

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Método de Monte Carlo para el cálculo de integrales n -dimensionales

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

Rafael de Jesús Oliva López

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Wuiyevaldo Fermín Guerrero Sánchez

Dra. Blanca Bermudez Juárez

PUEBLA, PUE.

Diciembre de 2017

”A todos aquellos que perseveraron y alcanzaron”.

Agradecimientos

Agradezco a Díos, por la vida que me ha dado, por la familia y las personas que me ha permitido conocer, por la alegría que ha cultivado en la vida que me ha dado. A mis padres, que me han guiado, apoyado y por el amor, paciencia que me han mostrado en mi imprudencia y terquedad. A mi hermana por estar siempre presente, apoyándonos, además agradezco su preocupación y el amor a la familia.

A mis profesores que han compartido su conocimiento, al igual que su experiencia acumulada a lo largo de su vida, que me han nutrido, formado profesionalmente, además agradezco su tiempo, dedicación y preocupación por crear personas competentes.

Aun más agradezco aquellos que me han rodeado y permitido conocer sus ideas, aquellas personas que me han contagiado con su moral, actitud, coherencia, honestidad y el saber que las cosas se tienen que hacer lo mejor posible, respecto a nuestras capacidades y no quedarse estancado en la conformidad.

A mis amigos que me han brindado su apoyo, su tiempo incondicional, al Dr W.Fermin que no solo me ha apoyado, a compartido palabras de aliento y recordado que en la vida no hay un final pero si un principio.

Método de Monte Carlo para el cálculo de integrales n-dimensionales

Oliva López Rafael de Jesús

19 de Septiembre de 2017

Resumen

Los métodos Monte Carlo(MC) son un conjunto de métodos que utilizan variables aleatorias bajo un modelo probabilístico. Dentro de este conjunto de métodos se encuentran los métodos de integración MC que son utilizados para calcular integrales n -dimensionales que no tienen solución analítica, estos métodos de integración utilizan inferencia estadística para dar una solución y brindan una forma de estimar el error cometido con un intervalo de confianza a un nivel de significancia.

El objetivo principal de esta tesis es fomentar el uso de las técnicas de integración Monte Carlo por los métodos de Éxito-Fracaso, la Media Muestral y Cambio de Variable.

En esta tesis se presenta la comparación del método de Éxito-Fracaso y la Media Muestral, contra el método del trapecio, la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ respecto al tiempo de simulación, para integrales n -dimensionales, haciendo énfasis en las ventajas y desventajas que brindan cada uno.

Además se presentan los algoritmos para los métodos de integración Monte Carlo antes mencionados.

Palabras clave: integración numérica, Método de Monte Carlo, variables aleatorias, números aleatorios .

Índice general

Resumen	I
Introducción	IV
1. Conceptos previos	1
1.1. Números aleatorios	1
1.1.1. Números pseudoaleatorios	1
1.2. Variables aleatorias	3
1.2.1. Función de distribución	4
1.2.2. Simulación de variables aleatorias	6
2. Métodos de integración numéricos	11
2.1. Fórmulas de cuadratura	11
2.1.1. Método de trapecio	11
2.1.2. Método del trapecio compuesto	12
2.1.3. La regla de Simpson $\frac{1}{3}$	14
2.2. Método de integración Monte Carlo	14
2.2.1. Método de Éxito - Fracaso	15
2.2.2. Método de la Media Muestral	19
2.2.3. Integrales impropias	22
2.2.4. Integración Monte Carlo por cambio de variable.	24
2.2.5. Integrales múltiples	25
2.3. Error	28
2.3.1. Técnicas de reducción de varianza	30
3. Resultados	33
3.1. Comparación entre los métodos numéricos y estocásticos	33
3.1.1. Error estimado y error real	36
3.1.2. Cálculo del intervalo estimado de la solución de la integral	37
3.1.3. Cálculo numérico de la integral de Kirchhoff-Fresnel	42
3.1.4. Conclusiones	44
4. Apéndice	45
4.0.1. Variable aleatoria vectorial	45
4.0.2. Esperanza matemática	47
4.0.3. Programas	48

Introducción

Los métodos de Monte Carlo (MC) son un conjunto de métodos numéricos estocásticos que utilizan variables aleatorias bajo un modelo probabilístico. Se considera el nacimiento del método de Monte Carlo en el año 1949, en un artículo divulgado por los matemáticos norteamericanos Nicholas Metropolis y S. Ulam, con el título “THE MONTE CARLO METHOD”. El nombre “Monte Carlo” se debe a una población del principado de Mónaco, célebre por su casa de juego [1], por la analogía a los juegos de azar que generan números aleatorios, como es el caso de la ruleta.



Figura 0.0.1: John von Neumann, Nicholas Metropolis y S. Ulam

Si bien el nombre de método “Monte Carlo” es relativamente reciente, fue acuñado por John von Neumann y Stanislaw Ulam cuando trabajaban en el proyecto Manhattan durante la segunda guerra mundial y utilizado para simular colisiones de neutrones bajo diversas circunstancias para el desarrollo de la bomba atómica. Sin embargo, existen vestigios que ya utilizaban estos métodos, un uso documentado de la aplicación de los métodos Monte Carlo se encuentra en la obra de George Louis Leclerc, conde de Buffón, en 1777. Cuyo problema plantea: “una aguja de longitud L , se lanza al azar sobre un plano horizontal rayado con líneas rectas paralelas, separadas a una longitud D mayor a L ” y en el cual calculó la probabilidad de que la aguja intercepte alguna de estas líneas, bajo la repetición de lanzamientos de agujas al azar.[22]

En la década de los cuarenta y los cincuenta aparecieron varios trabajos que demostraban el gran interés por estos métodos, basados en el uso de números aleatorios para la resolución de problemas relacionados con la mecánica estadística, la modelización de sistemas económicos, el transporte de radiación [2]. Hoy en día es aplicada en diferentes áreas de la ciencia como: química, biología, economía, física, matemáticas así como en la ingeniería, por ejemplo: en sistemas moleculares para predecir los valores promedios de carga en moléculas, calcular constantes cinéticas de reacción, energías libres, constantes dieléctricas, coeficientes de compresibilidad, capacidad calorífica, punto de cambio de estados,[15] en estimaciones de depresión rápidas de la tensión en redes electrónicas y en calculo de integrales. Este último tema es el que se trabajó en esta tesis, debido a que existen integrales n -dimensionales que no tienen solución analítica, o en su defecto, sus cálculos son muy complicados.

En esta tesis se limita a explicar y aplicar los métodos de integración MC de Éxito–Fracaso y Medias Muéstrales comparándolas contra la integración por el método del trapecio y la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ para integrales definidas de una hasta tres variables, además se tratan integrales

impropias.

La tesis está dispuesta de la siguiente manera:

El primer capítulo de la tesis se habla de los números aleatorios y conceptos básicos de la probabilidad, con la finalidad de comprender las bases para la integración por el método de Monte Carlo.

En el segundo capítulo se presentan algunos métodos numéricos de integración, además el método de integración por método de Exito-Fracaso, la Media Muéstral y Cambio de Variable, así como el análisis del error.

En el tercer capítulo se presentan los resultados obtenidos por los diferentes métodos, así como su error.

En el apéndice se presentan definiciones básicas, así como propiedades de la esperanza y el código de los programas hechos para los métodos numéricos.

Capítulo 1

Conceptos previos

El objetivo de este capítulo es contextualizar al lector con los conceptos básicos necesarios para la lectura de esta tesis. Empezando con los números aleatorios que son base esencial para la simulación de variables aleatorias, las funciones de distribución más comunes que se emplearon principalmente en la simulación de integración Monte Carlo al igual que en la generación de variables aleatorias.

1.1. Números aleatorios

Los números aleatorios son aquellos que son generados por el azar, los cuales son la base esencial de la simulación. Sin embargo, el problema de generar números aleatorios no es trivial ya que no se tiene un concepto claro de aleatoriedad.

Una forma inductiva de conseguir números aleatorios es trazar un círculo en el piso, posteriormente lanzar un puñado de arroz al aire y contar cuántos arroces cayeron dentro del círculo, a este tipo de mecanismo se le llama generador de números aleatorios, otro ejemplo de generadores son: la ruleta y sacar una carta de un mazo de naipes que a sido barajado previamente.

A una sucesión de números que es generada por el azar se le conoce como sucesión de números aleatorios, una peculiaridad que tienen estas series es que los números que aparecen no tienen correlación entre ellos y tiene cierta probabilidad de pertenecer a un rango dado.

Alrededor de 1930, L.H.C. Tippitt publicó una tabla con 4000 números aleatorios, sin embargo, las tablas fueron abandonadas y remplazadas gracias al desarrollo computacional que junto con algoritmos permiten producir números pseudoaleatorios en menor tiempo en comparación con los mecanismos para la obtención de números aleatorios.

1.1.1. Números pseudoaleatorios

A los números que conforman una sucesión y que se comportan como una sucesión de números aleatorios se les conoce como números pseudoaleatorios. Estos números son generados de forma determinista y recursiva, a partir de un número llamado semilla, los cuales son rápidos de producir por medios computacionales, sin embargo, estos métodos para generar números pseudoaleatorios tienen un ciclo en el que la secuencia de números se vuelve a repetir.

Representamos a " n " como la cantidad de números que contiene la sucesión más grande, que se pueda conseguir con un generador antes de que se cicle y recibe el nombre de periodo o ciclo de vida del generador que crea la sucesión. Estos números son estandarizados, es decir, con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ los cuales por métodos de transformación, como el de

trasformada inversa, permiten la generación de números aleatorios con diferentes distribuciones de probabilidad.

Algunos algoritmos que se usan para generar números pseudoaleatorios son:

Algoritmo de cuadrados medios

Este algoritmo fue propuesto por Von Neumann y Metropolis en el siglo XX, requiere un número entero con m dígitos, el cual es elevado al cuadrado para seleccionar del centro m dígitos; el primer número pseudoaleatorio se obtiene anteponiendo el 0, a los m dígitos seleccionados, ahora los m dígitos seleccionados se elevan al cuadrado para repetir nuevamente el procedimiento.

Ejemplo 1.1. *Generar cinco números aleatorios con m dígitos igual a tres, a partir de $x = 365$*

x	x^2	número pseudoaleatorio generado
365	133225	$x_0 = 0,322$
322	103684	$x_1 = 0,368$
368	135424	$x_2 = 0,542$
542	293764	$x_3 = 0,376$
376	141376	$x_4 = 0,137$

Tabla 1.1.1: Números generados por el algoritmo de cuadrados medios

Algoritmo de congruencia lineal

Este algoritmo de congruencia fue propuesto por H. Lehmer en 1955. El algoritmo genera una secuencia de números enteros por medio de la siguiente ecuación recursiva:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \bmod(m),$$

donde x_0 denota la semilla [12], además $a > 0, c > 0$ y $m > 0$ son números enteros, donde $0 < x_i < m$.

Para convertirlo a un intervalo $(0, 1)$ basta aplicar la siguiente forma

$$r_i = \frac{x_i}{m - 1}$$

Cuando tomamos $c = 0$ el generador se dice congruencial multiplicativa.

Algoritmo congruencial aditivo

Este algoritmo requiere una secuencia previa de n números aleatorios x_1, x_2, \dots, x_n para generar una secuencia de números enteros que empiezan en x_{n+1}, x_{n+2}, \dots . Su ecuación recursiva es:

$$x_i = (x_{i-1} + x_{i-2}) \bmod(m) \text{ con } i = n + 1, n + 2, \dots, N$$

Para convertirlo a un intervalo $(0, 1)$ basta aplicar la siguiente forma

$$r_i = \frac{X_i}{m - 1}$$

Algoritmo congruencial cuadrático

Este algoritmo tiene la ecuación recursiva:

$$x_{i+1} = (ax_i^2 + bx_i + c) \bmod(m)$$

con $i = 0, 1, \dots, n$

En este caso, los números r_i pueden ser generados por la ecuación

$$r_i = \frac{x_i}{m-1}$$

De acuerdo con L'Ecuyer, las condiciones que deben cumplir los parámetros m , a , b y c para alcanzar un período máximo de $N = m$ son: m debe ser múltiplo de 2^g , donde g debe ser entero, a debe ser un número par, m debe ser un número impar, y $(b - 1) \bmod(4) = 1$. De esta manera se logra un período de vida máximo $N = m$.

1.2. Variables aleatorias

Antes de definir una variable aleatoria, definiremos un espacio de probabilidad.

Definición 1.1. *Espacio de probabilidad:* Es una terna (Ω, A, Pr) que está compuesta por un espacio muestral Ω , Sigma-Algebra A de Ω y una función de medida de probabilidad Pr donde $Pr : A \rightarrow [0, 1]$.

Definición 1.2. *Sea (Ω, A, Pr) un espacio de probabilidad. Una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, si se cumple que para cualquier intervalo I en \mathbb{R} , el conjunto $\{w : X(w) \in I\}$ es un evento, es decir, esta en A .*

Frecuentemente denotaremos al conjunto $\{w : X(w) \in I\}$ por $X \in I$ o por $X^{-1}(I)$, y lo llamaremos la preimagen de I por la función X . La definición dice que X es una variable aleatoria si la preimagen por X de cualquier intervalo es un evento.

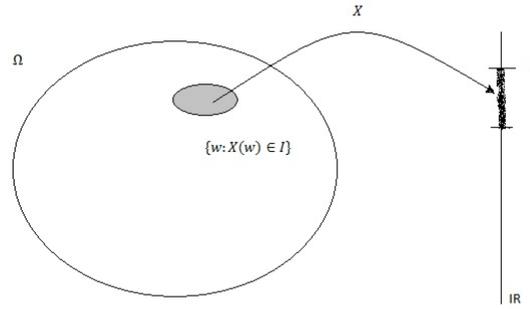


Figura 1.2.1:

Por ejemplo, siendo Ω el espacio muestral y \mathcal{A} la familia de todos los subconjuntos de Ω , cualquier función X definida sobre Ω es una variable aleatoria, ya que para cualquier intervalo I .

$$X^{-1}(I) = \{w : X(w) \in I\} \subset \Omega$$

Variables aleatorias Discretas

Definición 1.3. Una variable aleatoria X es discreta si existe un conjunto finito o numerable de valores x_1, x_2, \dots tales que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Pr(X = x_i) = 1.$$

Es decir, la probabilidad de que dicha variable tome valores fuera del conjunto x_1, x_2, \dots es cero.

Variables aleatorias continuas

Definición 1.4. Una variable aleatoria, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina continua si con función de distribución $F_X(x)$, es continua para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, no negativa, y tal que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

La función f se denomina función de densidad de probabilidad o función de densidad de la variable aleatoria X .

1.2.1. Función de distribución

Una función de distribución es una función $F_X(x)$ asociada a una variable aleatoria X que describe la probabilidad de forma acumulada para cada determinado valor de la variable.

Definición 1.5. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Llamaremos funciones de distribución de la variable aleatoria X a la función F_X definida por $F_X(x) = Pr(w : X(w) \leq x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

Propiedades 1.1. (Función de distribución, una variable aleatoria continuas o discretas). Una función de distribución es una función real $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
(i) F_X es monótona creciente,

- (ii) F_X es continua por la derecha,
 (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.

Dada una función de distribución F_X , si existe una función real f tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

llamamos a f la función de densidad de F_X .

Distribución Uniforme

Si $b > a$, se dice que la variable aleatoria X tiene distribución de probabilidad uniforme en el intervalo (a, b) si y solo si la función de densidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Decimos que la variable aleatoria X tiene distribución exponencial si $P(X > x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x > 0$ y $\lambda > 0$. Por lo tanto, la función de distribución respectiva es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Distribución Normal

La función de distribución normal con parámetros $-\infty < \mu < \infty$ y $0 < \sigma$, es aquella que tiene densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds.$$

Distribución Binomial

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial basada en n pruebas con probabilidad p de éxito si y solo si

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 \leq p \leq 1$$

1.2.2. Simulación de variables aleatorias

En los métodos de Monte Carlo se utiliza la simulación de variables aleatorias como la base esencial del método. El método más sencillo para generar variables aleatorias es el método de la transformación inversa, el cual es utilizado para variables aleatorias continuas, este método utiliza números aleatorios estandarizados, los cuales son aplicados a la función inversa de la función de distribución para generar una muestra de la población de interés, este procedimiento se sustenta en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *(Teorema de inversión) Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X , continua e invertible. Entonces, la variable aleatoria $U = F_X(X)$, transformada de la original mediante su propia función de distribución, tiene distribución $U(0, 1)$. Recíprocamente, si $U \in U(0, 1)$ entonces la variable $F_X^{-1}(U)$ tiene función de distribución F la misma distribución que la de X .*

Ver la demostración de este teorema con el autor Ricardo Cao Abad en [8].

El algoritmo de la inversión vienen dado por:

1. Generar $U \sim U(0, 1)$.
2. Devolver $X = F^{-1}(U)$.

Siendo $F_X(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X , por definición el valor numérico de $F_X(x)$ es un valor en el intervalo $[0, 1]$. Generado un número aleatorio u_i , distribuido uniformemente ($0 \leq u_i \leq 1$); el método de transformación inversa iguala el valor de u_i con $F_X(X)$ como sigue :

$$x_i = F_X^{-1}(u_i)$$

En forma específica si queremos simular la variable aleatoria $X \sim U[a, b]$, sabemos que su función de densidad es :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la función de distribución está dada por

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

En este caso,

$$F_X^{-1}(x) = (b-a)x + a, \quad x \in (0, 1)$$

y por lo tanto, el generador nos queda de la forma:

$$x_m = (b-a)u_m + a, \quad u_m \in (0, 1).$$

Ahora para aplicar el método de la inversión y generar una muestra de valores de la variable aleatoria X , basta generar una muestra de números aleatorios distribuidos en el intervalo $(0, 1)$ y aplicar el generador anterior.

El procedimiento se puede aplicar para vectores aleatorios, con componentes de variables aleatorias independientes como se ve a continuación.

Sea $\widehat{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ un vector aleatorio m -dimensional con X_1, X_2, \dots, X_m variables aleatorias independientes y distribución $U[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$ respectivamente, entonces tenemos que

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b_i - a_i} & \text{si } a_i < x < b_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la función de distribución está dada por

$$F_{X_i}(x) = \int_{a_i}^x \frac{1}{b_i - a_i} dt = \frac{x - a_i}{b_i - a_i}, \quad a_i \leq x \leq b_i$$

En este caso, $F_{X_i}^{-1}(x) = (b_i - a_i)x + a_i$, $x \in (0, 1)$, y por lo tanto, el generador nos queda de la forma

$$x_i = (b_i - a_i)u_{X_i} + a_i, \quad u_{X_i} \in (0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Así, para generar el vector $\widehat{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ se necesita generar m números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.

Para generar una muestra de una de variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < \lambda, \quad 0 \leq x.$$

y la función de distribución esta dada por

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x)} \\ &= e^{-\lambda} \Big|_0^x \\ &= -e^{-\lambda(x)} + 1, \end{aligned}$$

si hacemos $x = F^{-1}(u)$ entonces

$$u = F(x) = 1 - e^{-\lambda(x)},$$

es decir

$$1 - u = e^{-\lambda(x)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln(1 - u) &= -\lambda(x) \\ -\frac{1}{\lambda}(1 - u) &= x \end{aligned}$$

y por lo tanto, el generador nos queda de la forma:

$$x_m = -\frac{1}{\lambda} \ln(u_m), \quad x \in (0, 1)$$

Ahora para aplicar el método de la inversión y generar una muestra de valores de la variable aleatoria X , basta generar una muestra de números aleatorios distribuidos en el intervalo $(0, 1)$ y aplicar el generador anterior, como se puede ver con el autor Cao Abad en [8].

Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \quad 0 < \lambda, \quad 0 < a < x.$$

y la función de distribución esta dada por:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_a^x \lambda e^{-\lambda(x-a)} \\ &= e^{-\lambda} \Big|_a^x \\ &= -e^{-\lambda(x-a)} + 1, \end{aligned}$$

si hacemos $x = F^{-1}(u)$ entonces

$$u = F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)},$$

es decir

$$1 - u = e^{-\lambda(x-a)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln(1 - u) &= -\lambda(x - a) \\ -\frac{1}{\lambda}(1 - u) &= (x - a) \\ -\frac{1}{\lambda}(1 - u) + a &= x. \end{aligned}$$

Por lo tanto para generar una exponencial con parámetro λ generamos un numero aleatorio u y hacemos

$$X = F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

Ahora para aplicar el método de la inversión y generar una muestra de valores de la variable aleatoria X , basta generar una muestra de números aleatorios distribuidos en el intervalo $(0,1)$ y aplicar el generador anterior.

Para generar una muestra de una de variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, usaremos el teorema del limite central.

Teorema 1.2.2. *Teorema Central del Limite*

Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de v.a.i.i.d con media μ y varianza finita σ^2 , entonces la v.a

$$Z_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu}{\sigma \sqrt{n}}$$

Converge en distribución a la v.a normal estándar cuando $n \rightarrow \infty$ es decir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\mu^2}{2}\right) du.$$

[6]

Estandarizando a la variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tenemos que la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

de lo que tenemos

$$X = \sigma Z + \mu$$

siendo U_i , $i = 1, 2, \dots, k$ variables aleatorias independientes con función de distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, con $\mu = \frac{k}{2}$ y $\sigma^2 = \frac{1}{12}$, aplicando el teorema (1.2.2) tenemos:

$$Z = \frac{\sum_1^k U_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}} \sim N(0, 1),$$

los cual tenemos el siguiente generador

$$x_i = \sigma z_i + \mu \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

donde

$$z_i = \frac{\sum_1^k u_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}$$

como se puede consultar con el autor Sosa León [1].

También podemos generar una muestra aleatoria de la variable aleatorias $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ utilizando el método de aceptación y rechazo, bajo las siguientes condiciones como se puede ver con el autor Sheldon M Ross en [23].

Supóngase que se desea simular una distribución con densidad f y considérese otra distribución, con densidad g , fácil de simular, de forma que exista cierta constante $c > 0$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$$

para todo x , el soporte de $g(x)$ (que a de contener al de $f(x)$)

es decir

$$A_f = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\} \subset A_{c * g} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq c * g(x)\}$$

El mejor número para poder elegir el valor de c una vez fijado la densidad g , se obtiene al encontrar el más pequeño número real c que verifica que:

$$f(x) \leq c * g(x)$$

Tenemos entonces la siguientes técnica para generar una variable aleatoria con densidad f . Se define a $Y = c * U * g(X)$ con la condición de que (X_1, Y) este A_f y de aceptar Y si

$$U \leq \frac{f(X)}{c * g(X)}$$

EL método de aceptación, rechazo tiene el siguiente algoritmo:

1. Generar X_1 con densidad g .
2. Generar un número aleatorio U .
3. Si, $U \leq \frac{f(X_1)}{c * g(X_1)}$, hacer $X_1 = X$. En caso contrario, regresar al paso 1.

Ahora, para que simulemos la normal estándar, cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Utilizando como densidad auxiliar a la doble exponencial de parámetro 1 es decir

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad 0 < x < \infty$$

Para generar a la variable X_1 a partir de $g(x)$ tenemos

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^x & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Aplicando el criterio de la transformación inversa tenemos

$$G(x)^{-1} = \begin{cases} \ln(2y) & \text{si } 0 \leq y < 0,5 \\ -\ln(2(1-y)) & \text{si } 0,5 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

por otra parte, veamos cual es el máximo de la función, para calcular el valor c tenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2e^{-\frac{x^2}{2} + |x|}}{\sqrt{2\pi}}$$

Dado que la función es simétrica y continua en todo \mathbb{R} salvo en 0, basta encontrar su máximo absoluto en $[0, \infty]$

$$\frac{df(x)}{dxg(x)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)} (1-x) \text{ para } x > 0$$

igualando $\frac{df(x)}{dxg(x)}$ a 0 tenemos que un punto de inflexión es $x = 1$, aplicando el criterio de la segunda derivada tenemos que en $x = 1$ tenemos el máximo de la función es decir:

$$c = \text{Max} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

. de esta manera obtenemos que

$$\frac{f(X)}{c * g(X)} = e^{\left(\frac{-X^2}{2}\right) + |X| + \frac{1}{2}}$$

De esta manera nuestro algoritmo queda de la siguiente manera

1. Generar $X_1 = \ln(2y)$ si $U_1 < 0,5$, sino hacer $X_1 = -\ln(2(1-y))$.

2. Generar un número aleatorio U .

3. Si, $U \leq e^{\left(\frac{-X_1^2}{2}\right) + |X_1| + \frac{1}{2}}$, hacer $X = X_1$. En caso contrario, regresar al paso 1.

Capítulo 2

Métodos de integración numéricos

Los métodos numéricos son útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos, principalmente donde no hay solución analítica, estos métodos utilizan algoritmos secuenciales para obtener una aproximación de la solución, su aplicación ha sido favorecida con el desarrollo tecnológico computacional a través de los ordenadores.

A continuación se explican algunos métodos numéricos para el cálculo de integrales, como son los métodos de cuadratura y estocásticos.

2.1. Fórmulas de cuadratura

Las fórmulas que proporcionan una aproximación del valor de una integral definida se conocen con el nombre de fórmulas de cuadratura. En sus versiones más sencillas, estas fórmulas aproximan el área bajo la curva por el área parecida a un paralelogramo. Esto sólo proporciona una buena aproximación si la base del paralelogramo es pequeña. Por ello, las fórmulas verdaderamente útiles aproximan la integral definida mediante una suma finita de áreas de paralelogramos de base pequeña de la forma:

$$I_*(f) = \sum_{i=1}^n h f(x_i)$$

donde los x_i , $i = 1, \dots, n$ son los puntos de la partición uniforme del intervalo $[a, b]$ y el coeficiente h que se conoce como paso, el cual es la distancia que hay entre dos puntos consecutivos de la partición.

La estrategia usual para obtener fórmulas que permitan calcular numéricamente la integral definida, se fundamenta en la interpolación numérica. Básicamente consiste en aproximar la función a integrar, con un polinomio de Lagrange que pasa por una serie de puntos de base $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ y posteriormente integrar el polinomio.

2.1.1. Método de trapecio

El método del trapecio es un método de Newton-Cotes basado en la interpolación lineal. La idea esencial es aproximar la función $f(x)$ donde $x \in [a, b]$, con un polinomio de grado uno, $P_1(x)$, es decir:

$$f(x) \simeq P_1(x) = a_1x + b_1$$

ahora construido el polinomio de Lagrange de grado uno para $f(x)$; que pasa en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, se tiene

$$P_1(x) = \frac{1}{b-a}((b-x)f(a) + (x-a)f(b))$$

por lo tanto nuestra integral está dada por

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

como se puede observar con el autor Süli en [10].

La expresión anterior se conoce como regla del trapecio, porque geoméricamente se puede interpretar como la aproximación del área bajo la curva $f(x)$ por el área bajo $P_1(x)$ y la figura que resulta es un trapecio.

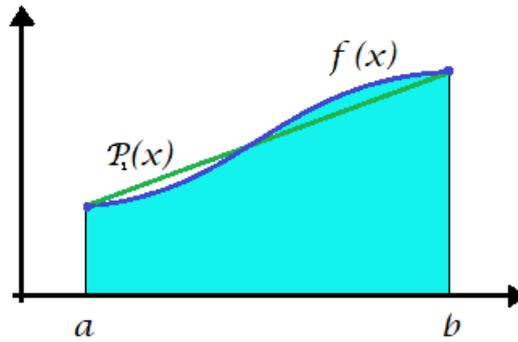


Figura 2.1.1: Método del trapecio

2.1.2. Método del trapecio compuesto

Si el intervalo en el que se realiza la integral es grande, el método del trapecio suele ser muy impreciso. Para mejorar la exactitud, es posible subdividir el intervalo de integración en otros más pequeños y aplicar en cada uno de ellos el método del trapecio. De esta manera, el Método del Trapecio compuesto o generalizado consiste en tomar una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ equiespaciada, es decir: $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 1, \dots, n$. y tomado en cuenta las propiedades básicas de la integral definida se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Aplicando el método del trapecio a cada una de las integrales que conforman a la integral tenemos

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b))$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$, este resultado se puede consultar con el autor Ezquerio en [9].

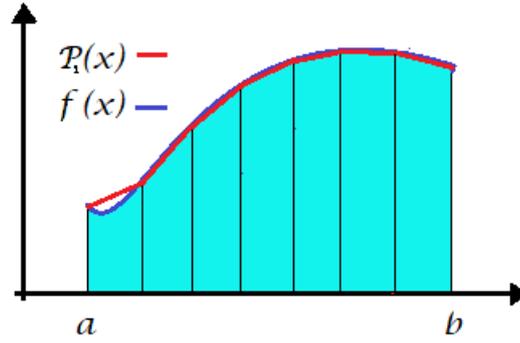


Figura 2.1.2: Método del trapecio compuesto

Para el caso de la integral

$$\int_R f dx \quad (2.1)$$

donde $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, considerando el siguiente corolario del Teorema de Fubini.

Corolario 2.1. Si $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ es un rectángulo en \mathbb{R}^n y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en \mathbb{R} entonces

$$\int_R f dx = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\hat{x}) dx_1 \right) \dots dx_2 \right) dx_n \right) \quad (2.2)$$

[15].

De acuerdo a la expresión (2.2) podemos calcular la integral (2.1) de forma iterada, si f es una función continua en R , aplicando el procedimiento del Trapecio Compuesto para cada una de las iteraciones y siendo $Pr_i = \{x_{(i,1)} = a_i, x_{(i,2)}, \dots, x_{(i,m)} = b_i\}$ una partición de $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y denotando a $h_i = \frac{b_i - a_i}{m}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Para la primera iteración tenemos

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 = \sum_{i=1}^m \frac{h_1}{2} \left(f(x_{(1,i)}, x_2, \dots, x_n) + f(x_{(1,i+1)}, x_2, \dots, x_n) \right)$$

Para la segunda iteración tenemos

$$\int_{a_2}^{b_2} \sum_{i=1}^m \frac{h_1}{2} \left(f(x_{(1,i)}, x_2, \dots, x_n) + f(x_{(1,i+1)}, x_2, \dots, x_n) \right) dx_2 =$$

$$\frac{h_1}{2} \frac{h_2}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(f(x_{(1,i)}, x_{(2,j)}, \dots, x_n) + f(x_{(1,i+1)}, x_{(2,j+1)}, \dots, x_n) \right)$$

Este procedimiento se repite para cada una de las iteraciones, la cual resulta

$$I = \frac{h_1}{2} \frac{h_2}{2} \dots \frac{h_m}{2} \sum_{j=1}^m \dots \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(f(x_{(1,i)}, x_{(2,j)}, \dots, x_{(n,i)}) + f(x_{(1,i+1)}, x_{(2,j+1)}, \dots, x_{(n,i+1)}) \right)$$

2.1.3. La regla de Simpson $\frac{1}{3}$

Una forma evidente de mejorar la aproximación de una integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

es con una mejor aproximación para el integrando $f(x)$. Esto se puede lograr con un polinomio de grado dos, $P_2(x)$.

$$f(x) \simeq P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Considerando la función $f(x)$ en el intervalo de integración $[a, b]$ y siendo $x_1 = \frac{b+a}{2}$, con los puntos $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(b, f(b))$ se construye el polinomio de Lagrange de grado dos, de esta forma el polinomio de interpolación de grado dos que pasa por dichos puntos será:

$$P_2(x) = \frac{f(a)(x-x_1)(x-b)}{(a-x_1)(a-b)} + \frac{f(x_1)(x-a)(x-b)}{(x_1-a)(x_1-b)} + \frac{f(b)(x-a)(x-x_1)}{(b-a)(b-x_1)}$$

Es sencillo calcular la integral de $P_2(x)$ en el intervalo de integración $[a, b]$, de manera que se obtiene:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_1) + f(b))$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$, como se puede ver con el autor Endre Süli en [9].

De la misma manera que el método del trapecio generalizado se puede aplicar la misma idea al método de Simpson un tercio, es decir tomar una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, donde $x_0 = a, x_n = b$, equiespaciada, es decir: $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \forall i = 1, \dots, n$. Así tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{h_1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right) \end{aligned}$$

donde $h_1 = \frac{b-a}{2n}$.

2.2. Método de integración Monte Carlo

El método Monte Carlo, es un conjunto de métodos estocásticos que utilizan variables aleatorias, bajo un modelo probabilístico.

En los métodos de integración MC nos enfocaremos y explicaremos el método Éxito-Fracaso; y Medias Muéstaes, siendo los más representativos, los cuales serán utilizados para calcular integrales definidas de varias variables, estos métodos consisten en expresar la integral en términos de la esperanza $E[X]$ ya sea con variables aleatorias continuas o discretas, variando la función de densidad de probabilidad f_X según sea el caso, usualmente se usan distribución: uniforme, exponencial y la distribución normal estándar, esta decisión depende de los límites de integración de la integral. Posteriormente aplicando la ley fuerte de los grandes números se hace inferencia estadística sobre la integral respecto al estimador:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^n \frac{X_i}{n},$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n variables independientes idénticamente distribuidas.

La ley fuerte de los grandes números dice que el estimado \hat{I} converge a la esperanza $E[X]$ casi seguramente cuando n tiende a infinito.

Para nuestro interés, entre más grande sea n en términos generales nuestra aproximación será mejor.

A continuación daremos un ejemplo para inducir el método de Éxito-Fracaso que se abordará posteriormente.

Para estimar el valor de π con el método Monte Carlo. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzamientos independientes de n papelitos a un cuadrado con un círculo inscrito, como se muestra en la figura 2.2.1, consideraremos éxito si el papelito cae dentro del círculo y fracaso si únicamente cayó dentro del cuadrado.

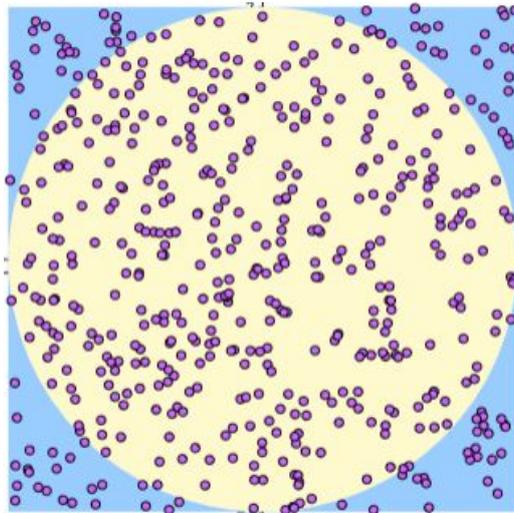


Figura 2.2.1: Cuadrado con un círculo inscrito para el cálculo de π

Una forma de estimar la proporcionalidad del área del círculo respecto al área del cuadrado viene dada por el número de éxitos entre el número de lanzamientos, de la fórmula del área de un cuadrado y un círculo, podemos despejar π y sustituyendo el estimador, se obtiene una manera de estimar a π , es decir:

$$\pi = \frac{\text{Área del cuadrado} * \text{número de éxitos}}{\text{Número de lanzamientos} * (\text{radio del círculo})^2}$$

para tener una buena aproximación de π se necesita un número de lanzamientos independientes suficientemente grande.

La idea de este sencillo experimento aleatorio se puede aplicar en la integración y es conocido como integración Monte Carlo de Éxito-Fracaso, a continuación se explicará este método.

2.2.1. Método de Éxito - Fracaso

Consideremos la integral de una dimensión definida por

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

con $F(x)$ una función acotada en $0 < F(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$.

Observemos que la integral I se encuentra descrita en el rectángulo $[a, b] \times [0, M]$ y puede ser estimada tomando una muestra de n elementos distribuida uniformemente en $[a, b] \times [0, M]$

como describiremos a continuación de acuerdo al autor Zacarias Santiago en [4]. Considerando el experimento aleatorio con dos posibles resultados 0 y 1, dado el vector aleatorio $X = (X_1, Y_1)$ distribuido uniformemente en $[a, b] \times [0, M]$ definimos la variable aleatoria:

$$X_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \leq F(X) \\ 0 & \text{si } Y > F(X) \end{cases}$$

con $P(X_0 = 1) = \frac{I}{M(b-a)}$ y $P(X_0 = 0) = 1 - \frac{I}{M(b-a)}$.

Tomando N ensayos independientes del experimento Bernoulli y definiendo la variable aleatoria X_n como el número de veces que X_0 toma el valor uno en los n experimentos Bernoulli, entonces la integral I puede ser aproximada con la siguiente expresión

$$I \simeq M(b-a) \frac{X_n}{n}$$

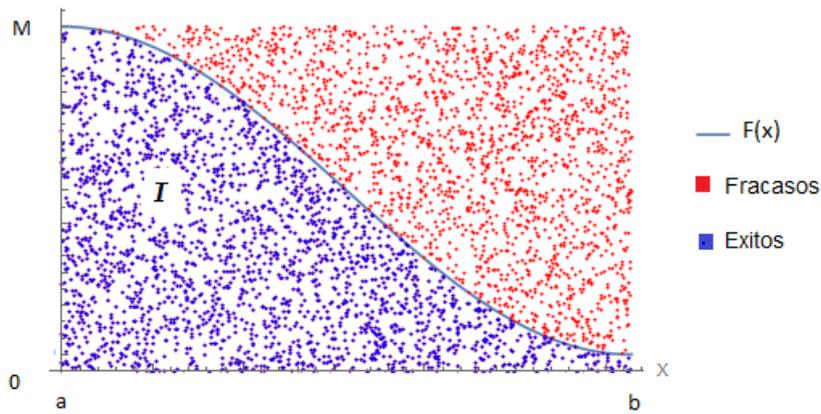


Figura 2.2.2: Representación del Método Éxito - Fracaso en una dimensión.

Ahora generalicemos esta idea para calcular una integral dimensional dada por:

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.3)$$

donde

$$\hat{x}_n \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Supondremos que el integrando $F(\hat{x}_n)$, es una función acotada:

$$0 \leq F(\hat{x}_n) \leq M.$$

Definamos a $S_1 = \{(\hat{x}_{n+1}) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \times [0, M]\}$, $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1})$ un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre S_1 donde X_i es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y X_{n+1} es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0, M]$, además denotaremos al volumen dimensional de S_1 como v es decir $v = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)(M)$.

Sea X la variable aleatoria definida por:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{n+1} \leq F(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ 0 & \text{si } X_{n+1} > F(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases}$$

con una distribución Bernoulli dada por :

$$f_X = \begin{cases} \frac{I}{v} & \text{si } X = 1 \\ 1 - \frac{I}{v} & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

donde I es la integral (2.3) y v es el volumen dimensional definido anteriormente. Ahora como la esperanza de X viene dada por :

$$\mu = E[X] = \frac{I}{v} \quad (2.4)$$

Despejando a I de la expresión tenemos:

$$I = v\mu \quad (2.5)$$

De donde tenemos que para calcular la integral (2.3) necesitamos calcular el valor de μ para esto utilizaremos los siguientes teoremas:

Teorema 2.2.1. (*Ley débil de los grandes números*) Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias mutuamente independientes (discretas o continuas), cada una con una media μ finita y varianza σ_2 , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \forall \varepsilon > 0. \quad [20]$$

Teorema 2.2.2. (*Ley fuerte de los grandes números*) Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $E[X] = \mu < \infty$, entonces

$$P\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m} = \mu\right) = 1$$

[21]

Por lo que $\bar{X}_m = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$ es un estimador consistente para μ .

Sustituyendo en la expresión (2.5) a μ por \bar{X}_m tenemos que

$$\hat{I} = v\bar{X}_m \quad (2.6)$$

es un estimador para I es decir:

$$\hat{I} \approx I$$

ahora veamos que \hat{I} es un estimador insesgado para I .

Sea m ensayos bernoulli independientes tal que $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{I}{v}\right)$, $i = 1, 2, \dots, m$ y sea X_m la variable aleatoria definida por $X_m = X_1 + X_2 + \dots + X_m$, entonces

$$\hat{I} = \frac{vX_m}{m} \quad (2.7)$$

es un estimador insesgado para I .

Aplicando las propiedades de la esperanza (ver Apéndice) tenemos:

$$E[\hat{I}] = E\left[\frac{vX_m}{m}\right]$$

$$= \frac{v}{m} E[X_m]. \quad (2.8)$$

Por definición $X_m \sim \text{Bin}\left(m, \frac{I}{v}\right)$, cuya esperanza está dada por $E[X_m] = \frac{mI}{v}$ y sustituyendo a $E[X_m]$ en expresión (2.8) tenemos

$$E[\hat{I}] = \frac{v}{m} \frac{mI}{v} = I.$$

De lo cual concluimos que:

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}_n) dx_1 \dots dx_n \simeq \frac{v X_m}{m}.$$

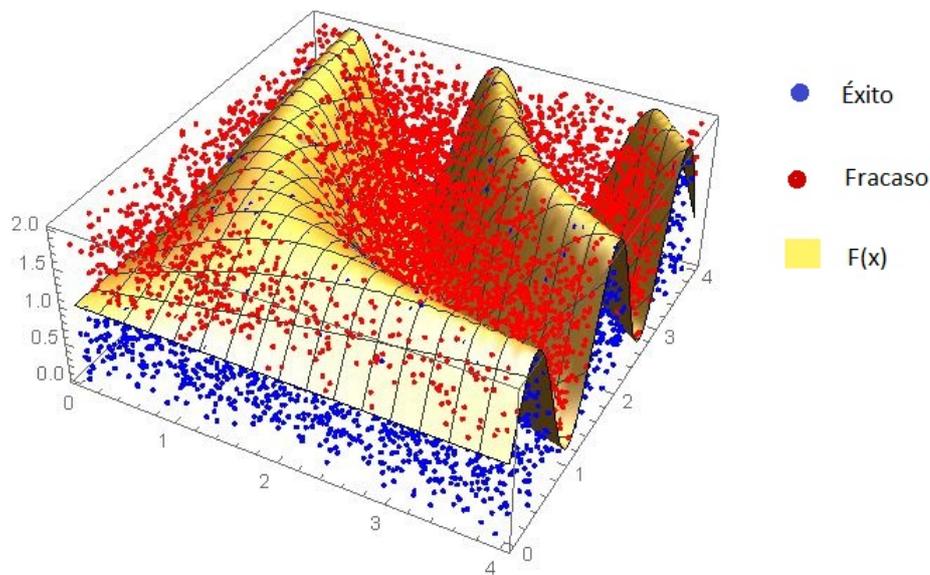


Figura 2.2.3: Representación del método Éxito-Fracaso en dos dimensiones.

Proposición 2.0.1. Sea el estimador $\hat{I} = \frac{v X_m}{m}$ de la integral I entonces la varianza de \hat{I} viene dada por:

$$\text{Var}[\hat{I}] = \frac{I(v - I)}{m} \quad (2.9)$$

Demostración:

Por definición de esperanza tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{I}] &= E[\hat{I}]^2 - (E[\hat{I}])^2 \\
&= E\left[\left(\frac{vX_m}{m}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{vX_m}{m}\right]\right)^2 \\
&= \left(\frac{v}{m}\right)^2 E[(X_m)^2] - \left(\frac{v}{m}\right)^2 (E[X_m])^2 \\
&= \left(\frac{v}{m}\right)^2 \left(m(m-1)\left(\frac{I}{v}\right)^2 + m\left(\frac{I}{v}\right)\right) - \left(\frac{v}{m}\right)^2 \left(m\frac{I}{v}\right)^2 \\
&= \left(\frac{v}{m}\right)^2 \left(m(m-1)\left(\frac{I}{v}\right)^2 + m\left(\frac{I}{v}\right) - \left(m\frac{I}{v}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{v}{m}\right)^2 \left(-m\left(\frac{I}{v}\right)^2 + m\left(\frac{I}{v}\right)\right) \\
&= \left(\frac{v}{m}\right)^2 \left(m\left(\frac{I}{v}\right)\left(1 - \frac{I}{v}\right)\right) \\
&= \left(\frac{vI}{m}\right)\left(1 - \frac{I}{v}\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\text{Var}[\hat{I}] = \frac{I(v-I)}{m}.$$

De acuerdo a la expresión (2.9) la varianza del estimador disminuye de acuerdo al tamaño de m .

Algoritmo del método Éxito-Fracaso

Denotaremos a $\{u\}^j$ como la j -ésima sucesión de números aleatorios con $n+1$ elementos distribuidos en el intervalo $(0, 1)$ y siendo u_i^j el i -ésimo elemento de la sucesión j -ésima.

1. Generar sucesiones $\{u\}^j$, $j = 1, 2, \dots, m$
2. Transformar u_i^j a x_i^j tal que $x_i^j = u_i^j(b_i - a_i) + a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$
3. Transformar u_{n+1}^j a x_{n+1}^j tal que $x_{n+1}^j = u_{n+1}^j(M)$
4. Formar $\hat{x}_j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$, $i = 1, 2, \dots, m$
5. Contar \hat{x}_j tal que $x_{n+1}^j \leq F[\hat{x}_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$
6. Calcular a I con el estimador $\hat{I} = \frac{vX_m}{m}$

2.2.2. Método de la Media Muestral

Consideremos el problema de calcular una integral dimensional dada por:

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (2.10)$$

donde

$$\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con rango en \mathbb{R}^n tal que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ respectivamente.

Por lo tanto, X tiene una distribución uniforme en

$$S_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

es decir X tiene una función de densidad uniforme dada por:

$$f_X = \begin{cases} \frac{1}{v} & \text{si } \hat{x} \in S_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $v = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ es el volumen dimensional de S_1 .

Ahora como $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que $F[X]$ es una variable aleatoria continua, así la esperanza vienen dada por

$$\mu_{F_X} := E[F[X]] = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}) f_X(\hat{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Poniendo la esperanza en termino de la integral (4).

$$\begin{aligned} \mu_{F_X} &= \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}) \frac{1}{v} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{v} \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ \mu_F &:= \frac{I}{v}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Despejando a I de la expresión (2.11) obtenemos:

$$I = v\mu_{F_X}, \tag{2.12}$$

de aquí tenemos que para estimar el valor de la integral I , basta estimar el valor de la esperanza de F es decir μ_F .

Dada $F[X_1], F[X_2], \dots, F[X_m]$ una muestra aleatoria independiente de tamaño m de la variable aleatoria $F[X]$ distribuida uniformemente en S_1 . Por la Ley Fuerte de los Grandes Números (Teorema 2.2.2) sabemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\bar{X}_m = \frac{\sum_{i=1}^m F[X_i]}{m} \right) = \mu_F$$

casi seguramente y por la Ley Débil de los Grandes Números (Teorema 2.2.1) nos garantiza que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(P \left[\left| \bar{X}_m - \mu_{F_X} \right| < \varepsilon \right] \right) = 1$$

para $0 < \varepsilon$, por lo que la media muestral \bar{X}_m es un estimador para μ_{F_X} con un m suficientemente grande.

Sustituyendo en la expresión (2.12) a μ_{F_X} por \bar{X}_m tenemos que

$$\hat{I} = v\bar{X}_m \tag{2.13}$$

es un estimador para I , es decir:

$$\hat{I} \approx I$$

ahora, veamos que \hat{I} es un estimador insesgado para I como lo expresa el autor Sosa León en [1]

$$\begin{aligned} E[\hat{I}] &= E\left[\frac{\sum_{i=0}^m F[X_i]}{m}\right] \\ &= \frac{v}{m} E\left[\sum_{i=0}^m F[X_i]\right] \\ &= \frac{v}{m} \sum_{i=0}^m E[F[X_i]] \\ &= \frac{v}{m} m \mu_{F_X} \\ &= v \mu_{F_X} = I \end{aligned}$$

y la varianza del estimador viene dada por:

$$Var[\hat{I}] = \frac{v^2 \sigma_F^2}{m} \quad (2.14)$$

donde $\sigma_{F_X}^2$ es la varianza de $F[X]$.

Por otra parte el estimador dado por

$$\hat{I}_m = \frac{v \sum_{i=1}^m Y_i}{m}$$

donde $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^n F[X_j]}{n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $F[X_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes sigue siendo un estimador insesgado para I .

$$\begin{aligned} E[\hat{I}_m] &= E\left[\frac{v}{nm} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F[X_j]\right] \\ &= \frac{v}{nm} E\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F[X_j]\right] \\ &= \frac{v}{nm} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E[F[X_j]] \\ &= \frac{v}{nm} mn E[F[X]] \\ &= \frac{v}{nm} mn \mu_{F_X} \\ &= v \mu_{F_X} = I. \end{aligned}$$

Proposición 2.0.2. Sea el estimador $\hat{I}_m = \frac{v \sum_{i=1}^m Y_i}{m}$ de la integral I y $\sigma_{F_X}^2$ la varianza de la variable aleatoria $F[X]$ entonces la varianza de \hat{I} viene dada por:

$$Var[I_m] = \frac{v^2}{mn} \sigma_{F_X}^2. \quad (2.15)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[I_m] &= \text{Var} \left[\frac{v \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F[X_j]}{mn} \right] \\
 &= \left(\frac{v}{mn} \right)^2 \text{Var} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F[X_j] \right] \\
 &= \left(\frac{v}{mn} \right)^2 \sum_{i=1}^m \text{Var} \left[\sum_{j=1}^n F[X_j] \right] \\
 &= \left(\frac{v}{mn} \right)^2 m \text{Var} \left[\sum_{j=1}^n F[X_j] \right] \\
 &= \left(\frac{v}{mn} \right)^2 mn \sigma_{F_X}^2 \\
 &= \frac{v^2}{mn} \sigma_{F_X}^2.
 \end{aligned}$$

Algoritmo Medias Muéstrales

Denotaremos a $\{u\}^j$ como la j -ésima sucesión de n realizaciones de una variable aleatoria distribuidos uniformemente en el intervalo $(0, 1)$ y siendo u_i^j el i -ésimo elemento de la sucesión j -ésima.

1. Generar sucesiones $\{u\}^j$, $j = 1, 2, \dots, m$.
2. Transformar la sucesión $\{u\}^j$ a $\{x\}^j$ tal que $x_i^j = u_i^j(b_i - a_i) + a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Formar $\hat{x}_j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.
4. Calcular a I con $\frac{\sum_{j=0}^m F[\hat{x}_j]}{m}$.

2.2.3. Integrales impropias

Para estimar el valor de las integrales impropias con las siguientes formas

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F[x] dx \quad (2.16)$$

y

$$I_a = \int_a^{\infty} F[x] dx \quad (2.17)$$

por integración Monte Carlo basta expresarlas en términos de la esperanza matemática, empezaremos con la integral (2.16).

Sea la variable aleatoria

$$Y = \frac{F[X]}{G[X]} \quad (2.18)$$

donde $G[X]$ es una función de densidad continua tal que $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, por definición de esperanza tenemos:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[x]}{G[x]} G[x] dx \quad (2.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F[x] dx$$

de lo cual tenemos que la esperanza de Y coincide con la integral (2.16), es decir, $E[Y] = I$.

Para la integral (2.17) consideraremos la función de densidad de la forma:

$$G[x] = \begin{cases} G_1[x] & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y aplicando nuevamente la definición de esperanza tenemos:

$$E[Y] = \int_a^{\infty} \frac{F[x]}{G[x]} G[x] dx = I_a. \quad (2.20)$$

Sea $\frac{F[X_1]}{G[X_1]}, \frac{F[X_2]}{G[X_2]}, \dots, \frac{F[X_n]}{G[X_n]}$ variables aleatorias independientes cada una con función de densidad G , usando la la Ley Débil y Ley Fuerte de los Grandes Números (Teorema 2.2.1 y 2.2.2) sabemos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F[X_i]}{G[X_i]} \quad (2.21)$$

es un estimador para $E[Y]$ y con las condiciones anteriores es un estimador insesgado para la integral (2.16) y (2.17).

Bajo los requerimientos de las expresiones (2.19) y (2.20) la función de densidad normal y exponencial nos sirve para calcular las integrales I y I_a respectivamente.

Algoritmo para integrales impropias

Para la integral $\int_a^{\infty} F[x] dx$.

1. Generar sucesiones $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$.
2. Transformar la sucesión $\{u_i\}$ a $\{x_i\}$ tal que $x_i = \frac{1}{\lambda} \ln(u_i) + a$, $i = 1, 2, \dots, m$.
3. Calcular a I con el estimador

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F[x_i]}{G[x_i]}.$$

Para la integral $\int_{-\infty}^{\infty} F[x] dx$.

1. Generar sucesiones $\{u_i\}^j$, $i = 1, 2, \dots, k$. : $j = 1, 2, \dots, m$.
2. Transformar la sucesión $\{u_i\}^j$ a

$$z_j = \frac{\sum_1^k u_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

3. Calcular a I con el estimador

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F[z_i]}{G[z_i]}.$$

2.2.4. Integración Monte Carlo por cambio de variable.

Este método consiste en expresar la integral

$$\int_a^b F(x)dx \quad (2.22)$$

en términos de la esperanza en los límites de integración cero y uno, haciendo un cambio de variable respectivo, basados en el siguiente teorema .

Teorema 2.2.3. *Supongamos que g tiene una derivada continua g' en un intervalo abierto I . Sea J el conjunto de valores que toma g en I y supongamos que f es continua en J , entonces para cada x y cada c en I , tenemos*

$$\int_c^x f(g(t))g' dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du. \quad (2.23)$$

La demostración puede ser consultada en [7]

De acuerdo con este teorema para transformar la integral (2.22) a

$$\int_0^1 F(G(t))G'(t)dt \quad (2.24)$$

basta buscar una función G que tenga derivada continua G' en un intervalo abierto I con $G^{-1}(b) = 1$ y $G^{-1}(a) = 0$, donde J es el conjunto de valores que toma G en I , tal que f es continua en J .

Siendo Y_0 la variable aleatoria dada por $Y_0 = H(Y) = F[G(Y)]G'(Y)$, donde la función de densidad viene dada por:

$$f_{Y_0}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tenemos que la esperanza de Y_0 coincide con la integral (2.24) y por lo tanto con la integral (2.22) es decir.

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)dx &= \int_0^1 F[G(y)]G'(y)dy \\ &= \int_0^1 H(y)f_Y dy = E[Y_0] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sea $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, aplicando la Ley Fuerte de los Grandes Números (Teorema 2.2.2) sabemos que $\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$; converge a I casi seguramente, para una n suficientemente grande.

Por otro lado, observemos que cualquier integral sobre el intervalo $[a, b]$ se puede transformar a una integral sobre el intervalo $[0, 1]$. [2]

Haciendo un cambio de variable para la integral

$$I = \int_a^b F(x)dx$$

sea la variable $y = \frac{x-a}{b-a}$ de donde tenemos $G(y) = y(b-a) + a$ para $y \in [0, 1]$, $dx = (b-a)dy$ y $G'(y) = (b-a)$ de la expresión (2.24) y (2.25) obtenemos.

$$I = \int_0^1 F(G(y))(b-a)dy = E[Y_0]$$

Ahora considerando la integral dada por:

$$I = \int_a^\infty F(x)dx$$

con $a > 0$, haciendo el siguiente cambio de variable $y = 1 - \frac{2a}{x+a}$, tenemos $G(y) = -a - \frac{2a}{y-1}$, $dx = \frac{2a}{(y-1)^2}dy$ de lo cual se obtiene

$$I = \int_0^1 F(G(y)) \frac{2a}{(y-1)^2} dy = E[Y_0]$$

Si tenemos una integral de la forma:

$$I = \int_0^\infty F(x)dx$$

haciendo el siguiente cambio de variable $y = 1 - \frac{1}{x+1}$, tenemos $G(y) = -1 - \frac{1}{y-1}$ y $dx = \frac{1}{(y-1)^2}dy$ tenemos

$$I = \int_0^1 F(G(y)) \frac{1}{(y-1)^2} dy = E[Y_0] \quad (2.26)$$

Aplicando un cambio de variable a la integral:

$$I = \int_{-\infty}^\infty F(x)dx = \int_{-\infty}^0 F(x)dx + \int_0^\infty F(x)dx \quad (2.27)$$

Para

$$I = \int_{-\infty}^0 F(x)dx$$

tenemos el siguiente cambio de variable $y = \frac{1}{x+1}$, tenemos $G(y) = -1 + \frac{1}{y}$ y $dx = (y-1)^2 dy$ tenemos

$$I = \int_{-\infty}^0 F(x)dx = \int_0^1 F(G(y))(y-1)^2 dy = E[Y_0]. \quad (2.28)$$

utilizando la expresión (2.27), (2.26) y (2.28) tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty F(x)dx \\ &= \int_0^1 F\left(-1 + \frac{1}{y}\right) (y-1)^2 dy + \int_0^1 F\left(-1 - \frac{1}{y-1}\right) \frac{1}{(y-1)^2} dy = E[Y_0] \end{aligned}$$

2.2.5. Integrales múltiples

Considerando la integral múltiple de la forma:

$$I = \int_{A_n} \int_{A_{n-1}} \dots \int_{A_1} f(\hat{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (2.29)$$

donde $A_i \subseteq \mathbb{R}$, $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Para calcular la integral (2.29) consideremos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4. Sean U y V abiertos de \mathbb{R}^n y $T : U \rightarrow V$ una biyección tal que T y T^{-1} son diferenciables. Denotemos por λ la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y sea

$$J_{T(x)} = \det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

el jacobiano de T en el punto $x \in U$.

Para cada boreliano B de U se verifica

$$\lambda(T(B)) = \int_B |J_{T(x)}| d\lambda(x).$$

Para cada función Borel medible $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica que

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ T)(x) |J_{T(x)}| d\lambda(x) \quad (2.30)$$

en el sentido de que, si una de esas integrales existe, entonces ambas existen y coinciden. [18]

De acuerdo al teorema (2.2.4) y utilizando la expresión (2.30), tenemos que la integral (2.29) la podemos expresar de la siguiente manera:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(g_1, g_2, \dots, g_n) \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

donde $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $x_1 = g_1(\hat{y})$, $x_2 = g_2(\hat{y})$, \dots , $x_n = g_n(\hat{y})$ y

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Esta integral transformada la podemos escribir en términos de la esperanza de la siguiente variable aleatoria continua $Y : \mathbb{R}_{(0,1)}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$Y = f(g_1, g_2, \dots, g_n) \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right|$$

donde $\mathbb{R}_{(0,1)}^n = [0, 1] \times [0, 1] \dots \times [0, 1]$ y Siendo f_Y la función de Y densidad dada por:

$$f_Y = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{y} \in \mathbb{R}_{(0,1)}^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de lo cual tenemos:

$$E[Y] = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 Y(\hat{y}) f_Y(\hat{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

de esta manera obtenemos:

$$I = E[Y]$$

Siendo Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, aplicando la Ley Fuerte de los Grandes Números (Teorema 2.2.2) sabemos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$$

converge a I casi seguramente, para una n suficientemente grande.

Para integrales múltiples dadas por:

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(\hat{x}_n) dx_1 \dots dx_n$$

Para nuestros fines vamos a utilizar la siguiente transformación:

$$g_i(\hat{y}) = (b_i - a_i)y_i + a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $y_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Tenemos que nuestro jacobiano viene dado por :

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} (b_1 - a_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (b_2 - a_2) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (b_n - a_n) \end{vmatrix} = \prod_1^n (b_i - a_i)$$

Por lo que nuestra integral viene dada por :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n (b_i - a_i) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

Escribiendo la integral en términos de la esperanza de la variable aleatoria uniformemente continua:

$$Y = f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n (b_i - a_i),$$

con función de densidad f_Y dada por :

$$f_Y = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{y} \in \mathbb{R}_{(0,1)}^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n (b_i - a_i) f_Y dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

Siendo Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes, aplicando los teoremas (2.2.2) sabemos que $\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$; converge a I casi seguramente para una n suficientemente grande.

Aplicando el mismo procedimiento para la integral dada por

$$I = \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{\infty} \dots \int_{a_1}^{\infty} f(\hat{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad a_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizaremos la siguiente transformación

$$g_i(\hat{y}) = -a_i - \frac{2a_i}{y_i - 1} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.31)$$

donde $y_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Entonces el determinante viene dado por

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{2a_1}{(y_1 - 1)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2a_2}{(y_2 - 1)^2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2a_n}{(y_n - 1)^2} \end{vmatrix} = \prod_1^n \frac{2a_i}{(y_i - 1)^2}.$$

Por lo que la integral viene dada por:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n \frac{2a_i}{(y_i - 1)^2} dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Escribiendo la integral en términos de la esperanza de la variable aleatoria Y uniformemente continua:

$$Y = f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n \frac{2a_i}{(y_i - 1)^2}$$

con función de densidad f_Y dada por:

$$f_Y = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \mathbb{R}_{(0,1)}^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tenemos

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(g(g_1, g_2, \dots, g_n)) \prod_1^n \frac{2a_i}{(y_i - 1)^2} f_Y dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Siendo Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes, aplicando el teorema (2.2.2) sabemos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n} \quad (2.32)$$

converge a I casi seguramente, para un tamaño de muestra n suficientemente grande.

Ejemplo 2.1. *Calcular la siguiente integral por MC*

$$\int_1^\infty \int_3^\infty 2xe^{(1-x^2)y^2} dx dy \simeq 1,99366 \times 10^{-6} \quad (2.33)$$

Aplicando la transformación (2.31) a la integral (2.33) tenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 2 \left(-3 - \frac{6}{x-1} \right) e^{\left(1 - \left(-3 - \frac{6}{x-1} \right)^2 \right) \left(-1 - \frac{2}{y-1} \right)^2} \frac{12}{(x-1)^2 (y-1)^2} dx dy \simeq 1,99366 \times 10^{-6}$$

Utilizando el estimador (2.32) con n igual a 1000 000, tenemos que el valor de la integral estimada es

$$1,96264 \times 10^{-6}.$$

2.3. Error

La finalidad de utilizar un método de integración numérica, es abordar integrales que no tienen solución analítica o en su defecto, que su solución es muy complicada, cuando se decide utilizar un método de integración numérica lo que se obtiene como resultado es una aproximación al valor real de la integral; siendo conscientes nos preguntamos, ¿el valor obtenido es aceptable para nuestros fines?, por consiguiente ¿Qué error tiene la aproximación?, estas preguntas son de vital interés para nosotros, sin embargo la segunda pregunta no se puede contestar con certeza si no se sabe el valor real de la integral, para dar una respuesta a estas preguntas, nos cuestionamos: ¿Hay una manera de estimar el error? la respuesta es si, sin embargo, no en todos los métodos numéricos se puede hacer eso, como son los métodos de integración por cuadratura,

en cambio en los métodos MC, existe una manera de poder estimar este error condicionada a ciertos lineamientos.

Para fines experimentales en los métodos de integración por cuadratura se define el error absoluto para validar el método y poder analizar si el método realmente converge a la solución. A continuación se define el error real y una manera de estimar el error en algunos métodos de integración MC.

En los métodos de cuadratura se define el error absoluto como el valor absoluto de la diferencia del valor de la integral I y el valor aproximado I_n es decir;

$$\varepsilon = |I - I_n|.$$

El cual es fácilmente reproducible en un experimento, en cambio en los métodos de integración Monte Carlo, bajo esta definición de error, cada vez que repitamos el experimento obtendremos un error diferente, esto parece evidente debido a la naturaleza del método por utilizar variables aleatorias.

Para integración n-dimensionales estandarizadas con el método de integración MC, que utilizan el estimador

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n F[X_i] \quad (2.34)$$

se tiene que su error estándar viene dada por :

$$\sigma_{\hat{I}} = \frac{\sigma_{F_X}}{\sqrt{n}} \quad (2.35)$$

considerando como la raíz del error cuadrático medio del estimador (2.34) de aquí, se dice que el error converge a $n^{-1/2}$ y el cual es independiente de la dimensión.

Siendo σ_{F_X} la raíz cuadrada la varianza de $F[X]$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{I}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n F(x_i) - E \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n F(x_i) \right) \right)^2 dx_1, dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\sigma_{F_X}^2}{n} \end{aligned}$$

este resultado lo puede ver con el autor Haraid en [13].

Por el método de Medias Muéstrales podemos estimar el error con el siguiente teorema: Siendo I_n el estimador insesgado para la integral I , σ representa la desviación estándar, Θ es la función de distribución normal estándar, v es el volumen dimensional.

Teorema 2.3.1. *Sea $\varepsilon > 0$. Si $P[|I_n - I| \leq \varepsilon] = 1 - \alpha$, para algún $\alpha \in (0, 1)$, entonces*

$$\varepsilon \simeq \frac{\sigma v \Theta^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{n}} \quad (2.36)$$

para n suficientemente grande.[1]

El teorema (2.3.1) nos da una aproximación para el error el cual depende de la varianza σ^2 , el tamaño de la muestra n y del nivel de confianza $1 - \alpha$. Entre más grande es el tamaño de la muestra, mejor será la precisión de los resultados. Es importante observar también el papel que juega el nivel de confianza. Como Θ^{-1} es una función creciente, entonces entre más grande sea $1 - \alpha$ mayor será $\Theta^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, esto significa que si queremos los resultados con un nivel de confianza muy alto para obtener cierta precisión, debemos aumentar el tamaño de la muestra.

Nombraremos a ε como el error estimado, este error esta en términos de la desviación estándar como se puede ver en la ecuación (2.36), que por lo general desconocemos, esto presenta un problema inmediato, lo cual es solucionado por su estimador insesgado conocido:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(F_X(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{F_X(x_i)}{n} \right)^2}.$$

Notemos que ahora ε depende de los representantes \bar{x}_i de la muestra, el tamaño de muestra n , además de α . Es claro que a nosotros nos gustaría que el error fuese cero, sin embargo, esto no se puede evitar, por ello, al menos nos gustaría garantizar que la probabilidad de que nuestro error estuviera dentro de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ fuera uno, por lo que nos conviene elegir un α pequeño y un tamaño de muestra suficientemente grande.

Para el método de integración MC Éxito-Fracaso tenemos que nuestro valor estimado tiene la misma forma del error estimado por el método de integración MC media muestral, sin embargo su estimador para la desviación estándar vienen dado por :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{Exitos}{n} \left(1 - \frac{Exitos}{n} \right)}.$$

Como hemos mencionado antes, cada vez que repetimos nuestro experimento, aunque se fije el nivel de significancia y nuestro tamaño de muestra n tendremos resultados diferentes, es decir, tendremos errores reales diferentes y errores estimados diferentes, nuestra finalidad es que nuestro error cometido fuera el mínimo, por ello nos gustaría escoger el experimento que tuviera menos error real, si escogiéramos la aproximación que tuviera el menor error estimado no nos garantizaría que fuera la aproximación que tuviera el mínimo error real de los resultados obtenidos.

El teorema (2.3.1) nos permite hacer un intervalo para el error de la aproximación de la siguiente manera.

Sea ($\varepsilon_R = I - I_n$) el error real, de acuerdo al teorema (2.3.1) tenemos que $-\varepsilon \leq I - I_n \leq \varepsilon$ es decir:

$$\varepsilon_R \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

con probabilidad $1 - \alpha$ para algún $\alpha \in (0, 1)$ y un n suficientemente grande.

De la misma manera tenemos $I_n - \varepsilon \leq I \leq I_n + \varepsilon$ es decir:

$$I \in [I_n - \varepsilon, I_n + \varepsilon] \tag{2.37}$$

con probabilidad $1 - \alpha$ para algún $\alpha \in (0, 1)$ y un n suficientemente grande.

2.3.1. Técnicas de reducción de varianza

Las técnicas de reducción de varianza se utilizan para disminuir el error de la aproximación, permitiendo tener una mejor aproximación con un tamaño de muestra n más pequeño, existen diferentes técnicas para la disminución de la varianza, sin embargo, solo mencionaremos la de variable antitética.

Variabes Antitéticas

Esta técnica fue introducida por Hammersley y Morton (1956), que aprovecha la probabilidad de correlación entre las variables aleatorias. Siendo X_1 y X_1^* , un par de variables aleatorias reales, es llamado un par antitético si X_1 , y X_1^* tienen la misma distribución y están negativamente correlacionadas, la afirmación se basa en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. (*Estimador antitético*). Sea X una variable aleatoria, N un número par y sea $(X_1, X_1^*), \dots, (X_{N/2}, X_{N/2}^*)$ pares de variables aleatorias antitéticas, donde cada X_k y X_k^* está distribuida como X . El estimador antitético:

$$l = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2} (X_k + X_k^*).$$

Es un estimador insesgado de $l = E[X]$, con varianza,

$$\text{Var}[l] = \frac{\text{Var}[X]}{N} (1 + p_{XX^*})$$

donde p_{XX^*} es el coeficiente de correlación entre X y X^* .

La demostración de este teorema se puede ver con el autor Santana Anaya en [14]. Esto nos dice que la varianza es reducida entre más grande es la correlación negativa

Teorema 2.3.3. Sea F una función monótona. Si U_1, \dots, U_m , son i.i.d con distribución $U(0, 1)$, se verifica $p[F(U_1, \dots, U_m), F(1 - U_1, \dots, 1 - U_m)] \leq 0$. [17]

Si la variable aleatoria $X = F[U]$ es una función monótona con distribución $U[0, 1]$ tenemos por el teorema 2.3.3 que las variables aleatorias definidas por $X_i = F(U)$ y $X_i^* = F(1 - U)$, $i = 1, 2, \dots, n$ con U i.i.d se tiene que $p_{X_1, X_1^*} \leq 0$ y ahora utilizando el estimador del 2.0.2 tenemos que la integral

$$I = \int_0^1 F[x] dx$$

la podemos escribir de la siguiente forma

$$I = E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n/2} (X_k + X_k^*).$$

Capítulo 3

Resultados

3.1. Comparación entre los métodos numéricos y estocásticos

El objetivo de esta sección consiste en comparar los métodos numéricos contra los métodos estocásticos, se utilizaron los métodos de Trapecio y Simpson $\frac{1}{3}$ contra los métodos de integración MC: Éxito-Fracaso, y Media Muestral. Se usaron integrales de una, dos y tres variables, denotaremos en los métodos numéricos a n como el número de subintervalos que se va a dividir el intervalo, mientras que para los métodos de integración MC, n denota el tamaño de la muestra de la población de interés.

Para analizar la convergencia usamos el tiempo de simulación, veremos que, de los métodos numéricos para un n se obtiene un valor que puede converger al valor que se busca, sin embargo, para los métodos MC esto no sucede, el valor puede aun no converger, en los ejemplos se muestra que el método de Monte Carlo no es recomendable para integrales de una variable a diferencia de los métodos numéricos, para integrales multivariadas los métodos numéricos quedan en desventaja con respecto al método de Monte Carlo. Para hacer la comparación de convergencia en los métodos MC se realizó el experimento 30 veces con un n fijo y tomando la media muestral como el representante de este experimento.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos, para fines prácticos, se consideran tres cifras significativas.

Ejemplo 3.1. *Cálculo de la siguiente integral para hacer la comparación entre los métodos MC y métodos numéricos.*

$$\int_1^4 \frac{x^2}{3} dx = 7$$

Resultados:

Solución Numérica					
Mét. Trapecio			Mét. Simpson un tercio		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
100	0.	7.000	100	0.	7.000

Tabla 3.1.1: Cálculo de la integral usando el Método de Trapecio y Simpson $\frac{1}{3}$

Solución Numérica por MC					
MC Éxito-Fracaso			MC Medias Muestrales		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
1000	1.906250	6.9488	1000	1.437500	6.96598
10000	18.8125	6.98915	10000	14.20012	6.99981

Tabla 3.1.2: Cálculo de la integral usando MC Éxito-Fracaso y Media muestral.

En los métodos numéricos, el tiempo de simulación de las integrales de una variable, no rebasaban un segundo, en cambio, en los métodos de Monte Carlo, el tiempo es aproximadamente de 20 segundos, para obtener una simulación aproximadamente igual a la de los métodos numéricos, como vemos en las tablas anteriores.

Ejemplo 3.2. *Considere la siguiente integral:*

$$\int_1^4 \int_2^7 \frac{x^2 y}{3} dx dy = 1675/6 \simeq 279,167$$

Resultados:

Solución Numérica					
Mét. Trapecio			Mét. Simpson un tercio		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
100	0.140625	279.189	100	.265625	279.172

Tabla 3.1.3: Calculo de la integral usando el Método de Trapecio y Simpson $\frac{1}{3}$.

Solución Numérica por MC					
MC Éxito-Fracaso			MC Medias Muestrales		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
1000	2.671875	277.013	1000	2.296875	277.614
10000	26.343750	279.944	10000	23.046875	278.623
100000	265.765629	279.604	100000	229.031250	279.249
200000	539.5625	279.224	200000	453.328125	279.181

Tabla 3.1.4: Calculo de la integral usando MC Éxito-Fracaso y Media muestral.

En los métodos numéricos, el tiempo de simulación de las integrales de dos variable, no rebasaban un segundo, en cambio, en los métodos de Monte Carlo, el tiempo es aproximadamente de 9 minutos, para obtener una simulación aproximadamente igual a la de los métodos numéricos, como vemos en las tablas anteriores.

Ejemplo 3.3. *Considere la siguiente integral:*

$$\int_1^4 \int_1^4 \int_3^5 x^2 y^2 z dx dy dz = 5145$$

Resultados:

Solución Numérica					
Mét. Trapecio			Mét. Simpson un tercio		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
50	2.031250	5148.53	50	4.015625	5146.002
100	17.531250	5145.88	100	33.765625	5145.25

Tabla 3.1.5: Cálculo de la integral usando el Método de Trapecio y Simpson $\frac{1}{3}$.

Solución Numérica por MC					
MC Éxito-Fracaso			MC Medias Muestrales		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
1000	4.140625	5250.24	1000	3.406250	5169.62
10000	37.296875	5147.71	10000	32.093750	5135.43
100000	355.68750	5148.07	100000	316.703125	5147.34
500000	1994.31250	5144.9	500000	1665.156250	5145.53

Tabla 3.1.6: Cálculo de la integral usando MC Éxito-Fracaso y Media Muestral.

Ejemplo 3.4. Considere la siguiente integral:

$$\int_1^4 \int_1^4 \int_3^5 \int_3^5 x^y z e^w = 625806$$

Resultados:

Solución Numérica		
Método del Trapecio		
n	Tiempo de simulación	Aproximación
10	.84	686583
20	15.75	640895
30	90.5	632504
35	178.73	630725
37	211.45	630208
40	311.7345	629572

Tabla 3.1.7: Cálculo de la integral usando el Método de Trapecio.

Solución Numérica por MC					
MC Éxito-Fracaso			MC Medias Muestrales		
n	Tiempo de simulación	Aproximación	n	Tiempo de simulación	Aproximación
10000	43.28	623940	10000	45.81	623791
20000	89.5937	624098	20000	93.17	625520
30000	113.15	625303	30000	139.59	626000
40000	171.53	625762	40000	192.75	625861

Tabla 3.1.8: Cálculo de la integral usando MC Éxito-Fracaso y Media Muestral.

3.1.1. Error estimado y error real

Se aplicaron los métodos de integración MC: Éxito-Fracaso, y Media Muestral a integrales de cuatro variables, comparando el error estimado y el error real, con la finalidad de ver el comportamiento. El error estimado se calculó de acuerdo con la expresión (3.36) con un nivel de significancia de $\alpha = 0,02$, variando el tamaño de muestra n .

$$\int_1^3 \int_4^7 \int_5^1 \int_1^5 (x^2 + yzw) \, dx dy dz dw = 223 \quad (3.1)$$

Sol. Analítica	Solución Numérica por MC			
	MC Éxito-Fracaso		MC Medias Muestrales	
	n	M	n	M
223	100000	224.073	100000	223.591
	200000	223.626	200000	222.692
	300000	222.579	300000	222.824
	400000	222.489	400000	222.87
	500000	223.132	500000	223.06
	600000	222.998	600000	223.116
	700000	222.753	700000	223.077
	800000	222.909	800000	222.942
	900000	223.163	900000	222.953
	1000000	222.975	1000000	222.949

Tabla 3.1.9: Valores obtenidos por integración MC para la integral 3.1

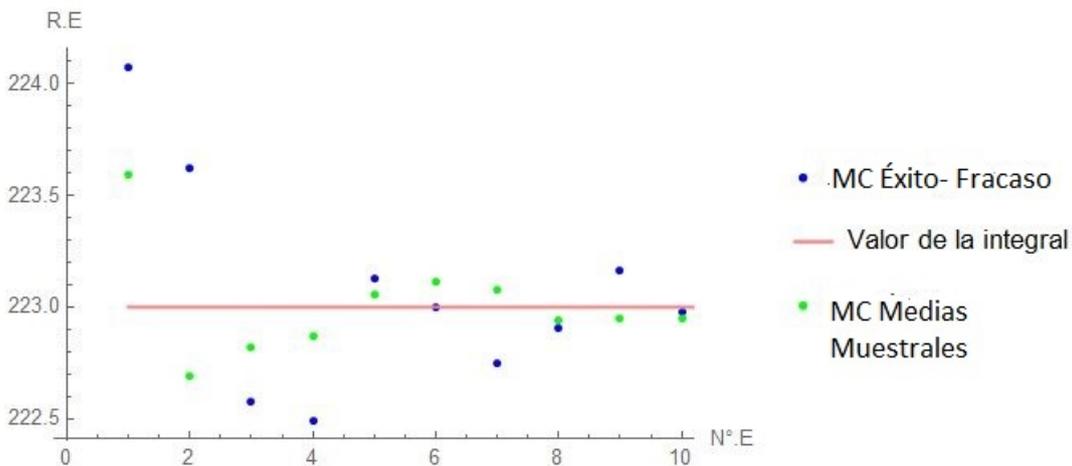


Figura 3.1.1: Valores obtenidos en los experimentos por integración MC

En la Figura 3.1.1 se puede apreciar la convergencia de los métodos MC: Éxito-Fracaso y Media muestral cuando crece el número de muestra para cada experimento bajo los estimadores (2.7) y (2.13).

Error			
MC Éxito-Fracaso		MC Medias Muéstrales	
E. Estimado	E. Real	E. Estimado	E. Real
2.57161	1.07336	6.1729	0.590788
1.81782	0.62624	4.53741	0.307878
1.48313	0.42072	3.81176	0.176144
1.28434	0.51088	3.31844	0.130211
1.14929	0.131648	2.94095	0.0604972
1.04905	0.00212	2.61509	0.115513
0.971057	0.247497	2.4424	0.0767074
0.908444	0.09136	2.39644	0.0580256
0.856646	0.16256	2.26318	0.0473099
0.812576	0.024568	2.1484	0.0512916

Tabla 3.1.10: Errores obtenidos por integración MC para la integral 3.1

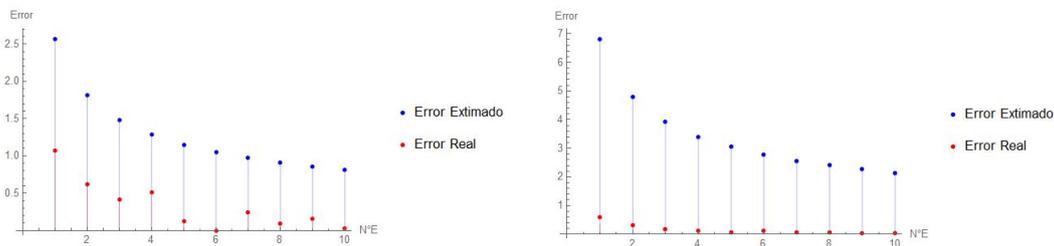


Figura 3.1.2: Error real y error estimado por el método Éxito-Fracaso y Media Muéstral respectivamente.

En la figura 3.1.2 se observa claramente la convergencia del error real y el error estimado de los métodos de integración MC: Éxito-Fracaso y Medias Muéstrales, de acuerdo al teorema (2.3.1) con un n suficientemente grande el error real es menor o igual al error estimado con una probabilidad $1 - \alpha$, en nuestro caso con una probabilidad de 0.98 y sus tamaños de muestra n respectivos de acuerdo a la tabla 3.1.9.

3.1.2. Cálculo del intervalo estimado de la solución de la integral

Como hemos mencionado anteriormente si tenemos una aproximaciones de la integral I podemos crear un intervalo de confianza a un nivel de significancia dado, sin embargo no siempre este intervalo contiene al valor de la integral I , es decir si tenemos un nivel de significancia de 0.05 tendremos que en términos porcentuales que de m experimentos en promedio el 5% de estos m experimentos no se encuentran dentro del intervalo de confianza. Con la finalidad de eliminar las aproximaciones que tienen mayor probabilidad de que su error real este fuera de nuestro error estimado, consideremos el siguiente experimento:

Dadas las aproximaciones I_1, \dots, I_m independientes para la integral I , con un tamaño de muestra n fijo con sus errores estimados de acuerdo a la expresión (2.35), sea ε_{max} el máximo de los errores estimados. Consideremos el experimento aleatorio en el que, dado el intervalo $[I_1 - \varepsilon_{max}, I_1 + \varepsilon_{max}]$ se considera como éxito si $I_j, j = 2, \dots, m$ esta dentro de intervalo con probabilidad $(1 - \alpha)$ y fracaso si esta fuera del intervalo con probabilidad de α y sea X el número de éxito de los $m - 1$ posibles resultados, este experimento se repetirá para cada uno de los I_i , eliminando a los I_i que tengan el mínimo número de éxitos, ahora con los I_i se volverá aplicar

todo el procedimiento hasta alcanzar una igualdad en el número de éxitos. Este procedimiento nos da una manera de construir un intervalo donde probablemente este contenido nuestro valor I

Es evidente que el valor I_m de la media muestral de los $I_i, i = 1, 2, \dots, m$ elegidos se encuentra contenido en $\bigcap_{i=1}^m [I_i - \varepsilon_{max}, I_i + \varepsilon_{max}] = [a, b]$ esto quiere decir que solo puede cometer un error máximo de $\varepsilon_m = \max\{I_m - a, b - I_m\}$.

Se realizó un experimento el cual consiste en realizar una integral de dos variables por el método de Monte Carlo: Éxito-Fracaso y Medias Muéstrales, repitiendo este procedimiento 50 veces, con una muestra de 1000 elementos aleatorios, para analizar el error estimado y el error real, se aplicó un filtro, para eliminar los valores que estuvieran fuera del error estimado, con la finalidad de proponer un intervalo donde probablemente esté la solución. El resultado fue el siguiente.

La integral a calcular es:

$$\int_1^{\pi} \int_1^{1.5} \frac{y}{x} dx dy = 1,79816 \quad (3.2)$$

Los resultados obtenidos son:

	Error Estimado MC Medias Muéstrales				
0.0289505	0.0297662	0.0292	0.0288713	0.0302275	0.0316458
0.0315979	0.0271853	0.0302187	0.0297176	0.0301012	0.0297091
0.0292171	0.029078	0.0307723	0.0325864	0.0296818	0.0294356
0.029992	0.0316816	0.0297758	0.0290439	0.0294928	0.0284582
0.028496	0.0289964	0.0304002	0.0312661	0.0296915	0.0313393
0.0292357	0.0302388	0.0299106	0.0284387	0.0296039	0.0289179
0.0300067	0.0308815	0.0293666	0.0293179	0.0310815	0.0307542
0.0305684	0.0289235	0.0286078	0.0314038	0.0305217	0.0289366
0.0288754	0.0298371				

Tabla 3.1.11: Error estimado para la integral (3.2).

	Error Real				
0.0294777	0.0207985	0.0256999	0.0275992	0.0405225	0.0213468
0.0380725	0.00267284	0.014149	0.018582	0.00831778	0.00184151
0.0318584	0.0113005	0.0190957	0.000559771	0.0320597	0.036021
0.0197495	0.0286665	0.00198492	0.0119595	0.00410008	0.0144846
0.00536919	0.00305573	0.0271999	0.00165284	0.0213511	0.0226095
0.0222652	0.0178985	0.0351946	0.00881972	0.00596871	0.00416611
0.0189526	0.018511	0.0220435	0.0279589	0.0245648	0.0223111
0.0232381	0.0117426	0.0363303	0.0132068	0.0287034	0.00483526
0.0132368	0.0235702				

Tabla 3.1.12: Error real de la integral(3.2).

Errores Reales Seleccionados				
0.00267284	0.014149	0.00831778	0.00184151	0.0113005
0.0190957	0.000559771	0.0197495	0.00198492	0.0119595
0.00410008	0.00536919	0.00305573	0.00165284	0.0226095
0.0222652	0.00596871	0.00416611	0.0189526	0.018511
0.0245648	0.0223111	0.0132068	0.00483526	0.0132368

Tabla 3.1.13: Errores seleccionados de la integral(3.2).

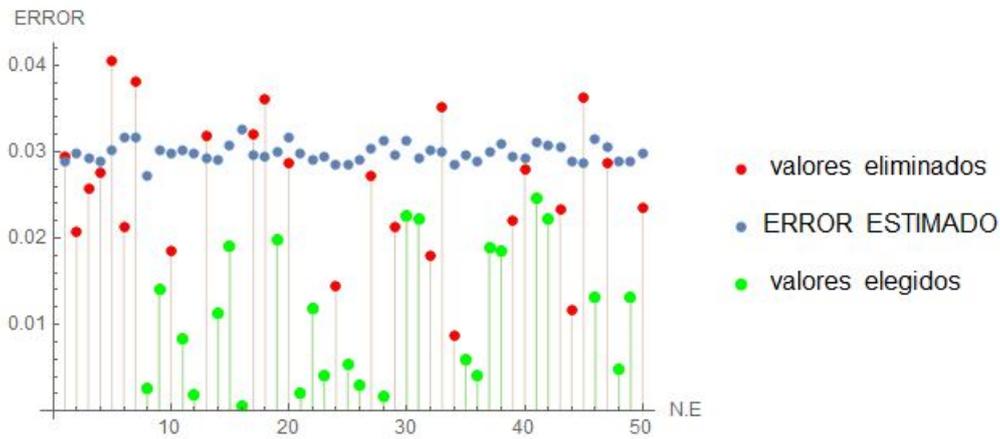


Figura 3.1.3: Gráfica de errores

Donde

I es el valor de la integral.

I_m es la media aritmética de las aproximaciones elegidas.

ε_{max} es el error máximo estimado de las 50 aproximaciones de la integral.

ε_m es el error estimado del intervalo propuesto de las aproximaciones elegidas, de manera numérica.

I=1.79816	Resultados				
Intervalo generado (1.78331, 1.82011)	I_m 1.80137	ε_m 0.01874	ε_{max} 0.0325864	Error Real 0.00321	Núm. Val. elegidos 25

Tabla 3.1.14: Errores finales

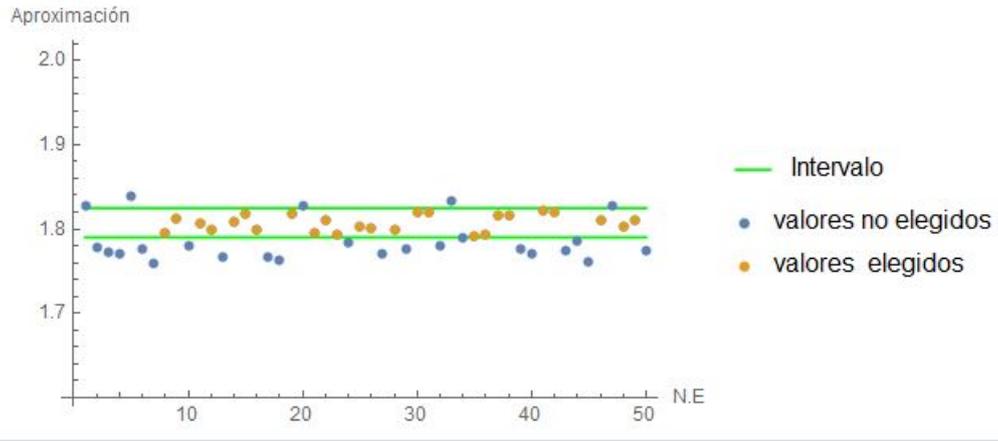


Figura 3.1.4: Gráfica de valores elegidos- eliminados.

Ahora aplicando el método de Éxito-Fracaso para el calcular la integral (3.2) tenemos las siguiente tablas de los errores obtenidos.

	Error Estimado MC Éxito-Fracaso				
0.159242	0.159568	0.159131	0.159155	0.159262,	0.158892,
0.159497	0.159336	0.159242	0.1594	0.159262	0.159131
0.158704	0.159477	0.158921	0.159465	0.159262	0.158862
0.158492	0.158801	0.159005	0.159318	0.15895	0.158377
0.159557	0.158978	0.159242	0.159465	0.159262	0.158921
0.159242	0.159199	0.158892	0.159262	0.158737	0.159131
0.159177	0.157997	0.159177	0.159497	0.159005	0.158529
0.158801	0.159281	0.159353	0.159428	0.158801	0.159083
0.159557	0.15953				

Tabla 3.1.15: Errores estimados.

	Error Real				
0.00850643	0.109427	0.0083136	0.00494959	0.0118704	0.0385897
0.0656945	0.0253265	0.00850643	0.0387825	0.0118704	0.0083136
0.0587737	0.0589665	0.0352256	0.0556025	0.0118704	0.0419537
0.0789577	0.0486817	0.0251336	0.0219625	0.0318616	0.0890497
0.0959706	0.0284976	0.00850643	0.0556025	0.0118704	0.0352256
0.00850643	0.00177842	0.0385897	0.0118704	0.0554097	0.0083136
0.00158559	0.119326	0.00158559	0.0656945	0.0251336	0.0755937
0.0486817	0.0152344	0.0286905	0.0455105	0.0486817	0.0150416
0.0959706	0.0791506				

Tabla 3.1.16: Errores reales.

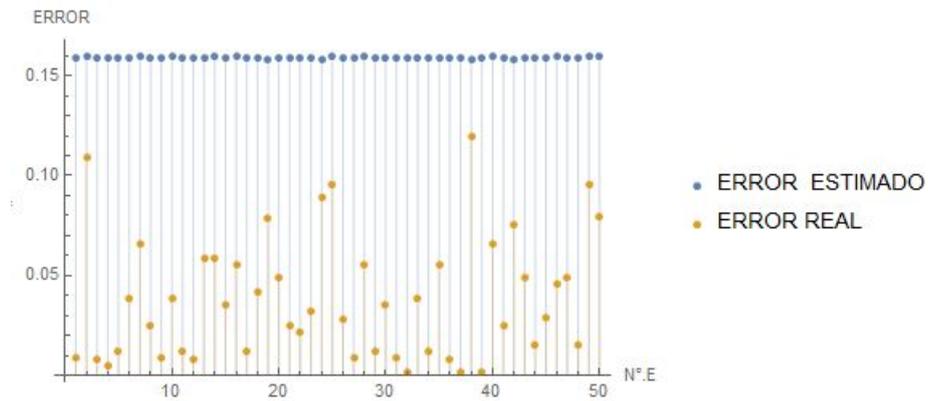


Figura 3.1.5: Gráfica de errores

Errores Reales Seleccionados					
0.00850643	0.0083136	0.00494959	0.0118704	0.0385897	0.0656945
0.0253265	0.00850643	0.0387825	0.0118704	0.0083136	0.0587737
0.0589665	0.0352256	0.0556025	0.0118704	0.0419537	0.0789577
0.0486817	0.0251336	0.0219625	0.0318616	0.0284976	0.00850643
0.0556025	0.0118704	0.0352256	0.00850643	0.00177842	0.0385897
0.0118704	0.0554097	0.0083136	0.00158559	0.00158559	0.0656945
0.0251336	0.0755937	0.0486817	0.0152344	0.0286905	0.0455105
0.0486817	0.0150416	0.0791506			

Tabla 3.1.17: Errores seleccionados.

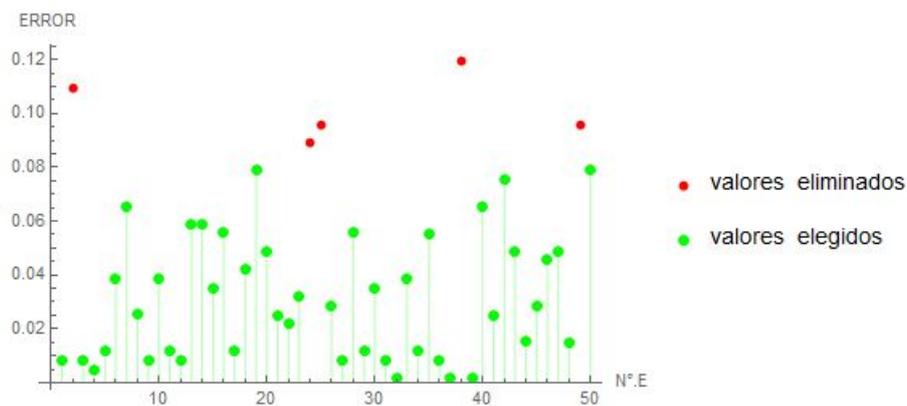


Figura 3.1.6: Gráfica de errores

Donde

I es el valor de la integral.

I_m es la media aritmética de las aproximaciones elegidas.

ε_{max} es el error máximo estimado de las 50 aproximaciones de la integral.

ε_m es el error estimado del intervalo propuesto de las aproximaciones elegidas, de manera numérica.

I=1.79816	Resultados				
Intervalo generado (1.71755, 1.87857)	I_m 1.80064	ε_m 0.08061	ε_{max} 0.159568	Error Real .00248	Núm. Val. elegidos 44

Tabla 3.1.18: Errores finales.

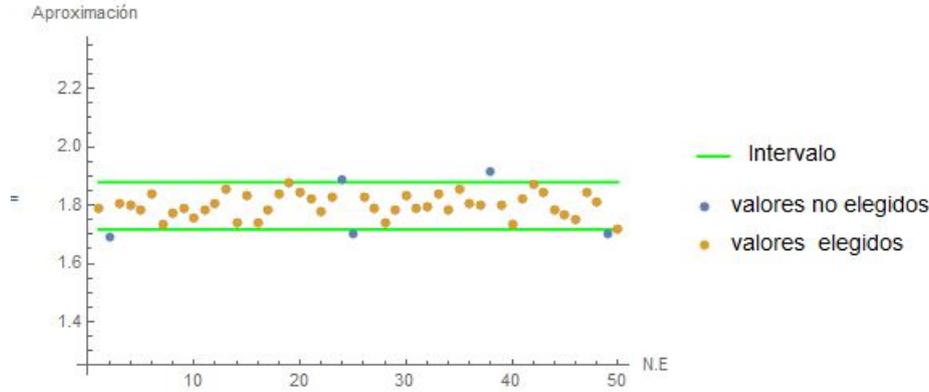


Figura 3.1.7: Gráfica de valores elegidos-eliminados

3.1.3. Cálculo numérico de la integral de Kirchhoff-Fresnel

Se realizó la construcción de la imagen de difracción para una abertura circular bajo la integral de Kirchhoff-Fresnel

$$U(P) = \frac{iA_1}{2\lambda} \int_A \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(n, s) - \cos(n, r)] ds$$

Donde:

λ es la longitud de onda, A_1 amplitud de la onda, A es el área de la abertura, r y s son respectivamente, el vector de la distancia del foco a la abertura y de la abertura hacia un punto P que esta sobre la pantalla, además (n, s) representa el ángulo que esta entre la normal y s . y (n, r) representa el ángulo que esta entre la normal y r . Esta integral es válida cuando λ es suficientemente pequeña para r y s .

Para calcular la integral Kirchhoff-Fresnel se transforma a la siguiente integral

$$U(P_1) = \frac{iA_1}{2\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\cos(k(r+s)) + i\sin(k(r+s))}{rs} [\cos(n, s) - \cos(n, r)] \rho d\rho d\theta \quad (3.3)$$

utilizando la fórmula de Euler

$$e^{ik(r+s)} = \cos(k(r+s)) + i\sin(k(r+s))$$

y haciendo un cambio de coordenadas polares donde r toma la siguiente forma:

$$r = \sqrt{(x_0 - \rho \cos(\theta))^2 + (y_0 - \rho \sin(\theta))^2 + z_0^2} \quad y \quad s = \sqrt{(x - \rho \cos(\theta))^2 + (y - \rho \sin(\theta))^2 + z_1^2},$$

siendo $P_0 = (x_0, y_0)$ las coordenadas de la fuente, $P_1 = (x, y)$ la coordenada del pixel de la pantalla, z_0 la distancia que hay entre la m fuente y la apertura, z_1 la distancia que hay entre la apertura y pantalla, como se muestra en la figura 3.1.8. para cada punto en la pantalla.

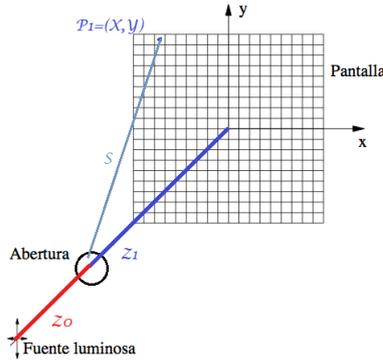


Figura 3.1.8: Representación de la fuente, abertura y pantalla

Se realizó la integral (3.3) tomando la parte real es decir:

$$U(P_1) = \frac{A_1}{2\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\cos(k(r+s))}{rs} [\cos(n, s) - \cos(n, r)] \rho d\rho d\theta$$

aproximándola por el método de las Medias Muestrales para cada pixel, considerándolo como el punto P_1 de la pantalla. Repitiendo este procedimiento 10 veces para toda la pantalla, con una muestra de 1000 elementos para cada una de las integrales, con $\lambda = 2$, una abertura circular con radio $R = 1$, una distancia $z_0 = 1000$ y $z_1 = 15$. Los valores para cada integral fueron ordenados en una matriz para la construcción de la imagen.

Resultado:

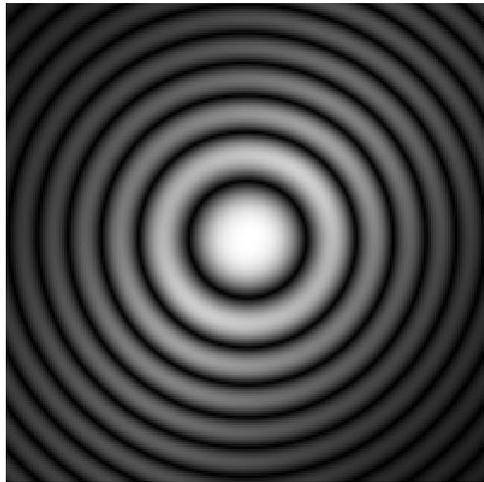


Figura 3.1.9: Imagen de difracción de una abertura circular por el método de Montecarlo por la integral de Kirchhoff-Fresnel

Se realizó la construcción de la imagen de difracción para una abertura cuadrada bajo la integral

$$U(P_1) = \frac{A_1}{2\lambda} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{\cos(k(r+s))}{rs} [\cos(n, s) - \cos(n, r)] dx dy$$

donde $r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2}$, $s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2}$ y $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$, siendo $P_0 = (x_0, y_0)$ las coordenadas de la fuente, $P_1 = (x_1, y_1)$ la coordenada del pixel de la pantalla, z_0 la distancia que hay entre la fuente y la abertura, z_1 la distancia que hay entre la abertura y pantalla. Aproximándola por el método de las Medias Muestrales para cada

pixel, considerándolo como el punto P_1 de la pantalla. Repitiendo este procedimiento 10 veces para toda la pantalla, con una muestra de 1000 elementos para cada una de las integrales, con $\lambda = 1$, una abertura cuadrada con lado $L = 2$, una distancia $z_0 = 1000$ y $z_1 = 1$. Los valores para cada integral fueron ordenados en una matriz para la construcción de la imagen.

Resultado:

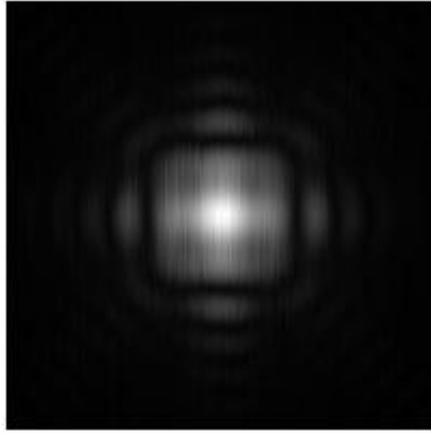


Figura 3.1.10: Imagen de difracción de una abertura cuadrada por el método de Montecarlo por la integral de Kirchhoff-Fresnel

3.1.4. Conclusiones

Los métodos de integración Monte Carlo no son recomendables para resolver integrales de una dimensión, de acuerdo al tiempo de simulación en comparación con el método del trapecio y la regla de Simpson. De acuerdo a los ejemplos realizados el método del trapecio pierden eficiencia bajo el tiempo de simulación para integrales con dimensión mayor a tres, esto debido a que si tenemos una pequeña numero de pasos en el método del trapecio para la aproximación de la primera integral iterada el numero de pasos se potencia con cada integral iterada, es decir el numero de evaluaciones aumenta de manera potencial esto afecta directamente en el tiempo de simulación. En cambio el método de Éxito- Fracaso y la media Muestral para integrales de dimensiones mayores a tres empiezan hacer favorables de acuerdo al tiempo de simulación.

Capítulo 4

Apéndice

La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Se entiende por experimento aleatorio a todo experimento tal que, cuando se repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo.

El objetivo de la Teoría de Probabilidad es desarrollar y estudiar modelos matemáticos para experimentos cuyos resultados no pueden predecirse con exactitud. En el siglo XX esta teoría alcanzó un desarrollo notable, gracias a que en 1933, A. N. Kolmogorov propuso una axiomatización usando las ideas de la Teoría de Medida, la cual propone modelar los experimentos que tienen comportamiento aleatorio, usando un espacio medible.

A continuación definiremos algunos conceptos básicos de la teoría conjuntista y teoría de la medida, con la finalidad de entender lo que es un espacio de probabilidad.

Definición 4.1. *Dados dos conjuntos A y B , si todo elemento de A también es elemento de B decimos que A es un subconjunto de B .*

Definición 4.2. *El espacio muestral, o también llamado espacio muestra, de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, y se le denota generalmente por la letra griega Ω (omega mayúscula). A un resultado particular se le denota por ω (omega minúscula). [19]*

Definición 4.3. *Una colección \mathbb{F} de subconjuntos de un espacio muestral Ω es una σ -álgebra si cumple las siguientes tres condiciones:*

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- Si $A \in \mathbb{F} \implies A^c \in \mathbb{F}$.
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}$ entonces $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathbb{F}$

[19]

4.0.1. Variable aleatoria vectorial

Definición 4.4. *Un intervalo en \mathbb{R}^m es un conjunto de la forma:*

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_m \in I_m\}$$

donde son intervalos de la recta I_1, I_2, \dots, I_m

Definición 4.5. Una función $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una variable aleatoria vectorial, o simplemente un vector aleatorio, si se cumple que para cualquier intervalo I en \mathbb{R}^m , el conjunto $\{w : T(w) \in I\}$ es un evento.

Definición 4.6. Si A es una sigma-álgebra de Ω , cualquier función X definida sobre Ω es una variable aleatoria, ya que para cualquier intervalo I tenemos $X^{-1}(I) = \{w : X(w) \in I\} \subset \Omega$ y por lo tanto $X^{-1} I \in A$

Definición 4.7. Sean X_1, X_2, \dots, X_m variables aleatorias definimos la función de distribución conjunta de X_1, X_2, \dots, X_m a la función de distribución del vector $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ Como $F(X_1, \dots, X_m) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m]$ dado $(X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{R}^m$

Definición 4.8. Si X_1, X_2, \dots, X_m son variables aleatorias discretas definimos a su función de probabilidad conjunta como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m]$$

Decimos que X_1, X_2, \dots, X_m tiene una distribución continua conjunta si existe una función f no negativa definida en \mathbb{R}^m tal que para cualquier $A \subset \mathbb{R}^m$

$$P[x \in A] = P[x_1, x_2, \dots, x_m] \in A = \int \int \dots \int_A x_1, x_2, \dots, x_m dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

A f se le llama función de densidad conjunta

Definición 4.9. Decimos que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_m son independientes si se satisface que:

$$P[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_m \in A_m] = \prod_{i=1}^m P[X_i \in A_i], A_i \subset \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$$

En general si X_1, X_2, \dots, X_m son vectores de dimensión m decimos que son independientes si

$$P[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_m \in A_m] = \prod_{i=1}^m P[X_i \in A_i], A_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \dots, m$$

Si X_1, X_2, \dots, X_m son variables aleatorias independientes entonces

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_m}(x_m)$$

y

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_m}(x_m)$$

Dado que F_{X_i} y f_{X_i} son la funciones de distribución y decimos de la variable aleatorias $X_i, i = 1, 2, \dots, m$ respectivamente .

4.0.2. Esperanza matemática

Definición 4.10. La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria discreta se define como:

$$\mu_X := E[X] = \sum_{X \in \mathbb{R}_X} x f(x)$$

donde f es la función de probabilidad de X .

Si X es una variable aleatoria continua, la esperanza se define como:

$$\mu_X = \int_{\mathbb{R}_X} x f(x) dx, \mathbb{R}_X$$

donde f es la función de densidad de X .

Propiedades de la esperanza

Sean c una constante, X, X_1, X_2, \dots, X_d , variables aleatorias y r una función de variable real:

1. $E[c] = c$.
2. $E[cX] = cE[X]$.
3. $E[\sum_i^d] = \sum_i^d E[X_i]$.

4. Si X es una variable aleatoria discreta

$$E[r(X)] = \sum_{X \in \mathbb{R}_X} r(x) f(x)$$

donde f es la función de probabilidad, si X es una variable aleatoria continua tenemos que:

$$E[r(X)] = \int_{\mathbb{R}_X} r(x) f(x) dx$$

donde f es la función de densidad.

5. $(E|X|)^2 \leq E(X^2)$

4.0.3. Programas

Los programas utilizados fueron elaborados en mathematica, los cuales se muestran a continuación:

Programas Método del Trapecio:

una dimensión

$$n = 100$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{Do}[x_i = a + i * h, \{i, 0, n\}]$$

$$\text{T1} = \text{Timing} \left[\text{a1} = \frac{h}{2} (f[x_0] + f[x_n]) + h * \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i] \right]$$

$$\text{a1} // N$$

dos dimensiones

$$h = 1$$

$$n2 = 2$$

$$n = 1000$$

$$\text{Do}[h_i = \frac{b_i - a_i}{n}, \{i, 1, n2\}]$$

$$\text{H1} = \text{Table}[h_i, \{i, 1, n2\}]$$

$$\text{Do}[h = h * \text{H1}[[i]], \{i, 1, n2\}]$$

$$h$$

$$\text{Do}[\text{Do}[x_{i,j} = a_j + i * \text{H1}[[j]], \{i, 0, n\}], \{j, 1, n2\}]$$

$$\text{a3} = h \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} F[x_{i,1}, x_{j,2}]$$

$$\text{a3} // N$$

tres dimensiones

$$h = 1$$

$$n2 = 3$$

$n = 100$

Do [$h_i = \frac{b_i - a_i}{n}, \{i, 1, n2\}$]

H1 = Table [$h_i, \{i, 1, n2\}$]

Do [$h = h * H1[[i]], \{i, 1, n2\}$]

h

Do [Do [$x_{i,j} = a_j + i * H1[[j]], \{i, 0, n\}$], $\{j, 1, n2\}$]

$T = \text{Timing} \left[a3 = h \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(F[x_{j+1,1}, x_{i+1,2}, x_{k+1,3}] + F[x_{j,1}, x_{i,2}, x_{k,3}])}{2} \right]$

$a3 // N$

Programas de integración por la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ para una dimensión

$m = 4$

$h = \frac{b-a}{m}$

$h1 = \frac{b-a}{2m}$

Do [$x_i = a + i * h, \{i, 0, m\}$]

$T1 = \text{Timing} \left[a2 = \frac{h1}{3} * \sum_{i=0}^{m-1} \left(f[x_i] + 4 * f \left[\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right] + f[x_{i+1}] \right) \right]$

$a2 // N$

dos dimensiones

$m = 100$

$n2 = 2$

Do [$h_i = \frac{b_i - a_i}{m}, \{i, 1, n2\}$]

H1 = Table [$h_i, \{i, 1, n2\}$]

Do [$h = h * H1[[i]], \{i, 1, n2\}$]

h

Do [Do [$x_{i,j} = a_j + i * H1[[j]], \{i, 0, m\}$], $\{j, 1, n2\}$]

$h1 = \frac{b1 - a1}{2m}$

$$h2 = \frac{b2-a2}{m}$$

T1 = Timing

$$\left[a2 = \frac{h1}{3} * h2 * \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f [x_{i,1}, x_{j,2}] + 4 * f \left[\frac{x_{i,1}+x_{i+1,1}}{2}, \frac{x_{j,2}+x_{j+1,2}}{2} \right] + f [x_{i+1,1}, x_{j+1,2}] \right) \right]$$

tres dimensiones

$$m = 100$$

$$\text{Do} \left[h_i = \frac{b_i - a_i}{m}, \{i, 1, n2\} \right]$$

$$H1 = \text{Table} [h_i, \{i, 1, n2\}]$$

$$\text{Do}[h = h * H1[[i]], \{i, 1, n2\}]$$

h

$$\text{Do} [\text{Do} [x_{i,j} = a_j + i * H1[[j]], \{i, 0, m\}], \{j, 1, n2\}]$$

$$h1 = \frac{b1-a1}{2m}$$

$$h2 = \frac{b2-a2}{m}$$

$$h3 = \frac{b3-a3}{m}$$

T1 = Timing[a2 =

$$\frac{h1}{3} * h2 * h3 * \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f [x_{i,1}, x_{j,2}, x_{k,3}] + 4 * f \left[\frac{x_{i,1}+x_{i+1,1}}{2}, \frac{x_{j,2}+x_{j+1,2}}{2}, \frac{x_{k,3}+x_{k+1,3}}{2} \right] + f [x_{i+1,1}, x_{j+1,2}, x_{k+1,3}] \right)$$

]

$$a2 // N$$

Programas para integración n- dimensional por el método MC para integrales definidas

Éxito-Fracaso

$$x_0 := 1$$

$$n2 := 0$$

$$n3 := 1$$

$$\text{Vol} = c$$

Do [Vol = Vol ($b_k - a_k$), { $k, 1, n$ }]

Do[{n2 = n2 + n1,

Do [{ $u_k = N$ [Table [{ $x_{i+1} = \text{RandomInteger}[1000000, 1]$ }, { $i, 0, n2$ }]]], { $k, 1, n + 1$ }],

Do [$U_k = N$ [Table [{ $u_k[[i + 1]][[1]]/ 1000000$ }, { $i, 0, n2$ }]], { $k, 1, n + 1$ }],

Do [$v_i = N$ [Table [($b_i - a_i$) * $U_i[[k + 1]][[1]] + a_i$, { $k, 1, n2$ }]], { $i, 1, n + 1$ }],

Do [$V_k = 0$, { $k, 1, n2$ }],

Do [Do [{ $V_i = \text{Join} [V_i, v_k[[i]][[1]]]$ }, { $k, 1, n$ }], { $i, 1, n2$ }]

$j = 0$,

Do [If [$v_{n+1}[[i]][[1]] \leq F [V_i]$, $j = j + 1$], { $i, 1, n2$ }],

$$r_L = \frac{\text{Vol} * j}{n2},$$

$$d_L = \frac{\sqrt{\frac{j}{n2} (1 - \frac{j}{n2}) * \text{Vol} * 3}}{\sqrt{n2}},$$

}, { $L, 1, n3$ }]

r_1

Medias Muestrales

$x_0 = 1$

$n = 1$

$n1 = 1$

Do[{

Vol = 1,

Do [Vol = Vol ($b_k - a_k$), { $k, 1, n$ }],

Do [{Do [{ $u_k = N$ [Table [{ $x_{i+1} = \text{RandomInteger}[1000000, 1]$ }, { $i, 0, n1$ }]]], { $k, 1, n$ }],

Do [$U_k = N$ [Table [{ $u_k[[i + 1]][[1]]/ 1000000$ }, { $i, 0, n1$ }]], { $k, 1, n$ }],

Do [$v_i = N$ [Table [($b_i - a_i$) * $U_i[[k + 1]][[1]] + a_i$, { $k, 1, n1$ }]], { $i, 1, n$ }], Suma = 0,

Do [$V_k = 0$, { $k, 1, n1$ }],

Do [Do [{ $V_i = \text{Join} [V_i, v_k[[i]][[1]]]$ }, { $k, 1, n$ }], { $i, 1, n1$ }],

Do [{If [Indeterminate=== $F [V_i]$ || ComplexInfinity=== $F [V_i]$], ,

Suma = Suma + $F [V_i]$], { $i, 1, n1$ }],

$$z_g = \frac{\text{Vol}}{n1} * \text{Suma} \}, \{g, 1, n1\}],$$

$$w_L = \left(\sum_{g=1}^{n1} (z_g) \right) / n1,$$

$$\text{Er}_L = \text{Table} [V1 - z_g, \{g, 1, n1\}], \{L, 1, 1\}]$$

w_1

Filtro

Veamos que cada una de las aproximaciones I_1, \dots, I_m con un tamaño de muestra n fijo y un nivel de significancia α fijo tiene un intervalo de confianza asociado a cada aproximación, el cual es $[I_i - \varepsilon_i, I_i + \varepsilon_i]$, entonces como cada aproximación buena respecto al error, muestra un resultado cercano a la integral I , podemos definir un intervalo que contengan a todos estos resultados, como $\bigcap_{i=0}^m [I_i - \varepsilon_{max}, I_i + \varepsilon_{max}]$ donde ε_{max} que es el error máximo de los errores de las aproximaciones, esto conlleva a ampliar el intervalo $[I_i - \varepsilon_i, I_i + \varepsilon_i]$ a $[I_i - \varepsilon_{max}, I_i + \varepsilon_{max}]$, así podríamos pensar que todas las aproximaciones caen dentro de dicho intervalo, sin embargo, esto no es así, ya que estamos trabajando con probabilidad, por ello utilizaremos la frecuencia de cada aproximación que caigan dentro del intervalo $[I_i - \varepsilon_{max}, I_i + \varepsilon_{max}]$ eliminando así a aquellas aproximaciones cuya frecuencia sea la más pequeña, este procedimiento se realizara hasta que todos los intervalos $[I_i - \varepsilon_{max}, I_i + \varepsilon_{max}]$ tengan igual frecuencia. Ahora, ya podemos definir a nuestro intervalo como $[I_i - \varepsilon_i, I_i + \varepsilon_i]$.

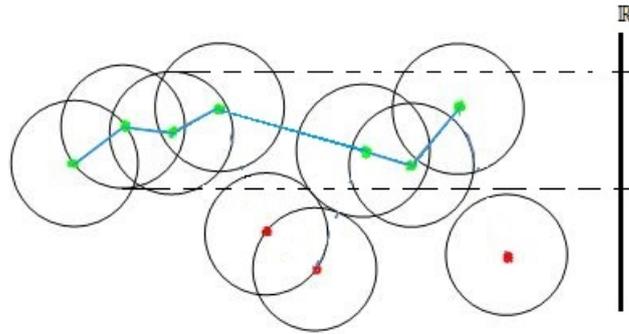


Figura 4.0.1:

Programa

$$M = \text{Max} [\text{Er}_8]$$

$$\text{Er}_4 = \text{Table} [z_g, \{g, 1, n3\}]$$

$$o = 1$$

$$k = 1$$

$$T = 1$$

$$H = 0$$

$n_1 = n_3$

Do[{Do[{If[
 Abs [Er₄[[i]] - Er₄[[j]]] < Max [Er₈] &&j ≠ i, {H = H + 1}]], {j, 1, n₃},
 a_{k,i} = H, b_{k,i} = i, H = 0}, {i, 1, n₃}]
 Er₁₁ = Table [a_{1,g}, {g, 1, n₃}]
 Er₁₂ = Table [b_{1,g}, {g, 1, n₃}]

Do[{
 T = 1,
 If [Min [Er₁₁] == Max [Er₁₁], Break[]],

Do [If [a_{k,i} ≠ Min [Er₁₁], {
 Do [If [Abs [Er₄ [[b_{k,i}]] - Er₄ [[b_{k,j}]]] < Max [Er₈] &&b_{k,j} ≠ b_{k,i} &&a_{k,j} ≠ Min [Er₁₁],
 {H = H + 1}], {j, 1, n₁}], a_{k+1,T} = H, b_{k+1,T} = b_{k,i}, H = 0, T = T + 1}], {i, 1, n₁}],
 h = 0,
 Er₁₁ = Table [a_{k+1,g}, {g, 1, T - 1}],
 Er₁₂ = Table [b_{k+1,g}, {g, 1, T - 1}],
 Do [If [a_{k,1} == a_{k,g}, h = h + 1], {g, 1, T - 1}],
 If [h == (T - 1), Break[]], k = k + 1,
 n₁ = Length [Er₁₁], {t, 1, n₃}]

H = 1

n₁ = Length [Er₁₁]

Do [Do [If [Er₁₂[[i]] == j, {z_{1H} = {j, z_j}, z_{5H} = z_j, H = H + 1}], {j, 1, n₃}], {i, 1, n₁}]

H = H - 1

Er₁₃ = Table [z_{1g}, {g, 1, H}]

Er₁₅ = Table [{z_{1g}[[1]], Abs [z_{5g} - V1]}, {g, 1, H}]

algoritmo cálculo numérico de la integral de Kirchhoff-Fresnel

```

function
g1 = 1000
g2 = 150
F = [00];
Z0 = 9;
Z1 = 15;
f = 3
P = zeros(g2, g2);
PD = [g2g2];
PZ = Z0 + Z1;
PO = [length(P)/2, length(P)/2];
hold on
grid on
XP = -PO(1) : 1 : PO(2);
YP = PO(1) : -1 : -PO(2);
form = 1 : 10
fprintf('m = fori=1:length(XP)
forj=1:length(YP)
suma = 0;
U = [XP(i)/3.1416 YP(j)/3.1416];
forl=1:g1
ifm==1
I2(j,i)=0;
end
a= rand(1,g1)*(2*pi);
b = rand(1,g1)*(f);
U1=[b(l)*cos(a(l)) b(l)*sin(a(l))];
[r,r1,R,R1,s,s1]=calculardatos5(U,U1,Z0,Z1,F);
o=2;
k1=(2*pi)/o;
res =-pi*f*f*(cos(s1)-cos(s))*(b(l))*cos(k1*(R+r))/(2*o*r1*R1);
suma = suma+res;
end
I(j,i)=2*pi*f*suma/g1;
I2(j,i)=I2(j,i)+ I(j,i);
hold on
end
end
end
I2=(1/10)*I2;
saveI2
img=mat2gray(I2);
figure
imshow(img)
toc
end
function[r,r1,R,R1,s,s1]=calculardatos5(U,U1,Z0,Z1,F)
r =  $\sqrt{(U(1) - U1(1))^2 + (Z1)^2 + (U(2) - U1(2))^2}$ ;

```

```
R = sqrt((F(1) - U1(1))^2 + (Z0)^2 + (F(2) - U1(2))^2);
r1 = sqrt((U(1) - U1(1))^2 + (Z1)^2 + (U(2) - U1(2))^2);
R1 = sqrt((F(1) - U1(1))^2 + (Z0)^2 + (F(2) - U1(2))^2);
s = acos(Z0/R1);
s1 = acos(Z1/r1);
end
```


Bibliografía

- [1] Sonia Guadalupe Sosa León, Integración numérica por el método de Monte Carlo (Tesis), Universidad de Sonora. pp (24-28),(1997)
- [2] Patricia Saavedra Barrare Y Victor Hugo Ibarra Mercado. El método Monte-Carlo y su Aplicaciones Afnanzas.Pag 8
- [3] Tom M. Apostol, Calculo con funciones de una variable,con una introducción al algebra lineal.Reverté.S.A. pp.268,(1999).
- [4] Adriana Zacarias Santiago, Métodos de Integración y simulación Monte Carlo en la toería bayesiana, (Tesis),Universidad Tecnológica de la Mixteca, (2006).
- [5] Kai Lai Chung,Teoria elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos,Reverté.S.A. Pag.267 (1983).
- [6] Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer, Estadística matemática con aplicaciones, CENGAGE Learning Pag.372,(2008).
- [7] Daniel Azagra, Calculo Integral, ISBN-13:978-84-611-6377-9,Departamento de análisis matemático Facultad de Ciencias Matemáticas universidad complutense de Madrid Pag.59,(2007).
- [8] Ricardo Cao Abad,Introducción a la Simulación y a la Teoria de colas, Área de estadística e investigación de matemáticas, Facultadad de informática, Universidad de da coruña,(2002).
- [9] José Antonio Ezquerio Fernandez,introducción a los métodos numéricos , Universidad de la Rioja,(2012).
- [10] Endre Süli, David F. Mayers, an introduction to numerical analitysis, Cambridge University Press, pag 203, (2003).
- [11] Javier Páez Cardenas, Calculo integral de varias variables.
- [12] José Ignacio Illana,Métodos Monte Carlos, Departamento de Física Teorica y del cosmos,Universidad de Granada,(2013).
- [13] Haraid Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, Society for Industrial and Applied Mathematcs Philadelphia Pennsylvania,(1992).
- [14] Marisol Santana Anaya, Técnicas de reducción de varianza para el método Monte Carlo aplicado a opciones financieras (Tesis), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 2013.
- [15] Federico Mayor Zaragoza y María Cascales Angosto, Premios Nobel, Real academia de doctores de España, (2013)

-
- [16] Gabriel Larotonda, Cálculo y Análisis, Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, ISSN 1851-1317, (2010)
- [17] Sheldon M. Ross, Introduction to Probability Models, Elsevier (2010)
- [18] Agustin Garcia Nogales, Teoría de la Medida y de la Probabilidad, Universidad de Extremadura, ISSN 1135-870-X, (2008).
- [19] Luis Rincón, Introducción a la probabilidad, Departamento de Matemáticas, Facultad de ciencias UNAN, (2013).
- [20] Murray R., John J. Schiller, R. ALU Srinivasan, Teoría y problemas de probabilidad y estadística , Mc Graw Hill, ISBN 970-10-4231-X, (2003).
- [21] Naraya C. Giri, Introduction to Probability and Statistics, D.B. Owen Foonding, ISBN0-8247-9037-5, (1993).
- [22] Lurs Cruz Kuri, Jorge Sergio Durand Niconoff y R. Romero Pafino, La ciencia y el hombre, El método de Monte Carlo, No. 1 , (2004).
- [23] Sheldom M. Ross, Simulación , Prentice Hall, Mexico, ISBN:970-17-0259-X, (1999).