



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Acerca de la optimización lineal semi-infinita y sus métodos
de solución

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Rolando Roberto Linaldi Guzmán

asesorado por

Lidia Aurora Hernández Rebollar

Puebla Pue.
6 de diciembre de 2012

Título: Acerca de la optimización lineal semi-infinita y sus métodos de solución

Estudiante: ROLANDO ROBERTO LINALDI GUZMÁN

COMITÉ

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Presidente

Dr. Maxim Ivanov Todorov
Secretario

Dr. Guillermo Lopez Mayo
Vocal

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Asesor

Agradecimientos

La tesis presentada aquí pudo realizarse (por orden de aparición) gracias a mis padres, Roberto Linaldi y Gabriela Guzmán, a los que les estoy completamente agradecido por su gran apoyo, amor, enseñanza, paciencia y esfuerzo. Sin ellos, yo no estaría viviendo este momento tan especial.

Gracias a mi hermano, Vladimir Illescas, que la vida me ha dado, y que me ha enseñado tantas cosas, incluso sin que él se de cuenta; mi forma de ser no sería igual sin ti Hermano.

Gracias a todos los integrantes de mi familia, tanto materna (Los Guzmán) como paterna (Los Linaldi), que aunque estén lejos, siempre los llevo conmigo, cada uno de ellos ha contribuido en algo a mi persona. Me han dado una perspectiva diferente de la vida.

Gracias a mis amigos de toda la vida... Esos que siempre me han acompañado... Y con los que he pasado infinidad de aventuras. Hermanos que, aunque no compartamos pedazos de ADN, compartimos ideales, inquietudes, proyectos y metas.

Gracias a los integrantes de la FCFM de la BUAP, tanto alumnos como maestros, que me han enseñado todo lo que sé de matemáticas. Contribuyeron a crear esta visión lógica que necesitamos para aprender y crear matemáticas.

Gracias a la Dra. Lidia Hernandez en particular (tutora, profesora y asesora), por confiar en mí, apoyarme, y ayudarme a salir adelante en esta carrera, que no es fácil, pero tampoco imposible, y menos con una persona como la Doctora a tu lado. Sin ella esta tesis no existiría.

Gracias a la comisión revisora, integrada por los doctores en matemáticas: el Dr. Guillermo Lopez Mayo, el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y el Dr. Maxim Ivanov Todorov, que creyeron en el trabajo realizado y dieron fe de la tesis. No tengo como agradecerles, solo comprometiéndome a seguir en este camino hacia la investigación científica y contribuir a ella en un futuro no muy lejano.

Gracias a todos los que voluntaria e involuntariamente se han visto involucrados en este proyecto de vida, mi tesis de licenciatura, pues esto se ha construido poco a poco, aprendiendo nuevos conceptos, no solo matemáticos, que se aprenden en la vida misma. Si aportaste algo a este escrito, gracias a ti por el apoyo.

Gracias a los que leyeron y leerán esta tesis. Espero les sirva, pues la hemos hecho para eso... Ayudar a comprender algo acerca de la optimización lineal semi-infinita y sus métodos de solución.

Rolando Roberto Linaldi Guzmán.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
La Programación Lineal Semi-Infinita	IX
0.1. ¿Qué es la Programación Lineal Semi-Infinita?	IX
0.2. Ejemplos de Problemas de PLSI	IX
0.3. Teoría preliminar	XI
0.3.1. Conjuntos convexos	XI
0.3.2. Consistencia y optimalidad	XIV
0.3.3. La condición de KKT	XVIII
Métodos para la solución del problema de la PLSI	XXIII
0.4. Aproximación de Reducción Local.	XXIII
0.5. Discretización mediante rejillas	XXIV
0.6. Discretización mediante planos de corte	XXV
0.7. El método del plano de corte central	XXVII
Pruebas numéricas	XXXI
0.8. Problema 1	XXXI
0.9. Método de Reducción local	XXXI
0.10. Método de discretización mediante planos de corte	XXXII
0.11. Método de discretización mediante rejillas	XXXIV
0.12. Problema 2	XXXVI
0.13. Aplicación del algoritmo	XXXVII
0.14. Resolviendo el Problema 2	XXXVII
Conclusión	XXXIX
Algoritmo 4 programado en MATLAB	XLI

Introducción

¿Qué es la programación lineal semi-infinita?, ¿cuál es la diferencia respecto a la programación lineal ordinaria?, o más simple aún, ¿qué es la programación lineal?. La programación lineal es aplicada en la mayoría de procesos de hoy en día. La necesidad del ser humano de optimizar dichos procesos ha ayudado a crear la programación lineal como herramienta principal. Cualquier persona usa la optimización en su vida diaria, desde el conductor de un autobús, al determinar la ruta más conveniente para él, hasta un físico molecular, para determinar el óptimo de una función que describe el movimiento de ciertas partículas. Matemáticamente hablando, se trata de obtener el mínimo o el máximo de una función con ciertas restricciones dadas previamente.

La diferencia que tiene la programación lineal ordinaria de la semi-infinita es que en ambas se optimiza una función objetivo lineal, pero el conjunto de índices que determina el número de restricciones en la programación lineal es finito, y en la semi-infinita es infinito. Es decir, en la programación lineal semi-infinita se debe minimizar una función lineal con n variables reales las cuales están sujetas a un sistema lineal con un número infinito de desigualdades. Por lo tanto en la programación lineal semi-infinita el conjunto factible es un conjunto convexo y cerrado, pero no necesariamente un poliedro.

Es esta tesis revisaremos los métodos que resuelven el problema de la programación lineal semi-infinita, que son heredados directamente de la programación no lineal, pues los métodos de la programación lineal ordinaria no resuelven los problemas de la programación semi-infinita, principalmente porque el conjunto de índices infinito genera un número infinito de restricciones.

Comenzaremos la tesis presentando los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de los métodos. Cada definición y teorema presentados en el primer capítulo son necesarios para el desarrollo de la teoría del siguiente capítulo. En el segundo capítulo se presentarán las condiciones para poder aplicar los métodos, los algoritmos de cada método, y los teoremas que aseguran la terminación finita de los métodos o la convergencia a un óptimo. Los métodos presentados en esta tesis nos son todos los que existen para resolver el problema de la PLSI, pero si los que tienen más eficiencia computacional en el tratamiento numérico del mismo. Solo nos enfocaremos en los métodos de reducción local y de discretización. En el tercer capítulo se presentarán dos problemas específicos resueltos con los métodos presentados en el capítulo 2. Dichos problemas ejemplifican de manera práctica el uso de los métodos y nos dan una idea más completa de las características de dichos métodos.

La programación lineal semi-infinita es una rama particular del área de la optimización que se desarrolla para poder resolver problemas con características específicas y por ello la importancia de estudiar los métodos que nos ayuden en esta tarea. Así como estos métodos se heredaron de la programación no lineal, también se pueden modificar para la solución de otros problemas de la optimización.

La Programación Lineal Semi-Infinita

0.1. ¿Qué es la Programación Lineal Semi-Infinita?

La programación lineal semi-infinita (PLSI) trata con problemas de optimización con objetivo lineal y con restricciones lineales, en los cuales o el número de restricciones o la dimensión del espacio de variables, pero no ambas, se le permite ser infinito.

La forma general del problema de la PLSI es la siguiente, a quien llamaremos (P):

$$(P) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t, \quad t \in T,$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0_n$, y x pertenecen a \mathbb{R}^n , T es un conjunto de índices arbitrario (posiblemente infinito), $a_t = a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))'$ es una función de T a \mathbb{R}^n y $b_t = b(t)$ es función escalar sobre T . (P) diremos que es el *problema primal de la PLSI*.

EL *conjunto factible* de (P), F , es un conjunto cerrado convexo en \mathbb{R}^n (dado que es la intersección de una familia de semiespacios cerrados), tal vez \emptyset o \mathbb{R}^n , para el cual el *sistema lineal semi-infinito* (SLSI abreviando) $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ proporciona una representación externa. Si (P) es *consistente* (es decir, que tenga al menos una solución, $F \neq \emptyset$), su *valor óptimo* $v(P)$ puede ser o un número real o $-\infty$. En el primer caso (P) se dice que es *acotado* y, en contraste con la programación lineal ordinaria, la existencia de una solución óptima no está garantizada; En otras palabras, un problema de PLSI acotado no necesita ser *resoluble*. Si (P) es *inconsistente*, $v(P) = -\infty$ por definición.

En secciones posteriores profundizaremos en los conceptos mencionados antes.

0.2. Ejemplos de Problemas de PLSI

Ahora mostraremos algunos ejemplos de problemas que muestran algunas características del modelo de PLSI.

Ejemplo 1.

Considere

$$(P_1) \quad \text{Inf} \quad x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 - tx_2 \geq 0, \quad t \in [0, 1].$$

Otra forma de describir el conjunto factible explota la función marginal asociada con el sistema de restricciones, $\underline{g} = \inf_{t \in T} (a'_t x - b_t)$, donde

$$\underline{g}(x) = \begin{cases} x_1 - x_2, & (x_2 > 0), \\ x_1, & (x_2 \leq 0), \end{cases}$$

tal que, el conjunto factible de (P_1) es

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | \underline{g}(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 - x_2 \geq 0, x_1 \geq 0\},$$

y $v(P_1) = -\infty$.

Ejemplo 2: Aproximación.

En diferentes situaciones se requiere una solución aproximada de cierta ecuación o sistema de ecuaciones. Un ejemplo simple es el de un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales en \mathbb{R}^n , $\{a'_t x = b_t, t \in T\}$ (con T posiblemente infinito). Lo que se quiere es que $a'_t x$ sea aproximadamente igual a b_t en T , es decir, se busca un elemento del subespacio lineal

$$\{a'_t x, x \in \mathbb{R}^n\} = \text{span}\{a_1(t), \dots, a_n(t)\} \subset \mathbb{R}^T,$$

donde \mathbb{R}^T denota el espacio lineal de funciones que van de T a \mathbb{R} , es buscado tan cerca como sea posible a b_t .

Sea T un conjunto dado, $f \in \mathbb{R}^T$ y U un subconjunto de un subespacio lineal de dimensión finita de \mathbb{R}^T , representado por V . Si d es una pseudométrica sobre $U \cup \{f\}$, entonces una mejor aproximación de f a U con respecto a d es una solución óptima del problema

$$\text{Inf } d(f, v), \quad \text{s.a. } v \in U. \quad (1)$$

En particular, si V es el span lineal de una familia finita $\{v_1, \dots, v_n\}$ entonces las restricciones más comunes que determinan a U pueden ser formuladas como sistemas de desigualdades lineales. De hecho, ya que $V = \{\sum_{i=1}^n x_i v_i | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$, la condición unilateral $v \geq f$ está escrita como $\sum_{i=1}^n x_i v_i(t) \geq f(t), t \in T$, y el requerimiento de valores preasignados para v sobre un subconjunto $T_1 \subset T$ (restricciones de interpolación) puede ser formulado como $\sum_{i=1}^n x_i v_i(t) = \alpha_t, t \in T_1$, para números reales fijos $\alpha_t, t \in T_1$.

Puesto que el problema (1) puede ser formulado en \mathbb{R}^n , reemplazando la variable funcional v con el vector x , y el conjunto factible U puede frecuentemente ser descrito como la solución de un sistema de desigualdades lineales, la reformulación de (1) como un problema de PLSI dependerá de nuestra habilidad al escoger una pseudométrica adecuada permitiendo la linealización de (1).

De acuerdo a este objetivo, observemos que (1) es equivalente (valores iguales y solvencia simultánea) a

$$\begin{aligned} \text{Inf } & x_{n+1} \\ \text{s.a. } & d(f, v) \leq x_{n+1}, \\ & v \in U, x_{n+1} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

de modo que el objetivo de linealización puede ser transferido a la restricción (2), lo cual se logra eligiendo a d como la pseudométrica de la convergencia uniforme (o de Chebyshev) sobre cierto conjunto no vacío $S \subset T$, es decir,

$$d(f, v) := \sup_{t \in S} |f(t) - v(t)|,$$

ya que la restricción (2) es entonces equivalente al SLSI

$$-x_{n+1} \leq \sum_{i=1}^n x_i v_i(t) - f(t) \leq x_{n+1}, \quad t \in S.$$

Ejemplo 3: Políticas Ambientales.

Estrategias de menor costo para la disminución de contaminación usualmente envuelven restricciones asociadas con un continuo de puntos, por ejemplo, la costa de un lago (o mar) o una región geográfica, mientras que hay un número finito de fuentes emitiendo contaminantes. Esto es un típico tipo de problema de decisión donde el modelo de PLSI naturalmente aplica.

3.1: Un Modelo de Control de Contaminación de Agua.

Asumiremos la existencia de n afluentes, de los cuales se requiere eliminar desechos en un sistema de agua. Denotemos mediante x_j las unidades de la demanda biológica de oxígeno (DBO) para ser eliminado de la fuente j durante un periodo de tiempo (Por ejemplo, un año), una operación que tiene un costo $f_j(x_j)$. Sea u_j la capacidad residual de la planta de eliminación de aguas residuales en la fuente j .

Por otro lado, denotaremos por T al contorno de la línea costera del sistema de agua y por b_t a la mejora mínima deseada en la calidad de agua en el punto $t \in T$, que generalmente se mide como una concentración de DBO. La calidad de respuesta en el punto $t \in T$ causada por eliminar x_j unidades de DBO en la fuente j , $j = 1, \dots, n$, es dada por la función de transferencia $g_t(x)$.

El correspondiente problema de control de costo mínimo es

$$\begin{aligned} \text{Inf} \quad & \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \\ \text{s.a.} \quad & g_t(x) \geq b_t, \quad t \in T, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j. \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se suele suponer que los costos y transferencias son aproximadamente lineales. Denotando por c_j al costo (adicional) de eliminar una unidad de DBO en la fuente j , y por $a_j(t)$ la calidad de respuesta en el punto t por unidad de DBO eliminada de la fuente j , obtenemos el problema de PLSI:

$$\begin{aligned} \text{Inf} \quad & c'x \\ \text{s.a.} \quad & a'_t x \geq b_t, \quad t \in T, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j. \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

0.3. Teoría preliminar

0.3.1. Conjuntos convexos

En esta sección se introduce una familia de conjuntos, llamados convexos, además se considerarán algunas de sus propiedades básicas, ya que son de gran utilidad en la construcción y análisis

de los modelos de programación matemática y en particular, de programación lineal.

Definición 0.1. $C \subset \mathbf{R}^n$ es convexo si $(1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 \in C$ cualesquiera que sean $x^1, x^2 \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$. La dimensión de $C \neq \emptyset$ es la de su envoltura afín, es decir, $\dim C := \dim \text{af } C$.

En otras palabras un conjunto $C \subseteq \mathbf{R}^n$ es convexo si para cualquier pareja de puntos $x^1, x^2 \in C$, el segmento de recta que une estos dos puntos está también en C .

Por convenio, \emptyset también es convexo y $\dim \emptyset = -1$.

Recordemos que una *combinación lineal* (CL) de los vectores $x^1, x^2, \dots, x^p \in \mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^p \alpha_i x^i$, con $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, p$. Dicha CL se dice que es *no negativa* cuando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, p$. Si $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$, la CL se dice que es *afín*. Una CL es *convexa* cuando es no negativa y afín. Así una combinación lineal convexa de un número finito de puntos x^1, x^2, \dots, x^p se define como el punto

$$x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i, \quad \text{donde } \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1.$$

Proposición 0.2. Sea $C \neq \emptyset$ subconjunto de \mathbf{R}^n . C es convexo si y solo si C contiene todas las combinaciones lineales convexas de elementos de C .

Definición 0.3. La envoltura convexa de un conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ es el menor conjunto convexo que lo contiene. Se denota por $\text{conv}X$ y es la intersección de todos los conjuntos convexas que contienen a X .

Observemos que el $\text{conv}\emptyset = \emptyset$.

Proposición 0.4. Si $X \neq \emptyset$, $\text{conv}X$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de X .

Ahora pasaremos a definir un concepto muy usado en la programación lineal, que es el de cono.

Definición 0.5. Un conjunto K tal que $0_n \in K \subset \mathbf{R}^n$ es un cono si $\lambda x \in K$ cualesquiera que sean $x \in K$ y $\lambda \geq 0$.

En otras palabras, son conos aquellos conjuntos de \mathbf{R}^n que contienen a todas las semirectas que parten de 0_n y que pasan por un punto del mismo. Cualquier subespacio vectorial es un cono (aunque 0_n no sea un vértice del mismo). El único conjunto acotado que es cono es $\{0_n\}$.

Definición 0.6. Un conjunto K es cono convexo si es cono y es un conjunto convexo.

Proposición 0.7. Sea $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}^n$. K es un cono convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones lineales no negativas de elementos de K .

Definición 0.8. La envoltura cónica (se sobreentiende que convexa) de un conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ es el menor cono convexo que contiene a X . Se denota por $\text{cone}X$ y es la intersección de todos los conos convexos que contienen a X .

Se puede observar que $\text{cone}\emptyset = \{0_n\}$.

Proposición 0.9. Si $X \neq \emptyset$, $\text{cone}X$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas de puntos de X .

Definición 0.10. Dado un sistema de inecuaciones

$$\sigma = \{a_i^T x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$$

el conjunto factible de σ se define como

$$F := \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Definición 0.11. Se define como interior relativo de un conjunto convexo $X \subseteq \mathbf{R}^n$, que será denotado como $\text{rint}X$, al interior de X en la topología relativa del menor subconjunto afín que contiene a X . Es decir $\text{rint}X = \{x \in \text{aff}(X) \mid \exists \epsilon > 0, (x + B_0(\epsilon)) \cap (\text{aff}(X)) \subset X\}$.

Otro concepto relacionado con el anterior es el de *frontera relativa*, que es el conjunto diferencia $\text{cl}X \setminus \text{rint}X$, es decir, la clausura de X menos el interior relativo de X .

Definición 0.12. El conjunto $\{x^1, \dots, x^p\} \subset \mathbf{R}^n$ es afinmente independiente (AI) cuando $\left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^p \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ es linealmente independiente (LI).

Teorema 0.13. (Caratheodory, 1911) Sea $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$. Se cumple:

1. Toda combinación lineal no negativa de elementos de X , con $X \neq \{0_n\}$, es también combinación lineal no negativa de un subconjunto LI de X (con un máximo de n elementos).
2. Toda combinación lineal convexa de puntos de X es también combinación lineal convexa de un subconjunto AI de X (con un máximo de $n + 1$ puntos).

Ahora definiremos los llamados *conos de primer y segundo momento* de σ ,

$$M := \text{cone}\{a_t, t \in T\} \quad y \quad N := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\},$$

Así como también el *cono característico* de σ ,

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Otro cono importante por definir es el polar, que se usará en el lema de Farkas para conos, lema que usaremos en la siguiente subsección.

Definición 0.14. Dado un cono convexo $K \subset \mathbf{R}^n$, se define su cono polar (positivo) como

$$K^0 = \{y \in \mathbf{R}^n \mid x^T y \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Lema 0.15. (de Farkas para conos) Si K es un cono convexo cerrado, entonces $K^{00} = K$.

Definición 0.16. Una inecuación $a'x \geq b$ es consecuencia del sistema $\{a'_i x \geq b_i, i \in I\}$ si toda solución de este sistema satisface dicha inecuación.

Lema 0.17. Lema extendido de Farkas. La inecuación $a'x \geq b$ es una consecuencia del sistema $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{clcone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

0.3.2. Consistencia y optimalidad

Ahora hablaremos de algunas definiciones alternativas de las soluciones extendidas para σ , directamente relacionadas con la sección anterior, pues se desarrollan usando los conceptos definidos. También definiremos nuevos conceptos y expondremos otros resultados que serán fundamentales para el desarrollo de los algoritmos y las demostraciones de los teoremas del capítulo 2 de esta tesis.

Decimos que una sucesión $\{x^r\} \in \mathbf{R}^n$ es una *solución asintótica* del sistema σ si, para todo $t \in T$,

$$\liminf_r a'_t x^r \geq b_t,$$

donde $+\infty$ se permite como límite. Si x es el punto límite de una sucesión que satisface la condición anterior entonces, para todo $t \in T$, tenemos

$$b_t \leq \liminf_r a'_t x^r = \lim_r a'_t x^r = a'_t x,$$

tal que x será una solución ordinaria de σ . Además, σ es consistente si y sólo si existe una solución asintótica acotada, de acuerdo al siguiente argumento. Si $\{x^r\}$ es una solución asintótica acotada de σ entonces $\text{cl}\{x^r, r = 1, 2, \dots\}$ es compacto, y existirá una subsucesión convergente cuyo punto límite será una solución de σ . Por otro lado, es evidente que si $x \in \mathbf{R}^n$ es una solución ordinaria de σ entonces la sucesión constante $x^r = x, r = 1, 2, \dots$, es una solución asintótica de este sistema. Así podemos ver que todo sistema consistente tendrá soluciones asintóticas, y algunos sistemas inconsistentes tendrán la misma propiedad.

Un sistema lineal semi-infinito σ que no tiene una solución asintótica (o polinomial) es llamado *fuertemente inconsistente*. Si σ no tiene una solución ordinaria, pero al menos tiene una solución asintótica, será llamado *asintóticamente inconsistente*.

Teorema 0.18. Dado un SLSI σ , las siguientes proposiciones se cumplen:

1. σ es consistente si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl}N$;
2. σ es asintóticamente inconsistente si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in (\text{cl}N) \setminus N$;

3. σ es fuertemente inconsistente si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N$.

Por otra parte, N puede ser reemplazado por K en los enunciados anteriores por el lema siguiente.

Lema 0.19. *Las siguientes relaciones entre N , K y sus clausuras permanecen:*

1. $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K$
2. $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in clN$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in clK$.

El criterio de clasificación siguiente se basa en el rendimiento óptimo de los problemas de optimalidad siguientes asociados con los conos N y K .

$$(PN) \quad \text{Inf} \quad \|x\|$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in N.$$

y (PK) definido en una forma similar, reemplazando N por K (justificado por el lema anterior).

Teorema 0.20. *Dado un sistema σ , los siguientes enunciados se cumplen:*

1. σ es consistente si y sólo si $v(PN) > 0$;
2. σ es asintóticamente inconsistente si y sólo si $v(PN) = 0$ y (PN) es insoluble;
3. σ es fuertemente inconsistente si y sólo si $v(PN) = 0$ y (PN) es soluble.

Por otra parte, (PN) puede ser reemplazado por (PK) en las proposiciones de arriba.

Ahora pasaremos a otro criterio de clasificación que involucra conceptos nuevos, como el de rayo ascendente.

Un vector $w \in \mathbb{R}^n$ es llamado *rayo ascendente* para el sistema σ , si para cada escalar μ existe un subsistema finito $\sigma(\mu) := \{a'_t x \geq b_t, t \in S(\mu)\}$, con $S(\mu) \subset T$, tal que $w'x \geq \mu$ para toda solución x de $\sigma(\mu)$, es decir, si $\sigma(\mu)$ es inconsistente o si $w'x \geq \mu$ es una consecuencia de $\sigma(\mu)$. Si esto último es cierto para todo $\mu \in \mathbb{R}$, por el Lema de Farkas y observando que el cono característico de $\sigma(\mu)$ está contenido en K , tenemos que $\left\{ \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset K$. Por lo tanto K contiene la línea vertical que pasa por w .

Representaremos por A al conjunto de rayos ascendentes para σ . Es fácil probar que A es un cono convexo.

Teorema 0.21. *Dado un sistema σ , los siguientes enunciados se cumplen:*

1. σ es consistente si y sólo si $A = \emptyset$.
2. σ es asintóticamente inconsistente si y sólo si $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$. Por otra parte, en este caso, $\text{rint}M \subset A \not\subset M$.
3. σ es fuertemente inconsistente si y sólo si $A = \mathbb{R}^n$.

Teorema 0.22. *Sean σ_1 y σ_2 dos sistemas lineales semi-infinitos con conos característicos K_1 y K_2 y conjuntos solución F_1 y F_2 respectivamente.*

Entonces

1. $F_2 \subset F_1$ si y sólo si $clK_1 \subset clK_2$;
2. σ_1 y σ_2 son equivalentes si y sólo si $clK_1 = clK_2$.

Ahora consideremos al vector de coeficientes de la función objetivo, c , como un parámetro, y analizaremos las propiedades de la función del valor objetivo $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$, recalcando que \mathbf{v} toma el valor de $+\infty$ cuando $F = \emptyset$. También consideraremos el *mapeo conjunto óptimo* $\mathfrak{F}^* : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, que asigna a cada $c \in \mathbb{R}^n$ el conjunto óptimo (posiblemente vacío) del problema

$$P(c) \quad \text{Inf} \quad c'x \quad \text{s.a.} \quad x \in F,$$

donde F es el conjunto factible (fijo), obtenido como conjunto solución del sistema dado $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$.

El problema $P(c)$ decimos que es *discretizable* si existe una sucesión de subproblemas finitos

$$P_k(c) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t \quad t \in T_k.$$

Siendo T_k un subconjunto finito de T , para $k = 1, 2, \dots$, y tal que sus valores óptimos satisfacen

$$\mathbf{v}(c) = \lim_k \mathbf{v}_k(c),$$

donde $\mathbf{v}_k(\cdot)$ es la función del valor óptimo del problema $P_k(\cdot)$ (cuyo sistema de restricciones está asociado con el subconjunto de índices finito T_k).

En particular, $P(c)$ se dice que es *reducible* si existe un conjunto finito $S \subset T$ tal que $\mathbf{v}(c) = \mathbf{v}_S(c)$, donde $\mathbf{v}_S(c)$ es el valor óptimo del problema de programación lineal ordinaria

$$P_S(c) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t \quad t \in S.$$

Obviamente, un problema inconsistente $P(c)$ será reducible si y sólo si σ es fuertemente inconsistente. Por otra parte si $\mathbf{v}(c) = -\infty$, $P(c)$ es trivialmente reducible.

Cuando $P(c)$ no es discretizable, aún puede ser posible aproximar $\mathbf{v}(c)$ mediante la resolución de una sucesión de problemas de PL, obtenido a partir de $P(c)$ por medio de dos modificaciones alternativas: a través de una perturbación suficientemente pequeña de la función objetivo, o intersectando su conjunto factible con una vecindad politópica del origen suficientemente grande.

Decimos que $P(c)$ es *débilmente discretizable* si existen $d \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema perturbado $P(c + \alpha d)$ es discretizable para $\alpha \in]0, \alpha_0]$, con $\alpha_0 > 0$, y

$$\mathbf{v}(c) = \lim_{\alpha \searrow 0} \mathbf{v}(c + \alpha d).$$

$P(c)$ se dice *regularizable* si existe un politopo C , con $0_n \in \text{int}C$, tal que el problema de PLSI

$$P(c, \rho) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t \quad t \in T, \\ x \in \rho C$$

es discretizable si $\rho > \rho_0$, para cierto $\rho_0 > 0$, y cualquier representación lineal de ρC que tomemos, en el momento mismo de tal manera que

$$\mathbf{v}(c) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(c, \rho).$$

Si $P(c)$ es débilmente discretizable para el vector d (regularizable para el politopo C) y el $\lim_k \alpha_k = 0$ ($\lim_k \alpha_k = \infty$), $\alpha_k > 0$ ($\rho_k > \rho_0$), $k = 1, 2, \dots$, existirá una sucesión $\{T_k\}$ de subconjuntos finitos de T tal que $\lim_k \mathbf{v}_k(c + \alpha_k d) = \mathbf{v}(c)$ ($\lim_k \mathbf{v}_k(c, \rho_k) = \mathbf{v}(c)$ respectivamente). En otras palabras, $\mathbf{v}(c)$ puede ser aproximado, en ambos casos, a través de un proceso diagonal, que implica subproblemas finitos modificados.

Tabla 1

σ	c	$P(c)$	$\delta(c)$
Fuertemente inconsistente		Discretizable	$0 \Leftrightarrow c \in M$
Asintóticamente inconsistente	$c \in A$	Discretizable	0
	$c \in (clM) \setminus A$	Débilmente discretizable (Pero no discretizable)	$+\infty$
	$c \notin clM$	Ni siquiera débilmente discretizable	$+\infty$
Consistente	$c \in rintM$	Discretizable	0
	$c \in rbdM$	Débilmente discretizable y discretizable $\Leftrightarrow C_1 = C_2$	$0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$
	$c \notin clM$	Discretizable	0

$C_1 = cl[(\{c\} \times \mathbb{R}) \cap K]$ y $C_2 = (\{c\} \times \mathbb{R}) \cap (clK)$.

Teorema 0.23. *Cualquier problema de PLSI $P(c)$ es regularizable. Por otro parte, éste es discretizable (o al menos débilmente discretizable) o no, dependiendo de las propiedades de consistencia de α y la posición de c con respecto a M y A , de acuerdo a la Tabla 1, lo cual también determina si no hay hueco dual.*

El teorema anterior establece que para $c \in rintM$, el problema consistente $P(c)$ será resoluble y discretizable. Ahora nos enfocaremos en aproximar soluciones óptimas del problema original por medio de una sucesión de soluciones óptimas x^k , de subproblemas finitos $P_k(c)$, definidos a través de una sucesión de subconjuntos de índices $\{T_r\}$.

Representaremos por F_r al conjunto factible de $P_k(c)$. Si $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, se dice que $\{P_k(c)\}$ es una *sucesión manejable* (s.m.) de subproblemas finitos de $P(c)$. Si la sucesión $\{T_k\}$ es expansiva, decimos que la s.m. asociada de subproblemas es monótona. Se puede ver que si $\{T_k\}$ define una s.m. de subproblemas de $P(c)$, la sucesión $\{T_k^1\}$ con $T_k^1 := T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$, $k = 1, 2, \dots$, define una s.m. monótona.

La existencia de una s.m. de subproblemas es garantizada por la separabilidad de \mathbb{R}^{n+1} . Por otro lado, si $x^k \in \mathfrak{F}_k^*(c)$, es decir, si x^k es una solución óptima de $P_k(c)$, y $\{P_k(c)\}$ es una s.m. de subproblemas, decimos que $\{x^k\}$ es una *sucesión manejable de puntos* asociada. Estas s.m. de puntos constituyen las sucesiones de aproximación natural en cualquier procedimiento de discretización típico.

Teorema 0.24. *Si $P(c)$ es consistente y $c \in rintM$, existirá una sucesión manejable de puntos convergente a una solución óptima de $P(c)$. Más precisamente, si $\{P(c)\}$ es una s.m. monótona particular de subproblemas de $P(c)$, existirá una s.m. $\{x^{k_r}\}$ de soluciones óptimas de los subproblemas correspondientes $P_{k_r}(c)$, $r = 1, 2, \dots$, que converge a una solución óptima \bar{x} de $P(c)$.*

Corolario 0.25. Si $c \in \text{int}M$, todo s.m. de puntos para $P(c)$ asociado con una s.m. monótona de subproblemas tiene puntos de acumulación que son necesariamente puntos óptimos de este problema. Por el contrario, si $c \in \text{rint}M$ y la última propiedad se cumple entonces tenemos que $\text{int}M \neq \emptyset$.

Teorema 0.26. Si $F \neq \emptyset$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. F es acotado;
2. $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int}K$, o, equivalentemente,

$$\text{int}K = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a'x > b \quad \forall x \in F \right\};$$

3. $M = \mathbb{R}^n$;
4. existe un subsistema finito de σ cuyo conjunto factible es acotado;
5. todas las desigualdades en el sistema homogéneo correspondiente σ_0 son portadoras, y la suposición de rango completo se cumple;
6. $\bigcup \{\text{supp}\lambda, \lambda \in 0^+\Lambda\} = T$, y la suposición de rango completo se cumple.

Corolario 0.27. Dado un problema de PLSI consistente (P) , las siguientes condiciones son equivalentes:

1. F^* es un conjunto acotado no vacío;
2. (P) es acotado y los conjuntos de nivel no vacíos de (P) son acotados;
3. existe un subproblema finito de (P) cuyos conjuntos de nivel no vacíos son acotados;
4. $c \in \text{int}M$;
5. existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto óptimo del problema perturbado (P_1) $\text{Inf}(c^1)'x$ s.a. x es una solución para σ , es no vacío y acotado si $\|c - c^1\| < \varepsilon$.

0.3.3. La condición de KKT

La condición de Karush Kuhn Tucker nos asegura la existencia de escalares no negativos, que usaremos en teoremas posteriores, así como también en el desarrollo del método de reducción local. Estos teoremas juegan un papel importante en la programación no lineal, y de ahí se han adoptado en la programación lineal semi-infinita.

Inicialmente definiremos un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ como sigue

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in I\},$$

donde el conjunto de índices, I , es finito y todas las funciones son suaves, es decir, $\{g_i, i \in I\} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 0.28. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una dirección virtual (o tangencial) en $\bar{x} \in F$ si existe un $\varepsilon > 0$ y una función $x(\cdot)$ definida sobre un abierto que contiene a $[0, \varepsilon]$ y con imágenes en \mathbb{R}^n tal que $x(\cdot) \in C^1([0, \varepsilon])$, $x(0) = \bar{x}$, $x'(0) = d$ y $x(t) \in F$, para todo $t \in [0, \varepsilon]$.

Debemos notar que 0_n siempre es una dirección virtual.

Las direcciones virtuales en \bar{x} forman un cono que puede no ser convexo, ya que si d es una dirección virtual en $\bar{x} \in F$ y $\lambda > 0$, la función $x(\lambda t)$, de $[0, \frac{\varepsilon}{\lambda}]$ en F , es de clase C^1 , $x(\lambda 0) = \bar{x}$ y el vector derivada en 0 es λd . A éste lo llamaremos *cono tangente* en \bar{x} y lo denotaremos por $T(\bar{x})$.

En particular, si $\bar{x} + td \in F$, para todo $t \in (0, \varepsilon]$ (es decir, si saliendo de \bar{x} podemos avanzar algo en dirección d sin abandonar F), se dice entonces que d es *dirección factible* en \bar{x} . En el caso de que F sea convexo, es suficiente pedir que $\bar{x} + \varepsilon d \in F$, para algún $\varepsilon > 0$. Obsérvese que si $\bar{x} \in \text{int}F$ (el interior topológico de F), cualquier vector de \mathbb{R}^n es dirección factible en \bar{x} . Es evidente que toda dirección factible es dirección virtual, pero el recíproco no es cierto, en general, aunque F sea convexo.

Ahora consideremos el problema de optimización con restricciones de desigualdad

$$(P_1) \quad \text{Min} \quad f(x) \\ \text{s.a.} \quad g_i(x) \geq 0, \quad i \in I,$$

donde $\{f; g_i, i \in I\} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por F al conjunto factible de (P_1) .

La condición necesaria de primer orden (en referencia al orden de las derivadas) establece que el ángulo entre el gradiente de la función objetivo en un óptimo local y cualquier dirección tangencial en el mismo no debe ser obtuso.

Proposición 0.29. *Si \bar{x} es un mínimo local de (P_1) , entonces $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$, para todo $d \in T(\bar{x})$. En particular, si $\bar{x} \in \text{int}F$ (como ocurre en optimización sin restricciones), entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0_n$.*

Si denotamos por $I(\bar{x})$ el conjunto de índices activos en $\bar{x} \in F$,

$$I(\bar{x}) = \{i \in I | g_i(\bar{x}) = 0\},$$

toda dirección virtual en \bar{x} , d , satisface $\nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0$, para todo $i \in I(\bar{x})$.

Si definimos el *cono activo* en \bar{x} como

$$A(\bar{x}) = \text{cone}\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\},$$

estamos sugiriendo la posibilidad de reemplazar $T(\bar{x})$ por $A(\bar{x})^0$, cuyo cálculo es inmediato.

Aquellas propiedades que garantizan la igualdad $T(\bar{x}) = A(\bar{x})^0$ se denominan *cualificaciones de las restricciones*. El caso trivial $I(\bar{x}) = \emptyset$ es una de ellas.

Las más conocidas, para el caso no trivial, son:

- La independencia lineal de $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$ (regularidad, Fiacco y McCormick, 1968).
- La concavidad de las funciones $\{g_i, i \in I\}$, junto con $\text{int}F \neq \emptyset$ (condición de Slater, 1950). Si el sistema de restricciones tiene solución estricta (es decir, si existe un $x \in F$ tal que $I(x) = \emptyset$), entonces $\text{int}F \neq \emptyset$, siendo cierto el recíproco bajo condiciones muy generales.
- La linealidad de las funciones $\{g_i, i \in I\}$ (linealidad, Karlin, 1959).

Teorema 0.30. Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) *Si \bar{x} es un mínimo local de (P_1) y satisface una cualificación de restricciones, entonces $\nabla f(\bar{x}) \in A(\bar{x})$. Por tanto, existen escalares no negativos $\lambda_i, i \in I(\bar{x})$ (llamados multiplicadores de KKT), tales que*

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}),$$

debiendo interpretarse que dicha suma es 0_n cuando $I(\bar{x}) = \emptyset$.

Demostración. Las hipótesis, junto con la proposición anterior y el Lema de Farkas para conos, garantizan que $\nabla f(\bar{x}) \in T(\bar{x})^0 = A(\bar{x})^{00} = A(\bar{x})$, es decir,

$$\nabla f(\bar{x}) \in \text{cone}\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\},$$

por lo que $\nabla f(\bar{x})$ es CL no negativa de $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$. ✓

La condición que se impone para \bar{x} en el teorema de KKT es denominada *condición de KKT*. Esta condición es importante para el desarrollo del siguiente teorema que nos proporciona condiciones de optimalidad. El teorema requiere de ciertos conceptos que se presentarán a continuación.

Dado nuestro par de problemas duales, en PLSI,

$$(P) \quad \text{Inf} \quad c'x \quad (c \neq 0_n) \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t, \quad t \in T,$$

y

$$(D) \quad \text{Sup} \quad \psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ \text{s.a.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)},$$

daremos algunas condiciones para que un punto $\bar{x} \in F$ sea un óptimo para (P).

$\bar{\lambda} \in \Lambda$ (es decir, una solución dual factible $\bar{\lambda}$) es un *vector del multiplicador complementario* para $\bar{x} \in F$ si

$$\bar{\lambda}_t (a'_t \bar{x} - b_t) = 0 \quad \forall t \in T. \quad (3)$$

La *función de Lagrange* asociada a (P) es

$$L(x, \lambda) := c'x + \sum_{t \in T} \lambda_t (b_t - a'_t x),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$. Decimos que $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{(T)}$ es un punto silla Lagrangiano si

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \quad (4)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$.

Observar que (4) garantiza que $\bar{x} \in F$, y si tomamos $\lambda_t = 0$ para toda $t \in T$, en la parte izquierda de la desigualdad, obtenemos $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t (b_t - a'_t \bar{x}) \geq 0$, por ejemplo $\bar{\lambda}_t (b_t - a'_t \bar{x}) = 0$ para todo $t \in T$. Sin embargo, podemos tener $\bar{\lambda} \notin \Lambda$, y consecuentemente $\bar{\lambda}$ no necesita ser un vector del multiplicador complementario para \bar{x} .

Decimos que (P) es un problema FM (LOP, LFM, continuo, etc.) cuando el sistema de restricciones correspondiente goza de tal propiedad.

Teorema 0.31. *Sea $\bar{x} \in F$ y consideremos los siguientes enunciados:*

1. *Existe un vector del multiplicador complementario para \bar{x} (condición complementaria);*
2. *$c \in A(\bar{x})$ (condición de KKT);*
3. *$c \in clA(\bar{x})$;*
4. *$c'y \geq 0$ es una consecuencia del sistema $\{a'_t(\bar{x} + y) \geq b_t, t \in T\}$;*
5. *$c \in D(F, \bar{x})^\circ$;*
6. *Existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es un punto silla Lagrangiano (condición de Lagrange);*
7. *$\bar{x} \in F^* = \{x \in F \mid c'x = v(P)\}$ (conjunto optimal).*

Cada uno de los enunciados 1-6 son una condición suficiente para 7 (optimalidad), mientras que 4 y 5 también son condiciones necesarias. Por otra parte, si (P) es LFM, todos los enunciados de arriba son equivalentes.

Métodos para la solución del problema de la PLSI

0.4. Aproximación de Reducción Local.

Para poder aplicar este método primero asumiremos que todos los coeficientes de $\alpha = \{a'_t x \geq b_t, t \in S\}$ pertenecen a $C^1(S)$, con $S = \{t \in \mathbb{R}^m | w_j(t) \leq 0, j \in J\}$, donde J es un conjunto finito y $\{w_j, j \in J\} \subset C^1(\mathbb{R}^m)$, luego que los gradientes de las restricciones activas que definen S son LI, para cada $t \in S$ y finalmente que α es LFM.

De acuerdo al teorema 0.31, $x \in F^*$ si y sólo si $x \in F$ y $c \in A(x)$. La última restricción significa que c es una combinación lineal no negativa de n vectores de $\{a_t, t \in T(x)\}$ (Por el teorema para conos de Carathéodory, teorema 0.13), digamos $a(t_k)$, $t_k \in T(x)$, con $k = 1, \dots, n$, donde $T(x) = \{t \in S | g(t, x) = 0\}$. En otras palabras, una condición necesaria y suficiente para que x sea una solución óptima de (P) es la existencia de $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$ y $y \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$\sum_{k=1}^n y_k a(t_k) = c, \quad (5)$$

$$g(t_k, x) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

$$y \quad g(t, x) \geq 0 \quad \text{para todo } t \in S. \quad (7)$$

Lo que reduce el problema a establecer dicho sistema y resolverlo con respecto a y y a t , para obtener x^* .

Dado que se cumplen (6) y (7), lo siguiente ocurre: t_k es un minimizador global de $g(\cdot, x)$, $k = 1, \dots, n$. Esto implica, aplicando el Teorema de KKT clásico (teorema 0.30) a cada $g(t_k, x)$, con $k = 1, \dots, n$, la existencia de escalares no negativos únicos $\{\theta_j^k, j \in J\}$ tales que

$$\nabla_t g(t_k, x) = \sum_{j \in J} \theta_j^k (-\nabla w_j(t_k)), \quad k = 1, \dots, n,$$

de esto se sigue

$$\nabla_t g(t_k, x) + \sum_{j \in J} \theta_j^k \nabla w_j(t_k) = 0_m, \quad k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

y la condición complementaria

$$\theta_j^k w_j(t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad j \in J. \quad (9)$$

Por lo tanto la existencia de una solución $x; t_1, \dots, t_n; y_1, \dots, y_n; \theta_j^k, j \in J, k = 1, \dots, n$, para el sistema no lineal $\{(5); (6); (7); (8); (9)\}$ es una condición necesaria para que x sea una solución

óptima de (P) .

Suponer la suavidad y la propiedad de LFM en σ son necesarias para aplicar las teorías de PNL y PLSI respectivamente.

La convergencia asintótica de cualquier método basado en la aproximación de reducción local corresponde al método de Newton (cuadrático) o al método quasi-Newton (superlineal) que ha sido escogido para resolver el sistema no lineal. El principal inconveniente con esta familia de métodos es también común en todos los métodos tipo Newton, éste es la pérdida de la propiedad de la convergencia global. En la práctica esto es necesario para empezar de una aproximación precisa a alguna solución del sistema. Así que los métodos de reducción puros son impracticables. Esta aproximación es la base para un método híbrido eficiente, donde la reducción local es realizada en cada iteración.

0.5. Discretización mediante rejillas

Para este capítulo asumiremos que $S \subset T$ es dado tal que el problema obtenido mediante reemplazar T con S en (P) tiene conjuntos de nivel acotados no vacíos. Para problemas consistentes tal rejilla existe si y sólo si F^* es un conjunto acotado no vacío (Ver corolario 0.27). De otra forma, siempre es posible agregar a (P) restricciones tipo caja $-\rho \leq x_j \leq \rho$, $j = 1, \dots, n$, $\rho > 0$, tales que el problema regularizado satisface esta condición, y su valor cae en una vecindad de $v(P)$ (Ver teorema 0.23).

La base de esta clase de métodos de discretización es la construcción de sucesiones de rejillas $\{T_r\}$ tales que $\bigcap_{r=0}^{\infty} T_r = F$. Por ejemplo, si (P) es numerable, es posible enumerar $T = \{t_0, t_1, \dots\}$ tal que $T_r = \{t_0, \dots, t_r\}$, $r = 0, 1, \dots$, satisfacen las condiciones. De otra forma, si $T \subset \mathbb{R}^m$, esto puede ser útil para asociarlo con un par de vectores en \mathbb{R}^m , s y $h > 0_m$, el conjunto numerable finito

$$G(s, h) = \prod_{i=1}^m \{s_i + h_i \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Podemos ver que $d(t, G(s, h)) \leq \|h\|$, para toda $t \in \mathbb{R}^m$, pues h es el tamaño del conjunto. Así, si $\lim_r h^r = 0_m$ entonces $\bigcup_{r=0}^{\infty} G(s, h^r)$ es denso en \mathbb{R}^m , pues dicha unión completa \mathbb{R}^m . si T es un conjunto acotado diferente de vacío, $G(s, h)$ determina, en T , la rejilla $T(s, h) = T \cap G(s, h)$, el cual puede ser vacío. La *sucesión regular de rejillas* en T , con parámetros $s \in \mathbb{R}^m$ (la semilla), $h > 0_m$ (el tamaño), y $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 2$, $i = 1, \dots, m$, es $\{T(s, h^r)\}$, donde h^r está definido iterativamente por $h^0 = h$ y

$$h_i^{r+1} = h_i^r / n_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 0, 1, \dots$$

Se puede ver que $\{T(s, h^r)\}$ es una sucesión expansiva de rejillas.

Ahora presentaremos el algoritmo de este método.

Algoritmo 1. Sea $\{T_r\}$ una sucesión expansiva de rejillas, con $T_0 = S$ y la tolerancia $\varepsilon \geq 0$ dada. Inicializamos el índice r en 0.

Paso 1: Resolver el subproblema de PL

$$\begin{aligned} (Pr) \quad & \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad & a'_t x \geq b_t, \quad t \in T_r. \end{aligned}$$

Si (P_r) es inconsistente, se detiene $((P)$ es inconsistente).

De otra manera, calcular una solución óptima de (P_r) , x^r , y entonces ir al Paso 2.

Paso 2: Minimizar la función de holgura en x^r , encontrando $s_r = \inf_{t \in T_r} g(t, x^r)$.

Si $s_r \geq -\varepsilon$ entonces $\text{para}(x^r)$ es aceptado como solución óptima de (P) .
 Si $s_r < -\varepsilon$ entonces reemplazamos r por $r + 1$ y vamos al Paso 1.

Notar que si el algoritmo termina en la r -ésima iteración en el Paso 2, entonces x^r es *casi factible*, ya que $a'_t x \geq b_t - \varepsilon$ para toda $t \in T$, y $c'x^r$ provee una subestimación de $v(P)$.

Ahora presentaremos un teorema que asegura que el algoritmo anterior tiene una finalización finita si $\varepsilon > 0$.

Teorema 0.32. *Sea (P) un problema de PLSI consistente y continuo, y supongamos que $\{T_r\}$ es una sucesión expansiva de rejillas en T que satisface $\lim_r T_r = T$ (por ejemplo T es la cerradura de un conjunto abierto y $\{T_r\}$ es una sucesión regular de rejillas en T). Entonces el Algoritmo 1 que comienza en una cierta rejilla de la sucesión, tiene finalización finita si $\varepsilon > 0$, o $\{x^r\}$ tiene al menos un punto de acumulación en F^* si $\varepsilon = 0$ (un punto límite si $|F^*| = 1$).*

Demostración. Dado que $\{T_r\}$ es expansiva, tenemos que $\lim_r T_r = cl[\cup_{r=0}^{\infty} T_r]$, tal que $\cup_{r=0}^{\infty} T_r$ es denso en T . Por otro lado, si $\cup_{r=0}^{\infty} T_r$ es denso en T entonces $\lim_r T_r = T$ ya que T es cerrado. Esto es cierto para cualquier sucesión regular de rejillas en T . De hecho, sea V un conjunto abierto tal que $T = clV$ y sea $T_r = T(s, h^r)$ para ciertos s y h . Ya que $\cup_{r=0}^{\infty} G(s, h^r)$ es un subconjunto denso de \mathbb{R}^m , $V \cap [\cup_{r=0}^{\infty} G(s, h^r)]$ es denso en V y también en T . Así que $\cup_{r=0}^{\infty} T(s, h^r)$ es denso en T .

Sea $\tilde{T} = \cup_{r=0}^{\infty} T_r$ y consideremos al SLSI $\tilde{\sigma} = \{a'_t x \geq b_t, t \in \tilde{T}\}$. Dado que \tilde{T} es denso en T y todas las funciones coeficiente en σ son continuas, σ y $\tilde{\sigma}$ son equivalentes (Teorema 0.22). Reemplazando T con \tilde{T} en (P) , el problema resultante, digamos (\tilde{P}) , tiene el mismo conjunto factible y optimal que (P) . Así que (\tilde{P}) tiene conjuntos de nivel acotados no vacíos, y existe p tal que T_p define un subproblema finito de (P) con la misma propiedad (por el corolario 0.27). Esta será la rejilla inicial. Notar también que, por la equivalencia entre σ y $\tilde{\sigma}$, tenemos que $\cap_{r=0}^{\infty} F_r = F$. Por lo tanto, de acuerdo a los corolarios 0.27 y 0.25, si $\{x^r\}$ es infinito, contendrá al menos una subsucesión $\{x^{r_k}\}$ que converge a cierto punto $x^* \in F^*$. Por otro lado, la continuidad de la función marginal, $\underline{g}(x) = \min_{t \in T} g(t, x)$, con $\text{dom} \underline{g} = \mathbb{R}^n$, implica que $\lim_k \underline{g}(x^{r_k}) = \underline{g}(x^*) \geq 0$. Por consiguiente, si $\varepsilon > 0$, $s_{r_k} = \underline{g}(x^{r_k}) \geq -\varepsilon$ para un k suficientemente grande, tal que la finalización finita ocurre. ✓

0.6. Discretización mediante planos de corte

Este capítulo comenzará con algunos conceptos básicos acerca de los métodos de planos de corte en la Programación No Lineal (PNL). Cualquier Problema de PNL puede formularse como sigue:

$$(CP) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad x \in F = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

donde todas las funciones g_i , $i = 1, \dots, m$, son convexas en \mathbb{R}^n .

La r -ésima iteración del típico método de planos de corte comienza con un conjunto convexo poliédrico $F_r \supset F$, luego calcula una solución óptima x^r del problema auxiliar de PL

$$(CP) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad x \in F_r,$$

y define $F_{r+1} = \{x \in F_r | a'x \geq b\}$ para algún semiespacio que contiene F , $a'x \geq b$, cuya frontera separa x^r de F , a menos que $x^r \in F$ (en este caso x^r es una solución óptima de (CP)). El *corte de factibilidad* $a'x \geq b$ puede ser obtenido de diferentes formas, una de ellas puede ser la siguiente, mediante cualquier semiespacio de la forma $g_i(x^r) + d'(x - x^r) \leq 0$ con $g_i(x^r) > 0$ y $d \in \mathbb{R}^n$ escogido arbitrariamente en $\partial g_i(x^r)$. La distancia de x^r a tal semiespacio es $\|d\|^{-1} g_i(x^r) > 0$, y

ésta es una medida de la profundidad del corte. Cheney y Goldstein (1959), e independientemente Kelley (1960), propusieron para seleccionar i como el índice de la restricción más violada por x^r y $d = \nabla g_i(x^r)$, bajo la suposición previa de la diferenciabilidad de g_1, \dots, g_m .

Esta idea puede adaptarse a la PLSI mediante la selección de cortes de factibilidad entre las restricciones de (P) , es decir, tomando un $t \in T$ tal que $a'_t x \geq b_t$ es una de las restricciones más violadas por x^r . Si el sistema de restricciones ha sido previamente normalizado, es decir, $\|a_t\| = 1$ para toda $t \in T$, el proceso consiste en calcular el corte más profundo.

Ahora daremos la expresión formal del método de planos de corte para el problema de PLSI (P) .

Algoritmo 2. Una sucesión de números no negativos $\{\varepsilon_r\}$ tal que $\lim_r \varepsilon_r = 0$ y una tolerancia $\varepsilon > 0$ son dados. Inicializamos el índice de interacción $r = 0$ y tomamos $T_0 = S$.

Paso 1: Resolver el subproblema de PL

$$(Pr) \quad \text{Inf} \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad a'_t x \geq b_t, \quad t \in T_r.$$

Si (P_r) es inconsistente, se detiene.

De otra manera, calcular una solución óptima de (P_r) , x^r , y entonces ir al Paso 2.

Paso 2: Calcular $s_r = \inf_{t \in T} g(t, x^r)$.

Si $s_r \geq -\varepsilon$ entonces se detiene.

Si $s_r < -\varepsilon$ entonces encontramos un conjunto finito $S_r \neq \emptyset$ de ε -minimizadores de la función de holgura en x^r , es decir, cada $t \in S_r$ debe satisfacer:

$$g(t, x^r) \leq s_r + \varepsilon_r.$$

Ahora reemplazamos r por $r + 1$, tomamos $T_{r+1} = T_r \cup S_r$ y vamos al Paso 1.

En el próximo capítulo mostraremos el ejemplo resuelto mediante este método.

Ahora presentaremos el teorema que asegura la finalización finita de dicho algoritmo, seguido de su demostración.

Teorema 0.33. *Asumiremos que (P) es consistente, que $\{a_t, t \in T\}$ es un conjunto acotado y que $g(\cdot, x^r)$ es acotada inferiormente (o tiene minimizadores, si $\varepsilon_r = 0$) en cada iteración del Algoritmo 2 (esto es verdadero cuando (P) es continuo). Entonces, esto genera o una sucesión finita o una sucesión infinita que tiene puntos de acumulación los cuales son soluciones óptimas de (P) . Así la finalización finita ocurrirá si $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Las condiciones garantizan la existencia de $S_r \neq \emptyset$ en cada iteración (pues tiene minimizadores, si $\varepsilon_r = 0$). Podemos asumir que el algoritmo genera una sucesión infinita $\{x^r\}$. Ya que $T_r \subset T_{r+1}$ para todo $r \in \mathbb{N}$, $F_{r+1} \subset F_r$, $r = 0, 1, \dots$, y $\{x^r\}$ esta contenida en el conjunto compacto $\{x \in F_0 | c'x \leq c'z\}$, para algún $z \in F$. Así asumiremos que $\bar{x} = \lim_r x^{k_r}$, para cierta subsucesión $\{x^{k_r}\}$.

Ahora solo queda probar la factibilidad de \bar{x} . Pues

$$c'\bar{x} = \lim_r c'x^{k_r} = \lim_r v(P_{k_r}) \leq v(P).$$

Como por hipótesis, la función marginal $\underline{g}(x) = \inf_{t \in T} g(t, x)$ es continua, pues si $\underline{g}(x) = -\infty$ entonces tendremos que $\sup_{t \in T} b_t = +\infty$ y (P) sería inconsistente, por el teorema 0.20, contradice la hipótesis.

Para continuar consideraremos una sucesión $\{t_r\}$, con $t_r \in S_{k_r}$, $r = 1, 2, \dots$. Para todo $p > r$, tenemos $t_r \in T_{k_r+1} \subset T_{k_p}$, tal que

$$a(t_r)'x^{k_p} \geq b(t_r) \quad \text{para todo } p \geq r.$$

Por lo tanto, cuando $p \rightarrow \infty$ con r fijo, obtenemos $a(t_r)'\bar{x} \geq b(t_r)$, es decir, $g(t_r, \bar{x}) = a(t_r)'\bar{x} - b(t_r) \geq 0$, $r = 1, 2, \dots$.

Ahora, para algún $r \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} \underline{g}(\bar{x}) &= \underline{g}(x^{k_r}) + [\underline{g}(\bar{x}) - \underline{g}(x^{k_r})] \\ &\geq g(t_r, x^{k_r}) - \varepsilon_{k_r} + [\underline{g}(\bar{x}) - \underline{g}(x^{k_r})] \\ &\geq g(t_r, x^{k_r}) - g(t_r, \bar{x}) - \varepsilon_{k_r} + [\underline{g}(\bar{x}) - \underline{g}(x^{k_r})] \\ &= a(t_r)'(x^{k_r} - \bar{x}) - \varepsilon_{k_r} + [\underline{g}(\bar{x}) - \underline{g}(x^{k_r})]. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que el límite cuando $r \rightarrow \infty$ de la última expresión es cero, obtenemos $\underline{g}(\bar{x}) \geq 0$, es decir, \bar{x} es una solución factible para (P) . ✓

0.7. El método del plano de corte central

El siguiente algoritmo intenta resolver un problema común de los algoritmos anteriores, que es el de la terminación finita en puntos no factibles, y uno en particular del algoritmo anterior, éste es que los planos de corte generados tienden a ser paralelamente cercanos al punto óptimo, tal que las iteraciones siguientes pueden ser localizadas en los vértices muy lejanos unos de otros, provocando inestabilidad y acumulación. Hettich y Zencke (1982) probaron que, bajo una cierta suposición de regularidad relacionada a la condición de Slater, la unicidad fuerte implica la convergencia superlineal de una gran clase de algoritmos.

El método de plano de corte central (o de punto interior, o de incrustación) de Elzinga y Moore (1975) fue diseñado para eliminar los mismos inconvenientes en el tratamiento numérico del (CP). Daremos una breve descripción de su errésima iteración.

Sea F_r un politopo que contiene algún conjunto de nivel diferente del vacío de (CP). Esto es sólo posible cuando F^* es un conjunto acotado diferente del vacío, pero F no necesita estar en F_r . Sea x^r el centro de la bola más grande contenida en F_r (su radio ρ_r será cero si y sólo si $\text{int}F_r = \emptyset$). Esencialmente, el siguiente politopo F_{r+1} es construido de F_r como sigue:

- (a) Si $x^r \in F$, tomamos $F_{r+1} = \{x \in F_r \mid c'x \leq c'x^r\}$; es decir un *corte objetivo* es realizado sobre F_r .
- (b) Si $x^r \notin F$ entonces $F_{r+1} = \{x \in F_r \mid a'x \geq b\}$, donde $a'x \geq b$ es un corte factible, es decir, $a'x \geq b$ para todo $x \in F$ y $a'x^r < b$. Este corte factible no necesita corresponder a alguna restricción más violada.

En ambo casos, F_{r+1} es otra vez un politopo que contiene un conjunto de nivel diferente del vacío de (CP). Para evitar la acumulación de cortes en los pasos siguientes, las reglas de borrado pueden ser agregadas al algoritmo para quitar cortes previos que no afecten significativamente el progreso del algoritmo en iteraciones posteriores.

En el siguiente algoritmo de planos de corte central para el problema de PLSI (P), todos los cortes factibles serán una restricción $a'_t x \geq b_t$, para algún $t \in T$, tal que los politopos siguientes tendrán la forma

$$F_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x \leq \alpha_r; a'_t x \geq b_t, p.a. \quad t \in T_r\},$$

y una bola maximal contenida en F_r será $x^r + \rho_r(\text{cl}B)$ para alguna solución óptima (x^r, ρ_r) ,

del problema auxiliar de PL:

$$(Q_r) \quad \text{Sup } \rho$$

$$\text{s.a. } c'x + \|c\|\rho \leq \alpha_r,$$

$$a'_t x - \|a_t\|\rho \geq b_t, \quad t \in T.$$

Consecuentemente, el algoritmo resuelve una sucesión de problemas de PL asociados con pares de rejillas T_r y escalares α_r . Aunque (Q_r) no es un subproblema de (P) , así que este no es un método de discretización en el sentido de lo antes visto, este enfoque es cercano en espíritu al anterior y por lo tanto será incluido aquí.

Algoritmo 3. Sean un punto z^0 tal que $a'_t z^0 \geq b_t$ para todo $t \in S$ y $c'z^0 \geq v(P)$, una tolerancia $\varepsilon \geq 0$ y un escalar $\beta \in]0, 1[$. Inicializamos el índice de iteración $r = 0$. Tomamos $\alpha_0 = c'z^0$ y $T_0 = S$.

Paso 1: Calcular una solución óptima (x^r, ρ_r) de (Q_r) .

Si $\rho_r \leq \varepsilon$ entonces se detiene.

De otra manera, ir al Paso 2.

Paso 2: Calcular $s_r = \inf_{t \in T} g(t, x^r)$.

Si $s_r \geq 0$, reemplazar r por $r + 1$, tomar $\alpha_{r+1} = c'x^r$ y $T_{r+1} = T_r$.

Entonces ir al Paso 1.

Si $s_r < 0$, encontrar un índice $t_r \in T$ tal que $g(t_r, x^r) < 0$, reemplazar r por $r + 1$, tomar $\alpha_{r+1} = \alpha_r$ y $T'_{r+1} = T_r \cup \{t_r\}$; entonces ir al Paso 3.

Paso 3: Sea S_r el conjunto de índices $t \in T'_{r+1}$ tal que $a'_t x \geq b_t$ es un corte factible introducido en alguna iteración $p < r$, que $\rho_r \leq \beta \rho_p$ y que $a'_t x^r - \|a_t\|\rho_t > b_t$.

Es decir que la distancia de x^r al hiperplano $a'_t x = b_t$ es mayor que ρ_t .

Ahora tomemos

$$T_{r+1} = T'_{r+1} \setminus S_r,$$

y vamos al Paso 1.

Para ilustrar este algoritmo resolveremos y graficaremos el ejemplo 1 visto anteriormente.

Notar que la condición $c'z^0 \geq v(P)$ implica la consistencia de (P) y entonces la compactes de $F^* \neq \emptyset$. Por otra parte, ya que $F^* \subset F_r \subset F_0$, F_r es un politopo para todo $r \in \mathbb{N}$, tal que (Q_r) tiene una solución óptima (x^r, ρ_r) , con $\rho_r \geq 0$, es decir, el algoritmo está bien definido. Observar también que $\{\alpha_r\}$ es una sucesión no creciente, por que, en el Paso 2, $\alpha_{r+1} = \alpha_r$ o $\alpha_{r+1} = c'x^r \leq \alpha_r - \|c\|\rho_r < \alpha_r$. Por otro lado, ésta es acotada inferiormente por $v(P)$ pues los cortes objetivos son realizados a través de puntos factibles.

Para probar que $\{\rho_r\}$ tiende a cero, necesitamos mostrar que esta sucesión es no creciente, a pesar de las reglas de borrado. El efecto de las reglas de borrado en el Paso 2 es eliminar, en la representación lineal de F_{r+1} , una restricción redundante (un corte objetivo anterior), tal que esta regla preserve la contracción de $\{F_r\}$. Este no es el caso para las reglas de borrado del Paso 3, cuyo efecto es el que sigue: una vez que el nuevo corte ha sido determinado en el Paso 2, ciertas restricciones (cortes factibles anteriores) son eliminados en la representación lineal de F_r , todos siendo desajustados con respecto a la bola máxima inscrita $x^r + \rho_r(\text{cl}B)$; entonces el nuevo corte es agregado para obtener F_{r+1} . Probaremos ahora que borrar una de estas restricciones no altera el tamaño de la bola inscrita más grande en F_r , tal que, mediante el principio de inducción, la sucesión $\{\rho_r\}$ será no creciente.

Sea $F_r = \{x \in \mathbb{R}^n | c'_u x \geq d_u, u \in U\}$, $|U| < \infty$, con $c_u \neq 0_n$ para todo $u \in U$. Asumimos que la distancia de x^r al hiperplano $c'_v x = d_v$ es mayor que ρ_r .

Entonces

$$c'_u x^r - \|c_u\| \rho_r \geq d_u \quad \text{para todo } u \in U,$$

con la desigualdad siendo estricta para el caso $u = v$. Ahora asumimos que

$$z^r + \mu_r(\text{cl}B) \subset G_r := \{x \in \mathbb{R}^n | c'_u x \geq d_u, u \in U \setminus \{v\}\},$$

para cierto z^r y $\mu_r > \rho_r$ obtendremos una contradicción. Dado que la última bola es incluida en G_r pero no en F_r , tenemos

$$c'_u x^r - \|c_u\| \mu_r \geq d_u \quad \text{para todo } u \in U \setminus \{v\},$$

donde $c'_v x^r - \|c_v\| \mu_r < d_v$.

Notar que $x(\lambda) = (1 - \lambda)x^r + \lambda z^r$, $\lambda \in [0, 1]$. Como

$$\lim_{\lambda \searrow 0} c'_v x(\lambda) > d_v + \|c_v\| \rho_r,$$

existe $\bar{\lambda} \in]0, 1[$ y $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$c'_v x(\bar{\lambda}) > d_v + (\rho_r + \varepsilon_1) \|c_v\|.$$

Por otro lado, existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para todo $u \in U \setminus \{v\}$,

$$c'_u x(\bar{\lambda}) > d_u + [(1 - \bar{\lambda})\rho_r + \bar{\lambda}\mu_r] \|c_u\| > d_u + (\rho_r + \varepsilon_2) \|c_u\|.$$

Entonces, definiendo $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, llegamos a la conclusión contradictoria de que $x(\bar{\lambda}) + (\rho_r + \varepsilon_3)(\text{cl}B) \subset F_r$.

Teorema 0.34. *Si el algoritmo anterior no termina entonces $\lim_r \rho_r = 0$. Por lo tanto la finalización finita ocurrirá si ha sido escogida una tolerancia positiva.*

Demostración. $\{\rho_r\}$ es convergente pues es no creciente. Ahora obtendremos una contradicción mediante asumir que $\bar{\rho} := \lim_r \rho_r > 0$.

Dado que $\{\rho_r\}$ es una sucesión no creciente que converge a $\bar{\rho} < \beta^{-1}\bar{\rho}$, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{\rho} < \rho_r \leq \rho_p < \beta^{-1}\bar{\rho}$ para todo $r \geq p$, así que $\rho_r > \beta\rho_p$ (De otra manera, tendríamos $\beta^{-1}\bar{\rho} \leq \beta^{-1}\rho_r \leq \rho_p < \beta^{-1}\bar{\rho}$). De esta manera, para r mayor que cierto $p \in \mathbb{N}$, la regla de borrado del Paso 3 está inactiva, $\{T_r\}$ llega a ser expansiva y $\{F_r\}$ contractiva. Ahora probaremos que $\{x^r\}$ no contiene subsucesiones de Cauchy, contradicción requerida ya que $\{x^r\} \subset F_0$ (acotada). Sea $k > r > p$. Dado que $x^k + \rho_k(\text{cl}B) \subset F_r \subset F_{r+1}$, (x^k, ρ_k) es factible para (Q_{r+1}) . Dos casos podrían surgir en la errésima iteración (Paso 2):

(a) Si $x^r \in F$, el corte objetivo $c'x \leq c'x^r$ fue realizado sobre F_r . Entonces $c'x^k + \|c\|\rho_k \leq \alpha_{r+1} = c'x^r$ y, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\|c\|\rho_k \leq c'(x^r - x^k) \leq \|c\| \|x^r - x^k\|,$$

así que $\bar{\rho} \leq \rho_k \leq \|x^r - x^k\|$.

(b) Si $x^r \notin F$, un corte factible $a'_t x \geq b_t$, $t \in T_{r+1} \subset T_k$ fue agregado a F_r , con $a'_t x^r < b_t$. Entonces $a_t \neq 0_n$ y $a'_t x^k - \|a_t\|\rho_k \geq b_t$, así que

$$\|a_t\|\rho_k \leq a'_t(x^r - x^k) \leq \|a_t\| \|x^r - x^k\|,$$

y otra vez ocurre que $\bar{\rho} \leq \rho_k \leq \|x^r - x^k\|$. ✓

Ahora presentaremos un lema que nos asegura, bajo ciertas condiciones, que el algoritmos converge a un punto óptimo del problema.

Lema 0.35. *Asumimos que $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ tiene un punto SS y que $\{a_t, t \in T\}$ es acotada. Entonces*

1. *El algoritmo 3 termina en la errésima iteración, para algún $r = 0, 1, \dots$, con $\alpha_r = v(P)$ si $\varepsilon = 0$, o*
2. *éste no termina, y $\lim_r \alpha_r = v(P)$.*

Demostración. Para comenzar notemos que la hipótesis implica que $\text{int}(F) \neq \emptyset$.

Sea $y^1 \in \mathbb{R}^n$ y $\eta > 0$ tal que $a'_t y^1 \geq b_t + \eta$ para todo $t \in T$.

1. Asumimos que $\rho_i > 0$, $i = 0, \dots, r-1$ y $\rho_r = 0$. Sabemos que $\alpha_t \geq v(P)$ por definición de α_r . Si $\alpha_r > v(P)$ entonces existirá un $y^2 \in F$ tal que $c'y^2 < \alpha_r$. Consideremos

$$x(\theta) := (1 - \theta)y^1 + \theta y^2, \text{ con } \theta \in]0, 1[.$$

Ya que $\lim_{\theta \nearrow 1} c'x(\theta) = c'y^2 < \alpha_r$ y $a'_t x(\theta) \geq b_t + (1 - \theta)\eta$, pues $y^2 \in F$ y eso implica que $a_t y^2 \geq b_t$, y junto con la desigualdad $a'_t y^1 \geq b_t + \eta$ hacen la desigualdad deseada, para toda $\theta \in]0, 1[$ y todo $t \in T$, podemos asumir la existencia de un punto SS para σ , \bar{x} , tal que $c'\bar{x} < \alpha_r$.

Sea $\delta > 0$ y $\eta > 0$ tal que $a'_t \bar{x} \geq b_t + \delta$ y $\mu > \|a_t\|$, para toda $t \in T$. Entonces, para toda $t \in T$, tenemos

$$a'_t \bar{x} - \mu^{-1} \delta \|a_t\| \geq a'_t \bar{x} - \delta \geq b_t,$$

tal que $\mu^{-1} \delta$ es una cota inferior de la distancia de \bar{x} a $a'_t x = b_t$. Y aparte $\|c\|^{-1}(\alpha_r - c'\bar{x}) > 0$ es la distancia de \bar{x} a $c'x = \alpha_r$. Por lo tanto

$$0 < \min\{\mu^{-1} \delta, \|c\|^{-1}(\alpha_r - c'\bar{x})\} \leq \rho_r,$$

Y esto contradice la finalización finita en la errésima iteración.

2. Si el algoritmo no termina, la sucesión no creciente infinita $\{\alpha_r\}$ tendrá un límite $\bar{\alpha}$. Si $\bar{\alpha} > v(P)$, podremos reemplazar α_r por $\bar{\alpha}$ en el argumento previo, tal que existe un $\bar{x} \in F$, con $c'\bar{x} < \bar{\alpha}$, y un $\bar{\rho} > 0$, tal que la distancia de \bar{x} a $c'x = \bar{\alpha}$ (y entonces a $c'x = \alpha_r \geq \bar{\alpha}$) y a $a'_t x = b_t$, con $t \in T$, es al menos $\bar{\rho}$. Esto significa que $0 < \bar{\rho} \leq \rho_r$ para todo r , en contradicción con el resultado del teorema 0.34, que dice que $\lim_r \rho_r = 0$. Por lo tanto como $\bar{\alpha}$ no es mayor que $v(P)$, tiene que ser igual. ✓

Finalmente, el teorema siguiente da las condiciones para que el algoritmo proporcione una solución.

Teorema 0.36. *Bajo las mismas condiciones del lema 0.35, si $z^0 \in F$ entonces o un cierto z^r es su último elemento (y z^r será una solución óptima de (P) si $\varepsilon = 0$) o los puntos de acumulación de $\{z^r\}$ existen y son soluciones óptimas.*

Demostración. Distinguiremos los dos casos del Lema anterior observando que $c'z^r = \alpha_r$, con $r = 0, 1, 2, \dots$

1. Si el algoritmo termina en un número r de pasos, $c'z^r = v(P)$, tal que $z^r \in F^*$.
2. De otra manera, $\{z^r\}$ es una sucesión infinita incluida en un conjunto F_0 , tal que ésta contiene una subsucesión que converge a un punto factible (Pues $\{z^r\} \subset F$, y F es cerrado). Ya que $\lim_r c'z^r = v(P)$, cualquier punto de acumulación de $\{z^r\}$ es también un óptimo.

Pruebas numéricas

En este capítulo resolveremos dos problemas específicos. El primer problema lo resolveremos con cada uno de los métodos presentados antes, para ilustrar de mejor manera las características y el uso de estos en la práctica. El segundo problema lo resolveremos con el uso de un algoritmo programado en MATLAB. Ambos problemas cuentan con las propiedades que cada método requiere para poder aplicarlo en ellos.

0.8. Problema 1

Consideremos el siguiente problema

$$(P_1) \quad \text{Inf} \quad 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad tx_1 + (1-t)x_2 \geq t - t^2, \quad t \in [0, 1].$$

El conjunto factible de (P_1) , F_1 , es la intersección de las epígrafes de un continuo de funciones lineales con pendientes negativas. F_1 puede ser identificado de la envoltura de un grupo de líneas o, por medio de la solución singular de una ecuación diferencial Clairaut cuya solución general es $y = cx + c/(c-1)$, $c < 0$, obteniendo a través de un cambio de parámetros: $c = t/(t-1)$. Por lo tanto, la ecuación es $y = xy' + y'/(y'-1)$, y su solución singular, después de la eliminación del parámetro, es el arco astroide $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$, $x > 0$, $y > 0$. De aquí que F_1 sea el epígrafo de una función convexa

$$h(x_1) = \begin{cases} +\infty & (x_1 < 0), \\ 1 + x_1 - 2(x_1)^{1/2} & (0 \leq x_1 \leq 1), \\ 0 & (1 < x_1), \end{cases}$$

así como la suma algebraica de la envoltura convexa de los puntos extremos de F_1 con el cono convexo generado por las dos direcciones extremas (ver Figura 1).

0.9. Método de Reducción local

El problema a resolver es muy sensible con respecto a la frontera de sus conjuntos de nivel, en el sentido de que $L(v + \varepsilon)$ tiene una forma de “superficie de plátano” cuando ε es un número positivo pequeño (ver figura anterior). Esto puede hacer ver que las condiciones (8) y (9) de la sección *Aproximación de reducción local* se pueden reemplazar en este problema por $D_t g(t, x) = 0$, es decir, $t = \frac{1}{2}(1 - x_1 + x_2)$, el cual es el único valor posible de t_1 y t_2 . Por lo tanto el sistema no lineal asociado con (P_1) es, denotando a $y = y_1 + y_2$,

$$\left\{ y \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; tx_1 + (1-t)x_2 + t^2 - t = 0; t = \frac{1}{2}(1 - x_1 + x_2) \right\},$$

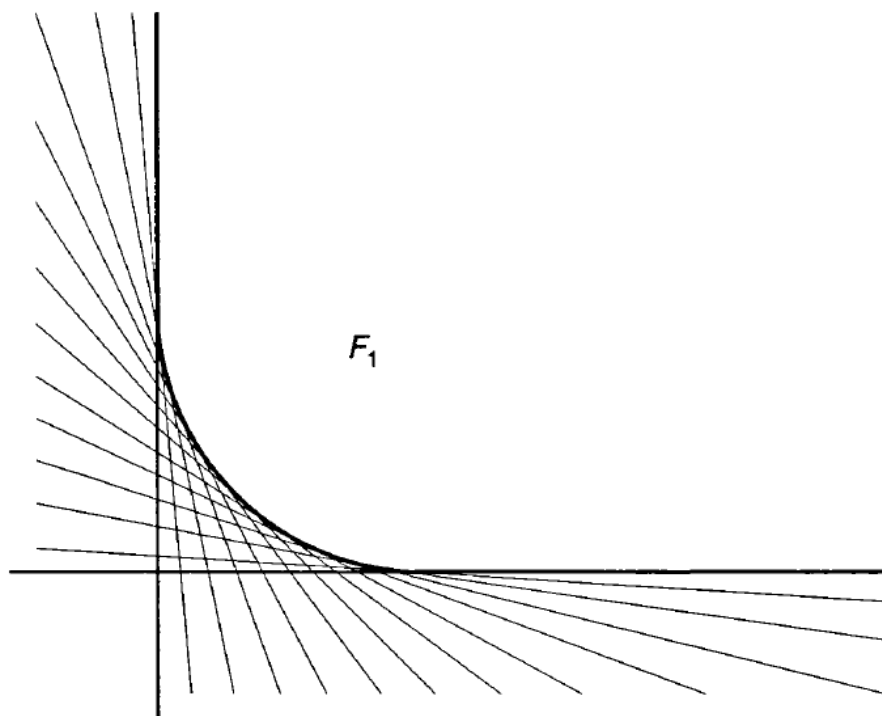


Figura 1: Gráfica de la región factible del problema (P_1)

con única solución $x^* = (1/9, 4/9)^t$, $y = 3$ y $t = 2/3$. Y consecuentemente x^* es la única solución óptima de (P_1) .

0.10. Método de discretización mediante planos de corte

En esta sección resolveremos el problema (P_1) , de la primera sección de este capítulo, con el método de discretización mediante planos de corte. Usaremos el algoritmo 2 de la sección *Discretización mediante planos de corte* del capítulo anterior.

Comenzaremos dando una sucesión $\{\varepsilon_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ con $\varepsilon_r = 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Estableceremos una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-3}$. Inicializaremos el índice de iteración $r = 0$. Y comenzaremos con $S = T_0 = \{0, 1\} \subset [0, 1]$.

Primera iteración

Como primer paso del algoritmo resolveremos el subproblema finito

$$\begin{aligned} (P_{1_0}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\ & \text{s.a.} \quad x_2 \geq 0 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Dado que tiene solución, que es $x^0 = (0, 0)$, pasamos al paso 2.

Ahora calculamos $s_0 = \inf_{t \in T} g(t, x^0) = \min\{t^2 - t, t \in \mathbb{R}\} = -1/4$. Como $s_0 < -10^{-3}$ encontramos un conjunto finito S_0 , que satisface

$$g(t, x^0) = t^2 - t \leq s_0 + \varepsilon = -1/4 + 0.$$

Y dicho conjunto es $S_0 = \{1/2\}$. Por lo tanto reemplazamos 0 por 1, y tenemos ahora que $T_1 = T_0 \cup S_0 = \{0, 1\} \cup \{1/2\} = \{0, 1/2, 1\}$. Y vamos al paso uno de la siguiente iteración.

Segunda iteración

El nuevo subproblema finito es

$$\begin{aligned} (P_{1_1}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad x_2 \geq 0 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4. \end{aligned}$$

Cuya solución $x^1 = (0, 1/2)$ existe, por lo que pasamos al paso 2.

Y tenemos que $s_1 = \min\{t^2 - 3/2t + 1/2, t \in \mathbb{R}\} = -1/16$. Ya que $s_1 < -10^{-3}$ buscamos S_1 que satisfaga

$$g(t, x^1) = t^2 - 3/2t + 1/2 \leq s_1 + \varepsilon = -1/16 + 0.$$

El conjunto es $S_1 = \{3/4\}$. Reemplazamos 1 por 2, definimos $T_2 = T_1 \cup S_1 = \{0, 1/2, 3/4, 1\}$, y pasamos a la siguiente iteración.

Tercera iteración

Ahora el subproblema finito es

$$\begin{aligned} (P_{1_2}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad x_2 \geq 0 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\ & \quad \quad 3/4x_1 + 1/4x_2 \geq 3/16. \end{aligned}$$

La solución del subproblema anterior existe y es $x^2 = (1/8, 3/8)$, entonces pasamos al paso 2. Podemos ver que $s_2 = \min\{t^2 - 5/4t + 3/8, t \in \mathbb{R}\} = -1/64$. Pero $s_2 < -10^{-3}$, por ello encontramos S_2 que cumpla

$$g(t, x^2) = t^2 - 5/4t + 3/8 \leq s_2 + \varepsilon = -1/64 + 0.$$

El cual es $S_2 = \{5/8\}$. Incrementando de 2 a 3, el nuevo $T_3 = \{0, 1/2, 3/4, 5/8, 1\}$. Con esto pasamos a la siguiente iteración.

Cuarta iteración

Para esta iteración tenemos el subproblema finito

$$\begin{aligned}
(P_{13}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
& \text{s.a.} \quad x_2 \geq 0 \\
& \quad \quad x_1 \geq 0 \\
& \quad \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\
& \quad \quad 3/4x_1 + 1/4x_2 \geq 3/16 \\
& \quad \quad 5/8x_1 + 3/8x_2 \geq 15/64.
\end{aligned}$$

El anterior subproblema tiene solución, y es $x^3 = (3/32, 15/32)$. Por ello pasamos al paso 2. Obtenemos $s_3 = \min\{t^2 - 11/8t + 15/32, t \in \mathbb{R}\} = -1/256$. Vemos que $s_3 < -10^{-3}$, por lo que debemos calcular S_3 que cumpla

$$g(t, x^3) = t^2 - 11/8t + 15/32 \leq s_3 + \varepsilon = -1/256 + 0.$$

Dicho conjunto es $S_3 = \{11/16\}$. De 3 pasamos a 4, y tenemos el conjunto $T_4 = \{0, 1/2, 3/4, 5/8, 11/16, 1\}$. Seguimos a la iteración siguiente.

Quinta iteración

El subproblema finito que corresponde a esta iteración es

$$\begin{aligned}
(P_{14}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
& \text{s.a.} \quad x_2 \geq 0 \\
& \quad \quad x_1 \geq 0 \\
& \quad \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\
& \quad \quad 3/4x_1 + 1/4x_2 \geq 3/16 \\
& \quad \quad 5/8x_1 + 3/8x_2 \geq 15/64 \\
& \quad \quad 11/16x_1 + 5/16x_2 \geq 55/256.
\end{aligned}$$

La solución de este subproblema existe, y es $x^4 = (15/128, 55/128)$. Ya que sabemos esto, pasamos al paso 2.

Calculamos $s_4 = \min\{t^2 - 21/16t + 55/128, t \in \mathbb{R}\} = -1/1024$. Ahora vemos que se cumple $s_4 = -1/1024 \geq -\varepsilon = -10^{-3}$, por lo que el algoritmo se detiene aquí.

Obtenemos de lo anterior una solución óptima aproximada del problema (P_1) , con una tolerancia de 10^{-3} .

Veremos en la tabla de la Figura 2 los resultados del proceso anterior. En ella podemos observar que poco a poco se van acercando los valores a los que nos produjo el método de reducción local.

0.11. Método de discretización mediante rejillas

En esta sección resolveremos el problema (P_1) de la primera sección de este capítulo con el algoritmo 1 presentado en la sección *Discretización mediante rejillas* del capítulo anterior. Comenzaremos dando una sucesión de rejillas de la forma $\{T_r = \{0\} \cup \{1/2^r, \dots, 2^r/2^r\}, r \in \mathbb{N}\}$. Por lo que cada T_{r+1} será un refinamiento de T_r . También daremos una tolerancia de 10^{-3} e inicializaremos el índice en 1. Por lo que empieza el algoritmo con $S = T_1 = \{0, 1/2, 1\}$.

Xr	Z=2Xr_1+Xr_2	Sr	εr	
0	0	0	-0.25	0
0	0.5	0.5	-0.06	0
0.125	0.375	0.625	-0.015625	0
0.09375	0.46875	0.65625	-0.00390625	0
0.1171875	0.4296875	0.6640625	-0.00097656	0

Figura 2: Tabla de las iteraciones del algoritmo 2 aplicado al Problema (P_1)

Primera iteración

El primer subproblema finito a resolver es

$$\begin{aligned}
 (P_{1_1}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
 & \text{s.a} \quad x_2 \geq 0 \\
 & \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\
 & \quad x_1 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Cuya solución es $x^1 = (0, 1/2)$, por lo que pasamos al paso 2.

En el paso 2 tenemos que $s_1 = \min\{t^2 - 3/2t + 1/2, t \in \mathbb{R}\} = -1/16$. Ya que $s_1 < -10^{-3}$ reemplazamos 1 por 2 y pasamos a la siguiente iteración.

Segunda iteración

El siguiente subproblema finito es

$$\begin{aligned}
 (P_{1_2}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
 & \text{s.a} \quad x_2 \geq 0 \\
 & \quad 1/4x_1 + 3/4x_2 \geq 3/16 \\
 & \quad 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\
 & \quad 3/4x_1 + 1/4x_2 \geq 3/16 \\
 & \quad x_1 \geq 0.
 \end{aligned}$$

La solución del subproblema anterior existe y es $x^2 = (1/8, 3/8)$, entonces pasamos al paso 2. Podemos ver que $s_2 = \min\{t^2 - 5/4t + 3/8, t \in \mathbb{R}\} = -1/64$. Pero $s_2 < -10^{-3}$, por lo que incrementamos uno el índice, de 2 a 3, y pasamos a la siguiente iteración.

Tercera iteración

En esta iteración el subproblema finito es

$$\begin{aligned}
(P_{13}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
& \text{s.a.} \quad x_2 \geq 0 \\
& 1/8x_1 + 7/8x_2 \geq 7/64 \\
& 1/4x_1 + 3/4x_2 \geq 3/16 \\
& 3/8x_1 + 5/8x_2 \geq 15/64 \\
& 1/2x_1 + 1/2x_2 \geq 1/4 \\
& 5/8x_1 + 5/8x_2 \geq 15/64 \\
& 3/4x_1 + 1/4x_2 \geq 3/16 \\
& 7/8x_1 + 1/8x_2 \geq 7/64 \\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

El anterior subproblema tiene solución, y es $x^3 = (3/32, 15/32)$. Por ello pasamos al paso 2. Obtenemos $s_3 = \min\{t^2 - 11/8t + 15/32, t \in \mathbb{R}\} = -1/256$. Vemos que $s_3 < -10^{-3}$, por lo tanto incrementamos el índice y pasamos a la siguiente iteración.

Cuarta iteración

El subproblema finito para esta iteración es

$$\begin{aligned}
(P_{13}) \quad & \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 \\
& \text{s.a.} \quad x_2 \geq 0 \\
& 1/16x_1 + 15/16x_2 \geq 15/256 \\
& 1/8x_1 + 7/8x_2 \geq 7/64 \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& 7/8x_1 + 1/8x_2 \geq 7/64 \\
& 15/16x_1 + 1/16x_2 \geq 15/256 \\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

La solución de este subproblema existe, y es $x^4 = (15/128, 55/128)$. Ahora pasamos al paso 2.

Calculamos $s_4 = \min\{t^2 - 21/16t + 55/128, t \in \mathbb{R}\} = -1/1024$. Por lo que vemos se cumple $s_4 = -1/1024 \geq -\varepsilon = -10^{-3}$, y eso indica que el algoritmo se detiene aquí. Los resultados obtenidos son los mismos que los obtenidos en el método anterior.

0.12. Problema 2

Consideremos el cálculo de polinomios, de grado menor que n , de mejor L_1 -aproximación a $\tan(t)$, con $t \in [0, 1]$. Formularemos el problema como la minimización de $c'x$, con

$$c_i = \int_0^1 t^{i-1} dt = i^{-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

para todos los polinomios factibles $p_n(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$, i.e.

$$(P^n) \quad \inf \sum_{i=1}^n i^{-1} x_i$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \geq \tan t, \quad t \in [0, 1].$$

Como una consecuencia del Teorema 3 en [4], este problema tiene una única solución óptima x^n que puede ser calculada explícitamente resolviendo un sistema lineal obtenido de las condiciones específicas de optimalidad dadas en el Teorema 4 del mismo.

Por ejemplo, para $n = 2$, el problema por resolver es:

$$(P^2) \quad \inf \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + tx_2 \geq \tan(t), \quad t \in [0, 1].$$

Éste se puede resolver con cualquier método presentado antes, y su solución es: $x^* = (0, \tan(1))^t$, $t_1 = 0, t_2 = 1, v(P^2) = 0.77870386$.

0.13. Aplicación del algoritmo

Este problema se resolverá con la ayuda del algoritmo 4 programado en MATLAB, que es una modificación de un algoritmo originalmente proporcionado por el Dr. Jornet. El código de dicho algoritmo se presentará al final de la tesis en un apéndice especial.

0.14. Resolviendo el Problema 2

Para comenzar hay que notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se genera un problema para resolver. En estas pruebas tomaremos los casos cuando $n = 2, 3, \dots, 8$. Los resultados se presentan en la Tabla 1 a continuación.

n	Xn	v(Pn)
2	0.000000000025523, 1.557407724629456	0.7787039
3	0.089053351432085, 0.423223704953671, 1.045130668631828	0.6490421
4	0.000000000000682, 1.145725095737134, -0.624163533819342, 1.035846162736448	0.6237696
5	0.006632337928153, 0.891042683146622, 0.599908918731131, -0.933677128981969, 0.993500913830985	0.6174042
6	0.000000000001393, 1.023298631577717, -0.240809857974654, 1.221899431331636, -1.388169763801386, 0.941189283521538	0.6160851
7	0.000503260474318, 0.984715122172446, 0.164023895504585, -0.436920599892275, 1.78023252940533, -1.8912599403213, 0.956113457988839	0.6157295
8	0, 1.00291350324948, -0.053487673746702, 0.709811315082931, -1.29943977747649, 2.49937987216787, -2.2053528203432, 0.903583305721128	0.6156532

Tabla 1: Tabla de los resultados del algoritmo 4 aplicado al problema (P^n) con $n = 2, \dots, 8$

En ésta se presentan las soluciones de los problemas (P^n) para $n = 2, \dots, 8$. La primera columna presenta el valor de n, que denota el problema que se resolvió. La segunda columna presenta los puntos óptimos aproximados con una tolerancia de 10^{-7} , para cada problema, calculado mediante el algoritmo mencionado antes. La tercera columna denota el valor aproximado al óptimo, que obtenemos evaluando en la función objetivo los puntos de la columna anterior.

Como se mencionó antes la tolerancia proporcionada para este problema es de 10^{-7} . Hay que hacer notar que para una tolerancia menor a dicha cifra el algoritmo realiza un número excesivo de iteraciones sin concluir satisfactoriamente. Por lo que es importante decir que en la práctica no siempre se podrá obtener un óptimo, pues habrá ciertos problemas que generen acumulaciones o resultados alternantes que no converjan a un punto específico.

Conclusión

En esta tesis se revisaron los conceptos necesarios para comprender los métodos que resuelven el problema de la programación lineal semi-infinita. Los métodos revisados fueron los de reducción local y de discretización. Para esto, fue necesario presentar algunos conceptos de convexidad, consistencia y optimalidad. Se revisó también el teorema de Karush Kuhn Tucker y sus derivados, para poder usarlo en la construcción del método de reducción local.

Se presentaron algunos métodos, que por ser más eficientes computacionalmente, resuelven el problema de la PLSI en un número finito de pasos, definiendo previamente una tolerancia. Los algoritmos de dichos métodos fueron presentados junto con teoremas que proporcionan las condiciones en las que se alcanza un óptimo. También se han presentado dos problemas, uno se ha resuelto con todos los métodos presentados, y otro se resolvió con un algoritmo programado en MatLab. Presentando al final el algoritmo usado en esta parte.

Ya en la práctica, algunas desventajas de los métodos de discretización son que se generan abultamientos no deseados (a menos que P tenga una solución fuertemente única) y el número de restricciones de los problemas de PL auxiliares se incrementa significativamente (a menos que sean implementadas reglas de eliminación eficientes). El método de planos de corte de Kelley clásico sólo provee sucesiones de puntos no factibles, por lo que no se puede determinar una ε -optimización. Al determinar una tolerancia muy pequeña la aproximación se vuelve más exacta, pero el número de iteraciones y el tiempo de cómputo se incrementa, estando más propenso a los abultamientos antes mencionados.

La eficiencia del método de reducción local depende directamente del método quasi-Newton usado para resolver el sistema generado por el problema original. Se va a tener buen comportamiento local siempre que se empiece suficientemente cerca de una solución óptima. También se debe hacer notar que para poder usar este método se debe de contar con ciertas condiciones de suavidad y LFM, lo cual reduce la aplicación del método.

Finalmente podemos decir que bajo buenas condiciones en las funciones, el método que tiene mejor comportamiento es el de reducción local, pues nos asegura una óptimo.

Algoritmo 4 programado en MATLAB

Este algoritmo es una modificación creada para su uso en esta tesis en la solución del *Problema 2*. Lo que se presenta aquí es un script desarrollado en MATLAB.

```
%El siguiente algoritmo nos va a permitir resolver un problema de
%programación semi-infinita. Con unas funciones de las restricciones de clase C1
%convexas. Concretamente este programa implementa el método de Kelley.

format long

in=input('Intervalo donde varía t ');
c=input('Función objetivo ');
tic
%Como el intervalo de valores que permiten conocer las infinitas
%restricciones no es por lo general discreto, lo discretizamos. Para ello
%dividimos, por ejemplo, el intervalo en 1000 puntos.
v=linspace(in(1),in(2),1000);
a=[];b=[];hol=[];
%Iniciamos así el método con un poliedro convexo que contiene al conjunto factible
%del problema de programación semi-infinita. Definimos el correspondiente poliedro:
for i=1:1000
    a(i,:)=feval(@AT8,v(i));b(i)=feval(@BT,v(i));
end
    tr=-1;
    %Se resuelve así un problema auxiliar. A saber:
    while tr<-10(-8)
        %xr=linprog(c,-a,-b,[],[],[],[],'op');
        xr=linprog(c,-a,-b);
        t=in(1):10(-5):in(2);%Y se define el nuevo conjunto factible, para cierto
        %semiespacio conteniendo al conjunto factible; y que separa el punto actual
        %de F. Concretamente la restricción de corte se determina como la más
        %violada de las restricciones en el punto actual.
        %hol=feval(@fhol,t,xr);
        for i=1:length(t)
            hol(i)=FHOL8(t(i),xr');
        end
        [tr,sr]=min(hol);
        a=[a;feval(@AT8,in(1)+(in(2)-in(1))*sr/10(6))];
        %Se define la nueva matriz de restricciones
        b=[b;feval(@BT,in(1)+(in(2)-in(1))*sr/10(6))];
```

```
    %y el nuevo vector de términos independientes.  
    %Se inicia finalmente una nueva iteración del método.  
end  
disp(' La solución del problema de programación semiinfinita es finalmente: ')  
xr  
alpha=c*xr;  
disp('El valor del problema de optimización en el punto óptimo es:')  
alpha  
toc
```

Bibliografía

- [1] Goberna, M. A., et al, *Optimización lineal. Teoría, métodos y modelos*, Edit. Mc Graw Hill, 2004.
- [2] Goberna, M. A., Lopez, M. A., *Linear Semi-infinite Optimization*, Edit. John Wiley & Sons, 1998.
- [3] Goberna, M. A., *Linear semi-infinite programming in the 21th century*, Artículo sin Publicar, 2010.
- [4] Bojanic, R., Devore, R., *On polynomials of best one-sided approximation*, L'Enseignement Mathématique (Ser. 2), 1966.