



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

**EL PROBLEMA DE LA MEJOR UBICACIÓN DE UN CENTRO DE
SERVICIO SOBRE UNA ESFERA**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**PRESENTA
RAFAEL ALEJANDRO NAVA MANZO**

**DIRECTORES DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
DR. JOSÉ LUIS MARTÍNEZ FLORES**

PUEBLA, PUE

9 DICIEMBRE 2011

*Tanta prisa tenemos por hacer, escribir
y dejar oír nuestra voz en el silencio de la eternidad,
que olvidamos lo único realmente importante: vivir.*

Agradecimientos

Por ser las personas más importante en mi vida, por demostrarme que no existe la derrota, porque han dedicado cada segundo de su vida a luchar para salir adelante ante cualquier situación, por ser unos guerreros incansables, que en su largo camino han forjado consigo gran peso, y aún así le sonrían con fervor a la vida, porque me han enseñado que la satisfacción se encuentra en mis propios progresos y no en las apreciaciones de los demás. A ustedes les dedico mis victorias, mi vida y mi ser, porque es la fuente de mi inspiración. Gracias, por todo eso y mucho más, simplemente por ser... mis padres.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo económico durante la elaboración de tesis.

A la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por todos sus consejos y apoyo a lo largo de la carrera.

A todos mis amigos que me acompañaron a lo largo de la carrera.

Introducción

Se le llama problema de Weber al problema de hallar la mejor ubicación de un centro de servicio de tal forma que la suma de las distancias del centro de servicio a todos sus clientes sea mínima. Este problema lo describiremos con más detalle más adelante. En este apartado deseamos presentar el lugar que ocupa este problema en las matemáticas. El problema de hallar la mejor ubicación de un centro de servicio pertenece al área de las matemáticas denominada Investigación de Operaciones, pero para ser más específicos, debemos mencionar que dentro de ésta, en particular el de Weber, pertenece a la optimización o programación no lineal. La Investigación de Operaciones debe su nombre a las operaciones militares ya que sus inicios han sido atribuidos a ciertos servicios militares que se prestaron al inicio de la Segunda Guerra Mundial. Debido a los esfuerzos bélicos, existía la urgente necesidad de asignar recursos escasos a las distintas maniobras militares y a las actividades que componían cada operación de la manera más eficaz. Actualmente, esta disciplina se aplica a la problemática relacionada con la conducción y la coordinación de actividades de una organización, siendo irrelevante la naturaleza de la organización. Así, la investigación de operaciones ha sido aplicada a una extensa variedad de áreas, tales como la manufactura, el transporte, la planeación financiera, etc. Una de las empresas que ha aplicado los modelos matemáticos de la investigación de operaciones para optimizar la distribución de sus productos es Procter and Gamble, obteniendo un ahorro de 200 millones de dólares anuales [7]. Esta suma puede ser ponderada dependiendo de la importancia que se le dé a cada cliente. Si el centro de servicio y los clientes están dentro de un mismo país y las distancias no son tan grandes, medir las distancias como si los puntos estuvieran sobre un plano resulta una muy buena aproximación. Sin embargo, actualmente, existen grandes empresas con la necesidad de ubicar estratégicamente un

centro de distribución, para atender clientes localizados alrededor del mundo. El problema de Weber ha sido ampliamente estudiado considerando las distancias entre los puntos ubicados en un plano. Se decidió estudiar este problema debido a la globalización, ya que consideramos que esta manera de plantear el problema se aproxima mejor a la realidad de una gran variedad de empresas y organizaciones.

Este trabajo de tesis se divide en tres partes. En la primera parte se revisan algunos conceptos del análisis convexo útiles en la teoría de la programación no lineal y que requeriremos más adelante. También se estudia y se demuestran propiedades de la longitud de arco más corta sobre la esfera para lo cual se hace una revisión de resultados de trigonometría esférica. En la segunda parte se describe el problema de Weber sobre el plano y se plantean algunos métodos para su solución. En la última parte se presenta el problema de Weber sobre una esfera y un ejemplo que se resuelve utilizando un algoritmo de la literatura programado en Mathematica. Finalmente, se estudian las condiciones para la existencia y unicidad del punto óptimo del problema.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos Convexos	1
1.2. Funciones Convexas.	4
1.3. Funciones Convexas en Intervalos.	8
1.4. Círculos Máximos	12
1.5. La esfera vs el plano Euclidiano	13
1.6. La longitud de arco más corta	14
2. Los tres problemas de localización en el plano	18
2.1. El problema de Weber en el plano.	19
2.2. Minimax y Maximin.	20
3. El problema de Weber en la esfera	23
3.1. El problema de Weber en una esfera	23
3.2. Formulación del problema	25
3.3. Algunas propiedades del problema.	25
3.4. Condiciones para el mínimo local en un punto de demanda. . .	28
3.5. Cálculo de puntos críticos	29
3.6. Problemas con solución óptima única	36
Conclusión	42
Bibliografía	43

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conjuntos Convexos

Definición 1.1.1 Un conjunto S en \mathbb{R}^n se dice que es convexo si el segmento de línea que une cualesquiera dos puntos en el conjunto también está en el conjunto. Esto es, si x e y están en S , entonces $(1 - \lambda)x + \lambda y$ debe estar en S para toda $\lambda \in [0, 1]$.

El siguiente lema es una consecuencia inmediata de la definición de convexidad. Establece que la intersección de dos conjuntos convexos también es un conjunto convexo y que la suma algebraica de dos conjuntos convexos también es convexa.

Lema 1.1.2 Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos en E_n . Entonces,

1. $S_1 \cap S_2$ es convexo.
2. $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ es convexo.
3. $S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ es convexo.

Definición 1.1.3 Sea S cualquier conjunto en \mathbb{R}^n . La cerradura convexa de S , denotada por $H(S)$, es la colección de todas las combinaciones convexas de S . En otras palabras, $x \in H(S)$ si y sólo si x se puede representar como

$$x = \sum_{k=1}^j \lambda_k x_k \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^j \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \text{ para } k = 1, \dots, j$$

donde k es un entero positivo y $x_1, \dots, x_j \in S$

Lema 1.1.4 Sea S cualquier conjunto en E_n . Entonces, $H(S)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S . De hecho, $H(S)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S .

Definición 1.1.5 La cerradura convexa de un número finito de puntos x_1, \dots, x_{k+1} en \mathbb{R}^n es llamado politopo y se denotará por $H(x_1, \dots, x_{k+1})$.

Por definición, un punto en la cerradura convexa de un conjunto puede ser representado como una combinación convexa de un número finito de puntos en el conjunto. El siguiente teorema muestra que cualquier punto x en la cerradura convexa de un conjunto S puede ser representado como una combinación convexa de a lo más $n + 1$ puntos en S .

Teorema 1.1.6 Sea S cualquier conjunto en \mathbb{R}^n . Si $x \in H(S)$, entonces $x \in H(x_1, \dots, x_{n+1})$, donde $x_j \in S$ para $j = 1, \dots, n + 1$. En otras palabras, x puede ser representado como

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, n + 1$$

$$x_j \in S \text{ para } j = 1, \dots, n + 1$$

Demostración. Dado que $x \in H(S)$, entonces $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$, donde $\lambda_j > 0$ para $j = 1, \dots, k$, $x_j \in S$ para $j = 1, \dots, k$, y $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$. Si $k \leq n + 1$ se tiene el resultado deseado. Ahora, supongamos que $k > n + 1$. Notemos que $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1$ son linealmente independientes. Así, existen escalares μ_2, \dots, μ_k no todos iguales a cero tales que $\sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = 0$. Haciendo $\mu_1 = -\sum_{j=2}^k \mu_j$, se sigue que $\sum_{j=1}^k \mu_j x_j = 0$, $\sum_{j=1}^k \mu_j = 0$, y no

todos los μ_j 's son iguales a cero. Notemos que al menos un μ_j es mayor que cero. Entonces,

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + 0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^k \mu_j x_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$$

para cualquier número real α .

Ahora elijamos a α como sigue:

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad (3)$$

para algún $i \in \{1, \dots, k\}$. Notemos que $\alpha > 0$. Si $\mu_j \leq 0$, entonces $\lambda_j - \alpha \mu_j > 0$, y si $\mu_j > 0$, entonces $\lambda_j / \mu_j \geq \lambda_i / \mu_i = \alpha$, y por lo tanto, $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ para toda $j = 1, \dots, k$. En particular, $\lambda_j - \alpha \mu_j = 0$ por definición de α . Por lo tanto, $x = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$, donde $\alpha \mu_i = 0$. En otras palabras, x es representado como una combinación convexa de a lo más $k - 1$ puntos en S . El proceso se repite hasta que x es representado como una combinación convexa de a lo más $n + 1$ puntos de S . ■

Un resultado muy importante se deriva de algunos de los conceptos anteriores. Este resultado establece la existencia de una solución mínima para un problema de optimización. Aquí, decimos que \bar{x} es una solución mínima del problema $\min\{f(x) : x \in S\}$, siempre y cuando $\bar{x} \in S$ y $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para toda $x \in S$. En tal caso, decimos que un mínimo existe.

Teorema 1.1.7 *Sea S un conjunto compacto diferente de vacío y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}_1$ una función continua en S . Entonces el problema $\min\{f(x) : x \in S\}$ tiene solución.*

Demostración. Dado que f es una función continua en S y S es cerrado y acotado, entonces f es acotada. En consecuencia, como $S \neq \emptyset$, existe $\alpha = \inf\{f(x) : x \in S\}$. Ahora, sea $0 < \varepsilon < 1$, y consideremos el conjunto $S_k = \{x \in S : \alpha \leq f(x) \leq \alpha + \varepsilon^k\}$ para cada $k = 1, 2, \dots$. -Debido a que S es acotado, existe una sub-sucesión convergente $\{x_k\}_K \rightarrow \bar{x}$, indexada por el conjunto K . Dado que S es un conjunto cerrado, tenemos $\bar{x} \in S$; y por continuidad de f , dado que $\alpha \leq f(x) \leq \alpha + \varepsilon^k$ para toda k , tenemos $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\bar{x})$. Por lo tanto, se ha mostrado que existe una solución $\bar{x} \in S$ tal que $f(\bar{x}) = \alpha = \inf\{f(x) : x \in S\}$ y así \bar{x} es una solución que minimiza el problema. ■

1.2 Funciones Convexas

Definición 1.2.1 Sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, donde S es un conjunto convexo en \mathbb{R}^n diferente de vacío. La función f se dice que es convexa en S si

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (4)$$

para cada $x_1, x_2 \in S$ y para cada $\lambda \in (0,1)$. La función es llamada estrictamente convexa en S si la desigualdad de arriba se cumple con la desigualdad estricta para cada $x_1, x_2 \in S$ y para cada $\lambda \in (0,1)$. La función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada cóncava (estrictamente cóncava) si $-f$ es convexa (estrictamente convexa) en S .

Consideremos la interpretación geométrica de las funciones convexas y cóncavas. Sean x_1 y x_2 dos puntos distintos en el dominio de f , y consideremos el punto $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, con $\lambda \in (0,1)$. Notemos que $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ es el promedio ponderado de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, mientras que $f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]$ da el valor de f en el punto $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Así, para la función convexa f , el valor de f en los puntos del segmento de línea $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ es menor o igual que la cuerda que une a $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$. Para funciones cóncavas la cuerda está por debajo de la función.

Las funciones convexas cuentan con una serie de propiedades las cuales son muy utilizadas en la práctica.

1. Sean $f_1, f_2, \dots, f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas. Entonces:
 - (a) $f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j f_j(x)$, donde $\alpha_j > 0$ para $j = 1, 2, \dots, k$ es una función convexa.
 - (b) $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$ es una función convexa.
2. Supongamos que $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava. Sea $S = \{x: g(x) > 0\}$, y definamos $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = 1/g(x)$. Entonces f es convexa en S .
3. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa no decreciente, y sea $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces la función compuesta $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g[h(x)]$ es una función convexa.
4. Sea $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, y sea $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función afín de la forma $h(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$, donde \mathbf{A} es una matriz de tamaño $m \times n$ y \mathbf{b} es un vector de tamaño

$m \times 1$. Entonces la función compuesta $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g[h(x)]$ es una función convexa.

Asociada con la función convexa f está el conjunto $S_\alpha = \{x \in S: f(x) \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el cual usualmente se conoce como el conjunto de nivel.

Lema 1.2.2 *Sea S un conjunto convexo en \mathbb{R}^n diferente de vacío, y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces el conjunto de nivel $S_\alpha = \{x \in S: f(x) \leq \alpha\}$, donde α es un número real, es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in S_\alpha$. Así $x_1, x_2 \in S$ y $f(x_1) \leq \alpha$ y $f(x_2) \leq \alpha$. Ahora sea $\lambda \in (0,1)$ y $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Por la convexidad de S , tenemos que $x \in S$. Además, por la convexidad de f ,

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \quad (5)$$

Por lo tanto, $x \in S_\alpha$, y así S_α es un conjunto convexo. ■

Una propiedad importante de las funciones cóncavas y convexas es que éstas son continuas en el interior de su dominio.

Teorema 1.2.3 *Sea S un conjunto convexo en \mathbb{R}^n diferente de vacío, y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es continua en el interior de S .*

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{int } S$ para probar la continuidad de f en \bar{x} , debemos mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$ entonces se implica que $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$. Dado que $\bar{x} \in \text{int } S$, entonces existe $\delta' > 0$ tal que si $\|x - \bar{x}\| \leq \delta'$ implica que $x \in S$. Construyamos θ como sigue,

$$\theta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\max[f(\bar{x} + \delta' e_i) - f(\bar{x}), f(\bar{x} - \delta' e_i) - f(\bar{x})]\} \quad (6)$$

donde e_i es un vector de ceros excepto por un 1 en la entrada i -ésima. Notemos que $0 \leq \theta < \infty$.

Sea

$$\delta = \min\left(\frac{\delta'}{n}, \frac{\varepsilon\delta'}{n}\right). \quad (7)$$

Elijamos un x tal que $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$. Si $x_i - \bar{x}_i \geq 0$, sea $z_i = \delta' e_i$, de otro modo, sea $z_i = -\delta' e_i$. Entonces, $x - \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$, donde $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Más aún,

$$\|x - \bar{x}\| = \delta' \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{1/2}.$$

De (7), y dado que $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$, se sigue que $\alpha_i \leq \frac{1}{n}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, por la convexidad de f , y dado que $0 \leq n\alpha_i \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\bar{x} + \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\right) = f\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x + n\alpha_i z_i)\right] & (8) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\bar{x} + n\alpha_i z_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[(1 - n\alpha_i)\bar{x} + n\alpha_i(\bar{x} - z_i)] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - n\alpha_i)f(\bar{x}) + n\alpha_i f(\bar{x} + z_i)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + z_i) - f(\bar{x})]$. De (6) es evidente que $f(\bar{x} + z_i) - f(\bar{x}) \leq \theta$ para cada i ; y dado que $\alpha_i \geq 0$, se sigue que

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \theta \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (9)$$

Señalando (6) y (7), se sigue que $\alpha_i \leq \varepsilon/n\theta$, y (9) implica que $f(x) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$. ■

Definición 1.2.4 Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y consideremos el problema de minimizar $f(x)$ sujeto a $x \in S$. Un punto $x \in S$ es llamado solución factible del problema. Si $\bar{x} \in S$ y $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cada $x \in S$, entonces se dice que \bar{x} es una solución óptima, una solución global, o simplemente una solución del problema.

Si $\bar{x} \in S$ y si existe una ε -vecindad $N_\varepsilon(\bar{x})$ alrededor de \bar{x} tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cada $x \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$, entonces se dice que \bar{x} es una solución óptima local. Similarmente, si $\bar{x} \in S$

y si existe una ε -vecindad $N_\varepsilon(\bar{x})$ alrededor de \bar{x} tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para cada $x \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$, entonces \bar{x} se dice que es una solución óptima local estricta.

Teorema 1.2.5 *Sea S un conjunto convexo en \mathbb{R}^n , y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa en S . Consideremos el problema de minimizar $f(x)$ sujeta a $x \in S$. Supongamos que $\bar{x} \in S$ es una solución óptima local del problema.*

1. *Entonces, \bar{x} es una solución óptima global.*
2. *Si \bar{x} es un mínimo local estricto, o si f es estrictamente convexa, entonces \bar{x} es una solución óptima global única.*

Demostración. Dado que \bar{x} es una solución óptima local, entonces existe una ε -vecindad $N_\varepsilon(\bar{x})$ alrededor de \bar{x} tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cada $x \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$.

Por contradicción, supongamos que \bar{x} no es una solución óptima global, esto es, existe $\hat{x} \in S$ tal que $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$. Por la convexidad de f , lo siguiente es verdadero para cada $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad (10)$$

Pero para $\lambda < 0$ y suficientemente pequeño, $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$. Por lo tanto, la desigualdad anterior contradice el hecho de que \bar{x} sea una solución óptima local.

Para probar la parte 2, supongamos que \bar{x} es un mínimo local estricto. Por la parte 1, este punto es un mínimo global. Ahora, supongamos que \bar{x} no es un mínimo global único, entonces existe $\hat{x} \in S$ tal que $f(\hat{x}) = f(\bar{x})$, entonces, definiendo $x_\lambda = \lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}$ para $0 \leq \lambda \leq 1$, tenemos por la convexidad de S y f que $f(x_\lambda) \leq \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x})$, y $x_\lambda \in S$ para toda $\lambda \in [0,1]$. Tomando $\lambda \rightarrow 0^+$, dado que podemos hacer que $x_\lambda \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$ para cualquier $\varepsilon > 0$, esto contradice la optimalidad local estricta de \bar{x} . Por lo tanto, \bar{x} es un mínimo global único.

Finalmente, supongamos que \bar{x} es una solución óptima local y que f es estrictamente convexa, dado que la convexidad estricta implica convexidad, entonces, por lo parte 1, \bar{x} es una solución óptima global. Por contradicción, supongamos que \bar{x} no es la única solución óptima global, entonces existe $x \in S$, $x \neq \bar{x}$, tal que $f(x) = f(\bar{x})$. Por la convexidad estricta,

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\bar{x}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(\bar{x}) = f(\bar{x}). \quad (11)$$

Por la convexidad de S tenemos que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\bar{x} \in S$, y la desigualdad anterior viola la optimalidad global de \bar{x} . Por lo tanto, \bar{x} es una solución óptima global única. ■

1.3 Funciones convexas en intervalos

A lo largo de este capítulo el símbolo I indicará un intervalo no degenerado, es decir, I es un intervalo con una cantidad infinita de elementos.

Definición 1.3.1 Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (12)$$

Para todo punto x y y en I y toda $\lambda \in [0,1]$. Esta es llamada estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta siempre y cuando x y y sean puntos distintos y $\lambda \in (0,1)$. Si $-f$ es convexa, entonces decimos que f es cóncava. Si f es cóncava y convexa decimos que es afín.

La convexidad de una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ geoméricamente significa que los puntos de la gráfica $f|_{[u,v]}$ están por debajo de la cuerda que une los puntos finales $(u, f(u))$ y $(v, f(v))$, para cualquier $u, v \in I$. Entonces

$$f(x) \leq f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) \quad (13)$$

para toda $x \in [u, v]$, y todas $u, v \in I$. Esto muestra que las funciones pueden ser localmente convexas (es decir en cualquier sub-intervalo compacto).

Teorema 1.3.2 Los intervalos son cerrados a las combinaciones convexas arbitrarias, esto es,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in I \quad (14)$$

Para todo $x_1, \dots, x_n \in I$, y todo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ con $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$.

Demostración. Esto puede ser probado por inducción sobre el número n de puntos involucrados en la combinación convexa. El caso cuando $n = 1$ es trivial, mientras que para $n = 2$ el resultado se sigue de la definición de conjunto convexo. Asumiendo que el resultado es verdadero para todas las combinaciones convexas con por lo menos $n \geq 2$,

pasemos al caso cuando la combinación convexa tiene $n + 1$ puntos, $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$. El caso no trivial es cuando todos los coeficientes λ_k están en $(0,1)$, en este caso,

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda_{n-1}) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n-1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \lambda_{n-1}) z + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in I \end{aligned}$$

Luego, por hipótesis de inducción la prueba está completa. ■

Lema 1.3.3 Sea f una función de valores reales definida en un intervalo I , entonces f es convexa si y sólo si para todo $x_1, \dots, x_n \in I$ y todo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ con $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ tenemos

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \quad (15)$$

La desigualdad anterior es estricta si f es estrictamente convexa, todos los puntos x_k son distintos y todos los escalares α_k son positivos.

Teorema 1.3.4 Sea f una función de valores reales definida en un intervalo I . Entonces f es convexa si y sólo si para cualquier sub-intervalo compacto J de I , y cualquier función afín L , el supremo de $f + L$ en J es alcanzado en uno de los extremos del intervalo.

Demostración. Necesidad. Si f es convexa, también lo es la suma $F = f + L$. Dado que cualquier punto en un sub-intervalo $J = [x, y]$ es una combinación convexa $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ de x e y , así tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in [0,1]} F(z) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} F((1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0,1]} [(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y)] = \max\{F(x), F(y)\}. \end{aligned}$$

Suficiencia. Dado un sub-intervalo compacto $J = [x, y]$ de I , existe una función afín $L(x) = mx + n$ que concuerda con f en los dos puntos finales x e y . Entonces

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} [(F - L)((1 - \lambda)x + \lambda y)] = 0,$$

con lo cual tenemos

$$0 \geq f((1 - \lambda)x + \lambda y) - L((1 - \lambda)x + \lambda y)$$

$$\begin{aligned}
&= f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)L(x) + \lambda L(y) \\
&= f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y)
\end{aligned}$$

para cualquier $\lambda \in [0,1]$. ■

Una consecuencia evidente del teorema anterior es que una función convexa f es acotada en cualquier sub-intervalo compacto $[u, v]$. De hecho, $f(x) \leq M = \max\{f(u), f(v)\}$ en $[u, v]$ y escribiendo un punto arbitrario $x \in [u, v]$ en la forma $x = (u+v)/2 + t$ para algún t tal que $|t| \leq (v-u)/2$, se infiere que

$$\begin{aligned}
f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) &\geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \\
&\geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.5 Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es convexa si y sólo si es convexa a la mitad, esto es, si $x, y \in I$ entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{16}$$

Demostración. *Necesidad.* Supongamos que f no es convexa, entonces existe un sub-intervalo $[a, b]$ tal que la gráfica de f en $[a, b]$ no está por debajo de la cuerda que une a $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es, la función

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \tag{17}$$

donde $x \in [a, b]$, verifica $\gamma = \sup\{\varphi(x): x \in [a, b]\} > 0$. Notemos que φ es continua y $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. También, un cómputo directo muestra que φ es convexa por la mitad. Sea $c = \inf\{x \in [a, b]: \varphi(x) = \gamma\}$; entonces necesariamente $\varphi(c) = \gamma$ y $c \in (a, b)$. Por la definición de c , para cualquier $h > 0$ tal que $c \pm h \in (a, b)$, tenemos

$$\varphi(c - h) < \varphi(c) \text{ y } \varphi(c + h) \leq \varphi(c), \tag{18}$$

de aquí se sigue que

$$\varphi(c) > \frac{\varphi(c-h) + \varphi(c+h)}{2} \quad (19)$$

lo cual es una contradicción ya que φ es convexa por la mitad.

Suficiencia. Es inmediata dado que f es una función convexa. ■

Corolario 1.3.6 Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es convexa si y sólo si

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0 \quad (20)$$

Para toda $x \in I$ y toda $h > 0$ tal que $x+h$ y $x-h$ están en I .

El Corolario 1.3.6 nos permite verificar inmediatamente la convexidad estricta de algunas funciones comunes como es el caso de la función exponencial. En particular, junto con el hecho de que $a, b > 0$, $a \neq b$, implica

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

tenemos

$$e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0$$

para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda $h > 0$.

Una consecuencia inmediata de la convexidad estricta de la función exponencial es el siguiente resultado:

Teorema 1.3.7 Si $x_1, \dots, x_n \in (0, \infty)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k > x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (21)$$

a menos que $x_1 = \dots = x_n$.

Reemplazando x_k por $1/x_k$ en la última desigualdad obtenemos

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} > 1 / \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x_k} \quad (22)$$

a menos que $x_1 = \dots = x_n$.

Proposición 1.3.8 (Operaciones con funciones convexas).

- i) Al sumar dos funciones convexas (definidas en el mismo intervalo) obtenemos una función convexa; si una de ellas es estrictamente convexa entonces la suma es también lo es.
- ii) La multiplicación de una función (estrictamente) convexa por un escalar positivo es una función (estrictamente) convexa.
- iii) La restricción de cualquier función (estrictamente) convexa a un sub-intervalo de su dominio es también una función (estrictamente) convexa.
- iv) Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa (estrictamente convexa respectivamente) y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa no decreciente (creciente respectivamente) entonces $g \circ f$ es convexa (estrictamente convexa respectivamente).
- v) Supongamos que f es una biyección entre dos intervalos J e I . Si f es creciente, entonces f es (estrictamente) convexa si y sólo si f^{-1} es (estrictamente) cóncava. Si f es una biyección decreciente, entonces f y f^{-1} son del mismo tipo de convexidad.

1.4 Círculos Máximos

Si hacemos un corte a través de una esfera usando un plano, la sección transversal resultante es siempre un círculo. Por simetría, cualquier plano que corte a través del centro de la esfera producirá una sección transversal de un tamaño igual a la del ecuador de la esfera. Ahora, el radio del ecuador es el mismo radio que el de la esfera, y este es el círculo más grande que uno puede tener sobre una esfera.

Definición 1.4.1 Un círculo en una esfera es llamado "círculo máximo" si este fue obtenido de la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera. Cualquier gran círculo tiene un radio igual al radio de la esfera.

Intuitivamente, supongamos que tenemos dos puntos sobre la esfera y hacemos pasar por ellos dos círculos de diámetros diferentes sobre estos puntos, el círculo más pequeño unirá a estos puntos por un arco más pronunciado que el círculo de diámetro más grande, es decir, mientras más grande sea el círculo el arco que une a los puntos tenderá a parecerse a una recta que une a dos puntos en el plano.

Los círculos más grandes en una esfera son los círculos máximos, por lo tanto, la ruta más corta sobre una esfera entre dos puntos es a través del arco de un círculo máximo (esto se demostrará en la sección 1.7). Para encontrar el gran círculo que conecta a cualesquiera dos puntos sobre la esfera, se debe determinar primero cual es el plano determinado por estos dos puntos y el centro de la esfera. La sección transversal obtenida cuando este plano atraviesa a la esfera es el gran círculo conectando a estos puntos. Así, los círculos máximos en una esfera juegan el rol de las líneas rectas en el plano, con arcos de los círculos máximos en lugar de segmentos de recta.

Es importante notar que los meridianos son círculos máximos, mientras que los paralelos no lo son a excepción del ecuador.

1.5 La esfera vs el plano Euclidiano

Acabamos de mencionar que en la geometría de una esfera los círculos máximos juegan el papel que las líneas rectas juegan en la geometría de un plano (geometría Euclidiana). Pero no hemos mencionado las grandes diferencias entre la geometría de una esfera y la Euclidiana.

Consideremos dos círculos máximos sobre una esfera. Cada uno está determinado por un plano que contiene al centro de la esfera. Así, estos dos planos se intersectan en una línea la cual contiene al centro de la esfera. Esta línea punza a la esfera en dos puntos que son antípodas el uno del otro. Estos puntos están en la esfera y en ambos planos, así estos están en ambos grandes círculos. Esto muestra que cualquier par de círculos máximos se intersectan en un par de puntos que son antípodas el uno del otro.

En el plano, dos líneas rectas o son paralelas y no se intersectan en ningún punto, o se intersectan en un solo punto. En contraste, hemos notado que en la esfera no hay “líneas”

(Grandes círculos) paralelas. El quinto postulado de Euclides dice si tenemos una línea L y un punto P que no está en la línea, entonces existe una única línea que pasa sobre P y es paralela a L . Si nosotros tratamos de reescribir este postulado para la esfera obtendríamos lo siguiente: si tenemos un círculo máximo L en la esfera y un punto P igualmente sobre la esfera pero no en L , entonces cualquier gran círculo que contenga a P intersecta a L (en dos puntos).

1.6 La longitud de arco más corta

Nuestra intuición dice que los arcos de los círculos máximos proveen los caminos más cortos entre puntos en una esfera. Para probar que esto es cierto, debemos considerar dos puntos arbitrarios sobre la esfera y mostrar que el camino del gran círculo que los conecta es el más corto que cualquier otro camino posible.

Primero, asumamos que la esfera sobre la que estamos trabajando tiene un radio igual a 1 y que el centro de la esfera está en el origen del sistema de coordenadas. Segundo, por la simetría de la esfera, asumamos que el polo norte es uno de los dos puntos que deseamos conectar. El otro punto, cualquiera que sea, puede ser localizado usando latitudes y longitudes, así que digamos que su latitud es ϕ_1 , medido en radianes desde el ecuador, y que su longitud es θ_1 , midiendo desde el meridiano primo (el cual es el meridiano en el cual la longitud es de cero grados, es decir, un meridiano de referencia). En este contexto, la latitud del polo norte es $\pi/2$ y su longitud no está realmente definida.

Ahora, el arco del círculo máximo desde el polo norte al otro punto estará sobre el meridiano en el cual se encuentra contenido el punto. El arco viajará un ángulo de $\pi/2 - \phi_1$ a través de este meridiano, así que el tamaño del arco será la cantidad $\pi/2 - \phi_1$. Recordemos que estamos asumiendo que la esfera tiene un radio igual a 1.

Debemos considerar algún otro camino arbitrario que conecte a estos dos puntos y mostrar que su longitud es mayor (o igual) que $\pi/2 - \phi_1$. Para hacer esto, pensemos en un camino el cual está caracterizado por las funciones $\phi(t)$ y $\theta(t)$ las cuales determinan la latitud y longitud en cada tiempo t mientras nos movemos del polo norte hacia el otro punto.

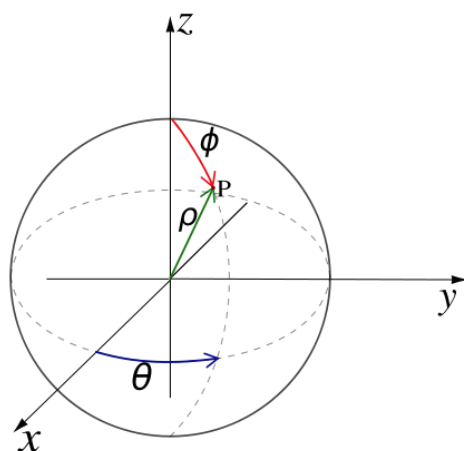
Para calcular la longitud de nuestro camino, debemos integrar nuestra función de rapidez respecto del tiempo sobre el intervalo de tiempo que dura nuestro viaje. Para esto recordemos la siguiente definición.

Definición 1.6.1 Dado un punto $P = (x, y, z)$ en el espacio, las coordenadas esféricas de P es el conjunto (ρ, θ, ϕ) , definido como sigue

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$$

donde

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$



En el tiempo t nuestra latitud es $\phi(t)$ y nuestra longitud es $\theta(t)$. En coordenadas esféricas de tres dimensiones, esto significa que nuestro vector de posición está dado por

$$r(t) = \langle \cos \phi(t) \cos \theta(t), \cos \phi(t) \sin \theta(t), \sin \phi(t) \rangle. \quad (23)$$

Usando la regla de la cadena, nuestro vector de velocidad en el tiempo t es la derivada de cada coordenada del vector de posición, llamada,

$$r'(t) = \left\langle -\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) - \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}, -\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \sin \theta(t) \right. \\ \left. + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt}, \cos \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \right\rangle. \quad (24)$$

Nuestra rapidez al tiempo t es justamente la magnitud de nuestro vector de velocidad, ésta es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de nuestro vector de velocidad, que se simplifica en

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \cos^2 \phi(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}. \quad (25)$$

Para el paso final, asumamos que nuestro camino va del polo norte al otro punto y que cuando estamos en el polo norte $t = 0$ y el camino termina en t_1 . Así, $\phi(t_1) = \phi_1$, $\theta(t_1) = \theta_1$, y $\phi(0) = \pi/2$. }

La distancia que se tiene que recorrer es igual a

$$L = \int_{t=0}^{t_1} \|r'(t)\| dt. \quad (26)$$

Por otro lado, observemos que

$$\|r'(t)\| \geq \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \geq -\frac{d\phi}{dt}. \quad (27)$$

Se sigue que

$$L \geq \int_{t=0}^{t_1} -\frac{d\phi}{dt} dt = \phi(0) - \phi(t_1) = \pi/2 - \phi_1.$$

El lado derecho de esta desigualdad es la longitud de arco del círculo máximo conectando nuestros dos puntos.

1.7 Cálculo de las distancias de arco

Con ayuda de la geometría vectorial, podemos calcular la distancia del círculo máximo entre cualesquiera dos puntos en la esfera.

Asumamos por simplicidad que la esfera tiene un radio igual a 1 y que el centro de la esfera está en el origen del sistema de coordenadas. Consideremos dos puntos P y Q con latitudes ϕ_1 y ϕ_2 y longitudes θ_1 y θ_2 , respectivamente, medido en radianes. Convirtiendo

a coordenadas cartesianas en tres dimensiones, tenemos que P y Q tienen coordenadas rectangulares

$$P = (\cos \phi_1 \cos \theta_1, \cos \phi_1 \sin \theta_1, \sin \phi_1)$$

$$Q = (\cos \phi_2 \cos \theta_2, \cos \phi_2 \sin \theta_2, \sin \phi_2).$$

El centro de la esfera es también el centro del gran círculo que conecta a P y Q . Por lo tanto, los vectores \overrightarrow{OP} y \overrightarrow{OQ} desde el origen a P y a Q , respectivamente, tienen la misma magnitud que el radio del círculo máximo. El ángulo α entre estos dos vectores nos dice la proporción del gran círculo que debemos recorrer para ir de un punto a otro. De la geometría vectorial, sabemos que el *coseno* del ángulo entre dos vectores está dado por el producto punto de los dos vectores dividido por el producto de las longitudes de los vectores. La longitud de cada uno de los vectores es justamente el radio de la esfera, que es 1 en este caso. El valor del producto punto es

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= \cos \phi_1 \cos \theta_1 \cos \phi_2 \cos \theta_2 + \cos \phi_1 \sin \theta_1 \cos \phi_2 \sin \theta_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2. \end{aligned}$$

El ángulo α es entonces

$$\alpha = \arccos[\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2]. \quad (28)$$

En una esfera de radio 1, la distancia entre los puntos P y Q es la misma que el ángulo entre los vectores \overrightarrow{OP} y \overrightarrow{OQ} . En general, para una esfera de radio $R > 0$ se multiplica el ángulo por el radio de la esfera para obtener la distancia, es decir,

$$distancia = R \arccos(\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2). \quad (29)$$

Capítulo 2

Los tres problemas de localización en el plano

El problema de Weber consiste en ubicar un centro de servicio entre n puntos en un plano. La optimalidad se logra cuando la suma ponderada de las distancias del centro de servicio a los puntos de demanda se reduce al mínimo. Las ponderaciones por lo general representan el costo de la entrega por unidad de distancia.

El problema de encontrar la mejor ubicación para un centro de servicio es a menudo dominado, en cierto sentido, por las distancias entre el centro de servicio y la localización de aquellos puntos a los cuales este sirve. Tales distancias pueden ser medidas en términos del costo del transporte.

Los tres problemas fundamentales de ubicación son los siguientes:

- i) El problema de Weber (Minisum) consiste en que el centro de servicio debe ser ubicado de tal forma que la suma de las distancias entre el centro de servicio y un conjunto de puntos con ubicación conocida sea mínima.
- ii) El problema de Rawl (Minimax) consiste en ubicar el centro de servicio de tal manera que la máxima distancia entre él y un conjunto fijo de puntos sea tan pequeña como sea posible.
- iii) El problema de Maximin consiste en maximizar la mínima distancia entre el centro de servicio y un conjunto fijo de puntos. Esta aplicación aparece cuando el centro de servicio es desagradable o peligroso.

2.1 El problema de Weber en el plano

El problema de localización denominado “minisum” (usando la distancia Euclidiana) está dado por

$$\min_{x,y} f(x,y) = \sum_{i=1}^n w_i [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

donde (x, y) es la ubicación de la instalación, (a_i, b_i) es la ubicación del punto fijo con índice i , y w_i es el peso en la distancia al punto fijo i .

Un problema análogo al anterior es en el que se desea ubicar m centros de servicio, el cual es un caso más general que los formulados anteriormente.

Este problema puede ser formulado de la siguiente manera

$$\min_{x_j, y_j} \sum_{i=1}^m w_i \min_j [(a_i - x_j)^2 + (b_j - y_j)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad J = 1, \dots, m. \quad (31)$$

El significado de esta formulación es que \min_j selecciona para cada punto de demanda el centro de servicio más cercano, $\sum_{i=1}^n w_i$ suma todos los pesos de las distancias euclidianas, y la minimización es sobre las $2m$ variables $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$.

Aunque nosotros elegimos el \min_j de los términos $[(a_i - x_j)^2 + (b_j - y_j)^2]^{\frac{1}{2}}$, el índice j se mantiene ya que nosotros podemos asumir que al menos un punto de demanda se asigna a cada punto de servicio. Con el fin de reducir posibles confusiones este índice se denotará por J después de que \min_j es evaluado. Así, la minimización es sobre $x_j, y_j, J = 1, \dots, m$. Los términos $r_{ij} = [(a_i - x_j)^2 + (b_j - y_j)^2]^{\frac{1}{2}}$ son positivos excepto para la posible coincidencia de que $(a_i, b_i) = (x_j, y_j)$. Luego, se cumple que para un conjunto de números positivos C_1, \dots, C_m se tiene

$$\min\{C_1, \dots, C_m\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^m C_j^{-N} \right\}^{-\frac{1}{N}}. \quad (32)$$

Así, una buena aproximación para la solución del problema planteado puede ser encontrada eligiendo un N suficientemente grande y resolviendo

$$f(x,y) = \min_{x_j, y_j} \sum_{i=1}^m w_i \left[\sum_{j=1}^m r_{ij}^{-N} \right]^{-\frac{1}{N}}, \quad J = 1, \dots, m. \quad (33)$$

Se ha encontrado que haciendo $N = 100$ se obtiene una muy buena aproximación.

El problema en $2m$ variables puede ser resuelto utilizando métodos estándar de la programación no-lineal. Debido a que los métodos cuasi-Newton son considerados muy eficientes uno de estos puede ser elegido para resolver el problema.

Una dificultad puede ocurrir si r_{ij} es muy pequeña dado que r_{ij}^{-N} puede ser muy grande. Esta dificultad se puede superar eligiendo una constante η tal que si $r_{ij} \leq \eta$, el punto de demanda (a_i, b_i) se asignará a (x_j, y_j) [2].

2.2 Minimax y Maximin

El problema de localización denominado “minimax” es el siguiente

$$\min_{x,y} g(x, y) = \max_i \{w_i [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]^{\frac{1}{2}}\}. \quad (34)$$

Una idea de la naturaleza del problema puede ser adquirida por considerar el siguiente procedimiento gráfico. Elegir un valor de $f(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ suficientemente grande de tal manera que los círculos centrados en (a_i, b_i) con radio f/w_i no sean disjuntos. Luego reducir el valor de f hasta que la intersección sea simplemente un punto, y f no pueda ser reducida sin que la intersección sea vacía. Este punto entonces es la solución del minimax.

El problema de localización en el plano denominado “maximin” se define como sigue

$$\max_{x,y} h(x, y) = \min_i \{w_i [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]^{\frac{1}{2}}\}, \quad (35)$$

sujeto a $(x, y) \in C$. El conjunto de restricciones C son, por supuesto, necesarias porque de otro modo el problema podría ser resuelto por el camino probablemente práctico de empujar (x, y) hacia el “infinito” en una dirección.

Diferentes métodos para la solución de estos problemas son basados en aproximaciones diferenciables a la función objetivo. Dado que el problema original y sus aproximaciones pueden no ser ni cóncavas ni convexas, la solución alcanzada puede ser sólo un mínimo local. Curiosamente, para los problemas pequeños de localización ya sea de dos o tres centros de servicio, el mínimo global se alcanza incluso cuando la posición inicial está lejos de ser el resultado final.

Se tomará en cuenta que se desea ubicar m centros de servicio, el cual es un caso más general que los formulados anteriormente.

El problema de ubicación “minimax” puede ser escrito como sigue

$$\min_{x_j, y_j} \max_i w_i \left\{ \min_j [(a_i - x_j)^2 + (b_i - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad J = 1, \dots, m. \quad (36)$$

Aquí, \min_j selecciona para cada punto de demanda su centro de servicio más próximo y las operaciones $\min_{x_j, y_j} \max_i$ deben ser realizadas. El procedimiento para encontrar el más pequeño de m números positivos, dados por la ecuación (32), se utilizará aquí. También necesitaremos expresiones diferenciales para seleccionar la magnitud positiva más grande de entre n . Una posible aproximación que se podría utilizar sería

$$\max\{C_1, \dots, C_n\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n C_i^M \right\}^{1/M} \quad (37)$$

Con el fin de aproximar la expresión (36) por una función diferenciable, tenemos que usar (37) y (32) junto con dos grandes parámetros N y M ; para simplicidad tomaremos $N = M$. Usando la ecuación anterior podemos escribir

$$f_i(x, y) = w_i \min_j [(a_i - x_j)^2 + (b_i - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} \cong w_i \left\{ \sum_{j=1}^m v_{ij}^{-N/2} \right\}^{1/N}. \quad (38)$$

Ahora estamos interesados en $\min_{x_j, y_j} \max_i f_i(x, y)$ el cual puede ser aproximado por

$$\min_{x, y} \max_i f_i(x, y) \cong \min_{x, y} \left\{ \sum_{i=1}^n [f_i(x, y)]^N \right\}^{1/N}. \quad (39)$$

Sustituyendo la expresión (38) en (39) obtenemos la aproximación diferenciable de (36), a saber,

$$\min_{x, y} \left(\sum_{i=1}^n w_i \left\{ \sum_{j=1}^m [(a_i - x_j)^2 + (b_i - y_j)^2]^{-\frac{N}{2}} \right\}^{-1} \right)^{1/N}. \quad (40)$$

El cual es equivalente al siguiente problema

$$\min_{x,y} \sum_{i=1}^n w_i \left\{ \sum_{j=1}^m [(a_i - x_j)^2 + (b_i - y_j)^2]^{-\frac{N}{2}} \right\}^{-1}. \quad (41)$$

Similar al problema (33), este es un problema de minimización sin restricciones de una función diferenciable no-lineal con $2m$ variables, $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$. De nuevo, la función no es cóncava ni convexa y por lo tanto los métodos de programación no-lineal darían mínimos locales que dependerán de la suposición inicial tomada al partir las iteraciones. El problema ha sido resuelto usando métodos cuasi-Newton mencionados anteriormente [2].

Capítulo 3

El Problema de Weber en la Esfera

Consideramos el problema en el que los puntos, en lugar de estar en un plano están en una esfera y el centro de servicio debe ser ubicado en la superficie de la esfera. El problema de Weber en la esfera es más complejo que su contraparte en el plano porque la función objetivo no es convexa.

3.1 El problema de Weber en una esfera

Imaginemos un plano que pasa a través del centro de una esfera. El círculo formado donde el plano corta a la superficie de la esfera es llamado “Círculo máximo”. En la sección 1.6 hemos demostrado que la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera en la superficie de la esfera se mide a lo largo del círculo máximo que pasa por estos puntos. Esta distancia es conocida por varios autores como la línea geodésica, el círculo máximo, o como la distancia de arco más corta.

Como la circunferencia de un círculo es $2\pi R$, donde R es el radio de la esfera, se nota inmediatamente que la distancia más grande entre dos puntos de la esfera es πR . Esta distancia se producirá cuando los puntos están en los extremos opuestos de una línea que pasa por el centro de una esfera (Definición 3.1.1). A partir de ahora consideremos $R = 1$; esta suposición no incurre en pérdida de generalidad, ya que sólo necesitamos multiplicar nuestras distancias por R para volver a las distancias originales.

Denotemos la menor longitud de arco entre dos puntos sobre una esfera unitaria por α . A continuación, definimos las siguientes tres normas:

$$\text{Norma 1: } \alpha \text{ (distancia de arco más corto)} \quad (42 \text{ A})$$

$$\text{Norma 2A: } 4 \sin^2(\alpha/2) \quad (42 \text{ B})$$

$$\text{Norma 2B: } \pi \sin^2(\alpha/2) \quad (42 \text{ C})$$

Tengamos en cuenta que la única diferencia entre las normas 2A y 2B es una constante multiplicativa (4 ó π). Como se verá, con el fin de optimizar la ubicación del centro de servicio en nuestro problema, la constante es irrelevante, es decir, el punto óptimo usando la Norma 2A es siempre el mismo que si usáramos la Norma 2B.

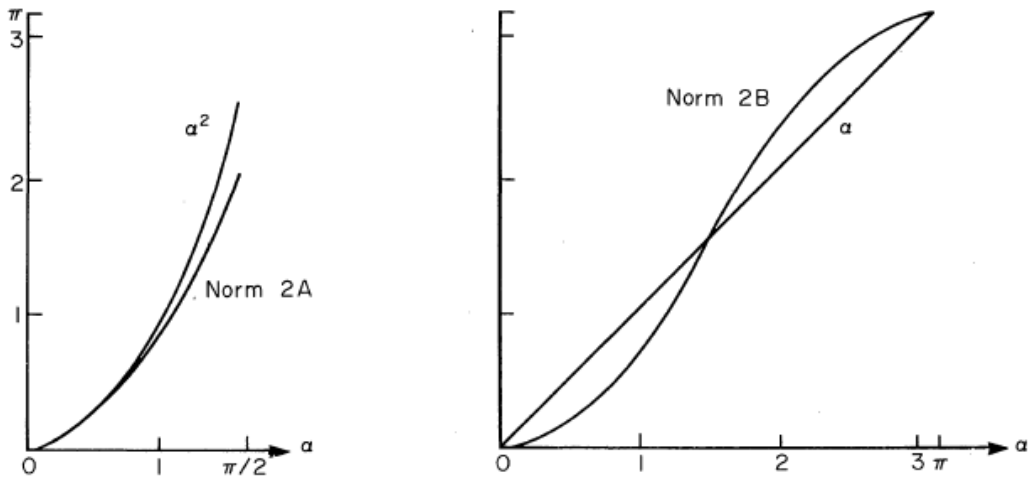


Figura 1 y 2. Norma 2A y Norma 2B

Las normas 2A y 2B son trazadas contra la Norma 1 en las Figuras 1 y 2. Tengamos en cuenta que cuando la distancia entre los puntos es menos de la mitad de la circunferencia de la esfera ($\alpha \leq \pi/2$) la Norma 2A es una aproximación bastante buena al cuadrado de la distancia más corta del arco. La norma 2B se puede considerar como una aproximación ruda para α y se representa frente a la Norma 1 en la Figura 2.

Notemos que la Norma 2A es casi el cuadrado de la distancia euclidiana a través de la esfera. Las distancias euclidianas cuadráticas fueron usadas por Katz y Cooper [14].

Sin embargo, para nuestro problema se sugiere el uso de la Norma 2A sólo en la semiesfera porque queremos usarlo para un propósito diferente, a saber, como una aproximación para la distancia de arco al cuadrado.

3.2 Formulación del Problema

Trabajaremos con la “esfera normal” la cual es aquella que tiene radio igual a uno. Cualquier punto en la esfera es definido por su latitud ϕ y su longitud θ . Dados dos puntos $r_1(\phi_1, \theta_1)$, $r_2(\phi_2, \theta_2)$, la longitud de arco más corta es definido por α y es tal que

$$\cos \alpha = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2. \quad (43)$$

Supongamos que hay n puntos de demanda $r_i(\phi_i, \theta_i) i = 1, \dots, n$, asociados a sus respectivos pesos w_i . Debemos encontrar la ubicación de un centro de servicio $r(\phi, \theta)$ que minimice la suma de las distancias con peso a los puntos de demanda. Basados en lo anterior definimos la función f como sigue

$$f = \min_{\phi, \theta} \sum_{i=1}^n w_i d_i, \quad (44)$$

donde d_i es la distancia entre r_i y r por una norma dada. Notemos que el ϕ y el θ que minimizan la función anterior para la Norma 2A deben ser los mismos que minimizan la función para la Norma 2B porque la segunda suma es siempre $\pi/4$ veces la primera. La función a ser minimizada no es convexa debido a que la suma con pesos es acotada por arriba y por abajo y por tanto alcanza su máximo y su mínimo.

En el problema usual de Weber, se asume que $w_i \geq 0$. Nosotros omitiremos esta condición.

3.3 Algunas propiedades del problema

Las siguientes definiciones y propiedades serán de utilidad para poder concluir resultados de mayor interés.

Como trabajo de tesis las propiedades siguientes se probaron.

Definición 3.3.1 El antípode de un punto dado es el punto en el otro lado de la esfera en la línea que conecta el punto dado con el centro de la esfera. El antípode de $r(\phi, \theta)$ es $\bar{r}(-\phi, \theta + \pi)$.

Propiedad 3.3.1 La suma de las distancias de cualquier punto en la esfera a su antípode es una constante. Esta distancia es igual a π en la Norma 1 y 2B y 4 en la Norma 2A.

Demostración. Sean $r(\phi, \theta)$ y $\bar{r}(-\phi, \theta + \pi)$ dos puntos sobre la esfera unitaria (\bar{r} es el antípode de r), entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\cos \alpha = \cos \phi \cos -\phi \cos(\pi) + \sin \phi \sin -\phi.$$

$$\cos \alpha = \cos \phi \cos -\phi (-1) + \sin \phi \sin -\phi.$$

$$\cos \alpha = \cos \phi (-\cos \phi)(-1) + \sin \phi \sin \phi.$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi. \cos \alpha = 1$$

$$\alpha = \pi.$$

Así, la distancia entre cualquier punto y su antípode es igual a π . La demostración para las otras normas se deduce fácilmente con este resultado obtenido. ■

Propiedad 3.3.2 La suma de la función objetivo evaluada en un punto y su antípode es una constante, y es igual a

$$\pi \sum_{i=1}^n w_i \text{ en la Norma 1 y 2B,} \quad 4 \sum_{i=1}^n w_i \text{ en la norma 2A.}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la propiedad anterior. ■

Propiedad 3.3.3 Un punto es el mínimo de un problema si y sólo si su antípode es el máximo.

Demostración. Sea $r^*(\phi^*, \theta^*)$ el punto mínimo de un problema y sea $\bar{r}^*(-\phi^*, \theta^* + \pi)$ su antípode. Por definición tenemos

$$\alpha_i = \arccos[\cos \phi^* \cos \phi_i \cos(\theta^* - \theta_i) + \sin \phi^* \sin \phi_i],$$

que es la distancia del punto $r^*(\phi^*, \theta^*)$ a los puntos de demanda $r_i(\phi_i, \theta_i)$ $i = 1, \dots, n$, asociados a sus respectivos pesos w_i .

Por otro lado, la distancia del punto $\bar{r}^*(-\phi^*, \theta^* + \pi)$ a los puntos de demanda $r_i(\phi_i, \theta_i)$ $i = 1, \dots, n$ está definida por

$$\bar{\alpha}_i = \arccos[\cos -\phi^* \cos \phi_i \cos(\theta^* + \pi - \theta_i) + \sin -\phi^* \sin \phi_i].$$

Se puede verificar fácilmente que

$$-\alpha_i = \bar{\alpha}_i.$$

De la igualdad anterior se obtiene lo siguiente

$$-f(\phi^*, \theta^*) = -\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n w_i (-\alpha_i) = \sum_{i=1}^n w_i (\bar{\alpha}_i) = f(-\phi^*, \theta^* + \pi).$$

Ahora bien, dado que el punto $r^*(\phi^*, \theta^*)$ es el mínimo del problema, entonces

$$f(\phi^*, \theta^*) \leq f(\phi, \theta)$$

para cualquier punto $r(\phi, \theta)$ en la esfera. De aquí se sigue que

$$-f(\phi^*, \theta^*) \geq -f(\phi, \theta),$$

utilizando que $-f(\phi^*, \theta^*) = f(-\phi^*, \theta^* + \pi)$ y la desigualdad anterior se tiene que

$$f(-\phi^*, \theta^* + \pi) \geq -f(\phi, \theta).$$

Y por tanto

$$f(-\phi^*, \theta^* + \pi) \geq f(-\phi, \theta + \pi).$$

Dado que la desigualdad anterior se cumple para cualquier ϕ y θ , se sigue que $\bar{r}^*(-\phi^*, \theta^* + \pi)$ es un punto máximo del problema. ■

Propiedad 3.3.4 *Un punto y su antípoda con pesos iguales pueden ser agregados al problema sin que haya cambios en la ubicación óptima del centro de servicio.*

Demostración. Supongamos que agregamos los puntos $r^*(\phi_*, \theta_*)$ y $\bar{r}^*(-\phi_*, \theta_* + \pi)$ al problema, luego la longitud de arco entre el punto $r(\phi, \theta)$ que minimiza el problema y el punto $r'(\phi_*, \theta_*)$ es

$$\cos \alpha_* = \cos \phi \cos \phi_* \cos(\theta - \theta_*) + \sin \phi \sin \phi_*,$$

donde α_* es el ángulo entre los vectores formados por $r(\phi, \theta)$ y $r'(\phi_*, \theta_*)$. Y la longitud de arco entre $r(\phi, \theta)$ y $\bar{r}'(-\phi_*, \theta_* + \pi)$ está dada por

$$\cos \alpha_{**} = \cos \phi \cos -\phi_* \cos(\theta - (\theta_* + \pi)) + \sin \phi \sin -\phi_*$$

donde α_{**} es el ángulo entre los vectores formados por $r(\phi, \theta)$ y $\bar{r}'(-\phi_*, \theta_* + \pi)$.

Desarrollando algebraicamente estas dos distancias de arco obtenemos que una es el inverso aditivo de la otra, es decir, $\alpha_* = -\alpha_{**}$. Por lo tanto, si agregamos estos dos puntos en el problema no habrá cambios en la solución de éste dado que al sumarse las distancias de arco α_* y α_{**} estas se anularán. ■

Propiedad 3.3.5 Un punto con peso w_i puede ser remplazado por su antípode con peso $-w_i$, sin que haya un cambio en la ubicación óptima del centro de servicio.

Demostración. Supongamos que reemplazamos el punto $r_k(\phi_k, \theta_k)$ por el punto $\bar{r}_k(-\phi_k, \theta_k + \pi)$, donde el peso de este punto es $-w_k$. La longitud de arco que va del punto $r(\phi, \theta)$ (aquel que minimiza el problema) al punto $r_k(\phi_k, \theta_k)$ es

$$\cos \alpha_k = \cos \phi \cos \phi_k \cos(\theta - \theta_k) + \sin \phi \sin \phi_k$$

donde α_k es el ángulo entre los vectores formados por $r(\phi, \theta)$ y $r_k(\phi_k, \theta_k)$. Por otro lado, la longitud de arco que va del punto $r(\phi, \theta)$ (aquel que minimiza el problema) al punto $\bar{r}_k(-\phi_k, \theta_k + \pi)$ es

$$\cos \alpha_{\bar{k}} = \cos \phi \cos -\phi_k \cos(\theta - (\theta_k + \pi)) + \sin \phi \sin -\phi_k$$

Desarrollando algebraicamente se puede verificar que $\alpha_{\bar{k}} = -\alpha_k$, de aquí se tiene que el punto $r_k(\phi_k, \theta_k)$ puede ser reemplazado por su antípode con peso $-w_k$ sin que haya un cambio en la solución del problema. ■

Definición 3.3.2 Un problema está en su "forma normal" si este tiene sólo pesos positivos ($w_i \geq 0, i = 1, \dots, n$).

Propiedad 3.3.6 Cualquier problema dado puede ser transformado a uno equivalente el cual es de forma normal.

Demostración. Es inmediata de la propiedad 3.3.5. ■

3.4 Condiciones para el mínimo local en un punto de demanda (Norma 1)

Las condiciones bajo las cuáles el punto de demanda $r_k(\phi_k, \theta_k)$ es un mínimo local en la Norma 1, son deducidas por Katz y Cooper [14]. En nuestra notación, con α_{ik} la distancia de arco más corta entre los puntos r_i y r_k , la función objetivo en el punto r_k es:

$$F_1(r_k) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_{ik}, \tag{45}$$

donde α_{ik} es tal que

$$\cos \alpha_{ik} = \cos \phi_i \cos \phi_k \cos(\theta_k - \theta_i) + \sin \phi_i \sin \phi_k. \quad (46)$$

Teorema 3.4.1 *Existe un mínimo local en el punto k si y sólo si*

$$w_k \geq (A_k^2 + B_k^2)^{1/2}, \quad (47)$$

donde

$$A_k = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_{ik}} [-\sin \phi_k \cos \phi_i \cos(\theta_k - \theta_i) + \cos \phi_k \sin \phi_i]$$

$$B_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_{ik}} \cos \phi_i \sin(\theta_i - \theta_k).$$

La demostración de este teorema se revisó pero no se enuncia en este trabajo, esta se puede encontrar en [14].

3.5 Cálculo de puntos Críticos

Consideremos ahora las condiciones para obtener los valores extremos de la función objetivo.

El objetivo es llegar a un procedimiento Weiszfeld [16] el cual es algo diferente de la propuesta hecha por Katz y Cooper [14]. Sea la función objetivo $F_j[r(\phi, \theta)]$ para la Norma j ,

$$F_1(r) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i \quad (49)$$

$$F_{2A}(r) = 4 \sum_{i=1}^n w_i \sin^2(\alpha_i/2)$$

$$F_{2B}(r) = \pi \sum_{i=1}^n w_i \sin^2(\alpha_i/2)$$

y sea

$$F_2(r) = \sum_{i=1}^n w_i \sin^2(\alpha_i/2),$$

donde α_i es la longitud de arco entre los puntos $r(\phi, \theta)$ y $r_i(\phi_i, \theta_i)$.

Las derivadas para la Norma 1 son:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = - \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} [-\sin \phi \cos \phi_i \cos(\theta - \theta_i) + \cos \phi \sin \phi_i] \quad (50)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \cos \phi \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin(\theta - \theta_i)$$

Las derivadas para la Norma 2 son:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i [-\sin \phi \cos \phi_i \cos(\theta - \theta_i) + \cos \phi \sin \phi_i] \quad (51)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cos \phi \sum_{i=1}^n w_i \cos \phi_i \sin(\theta - \theta_i).$$

Nota:

- i) $\partial F_1/\partial \phi$, $\partial F_1/\partial \theta$ no están definidas en los puntos de demanda ni en sus antípodas porque $\sin \alpha_i = 0$. Para otros puntos $\sin \alpha_i > 0$.
- ii) En los polos, $\cos \phi = 0$ y así $\partial F_1/\partial \theta = \partial F_2/\partial \theta = 0$. Esto simplemente significa que un cambio en θ no cambiará el punto óptimo. La solución de $\partial F_1/\partial \phi = \partial F_1/\partial \theta = 0$ (cuando $\cos \phi = 0$) se obtiene como sigue:

Supongamos que $\cos \phi \neq 0$, así se cumple que $\partial F_1/\partial \theta = 0$ sí y sólo si

$$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin(\theta - \theta_i) = 0 \quad (52)$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i [\sin \theta \cos \theta_i - \cos \theta \sin \theta_i] &= 0 \\ \sin \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i - \cos \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i &= 0 \\ \sin \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i &= \cos \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i. \end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i}. \quad (53)$$

Por otro lado, $\partial F_1 / \partial \phi = 0$ sí y sólo si

$$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} [-\sin \phi \cos \phi_i \cos(\theta - \theta_i) + \cos \phi \sin \phi_i] = 0 \quad (54)$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} [-\sin \phi \cos \phi_i [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i] + \cos \phi \sin \phi_i] &= 0 \\ -\sin \phi \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i] + \cos \phi \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i &= 0 \\ \sin \phi \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i] &= \cos \phi \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i \\ \frac{\sin \phi}{\cos \phi} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i]}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\cos \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i + \sin \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}. \quad (55)$$

Usando (53) y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i + \sin \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i} \quad (56)$$

$$\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i + \sin \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}$$

multiplicando por $1/\sin \theta$ en ambos lados obtenemos

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\cos^2 \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i + \sin^2 \theta \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}. \quad (57)$$

Así obtenemos la solución

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}. \quad (58)$$

Así las soluciones de $\partial F_1/\partial \phi = \partial F_1/\partial \theta = 0$ son

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i} \quad (59)$$

y

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}, \quad (60)$$

siempre y cuando $\cos \phi \neq 0$. Esta es una solución implícita porque ϕ y θ son usados en el cálculo de los α_i 's. La solución que se obtiene viene en pares, es decir, si obtenemos un mínimo entonces su antípode es un máximo por la propiedad 3.3.3.

De lo anterior se deriva el siguiente corolario.

Corolario 3.5.1 *Un punto $r(\phi, \theta)$ distinto de los puntos de demanda (y los antípodas de estos) y tal que $\cos \phi \neq 0$, es óptimo si y sólo si cumple*

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \cos \theta_i}$$

y

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}.$$

Si estamos suficientemente cerca del mínimo o máximo local, entonces (59) y (60) pueden ser usados iterativamente de manera análoga al procedimiento de Weiszfeld [16], para hallar la solución con el algoritmo que se plantea en [5]:

1. Elegir un punto inicial $\phi^{(0)}, \theta^{(0)}$. Hacer $k = 0$.
2. Calcular $\phi^{(k+1)}$ y $\theta^{(k+1)}$ con (59) y (60) usando $\phi^{(k)}$ y $\theta^{(k)}$ para calcular $\sin \alpha_i$.
3. Si $|\phi^{(k+1)} - \phi^{(k)}| + |\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}| > \varepsilon$ ir a 2.
4. Evaluar $[\phi^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}]$ y su antípoda para obtener el valor mínimo y máximo.

Por otro lado, resolviendo $\partial F_2 / \partial \phi = \partial F_2 / \partial \theta = 0$ obtenemos las soluciones

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cos \phi_i \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n w_i \cos \phi_i \cos \theta_i} \quad (61)$$

y

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n w_i \cos \phi_i \sin \theta_i} \quad (62)$$

Como habíamos mencionado anteriormente, estas soluciones minimizan también a F_{2A} y F_{2B} .

Consideremos el siguiente problema: un producto necesita ser distribuido a 15 ciudades, como se muestra en la siguiente tabla, donde solo los costos por unidad de distancia son relevantes.

	<i>Ciudad</i>	<i>Latitud</i>	<i>Longitud</i>	<i>Proporción de demanda</i>
1	London	51.5	0.4	0.12
2	Paris	48.9	2.3	0.07
3	Zurich	47.4	8.5	0.08
4	Rome	41.9	12.5	0.05
5	Copenhagen	55.7	12.6	0.08
6	Berlin	52.5	13.4	0.07
7	Stockholm	59.3	18.9	0.06
8	Athens	38.0	23.7	0.07
9	Ankara	39.9	32.8	0.05
10	Tel-Aviv	32.1	34.8	0.05
11	Moscow	55.7	37.7	0.05
12	Teheran	35.4	51.4	0.07
13	Bombay	18.9	72.8	0.03
14	Manila	14.6	121.0	0.05
15	Tokyo	35.6	139.7	0.10

Figura 3. 15 ciudades y sus demandas

Deseamos encontrar el punto óptimo en el cual se debe instalar el centro de distribución para que el costo de entrega sea mínimo.

Utilizando el algoritmo planteado anteriormente se realizó un programa en *Mathematica* 7.0, utilizando $\varepsilon = 1/10,000$ y se obtuvo una aproximación del punto mínimo el cual fue $r^*(51.70, 14.95)$. El programa mencionado se agrega en el anexo.

Por otro lado, utilizando (61) y (62) se obtuvo el punto $r^{**}(52.62, 35.25)$.

Luego, se verifica lo siguiente

$$\frac{F_1(r^*)}{F_1(r^{**})} = .9202,$$

es decir, el punto óptimo obtenido con la norma 2 es una buena aproximación al punto óptimo obtenido con la norma 1.

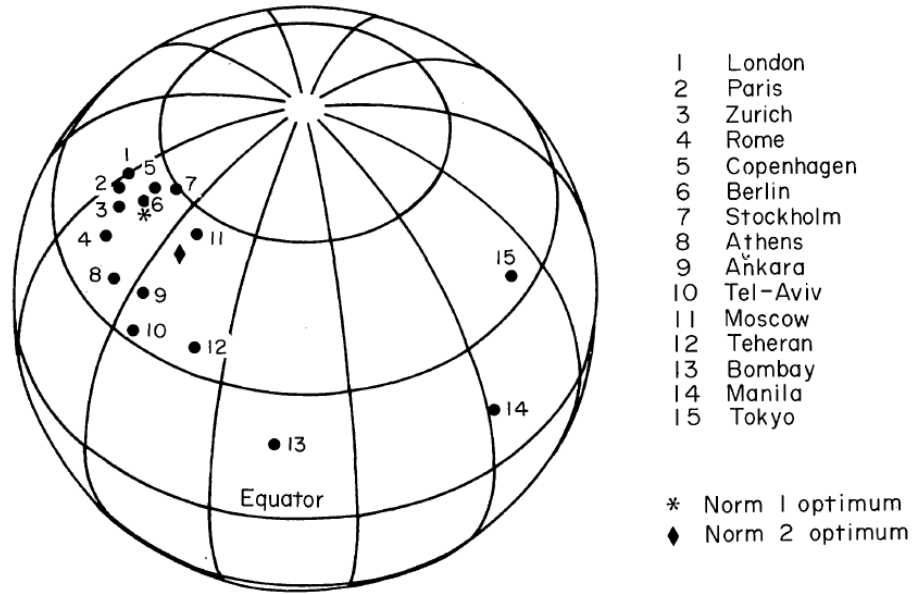


Figura 4. Las 15 ciudades y el punto óptimo con la norma 1 y 2

Después de realizar varias pruebas con el algoritmo anterior y revisando [15] se observó lo siguiente:

- i) El punto inicial no puede ser un punto de demanda ni su antípode dado que $\sin \alpha_i = 0$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ii) Se puede mejorar el algoritmo evaluando primero si algún punto de demanda es óptimo utilizando el teorema 3.4.1.
- iii) Se puede dar el caso en que el conjunto de puntos generados por la sucesión contenga algún punto de demanda, es decir, $\{(\phi^{(k-1)}, \theta^{(k-1)})\}_{k \in \mathbb{N}} \cap \{r_1, \dots, r_n\} \neq \emptyset$, y al evaluar la función en este punto el algoritmo no va a converger dado que la función utilizada no está definida en estos puntos. En este caso se propone tomar un punto suficientemente cercano a tal punto de demanda (o antípode) y continuar las iteraciones con este punto inicial como partida.
- iv) El punto obtenido con las ecuaciones (61) y (62) es una buena aproximación al punto óptimo (pruebas numéricas), y puede ser un candidato ideal para el punto inicial en el algoritmo anteriormente mencionado.

Utilizando las precisiones anteriores se propone el siguiente algoritmo:

1. Si $w_k \geq (A_k^2 + B_k^2)^{1/2}$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$ entonces el punto k es óptimo y finaliza el programa. Si no ocurre esto se pasa a 2.
2. Elegir un punto inicial $\phi^{(0)}, \theta^{(0)}$ (este punto debe ser distinto de cualquier punto de demanda). Hacer $k = 0$. Se puede utilizar como punto inicial el punto obtenido con la norma 2.
3. Calcular $\phi^{(k+1)}$ y $\theta^{(k+1)}$ con (59) y (60) usando $\phi^{(k)}$ y $\theta^{(k)}$ para calcular sin α_i .
4. Si $\phi^{(k+1)}$ y $\theta^{(k+1)}$ son iguales a la latitud y longitud de algún punto de demanda (o su antípode), entonces se toma el punto $r^{(0)}(\phi^{(k+1)} + \delta, \theta^{(k+1)} + \delta)$ ($\delta > 0$) como nuevo punto inicial y se sigue el paso 3.
5. Si $|\phi^{(k+1)} - \phi^{(k)}| + |\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}| > \varepsilon$ ir a 3.
6. Evaluar $[\phi^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}]$ y su antípode para obtener el valor mínimo y máximo.

3.6 Problemas con solución óptima única (Norma 1)

Sabemos que si hay puntos de demanda extendidos por toda la esfera, podría haber varios mínimos locales. Por otra parte, es intuitivo pensar que si todos los puntos se concentran dentro de un círculo muy pequeño en la esfera las distancias tienden a ser casi Euclidianas y por lo tanto debe haber una solución única. Es interesante determinar cuál es el círculo más grande en el que se asegura un mínimo local único. Aquí, el mínimo local es también global. Intuitivamente, parece que si todos los puntos están en un hemisferio entonces hay una solución única, pero esto no es cierto. Como se probará más adelante, el círculo máximo en la esfera de radio unitario que nos garantiza un mínimo local único es el de radio $\pi/4$. Antes de probar esto, expondremos algunas definiciones que tienen que ver con la convexidad en una esfera.

No vamos a desarrollar un conjunto completo de los teoremas de convexidad, pero presentaremos teoremas pertinentes a la prueba que necesitamos. Algunas definiciones necesarias son las siguientes:

Definición 3.6.3 *Un círculo esférico con un centro dado y radio R se define sobre una esfera como el conjunto de puntos cuya distancia de arco más corta al centro es igual a R . Un círculo se divide la esfera en dos partes, vamos a definir los puntos para estar dentro un círculo sólo si el centro del círculo está incluido.*

Definición 3.6.4 Un conjunto convexo se define en la superficie de una esfera como un conjunto donde para dos puntos cualesquiera del conjunto el arco más corto conectando los dos puntos está incluido en el conjunto.

Definición 3.6.5 Sea $\rho(r_1, r_2, \lambda)$ un punto sobre el arco más corto que conecta a r_1 y r_2 tal que la distancia entre r_1 y ρ es $\lambda d(r_1, r_2)$.

Definición 3.6.6 (Función convexa) f es una función convexa en un conjunto D sobre una esfera si para cada $\lambda \in [0, 1]$

$$f[\rho(r_1, r_2, \lambda)] \leq \lambda f(r_1) + (1 - \lambda)f(r_2). \quad (63)$$

Teorema 3.6.2 Sea f una función continua sobre un conjunto convexo D en una esfera y sean $r_1, r_2 \in D$. Entonces si f cumple lo siguiente:

$$f[\rho(r_1, r_2, 0.5)] \leq \frac{1}{2} [f(r_1) + f(r_2)] \quad (64)$$

se tiene que f es una función convexa.

Nota:

$$0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1 \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Para simplificar la notación se utilizará $\rho(\lambda_1)$ en lugar de $\rho(r_1, r_2, \lambda_1)$ para denotar un punto sobre el arco más corto que une a r_1 y r_2 .

$[\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)]$ denotará el arco más corto que une a $\rho(\lambda_1)$ y $\rho(\lambda_2)$.

$(\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2))$ se utilizará para denotar al arco más corto que une a $\rho(\lambda_1)$ y $\rho(\lambda_2)$ pero no incluye a estos.

Demostración. Supongamos que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ no es convexa, entonces existe un sub-arco $[\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)]$, el cual está contenido en el arco más corto que une a r_1 y r_2 , y es tal que la gráfica de $f([\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)])$ no está debajo de la cuerda que une $(\rho(\lambda_1), f(\rho(\lambda_1)))$ y $(\rho(\lambda_2), f(\rho(\lambda_2)))$, esto es, la función

$$\varphi(\rho(\lambda)) = f(\rho(\lambda)) - \frac{f(\rho(\lambda_2)) - f(\rho(\lambda_1))}{\rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1)} (\rho(\lambda) - \rho(\lambda_1)) - f(\rho(\lambda_1)) \quad (65)$$

donde $\rho(\lambda) \in [\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)]$, verifica que

$$\sigma = \sup\{\varphi(\rho(\lambda)): \rho(\lambda) \in [\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)]\} > 0$$

además $\varphi(\rho(\lambda))$ cumple que

$$\varphi[\rho(\lambda)] \leq \frac{1}{2} [\varphi(\rho(\lambda_1)) + \varphi(\rho(\lambda_2))].$$

Luego, sea $c = \inf\{\rho(\lambda) \in [\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2)]: \varphi(\rho(\lambda)) = \sigma\}$, así necesariamente $\varphi(c) = \sigma$ y $c \in (\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2))$ (dado que $\varphi(\rho(\lambda_1)) = 0$ y $\varphi(\rho(\lambda_2)) = 0$).

Por definición de c , para cualquier $h > 0$ para el cual $c \pm h \in (\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2))$ tenemos lo siguiente

$$\varphi(c - h) < \varphi(c) \text{ y } \varphi(c + h) \leq \varphi(c),$$

de aquí se tiene que

$$\varphi(c) > \frac{\varphi(c - h) + \varphi(c + h)}{2}$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto f es una función convexa. ■

Teorema 3.6.3 *La distancia de un punto dado es una función convexa dentro de un círculo de radio $\pi/2$ y centro en r .*

Demostración. Elijamos el polo norte como nuestra r . Tomemos dos puntos cualesquiera $r_1(\phi_1, \theta_1)$, $r_2(\phi_2, \theta_2)$ con $\phi_1, \phi_2 \geq 0$.

$$d(r_1, r) = \pi/2 - \phi_1$$

$$d(r_2, r) = \pi/2 - \phi_2$$

$$d[\rho(r_1, r_2, 0.5), r] = \pi/2 - \phi_0,$$

donde ϕ_0 es la latitud del centro del arco más corto que conecta a r_1 y r_2 . Por la fórmula de la mediana [13]

$$\sin \phi_0 = \sin \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} + \cos \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} / \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (66)$$

Usando la ecuación (43) para α obtenemos

$$\sin \phi_0 = \frac{\sin \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2}}{\left[1 - \frac{\sin^2 \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} \cos \phi_1 \cos \phi_2}{\cos^2 \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2}} \right]^{1/2}}. \quad (67)$$

Así

$$\phi_0 \geq \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}. \quad (68)$$

Por lo tanto

$$\frac{\pi}{2} - \phi_0 \leq \frac{\pi/2 - \phi_1 + \pi/2 - \phi_2}{2} \quad (69)$$

y

$$d[\rho(r_1, r_2, 0.5), r] \leq \frac{1}{2} [d(r_1, r) + d(r_2, r)]. \quad (70)$$

Así, $d(x, r)$ es una función convexa al norte del ecuador. ■

Propiedad 3.6.7 *Los puntos ubicados dentro de un círculo esférico en la esfera unitaria con radio menor o igual que $\pi/2$ forman un conjunto convexo.*

Demostración. La prueba es inmediata de la definición de α . ■

De la propiedad y teorema anterior podemos mencionar el siguiente teorema que es importante para nuestros propósitos.

Teorema 3.6.4 *Una función convexa $f(r)$ en un conjunto convexo D posee un mínimo único.*

Demostración. Supongamos que r_1 y r_2 son diferentes mínimos locales. El arco más corto que conecta a r_1 y r_2 está contenido en D . Nosotros sabemos que:

$$f[\rho(r_1, r_2, \lambda)] \leq \lambda f(r_1) + (1 - \lambda) f(r_2).$$

Ahora, supongamos que $f(r_1) < f(r_2)$, entonces

$$f[\rho(r_1, r_2, \lambda)] < f(r_2)$$

para $\lambda > 0$ tan pequeño como se desee. Esto contradice el hecho de que r_2 es un mínimo local. ■

Ahora que hemos definido y precisado algunos resultados podemos probar la existencia y unicidad de un mínimo bajo ciertas condiciones, el siguiente teorema nos asegura la existencia de un mínimo único dada una función convexa sobre un conjunto convexo.

Teorema 3.6.4 *Si todos los puntos de un problema en su forma normal están incluidos en un círculo de radio $\pi/4$, entonces existe un mínimo único.*

Demostración. Como las distancias dentro del círculo son menores o iguales a $\pi/2$, la función objetivo es convexa y así posee un mínimo único. ■

El teorema anterior nos garantiza la existencia de un mínimo único, pero podemos preguntarnos acerca del círculo de radio máximo que nos garantiza la existencia de un mínimo único, el siguiente teorema precisa cuál es el círculo de mayor radio que nos permite tener certeza acerca de la unicidad del mínimo.

Teorema 3.6.5 *El valor de $\pi/4$ en el Teorema 3.5.4 es el máximo valor del radio que asegura un mínimo único.*

Demostración. Daremos un ejemplo de puntos en un círculo de radio $\pi/4 + \varepsilon$ (para cualquier $\varepsilon > 0$) dentro del cual hay dos mínimos locales diferentes. El problema consiste en tres puntos con parámetros ($\varepsilon > 0$).

i	w_i	ϕ_i	θ_i
1	$1 + \varepsilon^5$	$\pi/4$	ε
2	1	$\pi/4$	$-\varepsilon$
3	ε^2	$\pi/4 - \varepsilon$	π

Por la ecuación (47) para los puntos 1 y 2, obtenemos:

$$\frac{w_k}{[A_k^2 + B_k^2]^{1/2}} = 1 + (\sqrt{2} - 1)\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^5) \text{ para } k = 1, 2. \quad (71)$$

Lo cual significa que los puntos $(\phi_1, \theta_1), (\phi_2, \theta_2)$ son mínimos locales con diferentes valores de la función objetivo. Esto prueba que $\pi/4$ es el mayor radio posible en el Teorema 3.1.4. ■

Teorema 3.6.6 Si $\phi_i = 0$ para $i = 0, \dots, n$ entonces para la solución óptima $\phi = 0$.

Demostración. Si $r(\phi, \theta)$ es un punto óptimo y no es un punto de demanda entonces:

$$\frac{\tan \phi}{\sin \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sin \alpha_i} \cos \phi_i \sin \theta_i}.$$

Notemos que $\sin \alpha_i > 0$ para $\phi \neq 0$. Si $\sum_{i=1}^n (w_i/\sin \alpha_i) \sin \theta_i \neq 0$ entonces por () $\phi = 0$. Por otro lado existe una sucesión $\theta^{(k)}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^{(k)} = \theta$ y $\sum_{i=1}^n (w_i/\sin \alpha_i) \sin \theta_i^{(k)} \neq 0$. Sea $F^{(k)}(r(\phi, \theta))$ la función objetivo para $\theta^{(k)}$ en sustitución de θ . Sea $r(\bar{\phi}, \bar{\theta})$ el punto óptimo para $F(r(\phi, \theta))$, y es tal que

$$F(r(\bar{\phi}, \bar{\theta})) < \min_{\phi=0} \{F(r(\phi, \theta))\}, \quad (72)$$

así llegamos a una contradicción. Dado que $F(r(\phi, \theta))$ es continua en ϕ y θ tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(k)}(r(\phi, \theta)) = F(r(\bar{\phi}, \bar{\theta})) \quad (73)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\phi=0} \{F^{(k)}(r(\phi, \theta))\} = \min_{\phi=0} \{F(r(\phi, \theta))\}. \quad (74)$$

Dado que el punto óptimo de $F^{(k)}(r(\phi, \theta))$ está en el ecuador,

$$F^{(k)}(r(\bar{\phi}, \bar{\theta})) \geq \min_{\phi=0} \{F^{(k)}(r(\phi, \theta))\} \quad (75)$$

en contradicción con la ecuación (72). ■

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron propiedades básicas de los conjuntos y funciones convexas, principalmente las condiciones bajo las cuáles existe un mínimo único. Posteriormente se revisó y demostró el teorema 1.3.5 el cual fue vital para probar que la distancia de un punto dado es una función convexa dentro de un círculo de radio $\pi/2$ y centro en r .

En el capítulo referente al problema de Weber en la esfera se estudiaron propiedades que la esfera hereda al problema, principalmente utilizando los antípodas. Se obtuvieron las soluciones del problema bajo ciertas condiciones de las cuales se obtuvo un algoritmo para obtener un punto óptimo. Se realizaron varias pruebas computacionales para verificar la convergencia de dicho algoritmo. Posteriormente se analizaron ciertos problemas de convergencia referentes a este algoritmo y se dio una propuesta alternativa para evitar dichos problemas, tales algoritmos se programaron en *Mathematica 7.0* y se anexan en este trabajo.

Además, se revisaron diversas propiedades de convexidad sobre la esfera y se caracterizaron diversos conjuntos que nos aseguraban dicha propiedad, esto con el fin de obtener un resultado similar al teorema 1.2.5 y poder asegurar un mínimo único. Una vez revisado lo anterior, se probó que el radio máximo de un círculo esférico donde se puede garantizar un mínimo único es $\pi/4$.

Por último se demostró el teorema 3.6.6 que básicamente nos dice que si todos los puntos de demanda están en el ecuador entonces también el óptimo. Estos últimos resultados nos dan herramientas para poder desarrollar un mejor programa en la búsqueda de un punto óptimo y poder aumentar la velocidad de convergencia.

Bibliografía

- [1] Cañavate Bernal, Cobacho Tornel, Rodríguez Gómez, *El algoritmo de Weiszfeld para la resolución del problema económico de Weber*, Departamentos de Métodos Cuantitativos e Informáticos, Universidad Politécnica de Cartagena.
- [2] Chen Reuven, *Solution of Minisum and Minimax Location-Allocation Problems with Euclidean Distances*, Department of Physics and astronomy and faculty of Management, Tel-Aviv University
- [3] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson, *Convex Functions and their Applications*, SPIN Springer's Internal Project Number, September 16, 2004.
- [4] Doonay J. D. H. (1945), *Spherical Trigonometry*, Interscience, New York.
- [5] Drezner Z. and Wesolowsky G.O., *Facility Location on a Sphere*, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.
- [6] Drezner Z., *A solution to the Weber Location Problem on the Sphere*, School of Management, The university of Michigan-Dearbor, U.S.A.
- [7] Drezner Z., *On Location Dominance on Spherical Surfaces*, University of Michigan, Dearborn, Michigan.
- [8] Feeman Timothy G., *Portraits of the Earth: A Mathematician looks at Maps*, American Matematical Society, Vol. 18.
- [9] Francis R. L. and White J. A. (1974), *Facility Layout and Location*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [10] Hamdy A. Taha, *Investigación de Operaciones*, 5ª edición, Alfaomega, México, 1995.
- [11] Hansen P., Peeters D. and Thisse J-F., *An Algorithm for Constrained Weber Problem*, Management Science, Vol. 28, No. 11, November 1982.

- [12] Hillier F. & Lieberman G., *Investigación de Operaciones*, 7a Edición, 2002, Mc GrawHill.
- [13] Jeong Chang Seong, Jinmu Choi, *Developing an Application for measuring accurate feature distances at regional and global scales*, Department of Geosciences, University of West Georgia, Mississippi State University
- [14] Katz I. N. and Cooper L., *Optimal Location on a Sphere*, Unpublished Paper.
- [15] Wesolowsky G.O., *Location Problems on a Sphere*, McMaster University, Hamilton, Ont., Canada, L8S 4M4.
- [16] Weiszfeld E. (1963), *Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum*, Tohoku Math. J. 43, 355-386.

Índice alfabético

- Antípode, 26
- Centro de servicio, 26
- Cerradura
 - Convexa, 4
- Círculo esférico, 37
- Círculo máximo, 13
- Combinación convexa, 2
- Conjunto
 - Compacto, 5
 - Convexo, 3, 38
- Convexa a la mitad, 10
- Coordenadas esféricas, 13
- Forma normal, 29
- Función
 - Cóncava, 6
 - Continua, 5
 - Convexa, 6, 8, 38
 - Objetivo, 30
- Interior, 7
- Longitud de arco más corta, 26
- Máximo, 27
- Mínimo
 - Local, 29
 - Único, 40, 41
- Minimizar, 8, 9
- Norma
 - 1, 25
 - 2A, 25
 - 2B, 25
- Peso, 25
- Politopo, 4
- Problema de Weber, 19, 24
- Punto
 - De demanda, 26
 - Mínimo, 27
- Solución
 - Factible, 8
 - Global, 8
 - Óptima, 8, 42
- Weiszfeld, 30