Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Cálculo de Valores Propios en Dimensión Finita

Por
René Posadas Hernández

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de **Licenciado en Matemáticas Aplicadas** en la Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas

Director

Dr. Slavisa Djordjevic
FCFM

Puebla, Pue.

Junio 2011

A mi familia

Ángeles Hernández Contreras

Arturo Posadas López

Arturo Posadas Hernández

César Posadas Hernández

Gracias por su apoyo incondicional.
René

Agradecimientos

Gracias a mis padres por brindarme el mejor de los consejos cuando lo he necesitado y por haber confiado en mí. Gracias a mis hermanos por su gran aporte a nuestra familia.

Gracias a mis amigos por su valiosa compañía en momentos difíciles. Gracias a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas por su invaluable contribución a mi formación en esta carrera. Gracias a mi asesor el Dr. Slavisa Djordjevic por su apoyo a lo largo de la realización de este trabajo. Agradezco a la Dra. Lidia Hernández, al Dr. Arnoldo Bezanilla, y al Dr. Jacobo Oliveros por sus observaciones y con ello contribuir a mejorar este trabajo.

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

2. Diagonalización **7**
- 2.1. Valores y Vectores Propios 8
- 2.2. Diagonalización 10

3. Descomposiciones Matriciales **13**
- 3.1. Factorización LU 14
- 3.2. El Producto Interno 16
- 3.3. Factorización QR 19
- 3.4. El Problema de Mínimos Cuadrados 27
- 3.5. Matrices Equivalentes 33
- 3.6. Descomposición en Valores Singulares 38
  - 3.6.1. Ángulos Principales 40

4. Cálculo de Valores y Vectores Propios **43**
- 4.1. Método de las Potencias 44
  - 4.1.1. Implementación Computacional 46
- 4.2. Método de las Potencias Inversas con Desplazamiento 49
  - 4.2.1. Implementación Computacional 51
- 4.3. Perturbaciones 53
- 4.4. Iteración Simultánea 55
- 4.5. Método QR 58

Conclusiones **61**

Bibliografía **63**

Introducción

El Álgebra Lineal es una rama de las Matemáticas de mucha utilidad tanto en la teoría como en la práctica. En otras disciplinas como el Análisis Funcional, Análisis Numérico y Optimización se encuentran muchas aplicaciones del Álgebra Lineal. En cuanto a la Modelación Matemática, los operadores de diferenciación y de integración son dos de los ejemplos más importantes de transformaciones lineales. Uno de los problemas importantes del Álgebra Lineal es la búsqueda de los valores propios de los operadores lineales. Los valores propios describen parte importante del accionar de los operadores lineales sobre los espacios vectoriales en que estén definidos. En la práctica una de las razones para encontrar los valores propios de una matriz es que éstos facilitan la búsqueda de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. En este trabajo se tratará el problema del cálculo de valores propios en espacios vectoriales de dimensión finita.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo se tratará con espacios vectoriales y transformaciones lineales.

Denotaremos con $\bar{0}$ al neutro aditivo del espacio vectorial que estemos tratando y denotaremos con 0 al neutro aditivo del campo F sobre el que esté definido el espacio vectorial. A los elementos del campo F les llamaremos escalares y a los elementos del espacio vectorial les llamaremos vectores.

Definición 1.1 *Una matriz de $m \times n$ con entradas en un campo F es un arreglo rectagunlar de la forma*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{ij} \in F$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Al conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con entradas en un campo F lo denotaremos como $F^{m\times n}$, si $A \in F^{n\times m}$ entonces a la entrada correspondiente a la i-ésima fila y la j-ésima columna la denotaremos como A_{ij} o a_{ij}. A la i-ésima columna de A la denotaremos a_i.

Dada una matriz $A \in F^{n\times n}$ la matriz **transpuesta** de A, denotada como A^t, es la matriz obtenida a partir de A intercambiando las filas de A por las columnas de A, es decir, $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Diremos que $A \in F^{n\times n}$ es una matriz **diagonal** si $A_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Si A es una matriz diagonal la denotaremos como $A = diag\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Definición 1.2 *Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V. Un vector $v \in V$ es una **combinación lineal** de vectores de S si existen un número finito de vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S$ y un número finito de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ tales que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$.*

Definición 1.3 *Sea S un subconjunto no vacío del espacio vectorial V. El **generado** de S, denotado por gen(S), es el conjunto que consiste de todas las combinaciones lineales de vectores de S. Por conveniencia definimos gen$(\emptyset) = \{\bar{0}\}$.*

Definición 1.4 *Dado un subconjunto W de V, diremos W es un **subespacio vectorial** de V si cumple las propiedades de espacio vectorial con la operación suma, definida en $V \times V$, restringida a $W \times W$ y con la operación producto escalar, definida en $F \times V$, restringida a $F \times W$.*

En particular el generado de cualquier conjunto es un subespacio vectorial.

Definición 1.5 *Un subconjunto S de un espacio vectorial V es **linealmente dependiente** si existe un número finito de vectores distintos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en S y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no todos cero, tales que $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = \bar{0}$. En este caso también se dice que los vectores de S son linealmente dependientes.*

Definición 1.6 *Un subconjunto S de un espacio vectorial que no es linealmente dependiente es **linealmente independiente**. Como antes, decimos que los vectores de S son linealmente independientes.*

Definición 1.7 *Una **base** β para un espacio vectorial V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera a V.*

Ejemplo: En F^n sea $e_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, e_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, el conjunto $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para F^n. Esta base será llamada **base canónica** para F^n y sus elementos serán llamados vectores canónicos.

Definición 1.8 *El número de elementos (único) de cada base para V es llamado la **dimensión** de V y es denotado por dim(V). Un espacio vectorial es llamado de **dimensión finita** si tiene una base que consiste de un número finito de elementos. Un espacio vectorial que no es de dimensión finita es llamado de dimensión infinita. Si $V = \{\bar{0}\}$ entonces dim$(V) = 0$.*

Teorema 1.9 *Dado un subconjunto de V linealmente independiente de m vectores, donde $m < dim(V)$, entonces este se puede extender a una base de V.*

Definición 1.10 *Sean V y W espacios vectoriales. Llamamos a una función $T : V \to W$ una **transformación lineal de V a W** si para cada $x, y \in V$ y para cada $a \in F$ se tiene:*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(ax) = aT(x)$

En particular dada $A \in F^{n\times m}$ se tiene que A es una transformación lineal entre F^m y F^n, definida como $A(x) = Ax$ para cada $x \in F^m$.

Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ lineal. Definimos el **espacio nulo** de T, denotado como $N(T)$, como el conjunto de todos los vectores $x \in V$ tales que $T(x) = \bar{0}$. Definimos la **imagen** de T, denotada como $R(T)$, como el subconjunto de W que consiste de todas las imágenes, bajo T, de vectores de V.

Si $N(T)$ y $R(T)$ son de dimensión finita entonces la **nulidad** de T denotada por $nul(T)$, y el **rango** de T, denotado por $ran(T)$, son las dimensiones de $N(T)$ y $R(T)$ respectivaente.

Teorema 1.11 ***Teorema de dimensión**. Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ lineal. Si V es de dimensión finita entonces $nul(T) + ran(T) = dim(V)$.*

Teorema 1.12 *Sean V, W espacios vectoriales y $T : V \to W$ lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si $N(T) = \{\bar{0}\}$.*

Las demostraciones de estos y otros teoremas cuya demostración no se presente se puede consultar en [2].

Teorema 1.13 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita tales que $dim(V) = dim(W)$ y sea $T : V \to W$ lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *T es inyectiva.*
2. *$ran(T) = dim(V)$.*

3. T es sobreyectiva.

Dada una transformación lineal $T : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensiónes n y m, respectivamente, y dadas β y γ bases de V y W respectivamente podemos definir la representación matricial, ver [2], denotada como $A = [T]_\beta^\gamma \in F^{n\times m}$, la cual entre otras propiedades cumple con lo siguiente:

- $ran(A) = ran(T)$.
- $null(A) = null(T)$.
- $A^{-1} = [T^{-1}]_\gamma^\beta$, si T es invertible.

A través de la representación matricial de una transformación lineal se puede probar que el conjunto de todas las transformaciones lineales que actúan entre dos espacios vectoriales de dimensión finita es isomorfo a un espacio de matrices.

Teorema 1.14 *Dada una matriz, el rango de la transformación lineal asociada es igual al número de columnas linealmente independientes de la matriz, es decir, a la dimensión del subespacio generado por sus columnas.*

Capítulo 2

Diagonalización

En este capítulo abordaremos el problema de la diagonalización de la representación matricial de los operadores lineales. Si la representación matricial de un operador lineal es una matriz diagonal entonces esto facilita los cómputos que se hagan con la matriz y por ende con el operador lineal. La solución del problema de diagonalización nos conduce naturalmente al concepto de valores y vectores propios de un operador lineal. Estos últimos aparecen en muchas aplicaciones que se pueden contextualizar en el ámbito del Álgebra Lineal.

2.1. Valores y Vectores Propios

Consideraremos transformaciones lineales que van de un espacio vectorial V en sí mismo. Los llamaremos **operadores lineales** en V.

Definición 2.1 *Un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión finita V es* ***diagonalizable*** *si existe una base ordenada β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es* ***diagonalizable*** *si es similar a una matriz diagonal.*

Buscamos determinar si un operador lineal T es diagonalizable y si lo es, obtener la base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal. Nótese que si $D = [T]_\beta$ es una matriz diagonal, entonces para cada vector $v_j \in \beta$ tenemos

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} v_i = D_{jj} v_j = \lambda_j v_j,$$

donde $\lambda_j = D_{jj}$.

Recíprocamente si $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada para V tal que $T(v_j) = \lambda_j v_j$ para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V. Un vector $v \in V$ distinto de cero es llamado* ***vector propio*** *de T si existe un escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$. El escalar λ es llamado* ***valor propio*** *correspondiente al vector propio v.*

Retomando la discusión anterior podemos ver que un operador lineal T en un espacio vectorial V de dimensión finita es diagonalizable si y sólo si existe una base ordenada β para V que consiste de vectores propios de T. Además si T es diagonalizable, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de vectores propios de T y $D = [T]_\beta$ entonces D es una matriz diagonal y D_{jj} es el valor propio correspondiente a v_j para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Si $A \in F^{n\times n}$ es una matriz invertible entonces inmediatamente podemos obtener los valores propios de A^{-1} como podemos ver a continuación. Sean $A \in F^{n\times n}$ invertible, λ valor propio de A (y por lo tanto distinto de cero) y v un vector propio de A correspondiente a λ, entonces $Av = \lambda v$, de donde obtenemos $v = A^{-1}\lambda v$. Así, dado que A^{-1} es lineal, se tiene $\lambda^{-1}v = A^{-1}v$. Por lo tanto λ^{-1} es valor propio de A^{-1}. Por otro lado dado $\rho \in F$ se tiene $(A - \rho I)v = \lambda v - \rho v = (\lambda - \rho)v$, por lo tanto $\lambda - \rho$ es valor propio de $A - \rho I$.

Teorema 2.3 *Sea $A \in F^{n\times n}$, entonces $\lambda \in F$ es valor propio de A si y sólo si $det(A - \lambda I) = 0$, donde $det(A - \lambda I_n)$ es el determinante de la matriz $A - \lambda I$.*

Para consultar las propiedades del determiante de una matriz vease [2].

Definición 2.4 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita. Al conjunto que consiste de los valores propios de T lo llamaremos **espectro** de T y lo denotaremos $\lambda(T)$. Si A es una matriz de $n \times n$ al espectro de su transformación lineal asociada lo denotaremos como $\lambda(A)$.*

Sean $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{k\times k}$ y $X \in F^{n\times k}$ tales que $AX = XB$, donde $ran(X) = k$. Si $\lambda \in \lambda(B)$ y v es un vector propio de B asociado a λ entonces se tiene $Bv = \lambda v$, luego $XBv = A(Xv) = \lambda(Xv)$ donde $Xv \neq \bar{0}$ ya que $ran(X) = k$. Así $\lambda(B) \subseteq \lambda(A)$. Si $k = n$, y por ende X es invertible, entonces dado $\lambda \in \lambda(A)$ y v vector propio de A asociado a λ se tiene $Av = AXX^{-1}v = XB(X^{-1}v) = \lambda v$, luego $B(X^{-1}v) = \lambda(X^{-1}v)$. Así $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Definición 2.5 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita n y sea β una base ordenada. Sea $A = [T]_\beta$, definimos el **polinomio característico** $f(t)$ de T como $f(t) = det(A - tI_n)$.*

Si T es un operador lineal en un espacio vectorial V n-dimensional y β es una base ordenada de V entonces $\lambda \in F$ es valor propio de T si y sólo si λ es valor propio de $[T]_\beta$. Así , por el Teorema 2.3, los valores propios de T son las raíces de su polinomio característico. Por otro lado la anterior definición es independiente de la elección de la base ordenada β ya que si tomamos otra base ordenada γ entonces existe una matriz invertible Q tal que $[T]_\beta = Q^{-1}[T]_\gamma Q$ y en consecuencia se tiene $\lambda([T]_\beta) = \lambda([T]_\gamma)$.

Teorema 2.6 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ distintos valores propios de T. Si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son los vectores propios de T tal que λ_i corresponde a v_i, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.*

Demostración:

La demostración se hará por inducción matemática sobre k. Supongamos $k = 1$, entonces existe $v_1 \neq \bar{0}$ tal que v_1 es vector propio de T, luego $\{v_1\}$ es linealmente independiente. Supongamos que el teorema es cierto para $k-1$ y que T tiene k valores propios distintos. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores propios distintos correspondientes a los valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectivamente. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ escalares tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = \bar{0}$. Aplicando la transformación $T - \lambda_k I$ se tiene $a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_1 = \bar{0}$, luego dado que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es linealmente independiente se tiene $a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = a_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_1 = \cdots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_1 = 0$. Dado que $\lambda_i \neq \lambda_k$ para $1 \leq i \leq k-1$, se tiene $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Por lo tanto $a_kv_k = \bar{0}$ y dado que $v_k \neq \bar{0}$ se tiene $a_k = 0$. Así $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es linealmente independiente. $\blacksquare$.

2.2. Diagonalización

Supongamos que x_1 y x_2 son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivables y denotemos con x_1' y x_2' a las derivadas de x_1 y x_2 respectivamente. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= 2x_2 \end{aligned}$$

veamos que encontrar la solución de este sistema se reduce a diagonalizar la matriz que describe el sistema.

El sistema de ecuaciones se puede presentar de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

donde la matriz A que describe este sistema es similar a una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A, es decir, existe

P una matriz invertible y D una matriz diagonal tales que $D = P^{-1}AP$. Así tenemos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado para matrices similares a una matríz diagonal se puede evaluar su exponencial, la cual nos da una matriz con funciones en sus entradas. En este caso se tiene

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

La solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2(e^{-t} - e^{2t}) \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix} = e^A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto encontrar la solución del sistema se simplifica a encontrar una matriz diagonal similar a la matriz A.

Veamos algunas condiciones para que un operador lineal sea diagonalizable.

Definición 2.7 *Un polinomio $f(t)$ en $P(F)$ se **divide** sobre F si existen escalares $c, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (no necesariamente distintos) en F tales que: $f(t) = c(t - a_1)(t - a_2) \cdots (t - a_n)$.*

Dado T un operador lineal, si el polinomio característico de T se divide sobre F entonces el grado del polinomio característico es n.

Definición 2.8 *Sea λ valor propio del operador lineal T y sea $f(t)$ el polinomio característico de T. La **multiplicidad** (algebraica) de λ es el mayor entero positivo k para el cual $(t - \lambda)^k$ es un factor de $f(t)$.*

Sea λ un valor propio del operador T definimos al **subespacio propio** de T correspondente al valor propio λ como $E_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$.

Teorema 2.9 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión n y sea λ un valor propio de T con multiplicidad m. Entonces $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m$.*

Teorema 2.10 *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial n-dimensional V tal que el polinomio característico de T se divide sobre F. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los distintos valores propios de T. Entonces*

1. *T es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de λ_i es igual a dim(E_{λ_i}) para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$*

2. *Si T es diagonalizable y β_i es base de E_{λ_i} para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces $\beta = \beta_i \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_k$ es una base de V que consiste de vectores propios de T.*

En particular dada matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ si existe una base β que consiste de vectores propios de A y una matriz Q invertible cuyas columnas son los vectores propios de A de la base β tales que $D = Q^{-1}AQ$, donde D es una matriz diagonal con los valores propios de A en su diagonal principal.

Capítulo 3

Descomposiciones Matriciales

Cuando se presentan distintos problemas que involucran a matrices en su planteamiento usualmente se busca descomponer a la matriz con que se está tratando en matrices más simples que faciliten la búsqueda de la solución del problema. En este capítulo se abordarán algunas descomposiciones matriciales.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n con base ordenada β y un operador lineal T a este operador lo podemos identificar con una matrix $A \in F^{n\times n}$, luego la matriz A tiene los mismos valores propios que T y los vectores propios de A, elementos de F^n, los podemos identificar con los vectores propios de T, elementos de V. Es por esto que restringiremos nuestro estudio sólo a los elementos de $F^{n\times n}$. Por otro lado dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede que esta no tenga valores propios, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$ luego A no tiene valores propios en $\mathbb{R}$.

Es por esto que trataremos con matrices en $\mathbb{C}^{n\times n}$ donde se tiene, por el Teorema Fundamental del Álgebra en [5], que la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$ siempre tiene solución para λ, es decir, la matriz A tiene valores propios.

3.1. Factorización LU

Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{C}^n$. Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$Ax = b$$

en caso de que A sea invertible simplemente podemos tomar su inversa y con ella obtener $x = A^{-1}b$. En caso de que A no sea invertible puede que el sistema $Ax = b$ tenga o no solución. Si A es una matriz triangular, superior o inferior, fácilmente se puede determinar si el sistema tiene solución o no y mas aún encontrar la solución. Si A no es una matriz triangular podemos factorizar a la matriz A en matrices que facilitan resolver el sistema de ecuaciones. Esto lo haremos a través de la factorización LU. Para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $P \neq I$ y sea p_i la i-ésima columna de P. La matriz P es una matriz de permutación si $p_i \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, los vectores canónicos, y $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$.*

Las matrices de permutación son utilizadas para intercambiar las columnas o las filas de una matriz, según sea el orden en que se mupltiplique. Nótese que si A es matriz de permutación entonces A^t es una matriz de permutación, y más aún $P^tP = PP^t = I$. Si B es una matriz de permutación entonces AB y BA son matrices de permutación.

Teorema 3.2 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz distinta de la matriz nula, entonces existen un número natural $k \leq \text{mín}\{m, n\}$ y matrices de permutación $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$P^t AQ = LU,$$

donde $L \in \mathbb{C}^{m\times k}$ es una matriz tal que $l_{ij} = 0$ para $i > j$ y $U \in \mathbb{C}^{k\times n}$ es una matriz tal que $u_{ij} = 0$ para $i < j$.

Demostración:

La prueba se hará por inducción sobre m. Para $m = 1$ tomamos $P = 1$ y sea Q la matriz de permutación tal que $(AQ)_{11} \neq 0$. Sea $L = 1$ y $U = P^t AQ$, luego $PAQ = LU$ y obtenemos el resultado deseado. Supongamos que el teorema se cumple para $m - 1$. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y sean $\hat{P}$ y $\hat{Q}$ matrices de permutación tales que $(\hat{P}^t A\hat{Q})_{11} \neq 0$. Particionemos a la matriz $\hat{P}^t A\hat{Q}$ de la siguiente forma:

$$\hat{P}^t A\hat{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & d^t \\ c & B \end{bmatrix},$$

donde $c, d \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $B \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$. Sean

$$l = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{-1}c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad u^t = \begin{bmatrix} \alpha & d^t \end{bmatrix},$$

luego se tiene

$$\hat{P}^t A\hat{Q} - lu^t = \begin{bmatrix} \alpha & d^t \\ c & B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & d^t \\ c & \alpha^{-1}cd^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & B - \alpha^{-1}cd^t \end{bmatrix}.$$

Si $B - \alpha^{-1}cd^t$ es la matriz nula entonces se tiene el resultado deseado. Si $B - \alpha^{-1}cd^t$ es una matriz no nula por hipótesis de inducción se tiene

$$\check{P}^t(B - \alpha^{-1}cd^t)\check{Q} = \check{L}\check{U},$$

donde las matrices $\check{P}, \check{Q}, \check{L}$ y $\check{U}$ cumplen con las propiedades enunciadas en el teorema. Sean

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \alpha^{-1}\check{P}^t c & \check{L} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} \alpha & d^t\check{Q} \\ \bar{0} & \check{U} \end{bmatrix},$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \alpha^{-1}\check{P}^t c & \check{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & d^t\check{Q} \\ \bar{0} & \check{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & d^t\check{Q} \\ \check{P}^t c & \check{P}^t\alpha^{-1}cd^t\check{Q} + \check{L}\check{U} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & d^t\check{Q} \\ \check{P}^t c & \check{P}^t B\check{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \check{P}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & d^t \\ c & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \check{Q} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así tomando

$$P = \hat{P} \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \check{P} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \hat{Q} \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \check{Q} \end{bmatrix}$$

se tiene $PAQ = LU$ y el teorema queda demostrado. ■

Tomando la factorización LU de la matriz A, $A = PLUQ^t$, obtenemos que el sistema $Ax = b$ se puede reescribir como $LUx' = b'$, donde $x' = Q^t x$ y $b' = P^t b$. La solución puede encontrarse resolviendo el sistema $Ly = b'$ y posteriormente el sistema $Ux' = y$, los cuales son sistemas fáciles de resolver dado que las matrices L y U son triangulares.

3.2. El Producto Interno

El concepto de longitud o medida está involucrado en muchas aplicaciones de las matemáticas. En está sección se introducirá la idea de distancia o longitud en espacios vectoriales vía el llamado **producto interno**, el cual dota de una esctuctura más rica al espacio vectorial donde esté definido.

Definición 3.3 *Sea V un subespacio vectorial sobre F. Un **producto interno** en V es una función $\langle , \rangle : V \times V \to F$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $\alpha \in F$ se tiene:*

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
3. $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$.
4. *Si* $x \neq \bar{0}$ *entonces* $\langle x, x\rangle > 0$.

Las propiedades *1)* y *2)* hacen notar que el producto interno es lineal en la primera componente. Un espacio vectorial V dotado con un producto interno será llamado **espacio con producto interno**. Si el campo sobre el que está definido son los números reales (o complejos) diremos que V es un **espacio con producto interno real (o complejo)**.

Teorema 3.4 *Sea V un espacio con producto interno, entonces para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $\alpha \in F$ se tiene:*

1. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
2. $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$.
3. $\langle x, \bar{0}\rangle = \langle \bar{0}, x\rangle = 0$.
4. $\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = \bar{0}$.
5. *Si* $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ *para cada* $x \in V$ *entonces* $y = z$.

La demostración de este y otros teoremas cuya demostración no se presente se puede consultar en [2].

Definición 3.5 *Sea V un espacio con producto escalar. Para cada $x \in V$ definimos la **norma** de x como* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Teorema 3.6 *Sea V un espacio con producto interno complejo. Entonces para cada $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene:*

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = \bar{0}$.
3. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *Desigualdad triangular.*

En general si tenemos una función $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que cumpla con las tres primeras propiedades del teorema anterior entonces f es una norma en X. La función $\| \, \|_\infty : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida como

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

es una norma en $\mathbb{C}^n$, llamada la norma infinito. En adelante se tratará con el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ dotado con el producto interno definido como $\langle v, u\rangle = u^*v$ para cada $v, u \in \mathbb{C}^n$, donde $v^* = \overline{v^t}$. También se tratará con la norma inducida por el producto interno antes definido.

Dado $x \in \mathbb{C}^n$, sea x_i la i-ésima coordenada del vector x, $1 \leq i \leq n$. Entonces se tiene

$$x_i^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

de donde obtenemos $|x_i| \leq \|x\|$. Por otra parte utilizando la desigualdad triangular podemos ver que

$$\|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Definición 3.7 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definimos $\|A\|$ como $\|A\| = \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.*

Veamos que para cada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ el valor $\|A\|$ es acotado. Sea $D_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$, luego

$$\|A\| = \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq\bar{0}} \|A\frac{x}{\|x\|}\| = \sup_{u\in D_1} \|Au\|.$$

Sea $a = \max\{|a_{ij}| : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$. Dado $u \in D_1$ se tiene que $|u_i| \leq \|u\| = 1$, donde u_i es la i-ésima coordenada del vector u, así

$$|(Au)_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j| \leq na$$

donde $(Au)_i$ es la i-ésima coordenada del vector Au, luego obtenemos

$$\|Au\| \leq \sum_{i=1}^{m} |(Au)_i| \leq mna$$

para cada $u \in D_1$. Por lo tanto $\|A\| \leq mna$.

Veamos que $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como $f(A) = \|A\|$ es una norma en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ distinta de la matriz nula, podemos tomar un vector $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $Az \neq \bar{0}$, luego

$$\|A\| = \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Az\|}{\|z\|} > 0.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, luego

$$\begin{aligned}\|\alpha A\| &= \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|\alpha A x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{|\alpha|\|Ax\|}{\|x\|} \\ &= |\alpha| \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha|\|A\|.\end{aligned}$$

Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, luego

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x\neq\bar{0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &= \|A\|+\|B\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una norma en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y dado $x \in \mathbb{C}^n$ distinto de cero tenemos que $\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\|$ y $\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|$, luego $\|ABx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$ de donde obtenemos

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Definición 3.8 *Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$. Los vectores x y y son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$. Un subconjunto S de $\mathbb{C}^n$ es **ortogonal** si para cualesquiera dos vectores distintos en S se tiene que son ortogonales entre sí. Un vector $x \in \mathbb{C}^n$ se dice que es **unitario** sí $\|x\| = 1$. Finalmente, un subconjunto S de $\mathbb{C}^n$ es **ortonormal** si S es ortogonal y todos sus vectores son unitarios.*

Nótese que si $S \subseteq \mathbb{C}^n$ es ortogonal y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces si tomamos $x \in S$ y lo sustituimos por αx el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal. Por otro lado para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$ distinto de $\bar{0}$ se tiene que $\frac{x}{\|x\|}$ es un vector unitario. El proceso de multiplicar x por el recíproco de su norma se llama **normalización**.

3.3. Factorización QR

Definición 3.9 *Un subconjunto de $\mathbb{C}^n$ es una **base ortonormal** para $\mathbb{C}^n$ si es una base y es ortonormal.*

Teorema 3.10 *Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un subconjunto ortogonal de $\mathbb{C}^n$ cuyos elementos son distintos de cero. Si $y \in gen(S)$ entonces*

$$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Demostración:
Dado $y \in S$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que

$$y = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i.$$

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, luego

$$\langle y, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle = a_j \|v_j\|^2,$$

de donde obtenemos

$$a_j = \frac{\langle y, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}.$$

■

Corolario 3.11 *Sea S un subconjunto ortogonal de $\mathbb{C}^n$ cuyos elementos son distintos de cero. Entonces S es linealmente independiente.*

Demostración:
Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k \in S$ y sean escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \bar{0}.$$

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Análogamente a la demostración del Teorema 3.10 tenemos

$$a_j = \frac{\langle \bar{0}, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} = 0.$$

Así S es linealmente independiente. ■

El siguiente teorema muestra que es posible obtener una base ortonormal en espacios con producto escalar de dimensión finita. La prueba de este teorema usa el método de **Gram-Schmidt** el cual obtiene, de un conjunto linealmente independiente, un conjunto ortonormal con la característica de generar el mismo subespacio que el conjunto original.

Teorema 3.12 *Sea $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}^n$ linealmente independiente. Definimos $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ donde $v_1 = w_1$ y*

$$v_k = w_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j$$

para $2 \leq k \leq n$. Entonces S' es un subconjunto ortogonal de $\mathbb{C}^n$ cuyos elementos son distintos de cero y es tal que $gen(S) = gen(S')$.

Demostración:

La prueba se hará por inducción matemática sobre los elementos de S. Si $S = \{v_1\}$ entonces $S' = \{w_1\}$ cumple con el resultado deseado. Dado $S_{k-1} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}\}$ supongamos que $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ cumple con las características antes mencionadas. Sea $S_{k-1} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, w_k\}$ linealmente independiente y sea

$$v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

Si $v_k = \bar{0}$ entonces se tiene que $w_k \in gen(S'_{k-1}) = gen(S_{k-1})$, luego S es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción. Para $1 \leq i \leq k-1$ se tiene

$$\langle v_k, v_i \rangle = \langle w_k, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \langle v_j, v_i \rangle = \langle w_k, v_i \rangle - \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_i\|^2} \|v_i\|^2 = 0$$

dado que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ si $i \neq j$ por hipótesis de inducción, así $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es ortogonal y $\bar{0} \notin S'$. Además se tiene que $gen(S') \subseteq gen(S)$. Por otro lado S' es linealmente independiente, dado que S' es ortogonal, luego $dim(gen(S')) = dim(gen(S)) = k$ de donde se obtiene $gen(S') = gen(S)$. ■

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A través del método de Gram-Schmidt podemos obtener una factorización de la matriz A la cual permite resolver el problema de mínimos cuadrados, entre otros, de una forma eficiente. Antes veamos algunos conceptos previos.

Definición 3.13 *Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diremos que es **unitaria** si $A^*A = AA^* = I_n$, donde $A^* = \overline{A^t}$. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^tA = AA^t = I_n$ entonces diremos que A es **ortogonal**.*

Inmediatamente de la definición podemos ver que si U es unitaria entonces U^* es unitaria y $U^{-1} = U^*$. Por otro lado, dada una matriz unitaria entonces la imagen de cualquier vector bajo la matriz unitaria conserva la norma.

Lema 3.14 *Sean $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $x, y \in \mathbb{C}^n$, entonces se tiene $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$.*

Demostración:
Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$, luego $\langle Qx, Qy\rangle = (Qy)^*Qx = y^*Q^*Qx = y^*x = \langle x, y\rangle$. ■

Del lema anterior podemos inmediatame concluir, tomando $x = y$, que para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene $\|Qx\| = \|x\|$.

Teorema 3.15 *Sean $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz unitaria, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- $\|U\| = 1$.
- *Si $B = UAV$ entonces $\|B\| = \|A\|$.*

Demostración:
1) Sea D_1 el disco unitario, luego aplicando el lema anterior obtenemos

$$\|U\| = \sup_{x\in D_1} \|Ux\| = \sup_{x\in D_1} \|x\| = 1.$$

2) Utilizando *1)* obtenemos $\|B\| = \|UAV\| \leq \|U\|\|A\|\|V\| = \|A\|$ y, dado que $A = U^*BV^*$, análogamente obtenemos $\|A\| \leq \|B\|$. Así $\|A\| = \|B\|$. ■

Teorema 3.16 *Sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces U es unitaria si y sólo si las columnas de U forman un conjunto ortonormal.*

Demostración:
Sea $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$. Si U es unitaria entonces se tiene $U^*U = I$ lo cual implica que $u_i^*u_j = 0$ si $i \neq j$ y $u_i^*u_i = 1$, $1 \leq i, j \leq n$. Así $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto ortonormal. Análogamente si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ entonces se tiene $U^*U = I$ y por lo tanto U es unitaria. ■

Estas y otras propiedades de las matrices unitarias se pueden encontrar en [3] y [6].

Teorema 3.17 ***Factorización QR***. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que ran$(A)$ $= n$, entonces existe una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y una matriz $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangular superior, con $r_{ii} \in \mathbb{R}$ y $r_{ii} > 0$ para $1 \leq i \leq n$, tales que $A = QR$.*

Demostración:

Sea $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, donde $a_i \in \mathbb{C}^n$ son las columnas de A. Sean $v_1 = a_1$ y

$$v_k = a_k - \sum_{k-1}^{j=1} x_i \frac{\langle a_k, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} v_j$$

para $2 \leq k \leq n$, los vectores obtenidos a través del método de Gram-Schmidt. Sean $q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ para $1 \leq i \leq n$, luego $a_1 = q_1\|v_1\|$ y

$$a_k = q_k\|v_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j\rangle q_j$$

para $2 \leq k \leq n$.

Sea $r_{ik} = \langle q_i, a_k\rangle$. Si $i = k$ entonces

$$r_{kk} = \langle q_k, a_k\rangle = \|v_k\|\langle q_k, q_k\rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j\rangle\langle q_k, q_j\rangle = \|v_k\| > 0$$

Si $i < k$ entonces

$$r_{ik} = \langle q_i, a_k\rangle = \|v_k\|\langle q_i, q_k\rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j\rangle\langle q_i, q_j\rangle = \langle a_k, q_i\rangle$$

Si $i > k$ entonces

$$r_{ik} = \langle q_i, a_k\rangle = \|v_k\|\langle q_i, q_k\rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j\rangle\langle q_i, q_j\rangle = 0$$

De donde obtenemos

$$a_k = \|v_k\|q_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j\rangle q_j = \sum_{j=1}^{k} r_{jk}q_j = \sum_{j=1}^{n} r_{jk}q_j$$

luego

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} r_{jk}.$$

Nótese que $R = (r_{ij})$ es una matriz triangular superior tal que $r_{ii} \in \mathbb{R}$ y $r_{ii} > 0$. Sea $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$ donde q_i es la i-ésima columna de Q, luego Q es tal que $ran(Q) = n$ y es tal que $QQ^* = Q^*Q = I_n$, es decir, Q es unitaria. Así $A = QR$. ■

Se mostrará que la descomposicón QR también es única, antes veamos otros conceptos útiles para mostrar la unicidad de la descomposición QR.

Definición 3.18 *Diremos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es* ***hermitiana*** *si $A = \overline{A^t}$. A la matriz $\overline{A^t}$ la denotaremos como A^*.*

Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se tiene $(AB)^* = B^*A^*$ y $(A+B)^* = A^* + B^*$. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana entonces dado $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene $x^*Ax = \alpha \in \mathbb{C}$ luego, visto como una matriz de 1×1, $\overline{\alpha} = \alpha^* = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax = \alpha$, así α es un real. Si A es invertible se tiene$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ y si además A es hermitiana se tiene $(A^*)^{-1} = A^{-1}$, es decir, A^{-1} también es hermitiana.

Definición 3.19 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Diremos que es* ***definida positiva*** *si cumple:*

- *A es hermitiana y,*
- *Para cada $x \in \mathbb{C}^n$ distinto de cero se tiene $x^*Ax > 0$.*

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida positiva y $e_i \in \mathbb{C}^n$ se tiene $e_i^*Ae_i = a_{ii} > 0$. Ahora consideremos que A está particionda de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde $A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-m\times n-m}$. Sea $y^t = \begin{bmatrix} x^t & \bar{0}^t_{n-m} \end{bmatrix}$ donde $x \in \mathbb{C}^m$, así $y^*Ay = x^*A_{11}x > 0$. Por lo tanto obtenemos que A_{11} es definida positiva, análogamente se tiene que A_{22} es definida positiva. Por otro lado si λ es un valor propio de A y u es un vector propio de A unitario asociado a λ, entonces se tiene $\lambda = u^*Au > 0$, de donde obtenemos que los valores propios de A son reales y positivos, así 0 no es vector propio de A, luego $det(A) \neq 0$. Así si A es definida positiva entonces A es invertible. Veamos que A^{-1} también es definida positiva.

Teorema 3.20 *Sean $A, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es definida positiva y X es invertible, entonces la matriz $B = X^*AX$ es definida positiva.*

Demostración:
Sea $y \in \mathbb{C}^n$ distinto de cero, entonces $Xy \neq \bar{0}$, luego $y^*X^*AXy = (Xy)^*A(Xy) > 0$. Por otro lado $(X^*AX)^* = X^*A^*X = X^*AX$. Así X^*AX es definida positiva. ■

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y tomamos $X = A^{-1}$ entonces se tiene $(A^{-1})^*$ es definida positiva, luego dado $x \in \mathbb{C}^n$ distinto de cero se tiene $x^*(A^{-1})^*x = (x^*(A^{-1})^*x)^*$ dado que es un real, luego $(x^*(A^{-1})^*)^* = x^*A^{-1}x > 0$. Así A^{-1} es definida postiva.

El siguiente lema nos servirá para mostrar el Teorema de la Descomposición de Cholesky, el cual a su vez nos servirá para mostrar la unicidad de la descomposición QR.

Lema 3.21 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida positiva particionada de la forma*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde $A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-m\times n-m}$, entonces la matriz $A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12}^*$ es definida positiva.

Demostración:
Sea $x \in \mathbb{C}^{n-m}$ distinto de cero y sea $y \in \mathbb{C}^n$ tal que $y^t = \begin{bmatrix} (A_{11}^{-1}A_{12}x)^t & -x^t \end{bmatrix}$, luego se tiene

$$\begin{aligned} 0 < y^*Ay &= \begin{bmatrix} x^*A_{12}^*A_{11}^{-1} & -x^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12}x \\ -x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^*A_{12}^*A_{11}^{-1} & -x^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})x \end{bmatrix} \\ &= x^*(A_{22} - A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12})x. \end{aligned}$$

Por otro lado $(A_{22}-A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12})^* = A_{22}^*-A_{12}^*(A_{11}^{-1})^*A_{12} = A_{22}-A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12}$, dado que A_{22} y A_{11}^{-1} son hermitianas. Por lo tanto $A_{22}-A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12}$ es definida postiva. ■

Teorema 3.22 ***Descomposición de Cholesky***. *Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida positiva existe una matriz $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangular superior, cuyos elementos en la diagonal son positivos, tal que $A = R^*R$.*

Demostración:
Probaremos el teorema por inducción sobre n. Para $n = 1$ tomamos $R = \sqrt{a_{11}}$ y se tiene el resultado. Supongamos que el teorema se cumple para $n-1$. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, particionemos la matriz A de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} B & a_{1n} \\ a_{1n}^* & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $B \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$. Usando la hipótesis de inducción existe una única matriz $R_1 \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ triangular superior tal que $B = R_1^*R_1$. Nótese que R_1 al tener entradas positivas en su diagonal y ser triangular superior entonces es invertible, análogamente se puede ver que R_1^* es invertible. Sea $r_{1n} = (R_1^*)^{-1}a_{1n} = (R_1^{-1})^*a_{1n}$, luego r_{1n} está únicamente determinado. Observemos que

$$\begin{aligned} a_{nn} - r_{1n}^*r_{1n} &= a_{nn} - a_{1n}^*R_1^{-1}(R_1^*)^{-1}a_{1n} \\ &= a_{nn} - a_{1n}^*(R_1^*R_1)^{-1}a_{1n} \\ &= a_{nn} - a_{1n}^*B^{-1}a_{1n}. \end{aligned}$$

Así, por el lema anterior, $a_{nn}-a_{1n}^*B^{-1}a_{1n} > 0$. Sea $r_{nn} = \sqrt{a_{nn} - a_{1n}^*B^{-1}a_{1n}}$, luego r_{nn} está únicamente determinado. Así se tiene

$$A = \begin{bmatrix} B & a_{1n} \\ a_{1n}^* & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 \\ r_{1n}^* & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & r_{1n} \\ 0 & r_{nn} \end{bmatrix} = R^*R.$$

■

A la matriz R (única) del teorema anterior le llamaremos el factor de Cholesky de la matriz A. Veamos que la descomposición QR de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $ran(A) = n$ es única.

Supongamos $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ donde $R_1, R_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices triangulares superiores cuyos elementos en la diagonal son positivos y $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias. Nótese que la matriz A^*A es definida positiva y $A^*A = R_1^*R_1$, dado que $Q_1^*Q_1 = I_n$. Análogamente se tiene $A^*A = R_2^*R_2$, luego R_1 y R_2 son factores de Cholesky para la matriz A, de donde obtenemos que $R_1 = R_2$. Por otro lado $Q_1 = AR_1^{-1} = AR_2^{-1} = Q_2$. Por lo tanto la descomposición QR de la matriz A es única.

3.4. El Problema de Mínimos Cuadrados

Consideremos la ecuación

$$Ax = b$$

donde $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$ y $m \geq n$. Nuestra intención es encontrar el vector $x \in \mathbb{C}^n$ tal que minimice la norma del vector $r = b - Ax$, es decir

$$\min_{x\in\mathbb{C}^n} \|b - Ax\|.$$

Veremos que este problema de optimización tiene solución. Nótese que esta solución es única si y sólo si $ran(A) = n$. Sea $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz unitaria, consideremos la ecuación $Q^*Ax = Q^*b$. Sea $s = Q^*b - Q^*Ax = Q^*(b - Ax) = Q^*r$. Dado que Q es unitaria se tiene $\|s\| = \|r\|$. Así parece razonable tratar de encontrar una matriz unitaria que simplifique el sistema original. Si A es una matriz cuadrada entonces utilizando la factorización QR de A se tiene $Q^*Ax = Rx = Q^*b$, luego dado que R es una matriz triangular superior entonces la solución de la ecuación es más fácil de encontrar. La factorización QR también se puede obtener en matrices que no son cuadradas.

Teorema 3.23 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, donde $m > n$, tal que $ran(A) = n$. Entonces existen una matriz $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria y una matriz $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = QR$ y la matriz R tiene la forma*

$$R = \begin{bmatrix} R_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $R_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y es una matriz triangular superior cuyas entradas en la diagonal son reales y positivas.

Demostración:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^m$ las columnas de la matriz A, luego $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es linealmente independiente, dado que $ran(A) = n$. Por el Teorema 1.9, se tiene que existen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^m$ tales que $\{a_1, a_2, \ \ldots, a_m\}$ es linealmente independiente. Sea $A' \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tal que $A' = \left[\begin{array}{cc} A & B \end{array}\right]$, donde $B \in \mathbb{C}^{m\times n-m}$ es la matriz cuya i-ésima columna es el vector a_{n+i}, luego $ran(A') = m$. De donde, tomando la factorización QR de la matriz A', existen matrices $Q', R' \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que $A' = Q'R'$, donde Q' es unitaria y R' es triangular superior con entradas en la diagonal reales y positivas. Además para cada columna de A' se tiene

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ji},$$

donde q_j es la j-ésima columna de Q. Sea $R \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que

$$R = \left[\begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{array}\right],$$

donde r_i es la i-ésima columna de R'. Si particionamos a R de la forma $R = \left[\begin{array}{c} R_n \\ 0 \end{array}\right]$, donde $R_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces se tiene que R_n es una matriz triangular superior con entradas reales positivas en la diagonal. Por otro lado $A = QR$ y obtenemos el resultado deseado. ■

Utilizando la factorización QR para la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se tiene que el sistema $Ax = b$ lo podemos transformar en el sistema $Q^*Ax = Q^*b$, luego $Rx = Q^*b$. Sea $c' = Q^*b = \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right]$, donde $c \in \mathbb{C}^n$. De ahí que el vector $s = c' - Rx$ se pueda expresar de la forma

$$s = \left[\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} R_n \\ 0 \end{array}\right] x = \left[\begin{array}{c} c - R_n x \\ d \end{array}\right].$$

Así se tiene que

$$\|s\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |s_i|^2 = \|c - R_n x\|^2 + \|d\|^2.$$

Dado que d es independiente de x se tiene que la norma $\|s\|$ es mínima cuando la norma $\|c - R_n x\|$ es mínima. Por otro lado dado que $ran(R_n) = n$

entonces la ecuación $R_n x = c$ tiene solución única, la cual es la que minimiza la norma del vector s.

Si bien ya vimos que la solución es única, también se puede caracterizar. Esto lo haremos utilizando el llamado **complemento ortogonal** de un subconjunto de un espacio vectorial.

Definición 3.24 *Dado $S \subseteq \mathbb{C}^n$ el complemento ortogonal de S, denotado como $S^\perp$, es el conjunto $\{x \in \mathbb{C}^n \mid \langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in S\}$.*

El conjunto $S^\perp$ es no vacío, ya que al menos contiene a $\bar{0}$, y es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Dado un subespacio S de $\mathbb{C}^n$ se probará que $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$. Antes veamos el siguiente lema.

Lema 3.25 *Sea $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ una base ortonogonal de $\mathbb{C}^n$ y sea $S = gen(\{q_1, q_2, \ldots, q_k\})$, donde $1 \leq k \leq n-1$, entonces $S^\perp = gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$.*

Demostración:

Sean $t \in S^\perp$ y $q_j \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. Existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $t = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots + a_n q_n$, luego

$$0 = \langle t, q_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle q_i, q_j\rangle = a_j \|q_j\|.$$

De donde obtemos que $b_j = 0$, dado que $\|q_j\| > 0$, así $t \in gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$. Por lo tanto $S^\perp \subseteq gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$.

Sean $t \in gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$ y $s \in S$. Existen escalares $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ tales que $t = a_{k+1}q_{k+1} + a_{k+2}q_{k+2} + \cdots + a_n q_n$ y existen escalares $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tales que $s = b_1 q_1 + b_2 q_2 + \cdots + b_k q_k$, luego

$$\langle s, t\rangle = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \langle q_i, t\rangle = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \sum_{j=k+1}^{j=n} \bar{a}_i \langle q_i, q_j\rangle = 0.$$

Así $t \in S^\perp$ y por lo tanto $S^\perp \subseteq gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$. ■

Teorema 3.26 *Sea S un subespacio propio de $\mathbb{C}^n$, entonces $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$.*

Demostración:

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una base de S. Por el Teorema 1.9 se tiene que existen vectores $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ tales que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de

$\mathbb{C}^n$. Aplicando el método de Gram-Shmidt podemos obtener a partir de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Por otro lado, dada la forma en que se obtiene la base ortogonal, se tiene $S = gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) = gen(\{q_1, q_2, \ldots, q_k\})$. De donde obtenemos, por el lema anterior, que $S^\perp = gen(\{q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\})$. Dado $x \in \mathbb{C}^n$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $x = a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n$, tomando $s = a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_kq_k \in S$ y $s^\perp = a_{k+1}q_{k+1} + a_{k+2}q_{k+2} + \cdots + a_nq_n \in S^\perp$ se tiene $x = s + s^\perp$, así $\mathbb{C}^n = S + S^\perp$. Sea $x \in S \cap S^\perp$, luego $\langle x, x\rangle = 0$ de donde obtenemos $x = \bar{0}$. Así $S \cap S^\perp = \bar{0}$. Por lo tanto $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$. ■

A los elementos (únicos) s y $s^\perp$ tales que $x = s + s^\perp$ les llamaremos la **proyección ortogonal** de x en S y $S^\perp$, respectivamente. Evidentemente para cualquier subespacio S de $\mathbb{C}^n$ se tiene $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, veamos que $S = (S^\perp)^\perp$. Dado $x \in (S^\perp)^\perp$ existen vectores $s \in S$ y $s^\perp \in S^\perp$ tales que $x = s + s^\perp$, luego $0 = \langle s + s^\perp, s^\perp\rangle = \langle s, s^\perp\rangle + \langle s^\perp, s^\perp\rangle = \langle s^\perp, s^\perp\rangle$, de donde obtenemos que $s^\perp = \bar{0}$. Así $(S^\perp)^\perp \subseteq S$ y por lo tanto $(S^\perp)^\perp = S$.

Existe una importante relación entre el complemento ortogonal de $R(A)$ y $N(A^*)$. Antes veamos el siguiente lema.

Lema 3.27 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces para cada $x \in \mathbb{C}^n$ y cada $y \in \mathbb{C}^m$ se tiene*

$$\langle Ax, y\rangle_m = \langle x, A^*y\rangle_n$$

donde $\langle , \rangle_m$ es el producto escalar en $\mathbb{C}^m$ y $\langle , \rangle_n$ es el producto escalar en $\mathbb{C}^n$.

Demostración:

Dado $x \in \mathbb{C}^n$ y $y \in \mathbb{C}^m$ se tiene $\langle Ax, y\rangle_m = (y)^*Ax = (A^*y)^*x = \langle x, A^*y\rangle_n$. ■

Teorema 3.28 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces $R(A)^\perp = N(A^*)$.*

Demostración:

Sea $y \in R(A)^\perp$, luego $\langle Ax, y\rangle_m = 0$ para cada $x \in \mathbb{C}^n$ y por el lema anterior obtenemos $\langle x, A^*y\rangle_n = 0$. En particular si tomamos $x = A^*y$ obtenemos $\langle A^*y, A^*y\rangle_m = 0$, luego $A^*y = \bar{0}_n$. Así $y \in N(A^*)$ y se obtiene $R(A)^\perp \subseteq N(A^*)$. Sean $y \in N(A^*)$ y $x \in \mathbb{C}^n$, por el lema anterior se tiene $\langle Ax, y\rangle_m = \langle x, A^*y\rangle_n = \langle x, \bar{0}_n\rangle_n = 0$. Así $y \in R(A)^\perp$ y se obtiene $N(A^*) \subseteq R(A)^\perp$. Por lo tanto $R(A)^\perp = N(A^*)$. ■

Del teorema anterior podemos obtener inmediatamente, sustituyendo A por A^*, que $N(A)^\perp = R(A^*)$. Dado que $R(A)$ y $N(A)$ son subespacios de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ entonces se tienen las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m &= R(A) \oplus N(A^*), \\ \mathbb{C}^n &= N(A) \oplus R(A^*). \end{aligned}$$

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, donde $m \geq n$, y sea $b \in \mathbb{C}^m$. Consideremos de nuevo el problema de mínimos cuadrados, es decir, encontrar $x \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\|b - Ax\| = \min_{z\in\mathbb{C}^n} \|b - Az\|.$$

Este problema es equivalente a encontar $y \in R(A)$ tal que

$$\|b - y\| = \min_{s\in R(A)} \|b - s\|.$$

En los resultados siguientes daremos una caracterización de la solución del problema de mínimos cuadrados.

Lema 3.29 *Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ vectores ortogonales, entonces*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostración:
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$, luego dado que $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$ se tiene $\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ■

Teorema 3.30 *Sea S un subespacio de $\mathbb{C}^n$ y sea $b \in \mathbb{C}^n$, entonces existe un único elemento $y \in S$ tal que*

$$\|b - y\| = \min_{s\in S} \|b - s\|$$

y es el único vector en S tal que $b - y \in S^\perp$.

Demostración:
Por el Teorema 3.26 existen únicos elementos $y \in S$ y $z^\perp \in S^\perp$ tales que $b = y + z$. Sea $s \in S$, luego $b - s = (b - y) + (y - s)$ donde $b - y \in S^\perp$ y $y - s \in S$. Así, por lema anterior, $\|b - s\|^2 = \|b - y\|^2 + \|y - s\|^2$, de donde

obtenemos que la norma alcanza el mínimo si $s = y$. ■

Veamos la relación del teorema anterior con el problema de mínimos cuadrados. Tomando $S = R(A)$ tenemos que existe un único $y \in R(A)$ tal que

$$\|b - y\| = \min_{s \in R(A)} \|b - s\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|b - Az\|.$$

Así, dado que $y \in R(A)$, existe un $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = y$ y en consecuencia el problema de mínimos cuadrados tiene solución. Si $N(A) = \{\bar{0}\}$ entonces la solución es única. Veamos que la segunda parte del teorema también es una condición suficiente para el problema de mínimos cuadrados

Teorema 3.31 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y sean $x \in \mathbb{C}^n$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces $b - Ax \in R(A)^\perp$ si y sólo si*

$$\|b - Ax\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|b - Az\|.$$

Demostración:

Supongamos que $b - Ax \in R(A)^\perp$, entonces existe $s^\perp \in R(A)^\perp$ tal que $b - Ax = s^\perp$, luego $b = Ax + s^\perp$, nótese que por el Teorema 3.26 esta descomposición es única. Sea $z \in \mathbb{C}^n$, aplicando el lema previo al Teorema 3.30 obtenemos $\|b - Az\|^2 = \|Ax - Az\|^2 + \|s^\perp\|^2$, así la norma alcanza el mínimo si $Az = Ax$. Por lo tanto $\|b - Ax\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|b - Az\|$.

Supongamos ahora que $\|b - Ax\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|b - Az\|$, luego por el Teorema 3.30 se tiene que $b - Ax \in R(A)^\perp$. ■

Por el Teorema 3.28 tenemos que $R(A)^\perp = N(A^*)$. Si $b - Ax \in R(A)^\perp$ entonces $A^*(b - Ax) = \bar{0}$, luego $A^*Ax = A^*b$. Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 3.32 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y sean $x \in \mathbb{C}^n$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces $A^*Ax = A^*b$ si y sólo si*

$$\|b - Ax\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|b - Az\|.$$

Dado $x \in \mathbb{C}^n$, $(Ax)^*Ax = x^*A^*Ax \geq 0$. Si $ran(A) = n$ entonces A^*A es definida positiva.

3.5. Matrices Equivalentes

Como hemos visto en capítulos anteriores dada una matriz si esta es equivalente a una matriz más simple, entonces podemos estudiar sus propiedades con mayor facilidad. Veamos que sucede con matrices unitarias y hermitianas entre otras.

Definición 3.33 *Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diremos que A es unitariamente equivalente a B si existe una matriz unitaria $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B = Q^*AQ$.*

Teorema 3.34 ***(de Schur)*** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces A es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior.*

Demostración:

La prueba se hará por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es evidente. Supongamos que el resultado se cumple para $n-1$. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $u \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A de asociado al valor propio λ tal que $\|u\| = 1$. Por el Teorema 1.9 podemos obtener vectores $v_2, v_3, \ldots, v_n$ tales que $\{u, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, luego con el método de Gram-Schmidt podemos obtener una base ortonormal $\{u, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$. Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times n-1}$ definida como $W = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & \ldots & u_n \end{bmatrix}$. Dado que las columnas de W son ortogonales a u se tiene $W^*u = \bar{0}_{n-1}$. Sea $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida como $U_1 = \begin{bmatrix} u & W \end{bmatrix}$ y sea $A_1 = U_1^*AU_1$, luego

$$A_1 = \begin{bmatrix} u^* \\ W^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^*Au & u^*AW \\ W^*Au & W^*AW \end{bmatrix}.$$

Dado que $Au = \lambda u$ y $\|u\| = 1$, se tiene que $u^*Au = \lambda$ y $W^*Au = \lambda W^*u = \bar{0}$. Sean $\hat{A} = W^*AW$ y $x = u^*AW$, luego

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & x \\ \bar{0} & \hat{A} \end{bmatrix},$$

donde $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$. Por la hipótesis de inducción existen una matriz unitaria $\hat{U}_2$ y una matriz triangular superior $\hat{T}$ tales que $\hat{T} = \hat{U}_2\hat{A}\hat{U}_2$. Sea $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida como

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

entonces U_2 es unitaria y se tiene

$$\begin{aligned} U_2^* A_1 U_2 &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \hat{U}_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & x \\ \bar{0} & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & x \\ \bar{0} & \hat{U}_2^* \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^t \\ \bar{0} & \hat{U}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & x\hat{U}_2 \\ \bar{0} & \hat{U}_2^* \hat{A} \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & x\hat{U}_2 \\ \bar{0} & \hat{T} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que es una matriz triangular superior. Si tomamos $T = U_2^* A_1 U_2$ y $U = U_1 U_2$ entonces se tiene $T = U_2^* A_1 U_2 = U_2^* U_1^* A U_1 U_2 = U^* A U$ y dado que U_1 y U_2 son unitarias obtenemos que U es unitaria y se tiene el resultado deseado. ■

Definición 3.35 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diremos que A es* ***normal*** *si $AA^* = A^*A$.*

Teorema 3.36 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es normal entonces se cumple:*

1. *$\|Ax\| = \|A^*x\|$ para cada $x \in \mathbb{C}^n$.*
2. *$A - cI_n$ es normal para cada $c \in \mathbb{C}$.*
3. *Si v es un vector propio de A entonces v es un vector propio de A^*.*

Demostración:
1) Sea $x \in \mathbb{C}^n$, por el Lema previo al Teorema 3.28 tenemos que

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle \\ &= \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2. \end{aligned}$$

2) Sea $c \in \mathbb{C}$, luego

$$\begin{aligned} (A - cI_n)^*(A - cI_n) &= (A^* - \bar{c}I_n)(A - cI_n) = A^*A - cA^* - \bar{c}A + c\bar{c} \\ &= AA^* - cA^* - \bar{c}A + c\bar{c} = (A - cI_n)(A^* - \bar{c}I_n) \\ &= (A - cI_n)(A - cI_n)^*. \end{aligned}$$

3) Supongamos que x es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ. Sea $B = A - \lambda I_n$, luego $Bv = \bar{0}$ y por *2)* B es normal. Por otro lado de *1)* obtenemos

$$0 = \|Bx\| = \|B^*x\| = \|(A^* - \bar{\lambda}I_n)x\| = \|A^*x - \bar{\lambda}x\|.$$

Así $A^*x = \bar{\lambda}x$ y por lo tanto x es veector propio de A^*. ■

Lema 3.37 *Si $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior y es normal entonces es una matriz diagonal.*

Demostración:
Haremos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es evidente. Supongamos que el lema se cumple para $n-1$. Sea $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal y triangular superior. Particionemos a T de la siguiente forma

$$T = \begin{bmatrix} t & x^* \\ \bar{0} & \hat{T} \end{bmatrix},$$

donde $\hat{T} \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ y $x \in \mathbb{C}^{n-1}$. Así

$$TT^* = \begin{bmatrix} t & x^* \\ \bar{0} & \hat{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} & \bar{0}^t \\ x & \hat{T}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |t|^2 + \|x\|^2 & x^*\hat{T}^* \\ \hat{T}x & \hat{T}\hat{T}^* \end{bmatrix}$$

y

$$T^*T = \begin{bmatrix} \bar{t} & \bar{0}^t \\ x & \hat{T}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & x^* \\ \bar{0} & \hat{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |t|^2 & \bar{t}x^* \\ tx & xx^* + \hat{T}^*\hat{T} \end{bmatrix}.$$

Dado que $TT^* = T^*T$ obtenemos que $x = \bar{0}$ y en consecuencia $\hat{T}$ es normal. Usando la hipótesis de inducción tenemos que $\hat{T}$ es una matriz diagonal y por lo tanto T es una matriz diagonal. ■

Teorema 3.38 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. A es normal si y sólo si es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.*

Demostración:
Por el Teorema de Schur existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior T tales que $A = U^*TU$. Por otro lado $AA^* = U^*TT^*U$ y $A^*A = U^*T^*TU$, luego dado A es normal obtenemos $TT^* = T^*T$ y así T es normal. Finalmente usando el lema anterior obtenemos que T es una matriz diagonal. ■

Del teorema anterior podemos ver que si A es una matriz hermitiana entonces A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Corolario 3.39 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si A es normal entonces existe una base ortonormal $\mathbb{C}^n$ que consiste de vectores propios de A.*

Demostración:

Por el Teorema 3.38 existe una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y una matriz $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = U^*DU$. Para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sea $u_i \in \mathbb{C}^n$ la i-ésima columna de U^*, luego

$$Au_i = U^*DUu_i = U^*D(\|u_i\|^2 e_i) = U^*De_i = U^*(d_{ii}e_i) = d_{ii}U^*e_i = d_{ii}u_i,$$

así cada u_i es un vector propio de A asociado al valor propio d_{ii}. Por otro lado dado que $UU^* = I_n$ entonces el conjunto $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es ortogonal, luego por el Corolario del Teorema 3.10 β es linealmente independiente y dado que β consta de n vectores entonces β es base de $\mathbb{C}^n$. ■

En el caso de las matrices hermitianas es posible caracterizar fácilmente su norma. Esto lo haremos a través del cociente de Rayleigh.

Definición 3.40 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. El* ***cociente de Rayleigh*** *de $x \neq \bar{0}$ respecto de A es el escalar*

$$R(x, A) = \frac{\langle x, Ax\rangle}{\|x\|^2}.$$

El siguiente teorema caracteriza los valores extremos de el cociente de Rayleigh.

Teorema 3.41 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana, entonces el cociente de Rayleigh respecto de A alcanza su máximo y su mínimo.*

Demostración:

Por el Corolario anterior podemos tomar una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ que consiste de vectores propios de A. Para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sea $Av_i = \lambda_i v_i$. Dado que A es hermitiana entonces sus valores propios son reales y no negativos. Sin pérdida generalidad supongamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Dado $x \in \mathbb{C}^n$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

luego

$$\begin{aligned} R(x, A) &= \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j\rangle}{\|x\|^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |a_i|^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n |a_i|^2}{\|x\|^2} = \frac{\lambda_1\|x\|^2}{\|x\|^2} = \lambda_1. \end{aligned}$$

Si tomamos $x = v_1$ entonces $R(x, A) = \lambda_1$ y así el cociente de Rayleigh respecto de A alcanza su máximo.

Análogamente obtenemos $R(x, A) \geq \lambda_n$ para cada $x \in \mathbb{C}^n$ y tomando $x = v_n$ obtenemos $R(v_n, A) = \lambda_n$. Así el cociente de Rayleigh respecto de A alcanza su mínimo. ■

Utilizando el teorema anterior podemos caracterizar la norma de cualquier matriz cuadrada.

Corolario 3.42 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $\|A\| = \sqrt{\lambda}$, donde λ es el valor propio de A^*A de mayor magnitud.*

Demostración:
Sea $B = A^*A$, luego B es hermitiana. Sea λ el valor propio de B de mayor magnitud, luego

$$0 \leq \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle A^*Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Bx, x\rangle}{\|x\|^2} = R(x, B).$$

Luego por el teorema anterior tenemos $\|A\|^2 = \lambda$. ■

Lema 3.43 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $\lambda(A^*A) = \lambda(AA^*)$.*

Demostración:
Si 0 es un valor propio de A^*A entonces A^*A no es invertible y en consecuencia A y A^* tampoco son invertibles, así 0 es un valor propio de AA^*. Análogamente se puede ver que si 0 es valor propio AA^* entonces 0 es valor propio de A^*A. Sea λ valor propio de A^*A distinto de cero, luego existe $x \in \mathbb{C}^n$ distinto de cero tal que $A^*Ax = \lambda x$, luego $AA^*(Ax) = \lambda(Ax)$ y dado que $Ax \neq \bar{0}$ entonces λ es valor propio de AA^*. Análogamente se puede ver que si λ es valor propio de AA^* entonces también es valor ppropio de A^*A. ■

Corolario 3.44 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible, entonces $\|A^{-1}\| = (\sqrt{\lambda})^{-1}$, donde λ es el valor propio de menor magnitud de A^*A.*

Demostración:
Se tiene que λ es valor propio de una matriz invertible si y sólo si λ^{-1} es valor propio de su inversa. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ los valores propios de A^*A, luego $\|A^{-1}\|^2$ es igual al valor propio de mayor magnitud de la matriz $(A^{-1})^*A^{-1} = (AA^*)^{-1}$ el cual es λ_n^{-1}. ■

3.6. Descomposición en Valores Singulares

La descomposición en valores singulares de una matriz es una de las descomposiciones matriciales con más utilidad en el análisis del comportamiento de una matriz, así como en el cálculo de ángulos entre subespacios.

Teorema 3.45 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz distinta de la matriz nula tal que $ran(A) = r$, entonces A puede factorizarse como*

$$A = U\Sigma V^*,$$

donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ son matrices unitarias y $\Sigma \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es una matriz de la forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ una matriz diagonal, $\tilde{\Sigma} = diag \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$, tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Demostración

La prueba se hará por inducción sobre $r = ran(A)$. Supongamos $ran(A) = 1$ y sea $u_1 \in R(A)$ un vector unitario. Dado que $ran(A) = 1$ y $u_1 \neq \bar{0}$ existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$ tales que $k_i u_1 = a_i$, $1 \leq i \leq m$. Sea $v =^t \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{bmatrix}$ y sea $v_1 = \sigma v \in \mathbb{C}^m$, donde $\sigma = \|v\|$. Así $A = \sigma u_1 v_1^t$. Por otro lado podemos tomar $u_2, u_3, \ldots, u_n$ y $v_2, v_3, \ldots, v_m$ tales que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es base ortonormal de $\mathbb{C}^m$, luego $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$ son matrices unitarias. Sea $\Sigma \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego $U\Sigma V^* = \sigma \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} V^* = \sigma u_1 v_1^t = A$ y se tiene el resultado deseado.

Supongamos que el teorema se cumple para $r - 1$. Supongamos $r(A) = r$ y sea $v_1 \in \mathbb{C}^m$ un vector unitario tal que $\|A\| = \|Av_1\|$. Sea $\sigma = \|Av_1\|$ y sea $u_1 = \sigma^{-1} A v_1$. Análogamente al caso anterior tomamos matrices unitarias $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\tilde{V} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que la primera columna de $\tilde{U}$ sea u_1 y la primera columna de $\tilde{V}$ sea v_1. Sea $\tilde{A} = \tilde{U}^* A \tilde{V}$, luego $\tilde{A}$ se puede particionar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{U}^* A \tilde{V} &= \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma u_1 & Av_2 & \cdots & Av_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma & z^* \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n-1 \times m-1}$ y $z \in \mathbb{C}^{m-1}$. Sea $w^t = \begin{bmatrix} \sigma & z^t \end{bmatrix}$, luego

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}w\|^2 &= (\sigma^2 + \|z\|^2)^2 + \|\hat{A}z\|^2 \\ &= \|w\|^4 + \|\hat{A}z\|^2 \geq \|w\|^4\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$(\|\tilde{A}w\|^2 / \|w\|^2) \geq \|w\|^2 = \sigma^2 + \|z\|^2 \geq \|\tilde{A}\|^2,$$

dado que $\|A\| = \|\tilde{A}\|$. Así $z = \bar{0}$ y por lo tanto

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Dado que $ran(A) = ran(\tilde{A})$, se tiene $ran(\hat{A}) = r - 1$. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$, donde $\hat{U} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ y $\hat{V} \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$ son matrices unitarias y $\hat{\Sigma} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(m-1)}$ es una matriz de la forma

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $D \in \mathbb{C}^{(r-1)\times(r-1)}$ es una matriz diagonal, $D = diag \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$, tal que $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_{r-1} > 0$. Dado que $\hat{T}^*$ es invertible existe $x \in \mathbb{C}^{m-1}$ tal que $\hat{T}^* x = e_1$ y dado que $\hat{T}^*$ es unitaria tenemos $\|x\| = \|\hat{T}^* x\| = \|e_1\| = 1$. Por otro lado, $\hat{A}x = \sigma_2 \hat{U} e_1$ de donde obtenemos $\|\hat{A}x\| = \sigma_2$. Sea $y = \begin{bmatrix} 0 & x^y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$, luego $\|y\| = 1$ y $(\tilde{A}y)^t = \begin{bmatrix} 0 & (\hat{A}x)^t \end{bmatrix}$, de donde obtenemos $\sigma_2 \leq \|\tilde{A}\| = \sigma_1$. Sean

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix}, \; V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \;\text{ y }\; \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma} \end{bmatrix},$$

luego U_1 y V_1 son matrices unitarias y se tiene

$$\begin{aligned} U_1\Sigma V_1^* &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{U}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \hat{\Sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{V}^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \hat{U}\hat{\Sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{V}^*\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \hat{A}\end{bmatrix} = \tilde{A}\end{aligned}$$

y dado que $\tilde{A} = \tilde{U}^* A \tilde{V}$, tomando $U = \tilde{U}U_1$ y $V = \tilde{V}V_1$ obtenemos $A = U\Sigma V$. Por lo tanto A puede factorizarse de la forma deseada. ■

Los valores de la matriz Σ son llamados los valores singulares de A. Estos valores estan relacionados con la matriz A^*A. Dada la descomposición en sus valores singulares de $A = U\Sigma V^*$, se tiene $A^*A = V\Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^*$, donde $\Sigma^*\Sigma = diag\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_r^2\end{bmatrix}$. Por lo tanto $\lambda(A^*A) = \{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2\}$. De donde obtenemos, por el Corolario 3.42 y el Corolario 3.44, que $\|A\| = \sigma_1$ y $\|A^{-1}\| = \sigma_r^{-1}$. Como se mencionó anteriormente esta descomposición también nos permite calcular el ángulo entre dos subespacios dados de igual dimensión.

3.6.1. Ángulos Principales

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ el ángulo entre ellos está dado por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Consideremos U y V dos subespacios de $\mathbb{C}^n$ de dimensión uno. Sean $u \in U$ y $v \in V$, luego se tiene $\langle u, v\rangle = re^{i\theta}$, tomando $\hat{v} = e^{i\theta}v \in V$ tenemos $\langle u, v\rangle = r \geq 0$, por lo tanto siempre es posible tomar elementos en cada subespacio tal que el producto interno entre ellos sea no negativo. Así podemos definir el ángulo U y V como el ángulo entre dos vectores, $u \in U$ y $v \in V$ tales que $\langle u, v\rangle \geq 0$. Consideremos ahora subespacios vectoriales U, V tales que $dim(U) = dim(V) = k$. Como hemos visto podemos restringir nuestra atención a vectores tales que $\langle u, v\rangle \geq 0$ y aun más a vectores unitarios solamente dado que la magnitud de los vectores, mientras sea no nula, no modifica el ángulo entre ellos. Nótese que así el ángulo siempre es agudo. El ángulo más pequeño entre U y V es aquel más pequeño que se puede tomar entre vectores de U y V, es decir, aquel entre los vectores $u_1 \in U$ y $v_1 \in V$ tales que

$$\langle u_1, v_1\rangle = \text{máx}\{\langle u, v\rangle : u \in U,\, v \in V, \|u\| = \|v\| = 1, \langle u, v\rangle \geq 0\},$$

estos vectores siempre se pueden tomar, ver [8]. Así el ángulo más pequeño entre U y V es

$$\theta_1 = \arccos\langle u_1, v_1\rangle.$$

Llamaremos a θ_1 el primer **ángulo principal** entre U y V. Si $k > 1$ el segundo ángulo principal está definido como el ángulo más pequeño entre un vector unitario en U ortogonal a u_1 y un vector unitario en V ortogonal a v_1, es decir,

$$\theta_2 = \arccos\langle u_2, v_2\rangle,$$

donde

$$\langle u_2, v_2\rangle = \text{máx}\{\langle u, v\rangle : u \in U \cap gen(\{u_1\})^{\perp},\, v \in V \cap gen(\{v_1\})^{\perp},\\ \|u\| = \|v\| = 1,\, \langle u, v\rangle \geq 0\}$$

y en general el i-ésimo ángulo principal θ_i es aquel entre los vectores u_i y v_i tales que

$$\langle u_i, v_i\rangle = \text{máx}\{\langle u, v\rangle : u \in U \cap gen(\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}\})^{\perp},\\ v \in V \cap gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\})^{\perp},\, \|u\| = \|v\| = 1,\, \langle u, v\rangle \geq 0\}$$

Nótese que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_k \leq 2\pi$. Los vectores ortonormales $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son llamados vectores principales de los subespacios U y V. Los vectores principales no están determinados únicamente sin embargo los ángulos principales si lo están. Una forma de calcular los ángulos principales entre dos subespacios es utilizando la descomposión de una matriz en sus valores singulares. Antes veamos el siguiente teorema

Teorema 3.46 *Sean $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ bases ortonormales de U y V, respectivamente y sean*

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{bmatrix} \quad y \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix}.$$

Si $\tilde{U}^*\tilde{V} = C$ es una matriz diagonal con entradas no negativas, donde $C = diag\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}$ y $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_k \geq 0$, entonces $u_1, u_2, \ldots, u_k$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son los vectores principales de los subespacios U y V. Los ángulos principales son $\theta_i = \arccos c_i$, $1 \leq i \leq k$.

Demostración

Sean $u \in U$ y $v \in V$ vectores unitario tales que $\langle u, v\rangle \geq 0$. Luego existen vectores únicos $x, y \in \mathbb{C}^k$ tales que $u = \tilde{U}x$ y $v = \tilde{V}y$. Extendiento $\tilde{U}$ a una matriz unitaria en $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ podemos ver que $\|x\| = \|u\|$ y análogamente $\|v\| = \|y\|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle u, v\rangle &= \langle \tilde{U}x, \tilde{V}y\rangle = y^*\tilde{V}^*\tilde{U}x = y^*\tilde{U}^*\tilde{V}x = y^*Cx \\ &= \langle Cx, y\rangle \leq \|Cx\|\|y\| \leq \|C\| = c_1, \end{aligned}$$

y dado que $\langle \tilde{u}_1, \tilde{v}_1\rangle = c_1$ obtenemos que el primer ángulo principal es $\theta_1 = \arccos c_1$, y que $\tilde{u}_1$ y $\tilde{v}_1$ son vectores principales. Análogamente se tiene que $\theta_i = \arccos c_i$ con vectores principales asociados $\tilde{u}_i$ y $\tilde{v}_i$. ■

Sean $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ y $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ bases ortonormales de U y V respectivamente. Sean $P_1 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{bmatrix}$ y $Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$.

Consideremos la descomposición en valores singulares de $P_1^*Q_1 = M_1\Sigma N_1$, donde $\Sigma = diag \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_k \end{bmatrix}$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k \geq 0$. Sea $U_1 = P_1M_1$ y $V_1 = Q_1N_1$. Nótese que las columnas de U_1 y V_1 forman una base ortonormal de U y V respectivamente. Por otro lado, $U_1^*V_1 = M_1^*P_1^*Q_1N_1 = \Sigma$, así por el teorema anterior se tiene que $\theta_i = \arccos \sigma_i$, los ángulos principales entre U y V, con vectores principales asociados u_i, la i-ésima columna de U_1, y v_i, la i-ésima columna de V_1.

Capítulo 4

Cálculo de Valores y Vectores Propios

En este capítulo se tratará con **métodos iterativos** para el cálculo de valores y vectores propios. Un método iterativo es aquel que produce una secuencia de aproximaciones que convergen a la solución del problema que se esté tratando. El método para cuando se tiene una aproximación lo suficientemente cerca de la solución real.

Dado un espacio vectorial con producto interno inmediatamente se puede hablar de la norma (o magnitud) de cada vector la cual nos permite hablar de la distancia o cercanía entre dos vectores. La cercanía entre dos vectores nos permite saber si una sucesión de vectores se aproxima a un vector.

Dada una función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^n$, consideremos el conjunto $\{F(n) \in \mathbb{C}^n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = F(n)$. El conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será llamado **sucesión** en $\mathbb{C}^n$ y lo denotaremos sólo como $\{x_j\}$. Dada una sucesión podemos definir cuándo converge a un vector $y \in \mathbb{C}^n$.

Definición 4.1 *Sea $\{x_j\}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$ y sea $v \in \mathbb{C}^n$. Diremos que la sucesión $\{x_j\}$* ***converge*** *a v si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $j > N$ entonces $\|x_j - y\| < \varepsilon$.*

Si la sucesión $\{x_j\}$ converge a y sólo escribiremos $x_j \to y$. De la definición podemos ver que $x_j \to y$ si y sólo si $x_j - y \to \bar{0}$.

Teorema 4.2 *Sea $\{\alpha_j\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\{x_j\}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{C}^n$ tales que $\alpha_j \to \alpha$ y $x_j \to x$, entonces:*

1. *Para cada $\beta \in \mathbb{C}$ se tiene $\beta x_j \to \beta x$.*
2. *Para cada $y \in \mathbb{C}^n$ se tiene $\alpha_j y \to \alpha y$.*
3. *La sucesión $\{\alpha_j x_j\}$ converge a αx.*
4. *Si $\alpha_j \neq 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\alpha \neq 0$ entonces $(\alpha_j)^{-1} \to \alpha^{-1}$.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [4].

4.1. Método de las Potencias

Supongamos que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable, luego existen vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linealmente independientes asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Supongamos que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Bajo estas condiciones es posible encontrar un vector propio dominante utilizando el **método de las potencias**.

El valor propio λ_1 es llamado el valor propio **dominante**, el cual es distinto de cero. Si v es un vector propio asociado a λ_1 se dirá que v es un vector propio dominante.

La idea es tomar un vector $q \in \mathbb{C}^n$, generar la sucesión $q, Aq, A^2q, \ldots$ y a partir de esta sucesión crear una sucesión convergente a un vector propio dominante. Dado $q \in \mathbb{C}^n$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $q = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Supongamos $a_1 \neq 0$, luego aplicando la transformación A obtenemos $Aq = a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 + \cdots + a_n\lambda_nv_n$ y en general se tiene $A^jq = a_1\lambda_1^jv_1 + a_2\lambda_2^jv_2 + \cdots + a_n\lambda_n^jv_n$, de donde obtenemos

$$A^jq = \lambda_1^j(a_1v_1 + a_2(\lambda_2/\lambda_1)^jv_2 + \cdots + a_n(\lambda_n/\lambda_1)^jv_n).$$

Nótese que si v es un vector propio de A entonces αv es un vector propio de A para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ y así la magnitud del vector αv pierde importancia. Sea $q_j = A^jq_0/\lambda_1^j$, luego se tiene

$$\begin{aligned} \|q_j - a_1v_1\| &= \|a_2(\lambda_2/\lambda_1)^jv_2 + \cdots + a_n(\lambda_n/\lambda_1)^jv_n\| \\ &\leq |a_2||(\lambda_2/\lambda_1)|^j\|v_2\| + \cdots + |a_n||(\lambda_n/\lambda_1)|^j\|v_n\| \\ &\leq (|a_2|\|v_2\| + \cdots + |a_n|\|v_n\|)|(\lambda_2/\lambda_1)|^j \end{aligned}$$

y dado que $|\lambda_2/\lambda_1|^j \to 0$, obtenemos que $q_j \to a_1v_1$. Por lo tanto para j suficientemente grande se tiene que q_j es una buena aproximación del vector propio dominante a_1v_1. Nótese que la multiplicidad de λ_1 no afecta a la construcción anterior, si la multiplicidad de λ_1 es mayor que uno análogamente se puede construir la sucesión q_j.

En la práctica la sucesión $\{q_j\}$ es inaccesible dado que en principio no conocemos el valor propio λ_1. Por otro lado no es conveniente utilizar la sucesión (A^jq) dado que si $|\lambda_1| < 1$ entonces $A^jq \to \bar{0}$, y si $|\lambda_1| > 1$ entonces $A^jq \to \infty$, sin embargo es posible tomar una sucesión convergente a un vector propio dominante, para esto utilizaremos la norma infinito. Sea $u_0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|u_0\|_\infty = 1$ y

$$u_0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\|v_i\|_\infty = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y que la coordenada de mayor magnitud de v_1 es igual a uno.

Supongamos $a_1 \neq 0$. Sea $w_0 = Au_0$ y sea $u_1 = w_0/c_1$ donde $|x_k^0| = \text{máx}\{|x_i^0| : 1 \leq i \leq n\}$, la coordenada de mayor magnitud que en caso de empate se toma la de menor índice, y $c_1 = x_k^0$. De este modo se tiene

$$w_0 = Au_0 = \lambda_1(a_1v_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)v_n) \quad \text{y}$$

$$u_1 = \left(\frac{\lambda_1}{c_1}\right)(a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \cdots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) v_n),$$

donde $\|u_1\|_\infty = 1$. En general se tiene

$$w_{j-1} = Au_{j-1} = \left(\frac{\lambda_1^j}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}\right)(a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j v_2 + \cdots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n) \quad \text{y}$$

$$u_j = \left(\frac{\lambda_1^j}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1} c_j}\right)(a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j v_2 + \cdots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n),$$

donde $\|u_j\|_\infty = 1$ y $c_j = x_k^{j-1}$, la coordenada de w_{j-1} de mayor magnitud. Así la componente de mayor magnitud de u_j es igual a 1. Sea $z_j = a_2(\lambda_2/\lambda_1)^j v_2 + \cdots + a_n(\lambda_n/\lambda_1)^j v_n$, luego $z_j \to \bar{0}$ y se tiene

$$\lim_{j\to\infty} u_j = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_1^j}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1} c_j}\right)(a_1 v_1 + z_j) = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_1^j a_1}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1} c_j}\right) v_1.$$

Dado que las coordenadas de mayor magnitud de u_j y v_1 son iguales a 1 entonces se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_1^j a_1}{c_1 c_2 \cdots c_{j-1} c_j}\right) = 1$$

y así

$$\lim_{j\to\infty} u_j = v_1.$$

Por otro lado, dado que $(\lambda_1^j a_1)/c_1 c_2 \cdots c_j \neq 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$ entonces se tiene

$$1 = \lim_{j\to\infty} \frac{\lambda_1^j a_1/c_1 c_2 \cdots c_j}{\lambda_1^{j-1} a_1/c_1 c_2 \cdots c_{j-1}} = \lim_{j\to\infty} \frac{\lambda_1}{c_j},$$

de donde obtenemos que $\lim_{j\to\infty} c_j = \lambda_1$.

4.1.1. Implementación Computacional

A continuación se presenta la implementación en MATLAB del algoritmo descrito en el método de las potencias.

Como datos de entrada se requiere:

- `A` una matriz de orden $n \times n$.
- `U` un vector inicial de orden $n \times 1$.
- `epsilon` es la tolerancia.
- `max1` es el número máximo de iteraciones.

Como resultado devuelve:

- `lambda`, que es una aproximación que dista `epsilon` del valor propio dominande de `A`.
- `V`, que es un vector que dista `epsilon` de un vector propio dominante de norma infinito uno.

Implementación en MATLAB:

```
function [lambda,V]=power1(A,U,epsilon,max1)
% Inicialización de los parámetros
lambda=0;
cnt=0;
err=1;
state=1;
while ((cnt<=max1)&&(state==1))
   W=A*U;
   % Normalización de W
   [m j]=max(abs(W)));
   c1=m;
   dc=abs(lambda-c1);
   if (c1 =max(Y))
   c1=-c1;
   end
   W=(1/c1)*W;
   % Actualización de U y de lambda y criterio de convergencia
   dv=norm(U-W);
   err=max(dc,dv);
   U=W;
   lambda=c1;
   state=0;
```

```
   if(err>epsilon)
   state=1;
   end
   cnt=cnt+1;
end
V=U;
```

La siguiente tabla presenta los resultados de la aplicación del método de las potencias a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda(A) = \{4, 2, 1\}$. El método comienza con el vector $u_0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$.

$Au_k =$	$c_{k+1}u_{k+1}$		
$Au_0 =$	$12{,}0000 \begin{pmatrix}0{,}5000 & 0{,}6666 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_1u_1
$Au_1 =$	$5{,}3333 \begin{pmatrix}0{,}4375 & 0{,}6250 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_2u_2
$Au_2 =$	$4{,}5000 \begin{pmatrix}0{,}4166 & 0{,}6111 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_3u_3
$Au_3 =$	$4{,}2222 \begin{pmatrix}0{,}4078 & 0{,}6052 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_4u_4
$Au_4 =$	$4{,}1052 \begin{pmatrix}0{,}4038 & 0{,}6025 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_5u_5
$Au_5 =$	$4{,}0512 \begin{pmatrix}0{,}4018 & 0{,}6012 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_6u_6
$Au_6 =$	$4{,}0253 \begin{pmatrix}0{,}4009 & 0{,}6006 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_7u_7
$Au_7 =$	$4{,}0125 \begin{pmatrix}0{,}4004 & 0{,}6003 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_8u_8
$Au_8 =$	$4{,}0062 \begin{pmatrix}0{,}4002 & 0{,}6001 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_9u_9
$Au_9 =$	$4{,}0031 \begin{pmatrix}0{,}4001 & 0{,}6000 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	$c_{10}u_{10}$
$Au_{10} =$	$4{,}0015 \begin{pmatrix}0{,}4000 & 0{,}6000 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	$c_{11}u_{11}$

Se observa que la sucesión de escalares se aproxima al valor propio dominante $\lambda = 4$ y la sucesión de vectores se aproxima al vector propio dominante $v = \begin{pmatrix}2/5 & 3/5 & 1\end{pmatrix}^t$.

4.2. Método de las Potencias Inversas con Desplazamiento

Continuaremos suponiendo que la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable con vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linealmente independientes asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, los cuales cumplen $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Si A es invertible, y por lo tanto sus valores propios son distintos de cero, podemos aplicar el método de las potencias a la matriz A^{-1}, esto es el **método de las potencias inversas**.

Dado que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de A se tiene que $\lambda_n^{-1}, \lambda_{n-1}^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}$ son valores propios de A^{-1}. Si $|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}|$ entonces podemos aplicar el método de las potencias a A^{-1} y calcular un vector propio de A asociado al valor propio λ_n. Por otro lado, también existe la posibilidad de calcular vectores propios asociados a los demás valores propios. Dado $\rho \in \mathbb{C}$ se tiene que si λ es valor propio de A entonces $\lambda - \rho$ es valor propio de $A - \rho I$, luego si tomamos $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda_j - \rho| > |\lambda_i - \rho| > 0$ para todo $j \neq i$ entonces se tiene $|(\lambda_i - \rho)^{-1}| > |(\lambda_j - \rho)^{-1}|$ para todo $j \neq i$, luego $A - \rho I$ es invertible y podemos aplicar el método de las potencias a $(A - \rho I)^{-1}$ para calcular un vector propio de A asociado a λ_i.

El desplazamiento de la matriz A se podría usar en el método de las potencias para calcular cualquier otro vector propio asociado al valor propio que deseemos sin embargo no siempre es posible. Si tomamos $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable tal que $\lambda(A) = \{-1, 1, 2\}$, entonces no nos sería posible tomar un escalar que esté mas lejano de 1 que de todos los demás valores propios, sin embargo si nos es posible tomar un escalar que esté más próximo a 1 que a todos los demás valores propios.

Dado un valor propio λ_j de A y un escalar $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda_j - \rho| > |\lambda_i - \rho|$ para cada $i \neq j$ entonces podemos aplicar el método de las potencias a la matriz $(A - \rho I)^{-1}$ para calcular un vector propio de A asociado al valor propio λ_j, esto es el método de las potencias inversas con desplazamiento.

La matriz $(A-\rho I)^{-1}$ no necesariamente necesita ser calculada, como alternativa podemos resolver el sistema $(A-\rho I)w_j = u_j$ utilizando la factorización LU y posteriormente tomar $u_{j-1} = w_j/c_{j+1}$ donde c_{j+1} es la coordenada de mayor magnitud de w_j.

Una variante del método es tomar un desplazamiento diferente de la matriz A en cada iteración, para esto se toma el escalar ρ_i tal que

$$\|Au_i - \rho_i u_i\| = \min_{\rho\in\mathbb{C}} \|Au_i - \rho u_i\|.$$

En el capítulo 4 se vió que el valor óptimo cumple la ecuación

$$q^*q\rho = q^*Aq.$$

Dado que $q^*q \in \mathbb{C}$ entonces tenemos que el valor óptimo tiene la forma

$$\rho = \frac{q^*Aq}{q^*q} = \frac{q^*Aq}{\|q\|^2},$$

el cual es el cociente de Rayleigh de q respecto a A.

Así en el i-ésimo paso de la iteración se toma el escalar

$$\rho_{j-1} = (u_{j-1}^*Au_{j-1})/\|u_{j-1}\|^2,$$

se resuelve el sistema $(A-\rho_i)w_j = u_{j-1}$ y se toma $u_j = w_j/c_j$ donde c_j es la coordenada de w_j de mayor magnitud. Esta variante del método de las potencias inversas con desplazamiento es la llamada iteración del cociente de Rayleigh. La convergencia al aplicar esta variante no está garantizada sin embargo cuando se da la convergencia entonces converge con un orden cuadrático de convergencia, ver [1].

Cuando esta variante converge la sucesión de escalares (ρ_j) converge el valor propio desconocido. Así el cociente de Rayleigh nos permite tomar una sucesión de escalares que converge al valor propio que deseemos obtener.

Teorema 4.3 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $v \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A asociado al valor propio λ tal que $\|v\| = 1$. Sea $q \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|q\| = 1$ y sea $\rho = q^*Aq$, entonces*

$$|\lambda - \rho| \leq 2\|A\|\|v-q\|.$$

Demostración:

Dado que $Av = \lambda v$ y $\|v\| = 1$, entonces $\lambda = v^*Av$. Así

$$\begin{aligned}\lambda - \rho &= v^*Av - q^*Aq = v^*Av - v^*Aq + v^*Aq - q^*Aq \\ &= v^*A(v-q) + (v-q)^*Aq\end{aligned}$$

y obtenemos

$$|\lambda - \rho| \leq |v^*A(v-q)| + |(v-q)^*Aq|. \tag{4.1}$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|v^*A(v-q)| \leq \|v^*\|\|A(v-q)\| = \|A(v-q)\|,$$

y por la definición de $\|A\|$ se tiene

$$|v^*A(v-q)| \leq \|A(v-q)\| \leq \|A\|\|v-q\|.$$

Análogamente obtenemos que $|(v-q)^*Aq| \leq \|A\|\|v-q\|$, así usando las dos desigualdades anteriores en la ecuación 4.1 obtenemos

$$|\lambda - \rho| \leq 2\|A\|\|v-q\|.$$

■

El método de la potencias inversas genera una sucesión u_j convergente a un vector propio v donde se tiene que $u_j \neq \bar{0}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, así por el Teorema 4.2 tenemos que $u_j/\|u_j\| \to v/\|v\|$. Por lo tanto si tomamos $\rho_j = (u_j^*Au_j)/\|u_j\|^2$ entonces la sucesión (ρ_j) converge al valor propio asociado al vector propio v.

4.2.1. Implementación Computacional

Como datos de entrada se requiere:

- `A` una matriz de orden $n \times n$ invertible y diagonalizable.
- `X` un vector inicial de orden $n \times n$.
- `alfa` es el desplazamiento.
- `epsilon` es la tolerancia.
- `max1` es el número máximo de iteraciones.

Como resultado devuelve:

- `lambda` una aproximación del valor propio más cercano a `alfa`.
- `V` una aproximación al vector propio asociado del valor propio más cercano a `alfa`.

Implementación en MATLAB:

```
function [lamda,V]=invpow(A,X,alfa,epsilon,max1)
% Valores iniciales de la matriz A - alfa I y de los parámetros
```

```
[n n]=size(A);
A=A-alfa*eye(n);
lambda=0;
cnt=0;
err=1;
state=1;
[L,U,P]=lu(A);
while ((cnt<=max1)&&(state==1))
   % Resolución del sistema AY=X
   Y=(P*X)/L);
   Y=Y/U;
   % Normalización de Y
   [m j]=max(abs(Y));
   c1=m;
   dc=abs(lambda-c1);
   if (c1 =max(Y))
   c1=-c1;
   end
   Y=(1/c1)*Y;
   % Actualización de X y de lambda y criterio de convergencia
   dv=norm(X-Y);
   err=max(dc,dv);
   X=Y;
   lambda=c1;
   state=0;
   if (err>epsilon)
   state=1;
   end
   cnt=cnt+1;
end
lambda=alfa+(1/c1);
V=X;
```

A continuación se presenta una tabla de los resultados de la aplicación del método de la potencias inversas con desplazamiento a la matriz A, definida anteriormente, con desplazamiento $\alpha = -2$ comenzando con el vector $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

$(A+2I)^{-1}u_k =$	$c_{k+1}u_{k+1}$		
$(A+2I)^{-1}u_0 =$	$0{,}6111\begin{pmatrix}0{,}5455 & 0{,}4545 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_1u_1
$(A+2I)^{-1}u_1 =$	$0{,}4091\begin{pmatrix}0{,}5185 & 0{,}4815 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_2u_2
$(A+2I)^{-1}u_2 =$	$0{,}3642\begin{pmatrix}0{,}5085 & 0{,}4915 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_3u_3
$(A+2I)^{-1}u_3 =$	$0{,}3475\begin{pmatrix}0{,}5041 & 0{,}4959 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_4u_4
$(A+2I)^{-1}u_4 =$	$0{,}3401\begin{pmatrix}0{,}5020 & 0{,}4980 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_5u_5
$(A+2I)^{-1}u_5 =$	$0{,}3367\begin{pmatrix}0{,}5010 & 0{,}4990 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_6u_6
$(A+2I)^{-1}u_6 =$	$0{,}3350\begin{pmatrix}0{,}5005 & 0{,}4995 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_7u_7
$(A+2I)^{-1}u_7 =$	$0{,}3342\begin{pmatrix}0{,}5002 & 0{,}4998 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_8u_8
$(A+2I)^{-1}u_8 =$	$0{,}3337\begin{pmatrix}0{,}5001 & 0{,}4999 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	c_9u_9
$(A+2I)^{-1}u_9 =$	$0{,}3335\begin{pmatrix}0{,}5001 & 0{,}4999 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	$c_{10}u_{10}$
$(A+2I)^{-1}u_{10} =$	$0{,}3334\begin{pmatrix}0{,}5000 & 0{,}5000 & 1{,}0000\end{pmatrix}^t$	$=$	$c_{11}u_{11}$

Se observa que la sucesión de escalares converge a $1/3$ que es valor propio de $(A+2)^{-1}$, así 3 es valor propio de $A+2I$ y en consecuencia 1 es valor propio de A y $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}^t$ es vector propio de A correspondiente al valor propio 1.

4.3. Perturbaciones

En la práctica cuando se nos presenta un problema que requiera encontrar los valores propios de una matriz usualmente la matriz con la cual se está tratando viene dada de una medición que nos proporciona datos con error. Ante esta situación es necesario saber si tiene sentido tratar con una matriz con errores y qué relación tiene la información que nos dé la matriz perturbada respecto de la matriz real.

Supongamos que hemos calculado una aproximación al valor propio λ y un vector propio asociado v y queremos saber qué tan cerca están de los valores propios y los vectores propios de la matriz original, los siguientes teoremas nos dan información acerca de ello.

Teorema 4.4 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|v\| = 1$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ existe una matriz A^δ tal que v es vector propio de $A + A^\delta$ asociado al valor propio λ y $\|A^\delta\| = \|Av - \lambda v\|$.*

Demostración:

Sea $A^\delta = (\lambda v - Av)v^*$, luego

$$(A + A^\delta)v = Av + (\lambda v - Av)v^*v = \lambda v,$$

así v es valor propio de $A + A^\delta$. Dado $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|u\| = 1$ se tiene

$$\|(\lambda v - Av)v^*u\| = |\langle u, v\rangle| \, \|\lambda v - Av\| \leq \|u\|\|v\|\|\lambda v - Av\| = \|\lambda v - Av\|.$$

Por otro lado $\|(\lambda v - Av)v^*v\| = \|\lambda v - Av\|$, así $\|A^\delta\| = \|\lambda v - Av\|$. ■

Lema 4.5 *Sea $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonal, entonces*

$$\|D\| = \max_{1\leq i\leq n} |D_{ii}|.$$

Demostración:
Tomemos la matriz hermitiana D^*D, luego D^*D es diagonal y $(D^*D)_{ii} = |D_{ii}|^2$. Sea λ el elemento de mayor magnitud de la matriz D^*D, luego por el Corolario del Teorema 3.41 obtenemos que

$$\|D\| = \sqrt{\lambda} = \max_{1\leq i\leq n} |D_{ii}|.$$

■

Teorema 4.6 *Sean $A, A^\delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que existen $D, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con V invertible y D diagonal tales que $A = VDV^{-1}$, es decir, A es diagonalizable. Si μ es un valor propio de la matriz $A + A^\delta$ entonces A tiene un valor propio λ tal que*

$$|\mu - \lambda| \leq \|V^{-1}\|\|A^\delta\|\|V\|.$$

Demostración:
Sea $D^\delta = V^{-1}A^\delta V$, luego

$$\|D^\delta\| \leq \|V^{-1}\|\|A^\delta\|\|V\|. \tag{4.2}$$

Por otro lado $V^{-1}(A+A^\delta)V = V^{-1}(D+D^\delta)V$, así μ es valor propio de $D+D^\delta$. Si μ es valor propio de A tenemos evidentemente el resultado. Supongamos que μ no es valor propio de A. Dado que los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de la matriz D entonces la matriz $\mu I - D$

es invertible y así podemos reescribir la ecuación $(D + D^\delta)x = \mu x$ como $x = (\mu I - D)^{-1} D^\delta x$, luego $\|x\| \leq \|(\mu I - D)^{-1}\| \|D^\delta\| \|x\|$ y obtenemos

$$\|(\mu I - D)^{-1}\|^{-1} \leq \|D^\delta\|. \tag{4.3}$$

La matriz $(\mu I - D)^{-1}$ es una matriz diagonal con entradas $(\mu - \lambda_i)^{-1}$ en la diagonal principal, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A. Por el Lema anterior tenemos que $\|(\mu I - D)^{-1}\| = |\mu - \lambda|^{-1}$, donde λ es valor propio más cercano a μ, nótese que puede no ser único. Así obtenemos de las ecuaciónes 4.2 y 4.3

$$|\mu - \lambda| \leq \|V^{-1}\| \|A^\delta\| \|V\|.$$

■

Estos y otros teoremas relacionados con la teoría de perturbación se pueden ver en [1] y [7].

4.4. Iteración Simultánea

Antes de abordar la Iteración Simultánea veamos algunos conceptos previos.

Definición 4.7 *Dado un subespacio S de $\mathbb{C}^n$ y dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice que S es A-invariante si $As \in S$ para cada $s \in S$.*

En particular dado $\lambda \in \lambda(A)$ se tiene que E_λ es A-invariante.

Lema 4.8 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sea S un subespacio de $\mathbb{C}^n$ con base $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$, entonces S es A-invariante si y sólo si existe $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ tal que $AX = XB$.*

Demostración:
Supongamos que existe $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ tal que $AX = XB$, luego

$$Ax_j = \sum_{i=1}^{k} x_i b_{ij} \in gen(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) = S.$$

Dado que $Ax_j \in S$, $1 \leq j \leq k$, entonces se tiene $Ax \in S$ para cada $x \in S$. Así S es A-invariante.

Supongamos que S es A-invariante. Para $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dado que $Ax_j \in S$, se tiene que existen escalares $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj}$ tales que $Ax_j = b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \cdots + b_{kj}x_k$. Sea $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ definida como $B_{ij} = b_{ij}$, luego $A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix} B$ y se tiene el resultado deseado. ■

Del teorema anterior podemos ver que $\lambda \in \lambda(B)$ entoces $\lambda \in \lambda(A)$.

Teorema 4.9 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea S un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ base de S y sean $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ vectores tales que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$. Sean $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_{k+2} & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, entonces S es A-invariante si y sólo si $B = X^{-1}AX$ tiene la forma*

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde $B_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, y se tiene $AX_1 = X_1B_{11}$.

Demostración:

Supongamos que S es A-invariante. La ecuación $B = X^{-1}AX$ es equivalente a $AX = XB$, de donde obtenemos

$$Ax_j = \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij},$$

y dado que S es A-invariante se tiene $b_{(k+1)j} = b_{(k+2)j} = \cdots = b_{nj} = 0$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Así tomando $(B_{11})_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i, j \leq k$, obtenemos que B tiene la forma establecida en el teorema y evidentemente se tiene $AX_1 = X_1B_{11}$.

Recíprocamente si $AX_1 = X_1B_{11}$ utilizando el lema anterior obtenemos que S es A-invariante. ■

El teorema anterior nos muestra que si obtenemos subespacios invariantes podemos tomar matrices similares para descomponer el problema de la búsqueda de valores propios en matrices más pequeñas. El teorema de Schur nos muestra que particionar una matriz de esta forma siempre es posible. Si la matriz $B_{12} = 0$ entonces el problema de buscar los valores propios de A se reduce a buscar los valores propios de las matrices B_{11} y B_{22}. El método QR es una forma de particionar la matriz A de tal forma para simplificar la búsqueda de los valores propios de una matriz. Antes veamos la iteración simultánea, la cual establece las bases para el método QR.

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que tiene un valor propio dominante, retomando el método de las potencias, tenemos que podemos generar una sucesión de vectores que converja a algún vector propio dominante v_1. Los vectores $q, Aq, A^2q, \ldots$ pueden verse como representates de los subespacios que generan, es decir, de $gen(\{A^jq\})$ respectivamente. La operación de tomar un múltiplo de A^jq en cada iteración del método de las potencias puede verse como tomar otro representante del mismo subespacio. Así el método de las potencias puede verse como el proceso de iteración de subespacios, es decir, comenzar con $S = gen(\{q\})$ y generar $AS, A^2S, A^3, \ldots$. Esta sucesión converge a $T = gen(\{v_1\})$ en el sentido de que el ángulo principal de mayor magnitud entre A^jS y T tiende a cero. Este proceso se puede generalizar a subespacios de dimensión mayor que uno.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\in \mathbb{C}^n$ que consiste de vectores propios de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Supongamos que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ y que $|\lambda_k| > |\lambda_{k+}|$. Diremos que Sea $V_k = gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$ y $U_k = gen(\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\})$. Diremos que V_k es el subespacio dominante de A de dimensión k. La condición $|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$ implica $N(A^m) \subseteq U_k$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si S es un subespacio de $\in \mathbb{C}^n$ de dimensión k tal que $U_k \cap S = \{\bar{0}\}$, entonces $N(A^m) \cap S = \{\bar{0}\}$ y así $dim(A^mS) = dim(S)$. La condición $U_k \cap S = \{0\}$ no es una condición difícil de cumplir dado que $dim(U_k) + dim(S) = n$, ver [8].

Dado $q \in S$ distinto de cero se tiene que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\begin{aligned} q &= c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \\ &\quad + c_{k+1}v_{k+1} + c_{k+2}v_{k+2} + \cdots + c_nv_n. \end{aligned}$$

Dado que $U_k \cap S = \{\bar{0}\}$ se tiene que $c_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, luego

$$\begin{aligned} A^mq/(\lambda_k)^m &= c_1(\lambda_1/\lambda_k)^m v_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1}/\lambda_k)^m v_{k-1} + c_kv_k \\ &\quad + c_{k+1}(\lambda_{k+1}/\lambda_k)^m v_{k+1} + \cdots + c_n(\lambda_n/\lambda_k)^m v_n, \end{aligned}$$

donde se tiene $gen(\{A^mq\}) = gen(\{A^mq/(\lambda_k)^m)$. Así $gen(\{A^mq\} \to G$ para algún subespacio G de dimensión uno contenido en V_k.

La idea de la iteración simultánea es tomar una base de S e iterar en los vectores de la base simultáneamente. Supongamos $U_k \cap S = \bar{0}$ y sea

$\{q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_k^{(0)}\}$ una base de S. Dado que $U_k \cap S = \bar{0}$ se tiene que $\{A^m q_1^{(0)}, A^m q_2^{(0)}, \ldots, A^m q_k^{(0)}\}$ es una base de $A^m S$, análogamente se puede ver que $A^m S$ converge a algún subespacio de V_k, pero dado que $dim(A^m S) = dim(S) = dim(V_k)$ y se tiene que $A^m S \to V_k$.

Análogamente al método de las potencias podemos ver que los vectores $A^m q_i^{(0)}$ pueden crecer en magnitud tal que $\|A^m q_i^{(0)}\| \to \infty$, o disminuir su magnitud de tal forma que $\|A^m q_i^{(0)}\| \to 0$. Por lo tanto en la práctica en cada paso de la iteración es conveniente normalizar los vectores de tal forma que generen al mismo subespacio. Esto se puede hacer a través del proceso de ortonormalización de Gram-Scmidt. Así podemos tomar vectores unitarios y ortogonales $q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots, q_k^{(m)}$ tales que

$$gen(\{A^m q_1^{(0)}, A^m q_2^{(0)}, \ldots, A^m q_k^{(0)}\}) = gen(\{q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots, q_k^{(m)}\}).$$

Consideremos que ampliamos el conjunto ortonormal $\{q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots, q_k^{(m)}\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, $\{q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots, q_n^{(m)}\}$. Sea $\hat{Q}_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\hat{Q}_m = \begin{bmatrix} q_1^{(m)} & q_2^{(m)} & \cdots & q_n^{(m)} \end{bmatrix}$, luego $\hat{Q}_m$ es una matriz unitaria. Sea

$$A_m = \hat{Q}_m^* A \hat{Q}_m.$$

Así obtenemos que el generado de las primeras k columnas de $\hat{Q}_m$ converge al subespacio V_k, el cual es A-invaritante. Por lo tanto, utilizando el Teorema4.9, tenemos que

$$A_m \to \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Esto lo podemos hacer para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$. Así la matriz A_m converge a una matriz triangular por bloques.

4.5. Método QR

El Método QR calcula la matriz A_m directamente comenzando con los vectores canónicos como vectores iniciales. En cada iteración del método se toman factorizaciones del tipo QR las cuales nos brindan la posibilidad de calcular una base ortonormal del subespacio $\{A^m e_1, A^m e_2, \ldots, A^m e_n\}$. Antes de describir el método en general veamos las primeras dos iteraciones.

Supongamos $ran(A) = n$. Comenzamos con

$$Q_0 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix},$$

así tomando la factorización QR de la matriz A, $A = Q_1R_1$, obtenemos que

$$gen(\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}) = gen(\{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)}\}),$$

donde $q_i^{(1)}$ es la i-ésima columna de Q_1.

Sea $A_1 = Q_1^*AQ_1$, luego A_1 es unitariamente equivalente a la matriz A y $A_1 = R_1Q_1$. Tomemos la factorización QR de AQ_1, $AQ_1 = \tilde{Q}_2R_2$, luego dado que la factorización QR de cualquier matriz es única obtenemos la factorización QR de A_1, donde $A_1 = Q_1^*\tilde{Q}_2R_2 = Q_2R_2$.

Sea $A_2 = Q_2^*A_1Q_2 = Q_2^*Q_1^*AQ_1Q_2$, así A_2 es unitariamente equivalente a la matriz A y se tiene $A_2 = R_2Q_2$.

Por otro lado $A^2 = Q_1R_1Q_1R_1 = Q_1A_1R_1 = Q_1Q_2R_2R_1 = \hat{Q}_2\hat{R}_2$, donde $\hat{Q}_2 = Q_1Q_2$ y $\hat{R}_2 = R_2R_1$. Nótese que

$$gen(\{A^2e_1, A^2e_2, \ldots, A^2e_n\}) = gen(\{q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \ldots, q_n^{(2)}\}),$$

donde $q_i^{(2)}$ es la i-ésima columna de $\hat{Q}_2$.

Este proceso se puede hacer recursivamente para obtener las matrices $\hat{Q}_m = Q_1Q_2 \cdots Q_m$ y $\hat{R}_m = R_mR_{m-1} \cdots R_1$, tales que $A^m = \hat{Q}_m\hat{R}_m$.

Cada iteración del método se aplica de la siguiente forma:

- Factorizar $A_{m-1} = Q_mR_m$
- $\hat{Q}_m = \hat{Q}_{m-1}Q_m$
- $\hat{R}_m = R_m\hat{R}_{m-1}$
- $A_m = R_mQ_m = Q_m^*A_{m-1}Q_m$

Teorema 4.10 *Sean $\hat{Q}_m$, $\hat{R}_m$ y A_m las matrices descritas anteriormente, entonces:*

1. $A_m = \hat{Q}_m^*A\hat{Q}_m$.
2. $A^m = \hat{Q}_m\hat{R}_m$.

Demostración:

La prueba se hará por inducción sobre m.

1) Para $m = 1$ el teorema se cumple evidentemente. Supongamos que el teorema se cumple para $m-1$. Se tiene que $A_m = Q_m^*A_{m-1}Q_m$ y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos $A_m = Q_m^*\hat{Q}_{m-1}^*A\hat{Q}_{m-1}Q_m = \hat{Q}_m^*A\hat{Q}_m$.

2) Trivialmente se verifica que el teorema se cumple para $m = 1$. Supongamos que el teorema se cumple para $m-1$. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned} A^m &= AA^{m-1} = A\hat{Q}_{m-1}\hat{R}_{m-1} = \hat{Q}_{m-1}\hat{Q}^*_{m-1}A\hat{Q}_{m-1}\hat{R}_{m-1} \\ &= \hat{Q}_{m-1}A_{m-1}\hat{R}_{m-1} = \hat{Q}_{m-1}Q_mR_m\hat{R}_{m-1} = \hat{Q}_m\hat{R}_m \end{aligned}$$

así se tiene el resultado deseado. ■

Del teorema anterior podemos ver que en general se tiene

$$gen(\{A^m e_1, A^m e_2, \ldots, A^m e_n\}) = gen(\{q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots, q_n^{(m)}\}),$$

donde $q_i^{(m)}$ es la i-ésima columna de la matriz $\hat{Q}_m$.

Como criterio de convergencia podemos tomar las matrices $\hat{Q}_{m-1}$ y $\hat{Q}_m$, y calcular el ángulo principal de mayor magnitud entre los subespacios que generan.

Comenzar con los vectores canónicos no es una mayor desventaja ya que si $dim(U_k) < n$ entonces deben existir vectores canónicos tales el subespacio generado por ellos se intersecte con U_k sólo en el vector nulo, ver [8].

Conclusiones

El estudio de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita se reduce al estudio de las matrices, buscar los valores propios de un operador lineal es equivalente a buscar los valores propios de su representación matricial. Si el espacio vectorial en qué se está tratando está dotado de un producto interno ó de una norma entonces podemos hablar de la distancia entre vectores y se pueden plantear problemas de óptimización dentro del cálculo de valores y vectores propios, además de poder definir la norma para los operadores matriciales. Tanto los problemas de optimización como los problemas que necesitan del cálculo de valores propios son de gran importancia en muchas aplicaciones. Si bien teóricamente es posible encontrar los valores propios de una matriz a través de su polinomio característico, en la práctica, dado que los datos con que se trabaja usualmente se toman con errores, se opta por trabajar con otras técnicas como los métodos iterativos. Por otro lado antes de abordar la búsqueda de valores y vectores propios a través de métodos iterativos se mostraron distintas factorizaciones matriciales, las cuales facilitan los cómputos necesarios en los métodos iterativos. En este trabajo se estudió el Método de las Potencias y su variante, el Método de las Potencias Inversas con desplazamiento. Estos métodos nos proporcionan sucesiones de vectores y sucesiones de escalares que convergen a un vector propio y un valor propio respectivamente. En el caso del Método de las potencias inversas con desplazamiento este nos dá la ventaja de poder calcular cualquier valor propio así como su vector propio asociado, lo cual en el Método de las potencias no es posible. Por otro lado se presentaron teoremas propios de la Teoría de la Perturbación de las matrices, los cuales dan sentido al hecho de trabajar con datos con errores. Finalmente se abordó el Método QR el cual es una generalización del Método de las potencias. Este método lleva la búsqueda de valores propios a matrices de menor tamaño donde los valores propios son de igual magnitud.

Bibliografía

[1] Demmel, *Applied Linear Algebra*, SIAM, 1997.

[2] Friedberg, *Linear Algebra*, Prentice Hall, 2003.

[3] Golub, *Matrix Computations*, The Jhons Hopkins University Press, 1996.

[4] Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[5] Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[6] Stewart, *Matrix Algorithms Volume I: Basic Decompositions*, SIAM, 1998.

[7] Trefethen, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.

[8] Watkins, *The Matrix Eigenvalue Problem*, SIAM, 2007.