



Dinámica de polinomios de independencia reducidos de un grafo.

Presenta:

Paulino Antonio Gómez Salgado

Tesis presentada como requisito para
obtener el título de:

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de
Ciencias Físico Matemáticas

Asesor:

Dr. Carlos Guillén Galván

Puebla, México, Noviembre de 2015

La filosofía está escrita en ese libro enorme que tenemos continuamente abierto delante de nuestros ojos (hablo del universo), pero que no puede entenderse sino aprendemos primero a comprender la lengua y a conocer los caracteres con que se ha escrito. Está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible entender una palabra; sin ellos se deambula en vano por un laberinto oscuro.
GALILEO GALILEI, *Carta a Cristina de Lorena y otros sobre ciencia y religión.*

A las hojas secas que he visto, pero sobre todo a aquellas que por alguna razón deje y dejaré de ver...

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio del polinomio de independencia reducido de un grafo mediante el análisis de su dinámica holomorfa, para asociarle un fractal llamado independencia fractal del grafo.

Primero se presenta una breve introducción a los conceptos más importantes de la teoría de grafos, polinomios de independencia y posteriormente se hace el análisis del sistema dinámico holomorfo asociado al polinomio generado por la operación composición de grafos.

Finalmente se presentan ejemplos de la independencia fractal de grafos con número de independencia 2 y su relación con el conjunto de Mandelbröt, así como la independencia fractal de dos familias de grafos con número de independencia alto y como se relacionan.

Introducción

En 1736 Leonhard Euler publicó un artículo relacionado con el Problema de los puentes de Königsberg (como se muestra en la Figura 1), que planteaba una ruta a través de 7 puentes pasando por cada uno exactamente una vez, este trabajo es considerado por muchos como el inicio de la *Teoría de Grafos*, el matemático suizo demostró que una ruta que pasara por cada puente exactamente una vez no era posible.

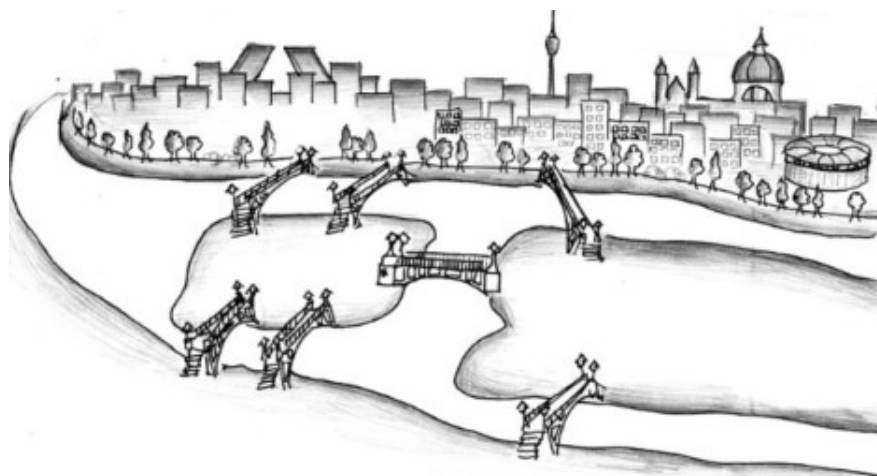


FIGURA 1: Puentes de Königsberg. Imagen extraída de <http://goo.gl/QbDS6x>

El problema anterior puede representarse por un grafo (dirigido) con 4 vértices y 7 aristas, los 4 vértices representan las islas y las 7 aristas los puentes que unen a un par de ellas como se muestra en la Figura 2.

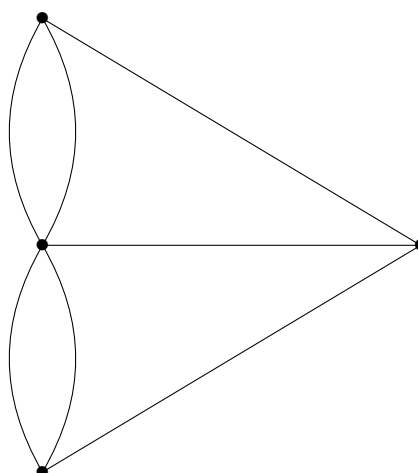


FIGURA 2: Grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg

Este problema inspiró la definición de ruta de Euler si dicho camino pasa por cada vértice solo una vez.

A pesar de la pronta aparición de este problema no fue hasta el siglo XX cuando el concepto de grafo surgió, actualmente tiene muchas aplicaciones en áreas como computación, optimización y complejidad de algoritmos [17].

Los polinomios asociados a un grafo han sido un objeto de estudios muy común entre los especialistas del área [6, 9, 10, 11, 12, 21, 16, 22, 23, 24, 27]. Nosotros nos concentramos en el estudio del polinomio de independencia pero además de este se han estudiado otros polinomios relacionados con grafos como el polinomio característico [21], el polinomio de coloración [11, 21], el polinomio de correspondencia [11, 21], el polinomio de parcialidad [21], el polinomio de ideales [12], entre otros.

En 1972 Hielmann y Lieb ya habían contado de alguna manera los conjuntos independientes de un grafo [20], aunque fue en 1983 cuando el polinomio de independencia se define por primera vez por Gutman y Harary (cf. [16]). A partir de ese momento muchos investigadores del área han estudiado las características de este polinomio, en particular la localización de sus raíces [9, 11, 12, 16, 23].

Otra característica del polinomio de independencia que también ha sido estudiada es la relación que tienen sus coeficientes, es decir qué propiedades tiene la sucesión de número de conjuntos independientes cuando la cardinalidad aumenta; si es creciente, decreciente o cumple otra relación. Principalmente el conjunto de unimodalidad [22, 23, 24] es recurrente pues se relaciona con la localización de las raíces.

Además de lo anterior también ha sido importante el estudio de la relación del polinomio de independencia con algunas operaciones de grafos [10, 21, 27], ya que para algunas de estas, el polinomio de independencia puede ser calculado mediante operaciones de los polinomios de independencia de los grafos iniciales.

Brown, Hickman y Nowakowski presentan en [10] un resultado que asegura que el polinomio de independencia de la composición de dos grafos, se relaciona con la composición del polinomio de independencia del primero con el polinomio de independencia reducido (donde no se considera al conjunto vacío como conjunto independiente) del segundo. En el mismo artículo se revisa que la operación composición de grafos es asociativa.

Ambos resultados nos aseguran que las potencias de un grafo tienen como polinomio de independencia reducido la potencia (de composición) del polinomio de independencia reducido del grafo inicial. Sabemos que cuando hablamos de composición de un polinomio nos encontramos ante un sistema dinámico [4, 5, 7, 8, 13, 26].

El estudio de las órbitas y los conjuntos que estas generan como el conjunto de Julia [2, 4, 5, 8, 10, 13, 26] es muy importante debido a que la iteración de polinomios genera un sistema dinámico que está ampliamente relacionado con el concepto de fractal, precisamente a través del conjunto de Julia [2]. La relación del conjunto de Julia de polinomios de grado 2 resulta interesante por su relación con el conjunto de Mandelbröt [2, 4, 10, 13], mediante la conexidad del primer conjunto.

Como se mencionó en el párrafo anterior el conjunto de Julia de un polinomio es un fractal (cf. [2]), y además tenemos que el polinomio de independencia reducido de un grafo al ser compuesto coincide con el polinomio de independencia reducido de las potencias del grafo, de cierta manera se puede asociar un fractal a un grafo [10].

Nuestro objetivo es presentar los resultados obtenidos por Brown et. al. [10], es decir primero, la definición de independencia fractal de un grafo; posteriormente, un análisis completo de los grafos con número de independencia 2, ya que estos se relacionan con el conjunto de Mandelbröt; y finalmente, la independencia fractal de dos familias de grafos con número de independencia alto y cómo ambas se relacionan.

Este trabajo pretende ser autocontenido, es decir que el lector no necesite revisar otras fuentes para poder comprender los temas aquí expuestos, por eso antes de

presentar el concepto que nos interesa, se incluye un capítulo dedicado a los conceptos básicos de la teoría de grafos, centrándonos únicamente en los que serán necesarios para el desarrollo del concepto de independencia fractal.

Después dedicamos un espacio al estudio del polinomio de independencia y al polinomio de independencia reducido, donde también presentamos la relación mencionada entre el segundo y la operación composición, recordando que este resultado será fundamental para asociar un fractal a un grafo.

Posteriormente el lector podrá encontrar los conceptos más importantes de los sistemas dinámicos asociados con la iteración de polinomios sin olvidar, por supuesto, el conjunto de Julia que como se verá es precisamente el fractal asociado al grafo, además se expone el concepto de conjugación a través de las transformaciones de Möbius, herramienta que nos permitirá ver la relación de estos fractales con el conjunto de Mandelbröt.

Finalmente, en el último capítulo, se define la independencia fractal y su relación con el conjunto de raíces del polinomio de independencia reducido, se estudian por completo los grafos con número de independencia 2 y su relación con el conjunto de Mandelbröt; además se revisa la independencia fractal de dos familias con número de independencia alto y cómo se relacionan ambas.

Pretendemos que el trabajo aquí presentado sirva de base para el estudio de otras familias de grafos y su independencia fractal. Nuestro interés consiste en verificar ¿qué características del grafo se reflejan en su independencia fractal?, es decir qué información de un grafo podemos obtener por el simple hecho de conocer su fractal asociado.

También surgen preguntas sobre otras operaciones de grafos y si estas podrían generar un sistema dinámico, o cómo se relaciona la independencia fractal de un par de grafos con la independencia fractal del grafo obtenido al aplicar operaciones como unión, diferencia, *Suma de Zykov* o alguna otra operación. O cuándo la independencia fractal de dos grafos son conjugadas.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todas las personas que de alguna u otra manera formaron parte de la realización de este proyecto.

En primer lugar a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por su apoyo al proyecto **Unimodalidad de los polinomios de independencia de sumas de Zyckov (ID: 00263)**, aprobado en marzo de 2015, que hizo posible la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Carlos Guillén Galván, asesor de tesis, por apoyarme durante la elección y desarrollo del tema, por el tiempo dedicado a la elaboración y revisión, sin su dirección esto no habría sido posible.

A mis sinodales: Dr. César Bautista Ramos, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y Dr. Julio Erasto Poisot Macías, por sus contribuciones y correcciones al trabajo.

Finalmente a mi familia, las 5 personas más importantes para mí, los que estuvieron desde el inicio y quien llegó hace poco a aportar mucho. Gracias mami, papá, Pioja, Mono y Ciri.

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
Agradecimientos	xi
Lista de Figuras	xv
1. Conceptos básicos de teoría de grafos.	1
1.1. Introducción a la teoría de grafos.	2
1.2. Propiedad gráfica e isomorfismos.	7
1.3. Algunas operaciones con grafos.	8
2. Polinomio de independencia.	13
2.1. Polinomio de independencia.	14
2.2. Polinomio de independencia y su relación con algunas operaciones de grafos.	16
3. Conceptos básicos de sistemas dinámicos holomorfos.	21
3.1. Algunos conceptos topológicos importantes en los complejos.	22
3.2. Conceptos básicos de sistemas dinámicos holomorfos.	28
3.3. Conjugación.	34
4. Independencia fractal de un grafo.	37
4.1. Teoría general de la independencia fractal de un grafo.	38
4.2. Grafos con número de independencia $\beta_G = 2$	43
4.2.1. Grafos de orden 3 con $\beta_G = 2$	45
4.2.2. Grafos de orden 4 con $\beta_G = 2$	48
4.2.3. Grafos de orden $ G \geq 5$ con $\beta_G = 2$	48
4.3. Las familias aK_b y K_a^b	49
A. Funciones analíticas.	55
A.1. Funciones analíticas.	55

Bibliografía

63

Índice de figuras

1.	Puentes de Königsberg. Imagen extraída de http://goo.gl/QbDS6x	VII
2.	Grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg	VII
1.1.	Grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y conjunto de aristas $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5\}$	3
1.2.	Algunos grafos completos	5
1.3.	Grafo bipartito completo	6
1.4.	Grafos K_3 y P_1 y su composición $K_3[P_1]$	8
1.5.	Un grafo isomorfo a su complemento	10
2.1.	Grafos K_3 y P_1 y su suma $K_3 + P_1$	20
3.1.	Esfera de Riemann	29
4.1.	Gráfica de la independencia fractal de $P_2 \uplus K_1$, $\mathcal{F}(P_2 \uplus K_1)$	40
4.2.	Gráfica del conjunto de Mandelbröt	44
4.3.	Gráfica de la independencia fractal de $K_1 \uplus K_2$, $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2)$	45
4.4.	Gráfica de la independencia fractal de P_2 , $\mathcal{F}(P_2)$	46
4.5.	En rojo $J(g(x))$, en negro $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2)$ y en azul $\mathcal{F}(P_2)$	48
4.6.	Gráfica de la independencia fractal de $K_2 \uplus K_3$, $\mathcal{F}(K_2 \uplus K_3)$	49
4.7.	Gráfica de la independencia fractal de $3K_2$, $\mathcal{F}(3K_2)$	51
4.8.	Gráfica de la independencia fractal de $4K_2$, $\mathcal{F}(4K_2)$	52

Capítulo 1

Conceptos básicos de teoría de grafos.

Se hundió en una amable geografía, en un mundo fácil, ideal; un mundo como diseñado por un niño, sin ecuaciones algebraicas, sin despedidas amorosas y sin fuerzas de gravedad.

Gabriel García Márquez, La otra costilla de la muerte.

En este capítulo presentamos las definiciones más importantes de la teoría de grafos necesarias para el desarrollo de los conceptos presentados en el Capítulo 2 y en el Capítulo 4.

En la primera sección iniciamos con la definición de grafo y con sus posibles representaciones, posteriormente se introducen los conceptos principales de la teoría de grafos que serán de utilidad para presentar la teoría de la independencia fractal en capítulos posteriores. También encontraremos una clasificación de grafos mediante ciertas características especiales.

En la segunda sección se presentan algunas funciones que toman como argumento a un grafo, además se presenta el concepto de *isomorfismo* de grafos que resulta

ser muy importante ya que las funciones antes mencionadas son invariantes para grafos isomorfos.

Finalmente en la tercera sección se presentan algunas operaciones importantes con grafos que son de interés en el área, principalmente se presenta el concepto de *composición* de grafos que como se verá más adelante es necesaria para poder asociar un fractal con un grafo.

1.1. Introducción a la teoría de grafos.

Definición 1.1.1. Un *grafo* es un par ordenado de conjuntos $G = (V, E)$ tal que $E \subseteq [V]^2$; donde $[V]^2$ es la clase de conjuntos de dos elementos de V , es decir los elementos de E son subconjuntos de dos elementos de V .

Los elementos de V son los vértices o nodos del grafo G , los elementos de E son sus aristas, a los elementos de una arista regularmente se les llama *extremos* de la arista, es decir las aristas no tienen vértice inicial y final, sus extremos solo la definen pero no se habla de dirección, por ejemplo la arista $\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$ y además $\{v_1, v_1\}$ no puede ser una arista del grafo ya que dicho conjunto consta únicamente de un elemento. A este tipo de grafos se les llama regularmente *grafo simple*.

La forma usual de representar un grafo es dibujar un punto por cada vértice y unir dos de ellos por una línea si los vértices correspondientes forman una arista.

Los grafos son llamados así porque pueden ser representados gráficamente y es precisamente esta representación la que nos ayuda a entender muchas de sus propiedades. No existe una representación única para un grafo G dado, pero regularmente nos referimos a la representación gráfica como grafo. La posición de los puntos y las líneas no nos dan información adicional de un grafo salvo sus incidencias y adyacencias, por último los vértices de un grafo no necesariamente deben ser representados por puntos (pueden ser pequeños círculos u otras figuras) y las aristas no deben ser necesariamente líneas rectas, es decir, en un grafo dos vértices pueden estar unidos por una curva y esta sigue siendo una arista.

Muchas de las definiciones y conceptos en la teoría de grafos son sugeridos por esta representación gráfica.

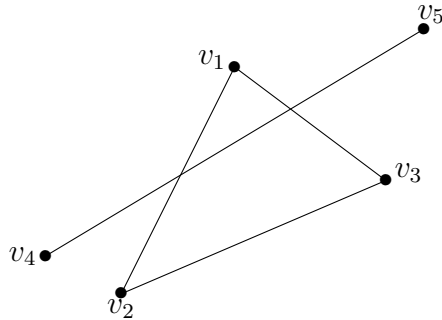


FIGURA 1.1: Grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y conjunto de aristas $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5\}$

Un grafo con vértices en un conjunto V es llamado grafo sobre V . Denotamos por $V(G)$ al conjunto de vértices del grafo G , y como $E(G)$ a su conjunto de aristas. A veces no se distingue entre un grafo y su conjunto de vértices o aristas es decir en lugar de escribir $x \in V(G)$ ó bien $xy \in E(G)$ escribimos simplemente $x \in G$ ó $xy \in G$.

Un vértice v es incidente con una arista e si $v \in e$. Una arista $\{x, y\}$ usualmente es escrita como xy . Dos vértices $x, y \in G$ son adyacentes si xy es una arista de G y dos aristas $e \neq f$ son adyacentes si tienen un vértice en común.

Otras formas de representar un grafo G es por medio de matrices como se verá a continuación.

Definición 1.1.2. Dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, definimos la *matriz de incidencia* de G , $B = (b_{ij})_{n \times m}$, donde,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Ejemplo 1. Matriz de incidencia del grafo G de la Figura 1.1.

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 & v_4v_5 \\
 \begin{pmatrix}
 v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 v_5 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Definición 1.1.3. Dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, definimos su *matriz de adyacencia* de G , $A = (a_{ij})_{n \times n}$, donde,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_iv_j \in E \\ 0 & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Ejemplo 2. Matriz de adyacencia del grafo G de la Figura 1.1.

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
 \begin{pmatrix}
 v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

El número de vértices de un grafo es su *orden* y se denota por $|G|$. Mientras que el número de aristas se denota por $\|G\|$. Un grafo de orden 0 ó 1 es llamado *grafo trivial*. Para el grafo vacío (\emptyset, \emptyset) escribimos simplemente \emptyset .

Dados dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, $G = G'$ si y solo si $V' = V$ y $E' = E$, G' es *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y se denota por $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ pero $G' \neq G$ entonces G' es *subgrafo propio* de G y se escribe $G' \subset G$. Si $G' \subseteq G$ y para cada arista $xy \in E$ con $x, y \in V'$ entonces $xy \in E'$. Decimos que G' es *subgrafo inducido* de G . Y escribimos $G' =: G[V']$.

Es decir si $U \subseteq V$, entonces $G[U]$ es el grafo sobre U cuyas aristas están precisamente en G con ambos vértices en U .

Algunos grafos tiene características comunes que nos permiten clasificarlos por tipos específicos, ahora describiremos algunos de estos, ya que el hecho de que tengan estas características nos permite realizar el análisis de la dinámica de su polinomio de independencia reducido como se verá en los capítulos posteriores.

Definición 1.1.4. Un grafo G es *completo* si para cada par de vértices $x, y \in G$ la arista $xy \in G$, es decir si todas las parejas de vértices en G son adyacentes. Un *grafo completo* de n vértices se denota por K_n .

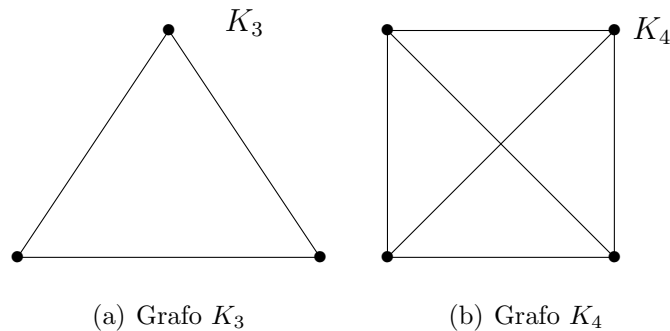


FIGURA 1.2: Algunos grafos completos

Definición 1.1.5. Un *camino* P es un grafo no vacío $P = (V, E)$ en el cual $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ donde cada $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

El número de aristas de un camino es su *longitud* y el camino de longitud k se denota por P_k . Note que $P_0 = K_1$. A menudo nos referimos a un camino por la sucesión natural de sus vértices, es decir $P = x_0x_1\dots x_k$ y llamamos a P un camino de x_0 a x_k . Un camino que inicia y termina en el mismo nodo es llamado *ciclo*.

Definición 1.1.6. Un grafo no vacío G es llamado *conectado* si cualquier par de vértices $x, y \in G$ están unidos por un camino en G . Si $U \subseteq V(G)$ y $G[U]$ es conectado, decimos que G es conectado en U . Llamamos *desconectado* a un grafo que es no conectado.

Un grafo conectado que no tiene ciclos es un *árbol*

Ejemplo 3. En la siguiente lista se presenta ejemplos de grafos conectados y desconectados.

1. Los grafos completos de $n \geq 2$ vértices, K_n , son grafos conectados.

2. Los caminos de longitud $k \geq 2$, P_k , son grafos conectados.
3. El grafo $G = (V, E)$ de la Figura 1.1 es un grafo desconectado.
4. El grafo $K_1 = P_0$, es un grafo conectado.

Definición 1.1.7. Sea $r \geq 2$ un entero. Un grafo $G = (V, E)$ es llamado *r-partito* si V admite una partición en r clases tales que cada arista tiene vértices en una clase diferente, es decir dos vértices de la misma no son adyacentes.

A un grafo G que es “2-partito” se le llama usualmente *bipartito*. Un grafo r -partito es llamado *completo* si cada par de vértices en clases diferentes son adyacentes.

Los grafos r -partitos completos para todo r son los *grafos multipartitos completos*, denotados por K_{n_1, \dots, n_r} , donde cada n_i , $i = 1, \dots, r$, es la cardinalidad de la clase i -ésima; si $n_1 = \dots = n_r = s$, abreviamos la notación anterior como K_s^r . Así K_s^r es el grafo r -partito completo en el cual cada clase de la partición tiene exactamente s vértices.

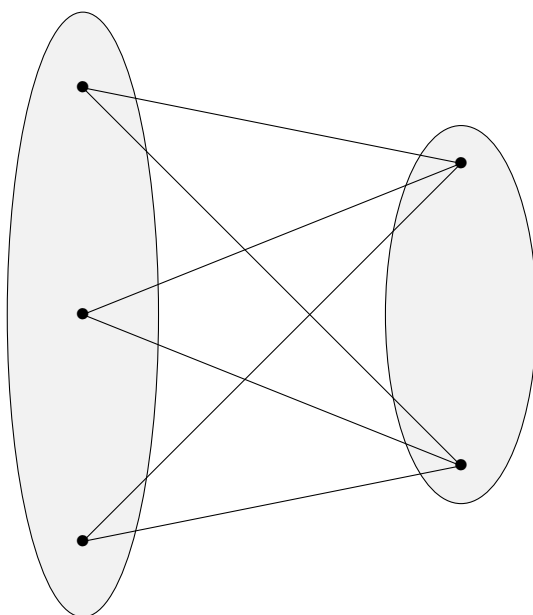


FIGURA 1.3: Grafo bipartito completo

1.2. Propiedad gráfica e isomorfismos.

Ya que tenemos una clasificación de los grafos por tipos específicos ahora estamos interesados en saber cuando dos grafos son iguales, ya que esto no sucede únicamente cuando tienen los mismos conjuntos de vértices y de aristas, en esta sección definiremos el concepto de isomorfismo y grafos isomorfos, además de propiedades que se preservan entre dos grafos que son isomorfos.

Definición 1.2.1. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Un *isomorfismo* $\varphi : V \rightarrow V'$ es una función biyectiva tal que para todo $x, y \in G$ si $xy \in E$, entonces $\varphi(x)\varphi(y) \in E'$.

Ejemplo 4. Sean $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ con $V(G) = \{a, b, c\}$, $E(G) = \{ab, ac, bc\}$, $V(H) = \{x, y, z\}$ y $E(H) = \{xy, xz, yz\}$; es fácil verificar que $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ con $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$ y $\varphi(c) = z$ es un isomorfismo de G sobre H .

Un *automorfismo* es un isomorfismo que tiene como dominio y codominio al mismo grafo G .

Ejemplo 5. Para un grafo $G = (V, E)$ es fácil verificar que $Id : V \rightarrow V$ con $Id(v) = v$, para todo $v \in V$ es un automorfismo. A este automorfismo le llamamos la identidad en G .

Dos grafos G y G' son *isomorfos* si y solo si existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow V'$. Y se denota por $G \simeq G'$

Usualmente se escribe $G = G'$ en lugar de $G \simeq G'$.

Del Ejemplo 4 podemos asegurar que G y H son grafos isomorfos y escribimos $G \simeq H$; además del Ejemplo 5 tenemos que todo grafo G es isomorfo a sí mismo, es decir, $G \simeq G$.

Definición 1.2.2. Una *propiedad gráfica* es una clase de grafos que es cerrada bajo isomorfismos. Es decir que si G y G' están en la clase entonces existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow V'$.

Ejemplo 6. Sea $[K_3] = \{G \mid G \simeq K_3\}$ es una propiedad gráfica formada por todos los triángulos, es decir cualquier triángulo es isomorfo al grafo K_3 . Los grafos G

y H del Ejemplo 4 pertenecen a la propiedad gráfica $[K_3]$ y de hecho cuando nos referimos a un grafo completo de 3 vértices no distinguimos entre G y H , es decir, nos referimos a cualquier grafo que pertenece a $[K_3]$. A cualquier grafo de esta clase le llamamos triángulo.

Definición 1.2.3. Una función que toma un grafo como argumento es un *grafo invariante* si esta asigna valores iguales a grafos isomorfos.

Ejemplo 7. Las siguientes funciones son grafo invariantes:

1. $f_1(G) = |G|$
2. $f_2(G) = \|G\|$

1.3. Algunas operaciones con grafos.

Definición 1.3.1. Sean G y H dos grafos, la composición $G[H]$ es un grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y cuyos vértices son pares ordenados de la forma (v, x) con $v \in G$ y $x \in H$. Dos vértices $(v, x), (w, y) \in G[H]$ son adyacentes si y solo si $vw \in G$ o bien $v = w$ y $xy \in H$.

El grafo $G[H]$ es la composición (o producto lexicográfico) de G y H y puede ser visto como el grafo que surge de G y H por sustituir cada vértice de G por una copia de H , como se muestra en la Figura 1.4 donde se puede ver la composición de los grafos K_3 y P_1 .

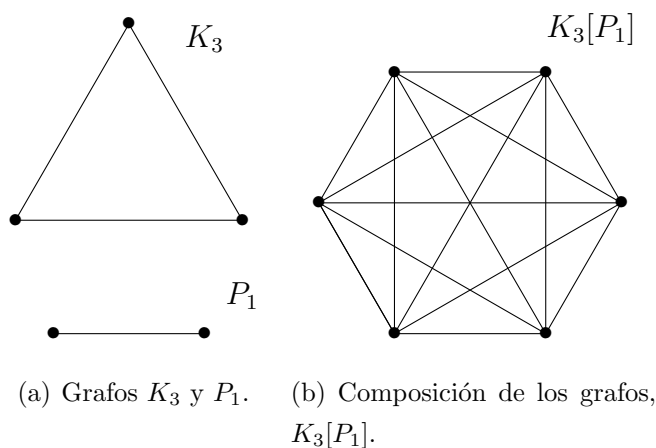


FIGURA 1.4: Grafos K_3 y P_1 y su composición $K_3[P_1]$

Proposición 1.3.1. La operación composición de grafos es asociativa es decir para G, H, F grafos se cumple que $G[(H[F])] = (G[H])[F]$.

Demostración. Sean $v = (x, y)$ y $\omega = (y, z)$. Para $G[(H[F])]$ tenemos que se cumple:

$$G[(H[F])] = (V(G[(H[F])]), E(G[(H[F])])),$$

donde:

- i) $V(G[(H[F])]) = \{(x, \omega) \mid x \in G, \omega \in H[F]\},$
- ii) $E(G[(H[F])]) = \{(x_i, \omega_i)(x_j, \omega_j) \mid x_i x_j \in G \text{ ó } x_i = x_j \text{ y } \omega_i \omega_j \in H[F]\}.$

Mientras que para $(G[H])[F]$ se cumple:

$$(G[H])[F] = (V((G[H])[F]), E((G[H])[F])),$$

donde:

- i) $V((G[H])[F]) = \{(v, z) \mid v \in G[H], z \in F\},$
- ii) $E((G[H])[F]) = \{(v_i, z_i)(v_j, z_j) \mid v_i v_j \in G[H] \text{ ó } v_i = v_j \text{ y } z_i z_j \in F\}.$

Sustituyendo ω, v y eliminando los paréntesis extra en cada par ordenado para los conjuntos de vértices podemos escribir:

$$V(G[H[F]]) = \{(x, y, z) \mid x \in G, y \in H, z \in F\} = V((G[H])[F]).$$

Ahora para los conjuntos de aristas tenemos por un lado usando $e_i = (x_i, \omega_i)$:

$$\begin{aligned} E(G[(H[F])]) &= \{e_i e_j \mid x_i x_j \in G \text{ ó } x_i = x_j \text{ y } \omega_i \omega_j \in H[F]\} \\ &= \{e_i e_j \mid x_i x_j \in G \text{ ó } x_i = x_j \text{ y } (y_i y_j \in H \text{ ó } y_i = y_j \text{ y } z_i z_j \in F)\} \\ &= \{e_i e_j \mid x_i x_j \in G \text{ ó } x_i = x_j \text{ y } y_i y_j \in H \text{ ó } v_i = v_j \text{ y } z_i z_j \in F\} \\ &= \{e_i e_j \mid v_i v_j \in G[H] \text{ ó } v_i = v_j \text{ y } z_i z_j \in F\} = E((G[H])[F]). \end{aligned}$$

Por lo tanto $G[(H[F])] = (G[H])[F]$

■

Definición 1.3.2. De lo anterior podemos hablar de las potencias del grafo G definidas de forma inductiva como sigue:

- i) $G^0 = \emptyset$,
- ii) $G^1 = G$,
- iii) $G^k = G[G^{k-1}]$.

Definición 1.3.3. El *grafo complemento* \overline{G} de G es el grafo sobre $V(G)$ con conjunto de aristas $[V(G)]^2 - E(G)$.

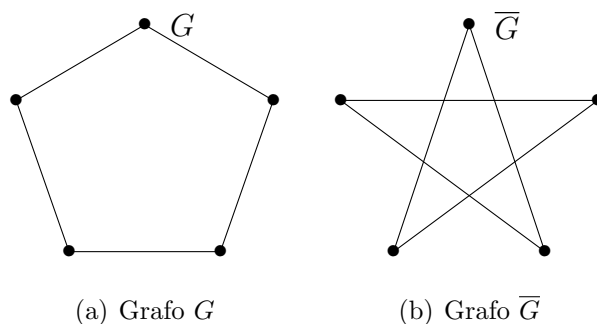


FIGURA 1.5: Un grafo isomorfo a su complemento

Un grafo $G = (V, E)$ con $V \neq \emptyset$ es un *grafo con m no-aristas* si y solo si \overline{G} tiene exactamente m aristas. El grafo anterior es un grafo con 5 no-aristas, el grafo de la Figura 1.1 tiene 6 no-aristas y los grafos $\overline{K_n}$ tienen $\binom{n}{2}$ no-aristas.

Definición 1.3.4. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, la *unión* y la *intersección* de G y G' se definen correspondientemente como sigue:

- i) $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$,
- ii) $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$.

Definición 1.3.5. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, la *unión disjunta* de G y G' denotada por $G \uplus G'$ se define como la unión de G y G' considerando sus conjuntos de vértices como conjuntos disjuntos es decir $V \cap V' = \emptyset$.

Por ejemplo el grafo de la Figura 1.1 es una unión disjunta de los grafos P_1 y K_3 .

Definición 1.3.6. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, la *suma* de G y G' se define como $G + G'$ donde $V(G + G') = V \uplus V'$ y $E(G + G') = E \cup E' \cup \{v_1 v_2 | v_1 \in V, v_2 \in V'\}$.

Definición 1.3.7. Sean G_1, \dots, G_n una colección de grafos y R_1, \dots, R_{n-1} una colección de relaciones tales que $R_i : V(G_i) \rightarrow V(G_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Definimos la *suma abierta de Zykov*, denotada por $G_1 +_{R_1} G_2 + \dots +_{R_{n-1}} G_n$, un nuevo grafo con conjunto de vértices y aristas dados como sigue:

$$\begin{aligned}
 i) \quad V(G_1 +_{R_1} G_2 + \dots +_{R_{n-1}} G_n) &= \bigsqcup_{i=1}^n V(G_i) \\
 ii) \quad E(G_1 +_{R_1} G_2 + \dots +_{R_{n-1}} G_n) &= \left(\bigsqcup_{i=1}^n E(G_i) \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \\
 &\text{donde cada } E_i = \{ \{v, \omega\} \subseteq V(G_i) \uplus V(G_{i+1}) \mid v \in V(G_i), \omega \in V(G_{i+1}) \text{ con } v R_i \omega \}, \\
 &\text{para } i = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 8. Algunos ejemplos de Sumas de Zykov presentados en [3] son:

- i) Hipercubos.* Si Q_0 es el grafo formado por un solo vértice digamos v . Entonces los hipercubos Q_n pueden ser definidos recursivamente por la siguiente suma de Zykov $Q_{n+1} = Q_n +_{Id_n} Q_n$ para $n \geq 0$, donde Id_n es la función identidad sobre los vertices de Q_n .
- ii) Caminos.* Sea P_0 el camino de un solo vértice digamos v_0 . Sea $Id : \{v_0\} \rightarrow \{v_0\}$ la función identidad, entonces $\underbrace{P_n = P_0 +_{Id} P_0 +_{Id} \dots +_{Id} P_0}_{n+1 \text{ veces}}$, es el camino de longitud n donde P_0 aparece $n + 1$ veces.

Observe que la Definición 1.3.6 es una suma abierta de Zykov con $R = \{(v, v') : v \in V \text{ y } v' \in V'\}$

Capítulo 2

Polinomio de independencia.

...y el toro que ya estaba a punto de pedir la amnistía miro al señor con unos ojos muy pero muy tristes y después se desmayó en mitad de la cancha sin que nadie le diera la amnistía...

Mario Benedetti, Primavera con una esquina rota.

El *polinomio de independencia* de un grafo tiene una propiedad muy importante relacionada con la operación composición de grafos, que como se demostró en el Capítulo 1 es una operación asociativa lo que nos asegura que el polinomio de independencia de la composición de dos grafos puede ser calculado mediante la composición de los polinomios de independencia de los grafos compuestos.

Como consecuencia de la relación anterior entre la composición de grafos y el polinomio de independencia se obtiene que las potencias de un grafo definidas en la última sección del capítulo anterior generan un sistema dinámico a través del *polinomio de independencia reducido*, en el Capítulo 4 estos conceptos nos servirán para asociar un fractal a un grafo.

2.1. Polinomio de independencia.

Definición 2.1.1. Dos vértices $x, y \in V(G)$ son llamados *independientes* si son no adyacentes.

Por ejemplo en el grafo de la Figura 1.1 los vértices v_1 y v_4 son independientes ya que $v_1v_4 \notin E(G)$, es decir son no adyacentes.

Definición 2.1.2. Un subconjunto $I \subseteq V(G)$ se llama *conjunto independiente* de G si para cualquier par de vértices $x, y \in I$ la arista $xy \notin G$. Es decir si cada par de vértices de I son independientes.

Para el grafo de la Figura 1.1 tenemos que sus conjuntos independientes son \emptyset , $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, $\{v_5\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_3, v_5\}$.

Definición 2.1.3. Sea k_I el número de vértices de un conjunto independiente $I \subseteq G$, el *número de independencia de G* se define como:

$$\beta_G = \max\{k_I \mid I \text{ es conjunto independiente de } G\}.$$

Para un grafo G y un entero no negativo k . Sea i_k el número de conjuntos independientes de G de cardinalidad k .

Definición 2.1.4. El *polinomio de independencia* de G es el polinomio generado por:

$$i_G(x) = \sum_{k=0}^{\beta_G} i_k x^k$$

donde β_G es el número de independencia de G .

Un polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ es *unimodal* si existe $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$.

Conjetura 2.1.1. (cf. [24]) El polinomio de independencia de cualquier árbol es unimodal.

El siguiente resultado muestra que un polinomio con coeficientes no negativos, cuyas raíces son reales es unimodal.

Teorema 2.1.1 (Newton [23]). Si el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ no tiene coeficientes negativos y tiene solamente raíces reales, entonces

$$a_i^2 \geq a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} \cdot \frac{n-i+1}{n-i}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Aunque este teorema no nos sirve para probar la Conjetura 2.1.1 ya que no todos los árboles tienen solo raíces reales.

Retomando el grafo de la Figura 1.1 y recordando que ya habíamos encontrado todos sus conjuntos independientes tenemos que $\beta_G = 2$, entonces para este grafo tenemos que $i_0 = 1$, $i_1 = 5$ y $i_2 = 6$, por lo tanto $i_G(x) = 1 + 5x + 6x^2$ es unimodal.

Ejemplo 9. Tenemos que el polinomio de independencia de los grafos $\overline{K_n}$ es de la forma

$$f_{\overline{K_n}}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i,$$

ya que cada conjunto de i vértices es siempre independiente por que el conjunto de aristas es vacío y por el Teorema del binomio de Newton

$$f_{\overline{K_n}}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i 1^{n-i} = (x+1)^n,$$

por lo tanto $f_{\overline{K_n}}(x) = (x+1)^n$.

Para algunas cardinalidades el número de conjuntos independientes es conocido o fácil de calcular como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. Sea G un grafo de orden n y $\|G\| = m$ tenemos:

- i) $i_0 = 1$,
- ii) $i_1 = n$,
- iii) $i_2 = \binom{n}{2} - m$.

Demostración. Para *i)* tenemos que el grafo vacío, \emptyset , es subgrafo de todo grafo por lo tanto cada grafo tiene un conjunto independiente de cardinalidad 0.

Para *ii)* tenemos que para todo $v \in G$, $\{v\}$ es subgrafo de G , en este caso existen n conjuntos de un solo vértice, es decir, n conjuntos independientes de cardinalidad 1.

Finalmente para *iii)* tenemos que existe exactamente $\binom{n}{2}$ conjuntos distintos de dos vértices en G y únicamente m de ellos pertenecen a $E(G)$, entonces el resto, $\binom{n}{2} - m$, son subgrafos de G con conjunto de aristas vacío es decir, $i_2 = \binom{n}{2} - m$. ■

Otro concepto importante relacionado con el polinomio de independencia es el *número de Fibonacci* de un grafo G , que se define como el número total de conjuntos independientes del grafo, es decir el número de Fibonacci coincide con $i_G(1)$. No es difícil verificar que el número de Fibonacci de un camino de longitud $n - 1$ coincide con \mathcal{F}_n , donde \mathcal{F}_n es el n -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Definición 2.1.5. El *polinomio de independencia reducido* de G es el polinomio generado por:

$$f_G(x) = i_G(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\beta_G} i_k x^k$$

donde β_G es el número de independencia de G .

2.2. Polinomio de independencia y su relación con algunas operaciones de grafos.

El polinomio de independencia se comporta de manera interesante con respecto a la composición de grafos, como lo describe el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. Sean G y H grafos entonces, el *polinomio de independencia* de $G[H]$ está dado por:

$$i_{G[H]}(x) = i_G(f_H(x)) \tag{2.1}$$

Demostración. Por definición, el polinomio $i_G(f_H(x))$ está dado por:

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^k, \quad (2.2)$$

donde i_k^G , i_j^H son el número de conjuntos independientes de cardinalidad k y j en G y H respectivamente. De la Ecuación (2.2) desarrollando la primera sumatoria obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^k = i_0^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^0 + i_1^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^1 + \dots + i_{\beta_G}^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^{\beta_G}$$

Ahora un conjunto independiente de cardinalidad l se obtiene de elegir un conjunto independiente de cardinalidad k en G y en cada una de esas copias de H , en $G[H]$, conjuntos de vértices de tal forma que se tenga en total l vértices, es decir, en la suma anterior para i_1^G para cada vértice se tienen tantos conjuntos independientes como en H además de que son de la misma cardinalidad en $G[H]$ que en H , ahora para $i_l^{G[H]}$ y para cada conjunto independiente de cardinalidad k en G la potencia k a la que se eleva la suma $\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j$ cuenta todos los conjuntos independientes que tienen exactamente ese conjunto independiente de cardinalidad k en G y la potencia jk de x coincide con la cardinalidad del conjunto independiente, por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^k = \sum_{l=0}^{\beta_{G[H]}} i_l^{G[H]} x^l.$$

■

Corolario 2.2.1. Sean G y H grafos entonces, el *polinomio de independencia reducido* de $G[H]$ esta dado por:

$$f_{G[H]}(x) = f_G(f_H(x)) \quad (2.3)$$

Demostración. Por el teorema anterior tenemos:

$$i_{G[H]}(x) = i_G(f_H(x)),$$

además podemos escribir

$$i_{G[H]}(x) = \sum_{l=0}^{\beta_{G[H]}} i_l^{G[H]} x^l = 1 + \sum_{l=1}^{\beta_{G[H]}} i_l^{G[H]} x^l,$$

despejando obtenemos

$$i_{G[H]}(x) - 1 = \sum_{l=1}^{\beta_{G[H]}} i_l^{G[H]} x^l,$$

y finalmente

$$i_{G[H]}(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\beta_G} i_k^G \left(\sum_{j=1}^{\beta_H} i_j^H x^j \right)^k.$$

■

Los polinomios de independencia de los grafos completos K_n son de la forma $i_{K_n}(x) = nx + 1$, para todo $n \geq 1$ y sus polinomios de independencia reducidos son de la forma $f_{K_n}(x) = nx$.

Para la composición de los grafos de la Figura 1.5, tenemos que $i_{K_3}(x) = 3x + 1$, $f_{K_3}(x) = 3x$ y $f_{P_1}(x) = 2x$ aplicando el Teorema 2.2.1 $i_{K_3[P_1]}(x) = 6x + 1$ y por el Corolario 2.2.1 $f_{K_3[P_1]}(x) = 6x$.

El polinomio de independencia de algunas operaciones de grafos también se relaciona con los polinomios de independencia de los grafos que conforman el grafo operado como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. Si G y H son dos grafos entonces

i) $i_{G \uplus H}(x) = i_G(x) i_H(x),$

ii) $i_{G+H}(x) = i_G(x) + i_H(x) - 1.$

Demostración. Para i) tenemos que el producto de los polinomios de independencia $i_G(x)$ y $i_H(x)$, tenemos que el polinomio $i_G(x) i_H(x)$ está dado por la siguiente

ecuación:

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G x^k \left(\sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j \right), \quad (2.4)$$

Donde i_k^G, i_j^H son el número de conjuntos independientes de cardinalidad k y j en G y H respectivamente. Desarrollando la primera sumatoria de la Ecuación (2.4) tenemos

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G x^k \left(\sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j \right) = \sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j + i_1^G x \sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j + \dots + i_{\beta_G}^G x^{\beta_G} \sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j,$$

ahora vemos que los conjuntos independientes de $G \uplus H$ de cardinalidad l se forman por tomar un conjunto independiente en G de cardinalidad k y unirlo con otro conjunto independiente en H de cardinalidad $l - k$, además $G \uplus H$ tiene tantos conjuntos independientes de cardinalidad l como el producto de los conjuntos de cardinalidad k en G multiplicados por los de cardinalidad $l - k$ en H , es decir $i_k^G i_{l-k}^H$, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\beta_G} i_k^G x^k \left(\sum_{j=0}^{\beta_H} i_j^H x^j \right) = \sum_{l=0}^{\beta_{G \uplus H}} i_l^{G \uplus H} x^l.$$

Para *ii*) tenemos que el polinomio de independencia $i_{G+H}(x)$, está dado por la siguiente ecuación por definición:

$$i_{G+H}(x) = \sum_{k=0}^{\beta_{G+H}} i_k^{G+H} x^k,$$

donde los únicos conjuntos independientes son los mismos que ya existían en G y en H ya que cada vértice de G se une con todos los vértices de H , así tenemos que

$$i_{G+H}(x) + 1 = i_G(x) + i_H(x),$$

ya que el vacío se cuenta dos veces, por lo tanto

$$i_{G+H}(x) = i_G(x) + i_H(x) - 1.$$

■

Apliquemos la proposición anterior a los grafos P_1 y K_3 , sabemos que $i_{P_1}(x) = 2x + 1$ y $i_{K_3}(x) = 3x + 1$, la unión disjunta de los grafos anteriores coincide con el grafo de la Figura 1.1, ahora por la Proposición 2.2.1 inciso *i*), tenemos que $i_{K_3 \uplus P_1}(x) = (3x + 1)(2x + 1) = 6x^2 + 5x + 1$, que coinciden con el calculado en la sección anterior.

Ahora la suma de los grafos P_1 y K_3 se muestra en la Figura 2.1(b), como se puede ver $K_3 + P_1$ es isomorfo a K_5 , por la Proposición 2.2.1 inciso *ii*), tenemos que $i_{K_3 + P_1} = (3x + 1) + (2x + 1) - 1 = 5x + 1$, que coincide con el polinomio de independencia de K_5 .

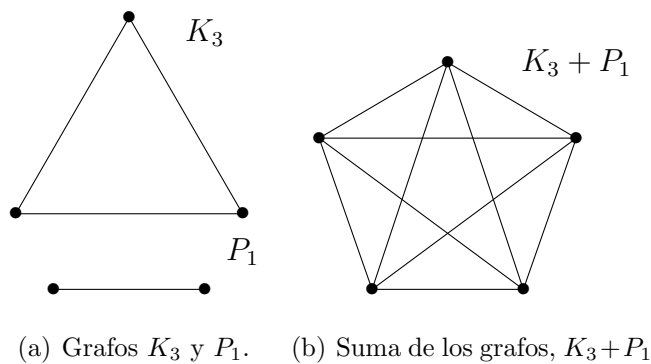


FIGURA 2.1: Grafos K_3 y P_1 y su suma $K_3 + P_1$

Capítulo 3

Conceptos básicos de sistemas dinámicos holomorfos.

Pero las semillas son invisibles. Duermen en el secreto de la tierra hasta que una de ellas despierta.

Antoine de Saint-Exupéry, El principito.

Ahora se presentarán los conceptos relacionados con las funciones analíticas complejas para poder definir el *conjunto de Julia* de cualquier polinomio, en particular nos interesa el de los polinomios de independencia reducidos de una familia de grafos generado por la operación composición que como ya vimos en el Capítulo 2 genera un sistema dinámico mediante la composición de polinomios.

Este capítulo será dividido en tres secciones, en la primera se presenta algunos conceptos topológicos necesarios para poder definir el conjunto de Julia que como se verá es típicamente un fractal. En la segunda sección se define el conjunto antes mencionado y se demuestran ciertas propiedades en la *esfera de Riemann* o plano complejo extendido. Finalmente la tercera sección presenta el concepto de transformación de Möbius y de conjugación y su relación con el conjunto de Julia de un polinomio, resultado que servirá para presentar la relación que tienen las *independencias fractales* de algunos grafos con el *conjunto de Mandelbröt* o entre ellas.

3.1. Algunos conceptos topológicos importantes en los complejos.

Definición 3.1.1. Sea X un conjunto diferente del vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que d es una *métrica* en X , si d cumple las siguientes propiedades para cualquier $x, y, z \in X$:

- i) $d(x, y) \geq 0$,
- ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Llamada *Desigualdad del Triángulo*

El par ordenado (X, d) , donde X es un conjunto diferente del vacío y d una métrica en X , es llamado *espacio métrico*.

Regularmente decimos X es un espacio métrico sin hacer explícito respecto a que métrica.

Ejemplo 10. Los siguientes son ejemplos de espacios métricos

1. El conjunto de los números reales, \mathbb{R} , con la métrica inducida por $|x|$ como $d(x, y) = |x - y|$, con $x, y \in \mathbb{R}$, es un espacio métrico.
2. El conjunto de las n -adas ordenadas de números reales, \mathbb{R}^n , con la métrica inducida por $\|\bar{x}\|$ como $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, con $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, es un espacio métrico.
3. Sea $X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [a, b]\}$ y definimos $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

entonces X es un espacio métrico.

4. El conjunto de los números complejos, \mathbb{C} , con la métrica inducida por $|z|$ como $d(x, y) = |x - y|$ con $x, y \in \mathbb{C}$, es un espacio métrico.

A partir de este momento todas las deficiones serán para números complejos con la métrica inducida por el módulo a menos que se especifique lo contrario.

Definición 3.1.2. La *bola abierta* de radio $r > 0$ con centro en z_0 , denota por $B_r(z_0)$, es el conjunto de los puntos z en los complejos tales que su distancia a z_0 es menor que r , es decir,

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Definición 3.1.3. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ diferente del vacío, $x \in \mathbb{C}$ es un *punto de acumulación* de S si y solo si en la intersección de cada bola abierta con centro en x y S existe al menos un punto $z \neq x$, es decir, $B_r(x) - \{x\} \cap S \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Definición 3.1.4. $S \subseteq \mathbb{C}$ es *abierto* si para todo $x \in S$, existe un $r > 0$ tal que la bola abierta con radio r y centro en x está totalmente contenida en S .

Definición 3.1.5. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$, el *interior* de S , denotado por $\text{Int}(S)$, es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en S , es decir:

$$\text{Int}(S) = \bigcup_{A \subseteq \mathbb{C}} A, \text{ donde } A \text{ es abierto y } A \subseteq S$$

Definición 3.1.6. $S \subseteq \mathbb{C}$ es *cerrado* si cada punto de acumulación de S pertenece a S .

Definición 3.1.7. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$, la *cerradura* de S , denotada por $\text{Cl}(S)$, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S , es decir:

$$\text{Cl}(S) = \bigcap_{A \subseteq \mathbb{C}} A, \text{ donde } A \text{ es cerrado y } S \subseteq A$$

Definición 3.1.8. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$, la *frontera* de S , denotada por $\partial(S)$, es el conjunto resultado de restar el interior de $\text{Int}(S)$ a la cerradura de $\text{Cl}(S)$, es decir,

$$\partial(S) = \text{Cl}(S) - \text{Int}(S) = \text{Cl}(S) \cap (\text{Int}(S))^c$$

De lo anterior tenemos que la cerradura de S , $\text{Cl}(S)$, es el conjunto cerrado más pequeño, en el sentido de contención, que contiene a S y el interior de S , es el conjunto abierto más grande contenido en S . Es decir, si C_1 es un conjunto cerrado que contiene a S entonces $\text{Cl}(S) \subseteq C_1$ y si C_2 es un conjunto abierto contenido

en S , entonces $C_2 \subseteq \text{Int}(S)$. Además tenemos las siguientes equivalencias, S es abierto si y solo si $S = \text{Int}(S)$, S es cerrado si y solo si $S = \text{Cl}(S)$, o bien S es abierto si y solo si S^c es cerrado y análogamente S es cerrado si y solo si S^c es abierto.

Algunas propiedades importantes de la cerradura y el interior de S y C subconjuntos de \mathbb{C} son las siguientes:

- i) $\text{Int}(S) \subseteq S \subseteq \text{Cl}(S)$,
- ii) $\text{Int}(\text{Int}(S)) = \text{Int}(S)$,
- iii) $\text{Cl}(\text{Cl}(S)) = \text{Cl}(S)$,
- iv) Si $S \subseteq C$, entonces $\text{Int}(S) \subseteq \text{Int}(C)$,
- v) Si $S \subseteq C$, entonces $\text{Cl}(S) \subseteq \text{Cl}(C)$,

Definición 3.1.9. Sea $S \subset \mathbb{C}$ decimos que S es *acotado* si existe un número real M , tal que $|z| < M$ para todo $z \in S$.

Definición 3.1.10. Dado $S \subset \mathbb{C}$, una colección de conjuntos abiertos es una *cubierta abierta* de S , si S está contenida en la unión de estos conjuntos.

Una *subcubierta* es una subcolección de una cubierta abierta, una *cubierta finita* es una cubierta abierta con un número finito de conjuntos.

Definición 3.1.11. Dado $S \subset \mathbb{C}$, decimos que S es *totalmente acotado* si, para cada $\varepsilon > 0$, S puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε .

Un conjunto que es totalmente acotado, también es acotado.

Definición 3.1.12. Una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$, siempre que $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$.

Definición 3.1.13. Un espacio métrico, X , es llamado *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

El conjunto de los números complejos es un espacio métrico completo y un subconjunto de \mathbb{C} es completo si cuando es considerado como un subespacio es completo. En \mathbb{C} los subconjuntos cerrados son completos.

Definición 3.1.14. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es *compacto* si y solo si para cada cubierta abierta de S existe una subcubierta finita de S .

Teorema 3.1.1. Sea $S \subset \mathbb{C}$, S es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.

Demostración. Primero veremos que cada conjunto compacto es completo, si S es compacto y sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en S , si $y \in S$ no es límite de la sucesión entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n_1 , existe $n \geq n_1$ que cumple $|x_n - y| > 2\varepsilon$. Sea n_0 tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$. Elegimos un $n \geq n_0$ para el cual $|x_n - y| > 2\varepsilon$, entonces $|x_m - y| \geq |x_n - y| - |x_m - x_n| > \varepsilon$ para todo $m \geq n_0$, de donde concluimos que la $B_\varepsilon(y)$ contiene un número finito de elementos de la sucesión. Consideramos ahora toda la colección de conjuntos abiertos U que solo contienen un número finito de elementos de la sucesión, ya que esta no es convergente tenemos que esta colección es una cubierta abierta de S , dicha cubierta contiene una subcubierta formada por U_1, \dots, U_N , pero esto claramente es imposible ya que cada U_i contiene un número finito de elementos de la sucesión, por lo tanto la sucesión tiene límite.

Ahora para demostrar que es totalmente acotado usamos una cubierta de S formado por bolas de radio ε y centro en x_0 y elegimos una subcubierta finita de esta cubierta, así S es totalmente acotado.

Para finalizar la prueba supongamos ahora que S es completo y totalmente acotado y que existe una cubierta de S que no contiene una subcubierta finita de S . Sea $\varepsilon_n = 2^{-n}$, ya que S es totalmente acotado puede ser cubierto por un número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x)$. Si cada una de ellas tiene una subcubierta finita entonces el mismo resultado se mantiene para S , entonces tendríamos una bola $B_{\varepsilon_1}(x_1)$ que no tiene ninguna subcubierta finita, ahora $B_{\varepsilon_1}(x_1)$ es totalmente acotada es decir tiene una $B_{\varepsilon_2}(x_2)$ que no tiene ninguna subcubierta finita. Continuando con esta construcción obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ con la propiedad de que $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ no tienen ninguna subcubierta finita y $x_{n+1} \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$. La segunda propiedad implica $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon_n$ y por lo tanto $|x_n - x_{n+p}| < \sum_{i=n}^{n+p} \varepsilon_i < 2^{-n+1}$, es decir $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $y \in U$, donde U es uno de los conjuntos abiertos de la cubierta dada, ya que U es abierto entonces contiene una bola $B_\delta(y)$. Eligiendo n suficientemente grande, $|x_n - y| < \frac{\delta}{2}$ y $\varepsilon_n < \frac{\delta}{2}$. Así $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_\delta(y)$,

de $|x - x_n| < \varepsilon_n$ implicamos que $|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \delta$. Por lo tanto $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ tiene una subcubierta finita, formada por el único conjunto U , esto es una contradicción y entonces dada cualquier cubierta de S existe una subcubierta finita de S , es decir, S es compacto. ■

Corolario 3.1.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es *compacto* si y solo si es cerrado y acotado.

Definición 3.1.15. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ compacto diferente del vacío, definimos la *nube abierta* de radio $r > 0$ centrada en S al conjunto,

$$N_r(S) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{existe } z_0 \in S \text{ tal que } |z - z_0| < r\}$$

De la definición anterior podemos notar que la nube $N_r(\{z_0\})$ es el mismo conjunto que $B_r(z_0)$. Ahora podemos definir la métrica para los conjuntos compactos en \mathbb{C} .

Definición 3.1.16. La *métrica de Hausdorff* mide la distancia entre dos subconjuntos compactos A y B de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ como,

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\}$$

La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos se empalman uno en el otro. Veamos que efectivamente es una métrica.

Demostración. Primero probemos que $h(A, B) \geq 0$, para cada par de elementos $A, B \subset \mathbb{C}$, definimos el conjunto:

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 \mid A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\}.$$

Por definición $h(A, B) = \inf E(A, B)$. $E(A, B)$ es diferente del vacío ya que $0 \leq d(p, q) < \infty$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{C}$. Es decir $E(A, B)$ es un conjunto no vacío acotado inferiormente por el 0, por lo tanto $h(A, B) \geq 0$.

Para probar que $h(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$, veamos que $h(A, B) = \inf E(A, B) = \inf(0, \infty) = 0$. Ahora supongamos que $h(A, B) = 0$. Sea $a \in A$ y un número positivo cualquiera ε , entonces $0 = \inf E(A, B) < \varepsilon$, por lo que existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$ y $A \subset N_\delta(B)$. Así que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$, entonces $B_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset$ para cualquier ε , entonces $a \in \text{Cl}(B)$, pero como B es cerrado

entonces $a \in B$, es decir $A \subset B$, de manera análoga podemos probar que $B \subset A$. Por lo tanto $A = B$.

Para probar que $h(A, B) = h(B, A)$ basta hacer notar que $E(A, B) = E(B, A)$.

Finalmente para probar que $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$, tenemos que demostrar que $\inf E(A, C) \leq \inf E(A, B) + \inf(B, C)$. Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos coincide con la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que:

$$\inf E(A, C) \leq \inf\{\delta + \eta \mid \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}.$$

Sean $\delta \in E(A, B)$ y $\eta \in E(B, C)$ dos elementos cualesquiera, por definición $A \subset N_\delta(B)$ y $B \subset N_\eta(C)$, dada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, además existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \eta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(a, c) < \delta + \eta$, entonces $A \subset N_{\delta+\eta}(C)$, siguiendo un razonamiento similar se puede probar que $C \subset N_{\delta+\eta}(A)$, por lo que $\delta + \eta \in E(A, C)$, entonces $\inf E(A, C) \leq \delta + \eta$, es decir $\inf E(A, C)$ es una cota inferior de $\{\delta + \eta \mid \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}$. Por lo tanto $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$. ■

Definición 3.1.17. Un subconjunto S de \mathbb{C} es *conexo* si no puede ser representado como la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos, es decir:

$$S \neq A \cup B, \text{ para cualesquiera } A \text{ y } B \text{ conjuntos abiertos con } A \cap B = \emptyset.$$

Definición 3.1.18. Un subconjunto S de \mathbb{C} es un *dominio* si es abierto y conexo.

Definición 3.1.19. $C \subseteq S$ es *componente* si y solo si es un conjunto maximal abierto y conexo, es decir, si existe $C_1 \subseteq S$ abierto y conexo tal que $C \cap C_1 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \subseteq C$.

3.2. Conceptos básicos de sistemas dinámicos holomorfos.

El campo del análisis dinámico complejo supone un estudio de funciones racionales iterativas sobre los complejos extendidos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [4], este nuevo símbolo se opera de la siguiente manera con $a \in \mathbb{C}$, $a + \infty = \infty + a = \infty$ y $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$ si $b \in \mathbb{C} - \{0\}$, además también tenemos:

$$i) \frac{a}{0} = \infty \text{ para } a \neq 0$$

$$ii) \frac{b}{\infty} = 0 \text{ para } b \neq \infty$$

Es importante dar una representación geométrica asociada a este nuevo sistema para esto usamos la esfera unitaria en el plano tridimensional cuya ecuación está dada por $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ denotada por S donde cada punto puede ser asociado a un número complejo excepto por $(0, 0, 1)$ por lo que asociamos este punto con ∞ .

Para $z \in \mathbb{C}$ podemos asociar un único punto en S por medio de una correspondencia inyectiva llamada *proyección estereográfica*:

$$P_e(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad (3.1)$$

La *esfera de Riemann* o plano complejo extendido es la unión del plano complejo con el conjunto formado por el infinito, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, es llamado esfera de Riemann porque su representación geométrica es precisamente una esfera.

Definición 3.2.1. Sean $Z, Z' \in \mathbb{C}_\infty$, definimos la *métrica esférica* como:

$$\sigma_0(Z, Z') = \begin{cases} \frac{2|Z-Z'|}{\sqrt{(1+|Z|^2)(1+|Z'|^2)}} & \text{si } Z \neq \infty, Z' \neq \infty \\ \frac{2|Z-Z'|}{\sqrt{1+|Z|^2}} & \text{si } Z \neq \infty, Z' = \infty \\ 0 & \text{si } Z = Z' = \infty \end{cases}$$

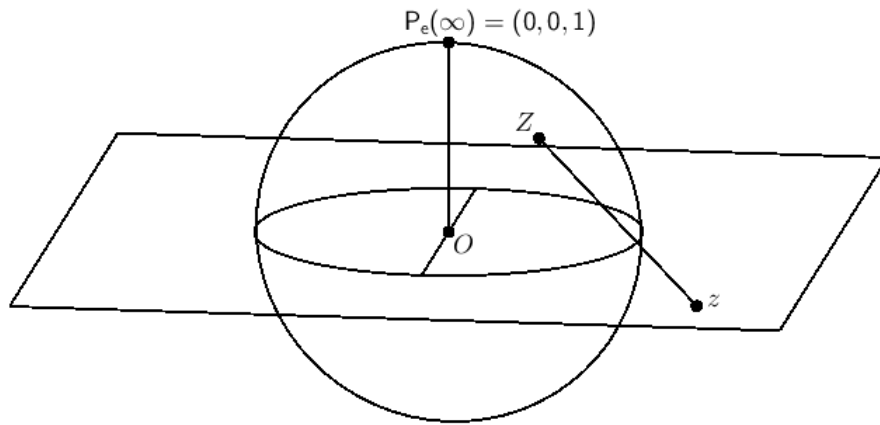


FIGURA 3.1: Esfera de Riemann

Debido a que nos centraremos únicamente en la solución de polinomios usaremos la métrica del valor absoluto $|\cdot|$, que mide la distancia entre dos puntos $z, w \in \mathbb{C}$ como $|z - w|$.

De lo anterior nuestro estudio se basa en determinar la dinámica que sigue un sistema dinámico discreto en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ generada por una transformación holomorfa:

$$R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

Es decir, nuestro espacio fase será únicamente la superficie de Riemann conexa y cerrada \mathbb{C}_∞ que es homeomorfa a la esfera tridimensional

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Usualmente utilizamos z y $w = \frac{1}{z}$ para representar las dos coordenadas estándar para graficar en \mathbb{C}_∞ determinadas por la proyección estereográfica. Entonces cualquier función holomorfa (analítica) de R sobre \mathbb{C}_∞ puede ser escrita de la forma:

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (3.3)$$

Donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y sin factores en común. Por lo tanto, existe una correspondencia inyectiva entre la función racional

dada por la Ecuación (3.2) y la función holomorfica descrita por la Ecuación (3.3), la demostración de la afirmación anterior puede revisarse en el Apéndice A.

Definición 3.2.2. Dado un punto $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, la sucesión inductivamente definida por $z_{n+1} = f(z_n)$ es llamada *órbita positiva* de z_0 y es denotada por $\mathcal{O}^+(z_0)$.

Si $z_0 = z_n$ para algun n , entonces z_0 es un *punto periódico* y $\mathcal{O}^+(z_0)$ es una *órbita periódica* o simplemente un *ciclo*. Si n es el primer número natural tal que $z_0 = z_n$, entonces n es llamado el *periodo* de la órbita.

Usualmente si el periodo de una órbita es uno, se dice que z_0 es un *punto fijo* en lugar de periódico.

Definición 3.2.3. Para algún polinomio f y un entero positivo k definimos la *potencia de composición* como sigue:

- i) $f^{\circ(0)} = I$,
- ii) $f^{\circ 1} = f$,
- iii) $f^{\circ k} = f(f^{\circ(k-1)})$.

Definición 3.2.4. Para un polinomio f , su *conjunto de Julia completo* denotado por $K(f)$, es el conjunto de todos los puntos z cuya órbita $\mathcal{O}^+(z)$ es acotada en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, mientras que su *conjunto de Julia* es la frontera, $\partial K(f)$, y finalmente su *conjunto de Fatou* es el complemento de su conjunto de Julia en \mathbb{C} , denotados respectivamente por $J(f)$ y $F(f)$.

Definición 3.2.5. Sea z_0 un punto periódico de periodo n , entonces el número $\lambda_{z_0} = f^{\circ n}(z_0)$ es *valor propio* o *múltiplicador* del ciclo, y es independiente de la elección de z_0 en el ciclo. El ciclo es:

- i) *atractor* si $0 < |\lambda_{z_0}| < 1$,
- ii) *repulsor* si $|\lambda_{z_0}| > 1$,
- iii) *racional indiferente* si λ es raíz de unidad, y
- iv) *irracional indiferente* si $|\lambda_{z_0}| = 1$ pero λ_{z_0} no es raíz de unidad.

Por otro lado un punto fijo z_0 de un polinomio f es un *atractor* si existe una vecindad, $V(z_0)$, alrededor de z_0 , donde la órbita positiva de cualquier punto de $V(z_0)$ tiende a z_0 , es un *repulsor* si existe una vecindad, $V(z_0)$, alrededor de z_0 , donde la órbita positiva de cualquier punto de $V(z_0)$ sale esta vecindad y es un *neutro* si no es ni atractor ni repulsor.

En [10] se presenta la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Algunos hechos básicos pero no triviales son los siguientes:

- i) ciclos atractores* permanecen en $F(f)$,
- ii) ciclos repulsores* permanecen y son densos en $J(f)$,
- iii) ciclos racionales indiferentes* permanecen en $J(f)$, y
- iv) ciclos irracionales indiferentes* pueden estar tanto en $F(f)$ como en $J(f)$.

Definición 3.2.6. Para $z_0 \in \mathbb{C}$, su *órbita negativa* con respecto a f es el conjunto:

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{\circ(-k)}(z_0).$$

Si f es un polinomio, z es un *punto excepcional* si y solo si su órbita negativa $\mathcal{O}^-(z)$ es finita.

Un punto que no es excepcional es llamado *no-excepcional*. Además un punto excepcional se encuentra en $F(f)$ y un polinomio tiene a lo más un punto excepcional.

Teorema 3.2.1. [2] Para un polinomio f de grado al menos 2,

- i) si z_0 es no-excepcional* entonces $J(f) \subseteq \text{Cl}(\mathcal{O}^-(z_0))$;
- ii) si $z_0 \in J(f)$* entonces $J(f) = \text{Cl}(\mathcal{O}^-(z_0))$.

Intuitivamente, como $J(f)$ es un *conjunto repulsor* para f , es de alguna manera *atractor* para $f^{\circ(-1)}$. En lugar de buscar la inversa de toda la órbita $\mathcal{O}^-(z_0)$ buscamos cuando $f^{\circ(-k)}$ converge en algún sentido a $J(f)$. Para lo que necesitamos establecer los siguientes resultados. Ahora como los conjuntos $f^{\circ(-k)}(z_0)$ son finitos, son necesariamente compactos.

Teorema 3.2.2 (Hickman [20]). Sea f un polinomio, y sea z_0 que no está en algún ciclo atractor o en el *disco de Siegel* de f (ver Definición 3.2.8). Entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{\circ(-k)}(z_0) = J(f),$$

donde el límite es tomado con respecto a la métrica de Hausdorff sobre conjuntos compactos de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Antes de realizar la prueba del Teorema 3.2.2 daremos a conocer 3 resultados de la literatura que nos servirán para esto.

Definición 3.2.7. Sea $A \subseteq \mathbb{C}_\infty$ y $\varepsilon > 0$, la *extensión* de A por la bola de radio ε es,

$$A + \varepsilon = \{z \mid d(z, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

El grado de una función racional se define como su número de ceros o de polos, es decir una función racional de orden p tiene exactamente p ceros y p polos.

Lema 3.2.1 (Beardon [2]). Sea f una función racional de grado al menos 2, y $E \subset \mathbb{C}_\infty$ compacto, tal que para todo $z \in F(f)$, la sucesión $\{f^{\circ k}(z)\}$ no tiene límite en E . Entonces para cualquier U subconjunto abierto de $J(f)$, $f^{\circ(-k)}(E) \subseteq U$ para todo k suficientemente grande.

Lema 3.2.2. [2] Sea f una función racional de grado al menos 2, W un dominio que se intersecta con J , y K cualquier conjunto compacto que no contiene puntos excepcionales de f . Entonces para k suficientemente grande, $K \subset f^{\circ k}(W)$.

Definición 3.2.8. Si z_0 se encuentra en un ciclo irracional indiferente de f de periodo k , y este ciclo está en el conjunto de Fatou, $F(f)$, entonces la componente F_0 de $F(f)$ que contiene a z_0 es positiva invariante bajo $f^{\circ k}$ y es llamado un *disco de Siegel*.

Para cualquier punto $z \neq z_0$ en F_0 , la sucesión $\{f^{\circ k}, f^{\circ(2k)}, \dots\}$ es densa sobre una curva contenida en F_0 , llamada *círculo invariante*.

Como los ciclos atractores se encuentran en $F(f)$, del Teorema 3.2.2 se sigue que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{\circ(-k)} = J(f)$ para cualquier punto $z_0 \in J(f)$.

De hecho, una clasificación completa de las posibles componentes periódicas de una funcional racional es conocida; y cada componente C de un conjunto de Fatou

$F(f)$ es periódica bajo f , es decir, para algunos $j > k \geq 0$, $f^{\circ j}(C) = f^{\circ k}(C)$. Estos resultados fueron probados por Sullivan[2] y una consecuencia de esto es:

Lema 3.2.3. Si f es un polinomio, y $z_0 \in F(f)$, entonces la órbita positiva $\mathcal{O}^+(z_0) = \{f^{\circ k}(z_0)\}$ cumple una de las dos afirmaciones siguientes:

- i)* converge a un ciclo periódico, o
- ii)* permanece en un “ciclo periódico” de un disco de Siegel, y es densa sobre un círculo invariante en el ciclo.

En \mathbb{C}_∞ las órbitas positivas no acotadas convergen a el punto infinito con respecto a la métrica esférica, σ_0 , esto queda cubierto por el inciso *i)* del Lema 3.2.3, ya que ∞ es un punto fijo (periódico) de cualquier polinomio. Ahora procederemos a probar el Teorema 3.2.2.

Demostración. Teorema 3.2.2. Sean f y z_0 que cumplen las hipótesis del teorema, y dado $\varepsilon > 0$. Probar el límite de la conclusión del teorema es equivalente a probar que para todo k suficientemente grande,

- i)* $f^{\circ(-k)}(z_0) \subseteq J(f) + \varepsilon$, y
- ii)* $J(F) \subseteq f^{\circ(-k)}(z_0) + \varepsilon$,

Donde $A + \varepsilon = \{z \mid \sigma_0(z, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$, es la extensión de A por la bola de radio ε con respecto a la métrica esférica.

Para probar *i)*, note que si $z_0 \in J(f)$, entonces $f^{\circ(-k)}(z_0) \subseteq J(f) \subset J(f) + \varepsilon$ para todo k por el Teorema 3.2.1. Asumimos entonces que $z_0 \in F(f)$, por la Proposición 3.2.1 los ciclos periódicos en $F(f)$ son atractores o irracionales indiferentes, los últimos permanecen en un disco de Siegel. En consecuencia, ya que z_0 no está ni en un ciclo atractor ni en un disco de Siegel, el Lema 3.2.3 implica que ningún punto $z \in F(f)$ tiene órbita positiva que se acumule en z_0 . Por lo tanto, el conjunto $E = \{z_0\}$ satisface las hipótesis del Lema 3.2.1 y podemos concluir que $f^{\circ(-k)}(z_0) \subseteq J(f) + \varepsilon$ para todo k suficientemente grande.

Para probar *ii)* primero elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, y una cubierta finita de bolas abiertas de radio δ para $J(f)$ (la cual existe ya que $J(f)$ es compacto). El punto z_0 es no-excepcional, ya que los puntos excepcionales son necesariamente puntos periódicos

en $F(f)$. Para cada bola W en la cubierta \mathcal{W} , el Lema 3.2.2 implica que para k suficientemente grande, $\{z_0\} \subset f^{\circ(k)}$, y por lo tanto $f^{\circ(-k)}(z_0) \cap W \neq \emptyset$. Desde que solo existe un número finito de bolas W , tenemos que, para todo k suficientemente grande, $f^{\circ(-k)}(z_0) \cap W \neq \emptyset$ para cada bola W . Por último, ya que $\varepsilon > 2\delta$ concluimos que para todo k suficientemente grande, $J(F) \subset \mathcal{W} \subset f^{\circ(-k)}(z_0) + \varepsilon$, lo que completa la prueba. ■

3.3. Conjugación.

Las transformaciones de Möbius o transformaciones lineales tiene propiedades geométricas muy importantes como se verá a continuación.

Definición 3.3.1. Una *transformación de Möbius* es una función de la forma:

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

Donde a, b, c, d son números complejos fijos. La condición $ad - bc \neq 0$ asegura que ϕ es inyectiva y además invertible y su inversa es

$$\phi^{\circ-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

entonces la inversa también es una transformación de Möbius.

Una forma conveniente de expresar una transformación de Möbius es usando coordenadas homogéneas. Si $z = \frac{z_1}{z_2}$, $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ y $\omega = \phi(z)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= az_1 + bz_2, \\ \omega_2 &= cz_1 + dz_2, \end{aligned}$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

así $\omega = \phi(z)$ donde $z_1 = z$ y $z_2 = 1$.

Por lo anterior sabemos que la composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius y como ya se había mencionado anteriormente que la inversa también lo es.

Algunas transformaciones simples son las siguientes

i) $\omega = z + \alpha$, llamada *traslación*,

i) $\omega = kz$, llamada *rotación* si $|k| = 1$ o *homotecia* si $k > 0$,

i) $\omega = \frac{1}{z}$, llamada *inversión*.

Note que si $c \neq 0$ primero aplicamos una traslación

$$z \rightarrow z + \frac{d}{c},$$

después una inversión

$$z \rightarrow \frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

posteriormente una homotecia o rotación

$$z \rightarrow \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

y por último una traslación

$$z \rightarrow \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

En general toda transformación de Möbius se construye con los pasos anteriores excepto si $c = 0$ en cuyo caso solo se necesitan una traslación y una homotecia o rotación.

Definición 3.3.2. Dos polinomios f y g son *conjugados* si existe una transformación de Möbius ϕ tal que:

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{o(-1)}.$$

Proposición 3.3.1. Sean f y g polinomios conjugados, para cualquier entero positivo k :

$$g^{ok} = \phi \circ f^{ok} \phi^{o(-1)}.$$

Demostración. Por inducción tenemos:

i) Para $k = 2$,

$$g^{\circ 2} = g \circ g = \phi \circ f \circ \phi^{\circ(-1)} \circ \phi \circ f \circ \phi^{\circ(-1)} = \phi \circ f \circ f \circ \phi^{\circ(-1)} = \phi \circ f^{\circ 2} \circ \phi^{\circ(-1)},$$

es decir

$$g^{\circ 2} = \phi \circ f^{\circ 2} \circ \phi^{\circ(-1)},$$

ii) Supongamos que existe k entero positivo tal que:

$$g^{\circ(k-1)} = \phi \circ f^{\circ(k-1)} \circ \phi^{\circ(-1)} \quad (*).$$

Ahora por (*) tenemos:

$$g^{\circ(k)} = g \circ g^{\circ(k-1)} = g \circ \phi \circ f^{\circ(k-1)} \circ \phi^{\circ(-1)} = \phi \circ f \circ \phi^{\circ(-1)} \circ \phi \circ f^{\circ(k-1)} \circ \phi^{\circ(-1)}.$$

Finalmente

$$g^{\circ(k)} = \phi \circ f \circ \phi^{\circ(-1)} \circ \phi \circ f^{\circ(k-1)} \circ \phi^{\circ(-1)} = \phi \circ f^{\circ(k)} \circ \phi^{\circ(-1)}.$$

■

La propiedad anterior es muy importante ya que el conjunto de Julia de polinomios conjugados se relaciona a través del siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 (Beardon [2]). Sean f y g polinomios conjugados con transformación de Möbius ϕ , entonces $F(g) = \phi(F(f))$ y $J(g) = \phi(J(f))$. Además los conjuntos $J(g)$ y $J(f)$ son llamados *analíticamente conjugados*, del mismo modo que $F(g)$ y $F(f)$.

Capítulo 4

Independencia fractal de un grafo.

*Nada está perdido si se tiene el valor de proclamar que todo está perdido
y hay que empezar de nuevo.*

Julio Cortázar, Rayuela

A partir de la relación mostrada en el Capítulo 2 y los conceptos presentados en el Capítulo 3, en este capítulo se asocia un fractal a un grafo, mediante la dinámica de su polinomio de independencia reducido.

En la primera sección se presenta la relación que existe entre el conjunto de raíces del polinomio de independencia reducido de un grafo mediante la potenciación de este con su conjunto de Julia, además se presenta un breve estudio sobre la conexidad de la independencia fractal de algunos grafos simples.

En la segunda sección se estudian todos los grafos con número de independencia 2 y su relación con el conjunto de Mandelbröt mediante la conjugación revisada en la última sección del Capítulo 3. Además de presentar algunos ejemplos de grafos con al menos 4 vértices para aplicar los teoremas que nos aseguran como se comporta su independencia fractal.

Finalmente se presenta el estudio de algunas familias de grafos con un número de independencia alto y como se relacionan sus polinomios de independencia entre ellos, es decir ver si podemos aplicar la conjugación antes mencionada, además de estudiar la conexidad de sus independencias fractales.

4.1. Teoría general de la independencia fractal de un grafo.

Estamos interesados en describir el conjunto de las raíces del polinomio de independencia reducido de las potencias de un grafo G , es decir las raíces de $f_{G^k} = f_G^{\circ k}$ cuando $k \rightarrow \infty$. De este modo podremos asociar un fractal con el grafo G . Sabemos que para cada $k \geq 1$ el conjunto, $R(f_{G^k})$ es un subconjunto finito de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ y por lo tanto es un conjunto compacto. En general existe el límite de la sucesión $\{R(f_{G^k})\}_k$ con respecto a la métrica de Hausdorff para conjuntos compactos en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Definición 4.1.1. La *independencia fractal de un grafo G* es el conjunto:

$$\mathcal{F}(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} R(f_{G^k}) \quad (4.1)$$

De la Ecuación (4.1), para cada $k \geq 2$ usando la asociatividad de la composición de grafos podemos escribir $G^k = G^{k-1}[G]$, lo que implica:

$$f_{G^k} = f_{G^{k-1}} \circ f_G,$$

Lo cual deriva en la relación,

$$R(f_{G^k}) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_{G^{k-1}})),$$

Para $k = 1$ tenemos:

$$R(f_G) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_{G^0})) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_\emptyset)) = f_G^{\circ(-1)}(0).$$

Proposición 4.1.1. Para cada $k \geq 1$, tenemos:

$$R(f_{G^k}) = f_G^{\circ(-k)}(0). \quad (4.2)$$

Y por lo tanto;

$$\mathcal{F}(G) = f_G^{\circ(-k)}(0). \quad (4.3)$$

Ahora por el Teorema 3.2.2 vemos que para el grafo K_1 , $f_{K_1}(x) = x$ y $f_{K_1^k}(x) = x$ para todo k , de donde $\mathcal{F}(G) = \{0\}$. El Teorema 4.1.1 generaliza este hecho como sigue.

Teorema 4.1.1. La *independencia fractal de un grafo* $G \neq K_1$ denotada por $\mathcal{F}(G)$, es precisamente el conjunto de Julia de su polinomio de independencia reducido $J(f_G)$. Equivalentemente, $\mathcal{F}(G)$ es la cerradura de la unión de los conjuntos de raíces de cada polinomio de independencia reducido de las potencias G^k , $k = 1, \dots, \infty$.

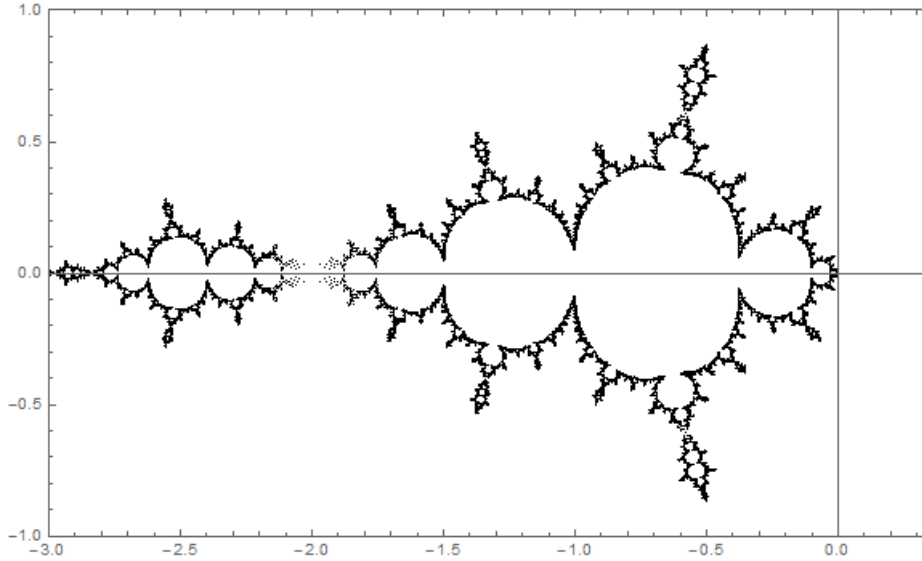
Demostración. Si G tiene número de independencia $\beta = 1$, entonces $G = K_n$ para algún $n \geq 2$, y así $f_G(x) = nx$, cuyo conjunto de Julia es $J(f) = \{0\}$ ya que cualquier otro punto diferente de cero tiene órbita positiva no acotada. Ahora $G^k = K_{n^k}$ para todo k , es decir, $f_{G^k}(x) = n^k x$, y su conjunto de raíces es $\{0\}$. Entonces el límite de la unión de los conjuntos de raíces es $\{0\} = J(f_G)$ y el resultado se mantiene.

Si G tiene número de independencia $\beta \geq 2$, entonces $f_G(x)$ tiene grado al menos 2, ya que:

$$f_G(x) = \sum_{j=0}^{\beta} i_j x^j \quad (4.4)$$

De la Ecuación (4.4) tenemos $f_G(0) = 0$ y $f'_G(0) = i_1 = |G| > 1$ y de la Definición 3.2.5 inciso *ii*) podemos decir que 0 es un *punto fijo repulsor* de $f_G(x)$ y por la Proposición 3.2.1 inciso *ii*) está en $J(f_G(x))$. De hecho 0 cumple las hipótesis del Teorema 3.2.2 y por lo tanto $\mathcal{F}(G) = J(f_G)$. ■

Algunas observaciones importantes relacionadas con los conceptos anteriores presentadas en [10] son las siguientes:


 FIGURA 4.1: Gráfica de la independencia fractal de $P_2 \uplus K_1$, $\mathcal{F}(P_2 \uplus K_1)$

Observación 4.1. Ya que $f_G(0) = 0$, tenemos que $0 \in f_G^{\circ(-1)}(0)$. Aplicando $f_G^{\circ(-1)}$ a ambos lados de la igualdad obtenemos $f_G^{\circ(-1)}(0) \subseteq f_G^{\circ(-2)}(0)$ y por inducción $f_G^{\circ(-k)}(0) \subseteq f_G^{\circ(-(k+1))}(0)$ para todo k . Por lo tanto para todo k , $R(f_{G^k}) \subseteq R(f_{G^{k+1}})$.

Observación 4.2. Para el polinomio de independencia $i_{G^k}(x) = f_{G^k}(x) + 1$, el límite de los conjuntos de raíces es $\mathcal{J}(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_G^{\circ(-k)}(-1)$, el cual siempre contiene $\mathcal{F}(G) = J(f_G)$. La contención es propia exactamente cuando i_G tiene a -1 como raíz de multiplicidad al menos 2, ya que entonces -1 es un punto fijo atractor para f_G . La situación aquí es $R(i_{G^k}) \subseteq R(i_{G^{k+1}})$ para todo k , y $\mathcal{J}(G)$ es particionado por el conjunto, $\bigcup_{k \geq 1} R(i_{G^k})$, y el conjunto de sus puntos de acumulación $J(f_G)$. Sin embargo, las nuevas raíces cada paso, denotadas por $R(i_{G^k}) - R(i_{G^{k+1}})$ converge precisamente $\mathcal{F}(G) = J(f_G)$.

Observación 4.3. Hasta ahora la relación descrita por la Observación 4.2 falla cuando $E(G)$ es un conjunto vacío, donde no se agregan nuevas raíces de independencia en ningún paso. En efecto, para $G = \overline{K_n}$ tenemos que $i_G(x) = (1+x)^n$, y para cada k , $G^k = \overline{K_{n^k}}$, $i_{G^k}(x) = (1+x)^{n^k}$, cuya única raíz es -1 . Así, $\mathcal{J}(G) = \{-1\}$. De aquí que $\mathcal{F}(x) \not\subseteq \mathcal{J}(G)$: si $n = 1$ entonces para todo k , $G^k = K_1$ y $f_{G^k}(x) = x$, por lo cual $\mathcal{F}(G) = \{0\}$; si $n > 1$ entonces el conjunto de raíces de $f_{G^k} = (1+x)^{n^k} - 1$ es denso en el círculo $|z+1| = 1$ cuando $k \rightarrow \infty$, y por el Teorema 4.1.1, $\mathcal{F}(G)$ es precisamente ese círculo que es a la vez $J((1+x)^n - 1)$.

Hasta el momento se han analizado por completo los grafos con conjunto de aristas vacío en la Observación 4.3 y además estos grafos son los únicos en los cuales la

relación entre $\mathcal{F}(G)$ y $\mathcal{J}(G)$ descrita en la Observación 4.2 no se cumple. Asumimos de ahora en adelante que G es un grafo con conjunto de aristas no vacío.

Ahora, como los conjuntos de Julia son típicamente fractales en esencia asociamos un fractal $\mathcal{F}(G)$ con un grafo G . Estamos interesados en ver que propiedades de un grafo se reflejan en su fractal asociado y de que manera; en la siguiente sección nos encontraremos con grafos cuya independencia fractal será un conjunto desconexo y otros en los cuales será un conjunto conexo, de donde nos preguntamos si se podrá predecir para cuáles grafos G su independencia fractal $\mathcal{F}(G)$ es un conjunto conexo.

Observación 4.4. Para el polinomio de independencia usual, cuando -1 es raíz de $i_G(x)$ con multiplicidad a lo más 1, entonces $\mathcal{F}(G)$ y $\mathcal{J}(G)$ son siempre iguales [10]. En este caso la independencia fractal G es un conjunto conexo. Más aún, cuando $i_G(x)$ tiene a -1 como raíz de multiplicidad al menos 2, entonces la naturaleza de la partición resultante de $\mathcal{J}(G)$ descrita en la Observación 4.2 implica que $\mathcal{J}(G)$ es un conjunto desconexo. Lo que es más interesante si se trata de su conjunto de puntos de acumulación (equivalentemente, el conjunto límite de las nuevas raíces de independencia en cada paso), $\mathcal{F}(G) = J(f_G)$, es un conjunto conexo.

Hemos visto hasta el momento que cada grafo, con excepción de los grafos completos, está contenido, como subgrafo inducido, en un grafo con el mismo número de independencia, cuya independencia fractal es un conjunto desconexo.

El siguiente resultado de la teoría de iteración, que enlaza los puntos críticos de un polinomio con la conexidad de su conjunto de Julia, será muy útil.

Teorema 4.1.2 (Beardon [2]). Sea f un polinomio de grado al menos 2.

- i)* El conjunto de Julia $J(f)$ es conexo si y solo si la órbita positiva de cada uno de sus puntos críticos es acotada en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$,
- ii)* El conjunto de Julia $J(f)$ es totalmente desconexo si la órbita positiva de cada uno de sus puntos críticos es no acotada en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Teorema 4.1.3. Cada grafo G con número de independencia β_G al menos 2 es un subgrafo inducido de un grafo H con el mismo número de independencia, cuya independencia fractal es desconexa.

Demostración. Ya que $\beta_G \geq 2$ entonces $f_G(x)$ tiene grado al menos 2, es decir, $gr(f_G(x)) \geq 2$, usando la desigualdad triangular vemos que existe un número real R tal que $|z| > R \Rightarrow |f_G(z)| > 2|z|$, lo que implica que la órbita positiva de z es no acotada en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Ahora, no cada punto crítico de f_G es una raíz de f_G . De hecho, para cada raíz r de ambos f'_G y f_G , su multiplicidad como raíz de f_G es mayor por uno que su multiplicidad como raíz de f'_G . Pero sabemos que $gr(f_G) = gr(f'_G) + 1$, entonces si cada punto crítico de f_G es también una raíz de f_G , este tendría un único punto crítico c , es decir $f_G(x) = a(x - c)^{\beta_G}$. Pero como f_G es un polinomio de independencia reducido cero siempre es una raíz de él, entonces $c = 0$ y $f_G(x) = a(x)^{\beta_G}$, por lo tanto $\beta_G = 1$ lo que contradice nuestra hipótesis inicial.

Entonces podemos elegir un punto crítico c de f_G para el cual $f_G(c) = w \neq 0$, y también un entero p suficientemente grande de modo que $|p \cdot w| > R$. Ahora para el grafo $G[K_p]$ tenemos que $\beta_{G[K_p]} = \beta_G$, de donde $f_{G[K_p]}(x) = f_G(f_{K_p}(x)) = f_G(px)$, el cual tiene como punto crítico $\frac{c}{p}$. Además $f_{G[K_p]}(\frac{c}{p}) = f_G(c) = w$, y también $|f_{G[K_p]}^{\circ k}(w)| = |f_G^{\circ k}(pw)| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto por el Teorema 4.1.2 el grafo $G[K_p]$, que tiene como subgrafo inducido G y número de independencia β_G , tiene independencia fractal totalmente desconexa. ■

Hemos probado que $G[K_p]$ tiene independencia fractal desconexa para p suficientemente grande. De hecho, esto también se cumple para $K_p[G]$, ya que $f_{K_p}(x) = px$, tenemos:

Teorema 4.1.4. Para un grafo G y un entero positivo p ,

$$f_{K_p[G]}(px) = p \cdot f_G(px) = p \cdot f_{G[K_p]}(x). \quad (4.5)$$

Esto es;

$$f_{K_p[G]} \circ \phi = \phi \circ f_{G[K_p]},$$

donde ϕ es la transformación de Möbius $x \mapsto px$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(K_p[G]) = p \cdot \mathcal{F}(G[K_p]). \quad (4.6)$$

La Ecuación (4.6) se sigue directamente de el Teorema 3.3.1 sobre el conjunto de Julia de polinomios conjugados, y decimos que la independencia fractal de $K_p[G]$ es simplemente un escalamiento de la de $G[K_p]$. Por lo tanto el conjunto anterior será disconexo para todo p suficientemente grande, entonces tenemos el siguiente resultado que sugiere que la conectividad de un grafo y la conexidad de su independencia fractal no están relacionadas.

Teorema 4.1.5. Si G es un grafo con número de independencia al menos 2, entonces para todo p suficientemente grande, la unión de p copias de G tiene independencia fractal disconexa.

Los grafos con número independencia $\beta_G = 1$ no resultan muy interesantes, ya que $f_{K_n}(x) = nx$, cuyo conjunto de Julia es el conjunto $\{0\}$. Para los grafos con número de independencia $\beta_G = 2$ podemos aprovechar el conjunto de Mandelbröt para decidir cuando su independencia fractal es conexa, situación que se revisará en la siguiente sección.

4.2. Grafos con número de independencia $\beta_G = 2$.

Para un grafo G con número de independencia $\beta_G = 2$, m no-aristas y de orden n , su polinomio de independencia está dado por la Ecuación (4.7).

$$f_G(x) = mx^2 + nx. \quad (4.7)$$

Definición 4.2.1. El *conjunto de Mandelbröt*, denotado por \mathcal{M} , es el conjunto de todos los números complejos c para los cuales el conjunto de Julia del polinomio $x^2 + c$ es conexo.

Para cualquier otro valor de c , el conjunto de Julia $J(x^2 + c)$ no es solo disconexo sino totalmente disconexo, ya que $x^2 + c$ tiene solamente un punto crítico cuya órbita es no acotada (Teorema 4.1.2). Los conjuntos de Julia de este tipo son usualmente llamados *polvo fractal*.

Consideremos un polinomio de la forma $x^2 + c$ para el cual $f_G(x)$ es un polinomio conjugado. Directamente obtenmos:

$$g_G = \phi \circ f_G \circ \phi^{(-1)}$$

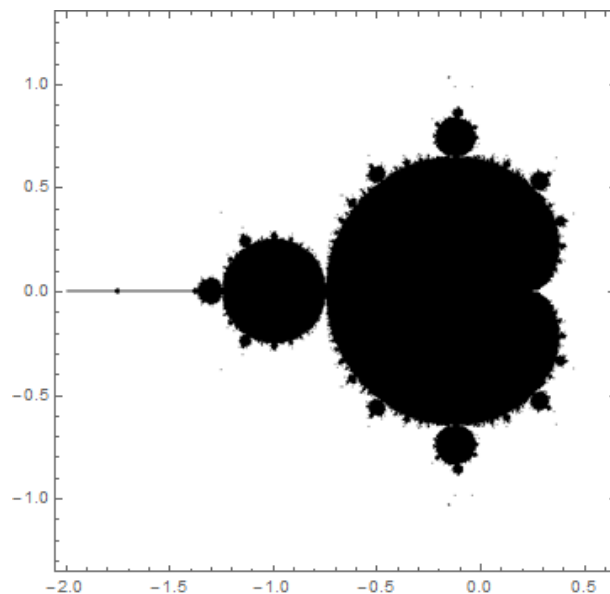


FIGURA 4.2: Gráfica del conjunto de Mandelbröt

donde

$$g_G(x) = x^2 + \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad (4.8)$$

y

$$\phi(x) = mx + \frac{n}{2} \quad (4.9)$$

entonces

$$\phi^{o(-1)}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{n}{2m} \quad (4.10)$$

y por el Teorema 3.3.1 tenemos,

$$\mathcal{F}(G) = \phi^{o(-1)}(J(x^2 + c)), \quad \text{donde } c = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad (4.11)$$

De lo anterior, $\mathcal{F}(G)$ es solamente un escalamiento y desplazamiento de $J(x^2 + c)$, y como vimos c es independiente de m , entonces la conexidad de $\mathcal{F}(G)$ depende únicamente del orden de G ; además el hecho de que $E(G)$ sea un conjunto no vacío implica que $n \geq 3$. La localización de $\mathcal{F}(G)$, depende tanto del número de aristas como del orden de G como se verá a continuación.

Teorema 4.2.1. Si G es un grafo con conjunto de aristas $E(G)$ diferente del vacío con número de independencia $\beta_G = 2$, con n vértices y m no-aristas, y sea $z \in \mathcal{F}(G)$, entonces

$$i) \quad -\frac{n}{m} \leq \text{Re}(z) \leq 0, \text{ y}$$

ii) $Im(z) = 0$, a menos que $n = 3$, en cuyo caso $|Im(z)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2m}$.

4.2.1. Grafos de orden 3 con $\beta_G = 2$.

Existen exactamente dos grafos de orden 3 con número de independencia $\beta_G = 2$ (salvo isomorfismos), uno de ellos es $K_1 \uplus P_1$, la unión disjunta de un vértice con una arista y P_1 el camino de longitud 1. Sus respectivos polinomios de independencia reducidos son $f_{K_1 \uplus P_1} = 2x^2 + 3x$ y $f_{P_2} = x^2 + 3x$, así por el Teorema 4.1.1, la independencia fractal de estos grafos está dada por $\mathcal{F}(K_1 \uplus P_1) = J(2x^2 + 3x)$ y $\mathcal{F}(P_2) = J(x^2 + 3x)$ respectivamente. En la Figuras (4.3, 4.4) se muestran estos conjuntos de Julia.

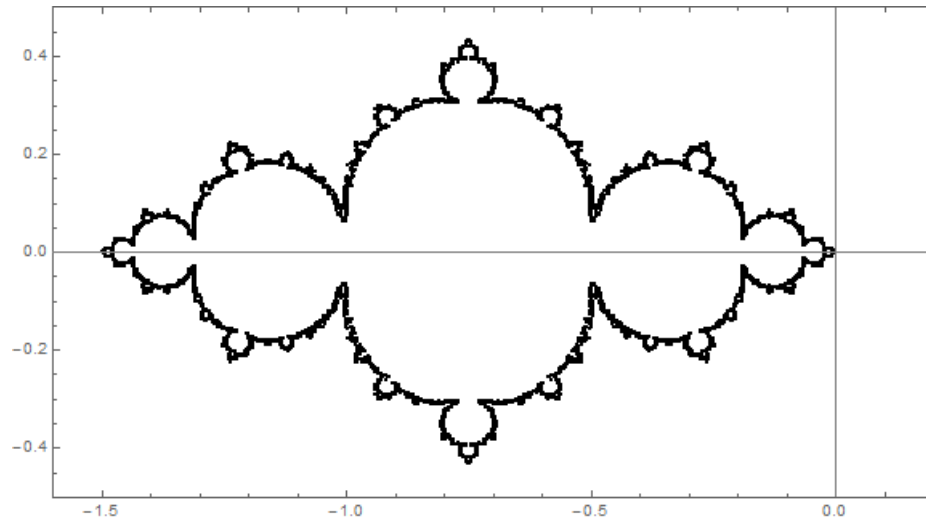


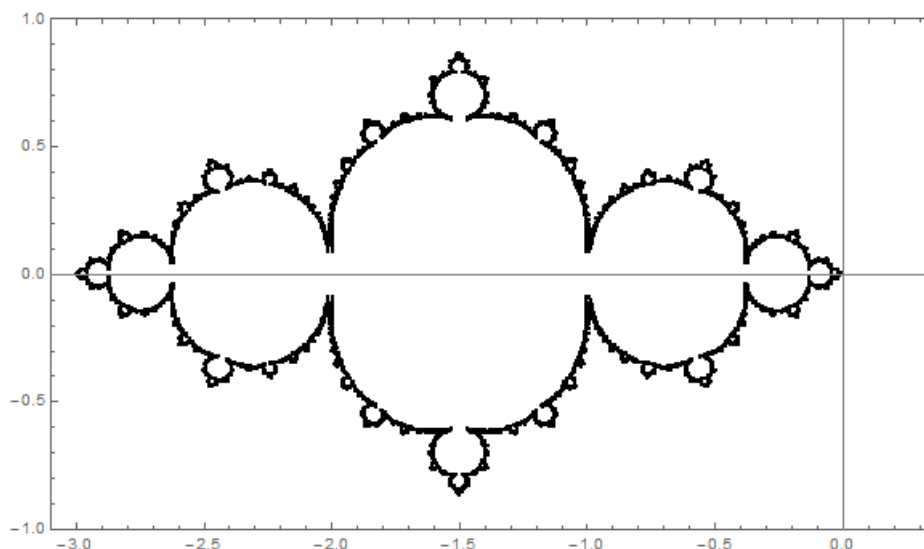
FIGURA 4.3: Gráfica de la independencia fractal de $K_1 \uplus K_2$, $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2)$

Antes de continuar primero revisemos un poco que sucede para el conjunto de Julia de $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$, veamos que $J(g(x))$ está contenido en $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. Esta es la mejor acotación posible ya que $z = \frac{3}{2}$ es un punto fijo repulsor de g y $g^{o2}(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}i) = g(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \in J(g(x))$. Ya que los puntos repulsores de g permanecen en $J(g(x))$, y $J(g)$ es completamente invariante, tenemos que $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}i \in J(g(x))$.

Lema 4.2.1. Para $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ y $z = a + bi \in \mathbb{C}$, si $|a| > \frac{3}{2}$ o $|b| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $|g(z)| > \frac{3}{2}$.

Demostración. Tenemos que $g(z) = z^2 - \frac{3}{4} = (a^2 - b^2 - \frac{3}{4}) + 2abi$, y entonces

$$|g(z)|^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + \frac{3}{2}b^2 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{16}. \quad (4.12)$$


 FIGURA 4.4: Gráfica de la independencia fractal de P_2 , $\mathcal{F}(P_2)$

Ahora, si $|b| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces del Lemma 3.2.1,

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &\geq b^4 + 2a^2b^2 + \frac{3}{2}b^2 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{16} \\ &= a^2 \left(2b^2 - \frac{3}{2}\right) + b^4 + \frac{3}{2}b^2 + \frac{9}{16} \\ &> \left(2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) a^2 + \frac{9}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \\ &= \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $|g(z)| > \frac{3}{2}$.

Por otro lado, si $|a| > \frac{3}{2}$, entonces del Lemma 3.2.1,

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &\geq a^4 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{16} \\ &= a^2 \left(a^2 - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{16} \\ &> \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{16} \\ &= \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

lo que implica que $|g(z)| > \frac{3}{2}$. ■

Lema 4.2.2. Para $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| \geq \frac{3}{2} + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $|g(z)| \geq \frac{3}{2} + 3\varepsilon$.

Demostración. Tenemos,

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left|z^2 - \frac{3}{4}\right| \\ &\geq \left|z\right|^2 - \frac{3}{4} \\ &\geq \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)^2 - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} + 3\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &> \frac{3}{2} + 3\varepsilon. \end{aligned}$$
■

Del Lema 3.2.1 y el Lema 3.2.2 podemos implicar:

Teorema 4.2.2. Para $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ y $z \in \mathbb{C}$, si $|Re(z)| > \frac{3}{2}$ o $|Im(z)| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $|g^{o k}(z)| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. Como z satisface las hipótesis del Lema 3.2.1, entonces tenemos $|g(z)| = \frac{3}{2} + 3\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, aplicando el Lema 3.2.2 a $g(z)$, obtenemos $|g^{o 2}(z)| \geq \frac{3}{2} + 3^2\varepsilon$, y por inducción $|g^{o k}(z)| \geq \frac{3}{2} + 3^k\varepsilon$ para cada $k \geq 1$, así el teorema queda demostrado. ■

El Teorema 4.2.2 implica que el conjunto de Julia completo, $K(g(x))$, y por lo tanto $J(g(x))$ está contenido en $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, para $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$.

Corolario 4.2.1. El conjunto de Julia $J(x^2 - \frac{3}{4})$ está contenido en el conjunto $\{z : |Re(z)| \leq \frac{3}{2} \text{ y } |Im(z)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Teorema 4.2.3. Si G es un grafo de orden 3 con número de independencia $\beta_G = 2$, entonces,

$$\mathcal{F}(G) = \phi_G^{o(-1)} \left(J \left(x^2 - \frac{3}{4} \right) \right) \quad (4.13)$$

donde ϕ_G es una transformación de Möbius que depende de G . Además,

$$i) \quad \mathcal{F}(K_1 \uplus K_2) \subseteq \left[-\frac{3}{2}, 0 \right] \times \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$$

$$ii) \quad \mathcal{F}(P_2) \subseteq [-3, 0] \times \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Demostración. Como se dijo anteriormente solo existen dos grafos de orden 3 con número de independencia $\beta_G = 2$ por lo que probaremos esta identidad para cada uno de ellos. Primero para $K_1 \uplus K_2$ tenemos por la Ecuación (4.8) que $f_{K_1 \uplus K_2}$ es conjugado del polinomio $g_{K_1 \uplus K_2}(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ y sustituyendo en la Ecuación (4.10) tenemos que $\phi_{K_1 \uplus K_2}^{o(-1)} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Entonces $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2) = \phi_{K_1 \uplus K_2}^{o(-1)} (J(x^2 - \frac{3}{4}))$. Ahora para P_2 tenemos por la Ecuación (4.8) que f_{P_2} es conjugado del polinomio $g_{P_2}(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ y sustituyendo en la Ecuación (4.10) tenemos que $\phi_{P_2}^{o(-1)} = x - \frac{3}{2}$. Entonces $\mathcal{F}(P_2) = \phi_{P_2}^{o(-1)} (J(x^2 - \frac{3}{4}))$. ■

En la Figura 4.5 se muestra gráficamente lo enunciado por el Teorema 4.2.3.

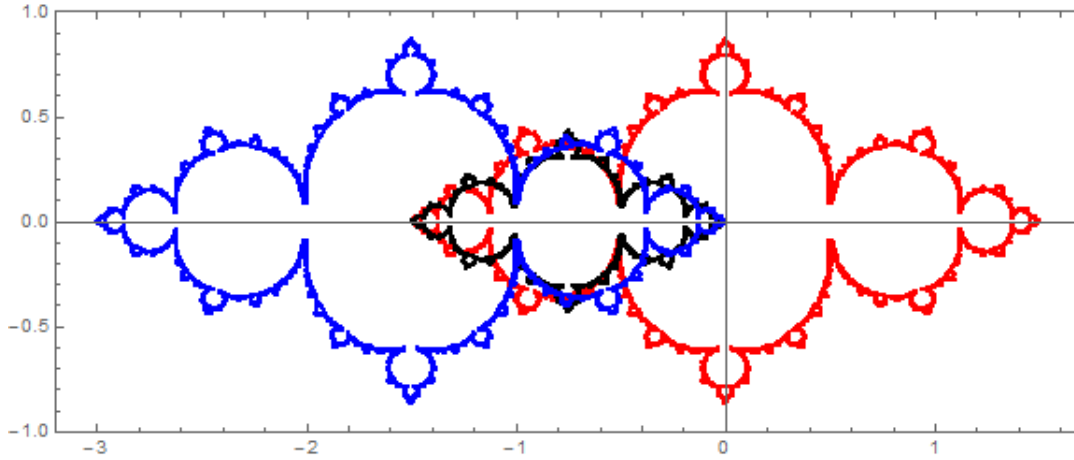


FIGURA 4.5: En rojo $J(g(x))$, en negro $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2)$ y en azul $\mathcal{F}(P_2)$

4.2.2. Grafos de orden 4 con $\beta_G = 2$.

Para un grafo G con número de independencia $\beta_G = 2$ de orden 4 y m no-aristas de las Ecuaciones (4.8) y (4.9) tenemos que $f_G(x)$ es conjugado de $g_G(x) = x^2 - 2$ a través de $\phi(x) = mx + 2$, además sabemos que $J(x^2 - 2)$ es el intervalo $[-2, 2]$, aplicando la transformación $\phi^{\circ(-1)} = \frac{x-2}{m}$ a este intervalo obtenemos,

Teorema 4.2.4. Si G es un grafo de orden 4 con número de independencia $\beta_G = 2$ con m no-aristas, entonces

$$\mathcal{F}(G) = \left[-\frac{4}{m}, 0 \right].$$

Aplicando el teorema anterior al grafo $K_4 - e$, donde e es cualquier arista en K_4 , tenemos que G tiene $m = 1$ no arista, por lo tanto $\mathcal{F} = [-4, 0]$.

4.2.3. Grafos de orden $|G| \geq 5$ con $\beta_G = 2$.

Si G es un grafo con número de independencia $\beta = 2$ y $n = |G| \geq 5$, entonces de la Ecuación (4.11) tenemos $c = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 < -2$, que está fuera del conjunto de Mandelbröt. Esto implica que $J(x^2 + c)$, y por lo tanto $\mathcal{F}(G) = \phi^{\circ(-1)}(J(x^2 + c))$, son polvo fractal. Más aún es sabido [8] que para $c < -2$, $J(x^2 + c)$ está contenido en el intervalo $[-q, q]$, donde $q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$. Con $c = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2$, lo que implica que $q = \frac{n}{2}$. Aplicando $\phi^{\circ(-1)}$ dada por la Ecuación (4.10) a el intervalo $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$ obtenemos $[-\frac{n}{m}, 0]$. Es decir,

Teorema 4.2.5. Si G es un grafo con número de independencia $\beta = 2$, $n = |G| \geq 5$ y m no-aristas, entonces $\mathcal{F}(G)$ es polvo fractal subconjunto del intervalo $[-\frac{n}{m}, 0]$.

Ya que 0 es un punto fijo repulsor de f_G , está en $J(f_G)$. Más aún, tenemos que $f_G(-\frac{n}{m}) = 0 \in J(f_G)$, y $J(f_G)$ es completamente invariante bajo f_G , $-\frac{n}{m} \in J(f_G)$. Por lo tanto el intervalo $[-\frac{n}{m}, 0]$ del Teorema 11 es cerrado.

Ejemplo 11. Dado el grafo $G = K_2 \uplus K_3$, con número independencia $\beta = 2$, $n = |G| = 5$ y $m = 6$ no-aristas; cumple las condiciones del Teorema . Tenemos que $f_G(x) = 6x^2 + 5x$, ya que tiene 6 conjuntos independientes de cardinalidad 2 formados al elegir un vértice de K_2 y después cualquier vértice de K_3 y 5, de cardinalidad 1 (cada vértice); y $\mathcal{F}(G)$ será polvo fractal totalmente desconexo en el intervalo $[-\frac{5}{6}, 0]$.

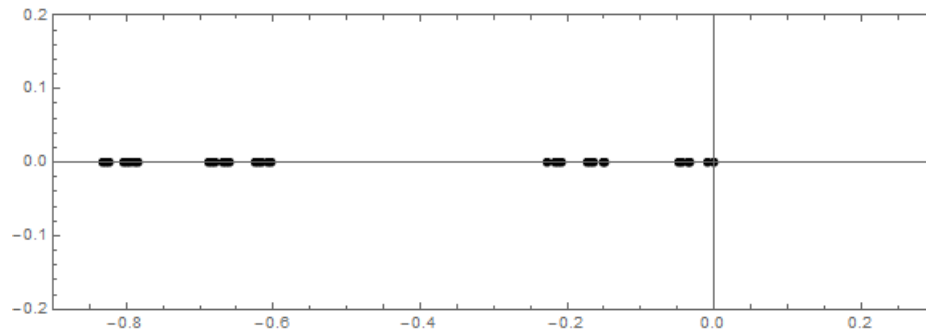


FIGURA 4.6: Gráfica de la independencia fractal de $K_2 \uplus K_3$, $\mathcal{F}(K_2 \uplus K_3)$

4.3. Las familias aK_b y K_a^b .

En esta sección, usando el Teorema 4.1.4 revisaremos la conexión entre la independencia fractal de dos familias de grafos aparentemente distintas con número de independencia arbitrariamente grande.

Consideremos primero el grafo aK_b , la unión disjunta de a copias de K_b . Note que $aK_b = \overline{K_a}[K_b]$; ya que $f_{\overline{K_a}}(x) = (1+x)^a - 1$ y $f_{K_b} = bx$, tenemos que:

$$f_{aK_b} = f_{\overline{K_a}}(bx) = (1+bx)^a - 1 \quad (4.14)$$

y también,

$$f'_{aK_b} = ab(1+bx)^{a-1}, \quad (4.15)$$

cuyo único punto crítico es $z = -\frac{1}{b}$. Por el Teorema 4.1.2 solo puede ser conexo o totalmente desconexo, dependiendo de si la órbita positiva de $z = -\frac{1}{b}$ es acotada o no acotada, respectivamente, en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Ahora, $f_{aK_b}(-\frac{1}{b}) = 0^a - 1 = -1$. Como únicamente consideramos grafos con conjunto de aristas no vacío, $b \geq 2$.

Teorema 4.3.1. La independencia fractal de aK_b es conexa si $b = 2$ y a es par, y totalmente desconexa de otra forma.

Demostración. Caso 1: $b = 2$ y a par. Entonces $f_{aK_2}(x) = (1 + 2x)^2 - 1$. Ahora $f_{aK_2}(-\frac{1}{2}) = -1$, $f_{aK_2}(-1) = (1 - 2)^a - 1 = 0$, y $f(0) = 0$. Por lo tanto la órbita positiva de $-\frac{1}{b}$ converge a 0, y es acotada en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Así, $\mathcal{F}(aK_2)$ es conexa.

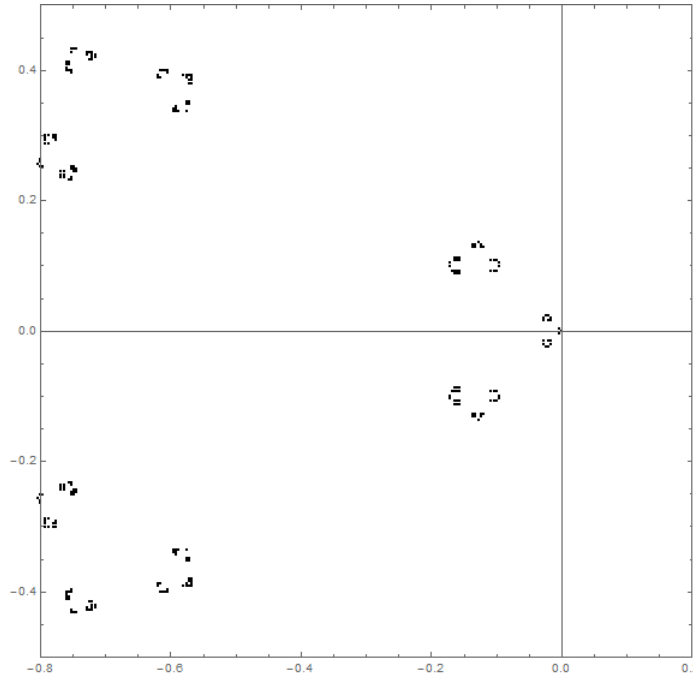
Caso 2: $b \geq 3$, a par. Ahora para la órbita positiva de $-\frac{1}{b}$ con respecto a f_{aK_b} , tenemos $f_{aK_b}(-\frac{1}{b}) = -1$, y $f_{aK_b}(-1) = (1 - b)^a - 1 \geq (2)^a - 1 > 1$. Note que para $z > 1$, se tiene $f(z) > (1 + 2z) - 1 = 2z = z + z > z + 1$. Iterando f_{aK_b} vemos que $f_{aK_b}^{\circ 2}(-\frac{1}{b}) = f_{aK_b}(-1) > 1 \Rightarrow f_{aK_b}^{\circ 3}(-\frac{1}{b}) > f_{aK_b}^{\circ 2}(-\frac{1}{b}) + 1 > 1$. Por lo tanto, la órbita positiva de $-\frac{1}{b}$ es no acotada $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, y $\mathcal{F}(aK_b)$ es totalmente desconexo.

Caso 3: $a \geq 3$ impar. Entonces para este caso tenemos $f_{aK_b}(-\frac{1}{b}) = -1$, y también $f_{aK_b}^{\circ 2}(-\frac{1}{b}) = f_{aK_b}(-1) = (1 - b)^a - 1 \leq (1 - 2)^3 - 1 = -2 < -1$. Note que para $z < -1$, se tiene $f(z) < (1 + 2z) - 1 = 2z = z + z < z - 1$. Iterando f_{aK_b} , vemos que $f_{aK_b}^{\circ 2}(-\frac{1}{b}) = f_{aK_b}(-1) < -1 = f_{aK_b}(-\frac{1}{b}) \Rightarrow f_{aK_b}^{\circ 3}(-\frac{1}{b}) < f_{aK_b}^{\circ 2}(-\frac{1}{b}) < -1$. Por lo tanto, la órbita positiva de $-\frac{1}{b}$ es no acotada $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, y $\mathcal{F}(aK_b)$ es totalmente desconexo.

Caso 4: $a = 1$. Entonces $aK_b = K_b$, cuya independencia fractal es $\{0\}$, que es totalmente desconexa. ■

Como lo hicimos para grafos con número de independencia $\beta = 2$, podemos encontrar un región dentro de la cual está $\mathcal{F}(G)$. Esta región es el disco:

$$\left| z + \frac{1}{b} \right| \leq \frac{1}{b},$$


 FIGURA 4.7: Gráfica de la independencia fractal de $3K_2$, $\mathcal{F}(3K_2)$

Esto es una consecuencia directa del Teorema 4.3.2

Teorema 4.3.2. Para $G = aK_b$ y todo $k \geq 1$, cada raíz F_k de f_{G^k} satisface $|F_k + \frac{1}{b}| \leq \frac{1}{b}$.

Demostración. Por inducción sobre k . Ya que $f_G(x) = (1+bx)^a - 1$, cada raíz F_1 de $f_G(x)$ satisface $(1+bF_1)^a = 1$, lo cual implica que $|1+bF_1| = 1$ y así $|F_1 + \frac{1}{b}| = \frac{1}{b}$; entonces el resultado se cumple para $k = 1$.

Ahora suponga que el resultado es verdadero para algún $k \geq 1$. Como sabemos $f_{G^{k+1}}(x) = f_{G^k}(f_G(x))$, por lo que cualquier raíz F_{k+1} de $f_{G^{k+1}}(x)$ debe satisfacer $f_G(F_{k+1}) = F_k$ para alguna raíz F_k de $f_{G^k}(x)$. Así tenemos $(1+bF_{k+1})^a - 1 = F_k$, y entonces $|1+bF_{k+1}| = |1+F_k|^{\frac{1}{a}}$ y $|F_{k+1} + \frac{1}{b}| = \frac{1}{b}|1+F_k|^{\frac{1}{a}}$. Habíamos supuesto, $|F_k + \frac{1}{b}| \leq \frac{1}{b}$. Aplicando la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}
 |F_{k+1} + \frac{1}{b}| &= \frac{1}{b}|1+F_k|^{\frac{1}{a}} \\
 &= \frac{1}{b} \left| (F_{k+1} + \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{b}) \right|^{\frac{1}{a}} \\
 &\leq \frac{1}{b} \left(|F_{k+1} + \frac{1}{b}| + |1 - \frac{1}{b}| \right)^{\frac{1}{a}} \\
 &\leq \left(\frac{1}{b} + (1 - \frac{1}{b}) \right)^{\frac{1}{a}} \\
 &= \frac{1}{b}.
 \end{aligned}$$

y entonces el resultado se cumple para $k+1$ también, lo que completa la prueba. ■

La acotación del disco $|z + \frac{1}{b}| \leq \frac{1}{b}$ es la mejor posible, como se vio en el Teorema 4.3.2 las raíces de f_{aK_b} pertenecen al disco.

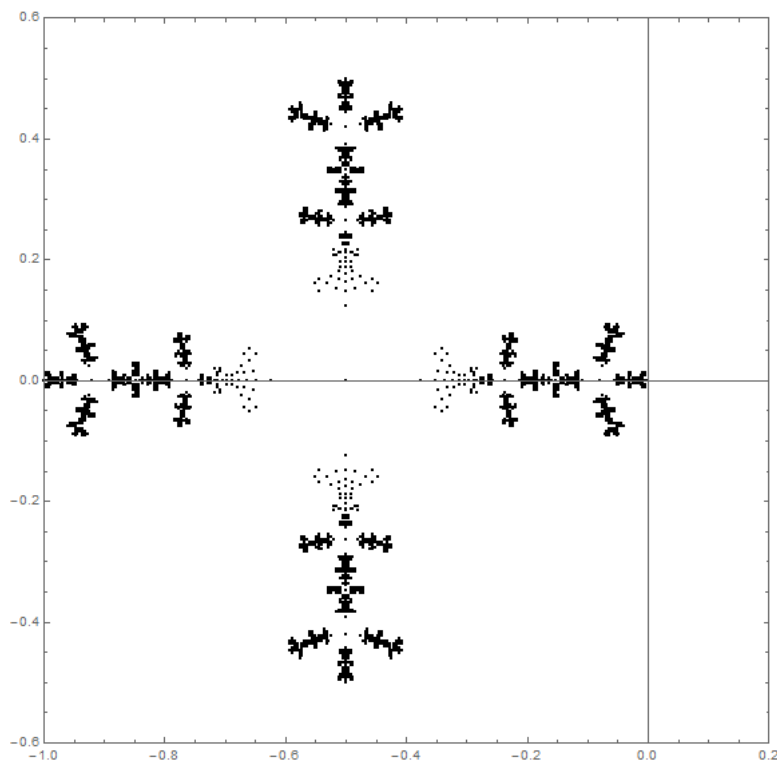


FIGURA 4.8: Gráfica de la independencia fractal de $4K_2$, $\mathcal{F}(4K_2)$

Ahora vamos a considerar la siguiente familia de grafos multipartitos completos K_a^b , ya que estamos considerando grafos con conjunto de aristas no vacío tenemos que $b \geq 2$. Tenemos que el grafo $K_a^b \simeq K_b[\overline{K_a}]$, entonces:

$$\begin{aligned} f_{K_a^b}(x) &= f_{K_b}(f_{\overline{K_a}}(x)) \\ &= f_{K_b}((1-x)^a - 1) \\ &= b((1-x)^a - 1) \\ &= b(1-x)^a - b \end{aligned}$$

Además, tenemos que $f_{K_a^b}(bx) = b(f_{aK_b}(x))$, por el Teorema 4.1.4 tenemos:

$$\mathcal{F}(K_a^b) = b\mathcal{F}(aK_b). \quad (4.16)$$

Del Teorema 4.3.1, Teorema 4.3.2 y la Ecuación (4.16) podemos implicar:

Teorema 4.3.3. La independencia fractal de K_a^b es conexa si $b = 2$ y a es par, y totalmente desconexa en otro caso. Además $\mathcal{F}(K_a^b)$ está contenida en el disco $|z + 1| \leq 1$, siendo esta la mejor acotación posible.

Apéndice A

Funciones analíticas.

A.1. Funciones analíticas.

Definición A.1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}_\infty$ abierto, f una función, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es llamada *holomorfa* o *analítica* si y solo si para toda a en Ω existe $f'(a)$.

Un *polinomio* es una función de la forma $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, donde $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{C}$, el *grado* de un polinomio se define como $\text{grad}(p(z)) = n$, el grado del polinomio constante cero no está definido. Un polinomio es una función analítica y su derivada es $p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $p(z_0) = 0$ decimos que z_0 es un cero de p . Si un cero se repite h veces, entonces h es su *multiplicidad*.

También tenemos que si α es un cero de $p(z)$ de multiplicidad $h \geq 2$, entonces $p(\alpha) = 0, p'(\alpha) = 0, \dots, p^{(h-1)}(\alpha) = 0, p^{(h)}(\alpha) \neq 0$, donde $p^{(i)}(z)$ denota la i -ésima derivada de $p(z)$. Además podemos escribir $p(z) = (z - \alpha)^h q(z)$, donde $q(z)$ es un polinomio tal que $q(\alpha) \neq 0$.

Definición A.1.2. Una función $R : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, es una función *racional* si se puede escribir como

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios y $\text{mcd}(p, q) = 1$, es decir, los polinomios no tienen factores en común. Si a es un cero de $q(z)$ es un *polo* de $R(z)$ y $R(a) = \infty$.

El *orden* de un polo de $R(z)$ es igual a su multiplicidad como cero de $q(z)$. Note que

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{(q(z))^2},$$

de donde se observa que $R(z)$ y $R'(z)$ tienen los mismos polos.

Teorema A.1.1 (de Liouville). Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y acotada, entonces f es constante.

Demostración. Para probar el teorema veamos que $f^{(n)} = 0$ para toda $a \in \mathbb{C}$. Dado $a \in \mathbb{C}$, sea C una circunferencia centrada en a de radio r , por la fórmula Integral de Cauchy tenemos que para $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n-1}} d\xi,$$

de aquí

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n-1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{M}{(r)^{n-1}} |d\xi| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{(r)^{n-1}} \text{long}(C) \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{(r)^{n-1}} 2\pi r \\ &\leq \frac{n!}{M} (r)^n \quad (\text{Estimación de Cauchy}) \end{aligned}$$

haciendo $r \rightarrow \infty$, tenemos que $f^{(n)}(a) = 0$, en particular $f'(a) = 0$, por lo tanto f es constante ■

Teorema A.1.2 (Fundamental del Álgebra). Si $p(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Demostración. Supongamos que $p(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ es analítica y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty,$$

entonces $f(z)$ es acotada en \mathbb{C} , por el Teorema de Liouville tenemos que $f(z)$ es constante. !!! ■

Corolario A.1.1. Un polinomio $p(z)$ de grado $n \geq 1$ puede escribirse de la forma

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_m)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ son los ceros de $p(z)$.

Un subconjunto Ω de \mathbb{C} diferente del vacío es una *región* si es abierto y conexo, desde ahora cada vez que usemos el símbolo Ω nos referimos a una región.

Teorema A.1.3 (de Taylor). Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $a \in \Omega$, entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + f_n(z)(z-a)^n,$$

donde $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y

$$f_n(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n(\xi-z)} d\xi,$$

con $C : |z-a| = r$ y $C \subset \Omega$.

Definición A.1.3. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, $a \in \mathbb{C}$ es una *singularidad aislada* de f si f es analítica en $0 < |z-a| < \delta$ para algún $\delta > 0$, si además

- i) $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$, decimos que a es *removable*,
- ii) $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \infty$, decimos que a es un *polo*.

Decimos que a es un polo de orden h si a es un cero de orden h para $1/f$.

Una función que es analítica en una región excepto por polos es llamada *meromorfa*, además si f, g son funciones analíticas sabemos que f/g es meromorfa si $g \not\equiv 0$, y si f y g son funciones meromorfas entonces $f+g, f/g$ y fg también lo son.

Proposición A.1.1. Si f es analítica en $\Omega' = \Omega - \{a\}$ y no idénticamente nula, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se cumple I) o II),

$$I) \lim_{z \rightarrow a} |z-a|^\alpha |f(z)| = 0,$$

$$II) \lim_{z \rightarrow a} |z-a|^\alpha |f(z)| = +\infty,$$

entonces existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que I) se cumple para todo $h < \alpha'$ y II) se cumple para todo $\alpha' < h$, h es llamado *orden algebraico* de a .

Demostración. Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se cumple *I*), entonces si $\alpha' > \alpha$ se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^{\alpha'} |f(z)| = 0,$$

en particular se cumple para todos los enteros que están después de α ($m > \alpha$), se cumple

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |f(z)| = 0.$$

Sea $g(z) = (z - a)^m f(z)$, note que g cumple

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0,$$

entonces $g(z)$ es analítica en Ω' por lo que existe una extensión analítica de g . Sabemos que si \hat{g} es dicha extensión entonces

$$\hat{g}(a) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = (z - a)^m f(z) = 0,$$

entonces a es un cero de \hat{g} de orden $l \in \mathbb{N}$.

Así $\hat{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y está definida por $\hat{g}(z) = (z - a)^m \hat{g}_l(z)$, donde $\hat{g}_l(a) \neq 0$. Luego para $z \neq a$, tenemos

$$(z - a)^m f(z) = (z - a)^l \hat{g}_l(z),$$

entonces $(z - a)^{m-l} f(z) = \hat{g}_l(z)$, $h = m - l$ cumple con las condiciones deseadas.

Ahora supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se cumple *II*), entonces si $\alpha' < \alpha$ se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^{\alpha'} |f(z)| = +\infty,$$

en particular se cumple para todos los enteros que están antes de α ($m < \alpha$), se cumple

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |f(z)| = +\infty.$$

Sea $g(z) = (z - a)^m f(z)$, note que g entonces $g(z)$ tiene un polo de orden $l \in \mathbb{N}$ en a , de donde existe $g_l : \omega \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $g_l(a) \neq 0$ tal que

$$g(z) = \frac{g_l(z)}{(z - a)^l},$$

es decir

$$(z - a)^m f(z) = \frac{g_l(z)}{(z - a^l)},$$

entonces $(z - a)^{m+l} f(z) = g_l(z)$, $h = m+l$ cumple con las condiciones deseadas. ■

Definición A.1.4. Una singularidad aislada a se llama *esencial* si no cumple ninguna de las siguientes condiciones

$$I) \lim_{z \rightarrow a} |z - a|^\alpha |f(z)| = 0,$$

$$II) \lim_{z \rightarrow a} |z - a|^\alpha |f(z)| = +\infty.$$

Teorema A.1.4. Si a es una singularidad esencial de f , entonces para todo $\delta > 0$, $A \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$; existe $z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(z) \in B_\varepsilon(A)$.

Demostración. Sean $\delta, \varepsilon > 0$, $A \in \mathbb{C}$ y supongamos que $\forall z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, $f(z) \notin B_\varepsilon(A)$, es decir $|f(z) - A| \geq \varepsilon$.

Entonces $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^\alpha |f(z)| = +\infty,$$

por el resultado anterior existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |f(z)| = 0,$$

$$0 \leq |f(z)| \leq |f(z) - A| + |A| \text{ y}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |A| = 0,$$

entonces

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |f(z)| = 0!!!$$

■

Si a es un polo de f y h su orden algebraico, entonces $(z - a)^h f(z)$ es una función analítica en una vecindad de a (tiene una extensión analítica), por el Teorema A.1.3 y el Teorema A.1.4 existe una función analítica $\varphi(z)$ tal que

$$(z - a)^h f(z) = B_h + B_{h-1}(z - a) + \dots + B_1(z - a)^{h-1} + (z - a)^h \varphi(z),$$

de donde

$$f(z) = \underbrace{\frac{B_h}{(z-a)^h} + \frac{B_{h-1}}{(z-a)^{h-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-a}}_{\text{Parte singular}} + \varphi(z), \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1.5. Toda función meromorfa en la esfera de Riemann es una función racional.

Demostración. Sea f una función meromorfa entonces tenemos dos casos, f tiene infinitos polos o bien tiene un número finito de polos.

Si f tiene un número infinito de polos entonces $1/f$ tiene un número infinito de ceros, de donde $1/f \equiv 0$ y por lo tanto $f \equiv \infty$. Como f es constante entonces es una función racional.

Ahora si f tiene un número finito de polos, en \mathbb{C}_∞ , digamos a_1, a_2, \dots, a_k de orden algebraico h_1, h_2, \dots, h_k respectivamente, por la Ecuación (A.1) para una vecindad de a_1 tenemos

$$f(z) = \sum_{j=0}^{h_1} \frac{B_{h_1-j}}{(z-a)^{h_1-j}} + \varphi_1(z), \text{ donde } \varphi_1(z) \text{ es analítica,}$$

de donde construimos

$$\psi_1(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{h_1} \frac{B_{h_1-j}}{(z-a)^{h_1-j}},$$

de la cual a_2, \dots, a_n son polos del mismo orden algebraico en ψ_1 que en f .

Usando el mismo razonamiento localmente para a_2

$$\psi_1(z) = \sum_{j=0}^{h_2} \frac{B_{h_2-j}}{(z-a)^{h_2-j}} + \varphi_2(z), \text{ edonde } \varphi_2(z) \text{ es analítica,}$$

y sea

$$\psi_2(z) = \psi_1(z) - \sum_{j=0}^{h_2} \frac{B_{h_2-j}}{(z-a)^{h_2-j}} = f(z) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{h_i} \frac{B_{h_i-j}}{(z-a)^{h_i-j}},$$

repetiendo este proceso k veces tenemos que

$$\psi_k(z) = f(z) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{h_i} \frac{B_{h_i-j}}{(z-a)^{h_i-j}},$$

es una función sin polos y analítica.

Es decir ψ_k es una función analítica acotada, por el Teorema A.1.1 es una función constante. Ahora sabemos que

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{h_i} \frac{B_{h_i-j}}{(z-a)^{h_i-j}} + \psi_k(z),$$

donde $\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{h_i} \frac{B_{h_i-j}}{(z-a)^{h_i-j}}$ y $\psi_k(z)$ son funciones racionales. Por lo tanto $f(z)$ es una función racional. ■

Bibliografía

- [1] Ahlfors L. V. (1979). *Complex Analysis*. Estados Unidos: Mc-Graw-Hill, Inc.
- [2] Barnsley M. F. (1993). *Fractals Everywhere*. Estados Unidos: Morgan Kaufmann.
- [3] Bautista-Ramos C. y Guillén-Galván C. (2012). *Fibonacci Numbers of Generalized Zykov Sums*. Journal of Integer Sequences, 15, 1-22.
- [4] Blanchard P. (1984). *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 85-141.
- [5] Blé G. y Valdez R. (2006). *Dinámica de los polinomios cuadráticos*. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 12, 1-25.
- [6] Bondy J. A. y Murty U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Estados Unidos: Springer.
- [7] Branner B. y Hubbard J. H. (1988). *The Iteration of Cubic Polynomials Part I: The Global Topology of Parameter Space*. Acta Math., 160, 143-206.
- [8] Branner B. y Hubbard J. H. (1992). *The Iteration of Cubic Polynomials Part II: Patterns and Parapatterns*. Acta Math., 169, 229-325.
- [9] Brown J. I., Dilcher K. y Nowakowski R. J. (2000). *Roots of Independence Polynomials of Well Covered Graphs*. Journal of Algebraic Combinatorics, 11, 197-210.
- [10] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2003). *The Independence Fractal of a Graph*. Journal of Combinatorial Theory, B 87, 209-230.
- [11] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2004). *On the Location of Roots of Independence polynomials*. Journal of Algebraic Combinatorics, 19, 273-282.

-
- [12] Brown J. I., Hickman C. A., Thomas H. y Wagner D. G. (2001). *Bounding the Roots of the Independence Polynomials*. *Ars Combin.*, 58, 113-120.
- [13] Devaney R. L. (1992). *A First Course on Chaotic Dynamical System*. Estados Unidos: Addison-Wesley.
- [14] Diestel R. (2005). *Graph Theory*. Estados Unidos: Springer-Verlag Heidelberg.
- [15] Escamilla J. A., Mendoza F. J. y Raggi G. (2010). *Introducción a la Teoría de espacios Métricos*. México: Texto Científicos BUAP.
- [16] Estes J., Staton W. y Bing W. (2013). *A Bound on the Values of Independence Polynomials at $-1/k$ for k Degenerate Graphs*. *Discrete Mathematics*, 313, 1793-1798.
- [17] Fournier J. C. (2009). *Graph Theory and Applications with Exercises and Problems*. Gran Bretaña: Wiley.
- [18] Harris J. M., Hirst J. L. y Mossinghoff M. J. (2008). *Combinatorics and Graph Theory*. Estados Unidos: Springer.
- [19] Illanes A. (2004). *Hiperespacios de Conjuntos*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- [20] Heilmann O. L. y Lieb E. H. (1972). *Theory of Monomer-Dimer Systems*. *Commun. math. Phys.*, 25, 190-232.
- [21] Heilmann C. y Xueliang L. (1994). *Clique Polynomials and Independent Set Polynomials of Graphs*. *Discrete Mathematics*, 125, 219-228.
- [22] Levit V. E. y Mandrescu E. (2006). *Independence Polynomials of Well-Covered Graphs: Generic Counterexamples for the Unimodality Conjecture*. *European Journal of Combinatorics*, 27, 2931-939.
- [23] Mandrescu E. (2009). *Boulding Graphs Whose Independence Polynomials Have Only Real Roots*. *Graph and Combinatorics*, 25, 545-556.
- [24] Mandrescu E. (2012). *Unimodality of Some Independence Polynomials of a Graph via their Palindromicity*. *Australian Journal of Combinatorics*, 53, 77-82.
- [25] Mihalcea R., y Radev D. (2011). *Graph-Based Natural Language Processing and Information Retrieval*. Estados Unidos: Cambridge University Press.

-
- [26] Petersen C. L. y Zakeri S. (2004). *On the Julia set of a Typical Quadratic Polynomial with a Siegel Disk*. *Annals of Mathematics*, 159, 1-52.
- [27] Song L., Staton W. y Wei B. (2012). *Independence Polynomial of some Compound Graphs*. *Discrete Applied Mathematics*, 160, 657-663.
- [28] Srimud K. (2011). *Polynomials with only real zeros*. *Science and Technology RMUTT Journal*, 1, 39-44.