



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SITUACIONAL A TRAVÉS DE ESTRATEGIAS
DE COMPRESIÓN TEXTUAL DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN
SECUNDARIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
REYNALDO IGLECIAS ANTONIO

DIRECTORES DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

PUEBLA, PUE.

02 de Diciembre de 2016

DEDICATORIA

A mis padres

REGINALDO IGLECIAS PEREDO
SANTA ANTONIO GONZALEZ

A mis hermanos

MARCO ANTONIO

JULIO

MELISA

ERIK

REY FERNANDO

NATIVIDAD

SANTA ISABEL

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Reginaldo y Santa, quienes siempre me apoyaron incondicionalmente en mis estudios a lo largo de estos años. A pesar de las circunstancias nunca dejaron de dar lo mejor para que pudiera concluir esta licenciatura. A ellos dedico esta tesis.

A mis hermanos, Marco Antonio, Julio, Melisa, Erik, Rey Fernando, Natividad y Santa Isabel, quienes a pesar de la distancia siempre estuvieron apoyándome, animándome a seguir y nunca darme por vencido. En especial agradezco a mis hermanos Julio y Erik quienes me apoyaron económicamente en estos 5 años de estudios.

A mis compañeros y amigos de la facultad, con quienes compartí varias experiencias, buenas y malas, pero que al final me ayudaron a crecer como persona. En especial a Ángel, Rubén, Alberto, Rocío, Gloria, y algunos más, quienes estuvieron conmigo en estos años. A un amigo especial, J. Pablo por compartir momentos de alegría.

A mis asesores de tesis, Dra. Lidia A. Hernández Rebollar y Dr. Josip Slisko Ignjatov, quienes me brindaron la confianza para trabajar bajo su tutela, apoyándome y compartiéndome de sus conocimientos.

A mi tutor académico, que también fue mi asesor de tesis, Dra. Lidia A. Hernández Rebollar, quien siempre me dio buenos consejos y orientó en el transcurso de la licenciatura. Le agradezco el apoyo que me brindó para asistir a congresos y talleres en el área de educación.

A mis sinodales, Dra. María Araceli Juárez Ramírez, Dr. David Villa Hernández y Dr. Eric Flores Medrano por haber aceptado formar parte del jurado y tomarse el tiempo para revisar esta tesis, además de hacer observaciones y sugerencias para mejorar este trabajo.

Introducción

La comprensión de textos matemáticos, desde hace mucho tiempo, es una de tantas dificultades que el estudiante enfrenta para poder llegar a una solución correcta del problema; además de ser el primer paso hacia la resolución. La comprensión de textos, va más allá de ser una tarea lingüística de decodificación de signos escritos (Ferro & Eduardo, 2007). El uso de estrategias de comprensión, hace que los lectores sean autónomos, además de ser capaces de enfrentarse a distintos tipos de textos (Solé, 1992).

En la resolución de problemas verbales de matemáticas los estudiantes se enfrentan a la tarea de comprensión textual, previa a la matematización y a la aplicación de algún algoritmo.

En investigaciones previas se ha constatado que, en la resolución de problemas de matemáticas, la construcción de un modelo situacional, congruente con la situación planteada, es una tarea necesaria pero compleja para el estudiante (Juárez, Ignjatov, Hernández, & Monroy, 2015). En particular, los problemas de trigonometría en secundaria requieren que los estudiantes comprendan el texto, construyan un modelo de la situación, luego un modelo matemático y decidan el procedimiento matemático que los lleve a la solución.

Esta tesis tiene como propósito estudiar los modelos situacionales que construyeron estudiantes de secundaria, antes, durante y después de la implementación de algunas estrategias de comprensión textual para la resolución de algunos problemas de matemáticas. Se presenta tanto un análisis del desempeño grupal, así como los logros de algunos casos particulares.

Para el análisis de los modelos situacionales se observaron los dibujos que los estudiantes realizaron inmediatamente después de leer el enunciado de un problema verbal de matemáticas previamente seleccionado.

Los dibujos que realizaron los estudiantes, antes de la implementación de las estrategias de comprensión (sesión de diagnóstico), dejaron ver que la mayoría de ellos intentó resolver el problema planteado sin comprender la situación del mismo. Lo anterior impidió que dichos estudiantes obtuvieran la respuesta correcta. En la sesión de evaluación, después de haber trabajado con ellos las estrategias de comprensión textual, los resultados mostraron una mejora en aquellos alumnos que no pudieron construir un dibujo congruente en la sesión de diagnóstico. Estos estudiantes, también se desempeñaron mejor en la resolución del problema.

Objetivo

Comprobar que la implementación de estrategias de comprensión textual favorece la construcción del modelo situacional de un problema verbal de matemáticas así como su resolución.

En el primer capítulo de esta tesis se presenta un resumen de investigaciones relacionadas con las dificultades en la comprensión textual, así como la teoría de Van Dijk y Kintsch (1983), la cual fue de gran importancia para el desarrollo de la tesis.

En el segundo capítulo se presenta la teoría de Polya (1965), la cual nos proporcionó estrategias que ayudaron en el proceso de comprensión y resolución de problemas matemáticos. También se muestran estrategias que diversos autores proponen para la comprensión lectora, por ejemplo, de Elosúa (1993) y Van Dijk y Kintsch (1983). Éstas sirvieron de guía en el proceso de construcción del modelo situacional.

En el tercer capítulo se muestran los resultados de la investigación realizada con un grupo de estudiantes que cursaban el tercer grado de secundaria. Aquí se puede ver como las estrategias de comprensión textual son una herramienta para guiar a los alumnos hacia la resolución de un problema de matemáticas.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presenta una conclusión sobre este trabajo de investigación. En general, se concluye que con las estrategias implementadas los participantes realizaron una representación congruente con el problema y llegaron a una solución correcta del mismo.

Índice general

Introducción	I
1. Comprensión Textual y Modelo Situacional	1
1.1 Dificultades en la comprensión textual.....	1
1.2 Modelo de Teun A. Van Dijk y W. Kintsch	4
2. Estrategias para la comprensión de textos matemáticos	9
2.1 Modelo de George Polya	9
2.2 Estrategias para la comprensión textual.....	18
2.3 Estrategias seleccionadas para nuestra investigación.	24
3. Metodología y Resultados	26
3.1 Desarrollo de investigación	26
3.1.1 Grupo participante.....	27
3.2 Resultados	28
3.2.1 Sesión de diagnóstico	28
3.2.2 Sesión de intervención	31
3.2.2.1 Trabajo individual	32
3.2.2.2 Actividad en equipo.....	35
3.2.2.3 Trabajo grupal.....	36
3.2.3 Sesión de evaluación	36
3.3 Casos particulares	40
3.3.1 Estudiante 1	40
3.3.2 Estudiante 3	42
3.3.3 Estudiante 11	43
3.3.4 Estudiante 20.....	45
Conclusiones.....	48
Bibliografía.....	50

**LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SITUACIONAL A
TRAVÉS DE ESTRATEGIAS DE COMPRESIÓN TEXTUAL DE
PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA**

Reynaldo Iglecias Antonio

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar
Dr. Josip Slisko Ignjatov

02 de Diciembre de 2016

Capítulo 1

Comprensión Textual y Modelo Situacional

En este capítulo se hace mención de algunas investigaciones relacionadas con las dificultades que se presentan durante el proceso de comprensión de cualquier tipo de texto. En particular se destaca el modelo de comprensión textual de Van Dijk y W. Kintsch (1983).

1.1 Dificultades en la comprensión textual

Entender un texto presenta diferentes dificultades cuándo no se tienen presentes los elementos necesarios para llevar a cabo el proceso de comprensión. Algunos de los factores que intervienen para llegar a una buena comprensión textual son la habilidad lectora, así como los conocimientos previos del lector.

El lector debe ser capaz de interrogarse acerca de su propia comprensión, estableciendo relaciones entre lo que lee y lo que forma parte de su acervo personal, cuestionando su conocimiento y modificándolo, estableciendo generalizaciones que permitan transferir lo aprendido a otros contextos distintos (Solé, 1998).

En el desarrollo de la habilidad de comprensión intervienen las herramientas cognitivas, sin embargo, muchas veces los estudiantes carecen de estas. Describir los procesos de lectura supone conocer varias cuestiones que son centrales para la psicología cognitiva, estas cuestiones son, por ejemplo, el dinamismo de las representaciones mentales, los mecanismos de almacenamiento y recuperación en la memoria, los procesos atencionales o el uso de estrategias que el lector activa ante la lectura de un texto (Leon, 1996).

La comprensión lectora es una compleja actividad cognitiva del procesamiento de información, cuyo objetivo es la comprensión del mensaje escrito (Elosúa, 1993).

De Avalos y Velásquez (2000) mencionan dos tipos de texto, orales y escritos, así, en relación con la comprensión de textos, se debe distinguir entre:

- Los fragmentos de mundos, reales o imaginarios, que se mencionan.
- Aquello que es propio del modo de “ver” el mundo de los autores de textos creados para significar.
- Aquello que es propio del modo de ser de los textos.
- Aquello que pertenece a la manera de ser de quienes los interpretan.

Así entonces, estos autores argumentan que, para comprender un texto, no basta con aplicar las competencias lingüísticas respectivas, para darle un sentido completo se debe reconocer la realidad a la cual el texto se refiera, para ello se puede recurrir a los esquemas mentales previos, es decir, recurrir a aquella parte de nuestro conocimiento almacenada en nuestra memoria que nos dice la relación con el mundo, la cultura y el tema tratado en el texto.

En una investigación realizada por Bustos (2010) sobre las dificultades de la comprensión lectora, se presenta algunas dificultades típicas en los problemas de comprensión, y se menciona que los alumnos con problemas en la comprensión lectora suelen presentar las siguientes dificultades:

- No saben leer flexible ni estratégicamente, según los propósitos de la lectura.
- Carecen de conocimientos previos sobre el tema de que trata el texto, carencia reflejada probablemente en un vocabulario pobre.
- Incapaz de activar los conocimientos previos que se tienen.
- No generan inferencias, a menudo necesarias para lograr una comprensión mental coherente del texto.
- No captan el propósito o la intención predominante del autor.
- No diferencian la importancia de los enunciados del texto.
- No supervisan el propio proceso lector, es decir, no se auto-observan mientras están leyendo y por tanto no auto-comprueban si están entendiendo.
- No utilizan las pistas del contexto para averiguar el significado de palabras/expresiones desconocidas.

Bustos (2010), basándose en una investigación de Defior (1998), reporta que se pueden encontrar las siguientes razones referentes a los problemas de comprensión:

1. Confusión respecto a las demandas de la tarea.
2. Pobreza de vocabulario.
3. Escasos conocimientos previos.
4. Problemas de memoria.
5. Desconocimiento o falta de dominio de las estrategias de comprensión.
6. Escaso control de la comprensión.
7. Baja autoestima y escaso interés en la tarea.
8. Aproximación pasiva y rechazo a la lectura.
9. Falta de motivación.

Para Echavarría (2006), el lector es quién va construyendo progresivamente el significado del texto y, en este proceso de construcción del significado, el texto juega un papel importante pero, sobre todo, es fundamental el comportamiento activo del lector, es quién debe aportar sus conocimientos disponibles, definir sus objetivos de lectura y aplicar determinadas estrategias para comprender.

Para Peronard (1997), la comprensión no es concebida como un proceso de transferencia de significados de texto escrito a la mente del lector, sino cómo producto de una interacción continua entre el texto escrito y el sujeto lector, quién porta intencionadamente sus conocimientos previos y sus capacidades de razonamiento inferencial para elaborar una interpretación coherente del texto.

Antes de seguir hablando más sobre la comprensión de un texto debemos saber qué es o en qué se basa dicha comprensión. La siguiente definición es de Parodi (2009) citado por Makuc (2011):

“Definimos la comprensión de un texto como un proceso cognitivo constructivo e intencionado en el que el lector elabora una interpretación y una representación mental de los significados textuales, basándose tanto en la información del texto escrito como en sus conocimientos previos y de acuerdo con un objetivo de lectura acorde a sus propósitos y a las demandas del medio social... Este proceso se plasma en una representación mental construida progresivamente sobre la base de inferencias automáticas y fundamentales para establecer la coherencia de base y se continúa re-elaborando como proceso de aprendizaje a partir del texto y de los conocimientos previos a través del cual se generan múltiples procesos inferenciales y se construyen conocimientos diversos de tipo relacional” (p. 39).

Tener una buena habilidad lectora ayuda mucho en cuanto se quiere tener una adecuada comprensión del texto. Algunos autores afirman que una buena comprensión del texto va más allá de descifrar una serie de signos escritos en unidades semánticas y encadenar sus significados (Elosúa, 1993; Ferro & Eduardo, 2007). A continuación se presentan algunas citas de autores que hablan sobre la comprensión de textos.

- Elosúa (1993) refiere en su trabajo que, cuando leemos un texto con el objetivo de comprender lo que está escrito, no basta con la decodificación de los signos gráficos o letras escritas (procesos perceptivos visuales) y el reconocimiento de palabras y comprensión de su significado (procesos léxicos); estos son procesos necesarios pero no suficientes para alcanzar una lectura comprensiva. Afirma que es preciso poner en juego conocimientos de tipo sintáctico que ponen en relación las palabras, constituyendo unidades mayores como las oraciones y frases con una estructura determinada (procesos sintácticos).

- Ferro y Eduardo (2007) sostienen que, comprender textos, desde una perspectiva psicológica, supone más que una tarea lingüística de decodificación de signos escritos en unidades semánticas, pues en la estructura superficial del texto no se explicitan todos los elementos necesarios para su comprensión. Además mencionan que la tarea del lector consiste en ir más allá de los signos verbales, esto es, crear y reconstruir informaciones que llenen los “vacíos” dejados por los signos escritos, con el fin de recrear en la mente el significado del texto.
- Abusamra, Cartoceti, Raiter y Ferreres (2008) refieren que, la comprensión de textos escritos supone un complejo proceso de integración activa de información en el que intervienen diversos factores; cada vez que un lector se expone a dicho proceso, construye una representación mental del contenido. Además, si bien es cierto que la dimensión textual implica un lector que identifique palabras, que detecte estructuras sintácticas y que pueda extraer significado de las oraciones individuales, el análisis de la información explícita no agota la totalidad de la tarea.
- Y por último, Miranda-Casas, Fernández, Robledo y García-Castellar (2010) afirman que, la comprensión de textos es una herramienta imprescindible para desenvolverse con éxito en la escuela y en las actividades de la vida diaria. Sostienen que para progresar académicamente, los alumnos necesitan trascender la comprensión de una frase y relacionar frases entre sí, de manera que puedan construir una representación mental del texto. Aún más, sólo cuando los alumnos son capaces de comprender los textos podrán avanzar desde la fase de ‘aprender a leer’ a una fase cualitativamente diferente del aprendizaje, que consiste en ‘leer para aprender’.

1.2 Modelo de Teun A. Van Dijk y W. Kintsch

En esta sección se describe, a grandes rasgos, el modelo de comprensión textual de estos investigadores, quienes estudian este proceso desde un punto de vista cognitivo.

Tijero (2009) hace una revisión de los trabajos de estos investigadores y afirma que Kintsch y Van Dijk (1978) reconocen dos niveles de representación mental de la información construida a partir del procesamiento de los textos:

- Código de superficie, que corresponde con el aspecto perceptual y verbal del lenguaje.
- Y base de texto, que se refiere al aspecto semántico del lenguaje y queda representado mediante proposiciones.

Más adelante, Van Dijk y Kintsch (1983) complementan los dos niveles anteriores con un tercer nivel de representación semántica denominado “Modelo de Situación” (MS), a partir del cual, el comprendedor construye una representación de la situación específica, planteada en el texto, a partir de su conocimiento previo y de la información del texto.

Kintsch (1986) menciona que el problema de comprensión no se encuentra específicamente en las palabras y frases, ni siquiera con la estructura general del texto; podríamos memorizarlo y todavía no saber qué botón presionar. El problema radica en la comprensión de la situación descrita por el texto; es evidente que la comprensión del texto como tal, no es una condición suficiente para entender qué hacer.

De hecho, refiere que debemos saber distinguir entre dos tipos de representaciones mentales que se forman durante la lectura de un texto: la base de texto y un modelo de la situación.

En la investigación realizada por Kintsch (1986), basándose en Van Dijk y Kintsch (1983), se menciona que la distinción que se hace entre una base de texto y un MS es la siguiente.

- Base de texto: es la representación mental del texto que el lector o el oyente construye en el proceso de comprensión. Esta representación se construye a partir de proposiciones y expresa el contenido semántico del texto, tanto a un nivel local y global.
- MS: es una representación mental de la situación descrita por el texto.

Por lo tanto, afirma que la base de texto refleja las relaciones de coherencia existentes entre las proposiciones de un texto y su organización, mientras que el MS puede ser un mapa mental del país descrito por el texto, una estructura aritmética derivada del texto, o un procedimiento operativo construido a partir de la información dada en el texto.

Podemos ver que la base de texto y los MS, ambas representaciones mentales, no son independientes entre sí, pero sí cada una tiene sus propias características; además, los diferentes factores que presentan son importantes para su construcción.

La atención, la percepción, el aprendizaje, el recuerdo, el pensamiento y el lenguaje pertenecen a los procesos cognitivos, éste, a su vez, forma parte de los procesos psicológicos. Sí se considera el recuerdo como el registro más o menos permanente de estos procesos, el recuerdo del discurso debe reflejar las componentes múltiples que involucra el procesamiento del mismo. Por otro lado los actos de percepción, ya sea al leer o al escuchar, comprenden

análisis y cálculos en varios niveles. Así, puede ser útil distinguir distintos niveles de análisis conceptual:

- a) Los procesos relacionados con el análisis del texto.
- b) El establecimiento de una representación coherente del significado del texto, tanto a nivel local como global.
- c) La integración del contenido del texto en el sistema de los conocimientos del comprendedor.

Esto último puede implicar o bien la actualización de un MS existente o la construcción de una nueva en la base de la información obtenida a partir del texto.

Tijero (2009) indica que Van Dijk y Kintsch (1983) consideran que los MS son esenciales para la comprensión; inclusive, arguyen que son la base para la interpretación textual. Además esta autora cita que, los autores mencionados, ofrecen cuatro argumentos que sustentan el planteamiento de este constructo y que se desprenden del supuesto de que los MS contemplan todo el conocimiento que se deja implícito en el texto.

- Primero, los MS reducen las posibilidades de distorsionar las relaciones de coherencia local (microestructura) del texto.
- Segundo, permiten recordar y organizar la información generada a partir de un texto base desorganizado.
- Tercero, debido a que las palabras y expresiones que se utilizan en un texto refieren a varios elementos, desde objetos individuales y sus relaciones, hasta hechos en algún mundo posible, los MS permiten que cada comprendedor genere una interpretación particular del texto la cual está sujeta a la experiencia de cada individuo.
- Por último, los MS, además de integrar la base textual con el conocimiento previo del lector, constituyen el fundamento para el aprendizaje, ya que “learning can best be conceptualized as the modification of situation models” (Van Dijk y Kintsch, 1983: p342)

La forma en que el texto sea representado tendrá que ver con cómo es interpretada la situación.

Hay que mencionar también que, en la base de texto, los elementos son proposiciones que se convierten en una organizada y adecuada micro y macro estructura.

- La micro estructura, es el conjunto de proposiciones del texto relacionadas localmente, cuando éste se considera frase por frase.
- Mientras que la macro estructura, es el conjunto de proposiciones que sintetizan su significado y se construye a partir de la micro estructura.

Sin embargo, no es el caso, qué un análisis sintáctico lingüístico completo (micro y macro estructura) debe anteceder a la formación de la base de texto o qué la construcción de un MS debe esperar a la finalización de este. Cuando hay fuertes restricciones semánticas o cuando la sintaxis es demasiada compleja, una base textual puede llegar a formarse sin un análisis especialmente lingüístico completo. Así mismo, cuando la situación es familiar o particularmente cuando es bien estructurada, los MS pueden formarse, sin preocuparse de una base de texto coherente.

Así entonces Kintsch (1986) se pregunta, ¿Cómo se pueden estudiar los MS? Sobre todo, ¿cómo pueden distinguirse los MS experimentalmente a partir de la base de texto? Un método que él indica que se utiliza ampliamente hoy en día, es el estudio de los efectos del conocimiento sobre el procesamiento de texto o, por el contrario, los efectos del procesamiento de textos sobre el conocimiento.

Uno de los casos implica el estudio de los problemas planteados en la aritmética. Sabemos qué tipo de modelo debe ser construido para resolver estos problemas. En la solución de un problema verbal, la información transmitida por el texto debe ser transformada en un modelo del problema adecuado para hacer aritmética.

Cuando los sujetos pueden recordar el texto después de haber resuelto el problema, deben ocurrir alteraciones específicas del texto para que éste coincida con el modelo del problema que el sujeto estaba trabajando. Es decir, la memoria debe ser reconstructiva con el modelo del problema que sirve de base para la reconstrucción.

La interacción entre el texto y la resolución de problemas es bastante compleja. Por un lado, el modelo de un problema determinará cómo se recordará un problema. Por otra parte, la base de texto, que se deriva de la formulación lingüística particular utilizada en el problema, determinará qué tipo de modelo del problema se construirá.

Por lo tanto, aunque el texto determine qué modelo será construido por el problema y cómo va a ser construido, una vez que exista ese modelo, el recuerdo del texto depende más del modelo del problema que del propio texto real.

No es sólo la formulación lingüística del problema lo que es importante, más allá de eso, hay que entender la situación descrita en el problema. Si un problema verbal implica una situación o acción con la que los estudiantes están familiarizados, les resulta más fácil formar un modelo apropiado del problema que cuando no hay estructura conocida.

¿Qué deben hacer los estudiantes cuándo se enfrentan a un problema que es demasiado complejo de manejar? Una estrategia consiste en convertir un problema difícil en uno más simple que puede ser resuelto (Kintsch, 1986).

La instrucción puede ser dirigida ya sea a una base de texto o al MS. Es necesario, sin embargo, ser muy claro acerca de cuál de ellas es la meta de instrucción debido a diferentes factores que deben ser considerados, dependiendo de si se quiere que los estudiantes comprendan y recuerden un texto de manera óptima o que aprendan algo de ese texto. La investigación actual sobre la comprensión del texto ofrece algunas pautas para la forma de lograr el primero de estos objetivos:

- Hacer que el texto sea coherente,
- El uso y la señal clara de una macroestructura,
- No sobrecargar la memoria a corto plazo, y así sucesivamente.

En este trabajo, la representación de un MS del problema fue una herramienta básica de apoyo para los estudiantes. Antes de haber llevado a cabo la representación, los estudiantes tuvieron que pasar por el proceso de la comprensión. En el siguiente capítulo, se presentan estrategias de Polya (1965), Elosúa (1993), Van Dijk y Kintsch (1983) entre otros que ayudaron en dicho proceso.

Capítulo 2

Estrategias para la comprensión de textos matemáticos

La comprensión de textos juega un importante papel en la resolución de problemas matemáticos. En este capítulo, se presentan estrategias que diferentes autores proponen para la comprensión lectora. Se inicia con el modelo de Polya (1965) quién aborda la resolución de problemas matemáticos y señala, como primer paso, la comprensión del problema. Después, este capítulo se centra en propuestas específicas de comprensión textual. Lo anterior nos fue útil para obtener algunas estrategias que favorecieron la comprensión textual de problemas verbales de matemáticas.

2.1 Modelo de George Polya

Polya (1965), nos da una serie de pasos que debemos considerar para la resolución de un problema matemático y son los siguientes:

- I. Comprender el problema.
- II. Concebir un plan.
- III. Ejecución del plan.
- IV. Examinar la solución obtenida.

En esta tesis, se consideró como prioridad el punto uno, *comprender el problema*. Polya (1965) nos dice que es tonto el contestar a una pregunta que no se comprende, más aún, si se trabaja para un fin que no se desea.

Sin embargo, él afirma que podemos ver frecuentemente estos errores dentro y fuera de la escuela, y es responsabilidad del maestro tratar de evitar que se produzcan en su clase. Considera importante que el alumno deba desear resolver el problema. Además menciona, si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante.

De acuerdo con Polya (1965) el enunciado del problema debe ser comprendido, a pesar del nivel de dificultad o la falta de interés. Indica que la forma de ver si el alumno ha comprendido el problema, es que él repita el enunciado sin titubeos, además también deberá poder separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición. Considera que el maestro puede rara vez evitar las preguntas como:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?

En el problema, este investigador nombra que las principales partes deben ser consideradas atentamente por el alumno, repetidas varias veces y bajo diversos ángulos. En el caso que haya alguna figura relacionada con el problema, hace consideración que el alumno debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos, luego, es necesario dar nombres a dichos elementos, introducir una notación adecuada; poniendo cuidado en la apropiada elección de los signos.

Otra pregunta que él refiere y que puede plantearse en ese momento, con tal de que no se espere una respuesta definitiva, sino más bien provisional o una mera conjetura, es la siguiente: ¿Es posible satisfacer la condición?

Para ilustrar algunos de los puntos expuestos se muestra el siguiente ejemplo que es ilustrado por este autor.

Ejemplo 1

Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dado su longitud, su ancho y su altura.

Haciendo una simple inspección al problema, podemos ver que para discutir este problema con provecho, los alumnos deben estar familiarizados con el teorema de Pitágoras y con algunas de sus aplicaciones en la geometría plana. Reitera que pueden no tener más que ligeros conocimientos de la geometría del espacio y, en este caso el maestro puede confiar aquí en la familiaridad intuitiva del alumno con las relaciones en el espacio.

Además, el maestro puede hacer interesante el problema concretándolo; *el salón de clase es un paralelepípedo rectangular cuyas dimensiones pueden ser medidas, estimadas, el maestro señala la longitud, el ancho y la altura del salón, indica la diagonal con un gesto y da cierta vida a la figura que ha trazado en el pizarrón, refiriéndose repetidamente al salón de clase.*

El diálogo entre el maestro y los alumnos puede empezar como sigue:

- *¿Cuál es la incógnita?*
- La longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular.
- *¿Cuáles con los datos?*
- La longitud, el ancho y la altura del paralelepípedo.
Introduzcan una notación adecuada. ¿Qué letra designará a la incógnita?

– x

¿Qué letras quieren ustedes elegir para designar a la longitud, al ancho y a la altura?

– a, b, c .

¿Cuál es la condición que relaciona a, b y c con x ?

– x es la diagonal del paralelepípedo del cual a, b y c son la longitud, el ancho y la altura.

¿Es éste un problema razonable? Quiero decir, ¿es suficiente la condición para determinar la incógnita?

– Sí, lo es. Si conocemos a, b y c , conocemos el paralelepípedo. Si el paralelepípedo está determinado, su diagonal también lo está.

El punto de nuestro interés, *comprender el problema*, este autor lo divide en dos secciones, familiarizarse con el problema y trabajar para una mejor comprensión, para lo cual considera tres preguntas básicas, ¿Por dónde debo empezar?; ¿Qué puedo hacer?; ¿Qué gano haciendo esto?

Familiarizarse con el problema

- ¿Por dónde debo empezar? Empiece por el enunciado del problema.
- ¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento.
- ¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con él, grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para entender los puntos importantes.

Trabajar para una mejor comprensión

- ¿Por dónde debo empezar? Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.
- ¿Qué puedo hacer? Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión, la incógnita, los datos y las condiciones son las principales partes de un “problema por resolver”. Ocúpese de las partes principales del problema, considérelas una por una, reconsidérelas, considérelas después combinándolas entre sí, estableciendo las relaciones que pueden existir entre cada detalle y los otros y entre cada detalle y el conjunto del problema.

- *¿Qué gano haciendo esto?* Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente entrarán en juego más tarde.

A continuación se presentan dos ejemplos más de Polya (1965), en los cuales se muestra cómo se va guiando al alumno para comprender el problema.

Ejemplo 2

Determinar el punto de intersección de una recta dada y una parábola cuyo foco y directriz son dadas.

En el problema presente enuncia que este dependerá principalmente de los conocimientos que tengamos de las propiedades de la parábola. Afirma que si conocemos bien la parábola, trataremos de utilizar nuestros conocimientos y entresacar de ellos alguno útil: *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Conoce algún problema que se relacione con el suyo?* Además si nuestros conocimientos en lo que concierne a la parábola son limitados, el foco, la directriz son términos más bien molestos y, naturalmente, desearíamos deshacernos de ellos. *¿Cómo lograrlo?* Oigamos el diálogo entre el profesor y el alumno discutiendo el problema propuesto.

Ya han elegido una *notación apropiada*: P para uno cualquiera de los puntos de intersección desconocidos, F para el foco, d para la directriz, c para la recta que intersecta a la parábola.

- *¿Cuál es la incógnita?*
- El punto P .
- *¿Cuáles son los datos?*
- Las rectas c y d , y el punto F .
- *¿Cuál es la condición?*
- P es el punto de intersección de la recta c y de la parábola cuya directriz es d y su foco F .
- Correcto. Sé que no han tenido muchas ocasiones de estudiar la parábola, pero creo, sin embargo, que pueden decir lo que es una parábola.
- La parábola es un lugar geométrico de los puntos equidistantes del foco y de la directriz.
- Bien. Veo que recuerdan correctamente la definición. Muy bien, pero hay que saber también utilizarla: *regrese a las definiciones*. Conociendo la definición de la parábola, ¿qué puede decir del punto P ?
- P se halla en la parábola. Por lo tanto P está a igual distancia de d y de F .
- ¡Muy bien! *Dibuje una figura*.

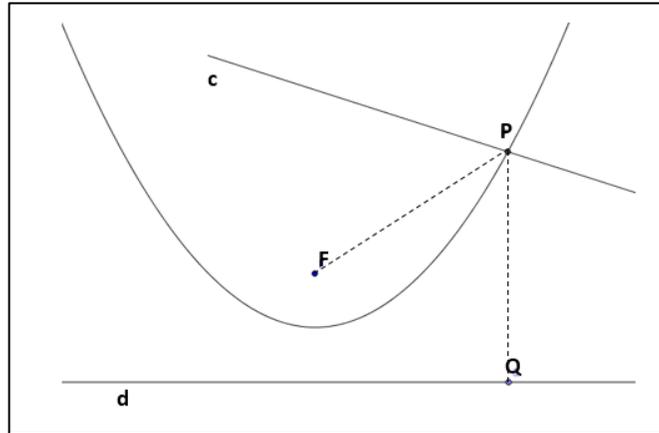


Figura 1

El alumno introduce en la figura 1 los segmentos PF y PQ , este último perpendicular a d .

- Ahora, ¿puede enunciar el problema en diferentes términos?
- ...
- ¿Puede enunciar la condición del problema valiéndose de los segmentos que acaba de introducir?
- P es un punto de la recta c tal que $PF = PQ$.
- Bien, pero dígalo en palabras. ¿Qué es PQ ?
- La perpendicular de P a d .
- Bien. ¿Puede ahora enunciar el problema en forma diferente? Pero, por favor, trate de ser claro y conciso.
- Determinar un punto P sobre una recta c dada, a igual distancia del punto dado F y de la recta dada d .
- Observe el progreso logrado desde el enunciado original del problema hasta este último. Aquél estaba lleno de términos técnicos, poco familiares: parábola, foco, directriz; tenía un aire solemne, ampuloso. Ahora no queda nada de esos términos. Ha *simplificado* usted el problema. ¡Bien hecho!

En este ejemplo no se limita al estudiante si c es secante o tangente.

Ejemplo 3

Construir un triángulo dados un lado a , la altura h perpendicular a a y el ángulo α opuesto al lado a .

¿Cuál es la incógnita? Un triángulo.

¿Cuáles son los datos? Dos elementos lineales a y h y un ángulo α .

En este problema aclara que si tenemos alguna experiencia con problemas de construcciones geométricas, podemos tratar de reducir este tipo de problema a la determinación de un punto. Trazaremos un segmento BC igual al lado dado a ; entonces todo lo que tenemos que determinar es el vértice A del triángulo, opuesto a a .

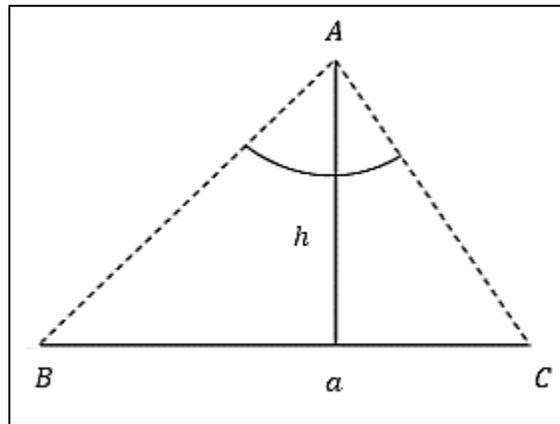


Figura 2

De hecho, estamos ante un nuevo problema.

¿Cuál es la incógnita? El punto A .

¿Cuáles son los datos? Un elemento lineal h , un ángulo α y dos puntos B y C cuyas posiciones son dadas.

¿Cuál es la condición? la perpendicular del punto A al segmento BC debe ser igual a h , y el $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Hemos, pues, transformado el problema cambiando a la vez la incógnita y los datos. La nueva incógnita es un punto, la original era un triángulo. Algunos de los datos son los mismos en ambos problemas, el segmento h y el ángulo α ; pero en el problema original se nos daba un segmento a y ahora tenemos dos puntos, B y C .

Una vez comprendido el problema, lo que sigue es *concebir un plan* para luego *ejecutarlo* (llevarlo a cabo) y finalmente *examinar la solución* obtenida.

Concepción de un plan: Él afirma que tenemos un plan cuando sabemos, al menos a “grosso modo”, qué cálculos, razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita.

Menciona que, en ocasiones, de la comprensión del problema a la concepción del plan, el camino puede ser largo y tortuoso. En la solución de un problema lo esencial es el concebir la idea de un plan y el concebir la idea de un plan no siempre es fácil, la idea puede tomar forma poco a poco o bien, después de ensayos aparentemente infructuosos y de un periodo de duda, se puede tener de pronto una “idea brillante”. Lo mejor que puede hacer el maestro por el alumno es conducirlo a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele; las preguntas y sugerencias, tienen por objeto provocar tales ideas.

Para comprender la posición del alumno, el maestro debe pensar en su propia experiencia, en sus propias dificultades y éxitos en la resolución de problemas.

Declara que si nuestros conocimientos son pobres en la materia es difícil tener una buena idea, y totalmente imposible si la desconocemos por completo. Garantiza que las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente; con frecuencia es adecuado abordar un trabajo planteándose la siguiente pregunta: *¿Conoce algún problema relacionado?*

La dificultad estriba en que hay por lo general una infinidad de problemas que se relacionan de alguna manera con el que nos ocupa. *¿Cómo escoger entre tantos, aquel o aquellos que puedan ser realmente útiles?* Una sugerencia que nos va a permitir descubrir un punto común esencial es: *Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.*

Mantiene que en el texto, podemos cambiar, transformar o modificar palabras de tal forma que se nos facilite el entender el problema. *¿Puede enunciarse el problema en forma diferente?* Una modificación del problema puede conducirnos a algún otro problema auxiliar apropiado: *Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver algún problema relacionado con él.*

Finalmente indica que cuando tratamos de utilizar otros problemas o teoremas que ya conocemos, esto puede provocar desviarnos y alejarnos de nuestro problema primitivo, al grado de correr el riesgo de perderlo totalmente de vista. Aquí, una buena pregunta nos puede conducir de nuevo a él: *¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha hecho uso de toda la condición?*

Considerando nuevamente el ejemplo 1. Se había dejado en el momento en que los alumnos comenzaban a comprender el problema y a manifestar un cierto interés. En ese momento enuncia que ellos pueden tener algunas ideas propias, ciertas iniciativas. Si el maestro, después de observar atentamente la clase, no puede descubrir ningún indicio de iniciativa en sus alumnos, tiene que volver a dialogar con ellos. Debe disponerse a repetir, modificándolas ligeramente, las preguntas a las que no hayan respondido los alumnos y afrontar muchas veces su silencio desconcertante (figurado aquí por puntos suspensivos).

- *¿Conocen un problema que se relacione a éste?*
- ...
- *Consideren la incógnita. ¿Conocen algún problema que tuviese la misma incógnita?*
- ...
- Bueno. *¿Cuál es la incógnita?*
- La diagonal de un paralelepípedo.
- *¿Conocen algún problema que tuviese la misma incógnita?*
- No. Nunca se nos ha planteado un problema acerca de la diagonal de un paralelepípedo.
- *¿Conocen algún problema que tuviese una incógnita similar?*
- ...
- Miren, la diagonal es un segmento de recta. *¿No han resuelto ustedes algún problema cuya incógnita fuese la longitud de un segmento de recta?*
- Sí, claro, ya hemos resuelto problemas de ese tipo. Por ejemplo, cuando hemos tenido que determinar el lado de un triángulo rectángulo.
- Muy bien. *He ahí un problema que se relaciona con el propuesto y que ya han resuelto. ¿Pueden utilizarlo?*
- ...
- Han tenido suerte de acordarse de un problema análogo a éste que nos ocupa y que ya han resuelto. *¿Les gustaría utilizarlo?; ¿podrían introducir algún elemento auxiliar que les permitiese emplearlo?*
- ...
- Veamos, el problema del que se han acordado concierne a un triángulo.

¿Hay algún triángulo en vuestra figura?

Esperemos que esta última alusión sea lo suficiente clara como para hacer nacer la idea de la solución, la cual consiste en introducir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la diagonal que se busca.

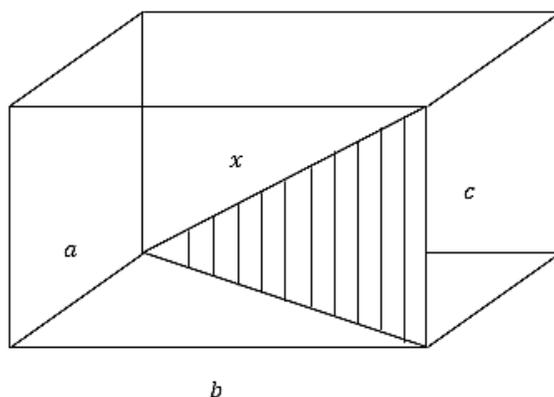


Figura 3

- ¿Quieren que aparezca un triángulo en la figura 3?
- ¿Qué clase de triángulo quieren que aparezca?
- ¿Todavía no pueden determinar la diagonal? Sin embargo, decían ustedes que sabían cómo encontrar el lado de un triángulo. Entonces, ¿qué van a hacer?
- ¿Podrían encontrar la diagonal si fuese el lado de un triángulo?

Cuando finalmente, con su ayuda, los alumnos han logrado hacer aparecer el elemento auxiliar decisivo (el triángulo rectángulo rayado en la figura 3), el maestro debe asegurarse que ven la continuación del razonamiento antes de animarlos a lanzarse en cálculos reales.

- Creo que era una buena idea el trazar ese triángulo. Ahora tienen un triángulo, pero ¿tienen ustedes la incógnita?
- La incógnita es la hipotenusa del triángulo; podemos determinarla con la ayuda del teorema de Pitágoras.
- Sí, sí se conocen la longitud de los otros dos lados, pero ¿las conocen ustedes?
- Una de las incógnitas es dada: c . En cuanto a la otra, no creo que sea muy difícil determinarla. ¡Claro! El otro lado es la hipotenusa de otro triángulo rectángulo.
- Perfecto. Ahora veo que tienen un plan.

Ejecución del plan: Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Para lograrlo, menciona que hace falta toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración. Es mucho más fácil llevar al cabo el plan; el plan proporciona una línea general.

Afirma que uno de los peligros antes de la ejecución del plan, estriba en que el alumno lo olvide, esto puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro. No lo perderá tan fácilmente, si él mismo lo ha trabajado, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción. No obstante, el profesor debe insistir en que el alumno *verifique cada paso*.

Reitera que lo esencial es que el alumno honestamente esté seguro por completo de la exactitud de cada paso, en ciertos casos, el profesor puede recalcar sobre la diferencia que hay entre “ver” y “demostrar”: *¿Pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?; pero ¿pueden también demostrar que es correcto?*

Visión retrospectiva (examinar la solución): En este punto, atestigua que varios estudiantes una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo. Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver más problemas.

Alude que un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer; mediante un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución.

Hasta este momento menciona que el alumno ha llevado al cabo su plan, ha redactado la solución, verificando cada paso del razonamiento; entonces tiene buenos motivos para creer que su solución es correcta. No obstante, puede haber errores, sobre todo si el razonamiento es largo y enredado. Por lo tanto, es recomendable verificar. Especialmente si existe un medio rápido e intuitivo para asegurarse de la exactitud del resultado o del razonamiento, no debe uno dejar de hacerlo. *¿Puede verificar el resultado?; ¿puede verificar el razonamiento?*

Al igual que para convencernos de la presencia o de la calidad de un objeto, nos gusta verlo y tocarlo, prefiriendo así percibir por medio de dos pruebas diferentes: *¿Puede obtener el resultado de un modo distinto?* Por otra parte es preferible, naturalmente, un razonamiento corto y simple a uno largo y complicado: *¿puede verlo de golpe?*

Por último, menciona que una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico. El profesor debe alentar a sus alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido. *¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?*

2.2 Estrategias para la comprensión textual

Aunque la noción de estrategia ha sido utilizada en muchos estudios de la ciencia cognitiva, muy rara vez se define.

“Una estrategia consiste en la acción humana, es decir, orientado a los objetivos, intencional, consciente, y el comportamiento controlado. Las acciones son un tipo específico de evento... Las estrategias implican además de acciones, metas y alguna noción de optimización: Intuitivamente, una estrategia es la idea de un agente sobre la mejor manera de actuar con el fin de alcanzar una meta” (van Dijk & Kintsch, 1983: pp. 62-65).

Varios investigadores como Elosúa (1993), Solé (1998), entre otros, mencionan que el uso de estrategias en la comprensión textual son de gran ayuda para que el lector tenga un mejor panorama de lo que el texto quiere dar a conocer. Así entonces, basándose en las diferentes teorías e investigaciones, proponen una serie de estrategias para que esta comprensión llegue a su objetivo.

Elosúa (1993) afirma que la lectura es una actividad “estratégica”. El buen lector pone en juego unos procedimientos o estrategias para obtener un resultado. Tales estrategias o destrezas son susceptibles de ser mejoradas, de convertirse en objeto del proceso de enseñanza-aprendizaje, con el fin de optimizar en los lectores su nivel de comprensión. Esta investigadora nos indica también de un tipo de factores que condicionan la comprensión; los procesos cognitivos y metacognitivos que el sujeto realiza al leer. Tales procesos requieren distinto grado de conciencia, atención, planificación y control por parte del sujeto. Las estrategias que ella presenta intervienen en los niveles superiores de procesamiento y comprensión que conllevan mayor grado de conciencia y reflexividad.

Estrategias cognitivas

Las estrategias cognitivas en comprensión lectora son procedimientos u operaciones mentales que realiza la persona que lee durante el procesamiento de información del texto escrito con el objetivo de comprender su significado.

- *Estrategias de focalización.* Mediante estas estrategias el lector concentra su atención en las informaciones del texto que estima más relevante. Están en función de las características del texto y de los propósitos y expectativas del lector.
- *Estrategias de organización.* El lector puede reestructurar de forma distinta el texto a fin de hacerlo más significativo y comprensible.
- *Estrategias de resolución de problemas.* Procedimientos para resolver los problemas que encuentra durante la lectura, por ejemplo, dificultad para comprender palabras, oraciones, relación entre oraciones, esquema de texto.

- *Estrategias de elaboración.* Estas estrategias permiten integrar la información del texto con los conocimientos previos del lector, a fin de comprender con más profundidad el significado.

Estrategias metacognitivas.

Cuando se trata del proceso de comprensión lectora, la metacognición de la comprensión será el conocimiento y control que el lector tiene sobre sus propios procesos de comprensión lectora. El entrenamiento en estrategias metacognitivas procura que el lector sea consciente de la naturaleza de la comprensión, de los factores que la afectan, de los problemas que pueden presentarse, y de las estrategias para resolverlos.

Se presentan a continuación las estrategias metacognitivas que controlan y regulan la comprensión lectora: estrategias de planificación, supervisión y evaluación. El objetivo consiste en que el lector aprenda y se ejercite en planificar, supervisar y evaluar las estrategias que él utiliza durante el proceso de comprensión.

- *Planificación.* La fase de planificación implica precisar los objetivos o metas de lecturas, los conocimientos que sobre esa temática tiene el lector, el plan de acción y las estrategias a utilizar, tendiendo además en cuenta las características del texto, las capacidades del lector y las condiciones ambientales. El objetivo de la lectura es comprender lo que está escrito. Los conocimientos previos, son condición necesaria para la comprensión.
- *Supervisión.* En esta fase se trata de comprobar si la actividad se está llevando a cabo según lo planificado, o si se encuentran dificultades, y a qué pueden ser debidas, si las estrategias utilizadas son eficaces y apropiadas para alcanzar el objetivo propuesto. Es preciso que el lector presente los objetivos y el grado de aproximación que está logrando
- *Evaluación.* La evaluación hace referencia tanto a los procesos que se han desarrollado durante la lectura, como a los resultados de la comprensión lectora. La evaluación de los resultados supone constatar el nivel alcanzado en la comprensión. La evaluación de los procesos incluye toda la actividad lectora: establecimiento de objetivos, grado de consecución de los mismos, dificultades presentadas, estrategias utilizadas, eficacia de las mismas y modificaciones introducidas, resultado de la comprensión.

Finalmente hace mención que la planificación, supervisión y evaluación no se producen necesariamente en una secuencia mecánica, sino que se da una estrecha interrelación: supervisamos y evaluamos lo que planificamos y planificamos la evaluación.

Solé (1998), en su libro de “estrategias de lectura” se hace la pregunta, ¿Por qué es necesario enseñar estrategias de comprensión?, respondiéndose, *porque queremos hacer lectores autónomos, capaces de enfrentarse de manera inteligente a textos de muy distinta índole, la mayoría de las veces distintos de los que se usan cuando se instruye.* Así mismo

se hace otra pregunta ¿Qué estrategias vamos a enseñar?, por lo que responde, *las estrategias que vamos a enseñar deben permitir al alumno la planificación de la tarea general de lectura y su propia ubicación -motivación, disponibilidad- ante ella; facilitarán la comprobación, la revisión y el control de lo que se lee, y la toma de decisiones adecuada en función de los objetivos que se persigan.*

En trabajos previos hace mención que autores como, Palincsar y Brown (1984) sugieren que las actividades cognitivas que deberán ser activadas o fomentadas mediante las estrategias, son las siguientes.

1. Comprender los propósitos explícitos e implícitos de la lectura. Esto equivaldría a responder a las preguntas: ¿Qué tengo que leer? ¿Por qué/para qué tengo que leerlo?
2. Activar y aportar a la lectura los conocimientos previos pertinentes para el contenido de que se trate. ¿Qué sé yo acerca del contenido del texto?, ¿Qué sé acerca de contenidos afines que me puedan ser útiles? ¿Qué otras cosas sé que puedan ayudarme: acerca del autor, del género, del tipo de texto...?
3. Dirigir la atención a lo que resulta fundamental en detrimento de lo que puede parecer trivial (en función de los propósitos que uno persigue; punto 1.). ¿Cuál es la información esencial que el texto proporciona y que es necesaria para lograr mi objetivo de lectura? ¿Qué informaciones puedo considerar poco relevantes, por su redundancia, por ser de detalle, por ser poco pertinentes para el propósito que persigo?
4. Evaluar la consistencia interna del contenido que expresa el texto y su compatibilidad con el conocimiento previo, y con lo que dicta el «sentido común». ¿Tiene sentido este texto? ¿Presentan coherencia las ideas que en él se expresan? ¿Discrepa abiertamente de lo que yo pienso, aunque sigue una estructura argumental lógica? ¿Se entiende lo que quiere expresar? ¿Qué dificultades plantea?
5. Comprobar continuamente si la comprensión tiene lugar mediante la revisión y recapitulación periódica y la auto-interrogación. ¿Qué se pretendía explicar en este párrafo - apartado, capítulo-? ¿Cuál es la idea fundamental que extraigo de aquí? ¿Puedo reconstruir el hilo de los argumentos expuestos? ¿Puedo reconstruir las ideas contenidas en los principales apartados? ¿Tengo una comprensión adecuada de los mismos?
6. Elaborar y probar inferencias de diverso tipo, como interpretaciones, hipótesis y predicciones y conclusiones. ¿Cuál podrá ser el final de esta novela? ¿Qué sugeriría yo para solucionar el problema que aquí se plantea? ¿Cuál podría ser -tentativamente- el significado de esta palabra que me resulta desconocida? ¿Qué le puede ocurrir a este personaje? , etc.

A todo ello cabría añadir que las estrategias deben ayudar al lector a escoger otros caminos cuando se encuentre con problemas en la lectura.

Otros autores que hacen también uso de las estrategias cognitivas y metacognitivas son Gutiérrez-Braojos y Pérez (2012). Basándose en trabajos de diversos investigadores, mencionan que las estrategias cognitivas se refieren a procesos dinámicos y constructivos que el lector pone en marcha de manera consciente e intencional para construir una representación mental del texto escrito y que las estrategias metacognitivas pueden clasificarse en función del momento de uso.

- I. Antes de iniciar la lectura; para facilitar al lector la activación de conocimientos previos, detectar el tipo de discurso, determinar la finalidad de la lectura y anticipar el contenido textual, y en efecto, qué tipo de discurso deberá comprender y planificar el proceso lector.
 - II. Durante la lectura, para facilitar al lector el reconocimiento de las distintas estructuras textuales, construir una representación mental del texto escrito y supervisar el proceso lector.
 - III. Después de la lectura, para facilitar al lector el control del nivel de comprensión alcanzando, corregir errores de comprensión, elaborar una representación global y propia del texto escrito, y ejercitar procesos de transferencia o dicho de otro modo, extender el conocimiento obtenido mediante la lectura.
- I. Estrategias metacognitivas previas a la lectura:
 - Identificar y determinar el género discursivo al que nos enfrentamos
 - Determinar la finalidad de su lectura
 - Activar conocimientos previos
 - Generar preguntas que podrían ser respondidas con la lectura del texto.
 - II. Estrategias metacognitivas durante la lectura. En este momento, el lector debe ser capaz de construir una representación mental adecuada del texto escrito, recordarla y supervisar dicho proceso:
 - Contestar preguntas que se planteó al principio del texto, y generar nuevas preguntas que son respondidas por el texto;
 - Identificar palabras que necesitan ser aclaradas;
 - Parafrasear y resumir entidades textuales;
 - Realizar nuevas inferencias y predicciones, así como evaluar las predicciones previas a la lectura.
 - Detectar información relevante.

III. Estrategias metacognitivas después de la lectura. En este momento podemos distinguir tres finalidades:

- Revisión del proceso lector y consciencia del nivel de comprensión alcanzado; otra, dirigida a elaborar una
- Representación global del texto, es decir una finalidad expresiva;
- Finalidad comunicativa.

Con todo lo anterior, lo que se pretende es que el lector ponga en práctica eficazmente las estrategias oportunas a fin de obtener una comprensión del texto más profunda y exhaustiva.

Las estrategias que se mencionan son algunas de las posibles, ya que no todas resultan positivamente en todos los sujetos y en todas las circunstancias. Siempre hay que tener muy presente que entrenar al lector en estrategias cognitivas constituye un medio para lograr mejores niveles de comprensión lectora y nunca es un fin en sí mismo.

Ahora se mencionan algunas de las estrategias de van Dijk y Kintsch (1983), que se consideraron para guiar al grupo de estudiantes participantes en la comprensión y resolución de un problema de matemáticas.

Estrategias de lenguaje

Si no sabemos el significado de una palabra, se puede aplicar esta estrategia pidiendo a alguien la consulta de un diccionario, o adivinar el significado de la palabra a partir del contexto, y si una estructura de la oración es particularmente compleja, es posible comenzar a leer de nuevo. Del mismo modo, en el discurso, podemos tener textos que son tan complejos que diversas ayudas externas, tales como esquemas, resúmenes, o notas, son necesarias para controlar el significado del texto en la producción o comprensión.

Estrategias gramaticales

Utilizamos las estrategias gramaticales, o estrategias de oraciones, estrategias cognitivas que se utilizan para producir o entender las estructuras que están especificadas por las reglas de la gramática.

Estrategias culturales.

Son aquellas estrategias que se refieren a la selección eficaz de información cultural que es relevante para la comprensión del discurso. Estas estrategias pueden ser orador u oyente orientado. Es decir, un oyente / lector puede utilizar la información sobre los antecedentes culturales del orador / autor o la producción de condiciones de un discurso, o

pueden dirigirse a la información de su propia cultura y la comprensión específica, o de recepción, las condiciones de un discurso.

Estrategias sociales.

Estas estrategias implican información sobre la estructura social general de un grupo, sobre las instituciones, roles o funciones de los participantes, géneros del discurso de las instituciones, las diferencias relacionadas con el estilo de la estructura social, ocasión, o miembros sociales.

2.3 Estrategias seleccionadas para nuestra investigación.

Las estrategias que se usaron en nuestra intervención (S2) son algunas de las sugeridas por Polya (1965) y Elosúa (1993), dirigidas a favorecer la comprensión textual y la resolución de problemas matemáticos. Debido a que la comprensión de textos requiere de la construcción de un modelo de la situación (van Dijk y Kintsch, 1983), se pidió a los estudiantes que realizaran un dibujo, después de haber leído el problema verbal de matemáticas planteado. Dicho dibujo se consideró como una representación del MS del problema. De esta forma, fue posible estudiar el efecto de las estrategias en la comprensión, a través de los dibujos, o modelos situacionales.

Se consideraron dos tipos de estrategias, para el docente y para el alumno.

Estrategias para el Docente:

Estrategias de lenguaje. El docente debe seleccionar adecuadamente el texto del problema. En el caso de que el texto contenga palabras que pudieran no ser familiares para los alumnos sustituirlas por otras que si lo sean. Tener presente los conceptos involucrados, esto con la finalidad de poder explicarlos en su momento. Revisar nivel, vocabulario y contexto.

Estrategias gramaticales. Verificar que el texto no contenga errores de gramática, esto con la intención de ayudar al estudiante a entender el contexto adecuado y no uno diferente al que presenta el texto.

Estrategias culturales. Seleccionar problemas de acuerdo a la cultura de los estudiantes, con la finalidad de que el texto les sea familiar. Esto podría ayudar a los estudiantes a activar sus conocimientos previos.

Estrategias sociales. Este tipo de estrategia, el docente podría aplicarlas al momento de querer trabajar el problema en equipos, pensando antes como organizarlos, de acuerdo a la capacidad de cada uno de los estudiantes para trabajar.

Estrategias para el alumno

Estrategias de focalización

- Leer el problema. Identificar los datos, la incógnita, palabras importantes, etc.

Estrategias de resolución de problemas

- Identificar los conceptos que se presentan, de no conocer alguno buscar y/o preguntar su definición.

Estrategias de organización.

- Releer el problema, en este caso relacionar los conceptos que no se tenían claros al momento de la primera lectura.
- Identificar el objetivo del problema.
- Reformular el problema en caso de ser necesario.
- Identificar los datos y la incógnita

Estrategias de elaboración.

- Realizar una tercera lectura, verificando claramente cuál es el objetivo del problema.
- Relacionar el problema con alguno ya visto anteriormente.
- ¿Puedo resolver el problema con estos datos?

Luego de aplicar las estrategias de comprensión, se pasó a la elaboración de un dibujo que se consideró como una representación del MS construido en la etapa anterior (de comprensión). Para esta etapa las orientaciones propuestas por Polya (1965) resultaron de mucha utilidad, a continuación se presentan algunas:

- Hacer un dibujo del problema.
- Ubicar los datos y la incógnita en el dibujo.
- Verificar si el dibujo (MS) construido representa fielmente al problema.
- Extraer lo más esencial del problema, representándolo en un dibujo abstracto.
- Resolver el problema usando algún procedimiento matemático.
- Compartir con sus compañeros la solución justificando el procedimiento.
- Analizar las soluciones de sus compañeros.
- Compartir con el grupo las conclusiones tomadas en equipo.

En el siguiente capítulo, vamos a ver cómo estas estrategias resultaron de gran ayuda para guiar a un grupo de estudiantes a tener una comprensión adecuada del texto, de tal forma que pudieron hacer una representación correcta del MS y llegaron a la solución del problema.

Capítulo 3

Metodología y Resultados

En este capítulo se presenta la forma en que se desarrolló el trabajo de investigación, el cual se dividió en tres sesiones que se describen en primer lugar. En segundo lugar se describe el grupo participante y después, los instrumentos de investigación que se utilizaron en cada una de las sesiones. Finalmente, se muestra el análisis del desempeño de los estudiantes y una comparación de los resultados de los mismos en la sesión S1 y S2.

3.1 Desarrollo de investigación

La investigación constó de tres sesiones:

- Diagnóstico (S1): en ésta se aplicó un problema de trigonometría en el que tenían que encontrar la altura de un pino. La intención fue evaluar la comprensión de este tipo de problemas a través del modelo situacional y la resolución del problema.
- Intervención (S2): se planteó una situación problemática en la que los alumnos tenían que decidir si una casa debía ser desalojada o no durante el incendio de una fábrica. El trabajo de los estudiantes en esta sesión se dividió en tres momentos: trabajo individual, trabajo colaborativo en equipos pequeños y trabajo grupal. Durante los tres momentos de la sesión de intervención el papel del instructor consistió en guiar el trabajo de los estudiantes hacia la construcción del MS del problema planteado, con la ayuda de las estrategias que se mencionaron en el apartado 2.3.
- Evaluación (S3): se llevó a cabo un día después de la intervención, y consistió en la aplicación de un instrumento que contenía otro problema de trigonometría. En esta sesión, los estudiantes tenían que determinar la altura de un cierto poste y la longitud de un cable de tensión que estaba sostenido de la parte superior al suelo.

En cada una de las sesiones mencionadas anteriormente se aplicó un problema contextualizado de trigonometría y se solicitó un dibujo de la situación, la resolución del problema y el resultado. En la última sesión, S3, también se solicitó una representación matemática del problema.

En la tabla 1 se pueden observar cada uno de los problemas utilizados y las consignas para los alumnos en cada una de las sesiones.

Sesión	Problema	Consignas para el alumno
S1	Un pino a cierta hora del día proyecta una sombra de 45 m. Si el ángulo de elevación de la sombra es de 50° , ¿Cuál será la altura del pino? (Hernández, Solano, & Jiménez, 2014).	<ul style="list-style-type: none"> ● Dibujo ● Resolución ● Resultado
S2	Debido a un incendio en una fábrica se tuvo que desalojar a las personas que estaban cerca dentro de un radio de 500 m del siniestro. Una familia tiene una casa a 400 m al este y a 350 m al sur de la fábrica. Se desea saber si será desalojada de su vivienda, (Almaguer, Cantú, Rodríguez, L., Rodríguez, R. & García, 2015).	
S3	Un poste se sostiene con un cable sujeto en la parte superior y en el piso a 12 m de la base. Si su ángulo de elevación es de 70° , ¿cuál es la medida del poste y del cable que lo sostiene? (Hernández, Solano, & Jiménez, 2014).	<ul style="list-style-type: none"> ● Dibujo de la situación ● Representación Matemática ● Resolución ● Resultado

Tabla 1. Actividades aplicadas en cada sesión.

3.1.1 Grupo participante

Participaron 22 alumnos de una escuela secundaria de la ciudad de Puebla que cursaban el tercer grado en el mes de mayo de 2015. Todas las sesiones se desarrollaron durante sus horas de clases de matemáticas.

Para comodidad de la lectura, se ha estado usando las siglas MS para denotar al modelo de la situación, a partir de ahora usaremos RM para la representación matemática que se anexó en la sesión S3 y la letra E seguida de un cierto número (por ejemplo E8) para denotar a alguno de los estudiantes participantes.

3.2 Resultados

3.2.1 Sesión de diagnóstico

En esta sesión se aplicó el primer problema que se muestra en la tabla 1: Un pino a cierta hora del día proyecta una sombra de 45 m. Si el ángulo de elevación de la sombra es de 50° , ¿Cuál será la altura del pino?

A todos los estudiantes se les solicitó un dibujo que representara la situación del problema (MS), así como la resolución del mismo. Cuando se analizó cada una de las respuestas dadas por parte de los alumnos se obtuvieron las siguientes observaciones.

En la primera consigna, que fue hacer un dibujo, se obtuvieron tres categorías: dibujo congruente (DC, 10 alumnos), dibujo no congruente (DNC, 10 alumnos) y representación del texto base (TB, 2 alumnos).

Categoría DC: en esta categoría se encuentran aquellos dibujos congruentes con la situación. Un dibujo congruente, fue considerado como aquel que tiene todos los elementos y todos los datos del problema ubicados correctamente (pino, sombra, ángulo y longitud de la sombra). Unos ejemplos de este tipo de dibujo se pueden ver en las figuras 4.1 y 4.2.

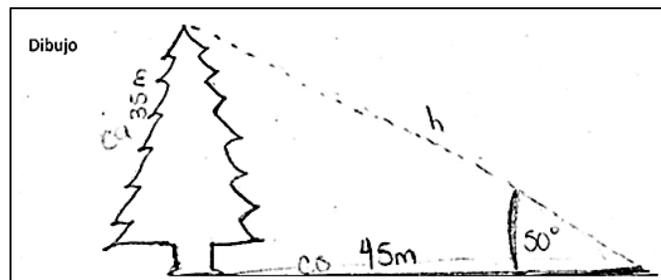


Figura 4.1 MS del E8 del problema 1 de la sesión S1.

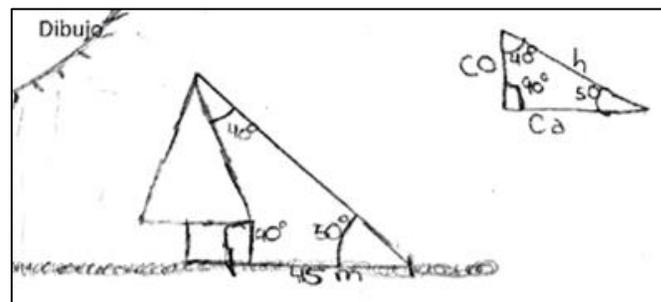


Figura 4.2 MS del E4 del problema 1 de la sesión S1.

Categoría DNC: en esta categoría tenemos dos subcategorías, DNC1 (7 alumnos) y DNC2 (3 alumnos). Ambas incluyen dibujos no congruentes con la situación.

- DNC1: esta subcategoría tiene las siguientes características, no aparecen todos los elementos matemáticos (4 alumnos), ver figura 5.1, o tienen algún dato ubicado incorrectamente (3 alumnos), ver figura 5.2.

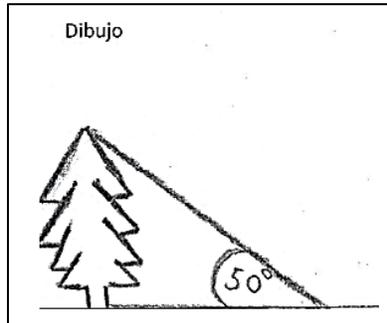


Figura 5.1 MS del E15 del problema 1 de la sesión S1.

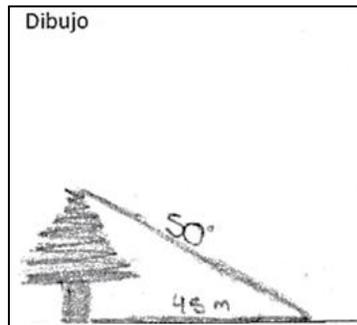


Figura 5.2 MS del E19 del problema 1 de la sesión S1.

- DNC2: En esta subcategoría hay un elemento realista que no está representado correctamente. Tres alumnos representaron la proyección de la sombra a la misma altura que las ramas del pino, figura 6.

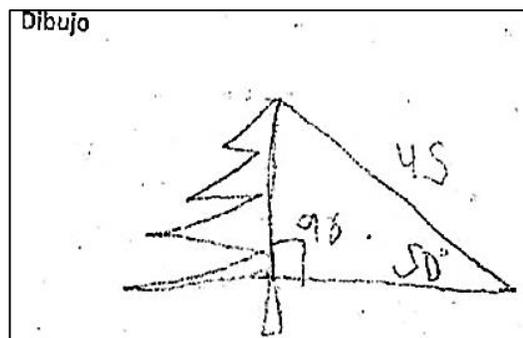


Figura 6 MS del E5 del problema 1 de la sesión S1.

Categoría TB: En esta subcategoría se incluyeron los dibujos de estudiantes que no concluyeron la construcción del texto base, es decir, aparecen los elementos realistas (pino y sombra) y los elementos matemáticos (ángulo y longitud de la sombra) pero no están relacionados entre sí. Estos MS reflejan que estos alumnos construyeron la micro pero no la macro estructura del texto base. Un alumno dibujó el pino, su sombra y un ángulo que no corresponde a la situación, figura 7.1. Otro sólo dibujó un pino y colocó los datos del problema pero fuera de contexto, figura 7.2

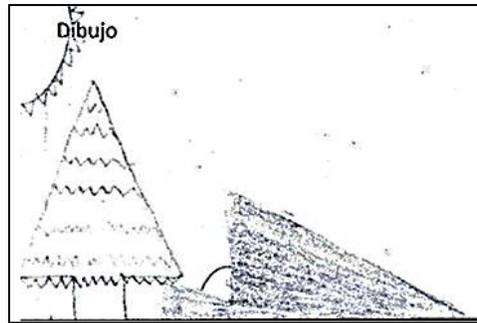


Figura 7.1 MS del E3 del problema 1 de la sesión S1.

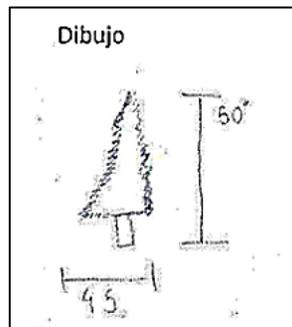


Figura 7.2 MS del E20 del problema 1 de la sesión S1.

Resolución del problema

Veamos una resolución correcta al problema antes de explicar la resolución de los estudiantes.

En este problema deseamos encontrar cuánto mide de altura de un cierto pino, dado que conocemos la longitud de la sombra que proyecta y el ángulo de elevación. En la figura 4.2 podemos ver que se trata de un triángulo rectángulo. En el triángulo conocemos la medida de su base y en particular uno de sus ángulos, entonces recurrimos a hacer uso de la función trigonométrica tangente ($\tan \theta = \frac{c.o.}{c.a.}$) para encontrar el valor aproximado de su altura. Denotamos ahora a *c. a.* como el cateto adyacente ($c. a. = 45 m$) que representa la longitud de la sombra, θ como el ángulo de elevación ($\theta = 50^\circ$), y *c. o.* como el cateto opuesto que representa la altura de pino. Lo que sigue entonces es encontrar el dato que no se conoce.

Primero, sustituyendo los datos en la función tangente tenemos:

$$\tan 50^\circ = \frac{c.o.}{45 m}$$

Despejando el *c. o.*

$$(\tan 50^\circ)(45 m) = c. o.$$

Calculando aproximadamente el valor de tangente de 50° y multiplicando por los 45 metros, tenemos:

$$(1.191)(45 m) \approx c. o.$$

$$53.595 m \approx c. o.$$

Así, el valor de la altura del pino debe ser 53.595 metros aproximadamente.

En este primer problema ningún estudiante dio una respuesta correcta. Las respuestas erróneas que dieron los estudiantes se clasificaron en tres categorías:

- Utilización de la razón trigonométrica tangente.
- Manipulación de los datos con operaciones básicas.
- Respuesta numérica sin procedimiento.

Al analizar los procedimientos que siguieron estos estudiantes, al intentar resolver el problema, notamos que la mayoría de los que lograron un MS congruente con la situación (categoría DC) identificaron que debían usar la razón trigonométrica tangente (60% de ellos), pero, por errores algebraicos, generalmente un mal despeje, no llegaron a la solución. Sólo algunos de esta categoría recurrieron a sumas o productos de los datos para resolver el problema (20%) o dieron una respuesta sin mostrar el procedimiento (20%).

En contraste con lo anterior, tenemos que la mayoría de los estudiantes que no lograron construir un MS adecuado (80%), subcategorías DNC1, DNC2 y categoría TB sólo tomaron los datos e hicieron operaciones básicas. Además, cuando se les preguntó qué dificultades tuvieron para resolver el problema, algunos dijeron que no habían entendido o que les faltó recordar fórmulas.

3.2.2 Sesión de intervención

En esta sesión se aplicaron las estrategias que fueron tomadas de Polya (1965), Van Dijk y Kintsch (1983) y Elosúa (1993), con el fin de guiar a los estudiantes hacia la

construcción del MS. Se planteó a los alumnos el segundo problema de la tabla 1: Debido a un incendio en una fábrica se tuvo que desalojar a las personas que estaban cerca dentro de un radio de 500 m del siniestro. Una familia tiene una casa a 400 m al este y a 350 m al sur de la fábrica. Se desea saber si será desalojada de su vivienda.

Para esta sesión también se les explicó que el trabajo consistiría de tres momentos: trabajo individual, trabajo colaborativo en equipos pequeños y trabajo grupal.

3.2.2.1 Trabajo individual

Aquí se empezó por darles las primeras orientaciones para que ellos pudieran comprender el texto, se les invitó a leer detenidamente el problema y a que identificaran las palabras o conceptos que desconocieran, con la intención de que construyeran mentalmente el texto base y luego pudieran relacionarlas sin ninguna dificultad para construir el MS. Así mismo, se les pidió que reconocieran todos los datos que se les presentaba en el problema. La mayoría de ellos dijeron no tener ninguna duda con lo que se les había pedido. Después, se les sugirió que identificaran cuál era la problemática que se les presentaba y ellos contestaron que tenían que determinar si la vivienda tenía que ser desalojada o no.

Al momento de preguntarles si ya habían comprendido la situación del problema, la mayoría respondió que sí, sin embargo, cuando se les solicitó que hicieran una representación de la situación se observó que ninguno hizo un dibujo congruente con la misma. El que ningún estudiante lograra la construcción de un MS congruente con el problema, dejó ver que faltó comprensión por parte de los alumnos. Incluso, hubo alumnos que solo representaron parte del texto base, (figuras 11.1 y 11.2).

En esta parte de la sesión ninguno de los estudiantes logró la construcción del MS y por tanto, tampoco resolvieron el problema.

Los dibujos que hicieron los estudiantes de manera individual se analizaron posteriormente por los autores de esta investigación. En seguida se muestran las categorías y algunos ejemplos:

- Los que intercambiaron la ubicación de los puntos cardinales Este y Oeste, figura 8.

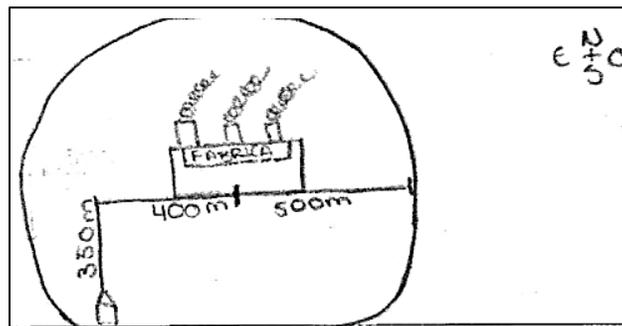


Figura 8. MS del E4 del problema 2 de la sesión S2.

- No midieron las coordenadas a partir del origen (E2 y E11), figuras 9.1 y 9.2

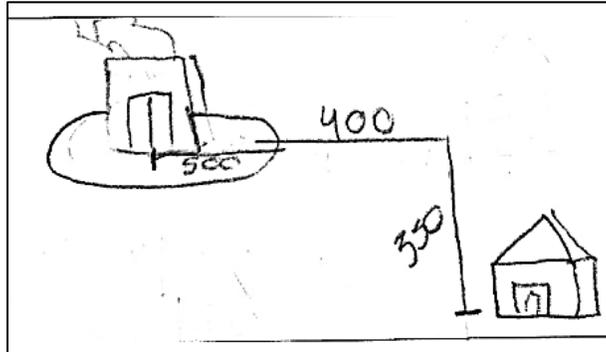


Figura 9.1 MS del E2 del problema 2 de la sesión S2

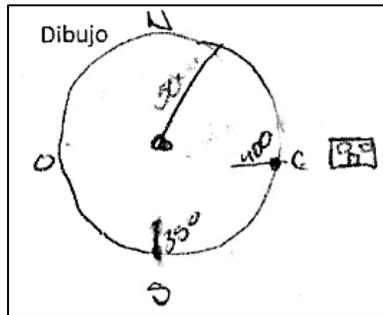


Figura 9.2. MS del E11 del problema 2 de la sesión S2.

- Estudiantes que dieron una ubicación de la casa, pero no se sabe si midieron correctamente los metros como se indica en el problema, figura 10.

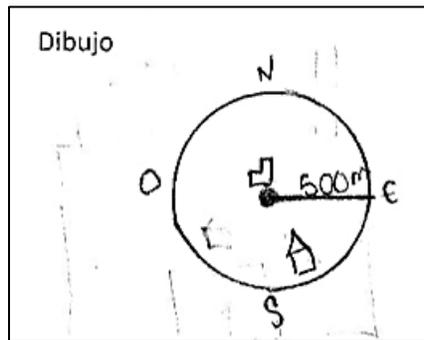


Figura 10. MS del E18 del problema 2 de la sesión S2.

- Los que dibujan algunos de los elementos que se mencionan en el texto (la casa, la fábrica, la circunferencia, etc.) Es decir, estas representaciones de la situación, reflejan que estos alumnos construyeron la micro pero no la macro estructura del texto base, figuras 11.1 y 11.2



Figura 11.1 MS del E7 del problema 2 de la sesión S2.

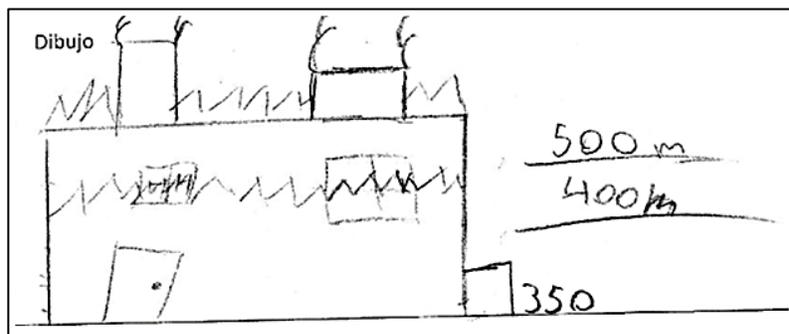


Figura 11.2 MS del E15 del problema 2 de la sesión S2.

Resolución del problema

Antes de ver como resolvieron los estudiantes el problema, veamos una resolución correcta a este.

Para saber si será desalojada la familia de su vivienda, tenemos que calcular la distancia a la que se encuentran de la fábrica y ver si están dentro del radio del siniestro. Haciendo la representación adecuada al problema, se puede ver que se traza un triángulo rectángulo y el dato que no se conoce es la hipotenusa. Usando el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2 \dots (1)$) podemos encontrar el dato faltante, es decir, la distancia a la que se entra la familia del incendio. Aquí nuestros datos son los siguientes: $a = 400 \text{ m}$ (dirección al este), $b = 350 \text{ m}$ (dirección al sur) y c es nuestra incógnita (distancia de la vivienda al incendio de la fábrica).

Primero, obteniendo la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación 1, se tiene:

$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \dots (2)$$

Sustituyendo los datos que se conocen en (2) y realizando los cálculos correctos obtenemos:

$$c = \pm\sqrt{(400\text{ m})^2 + (350\text{ m})^2}$$

$$c = \pm\sqrt{282500\text{ m}^2}$$

$$c \approx \pm 531.50\text{ m}$$

Ya que c representa la distancia de la vivienda al incendio de la fábrica, tomando el valor positivo $c \approx 531.50\text{ m}$ y cómo el radio del siniestro es 500 m , se concluye que la familia no tiene que ser desalojada de su vivienda, ya que $531.50\text{ m} > 500\text{ m}$.

En la consigna sobre la resolución, se les preguntó a los estudiantes si con los datos que se les presentaban podían resolverlo y solo algunos respondieron que sí. De las respuestas que dieron los estudiantes, ninguna de ellas fue correcta y se clasificaron en tres categorías:

- Manipulación de los datos con operaciones básicas.
- Argumentación de que la casa tenía que ser desalojada sin ningún procedimiento matemático.
- simplemente el escribir algún dato o no responder.

3.2.2.2 Actividad en equipo

En el segundo momento de esta sesión se pidió a los estudiantes que compartieran sus reflexiones sobre este problema con sus compañeros, para lo cual se formaron 4 equipos de 4 estudiantes y 2 de 3 estudiantes.

En esta actividad, se pidió a los equipos que nuevamente volvieran a leer el texto, pero ahora más detalladamente. Al igual que en la primera sesión, se les dijo que identificaran todo aquello que no conocieran o que les causara algún impedimento para comprender el problema. Uno de los equipos planteó la duda sobre la ubicación correcta de los puntos cardinales, la cual se aclaró. Lo anterior ayudó a este equipo a tener una estructura más clara del texto. Después de esto, el equipo pudo hacer la representación correctamente, lo cual indicó que estos estudiantes ya habían entendido el problema. Estos estudiantes pudieron pasar de la construcción del texto base a un MS adecuado. Otro equipo tuvo el error de medir los 400 m hacia el oeste, los integrantes aun no tenían claro la ubicación de los puntos cardinales, por lo que ellos no pudieron hacer una representación correcta. A la mayoría de los equipos les faltó pasar de la micro a la macro estructura en el texto base, para luego poder construir un MS adecuado.

En la resolución del problema, solo 2 de los 6 equipos lograron resolverlo correctamente aplicando el teorema de Pitágoras. De los 4 equipos que respondieron mal, tenemos que, dos de ellos sumaron los datos (400 m y 350 m), y compararon esta suma con el área que cubría el siniestro. Uno comparó los datos con el radio del siniestro y dijo, “*la casa está cerca del incendio porque el radio mide 500 m y si puede llegar a la casa*”. En otro equipo intentaron aplicar el teorema de Pitágoras. A pesar de que ellos escribieron: “*no quedó dentro del área de peligro*”, es decir, la casa no tiene que ser desalojada, su procedimiento fue incorrecto debido a un mal despeje.

3.2.2.3 Trabajo grupal

En el tercer y último momento de esta sesión, dos alumnos decidieron compartir con todo el grupo el procedimiento que hicieron con su equipo para llegar al resultado que se esperaba. El primero procedió a leer el enunciado del problema, a pesar de que ya todos lo habían leído varias veces, el no omitió ninguna de las palabras o frases. Se le preguntó una vez más al grupo si tenían dudas respecto a las palabras o frases que decía el texto, los integrantes de los equipos que ya habían respondido correctamente dijeron que no, los demás equipos prefirieron quedarse callados a pesar de que se les decía que expresaran todas las dudas que tuvieran. Luego se les preguntó a los alumnos si lo habían comprendido, de nuevo los integrantes de los equipos que pudieron resolverlo dijeron que sí, pero los alumnos que no habían podido hacer su representación correcta, ahora ya decidieron hablar y preguntaron por qué seguían estando mal en su dibujo de la situación y en su respuesta. Uno de los errores que ellos seguían cometiendo era la ubicación de los puntos cardinales, por lo que se les explicó cuál era la ubicación correcta. Una vez aclarada esta situación, todos los alumnos habían entendido cual era la situación que presentaba el problema.

Luego, el otro alumno pasó a la pizarra a realizar un dibujo del problema, y como ya había entendido la problemática que se presentó, pudo hacer una representación correcta (este alumno en su dibujo supuso que la casa estaba fuera del radio del siniestro). Después, en la resolución del problema, se les preguntó si ya habían entendido cual era el objetivo, uno de los alumnos de otro equipo dijo que sí, por lo que compartió su idea con sus compañeros, resolviendo el problema usando el teorema de Pitágoras. Él argumentó que con los datos que se daban, se trazaba un triángulo rectángulo y el lado que se desconocía era la hipotenusa. Consecuencia de esto pudo aplicar adecuadamente el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa. Una vez que encontró el dato faltante lo comparó con la longitud del radio del siniestro, por lo que dijo: *la casa no tiene que ser desalojada*.

3.2.3 Sesión de evaluación

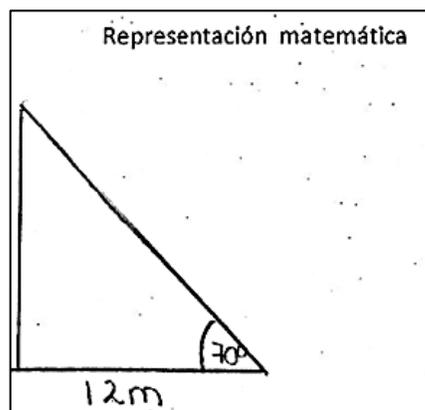
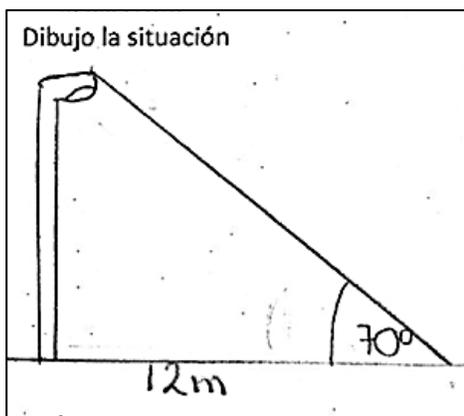
En esta sesión se aplicó el último problema de la tabla 1: Un poste se sostiene con un cable sujeto en la parte superior y en el piso a 12 m de la base. Si su ángulo de elevación es de 70° , ¿cuál es la medida del poste y del cable que lo sostiene?

Para esta sesión se agregó la solicitud de que además de un dibujo de la situación también hicieran una RM del problema. Esta sesión fue de evaluación por lo que el instructor no intervino.

En la primera consigna se tiene que el 100% realizó un dibujo para representar la situación del problema.

Para este problema primero se observó cómo los estudiantes construyeron el MS y la RM del problema planteado, luego se relacionó el desempeño en la construcción del MS en esta sesión con el desempeño que mostraron en la sesión S1. Para ello se hicieron dos categorías, dibujo congruente (C1) y dibujo no congruente (C2).

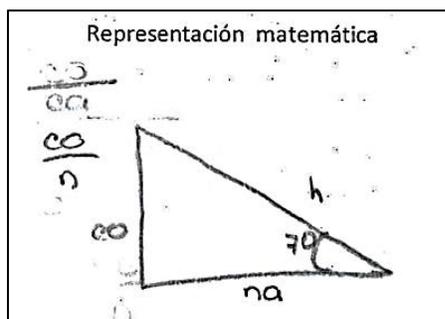
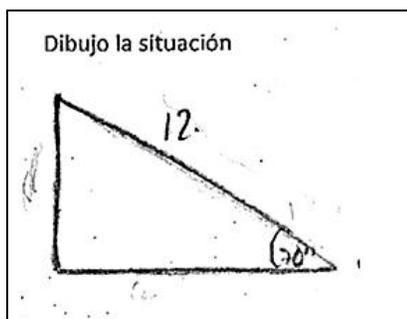
Categoría C1: es un dibujo que contiene todos los datos, ubicados correctamente y que representa la situación de una manera adecuada, cómo podemos ver en las figuras 12.1 y 12.2.



Figuras 12.1 y 12.2, MS y RM respectivamente del E16 del problema 3 de la sesión S3.

Categoría C2: es un dibujo que contiene un triángulo pero con dos tipos de errores.

- Ubicación incorrecta de algún dato, ver figura 13.1
- Faltó ubicar algún dato, ver figura 13.2



Figuras 13.1 y 13.2 respectivamente MS y RM del E11 del problema 3 de la sesión S3.

Al analizar los dibujos que hicieron los estudiantes para representar la situación (MS) de este problema, tenemos que de la categoría DC y subcategoría DNC2, ambas de la sesión S1, todos realizaron un dibujo congruente con la situación, a unos pocos les faltó colocar alguna unidad de medida. La mayoría de la subcategoría DNC1 (71.4%), hizo un dibujo congruente y otros (28.6%) un dibujo no congruente. También se observó que los alumnos que en la sesión S1 sólo representaron parte del texto base, en esta sesión pudieron dar el paso a la construcción del MS, categoría TB.

Acerca de la RM, el 60% de la categoría DC y de la DNC1, hicieron una representación congruente con la situación, asimismo hubo algunos alumnos que les faltó ubicar algunas unidades de medida. Un alumno de cada una de las categorías anteriores decidió ya no hacer esta representación. El 71.4% de la categoría DNC2 también hizo una RM congruente.

Resolución del problema

Como se hizo en los dos problemas anteriores, veamos primero una resolución correcta al problema.

En este problema se pide encontrar la altura de un cierto poste y la longitud del cable que lo sostiene desde la parte superior hasta el suelo a una distancia de 12 m desde la base. Observando la figura 12.2, podemos ver que se trata de un triángulo rectángulo.

Primero calcularemos la altura del poste; como el dato que deseamos encontrar es opuesto al ángulo de elevación, y el que conocemos es adyacente al ángulo, recurrimos a usar la función trigonométrica tangente ($\tan \theta = \frac{c.o.}{c.a.}$). Los datos que se conocen entonces son: $c.a. = 12 m$ (longitud desde la base del poste al extremo del cable sobre el piso), $\theta = 70^\circ$ (ángulo de elevación) y el $c.o.$ es nuestra incógnita (altura del poste).

Ahora, sustituyendo los datos en la función tangente tenemos:

$$\tan 70^\circ = \frac{c.o.}{12 m}$$

Despejando el $c.o.$

$$(\tan 70^\circ)(12 m) = c.o.$$

Calculando aproximadamente el valor de tangente de 70° y multiplicando por los 12 metros, tenemos

$$(2.7474)(12 m) \approx c.o.$$

$$32.9688 m \approx c.o.$$

Así, el valor de la altura del poste debe ser aproximadamente 32.9688 metros.

Ya sabemos ahora cuánto mide la altura del poste, procedemos entonces a conocer la longitud del cable que lo sostiene. Dado que se trata de la hipotenusa de triángulo, usaremos el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2 \dots (3)$) donde nuestros datos que conocemos son: $a = 12 \text{ m}$ (longitud desde la base del poste al extremo del cable sobre el piso), $b \approx 32.9688 \text{ m}$ (altura del poste) y c es nuestra incógnita (longitud del cable que sostiene al poste).

Obteniendo la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación 3, se tiene:

$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \dots (4)$$

Sustituyendo los datos que conocemos en (4) y realizando los cálculos correctos obtenemos:

$$c \approx \pm\sqrt{(12 \text{ m})^2 + (32.9688 \text{ m})^2}$$

$$c \approx \pm\sqrt{1230.9417 \text{ m}^2}$$

$$c \approx \pm 35.08 \text{ m}$$

Por lo tanto la longitud del cable que sostiene el poste es de 35.08 metros aproximadamente.

Cómo resultado final tenemos que la medida del poste y del cable que lo sostiene aproximadamente deben ser de 32.9688 y 35.08 metros respectivamente.

En este problema, la mayoría de los alumnos, pudieron responder correctamente a dos o a una pregunta, y a partir de eso se hicieron las tres categorías siguientes:

- Los que responden correctamente a las dos preguntas.
- Los que responden correctamente a la primera pregunta.
- Aquellos que no responden.

Observando los procedimientos de los estudiantes para resolver el problema, se tiene que, en la categoría DC, el 80% respondió a las dos preguntas. De la categoría TB los dos estudiantes también respondieron a ambas preguntas.

En oposición con lo anterior, la mayoría de los estudiantes que no lograron construir un MS adecuado en la sesión S1, pero que en ésta sí pudieron hacer una representación congruente con la situación, subcategorías DNC1 y DNC2, respondieron al menos a la primera pregunta.

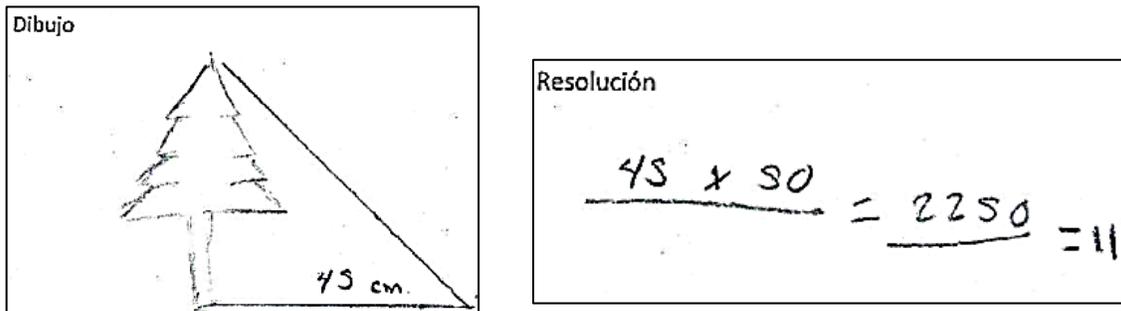
Un solo estudiante de la subcategoría DNC1 no respondió al problema y su dibujo en esta sesión también fue no congruente con la situación.

3.3 Casos particulares

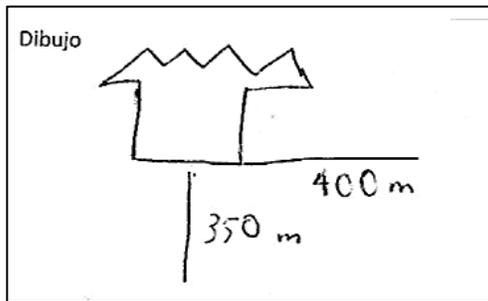
En esta sección se presentan los casos de cuatro estudiantes que participaron en la investigación y que se seleccionaron para ilustrar el progreso que logró este grupo en la construcción del MS y en la resolución de los problemas.

3.3.1 Estudiante 1

Problema 1: El dibujo que hizo este estudiante, contiene casi todos los elementos del problema (el pino y la distancia que proyecta), faltando la ubicación del ángulo de elevación. Esto se pudo deber a que el estudiante no tiene claro qué es el ángulo de elevación o que lo omitió en la lectura del texto. Al ubicar la distancia que proyecta la sombra del pino, cambió las unidades de medida de metros a centímetros, (Figura izquierda 14.1). Su dibujo se clasificó como no congruente con la situación. Al resolver el problema, solo multiplicó los dos datos, que es la distancia de la sombra y el ángulo de elevación. Como resultado escribe 2250 y luego 11, lo cual es incorrecto.



Problema 2: En este segundo problema, el estudiante 1 dibujó la silueta de una fábrica, en donde a partir de ella midió los 400 m al este y los 350 m al sur, sin dar una ubicación aproximada de la vivienda que se deseaba desalojar, ver figura izquierda 14.2. En la resolución del problema operó los datos mediante una suma, dando un resultado incorrecto al problema, y sin concluir si la casa tiene que ser desalojada o no, lo cual era lo que pedía el problema.



Resolución

$$400\text{ m} + 350\text{ m} = 750\text{ m}$$

Figura 14.2. MS y resolución del E1 del problema 2 de la sesión S2.

Problema 3: En este tercer problema, el estudiante 1 representó correctamente el MS y la RM, ver figura 14.3. En ambas representaciones, ubicó todos los datos correctamente. Ambas fueron consideradas como un dibujo congruente. En la resolución del problema, respondió correctamente la primera pregunta, para lo cual aplicó la razón trigonométrica tangente (como se puede ver en la figura 14.4) aunque con algunos errores de redacción. La segunda pregunta no la respondió.

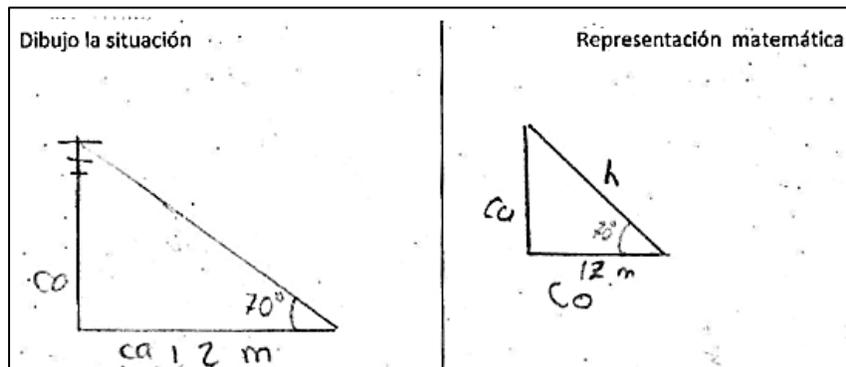


Figura 14.3 MS y RM del E1 del problema 3 de la sesión S3.

Resolución	Resultado
$\tan = \frac{ca}{ca}$ $\tan 70 = \frac{x}{12}$ $x = (12)(2.74)$ $x =$	$P = 32.88$

Figura 14.4 Resolución del problema 3 de E1 de la sesión S3.

3.3.2 Estudiante 3

Problema 1: El dibujo de este estudiante, se consideró como un dibujo no congruente con la situación, esto se debe a que en su representación dibujó el pino, su sombra y un ángulo que no corresponde con la descripción del problema, ver figura izquierda 15.1. Se puede ver además que no ubica ningún dato, solo representa los elementos que indica el texto. El estudiante no concluyó la construcción del texto base, es decir aparecen los elementos del texto pero no puede hacer una relación correcta entre ellos. Como hemos dicho anteriormente, este tipo de MS refleja que el estudiante construyó la micro pero no la macro estructura del texto base.

Al resolver el problema, escribió dos ecuaciones de primer grado con los datos del problema ($45 + x = 50$ y $50 + 45 = x$), luego sumó incorrectamente los datos, dando como respuesta la suma 1250 y como resultado 22.5. Como su representación de la situación no fue adecuada, se esperaba que su respuesta tampoco lo fuera, lo cual sucedió.



Figura 15.1 MS y resolución del E3 del problema 1 de la sesión S1.

Problema 2: En este segundo problema, el estudiante 3 volvió hacer un dibujo no congruente con la situación. Representó una fábrica en llamas, los datos los ubicó a un lado de ella, ver figura 15.2. Nuevamente como en el primer problema, el MS del estudiante refleja que el construyó la micro pero no la macro estructura del texto base. En la resolución del problema decidió no escribir nada.

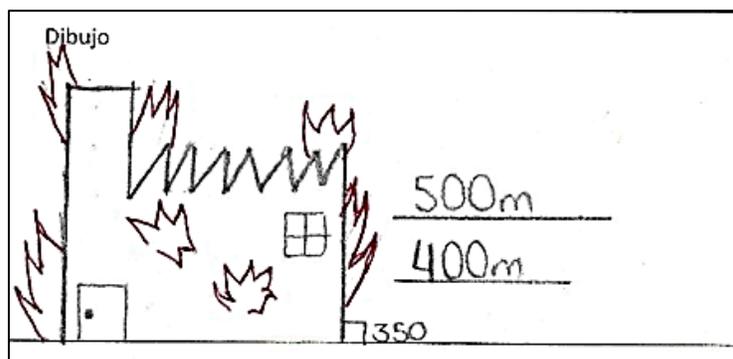


Figura 15.2. MS del E3 del problema 2 de la sesión S2.

Problema 3: El estudiante 3, en este tercer problema representó adecuadamente el MS como en la RM, ver figura 15.3. En ambos esquemas, le faltó poner las unidades de medida a los datos. En la resolución del problema, a pesar de que respondió correctamente a las dos preguntas, su segunda respuesta fue considerada nula porque el procedimiento fue incorrecto y su respuesta pudo haberla copiado. Primero usó la razón trigonométrica tangente y luego intentó usar el teorema de Pitágoras, figura 15.4. A pesar de lo anterior, este estudiante logró mejorar la representación de la situación, y esto le pudo haber ayudado a responder al menos a la primera pregunta del problema. Notamos que, en este problema, no solo logró la construcción del MS sino que también una RM.

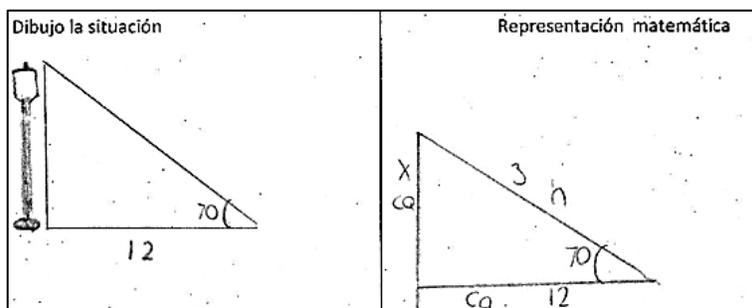


Figura 15.3. MS y RM del E3 del problema 3 de la sesión S3.

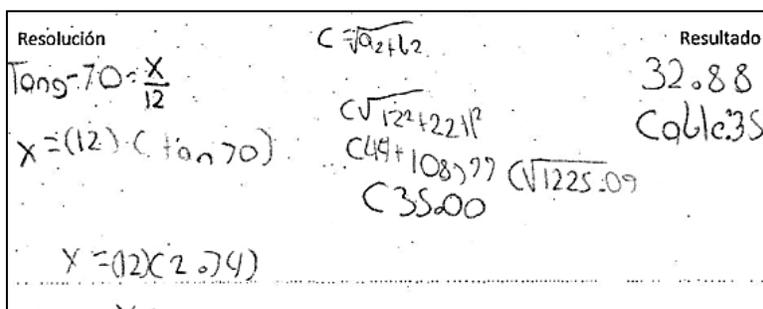


Figura 15.4 Resolución del problema 3 del E3 en la sesión S3.

3.3.3 Estudiante 11

Problema 1: El estudiante 11, en su primera representación, ubicó incorrectamente la longitud de la sombra que proyecta el pino, ver figura 16.1. Su dibujo se consideró medianamente congruente con la situación. Para la resolución del problema, realizó operaciones básicas (sumó, dividió y restó), finalmente él dio como resultado al problema 35, lo cual es incorrecto, figura 16.2



Figura 16.1. MS del E11 del problema 1 de la sesión S1.

Resolución	Resultado
$210 + 180 = 90$ $\begin{array}{r} 45 \\ 195 \\ \hline 240 \end{array}$ $\begin{array}{r} 95 \\ -45 \\ \hline 50 \end{array}$	$\frac{10}{288}$ $\frac{50}{45}$ $\frac{10}{45}$
	7135

Figura 16.2 Resolución del problema 1 del E11 en la sesión S1.

Problema 2: En este segundo problema, en el dibujo de la situación, el estudiante 11 hizo una circunferencia de radio 500 m y empezó a medir los 400 y 350 metros a partir del contorno de la circunferencia. En su esquema no indicó dónde está la fábrica incendiándose (se puede entender que es el punto del centro), además no se sabe si el dibujo que está a la derecha del punto e, es la casa, ver figura izquierda 16.3. En la resolución del problema solo escribió $m^2 + 400 \div 350$, sin concluir nada más.

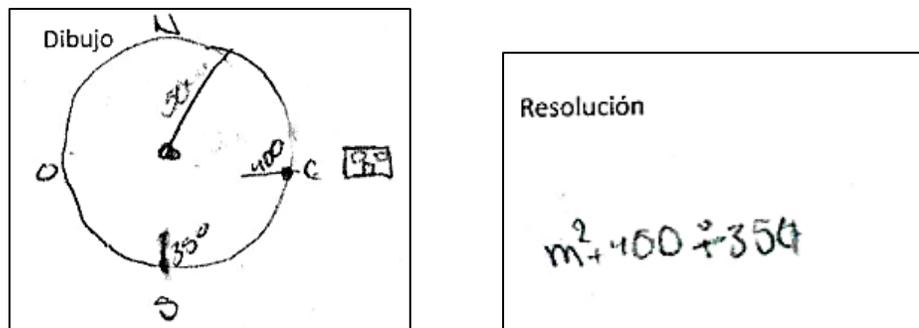


Figura 16.3 MS y resolución del E11 del problema 2 de la sesión S2.

Problema 3: En el tercer problema, en el dibujo de la situación del problema, el estudiante 11 ubicó mal los 12 metros (ver figura izquierda 16.4), también le faltó poner las unidades de medidas (grados y metros). En la RM solo hizo un esquema de un triángulo rectángulo sin ubicar los elementos del texto. En su segundo dibujo, pudo haber omitido todos los datos al no tener clara la situación del problema. En la resolución, respondió a la

primera pregunta, para ello usó la razón trigonométrica tangente (figura 16.5), aunque con falta de formalidad en el procedimiento él dio una respuesta correcta.

Se puede ver que, aunque su dibujo de la situación no es congruente, pudo responder al menos a la primera pregunta correctamente.

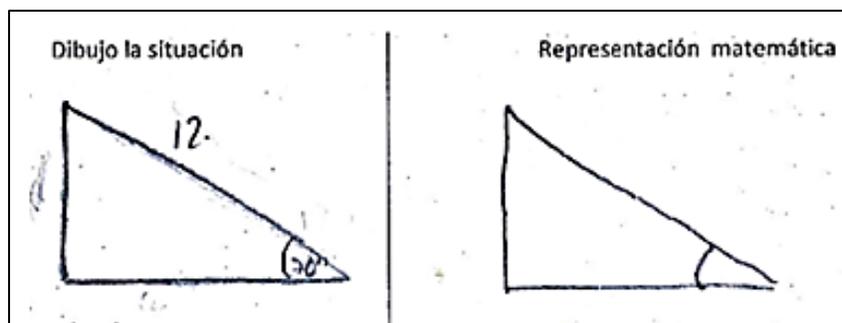


Figura 16.4. MS y RM del E11 del problema 3 de la sesión S3.

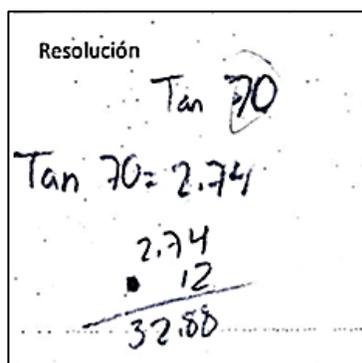


Figura 16.5 Resolución del problema 3 del E11 en la sesión S3.

3.3.4 Estudiante 20

Problema 1: En su dibujo, este estudiante representó el pino y colocó los datos del problema pero fuera de contexto, ver figura 17.1. Su dibujo se consideró no congruente con la situación. Al igual que el estudiante 3, en el dibujo de este estudiante, se considera que solo refleja la micro pero no la macro estructura del texto base. Confunde un ángulo de elevación con una distancia. Al resolver el problema, escribió el producto $45 * 50$ y como resultado dice que la altura del pino mide 2250 m, lo cual es incorrecto, figura 17.2

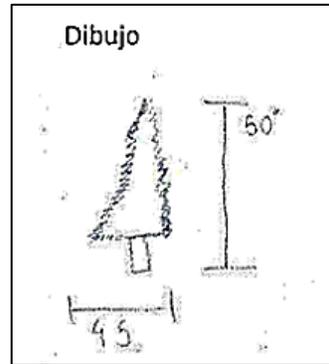


Figura 17.1. MS del E20 del problema 1 de la sesión S1.

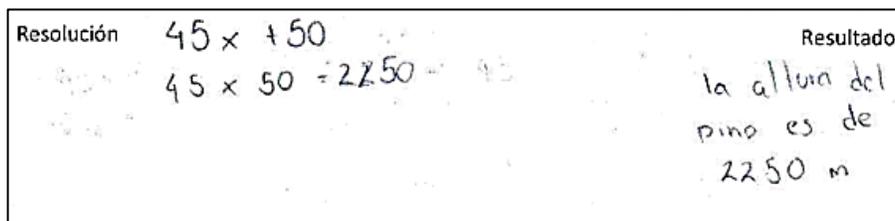


Figura 17.2 Resolución del problema 1 del E20 en la sesión S1

Problema 2: En este problema, en el dibujo de la situación, el estudiante 20 hizo una circunferencia sin indicar el radio de 500 m. Fuera de la circunferencia dibujó un segmento de recta de 500 m, lo cual hace suponer que confundió el radio con el diámetro. Al igual que el estudiante 11, él empezó a medir los 400 y 350 metros al este y al sur respectivamente, pero a partir del contorno de la circunferencia. En su esquema no indicó dónde está la fábrica ni la casa, ver figura 17.3. En la resolución del problema decidió no escribir nada.

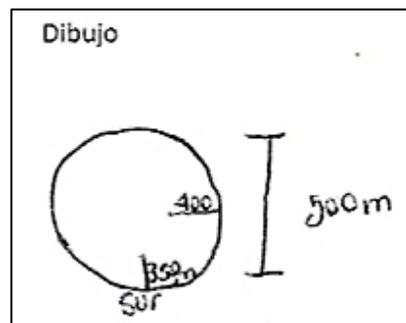


Figura 17.3. MS del E20 del problema 2 de la sesión S2.

Problema 3: El estudiante 20 representó adecuadamente la situación del problema 3, es decir su MS y RM son congruentes, ver figura 14.4. En ambos ubicó los datos correctamente. En la resolución respondió solo la primera pregunta, utilizando la razón trigonométrica tangente y dando una respuesta correcta, figura 17.5. Comparando sus dibujos de la situación de las tres sesiones, se puede observar que tuvo una mejora en esta última.

En la sesión S1 él nada más representa una parte del texto base, en la de intervención intentó hacer una presentación pero no logra un dibujo adecuado y en la de evaluación ya logró mejorar su representación de la situación.

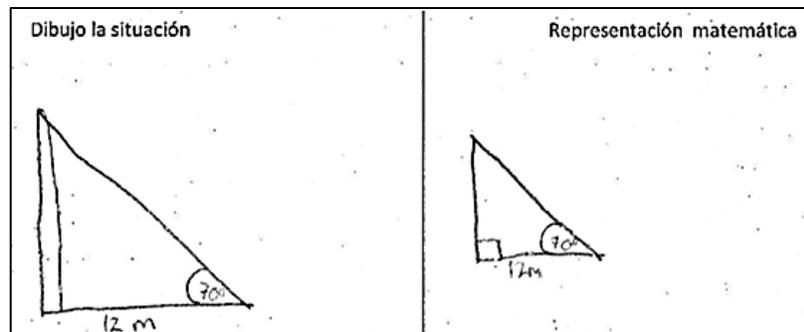


Figura 17.4 MS y RM del E20 del problema 3 de la sesión S3.

Resolución	Resultado
$\tan 70 = \frac{x}{12}$ $x = 12 \cdot \tan 70 = 2.74$ $x = 32.88$	$x = 32.88$

Figura 17.5 Resolución del problema 3 del E20 en la sesión S3.

Conclusiones

Los resultados de la sesión de diagnóstico mostraron que la mayoría de los estudiantes intentaron resolver el problema sin comprenderlo. Lo anterior se deduce porque sus dibujos no fueron congruentes con la situación del problema. Incluso, hubo estudiantes que construyeron la micro pero no la macro estructura del texto base, lo cual refleja un nivel muy bajo en el proceso de comprensión. Además, ninguno pudo dar una respuesta correcta al problema.

La mayor parte de los estudiantes que sí hicieron un dibujo congruente, obtuvieron el modelo matemático y se acercaron más a dar una respuesta correcta al primer problema, sin embargo, no lo resolvieron debido a errores algebraicos. De esta forma, concluimos que los estudiantes que construyeron un MS congruente con la situación tuvieron más oportunidad de resolver correctamente el problema que los que no.

En la sesión de evaluación:

- Después de haber trabajado con ellos las estrategias de comprensión textual (Polya, 1965; Van Dijk & Kintsch, 1983; Elosúa, 1993), los resultados mostraron una mejora en aquellos alumnos que no pudieron construir un dibujo congruente en la sesión S1. Además, en la resolución del problema, estos estudiantes pudieron contestar al menos a la primera pregunta.
- Se observó también que, los estudiantes que se quedaban en la construcción de la micro y no pasaban a la macro estructura del texto base, pudieron pasar ahora a la construcción del MS y respondieron correctamente, al menos a la primera pregunta.
- La mayoría de los estudiantes de la categoría DC, en esta sesión, volvieron a hacer un dibujo congruente (categoría C1). Posteriormente respondieron a las dos preguntas que se les presentó en ese problema.
- Podemos decir que con la ayuda de las estrategias de los autores mencionados anteriormente, se orientó a los estudiantes hacia una mejor comprensión y por esto realizaron un mejor MS del problema. Por consiguiente llegaron a la solución correcta del problema.

En el análisis de los casos particulares se pudo ver el progreso de algunos estudiantes durante las tres sesiones, mostrando un mejor desempeño en la sesión S3, tanto en la construcción del MS como en la resolución del problema.

Con los resultados de esta investigación se comprueba que es posible implementar estrategias de comprensión textual que ayuden a los estudiantes a representar adecuadamente la situación de problemas matemáticos y a resolverlos correctamente. Además, que los dibujos de los estudiantes son una herramienta didáctica que el profesor puede utilizar, tanto para introducir a los estudiantes al proceso mental de comprensión textual, como para observar cómo ellos están comprendiendo y así implementar otras estrategias, si es necesario.

Como continuación del trabajo realizado, a futuro, se podrían aplicar las mismas estrategias de esta tesis a:

- Grupos de diferentes niveles escolares.
- De forma individual, con la intención de ver el efecto que puede tener un estudiante en particular.

Analizar y aplicar otras estrategias que ayuden a alumnos con dificultades en la comprensión de problemas verbales de matemáticas.

Usar otras herramientas didácticas para promover la representación del modelo situacional, como por ejemplo, la tecnología.

Bibliografía

- Abusamra, V., Cartoceti, R., Raiter, A., & Ferreres, A. (2008). Una perspectiva cognitiva en el estudio de la comprensión de textos. *Psico*, 39(3), 352-361.
- Almaguer, G., Cantú, F., Rodríguez, L., Rodríguez, R., & García, E. I. (2015). *Matemáticas. Estudio y enseñanza*. México: Limusa.
- Bustos, E.M. (2010). Dificultades de la comprensión lectora. *Innovación y experiencias educativas* [en línea], 37. Recuperado el 10 de febrero de 2015, de http://www.csi-csif.es/andalucia/mod_ense-csifrevistad.html
- De Avalos, M. V., & Velásquez, M. (2000). *Comprensión lectora: dificultades estratégicas en resolución de preguntas inferenciales*. Ediciones Colihue SRL
- Defior, S. (1998). Conocimiento fonológico y lectura: el paso de las representaciones inconscientes a las conscientes. *Revista Portuguesa de Pedagogía*, 32 (1), 5-27
- Echevarría, M. Á. (2006). ¿Enseñar a leer en la Universidad? Una intervención para mejorar la comprensión de textos complejos al comienzo de la educación superior. *Revista de Psicodidáctica*. (pp. 169-188).
- Elosúa, M. R., & García, E. (1993). *Estrategias para enseñar y aprender a pensar*. Narcea.
- Ferro, M., & Eduardo, G. (2007). Psicología de la comprensión textual y control de la comprensión. *Folios* [en línea], (26), 39-48.
- Gutiérrez-Braojos, C., & Pérez, H. S. (2012). Estrategias de comprensión lectora: enseñanza y evaluación en educación primaria. Profesorado, *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 16(1), 20.
- Hernández, J. M., Solano, H., & Jiménez, L. (2014). *Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento*. México: Grupo Editorial Patria.
- Juárez, J. A., Ignjatov, J. S., Hernández, L. A., & Monroy, M. (2015). Differences in the situation model construction for a textbook problem: The broken tree or the broken bamboo? In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 897-903.
- Kintsch, W. (1986). *Learning from text. Cognition and instruction*, 3(2), 87-108.
- Leon, J. (1996). La psicología cognitiva a través de la comprensión de textos. *Revista de psicología general y aplicada*, 49(1), 13-25.
- Makuc, M. (2011). Teorías implícitas sobre comprensión textual y la competencia lectora de estudiantes de primer año de la Universidad de Magallanes. *Estudios pedagógicos* (Valdivia), 37(1), 237-254.
- Miranda-Casas, A., Fernández, M. I., Robledo, P., & García-Castellar, R. (2010). Comprensión de textos de estudiantes con trastorno por déficit de atención/hiperactividad: ¿qué papel desempeñan las funciones ejecutivas? *Revista de neurología*, 50(3), 135-142.
- Palinscar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and instruction*, 1(2), 117-175.
- Peronard, M. (1997). *Comprensión de textos escritos: de la teoría a la sala de clases*. Andrés Bello.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas
- Solé, I. (1992). Estrategias de comprensión de la lectura. *Cuadernos de pedagogía*, 216, 25-27.
- Solé, I. (1998). Estrategias de lectura. Materiales para la innovación de la lectura. *Barcelona. España: Grao*.

- Tijero, T. (2009). Representaciones mentales: discusión crítica del modelo de situación de Kintsch. Onomázein: *Revista de lingüística, filología y traducción de la Pontificia Universidad Católica de Chile*, (19), 111-138. España: Grao.
- Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological review*, 85(5), 363.
- Van Dijk, T. A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.