{3.0.3}$$

donde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}$, lo cual nos implica que

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x_i} dp_i + \dot{p_i} d\dot{x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}} d\dot{x_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x_i} dp_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{3.0.4}$$

donde a las $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}$ usualmente se les conoce como momentos conjugados. Por otro lado el diferencial total de H es

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \tag{3.0.5}$$

Y entonces partiendo de las ecuaciones 3.0.4 y 3.0.5 y haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange 3.0.2 se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{3.0.6}$$

donde a las primeras $2n$ ecuaciones diferenciales parciales de primer orden se les conoce como *ecuaciones de Hamilton.*[1]

A pesar de que esta transformación permite trabajar con ecuaciones de primer orden, la resolución del sistema puede seguir siendo complicada por el número de ecuaciones involucradas, sin embargo, estas ecuaciones pueden verse como ecuaciones características de una EDP no lineal de primer orden, donde la variable dependiete está ausente, es decir, una EDP de la forma 1.4.27. A esta EDP, correspondiente al Hamiltoniano $H(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n, t)$, se le conoce como *ecuación de Hamilton-Jacobi* y está dada de la forma

$$H\left(x_1, ..., x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial x_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{3.0.7}$$

donde la función desconocida es $S(x_1, ..., x_n, t)$ que depende de $n+1$ variables independientes, llamada función principal de Hamilton, la cual contiene la solución de las ecuaciones de Hamilton.[6][5]

Conclusiones

En este trabajo de tesis se expusieron métodos desarrollados por Cauchy, Charpit y Jacobi para hallar soluciones completas de una EDP de primer orden y además, métodos conocidos para hallar otras soluciones completas a partir de una conocida; sin embargo, se propusieron métodos más convenientes, desde el punto de vista operacional, basados en el artículo [10] que gracias al método de Jacobi se pudieron trasladar a cualquier EDP de primer orden, ya que permite trabajar con ecuaciones donde la variable dependiente aparece únicamente a través de sus derivadas.

Cabe recalcar que si se buscara aplicar los resultados del Capítulo 2 a una EDP con n variables independientes, sin transformarla a una equivalente por el método de Jacobi, se deben considerar únicamente $n-1$ variables como independientes y la restante tomar el lugar de parámetro o de la variable z.

La ventaja de los métodos propuestos en este trabajo de tesis para hallar una nueva solución completa a partir de una conocida y estar seguro de que representará otra familia de superficies, es el poder proponer cualquier función dependiente de los parámetros arbitrarios sin restricción, siempre y cuando la solución inicial satisfaga la ecuación

$$\det\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial P_j}\right) \neq 0. \tag{3.0.8}$$

Además, otro resultado importante de este trabajo es el asegurar que existe una función que depende únicamente de los parámetros arbitrarios, que relaciona cualesquiera dos soluciones completas de una EDP tales que sean funcionalmente independientes y que satisfagan la ecuación 3.0.8.

Dado que la dificultad de los métodos propuestos recae en los cálculos algebraicos, podría llegar a pensarse que el uso de algún software facilitaría o resolvería este problema, sin embargo frecuentemente los softwares no muestran una simplificación óptima para nuestro uso y/o necesidad y a veces, las expresiones que se introducen resultan ser difíciles de operar para el programa; por lo que se recomienda hacer estos cálculos manualmente aunque aparenten gran dificultad o se necesite invertir mucho tiempo, ya que se sabe con certeza que a pesar de ello se llegará a un buen resultado.

Referencias

[1] G. F. Carrier and C. E. Pearson, Partial Differential Equations (Academic Press, New York, 1976)

[2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics (Wiley, New York, 1989)

[3] L. Debnath, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers (Birkhäuser, New York, 2012)

[4] S.S. Demidov, "The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18^{th} and 19^{th} Centuries", Archive for History of Exact Sciences **26**, 325 (1982).

[5] L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional (Mir, Moscú, 1969)

[6] P. R. Garabedian, Partial Differential Equations (Wiley, New York, 1964)

[7] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times (Oxford University Press, New York, 1972)

[8] I. N. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (Dover, New York, 2006).

[9] O. N. Stavroudis, The Mathematics of Geometrical and Physical Optics (Wiley-VCH, Weinheim, 2006)

[10] G. F. Torres del Castillo and G. S. Anaya González, "Complete solutions of the Hamilton- Jacobi equation and the envelope method". Revista Mexicana de Física **60**, 414 (2014)