



# **“Modelo matemático del sistema de distribución en dos escalones”**

**Miguel Ángel Macías Castañeda**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Puebla, Puebla

Febrero, 2015





**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**COLEGIO DE MATEMÁTICAS**

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**“Modelo matemático del sistema de  
distribución en dos escalones”**

**TESIS**

que para obtener el título de

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

Presenta

**Miguel Ángel Macías Castañeda**

Asesor

Dr. Rogelio González Velázquez

Coasesor

Dr. Carlos Guillén Galván

Puebla, Puebla

Febrero, 2015



*“Dichoso es el hombre que ha adquirido la sabiduría,  
y es rico en prudencia; cuya adquisición vale más que  
la plata; y sus frutos son más preciosos que el oro más  
puro.”*



## Agradecimientos

\* Al Dr. Rogelio González Velázquez, por aceptarme para realizar este proyecto bajo su dirección y por forjar en mí los conocimientos que me han llevado a decidir el ramo por el que se guiará mi vida. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta investigación. Al Dr. Carlos Guillén Galván, por contribuir directamente en la conformación tanto teórica como empírica de la presente investigación. A la Dra. María Beatriz Bernabé Loranca, por todo el apoyo brindado en la realización de esta investigación y facilidades que me fueron otorgadas, sin el cual mi trabajo se hubiera dificultado.

\* A los doctores que fungieron como Jurado: Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara y Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros, por sus valiosas sugerencias a la versión original del manuscrito, que contribuyeron al mejoramiento y ordenamiento del presente trabajo.

\* A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, por la beca otorgada que favoreció la conclusión de este trabajo, así como su impresión mediante el proyecto de investigación 2014 “Aplicación de P-mediana, P-centro y Particionamiento Multiobjetivo en problemas de logística” y a la Secretaría de Educación Pública, por la beca otorgada mediante el Programa Nacional de Becas para la Educación Superior 2013 que permitió la elaboración de esta investigación.

\* Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento, ya que invirtieron su tiempo, conocimientos y experiencias.



## Resumen

En este trabajo, se desarrolla un modelo matemático para el diseño de una red logística y su correspondiente implementación en código LINGO para buscar la solución óptima. El diseño de una red logística es una decisión estratégica para cualquier organización por los costos involucrados. El problema específico que se trata consiste en una red de distribución en dos escalones caracterizado por la distribución de multiproductos, en la literatura es conocido como “Two-Echelon Multicommodity” (TEMC, por sus siglas en inglés). En el diseño de la red se debe decidir la localización de plantas y la determinación de las cantidades a enviar de productos por los diferentes canales de distribución. Este problema pertenece a la clase NP-Duro [36], [82], [91]. En general, para estos problemas la función objetivo minimiza el total de los costos de transporte-distribución que dependan básicamente de la distancia entre el cliente y la planta, los costos fijos para la apertura y funcionamiento de plantas y almacenes en la cadena de suministro. El modelo presentado es planteado como un problema de programación entera binaria mixta (Mixed Binary Integer Programming – MBIP).

**Palabras clave:** logística, programación entera, localización, distribución, asignación, cadena de suministro.

## Abstract

In this paper, a mathematical model for the design of logistics network and its corresponding implementation in LINGO code is developed to find the optimal solution. The design of logistic networks is a strategic decision for any organization for the costs involved. The specific problem is that it is a distribution in two echelons characterized by the distribution of multiproduct, in the literature is known as Two-Echelon Multicommodity (TEMC). In designing the network to decide the location of plants and determination of quantities of products sent by the different distribution channels. This problem belongs to NP-Hard class [36], [82], [91]. In general, for these problems the objective function minimizes the total transportation costs-distribution which depends essentially on the distance between customer and the plant, the fixed costs for opening and operation of plants and warehouses in the supply chain. The model is posed as a problem of Mixed Binary Integer Programming (MBIP).

**Keywords:** logistics, integer programming, location, distribution, assignment, supply chain.

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes .....	1
1.2 Justificación y propósito de la investigación .....	2
1.3 Objetivos .....	3
1.3.1 Objetivo general.....	3
1.3.2 Objetivos específicos.....	3
1.4 Preguntas de investigación .....	3
1.5 Alcances y limitaciones del proyecto .....	3
1.6 Introducción al Marco Teórico .....	4
1.7 Metodología de la investigación .....	4
1.8 Contribuciones esperadas de la investigación.....	5
1.9 Impacto social.....	5
1.10 Plan de lectura.....	6
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1 Aspectos esenciales del sistema de distribución.....	7
2.1.1 Importancia del problema en logística .....	12
2.2 Investigación de Operaciones .....	13
2.3 Programación Matemática.....	15
2.4 Programación Entera.....	17
2.5 Clasificación de los modelos de Programación Entera .....	19
2.5.1 Antecedentes de solución de Programación Entera.....	20
2.6 Complejidad computacional .....	21
2.6.1 Algunas definiciones.....	21
2.6.2 Clasificación por su complejidad .....	25
2.6.3 Definición de localización .....	27
2.7 Introducción a los problemas de localización .....	28
2.8 Problemas de localización de instalaciones .....	32
2.8.1 Problema del p-centro .....	33
2.8.2 Problema de la p-mediana .....	33
2.8.3 Problema de localización de instalaciones no capacitado .....	34
2.8.4 Problema de localización de instalaciones capacitado.....	34
2.8.5 Antecedentes de solución del TEMC .....	36

2.9	Técnicas de descomposición y aproximación.....	37
2.9.1	Ramificación y Acotamiento .....	37
2.9.2	Descomposición de Benders.....	38
2.9.3	Relajación Lagrangiana .....	39
2.9.4	Recocido Simulado.....	40
2.9.5	Algoritmos Genéticos.....	41
2.9.6	Búsqueda Tabú .....	42
<b>3.</b>	<b>Modelo matemático del sistema de distribución en dos escalones</b>	<b>45</b>
3.1	Introducción .....	45
3.2	Definición, formulación y modelo matemático .....	45
3.3	Construcción del modelo .....	49
3.4	Instancias de aplicación .....	51
3.4.1	Primera instancia.....	52
3.4.2	Segunda instancia .....	54
3.4.3	Tercera instancia.....	55
3.4.4	Cuarta instancia.....	56
3.5	Código fuente en lenguaje LINGO .....	58
3.5.1	Comentarios finales .....	59
<b>4.</b>	<b>Pruebas y Resultados</b>	<b>61</b>
4.1	Introducción .....	61
4.2	Implementación del algoritmo .....	61
4.2.1	Ambiente computacional .....	61
4.3	Resultados .....	63
4.3.1	Análisis de resultados.....	65
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>67</b>
5.1	Conclusiones .....	67
5.2	Trabajo Futuro .....	68
<b>A.</b>	<b>LINGO</b>	<b>69</b>
<b>B.</b>	<b>Factores que pueden influir en la decisión final</b>	<b>73</b>
	<b>Referencias</b>	<b>79</b>

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1-1.</b> Red general del sistema de distribución. ....	2
<b>Figura 2-1.</b> Esquema gráfico general de un sistema.....	14
<b>Figura 2-2.</b> Herramientas de la IO.....	15
<b>Figura 2-3.</b> Familias de problemas P, NP, NP-Completo, y NP-Duro. ....	26
<b>Figura 3-1.</b> Estructura del sistema de distribución TEMC .....	46
<b>Figura 3-2.</b> Código fuente en lenguaje LINGO del TEMC .....	58
<b>Figura 3-3.</b> Ejemplo archivo de texto arrojado por el algoritmo.....	59
<b>Figura 4-1.</b> Un pequeño TEMC de la solución de la primera instancia.....	63
<b>Figura 4-2.</b> Solución gráfica de la primera instancia.....	64

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 2-1:</b> Principales avances de problemas de producción-distribución .....	36
<b>Tabla 3-1:</b> Distancias entre ubicaciones (km).....	52
<b>Tabla 4-1:</b> Valores obtenidos para la función objetivo del problema TEMC. ....	64
<b>Tabla B-1:</b> Centro de Distribución HID.....	73
<b>Tabla B-2:</b> Centro de Distribución SLP. ....	76



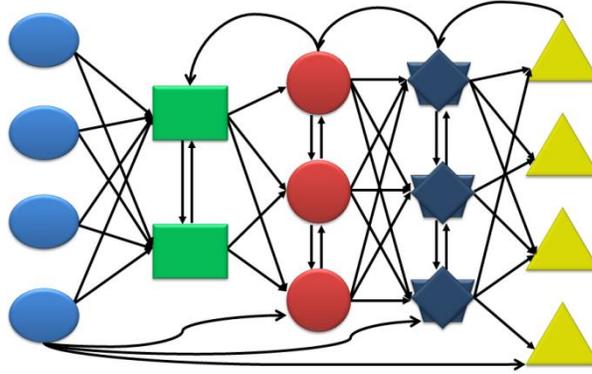
# 1. Introducción

*“Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad.”*  
*A. Einstein*

En este capítulo se presentan los objetivos, la justificación, alcances y limitaciones del trabajo, las contribuciones esperadas, el impacto social y, por último, la estructura del documento.

## 1.1 Antecedentes

En una organización existen tres tipos de decisiones, las estratégicas que son de largo plazo, las tácticas que son de mediano plazo y las operativas que son de implementación inmediata. El problema de diseñar un sistema de distribución para una organización corresponde a las estrategias de largo plazo en virtud de que están involucradas las decisiones de ubicación de plantas productivas y/o la apertura o cierre de centros de distribución (Distribution Centers – DCs) y las cantidades a enviar por los diferentes canales de distribución desde las plantas productivas y/o los DCs hasta los centros de consumo, de manera que se satisfaga la demanda en el momento oportuno, en el lugar justo y en la cantidad necesaria. En adelante utilizaremos los términos “sistema de distribución” como una equivalencia de red logística o cadena de suministro. Este problema está inmerso en la optimización de la cadena de suministro del área logística que se define como la parte del proceso de planeación, implementación y control de forma efectiva y eficiente del flujo de bienes, servicios e información, que vienen desde el punto de origen hasta el punto de consumo con el fin de cumplir los requisitos del cliente [94]. En la figura 1-1 se muestra un esquema simple que representa el sistema de distribución. Sus componentes son proveedores, plantas de producción, DCs, distritos de ventas (Retail Stores – RSs) y clientes, mostrados de izquierda a derecha.



**Figura 1-1.** Red general del sistema de distribución.

Modificado de [60].

La modelación matemática del sistema de distribución es un esfuerzo en aras de minimizar los costos del sistema de distribución, dicha modelación ha sido estudiada por profesionales de la Investigación de Operaciones (IO) [48].

Cohen y Lee [9] desarrollan un modelo para el establecimiento de la política de las necesidades de materiales y las asignaciones para todos los productos para cada etapa de sistemas de producción-distribución de la cadena de suministro.

Arntzen et al. [9] desarrollan un modelo de programación entera mixta (Mixed Integer Programming – MIP), llamado Modelo Global de la Cadena de Suministro (Global Supply Chain Model – GSCM) implementada en GAMS/MINOS, que tiene capacidad para múltiples productos, instalaciones, etapas, equipo de períodos y los modos de transporte. Determina la estrategia de distribución de fabricación en todo el mundo y la reestructuración del sistema de distribución ha ahorrado más de \$ 100 millones de dólares.

## 1.2 Justificación y propósito de la investigación

La competitividad de las organizaciones requiere de la optimización de los recursos y los bajos costos de sus diferentes sistemas como abastecimiento, producción, distribución, administración, etc. En particular, la minimización de los costos de sus sistemas de producción y distribución que incluyen los costos de transporte o gastos de envío, costos fijos de la localización de los DCs y los costos variables de los DCs. Debido a lo anterior, los resultados de este proyecto coadyuvarán en mejores prácticas de la organización con lo cual podrán mejorar su planeación.

El propósito de desarrollar un modelo matemático del sistema de distribución es el de generar una herramienta científica para la toma de decisiones estratégicas que pueda ofrecer soluciones que permitan a una organización atender las demandas de los centros de consumo en el momento oportuno, en el lugar justo y en la cantidad necesaria. Con lo anterior se agrega valor a la organización.

## 1.3 Objetivos

Los objetivos de este trabajo se detallan a continuación.

### 1.3.1 Objetivo general

- Modelar el sistema de distribución como problema de programación entera binaria mixta (MBIP) para encontrar una solución por medio de una herramienta de optimización.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Diseñar instancias de prueba para implementar el modelo del TEMC.
- Implementar el modelo de MBIP en LINGO para obtener su solución.
- Interpretar el resultado analíticamente del sistema de distribución.

## 1.4 Preguntas de investigación

Preguntas estratégicas de localización comunes [27]:

- 1.- ¿Cuántos sitios?
- 2.- ¿Dónde ubicar cada uno?
- 3.- ¿Cuál debe ser su capacidad?
- 4.- ¿Qué clientes asignados a cada sitio?
- 5.- ¿Qué productos para la mercancía?
- 6.- ¿Qué producir en cada sitio?

## 1.5 Alcances y limitaciones del proyecto

Se pretende encontrar una solución a un problema del TEMC, no abarcando con ello, a la extensión de las otras etapas del problema de localización de instalaciones, ni la integra-

ción a un sistema más completo, se cumplirá únicamente con los supuestos mencionados durante el desarrollo.

Se diseñará una instancia de prueba para una red en dos escalones con capacidad de las plantas de producción, DCs y demanda de los clientes.

Se aplicará el método de ramificación y acotamiento (Branch and Bound – BB) implementado en el software LINGO cuya capacidad es de 300 variables, 30 de ellas enteras y 30 no lineales, así como 150 restricciones. El software LINGO versión Demo, obtenida de la página LINDO Systems Inc, está limitada en cuanto a variables, restricciones y también en cuanto a la licencia, ya que expira 6 meses después de haber sido instalada, lo que limita mucho su uso.

## **1.6 Introducción al Marco Teórico**

El modelo matemático del TEMC contiene variables enteras, binarias y continuas [41] por lo cual es un problema que pertenece a la optimización discreta, en particular a la programación entera mixta (Mixed Integer Programming – MIP). La cual requiere métodos que dependen del tamaño de la instancia, ya que para tamaños moderados se pueden utilizar métodos de BB y para tamaños grandes se requiere el diseño de metaheurísticas para obtener soluciones aproximadas a la óptima.

En la optimización discreta existen problemas clasificados como problemas NP-Duros para los cuales está demostrado que no existen métodos exactos que los puedan resolver en un tiempo polinomial, el TEMC es un problema NP-Duro [41] por lo cual para instancias de tamaño grande sería necesario el diseño de una metaheurística para encontrar su solución, algunas de las metaheurísticas más utilizadas son recocido simulado (Simulated Annealing – SA), búsqueda Tabú (Tabu Search – TS), algoritmos genéticos (Genetic Algorithms – GAs), entre otras.

## **1.7 Metodología de la investigación**

Búsqueda de bibliografía:

Revisar un conjunto de bases de datos en la Dirección General de Bibliotecas de la BUAP <http://www.bibliotecas.buap.mx/portal/>, para localizar artículos relacionados a la optimización discreta, programación entera, redes de distribución. Buscar el problema de red de distribución en dos escalones y seleccionar el modelo de interés. Hacer una búsqueda de las aplicaciones de estos modelos. Hacer análisis de los métodos de solución de programación entera. Luego, hacer una búsqueda y seleccionar un software de optimización. Estudiar la sintaxis del software e instalar en mi computadora personal. Implementar el código del modelo matemático e introducir los datos de las instancias de prueba, obtener y validar los resultados e interpretarlos analíticamente.

## 1.8 Contribuciones esperadas de la investigación

Con los resultados de esta investigación se espera obtener una herramienta que coadyuve a la toma de decisiones en el diseño de una red de distribución con la característica de dos escalones, ubicación, apertura o cierre aunado a la política de envíos y la satisfacción de la demanda a costo mínimo.

Se espera obtener un código fuente generalizado para resolver cualquier caso del TEMC, sólo cambiando los datos de la instancia de prueba.

## 1.9 Impacto social

- Incrementar la posibilidad de tomar mejores decisiones, en términos de los objetivos planteados.
- Ordenar y coordinar los componentes y sus relaciones dentro de la organización.
- Mejorar e incrementar el control del sistema.
- Lograr que los sistemas operen con costos más bajos, interacciones más fluidas, menos cuellos de botella y mayor coordinación entre elementos del sistema.
- La investigación científica es lo único real y que produce un verdadero cambio en el desarrollo de la humanidad, de la investigación se obtienen conocimientos, los cuales se aplican al desarrollo de toda clase de cosas, pensamientos, productos, y todo lo que se pueda imaginar.
- Diseñar una red de distribución óptima que minimice los costos de envío, lo que permite a las empresas (por ejemplo, PEMEX) ser competitiva en el segmento de mercado en el cual participa, también permite que la gente pueda comprar a pre-

cios equilibrados, el diseño de la red de distribución permite que los productos sean enviados a todas las comunidades que lo requieren, permitiendo que toda la gente tenga la oportunidad de adquirir productos de excelente calidad, a precios cómodos y servicios correctos en sus comunidades. El diseño de redes de distribución permite al país contar con infraestructura logística para que los productos de buena calidad lleguen en el lugar adecuado, al tiempo correcto, en la condición deseada al precio más bajo y con el máximo retorno de inversión.

## **1.10 Plan de lectura**

Este trabajo de investigación está organizado como sigue.

En el capítulo 2 se muestra la información teórica del problema en estudio. Primero se muestra la parte introductoria de: IO, programación entera y su complejidad computacional. Luego, se describen los problemas de localización y su importancia. Posteriormente se explica en mayor detalle en qué consiste el TEMC y qué se ha realizado para solucionarlo.

En el capítulo 3 está dedicado a la metodología para la construcción del modelo y diseño del código del algoritmo en lenguaje LINGO, la forma en que se generan los parámetros y un ejemplo ilustrativo de un caso pequeño generando cuatro instancias de aplicación.

En el capítulo 4 hace referencia a los resultados de los experimentos realizados para probar el rendimiento del algoritmo en la solución del TEMC, mencionando los objetivos, implementación, representación y análisis de resultados de los experimentos.

Por último, en el capítulo 5 presenta las conclusiones generales del trabajo desarrollado teniendo en cuenta los objetivos propuestos inicialmente y los resultados obtenidos en la fase experimental. Así mismo, este capítulo también presenta algunas sugerencias para trabajos futuros.

## 2. Marco Teórico

*“Los sistemas deben planearse, no debe permitirse que sólo sucedan.”*  
*John P. Van Gigch*

En este capítulo se muestra una introducción al estudio de la IO, la programación entera, destacando sus principales ventajas como herramienta para modelar una amplia variedad de problemas. Asimismo, se aborda la complejidad inherente a la programación entera, sus métodos de solución exactos, así como algunos métodos no rigurosos y, finalmente, un pequeño conjunto de modelos clásicos.

Entre las áreas de aplicación actuales cabe citar: distribución de mercancías, programación de la producción en fábricas, secuenciación de maquinaria en procesos industriales y productivos, asignación de grupos generadores de energía eléctrica, asignaciones presupuestarias, localización de elementos productivos, diseño de circuitos electrónicos, procesos de manufactura flexible, etc.

En general, en todas aquellas áreas en donde se trata de resolver el problema de asignar recursos de cualquier tipo sólo disponibles en cantidades discretas.

### 2.1 Aspectos esenciales del sistema de distribución

El sistema de distribución se compone de todas las partes involucradas, directa o indirectamente, en satisfacer las necesidades de los clientes [21]. Las actividades relacionadas con el sistema de distribución se pueden clasificar en 4 áreas [37], [49], [62]:

- **Localización.** Las decisiones son sobre dónde se deben localizar las plantas, almacenes, DCs, etc. Estas decisiones permiten establecer las posibles rutas pa-

ra el flujo de los bienes o productos, desde las materias primas y hasta el cliente final.

- **Producción.** Se deben tomar decisiones sobre los productos que el mercado está demandando, así como cuánto, cuándo y dónde producir. Se genera información importante a partir de los planes maestros de producción, capacidad instalada de plantas, balanceo de líneas, control de calidad y mantenimiento, entre otras.
- **Inventario.** Cuánto inventario de materia prima, producto en proceso y producto terminado debe ser almacenado en cada nivel de la red, cuándo se debe ordenar, etc.
- **Transporte-distribución.** Se debe determinar cómo va a ser trasladado el inventario entre las instalaciones de la red de suministros.

Estas áreas de decisión son usadas en el diseño, planificación y operación del sistema de distribución teniendo un alcance temporal y/o espacial en la organización.

Las decisiones relacionadas a las cuatro áreas mencionadas anteriormente tienen un impacto en distintos horizontes de tiempo, tanto en el flujo de productos, información y recursos económicos. De esta manera, las decisiones pueden clasificarse dentro de tres horizontes de planeación: estratégicas, tácticas y operativas [35], [86].

Las **Decisiones Estratégicas** son decisiones de largo plazo de ejecución y por tanto tienen también su influencia es a largo plazo. En general, la planeación estratégica debe identificar y evaluar las distintas opciones para adquirir recursos que permitan a la empresa mantener y mejorar su posición en el largo plazo. Dichos recursos son:

- Recursos financieros: flujo de efectivo, deuda, capital, etc.
- Recursos físicos: plantas, DCs, inventarios, etc.
- Recursos humanos: operadores, administradores, ingenieros, etc.
- Recursos legales: patentes, derechos, contratos, etc.
- Recursos de marketing: reconocimiento de marca, nivel de aceptación, lealtad a la marca, etc.

- Recursos organizacionales: capacitación, cultura empresarial, relaciones organizacionales, etc.
- Tecnologías de información: sistemas de adquisición de datos, sistemas de modelado, sistemas de simulación, etc.

El impacto económico de estas decisiones es muy grande y por ello debe considerarse la incertidumbre y contar con información oportuna y confiable para tomar las decisiones estratégicas. Este tipo de decisiones involucran horizontes de tiempo de varios años y, dependiendo de la naturaleza de la empresa, el horizonte de planeación puede ser de tres y hasta de diez años [86].

Las **Decisiones Tácticas** se refieren a cómo planificar de modo eficiente los materiales y recursos (fundamentalmente mano de obra), teniendo en cuenta las restricciones que suponen las decisiones estratégicas adoptadas.

También se toman decisiones sobre el comportamiento de la demanda durante el período de planeación, considerando estacionalidad, aleatoriedad, eventos, etc. De esta forma, algunas de las decisiones tácticas incluyen lo siguiente:

- Fijación de precios.
- Planeación de compras.
- Planeación de inventarios en estacionalidad y otros patrones de comportamiento de la demanda.
- Planeación de mantenimiento a equipo e instalaciones.
- Planeación de recursos humanos.
- Planeación y ajuste de los turnos laborables y otras condiciones de trabajo.

La planeación táctica se ocupa de la asignación de recursos para el horizonte de planeación, que generalmente se considera de tres meses y hasta un año [86].

Por último, a corto plazo, las **Decisiones Operativas** están restringidas por las decisiones tácticas. Las decisiones en este nivel de planeación incluyen actividades como las siguientes:

- Asignación de rutas de reparto
- Asignación de tareas
- Itinerario de vehículos
- Minimización de costos de preparación, de cambio de herramientas, de inventario, etc.
- Optimización de los recursos humanos
- Órdenes de compra
- Planeación de la producción
- Secuenciación de operaciones
- Tamaños de lote de producción

Estas decisiones se dan en el horizonte de planeación más corto, que puede ir de unos cuantos días y hasta algunas semanas [86].

Un sistema de distribución es la serie de todas las actividades de gestión de la logística de la planificación y gestión de todas las actividades involucradas en el suministro y la adquisición, conversión y todas las actividades de logística. Es importante destacar, que también incluye la coordinación y la colaboración con los socios de canal, que pueden ser proveedores, intermediarios, proveedores de servicios de terceros y clientes. En esencia, el sistema de distribución integra la oferta y la gestión de la demanda dentro y fuera de las empresas [55], [94].

La gestión del sistema de distribución es la integración de los procesos de negocio clave de usuario final a través de los proveedores originales que ofrecen productos, servicios e información que agregan valor para los clientes y otras partes interesadas.

Los problemas de gestión logística se pueden clasificar en tres categorías:

**Problemas de localización:** implican determinar la ubicación de una o más nuevas instalaciones en uno o más de los varios sitios potenciales. El costo de localizar cada nueva instalación en cada uno de los sitios potenciales se supone conocido. El costo fijo de localización de un nuevo servicio en un lugar determinado y el funcionamiento y el costo del transporte del servicio al cliente de esta combinación instalación-sitio.

**Problemas de asignación:** se supone que el número y la ubicación de las instalaciones son conocidos a priori y tratar de determinar la forma en que cada cliente ha de ser servido. En otras palabras, dada la demanda de bienes en cada centro de servicio al cliente, la producción o capacidad de oferta en cada instalación y el costo de servir a cada cliente de cada instalación, el problema de asignación determina la cantidad de cada instalación que es necesario suministrar a cada centro de atención al cliente.

**Problemas de asignación-localización:** implican determinar no sólo cuánto de cada uno de los clientes va a recibir de cada una de las instalaciones, sino también el número de instalaciones, junto con sus ubicaciones y capacidades. En general, hay algunos aspectos que afectan a la formulación de este problema, tales como: o bien cada cliente es atendido por una sola instalación o más, la demanda de los clientes son deterministas o estocásticos y las instalaciones como capacitado o no capacitado.

Un modelo de asignación-localización responde a las características de un modelo matemático (porque intenta trasladar ideas conceptuales al lenguaje matemático), meso-espacial (porque intenta resolver problemas de competencia en un territorio definido) y normativo (porque se pretende responder a la pregunta ¿cuál es la mejor solución a este problema?) En síntesis, un modelo de asignación-localización óptima, es aquel que procura, a la vez, determinar la ubicación óptima de los equipamientos (localización) y distribuirles la totalidad de beneficiarios potenciales (distribución). En otras palabras son modelos que intentan determinar la región o área de influencia de un servicio concreto.

Los modelos de asignación-localización hasta ahora definidos consideran dos magnitudes: la eficiencia espacial de la localización de los centros de servicio y la justicia o equidad espacial de su distribución en el territorio [14], [85].

**Eficiencia espacial:** dada una determinada configuración espacial de la demanda, la distribución de la oferta permite alcanzar o bien un valor mínimo (o máximo, según el tipo de equipamiento) de la suma total de movimientos entre oferta y demanda o bien una distancia máxima entre un punto de demanda y alguno de los centros de oferta; criterio profundamente influido por la teoría de la localización de Weber [85].

**Equidad:** puede manifestarse como igualdad, pero no son dos palabras que se tengan que emplear necesariamente como sinónimos. La equidad podría entenderse como imparcialidad o justicia, generalmente aplicada a la distribución de ingresos y otras oportunidades.

### 2.1.1 Importancia del problema en logística

Las organizaciones comerciales e industriales pueden ser consideradas como sistemas de procesos operativos estructurados y regulados por un conjunto de funciones que pueden llegar a ser estratégicos. Actualmente son objeto de presiones ambientales intensas. Nunca han sido éstos tan diversos, lo que altera los equilibrios anteriores y pidiendo respuestas rápidas y coherentes [94].

La multiplicidad de respuestas corporativas implica la coordinación y la integración en una estrategia claramente definida. De hecho, sólo a través de la utilización de esta estrategia puede superar la inestabilidad ambiental extrema que parece estar caracterizando el nuevo milenio. Estrategia que permite a las empresas para formular y alcanzar sus objetivos, lo que les permite aprovechar las oportunidades que se presenten, sin dejar de estar en sintonía con su entorno.

La logística también conduce a las empresas a pensar en todo el sistema de distribución en el que están involucrados, para tratar de mejorar tanto su propio desempeño y el rendimiento del proceso más amplio. Las empresas ahora tratan de desarrollar un enfoque de colaboración en la gestión del sistema de distribución, que se define como “la integración de los procesos de negocio clave de usuario final a través de los proveedores originales que ofrecen productos, servicios e información que agregan valor para los clientes y otras partes interesadas”.

Por las razones anteriormente mencionadas, se considera importante estudiar la formulación de un problema que tenga en cuenta la interacción de varios actores en diferentes niveles, tal como sucede en el sistema de distribución entre proveedores, distribuidores y clientes. Adicionalmente, el modelo debe incluir la distinción de los productos que fluyen entre los actores del sistema de distribución con el fin de que se ajuste más a la realidad. Dadas estas dos características, el modelo que se desea abordar en este tra-

bajo, cuyo planteamiento lo hace Daskin [26], es un problema determinístico, que incluye dos niveles de jerarquización, un nivel de localización (DCs) y múltiples productos con el fin de hallar la mejor configuración para el sistema de distribución, de forma tal que se minimicen los costos. Dicho problema es conocido como TEMC [41], [58].

## 2.2 Investigación de Operaciones

La primera actividad de IO se dio durante la Segunda Guerra Mundial en Gran Bretaña, donde la Administración Militar llamó a un grupo de científicos de distintas áreas del saber para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados con la Guerra [79].

La IO es el enfoque científico de la toma de decisiones que requiere la operación de sistemas organizacionales. La IO significa hacer investigación sobre las operaciones con la finalidad de optimizar matemáticamente el beneficio de las decisiones, por consiguiente se aplica a la conducción y coordinación de actividades dentro de una organización.

La IO visto como disciplina es la aplicación, por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionados al control de las soluciones o sistemas (hombre-máquina), que mejor sirva a los objetivos de la organización [79].

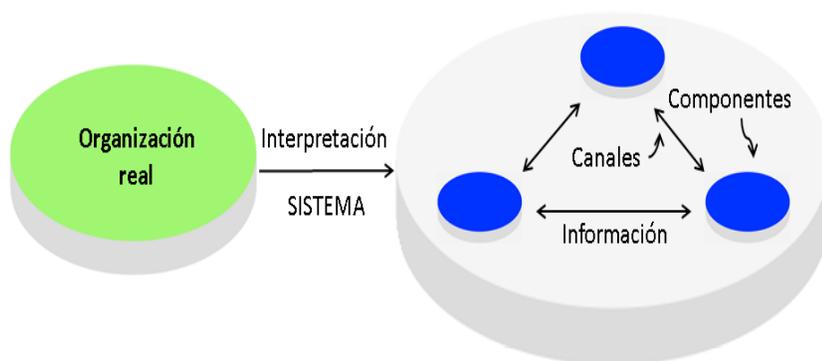
De esta definición se pueden destacar los siguientes conceptos:

- Una organización es un sistema formado por componentes que interaccionan, unas de estas interacciones pueden ser controladas y otras no.
- En un sistema la información es una parte fundamental, ya que entre las componentes fluye información que ocasiona la interacción entre ellas. También dentro de la estructura de los sistemas se encuentran recursos que generan interacciones. Los objetivos de la organización se refieren a la eficacia y eficiencia con que las componentes pueden controlarse, el control es un mecanismo de autocorrección del sistema que permite evaluar los resultados en términos de los objetivos establecidos.
- La complejidad de los problemas que se presentan en las organizaciones ya no encajan en una sola disciplina del conocimiento, se han convertido en multidisciplinarios, por lo cual, para su análisis y solución se requieren grupos compuestos

por especialistas de diferentes áreas del conocimiento que logran comunicarse con un lenguaje común.

- La IO es la aplicación de la metodología científica a través de modelos matemáticos, primero para representar al problema y luego para resolverlo.

En toda estructura existen componentes y canales que comunican a éstas. A través de los canales fluye la información. Al fluir información, las componentes interaccionan de una forma determinada. Se ha convenido entonces en la ventaja de representar a una organización por un sistema, el cual tiene componentes, canales e información que fluye por éstos (véase figura 2-1).



**Figura 2-1.** Esquema gráfico general de un sistema.

Modificado de [79].

Dentro de la estructura de los sistemas se encuentran los siguientes elementos: recursos humanos, materiales (equipos, edificios, materia prima) y financieros. En los recursos humanos se generan interacciones derivadas de la selección y entrenamiento del personal, del rendimiento del trabajo del personal y, por último, de la motivación del mismo. Las interacciones emanadas de los recursos materiales se asocian al diseño, construcción y mantenimiento de máquinas y edificios; primero como entes aislados y después como subsistemas hombres-máquinas. Los productos terminados, fruto de la relación hombre-máquina, generan interacciones de control de calidad, distribución y venta. Los recursos monetarios generan interacciones de adquisición, retención y financiamiento.

Existen diferentes modelos y se clasifican según el tipo de problema y metodología de resolución. A continuación se muestran los más representativos (véase figura 2-2):

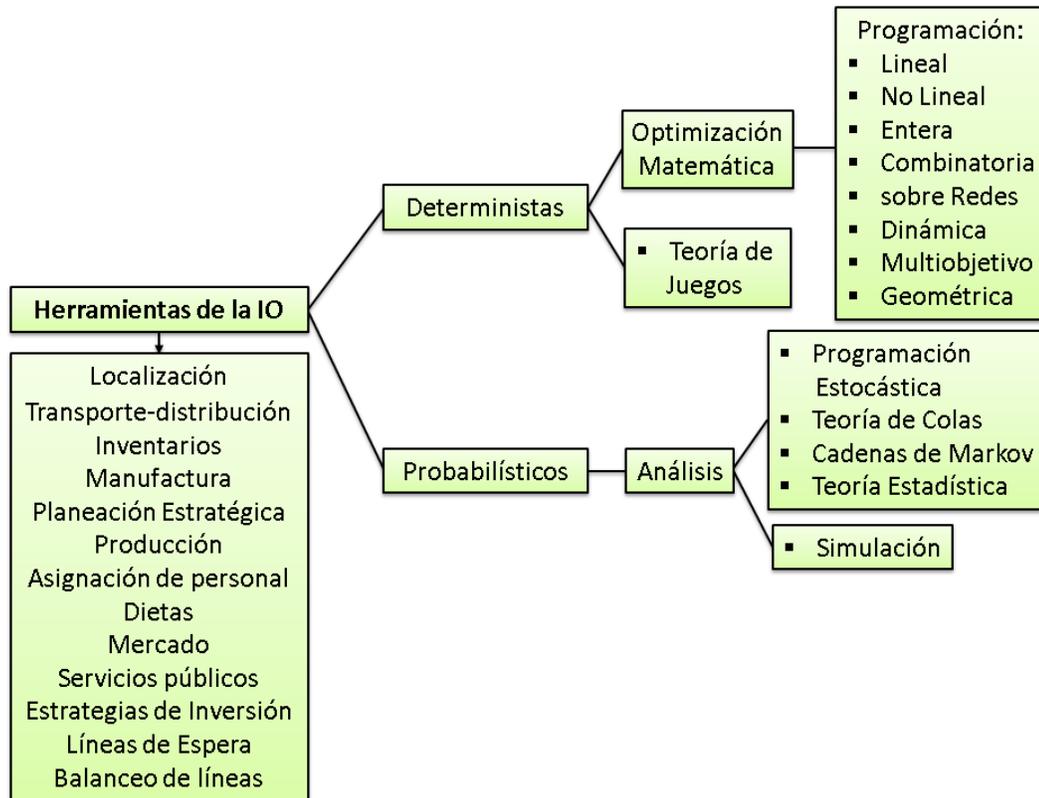


Figura 2-2. Herramientas de la IO.

## 2.3 Programación Matemática

El modelo general de optimización de la programación matemática es el siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar } Z = f(X) \\ &\text{sujeta a} \\ &X \in \Omega \end{aligned}$$

donde  $Z$  la función objetivo,  $X$  el vector de las variables de decisión y  $\Omega$  el espacio de soluciones factibles.

Históricamente la programación lineal fue la primera herramienta de programación matemática para resolver problemas de optimización que se caracterizan por tener como función objetivo y restricciones combinaciones lineales de las variables de decisión. En los años 40 George Dantzig dio a conocer el método simplex como herramienta de la IO aún en nuestros días como herramienta principal de la programación lineal. A continua-

ción mencionamos conceptos relacionados con la programación lineal y mostramos su modelo canónico que es la base del modelo de programación lineal al cual nos enfocaremos como herramienta de este trabajo.

La principal ventaja radica en que existe un algoritmo eficiente (SIMPLEX) para resolver ese tipo de modelos.

**Variables y parámetros.** Son incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo o problema en cuestión mientras que los parámetros ya conocidos que relacionan a las variables de decisión con las restricciones con la función objetivo, pueden ser determinísticos o probabilísticos.

**Restricciones.** Son las limitaciones tecnológicas del sistema las cuales pueden aparecer de forma implícita o explícita y éstas a su vez restringen a las variables de decisión a un rango de valores factibles.

**Función objetivo.** La función objetivo define la medida del sistema como una función matemática de las variables de decisión, por lo que la solución óptima será aquella que produzca el mayor valor de la función objetivo sujeta a las restricciones. Entonces el problema tiene la estructura siguiente [15]:

$$\begin{aligned} \text{MAX(MIN)} Z &= c^T X \\ \text{sujeto a} \\ AX &\begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

siendo

Z: la función objetivo.

$c = (c_1, \dots, c_n)^T$ : el vector de costos o factores de ponderación.

$X = (x_1, \dots, x_n)^T$ : el vector de variables de decisión.

$A = (\dots, a_{ij}, \dots)$ : la matriz de coeficientes tecnológicos ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ).

$b = (b_1, \dots, b_m)^T$ : el vector de demandas (recursos).

El problema estudiado corresponde a un problema típico de decisión donde se debe obtener el programa de producción que maximiza las utilidades sujeto a recursos limitados.

El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal viene dado por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

La programación lineal estándar asume que las variables de decisión son continuas. Sin embargo, en muchas aplicaciones, los valores fraccionarios pueden no tener sentido. Los problemas de programación entera son más difíciles de resolver que los de programación lineal continua ¿Por qué no resolver todos los problemas como problemas de programación lineal estándar y redondear las respuestas a los enteros más cercanos? Desafortunadamente, esto genera dos problemas:

- La solución redondeada puede no ser factible.
- El redondeo puede no dar una solución óptima.

Resumiendo, la optimización consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones.

Por último, una vez formulado el problema, éste se resuelve mediante un algoritmo de optimización. Existen distintos algoritmos en función del tipo de problema que se trate de resolver.

## 2.4 Programación Entera

Los primeros intentos para resolver un problema de programación entera en 1958 surgieron de la metodología utilizada en la resolución de problemas de programación lineal. El

primer algoritmo finito fue dado por Ralph Gomory y se denominó Método de los planos de corte [83].

La programación entera resuelve problemas de asignación de recursos, mediante la aplicación de algoritmos, en aquellas situaciones cuyas variables de decisión no pueden tomar valores fraccionarios.

El modelo matemático para programación entera es sencillamente el modelo de programación lineal con la restricción adicional de que las variables deben tener valores enteros [48]. La representación matricial de un problema de programación entera, es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Optimizar } c^T X \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad AX \leq b \\ & \quad X \geq 0 \\ & \quad x_i \text{ entera para } i \in I \subseteq \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

**Definición 2.1:** El problema de programación lineal que se obtiene al omitir todas las restricciones enteras o variables 0-1 se llama relajación de programación lineal para la programación entera.

En las últimas décadas, el uso de modelos de MIP para resolver problemas de Optimización Combinatoria se ha incrementado enormemente. Mediante un problema de MIP se pueden modelar situaciones donde se debe minimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones, también lineales, donde algunas, o todas, las variables pueden tomar valores enteros. Este es el caso del problema del agente viajero, problemas en redes, problemas de asignación de recursos, problemas de teoría de grafos y muchísimos otros problemas de optimización combinatoria provenientes de una gran cantidad de disciplinas.

En general, los problemas de programación entera son problemas de optimización combinatoria, que asignan valores numéricos discretos a algún conjunto finito de variables que pueden satisfacer un conjunto de restricciones y optimizar una función objetivo.

## 2.5 Clasificación de los modelos de Programación Entera

Atendiendo al tipo de variables se clasifican en:

**Programación Entera Pura.** Son problemas donde se requiere que todas las variables adopten valores enteros. Es decir, a partir de la formulación de MIP, se eliminan las variables continuas o se restringen a tomar valores enteros. El procedimiento más simple para resolver un problema de programación entera pura es enumerar todas las posibilidades. Sin embargo, debido a la explosión combinatoria esta técnica sólo resulta aplicable a instancias sumamente pequeñas. Las aplicaciones, se encuentran relacionadas con los portafolios de inversión, programación de producción por lotes, programación de recursos humanos, etc.

**Programación Entera Mixta (MIP).** Son problemas en los cuales se requiere que algunas de las variables tomen valores enteros mientras que otras pueden asumir cualquier número no negativo (es decir, cualquier valor continuo), su estructura se presenta a continuación [15]:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= c^T x + d^T y \\ \text{sujeto a} \\ Ax + By &\leq b \\ x &\in X \subseteq \mathfrak{R}^n \\ y &\in \mathbb{Z}^p \end{aligned}$$

Esta formulación comprende un conjunto de variables reales ( $x$ ), un conjunto de variables enteras ( $y$ ), así como un conjunto de parámetros del modelo ( $c$ ,  $d$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $b$ ). Además,  $n$  indica el número de variables continuas,  $p$  es el número de variables enteras; asimismo,  $x$  son las variables continuas mientras que  $y$  son las variables enteras.

Los métodos para resolver MIP están fundamentalmente basados en los métodos de BB y sus variantes, donde cada subproblema lineal se resuelve utilizando el método sim-

plex [24]. El modelo desarrollado en el presente trabajo pertenece a este grupo, se trata de un modelo tipo MIP.

**Programación Entera Binaria.** También reciben el nombre de Problemas de Combinatoria. Son problemas donde todas las variables de decisión asumen valores cero o uno (binarias) se utilizan para representar decisiones dicotómicas (sí o no). Algunos ejemplos clásicos de este tipo de problemas son los de presupuesto de capital, ubicación de plantas, problema de la mochila, asignación de recursos, localización simple, agente viajero, problema del cartero, planeación de máquinas en paralelo, árbol de búsqueda, ruta más corta, apareamiento, flujo máximo, problemas de corte, entre muchos otros.

### 2.5.1 Antecedentes de solución de Programación Entera

Un aspecto notable de los métodos de solución de estos problemas, que caen dentro de la clase denominada de modelos combinatorios, es la complejidad computacional. Un enfoque primitivo de resolución consiste en evaluar cada posible solución, es decir, cada una de las combinaciones de valores enteros para las variables del problema. En este caso, incluso un problema pequeño como podría ser con diez variables y diez valores para cada variable tendría un número grande (diez mil millones) de posibles soluciones, lo que hace necesario planteamientos de solución inteligentes. Estos se han dirigido por una parte hacia los “métodos exactos”, es decir, aquellos que conducen a una solución óptima exacta para el problema combinatorio empleando técnicas que reduzcan la búsqueda de soluciones (caso del método simplex). Por otra parte, se han propuesto un buen número de “métodos heurísticos”, sin una base matemática formal, pero que, basados esencialmente en la intuición, conducen a una solución próxima a la óptima y lo que es más deseable, en una cantidad razonable de tiempo. Más concretamente, lo hacen en tiempo polinomial, frente a muchos métodos exactos para problemas combinatorios que lo hacen en tiempo exponencial, siendo por tanto poco aplicables éstos últimos a problemas de tamaño grande. Para resolver problemas de programación entera, se utilizan varios algoritmos como son: Ralph Gomory, BB, Enumeración Exhaustiva o Enumeración Explícita, Enumeración Implícita, Aditivo de Egon Balas y Algoritmos Heurísticos. En programación entera pura algunos de los algoritmos de solución que se emplean son: Método de Plano de Corte, Algoritmo Fraccional de Gomory, Algoritmo Entero Puro de Gomory, Método de BB y el Algoritmo de Land-Doig, entre otros. Para programación entera

binaria algunos de los utilizados son: Método de BB, Método Aditivo de Egon Balas, Método Lexicográfico, Método de Lemke y Spielberg, Distancia de Haming y Retículos y Método de Trubin. En MIP se usan el Algoritmo Entero Mixto de Gomory, el Algoritmo de Land-Doig, Método de Descomposición de Benders (Benders Decomposition – BD) [17].

El desarrollo y programación de estos algoritmos no es tarea sencilla y requiere de un alto grado de conocimientos teóricos y computacionales. Para esto existen numerosos paquetes en el mercado, unos mejores que otros y también unos más caros que otros.

## 2.6 Complejidad computacional

La complejidad computacional estudia la “dificultad” inherente de problemas de importancia teórica y/o práctica.

Tradicionalmente, el primer mérito al evaluar la eficiencia de un algoritmo es su tiempo de ejecución; sin embargo, recientemente se está empezando a considerar el tiempo en paralelo y el tamaño del hardware como importantes medidas de complejidad

El objetivo fundamental de la Complejidad Computacional es clasificar los problemas de acuerdo a su tratabilidad, tomando el o los algoritmos más eficientes para resolverlos, es decir, se quiere determinar las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Cuán tratable es el problema?
- Si el problema es tratable, ¿es el algoritmo eficiente?

Las siguientes sugerencias pueden ser de utilidad:

- Aproximar las variables enteras con las continuas, siempre que sea posible.
- Para las variables enteras, restringir todo lo posible sus intervalos factibles.
- Evitar el uso de no linealidades en el modelo.

### 2.6.1 Algunas definiciones

**La complejidad computacional** estudia la eficiencia de los algoritmos estableciendo su efectividad de acuerdo al tiempo (memoria) de corrida y al espacio requerido en la com-

putadora o almacenamiento de datos, ayudando a evaluar la viabilidad de la implementación práctica en tiempo y costo. La complejidad computacional considera globalmente todos los posibles algoritmos para resolver un problema dado [18].

**Tiempo polinomial:** Es es tiempo ideal. En computación, cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo es menor que un cierto valor calculado; obviamente usando una fórmula polinomial como por ejemplo logarítmicas, lineales, cuadráticas o cúbicas, se dice que dicho problema se puede resolver en un tiempo polinómico.

**Espacio Computacional:** La complejidad de espacio de un algoritmo indica la cantidad de almacenamiento temporal requerido para correr un algoritmo, esto es, el acceso directo a la memoria de la computadora requerido para representar los datos necesarios para llevar a cabo el procedimiento. Los esquemas de almacenamiento y manipulación de datos dentro de la memoria son indispensables para el desempeño de los algoritmos, haciendo en ocasiones la diferencia en la elección entre varios algoritmos. Incluso, al mejorar estos aspectos se puede mejorar la complejidad del peor caso, obteniendo así un algoritmo más eficiente.

La forma del almacenamiento de datos se relaciona con el tipo de operaciones que se pueden realizar, porque dependiendo de la manera en que se almacenen los datos se podrán efectuar cierto tipo de operaciones y también se relaciona con la rapidez para efectuarlas.

Un **algoritmo** es un procedimiento computacional bien definido, el cual considera un valor o conjunto de valores como de entrada y a través de una secuencia de instrucciones organizadas, produce un valor o conjunto de valores de salida, en un tiempo determinado con la finalidad de dar solución a un problema específico. Las características principales de un algoritmo son:

- Preciso y Definido. Cada paso debe ser definido en forma precisa e indicar el orden de realización.
- Datos de entrada (input). El algoritmo recibe datos iniciales antes de su ejecución.
- Datos de salida (output). El algoritmo tiene una o más salidas, es decir, datos que tienen una relación específica respecto a los datos de entrada.

- Generalidad. Independientemente de las veces que se siga un algoritmo, se debe obtener el mismo resultado.
- Finito. Un algoritmo debe terminar siempre después de un número finito de pasos.

Al analizar un algoritmo se considera el tiempo de corrida y consiste en el número de operaciones elementales que ejecuta en cada paso. Dicho análisis se concentra generalmente en encontrar el peor caso de tiempo de corrida, es decir, el mayor tiempo que tardaría el algoritmo en obtener los valores de salida.

Los problemas de decisión son utilizados para la clasificación de la complejidad de los problemas, y se refieren a una subclase de problemas donde la solución es el conjunto  $S = \{\text{sí, no}\}$  únicamente.

Una clase de complejidad es un conjunto de problemas de complejidad relacionada. Las clases de complejidad más simples se definen por los siguientes factores:

- **El tipo de problema computacional:** Los problemas más comunes son los problemas de decisión. Sin embargo, las clases de complejidad se pueden definir sobre la base de problemas de la función, los problemas de conteo, problemas de optimización, problemas promesa, etc.
- **El modelo de computación:** El modelo más común de cálculo es la máquina determinista, pero muchas clases de complejidad se basa en las máquinas no deterministas, circuitos booleanos, máquinas de Turing cuántica, circuitos monótonos, etc.
- **El recurso que está siendo limitada y los límites<sup>1</sup>:** Estas dos propiedades se indican generalmente en conjunto, como “tiempo polinómico”, “espacio logarítmico”, “profundidad constante”, etc [19].

---

<sup>1</sup> Una de las funciones de la teoría de la complejidad computacional es determinar los límites prácticos en lo que las computadoras pueden y no pueden hacer. Para clasificar el tiempo de cálculo, uno está interesado en probar los límites superior e inferior de la cantidad mínima de tiempo requerido por el algoritmo más eficiente para resolver un problema dado.

Los problemas matemáticos los podemos dividir en dos grupos:

**Problemas indecidibles:** Aquellos que no se pueden resolver mediante un algoritmo para su solución, por lo tanto son los problemas de complejidad más alta. Ejemplo: la Máquina de Turing<sup>2</sup> [82], el décimo problema de Hilbert y el de programación cuadrática [68].

**Problemas decidibles:** Aquellos que cuentan al menos con un algoritmo para su cómputo. Sin embargo, un problema decidable puede no ser solucionado por un computador, porque el algoritmo requiere un número elevado de operaciones para resolverlo. Esto nos permite separar en dos los problemas decidibles [65].

**Problemas tratables:** Son los problemas que cuentan con al menos una solución polinomial. Ejemplo: Todos los algoritmos a los que se les ha podido establecer su tiempo de ejecución.

**Problemas intratables:** No se ha descubierto un algoritmo que los resuelva, únicamente algoritmos exponenciales [36]. Un problema puede ser intratable por distintos motivos:

- El problema requiere una respuesta de longitud exponencial.
- El problema es decidable pero no se conocen algoritmos polinomiales que lo resuelvan.

En simples palabras, los problemas que pueden ser resueltos en teoría, pero no en práctica, se llaman intratables.

**Transformación polinomial:** Es una función de NP-completo que permite cambiar la representación de un problema D1 a otro problema D2 aplicando un algoritmo determinista de tiempo polinomial.

---

<sup>2</sup> Una máquina de Turing no es una máquina física sino un mecanismo lógico por medio del cual el cálculo puede descomponerse en iteraciones de operaciones concretas extremadamente simples (controladas por un "programa").

## 2.6.2 Clasificación por su complejidad

Los problemas en las ciencias de la computación en particular en la teoría de la complejidad se clasifican en: clase P, clase NP, clase NP-Completo y clase NP-Duro.

**Clase P:** Problemas de decisión que tienen un algoritmo de tiempo polinomial (**P**) en una máquina determinista que lo resuelva [76]. Ejemplos: logaritmos, lineales, cuadráticos o cúbicos, estos problemas se denominan tratables.

**Clase NP:** Un problema es No-Polinomial (**NP: Non-Deterministic Polynomial-Time**) si no existe un algoritmo determinístico polinomial que lo resuelva. Ejemplo: Las Torres de Hanoi o el método de ordenamiento Shell.

**Clase NP-Completo:** Son problemas NP, y son los peores problemas posibles de la clase NP, son de extrema complejidad. La teoría de NP-Completo se basa en el concepto de transformación polinomial [38]. Además es importante porque sirve para determinar la pertenencia de los problemas a las clases P y NP. Algunas aplicaciones que se conocen como NP-Completo son por ejemplo el problema del agente, el de la mochila, Ciclo Hamiltoniano<sup>3</sup>, Cobertura de Vértices, etc [18].

**Clase NP-Duro:** La clase NP-Duro está formada por el conjunto de problemas que son al menos tan difíciles como el problema más complejo de la clase NP. Los problemas de la clase NP no tienen por qué ser problemas de decisión, también incluye problemas de optimización u otros.

Dado un problema P, que puede ser un problema de decisión o un problema de optimización, se dice que es NP-Duro si toda la clase de problemas NP reduce polinómicamente a P [73].

Un problema de optimización es NP-Duro si puede ser transformado en un problema de decisión que sea NP-Completo [13]. Como ya se ha comentado, los problemas de de-

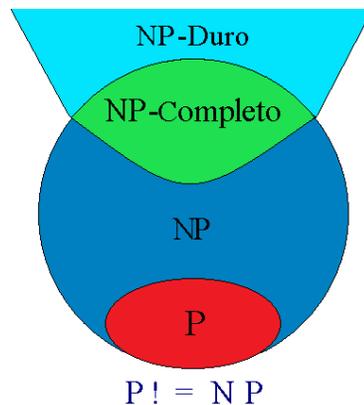
---

<sup>3</sup> Un camino Hamiltoniano es un camino que recorre todos los vértices de un grafo sin pasar dos veces por el mismo vértice. Si el camino es cerrado se dice que es un ciclo Hamiltoniano.

cisión no son más complejos que los correspondientes problemas de optimización. Por tanto, para demostrar que un problema de optimización es NP-Duro es suficiente con transformarlo polinómicamente en algún problema conocido de la clase NP-Completo [36].

Por el contrario, para probar que un problema de optimización es fácil, es suficiente con construir un algoritmo polinómico que lo resuelva. Existe un conjunto de problemas para los que todavía no se ha demostrado que sean NP-Completo, ni se ha encontrado un algoritmo que los resuelva polinómicamente [11].

La figura 2-3 muestra la teoría de que todos los problemas P y NP-Completo son problemas NP, aunque no ha sido probada es la más aceptada como probable. Actualmente hay un premio de prestigio equivalente al Nobel reservado que da 1 millón de dólares a quien resuelva el problema de P vs NP [22], la pregunta a responder es: ¿los problemas NP (intratables) se pueden reducir a problemas P (tratables)? Es más, si se descubriera una solución para los problemas NP-Completo, ésta sería aplicable a todos los problemas NP y, por tanto, la clase NP desaparecería del mundo científico al carecerse de problemas de ese tipo. Realmente, tras años de búsqueda exhaustiva de dicha solución, es hecho ampliamente aceptado que no debe existir, aunque nadie ha demostrado, todavía, la imposibilidad de su existencia [71].



**Figura 2-3.** Familias de problemas P, NP, NP-Completo, y NP-Duro.

Modificado de [91].

En la sección 2.9 se presentarán las técnicas heurísticas y metaheurísticas que son utilizadas para resolver – aunque sea aproximadamente – los problemas llamados intratables.

### 2.6.3 Definición de localización

La localización de una instalación es el proceso de elegir un lugar geométrico para realizar las operaciones de una empresa [55].

El concepto de la localización de una planta industrial se refiere a la ubicación de la nueva unidad productora, de tal forma que se logre la máxima rentabilidad del proyecto o el mínimo de los costos unitarios. Los elementos más importantes que se consideran en un análisis de localización son [67], [95]:

- La suma de los costos de transporte de las materias primas hacia la planta y de los productos acabados hacia el mercado.
- La disponibilidad y los costos relativos a los insumos.
- Acceso a la infraestructura industrial: caminos de acceso, abastecimiento de energía, abastecimiento de agua, etc.
- Servicios de transporte: carreteras, ferrocarriles, puertos, aeropuertos, etc.

En la localización se deben considerar todos los factores de costos de transporte para encontrar la mejor posición que proporcione mayores ventajas a la empresa. El ANEXO B se muestran algunos factores que se incluyen en el análisis [29]:

- Fuentes de abastecimiento
- Mercados
- Mano de obra
- Suministros básicos
- Clima de negocios.
- Ubicación geográfica estratégica, infraestructura y comunicaciones.
- Potencial del sector primario, minero y de transformación.
- Recursos humanos
- Calidad de vida.

- Clima
- Legislación
- Impuestos y servicios públicos
- Actitudes hacia la empresa
- Terrenos-construcción
- Inversión extranjera.
- Turismo.

Entre las diversas causas que originan problemas ligados a la localización, podríamos citar:

- Mercados expansivos
- Lanzamiento de nuevos productos
- Disminución de la demanda
- Agotamiento de las fuentes de materias primas
- Obsolescencia tecnológica
- Incremento de la competencia
- Modificaciones del entorno
- Uniones temporales, fusiones, adquisiciones, etc.

Las alternativas de localización cuando una empresa decide incrementar su capacidad mediante nuevas instalaciones tienen tres opciones básicas:

- Expandir una instalación existente (si existe espacio y la localización actual es adecuada).
- Crear nuevas instalaciones en nuevos lugares (falta de espacio o incursión en nuevos mercados).
- Cerrar instalaciones en algún lugar y abrir otra(s) en otro(s) sitio(s) (genera grandes costos).

## **2.7 Introducción a los problemas de localización**

El problema de la localización que, empieza a ser planteado en el siglo XVII por los matemáticos Fermat y Torricelli, en su forma más primitiva, trata de encontrar la posición de un

punto en un plano, de tal forma que la suma de las distancias entre dicho punto y otros tres dados sea mínima [16]. Durante muchas décadas el punto central fue la búsqueda de una explicación de las tendencias y modelos generales de localización de las actividades humanas, entre ellas sobresalieron las teorías clásicas esbozadas, entre otros, por

- Heinrich von Thünen. Modelo de localización sobre el uso del suelo agrícola [77].
- Alfred Weber. Modelo de localización industrial [84].
- Walter Christaller. Teoría de los lugares centrales [70].

Pero los estudios de localización toman una dimensión más amplia cuando a principios de este siglo ciertos economistas toman interés en esta cuestión e incorporan además de la distancia, factores de carácter socioeconómico. Por ejemplo Alfred Weber, intentó encontrar el lugar más eficiente para la localización de industrias, tal que la misma se encontrara entre la producción de materia prima y el mercado consumidor. Sin embargo, después de desarrollar su teoría reconoció que tanto los procedimientos geométricos, como los principios mecánicos utilizados presentaban limitaciones para explicar la relación costo-transporte, y que no podría ser empleado para resolver problemas complejos de localización o casos de multi-localización [42].

Hacia 1960, varias investigaciones, casi de manera simultánea, formularon soluciones para el problema de la localización de servicios. Estas aproximaciones no sólo proporcionaron una metodología para resolver el problema de Weber en ambientes complejos, sino que además extendieron el problema a la localización de múltiples instalaciones de servicios. De esta forma, con múltiples servicios, el objetivo además de encontrar la localización óptima, consistía en determinar la asignación de la demanda para aquellas localizaciones. Desde entonces la localización óptima depende de la asignación y en el futuro ambas tendrían que determinarse simultáneamente [42].

En 1962 Drucker describe la distribución física (logística) como “continente oscuro de la economía” y dijo que esta forma “la más tristemente descuidada, la zona más prometedora de negocio...”. Por la década de 1970 estaba claro que la logística era cara, pero pocas organizaciones podrían decir con precisión qué tan cara. Ray [94] señaló que “Toda el área de la logística está nublada con enfoques ad hoc y procedimientos contables desordenados, a la que parece haber poca ideología sistemática subyacente”.

Little [94] estuvo de acuerdo, diciendo que los directivos comenzaron a identificar el costo total de la logística, y por las encuestas de 1980. La identificación de los costos logísticos a través de declaraciones de contabilidad aceptados en la empresa es muy engañosa - Por ejemplo, Ray, Gattorna y Allen [94], Firth et al. [94], McKibbin [94] y Delaney [94] - sugieren que la logística en general, representa el 15-20 % de los costos. Sin embargo, en 1994 Hill aún podía decir que “muchos distribuidores no son conscientes de los costos del servicio de distribución que proporcionan”.

Según estos últimos autores, la dificultad principal de esta teoría de localización radica en el hecho de que en la mayoría de los casos no existen soluciones analíticas; por ello, a lo largo del tiempo, se han dado soluciones de tipo gráfico y analógico de gran imaginación, hasta que en la actualidad, con las modernas técnicas de la IO y, sobre todo, gracias al ordenador, es posible el empleo de procedimientos iterativos de una alta precisión.

Las decisiones de localización apuntan a instalar plantas de producción, DCs, puntos de venta, etc., además, estas decisiones pueden llevar a determinar la asignación de clientes y la capacidad de las instalaciones que forman parte del sistema de distribución.

Luego, las decisiones de localización pueden ser las más difíciles que se necesitan realizar para un eficiente diseño de un sistema de distribución, esto debido a la naturaleza estratégica de esta decisión, lo que implica que es una decisión a largo plazo. Además el decidir donde localizar, conlleva a considerar costos de instalaciones, los que pueden ser elevados en, por ejemplo, plantas de manufactura. Por todo lo anterior, se puede concluir que es una decisión poco flexible. Para mayor detalle sobre la importancia de la decisión de localización véase [27].

La relación entre la manufactura y la distribución del bien o servicio es muy estrecha. La relación existe entre la parte económica y la parte de tiempo de entrega, ya que haciendo una buena planeación de la distribución podemos crear una ventaja competitiva frente a la competencia, dicha ventaja es la disminución de costos y menores tiempos de entrega, entre otros. Una buena o mala decisión de localización puede marcar la eficiencia del sistema de distribución, afectando la satisfacción de las necesidades de los clientes, no olvidemos que las decisiones de localización investigan dónde ubicar un conjunto

de instalaciones a modo de satisfacer las necesidades de un conjunto de clientes [47], luego, una mala decisión de localización iría en menoscabo de este conjunto de clientes, contradiciendo la definición de cadena de suministro propuesta por Chopra [21].

Una parte importante del ciclo de manufactura es la distribución de productos, es por eso que se ha trabajado en numerosos métodos para hacer una adecuada selección de las vías o rutas de abastecimiento y transporte de los mismos, con el objetivo de satisfacer las necesidades del cliente con tanta eficacia como sea posible. Los problemas de localización pueden ser descritos de la siguiente manera: se cuenta con un grupo de clientes distribuidos espacialmente en un área geográfica, éstos demandan un producto o servicio, la demanda de los clientes debe ser cubierta por una o varias instalaciones. El proceso de decisión establece que se deben ubicar las instalaciones tomando en cuenta los requerimientos de los clientes y las restricciones geográficas.

Los problemas de localización cuentan con tres elementos esenciales: las instalaciones, que serán localizadas para proporcionar un servicio o producto, los sitios candidatos son el conjunto de posibles ubicaciones para las instalaciones y los clientes que son los demandantes de los productos o servicios. Hay una gran variedad de problemas de localización de instalaciones. Si el conjunto de puntos de demanda y localización de las instalaciones es finito, se conoce como problema de localización de instalaciones discreto. Si todos los datos son exactos, se refiere al modelo como determinístico, si los valores de algunos parámetros son dados por una distribución de probabilidad, el modelo se considera estocástico. Podemos clasificar también el modelo como capacitado o no capacitado, esto es, si las instalaciones cuentan con una capacidad limitada o no para satisfacer la demanda de los clientes [95].

Los métodos de localización que existen son bastantes, pero en este caso estaremos enfocados sólo en algunos de ellos, el modelo p-centro, el modelo de la p-mediana, el método de localización de instalaciones no capacitado (Uncapacitated Facility Location Problem – UFLP) y el modelo de localización de instalaciones capacitado (Capacitated Facility Location Problem – CFLP).

Estos métodos que posiblemente a primera vista pudieran parecer similares, cuentan con marcadas diferencias, ya que, la p-mediana minimiza la ponderación de la distancia

por la demanda cubierta, además de que en este método el número de instalaciones a ubicar está definida más adelante y forma parte del problema. Por otro lado el UFLP minimizan el costo total con respecto a la distancia, la demanda y los costos fijos por apertura de cada instalación. Es evidente que existe una gran diferencia entre cada uno, así que las diferencias estarán resaltando a lo largo del presente trabajo.

## **2.8 Problemas de localización de instalaciones**

El problema de localización es abordado por la IO a través del modelado matemático con la finalidad de encontrar la ubicación óptima de instalaciones que minimice los costos de transporte, los tiempos de traslado, costos de satisfacer la demanda, entre muchas otras consideraciones.

La localización de instalaciones investiga dónde ubicar físicamente un conjunto de instalaciones a modo de satisfacer las demandas de un grupo de clientes [47], todo esto, sujeto a una serie de restricciones, para seleccionar un conjunto óptimo de instalaciones para instalar en los sitios candidatos, para optimizar alguna función objetivo. Se debe entender el término instalación en su más amplio sentido, ya que puede incluir entidades como hospitales, industrias, colegios, puertos, etc.

Los modelos de localización son aplicados a casos específicos, esto es, su estructura (objetivos, restricciones y variables) depende de cada caso en estudio. Entonces, no existe un modelo genérico que sea apropiado para todos los problemas. Por lo que, modelos con distinto objetivo, pueden provocar diferentes soluciones para el mismo caso en estudio. Ya los autores Brandeau y Chiu [62] revisaban 50 problemas de localización que habían sido estudiados, indicando cómo han sido formulados, su clasificación y cómo se relacionan unos con otros, dando a conocer una serie de objetivos para optimizar que pueden seguir los modelos.

Los modelos discretos de localización en redes se pueden clasificar de acuerdo con la distancia [23]. Ahora los modelos se pueden dividir en modelos que están basados en la máxima distancia y modelos basados en la distancia total o promedio. Este problema tiene una serie de variantes dependiendo del nivel de complejidad, detalle y flexibilidad que se quiere obtener. A continuación se presentarán algunas formas de tratar el mismo.

### 2.8.1 Problema del p-centro

El problema p-centro [45, 46] pertenece a los modelos de máxima distancia, el cual se demostró que era NP-Duro. El objetivo de este modelo es minimizar la máxima distancia entre un nodo de demanda y su instalación más cercana, dado que se tiene un número predeterminado de ubicaciones para instalar. Este modelo se conoce como problema minimax y como un problema punto objetivo, ya que minimiza la distancia desde cada localización de demanda al sitio de la instalación como un objetivo separado, por lo tanto, hay un objetivo para cada localización de demanda.

Existen posibles variaciones de este modelo. El problema “vértice p-centro” restringe el conjunto de ubicaciones candidatas de las instalaciones en los nodos de la red, mientras que el problema “absoluto p-centro” permite la ubicación de las instalaciones tanto en los nodos como en los arcos de la red [23], [26].

Algunas aplicaciones del p-centro son por ejemplo localización de estaciones de bomberos, policía o ambulancias, unidades de urgencias, etc. Centrándonos en los recursos sanitarios hay ocasiones en donde no sea tan importante minimizar la distancia del usuario más alejado a su instalación más cercana, como maximizar el número de usuarios potenciales que serían atendidos en un tiempo aceptable (“tiempo crítico”). Supóngase más concretamente que se quieren poner en una determinada zona o región unas unidades especiales de atención a diabéticos; ante un ataque por bajada en el nivel de insulina se sabe que el enfermo no debe permanecer más de 20 minutos sin ser atendido, de lo contrario se corre el riesgo de que los daños puedan ser irreversibles. En este caso interesa que la mayor parte de los diabéticos estén a 20 minutos de su unidad más cercana [1].

### 2.8.2 Problema de la p-mediana

El problema de la p-mediana tiene como objetivo determinar la ubicación de  $p$  centros de distribución o estaciones de servicio, dada una demanda de locales finitos conocidos. A diferencia del modelo p-centro, el modelo p-mediana [45, 46], encuentra la ubicación de instalaciones a modo de minimizar la demanda-distancia total entre los nodos de demanda y la instalación a la cual son asignados, es por ésto que este modelo pertenece a los modelos de distancia total o promedio. Para el problema de la p-mediana no se cono-

ce un algoritmo de orden polinomial que lo resuelva, por lo tanto se le considera como un problema NP-Duro [23], [26].

El problema de la  $p$ -mediana asume que el conjunto de todos los sitios candidatos son equivalentes en términos de costos para la localización de una nueva instalación. Cuando este no es el caso, la función objetivo puede ser ampliada con un término para los costos fijos de localización de instalaciones, esto da como resultado, que el número de instalaciones al ser abierta empieza a ser una decisión endógena. Este enfoque nuevo se conoce en la literatura como problema de localización de instalaciones no capacitado (Uncapacitated Facility Location Problem – UFLP).

Algunas aplicaciones de la  $p$ -mediana son por ejemplo la localización y dimensionamiento óptimo de transformadores de distribución [72], la recolección de frutas en huertos, etc [4].

### **2.8.3 Problema de localización de instalaciones no capacitado**

El problema de localización de instalaciones con capacidad ilimitada (UFLP) el cual tiene el objetivo de determinar qué instalaciones se abrirán teniendo en cuenta el balance entre los costos fijos de operación y los costos variables de envío con el fin de minimizarlos. La versión no capacitada del problema de localización de instalaciones es una formulación que obliga a enviar toda la demanda del cliente o vendedor desde la planta más cercana, o con los menores costos de transporte. Es decir, en ocasiones es razonable pensar, por diversas circunstancias, que la cantidad a producir en la planta no excederá nunca la capacidad de la planta [60].

Algunas aplicaciones del UFLP son por ejemplo en chapa de acero para aplicaciones tan diversas como los paneles de carrocería de automóviles, paneles de aparatos eléctricos y en los cobertizos de almacenamiento de acero [32].

### **2.8.4 Problema de localización de instalaciones capacitado**

Una de las extensiones más importantes del problema de UFLP es el problema de localización de instalaciones capacitada (CFLP) en el cual se consideran valores exógenos

para la demanda máxima que se puede asignar a una instalación de sitio candidato. En este caso la propiedad de asignación al más cercano ya no es válida.

El CFLP es un problema de optimización combinatoria, tiene como objetivo determinar la instalación de un conjunto de plantas que deben satisfacer la demanda generada en los puntos de venta, incurriendo en el menor costo posible. Asimismo, la solución del problema debe dar información sobre cuántas unidades deben ser enviadas desde cada planta hasta cada punto de venta. Dado un conjunto de clientes y un conjunto de instalaciones potenciales, el problema consiste en decidir qué plantas o instalaciones se utilizan y cómo son servidos los clientes desde esas instalaciones a modo de minimizar los costos fijos derivados de la utilización de una planta y los costos operativos (costos variables de producción y costos de transporte entre las plantas abiertas y los clientes).

Es una formulación muy sencilla, tanto en su construcción como en su comprensión y puede modificarse fácilmente, incluyendo restricciones que describan las necesidades reales del sistema productivo. Cuando se considera un límite de capacidad para cada una de las instalaciones el problema se denomina CFLP. Ambos problemas CFLP y UFLP son también NP-Duro y pueden ser modelados como problemas MIP [60], [87].

Algunas aplicaciones del CFLP incluyen la localización y planificación de la distribución, la planificación de producción y diseño de redes de telecomunicaciones, las agencias gubernamentales deben decidir sobre la localización de oficinas, escuelas, hospitales, estaciones de bomberos, etc. En cada caso, la calidad de los servicios depende de la localización de las instalaciones en relación con otras [29].

Troncoso et al. [89] muestran una aplicación de un modelo de localización de instalaciones para la producción y logística forestal, que permite la elección estratégica del sitio y tamaños óptimos para la instalación forestal que se desee construir, además de la identificación de los niveles de producción y de los flujos de carga que se generarán en el horizonte de planificación considerado.

## 2.8.5 Antecedentes de solución del TEMC

Acerca de modelos de localización de sistemas de producción-distribución existe una amplia literatura, Beamon [9], Dasci y Verter [25], Ortega Mier [64], quienes resumen los diferentes modelos existentes. Una abrumadora mayoría de la literatura utiliza formulaciones de MIP y debido a que las formas exactas para resolver este tipo de problemas en tamaños medianos (30 posibles localizaciones) requieren de grandes esfuerzos computacionales. Las principales técnicas estudiadas son los modelos de ramificación y acotamiento (BB), descomposición de Benders (BD) y algunos metaheurísticos como son relajación Lagrangiana (Lagrangian Relaxation – LR), recocido simulado (SA), algoritmo genético (GA) y búsqueda Tabú (Tabu Search – TS).

La tabla 2-1 muestra un resumen de los principales avances que se han realizado para solucionar problemas de producción-distribución.

**Tabla 2-1:** Principales avances de problemas de producción-distribución.

TÉCNICA	AUTORES	CARACTERÍSTICAS						
		1	2	3	4	5	6	7
BB	Efroymsen y Ray (1966)	C	2	D	S	-	-	-
BD	Geoffrion y Graves (1974)	C	3	D	M	+	-	+
BB	Akinc y Khumawala (1977)	C	2	D	S	+	-	-
LR	Geoffrion y MacBride (1978)	C	2	D	S	+	-	-
BB	Tcha y Lee (1984)	C	M	D	S	-	-	-
GSCM	Cohen y Lee (1989)	B	4	D	M	+	-	+
BD	Moon (1989)	C	3	D	M	+	+	-
BB	Hindi y Basta (1994)	C	2	D	M	+	+	-
GSCM	Arntzen et al. (1995)	M	M	D	M	+	-	+
LR	Pirkul y Jayaraman (1997)	C	4	D	M	+	-	-
LR	Barbarosoblu y Özgür (1999)	C	2	D	M	+	+	-
BD	Dogan y Goetschalckx (1999)	C	3	D	M	-	-	-
SA	Antunes y Peeters (2000)	C	1	D	M	+/-	+	+
LR	Hinojosa et al. (2000)	C	2	D	M	+	-	+
GA	Chau (2004)	C	2	D	S	+/-	+	+
Nuestro modelo propuesto	Macías et al.	C	2	D	M	+	+	+

1: Función Objetivo (B: Beneficio/C: Costo/M: Múltiple),

2: Número de Escalones (M: Múltiple),

3: Demanda (D: Determinista),

4: Número de Productos Básicos (M: Múltiple/S: Solo),

5: Restricciones de Capacidad (+/-),

6: Restricciones de Presupuesto (+/-),

7: Aplicación Industrial (+/-).

## 2.9 Técnicas de descomposición y aproximación

Existen dos técnicas clásicas que permiten obtener soluciones exactas al problema que son BB y BD, las cuales resultan adecuadas y eficientes para resolver problemas de localización de plantas en tamaño pequeño [44]. A continuación se describen brevemente este tipo de técnicas:

### 2.9.1 Ramificación y Acotamiento

El algoritmo desarrollado originalmente por Land y Doig [57] y modificada posteriormente por Dakin [24]. El método de BB es una técnica de exploración y en la mayor parte de las ocasiones trata de buscar una solución óptima a un problema, consiste esencialmente en una enumeración en árbol en la cual el espacio de variables enteras se divide de forma sucesiva dando lugar a subproblemas lineales que se resuelven en cada nodo del árbol. En el nodo inicial las variables enteras se relajan como variables continuas, de tal forma que se les permite tomar valores fraccionarios. Si la solución de este problema produce de forma natural una solución en la cual todas las variables toman valores enteros se habría alcanzado la solución, en otro caso se comienza una búsqueda en árbol, que consiste en calcular en cada nodo una cota de los valores de las soluciones situadas por debajo. Si esta cota demuestra que tales soluciones son eventualmente peores que una solución ya encontrada se abandona la exploración de esa parte del árbol, hasta que la diferencia de cotas inferior y superior estén dentro de una tolerancia o no existan ramas abiertas [15].

Conviene mencionar que se dispone también de paquetes computacionales que usan BB en sus procedimientos de solución, tales como LINDO para resolver problemas de programación lineal y programación entera. Existen varios campos de aplicación tales como: problemas de distribución, secuenciación de instalaciones, agente viajero, rutas de vehículos, el problema de la mochila, problemas de programación no lineal, por su gran velocidad se tiene una solución más exacta y rápida sin necesidad de recurrir a métodos aproximados [68].

Algunos autores han utilizado técnicas de BB para resolver problemas de localización de instalaciones de forma satisfactoria, como Gao y Robinson [80] usaron un modelo de programación (ARBNET) para implementar el procedimiento de solución basada en la

teoría de la dualidad resuelve con eficacia para el problema real de un escalón, de dos escalones, y problemas de localización multi-actividad para la planificación del sistema de distribución sin restricciones de capacidad (UFLP).

Hindi y Basta [54] e Hindi et al. [12], resolvieron el problema de producción y distribución, de dos escalones con capacidad limitada (CFLP), el problema se modela como un problema de MIP, entre otros.

### **2.9.2 Descomposición de Benders**

La técnica de descomposición de Benders (BD) [10] se puede describir como una manera inteligente de separar variables “difíciles” de algún problema aprovechando las características estructurales de éste. El método requiere que una vez fijadas estas variables “difíciles”, el problema pueda plantearse en una forma conocida y de fácil solución, parametrizado en función de las variables “difíciles” (originalmente Benders planteó llegar a un problema de programación lineal). El algoritmo propone la aproximación del problema simple parametrizado a través de planos cortantes que representen los valores extremos de éste. Para encontrar la expresión de estos planos Benders recurre a la teoría de dualidad [39].

En métodos no convexos el método no converge al óptimo global debido a la existencia de quebraduras de dualidad (duality gaps). Sin embargo, aún así puede ser recomendado como método aproximado en las problemáticas en que no existen otras alternativas de desarrollo. Este método de solución consiste en dividir el problema en dos: uno (maestro) que trata el problema original sin algunas restricciones y maneja variables enteras (ubicar los DCs); y otro (auxiliar) que maneja variables continuas (flujo de productos) y utiliza los resultados obtenidos del problema maestro añadiendo restricciones hasta resolver el problema original, lo que permite converger a una solución con pocas iteraciones.

Geoffrion y Graves [40] emplearon un algoritmo basado en BD para resolver el problema de multiproductos en dos escalones para el problema de diseño del sistema de producción-distribución en un solo período.

Esta técnica de descomposición ha seguido siendo utilizada para resolver problemas relacionados con CFLP, entre los autores se puede mencionar Dogan y Goetschalckx [30].

### 2.9.3 Relajación Lagrangiana

La relajación Lagrangiana (LR) es una técnica que utiliza conceptos de la teoría de la dualidad para tratar el conjunto de restricciones del problema de manera especial. Las restricciones consideradas complicadas son transferidas a la función objetivo, las cuales son ponderadas a través de parámetros de penalidades especiales denominados Multiplicadores de Lagrange. Así el problema original se transforma en un problema relajado, donde la estructura de las restricciones resultantes, en general, origina subproblemas que pueden ser resueltos con mayor facilidad en comparación al problema original. Esto se consigue mediante un procedimiento iterativo donde, se analiza si se viola alguna de las restricciones relajadas que, en caso afirmativo, provoca un ajuste del valor de los parámetros. Si el modelo contiene variables binarias el método iterativo puede presentar dificultades para encontrar soluciones globalmente factibles y se suele proceder a métodos heurísticos para “arreglar” soluciones obtenidas que preserven la factibilidad. La solución lagrangiana provee cotas inferiores sobre la solución óptima del problema, y dada la no convexidad del problema, se mejora mediante un procedimiento de optimización del tipo subgradiente para conseguir una solución cuasi-óptima primal.

Pirkul y Jayaraman [75] basaron también una heurística en LR (ayudaban a encontrar cotas inferiores en cada iteración) para resolver el modelo llamado PLANWAR, donde estudian la importancia de la coordinación entre la planeación de la producción y la distribución, y el objetivo es determinar además del número de DCs, el número de plantas y las cantidades de los envíos necesarias para satisfacer la demanda minimizando los costos.

Hinojosa et al. [64] aportan como novedad que el modelo que plantean es multiproducto. Se intenta minimizar el costo total de instalación y uso de unos almacenes intermedios de distintos tipos de productos que tienen que cumplir las restricciones de producción y demanda de los clientes. Diseñan un heurístico inicial para calcular soluciones iniciales, y luego continúan mediante relajaciones lagrangianas.

Otras aplicaciones de esta técnica en problemas de producción-distribución pueden verse en autores como Barbarosoglu y Özgür [7], Pirkul y Jayaraman [52], Mazzola y Neebe [63], Yilmaz y Catay [96], entre otros.

### **2.9.4 Recocido Simulado**

El recocido simulado (SA) es una estrategia para modificar el estado de un material y alcanzar un estado óptimo mediante el control de la temperatura. El recocido comienza con el calentamiento del material a una alta temperatura, para luego enfriarlo lentamente, manteniendo en cada etapa una temperatura por cierto tiempo. Si la disminución de la temperatura es demasiado rápida, pueden originarse defectos en el material. Esta técnica de disminución controlada de la temperatura conduce a un estado sólido cristalizado, el cual es un estado estable y que corresponde a un mínimo absoluto de energía [31].

El método SA transpone el proceso de recocido a la solución de un problema de optimización, la función objetivo del problema, similar a la energía del material, es minimizada con la ayuda de una temperatura ficticia, la cual es un parámetro de control del algoritmo. Este parámetro debe tener el mismo efecto que la temperatura del sistema físico: conducir hacia el estado óptimo. Si la temperatura es disminuida gradualmente y de manera controlada se puede alcanzar el mínimo global, si es disminuida abruptamente se puede llegar a un mínimo local.

El SA puede ser formulado en términos de cadenas de Markov, lo cual ha permitido estudiar aspectos relativos a las configuraciones más adecuadas de la técnica y la convergencia del proceso de búsqueda.

El algoritmo de Metrópolis propuesto en 1953 es el pionero de los métodos de SA, pero Kirkpatrick y Gelatt fueron los primeros en aplicarlo a problemas de optimización para encontrar soluciones al problema del vendedor viajero con un número relativamente grande de ciudades [50].

Algunas aplicaciones del SA son: diseño de componentes electrónicos, Wavelets, procesamiento de imágenes, simulación física, distribución de recursos, Scheduling, criptografía, etc [28].

Antunes y Peeters utilizan el SA para resolver la planificación de la localización de las escuelas de enseñanza primaria en Portugal [3] y en [2] de forma dinámica.

Jayaraman y Ross [53] utilizan esta metaheurística, describen un modelo llamado PLOT para el diseño de sistemas de distribución, caracterizado por múltiples productos, una planta central, múltiples DCs y centros de crossdocking, con el objetivo de determinar la mejor configuración de la red de DCs y crossdocking y la cantidad de productos transportados, ellos compararon los resultados obtenidos con los óptimos (en LINGO) y encontraron diferencias menores al 4 %; sin embargo, el tiempo de solución oscilaba entre 300 y 400 veces menos.

### 2.9.5 Algoritmos Genéticos

Un algoritmo genético (GA) consiste en una función matemática o una rutina de software que toma como entradas a los ejemplares, evoluciona estos ejemplares y retorna como salidas a aquellos que deben generar descendencia para la nueva generación. De ello se desprende la idea de la supervivencia del más fuerte – soluciones mejores evolucionan a partir de generaciones anteriores hasta obtener una solución óptima próximo [33].

La forma más simple de GA utiliza tres tipos de operadores (generalmente de tipo probabilístico): la selección, cruce y la mutación [81].

**Selección o reproducción:** Este operador escoge cromosomas entre la población para efectuar la reproducción. Cuanto más capaz sea el cromosoma, más veces será seleccionado para reproducirse.

**Cruce:** Se trata de un operador cuya labor es elegir un lugar, y cambiar las secuencias antes y después de esa posición entre dos cromosomas, para crear nueva descendencia (por ejemplo, las cadenas 10010011 y 11111010 pueden cruzarse después del tercer lugar para producir la descendencia 10011010 y 11110011). Imita la recombinación biológica entre dos organismos haploides.

**Mutación:** Este operador produce variaciones de modo aleatorio en un cromosoma (por ejemplo, la cadena 00011100 puede mutar su segunda posición para dar lugar a la ca-

dena 01011100). La mutación puede darse en cada posición de un bit en una cadena, con una probabilidad, normalmente muy pequeña (por ejemplo 0.001).

Jang, Chang y Park [51] utilizan esta metaheurística para el diseño de una red de producción-distribución la cual es dividida en 4 módulos (abastecimiento, planeación de la producción y distribución de materiales de proveedores a clientes, administración y manejo de datos). El primer módulo fue resuelto con una heurística utilizando LR y el segundo módulo, debido a que la planeación de las actividades ocurre frecuentemente y el tiempo de toma de decisiones es corto, utilizó GAs lo que permite generar buenos resultados teniendo en cuenta la calidad y el tiempo.

Chau [20] ha utilizado los GAs en el problema de la localización dinámica de instalaciones de la construcción. Este modelo permite localizar instalaciones de distinta capacidad, pero con sólo una posible capacidad para cada instalación.

Min et al. [66] trabajan en un modelo entero no lineal para decidir la localización de centros de retorno dónde llevar los productos que devuelven los clientes. Los autores resuelven este problema mediante GAs, pero de nuevo el problema que resuelven es estático.

### **2.9.6 Búsqueda Tabú**

Búsqueda Tabú (TS) es un método metaheurístico el cual hace uso de una memoria flexible (o adaptativa) así como de estrategias especiales para la solución de problemas de optimización combinatoria discretos en donde el proceso de solución hace una búsqueda de todas las soluciones factibles y se detiene cuando ha encontrado la mejor de éstas, actualizando la mejor solución. Si la mejor solución obtenida es producto de un movimiento Tabú<sup>4</sup>, se actualiza la mejor solución y este movimiento deja de ser Tabú [90].

---

<sup>4</sup> La TS en una forma simple descubre dos de sus elementos claves: La de restringir la búsqueda mediante la clasificación de ciertos movimientos como prohibidos (es decir, Tabú) y el de liberar la búsqueda mediante una función de memoria de término corto que proporciona una “estrategia de olvido”.

Supóngase que se tiene un problema de minimización, que puede ser representado como un paisaje limitado por un territorio que define las soluciones factibles y que está conformado por montañas y valles, donde su altitud corresponde al valor de la función objetivo. En esta situación, el efecto de la memoria de corto plazo (lista Tabú) es visitar un valle y algunas veces cruzar hacia otros valles distintos. Con un número alto de movimientos Tabú es más probable visitar otros valles sin que se explore suficientemente el valle donde se encuentra. Por el contrario, si los movimientos son prohibidos durante pocas iteraciones habrá menos oportunidades de pasar a otros valles de los alrededores, porque es casi seguro que habrá un movimiento permitido que conducirá a una solución cercana a lo más profundo del valle actual [31].

Más formalmente, para longitudes pequeñas de la lista Tabú (pocos movimientos Tabú) la búsqueda se concentrará en áreas pequeñas del espacio de búsqueda y puede tender a visitar las mismas soluciones una y otra vez. En cambio, longitudes grandes obligan a que se visiten otras zonas del espacio de búsqueda y la oportunidad de visitar varias buenas soluciones es mayor. Sin embargo, el número de movimientos Tabú no debería ser muy grande, porque sería menos probable encontrar un buen óptimo local por falta de movimientos disponibles, en ese caso la búsqueda estaría dirigida por los pocos movimientos permitidos y no por el valor de la función objetivo.

Para aprovechar las ventajas de longitudes de la lista Tabú grandes y pequeñas, en implementaciones más avanzadas de búsqueda Tabú se permite que la longitud de la lista o período Tabú varíe en forma dinámica a lo largo de la ejecución del algoritmo. En tal sentido, varias metodologías pueden utilizarse, por ejemplo, la longitud de la lista se puede seleccionar en forma aleatoria dentro de un intervalo preestablecido. En algunas aplicaciones estas estrategias demostraron ser más eficientes que las listas Tabú de tamaño fijo.

Para mejorar la eficiencia del método se suele combinar con otros algoritmos de optimización [6]. Este método generalmente es usado para solucionar problemas de asignación de máquinas para la programación de la producción; sin embargo, un sinnúmero de investigaciones han abordado los problemas de localización y distribución de plantas (o instalaciones) a través del enfoque de TS.

En general, la búsqueda Tabú ha tenido mucho éxito en problemas de optimización combinatoria.

Glover [43] afirma haber resuelto problemas de planificación (por ejemplo: planificación de horarios, de máquinas, de fuerza de trabajo, etc.) cuya formulación mediante programación entera involucra entre uno y cuatro millones de variables en 22-24 minutos, usando sólo una computadora personal, y obteniendo resultados que se encuentran dentro del 98 % de límite superior de optimalidad. Tan sólidos resultados la hacen ver como una técnica de búsqueda muy prometedora dentro de la IO.

Marcela et al. [90] basaron también una heurística en LR y TS para resolver problemas de localización de plantas de producción, de dos escalones con restricciones de capacidad (CFLP).

Philippe et al. [5] implementan una metaheurística de TS paralelo en un red de estaciones de trabajo.

## 3. Modelo matemático del sistema de distribución en dos escalones

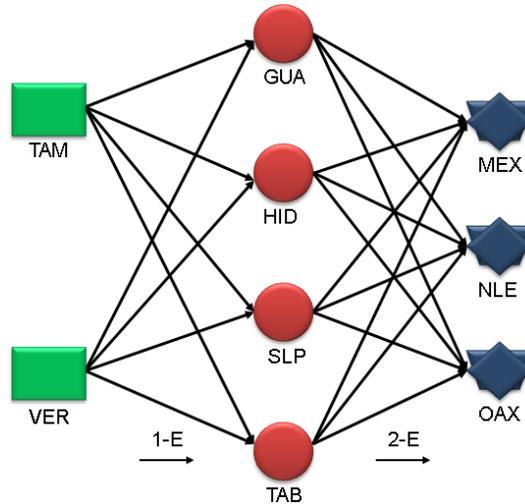
*“Optimizar es la ciencia de lo absoluto; satisfacer es el arte de lo factible.”*  
Samuel Eiton

### 3.1 Introducción

En el sistema de distribución multiproducto se elabora el modelo para el TEMC que es la generalización del problema de localización de instalaciones donde existe la necesidad de producir y distribuir múltiples productos, desde un conjunto de plantas a través de los DCs y finalmente, a los clientes o vendedores.

### 3.2 Definición, formulación y modelo matemático

El problema que se considera en este trabajo es el problema de localización de instalaciones de múltiples productos en dos escalones (TEMC), donde el primer escalón se refiere a las fábricas o plantas de fabricación de productos que son enviados a los DCs. El segundo escalón corresponde al flujo de productos desde los DCs a los clientes (véase figura 3-1). Hay varios productos básicos producidos en varias plantas con capacidad de producción conocidos. Existe una demanda conocida para cada producto en cada una de una serie de zonas de clientes, esta demanda se satisface mediante el envío a través de DCs regionales. Cada zona de clientes se asigna exclusivamente a un único DC. Hay límites inferiores así como superiores de la producción anual total permisible de cada DC. Se dan las posibles ubicaciones para los DCs, pero los sitios particulares para ser utilizados son seleccionados con el fin de minimizar el costo total de distribución. Los costos de los DCs se expresan como cambios fijos (impuestas por los sitios realmente utilizados) más un cambio de variable lineal. Los costos de transporte son lineales. El TEMC puede modelarse como problemas de MIP y es un problema NP-Duro [36].



**Figura 3-1.** Estructura del sistema de distribución TEMC.

Modificado de [58].

Puede ser definido con sujeción a las siguientes condiciones [12], [38], [59], [69]:

- Las ubicaciones de los clientes y su demanda son conocidos.
- Hay una serie de posibles ubicaciones para abrir DCs, así como sus capacidades máximas.
- Debe lograrse una utilización mínima de un almacén antes de que éste pueda abrirse.
- El número de los DCs abiertos no están definidos a priori.
- Cada sitio candidato tiene un costo fijo para la apertura de una instalación.
- Cada sitio tiene también un potencial de capacidad limitada.
- La demanda de todos los productos debe ser satisfecha de cada instalación, no puede exceder su capacidad.
- Todos los productos de un mismo cliente deben atenderse desde el mismo almacén.

Por lo tanto, el objetivo del problema es encontrar el número, tamaño y ubicación de los almacenes o DCs del sistema de distribución que reduzca al mínimo los costos fijos y variables de producción que dependan de la planta a utilizar y de la dimensión elegida a [74]:

- Maximizar el total cubierto de la demanda.

- Minimizar los costos totales de transporte-distribución que dependan básicamente de la distancia entre el cliente y la planta, los costos fijos para la apertura y funcionamiento de plantas y almacenes en el sistema de distribución.

En lo que sigue, en aras de la claridad, se supone que las instalaciones que se ubicarán son DCs suministrados directamente de las plantas de producción.

Este modelo de localización se siguió de la formulación propuesta por Ghiani [41], la que se presenta a continuación:

### **Símbolo Descripción**

#### Índices

- $k$  Subíndice asociado al producto;
- $i$  Subíndice asociado a la planta de producción;
- $j$  Subíndice asociado al DC;
- $r$  Subíndice asociado al cliente.

#### Conjuntos

- $K$  Número total de productos;
- $V_1$  Conjunto para las plantas de producción;
- $V_2$  Conjunto para los posibles DCs;
- $V_3$  Conjunto para las zonas de demanda.

#### Parámetros de entrada

- $c_{kijr}$  Costo unitario promedio de transporte de mercancía  $k \in K$  de la planta  $i \in V_1$  al punto de la demanda  $r \in V_3$  a través del DC  $j \in V_2$ ;
- $d_{kr}$  Cantidad de producto  $k \in K$  requerido por el punto de la demanda anual  $r \in V_3$ ;
- $f_j$  Costo fijo de los costos anuales de operaciones para un DC  $j \in V_2$ ;
- $P$  Límite superior en el número total para el DC  $j \in V_2$  que se puede abrir;
- $p_{ki}$  Cantidad máxima de producto  $k \in K$  que la planta  $i \in V_1$  puede fabricar;

- $q_j^-$  Costo mínimo permitido de operación anual para el DC  $j \in V_2$ ;
- $q_j^+$  Costo máximo permitido de operación anual para el DC  $j \in V_2$ ;
- $v_j$  Costo unitario variable de actividad para un DC  $j \in V_2$ .

#### VARIABLES DE DECISIÓN

- $x_{kijr}$  Variable continua que representa la cantidad de productos transportados  $k \in K$  desde la planta  $i \in V_1$  al punto de la demanda  $r \in V_3$  a través del DC  $j \in V_2$ ;
- $y_{jr}$  Variable binaria igual a 1 si el punto de la demanda  $r \in V_3$  se asigna a DC  $j \in V_2$ , 0 en caso contrario;
- $z_j$  Variable binaria igual a 1 si DC  $j \in V_2$  es abierto, 0 en caso contrario.

Usando la notación del epígrafe anterior, la función objetivo y las restricciones quedan como sigue:

#### MIN (COSTO TOTAL)

$$Z = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} \sum_{r \in V_3} c_{kijr} x_{kijr} + \sum_{j \in V_2} [f_j z_j + v_j \sum_{r \in V_3} (\sum_{k \in K} d_{kr}) y_{jr}] \quad (2.1)$$

sujeto a

$$\sum_{j \in V_2} \sum_{r \in V_3} x_{kijr} \leq p_{ki} \quad \forall k \in K, i \in V_1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in V_1} x_{kijr} = d_{kr} y_{jr} \quad \forall k \in K, j \in V_2, r \in V_3 \quad (2.3)$$

$$q_j^- z_j \leq \sum_{r \in V_3} (\sum_{k \in K} d_{kr}) y_{jr} \leq q_j^+ z_j \quad \forall j \in V_2 \quad (2.4)$$

$$\sum_{j \in V_2} z_j = p \quad (2.5)$$

$$\sum_{j \in V_2} y_{jr} = 1 \quad \forall r \in V_3 \quad (2.6)$$

$$x_{kijr} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in V_1, j \in V_2, r \in V_3 \quad (2.7)$$

$$y_{jr} \in \{0,1\} \quad \forall j \in V_2, r \in V_3 \quad (2.8)$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in V_2. \quad (2.9)$$

donde la función objetivo ( $Z$ ) minimiza (2.1) el costo total resultante de la suma de los costos de transporte o gastos de envío desde las plantas a través de los DCs hacia los clientes, los costos fijos de la localización de los DCs y los costos variables de los DCs. Restricción (2.2) afirma que la cantidad total de los productos  $k \in K$  enviados desde las plantas  $i \in V_1$  no pueden sobrepasar la capacidad de la planta para producir la mercancía. Restricción (2.3) afirma que el monto de los productos  $k \in K$  enviados a los clientes  $r \in V_3$  a través de los DCs  $j \in V_2$  debe ser igual a la cantidad de qué productos básicos producidos en todas las plantas que se destinan para los clientes y se envían a través de los DCs. Esta restricción establece que la demanda debe ser satisfecha en cada nodo cliente para cada una de las materias primas y también sirve como un enlace entre la restricción de la variable de flujo ( $x_{kijr}$ ) y a la asignación de la variable ( $y_{jr}$ ). Restricción (2.4) impone el límite inferior y superior en el rendimiento a cada DC que se utiliza. Satisface que los DCs abiertos que no excedan su límite superior. Esta restricción es muy importante cuando un administrador ha limitado capital disponible. Restricción (2.5) establece el número de plantas en desarrollo a abrir. Restricción (2.6) muestra que cada cliente es atendido por un solo DC. Restricción (2.7) de no negatividad de decisión. Finalmente (2.8) y (2.9) las variables binarias utilizadas en este modelo.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que este modelo satisface la condición equilibrada, ya que el problema no equilibrado puede ser cambiado a un equilibrado mediante la introducción de los proveedores ficticios o clientes ficticios.

### 3.3 Construcción del modelo

En esta sección se presentan algunas pruebas del modelo matemático para mostrar la aplicación a los diferentes casos de prueba y del enfoque de solución.

Una pequeña instancia del modelo, a manera de ejemplo, puede ser la siguiente:

$i = 2$  plantas de producción

$j = 4$  sitios potenciales para localizar DCs

$p = 2$  DCs por localizar

$r = 3$  clientes o vendedores

$k = 2$  productos

cuyo modelo de MBIP, se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & c_{1111}x_{1111} + c_{2111}x_{2111} + c_{1112}x_{1112} + c_{2112}x_{2112} + \\ & + \dots + c_{1243}x_{1243} + c_{2243}x_{2243} + f_1z_1 + \dots + f_4z_4 + \\ & + v_1(d_{11}y_{11} + d_{12}y_{11} + \dots + d_{31}y_{13} + d_{32}y_{13}) + \\ & + v_2(d_{11}y_{21} + d_{12}y_{21} + \dots + d_{31}y_{23} + d_{32}y_{23}) + \\ & \dots \\ & + v_4(d_{11}y_{41} + d_{12}y_{41} + \dots + d_{31}y_{43} + d_{32}y_{43}) \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_{1111} + x_{1112} + x_{1113} + \dots + x_{1141} + x_{1142} + x_{1143} &\leq p_{11} \\ x_{1211} + x_{1212} + x_{1213} + \dots + x_{1241} + x_{1242} + x_{1243} &\leq p_{21} \\ \dots & \\ x_{2211} + x_{2212} + x_{2213} + \dots + x_{2241} + x_{2242} + x_{2243} &\leq p_{22} \\ x_{1111} + x_{1211} &= d_{11}y_{11} \\ x_{1112} + x_{1212} &= d_{21}y_{12} \\ \dots & \\ x_{2143} + x_{2243} &= d_{32}y_{43} \\ d_{11}y_{11} + d_{21}y_{12} + d_{31}y_{13} &\geq q_1^- z_1 \\ d_{11}y_{21} + d_{21}y_{22} + d_{31}y_{23} &\geq q_2^- z_2 \\ \dots & \\ d_{12}y_{41} + d_{22}y_{42} + d_{32}y_{43} &\leq q_4^+ z_4 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 2 \\ y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} &= 1 \\ \dots & \\ y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} &= 1 \\ x_{1111}, x_{1112}, x_{1113}, x_{1121}, \dots, x_{2233}, x_{2241}, x_{2242}, x_{2243} &\geq 0 \\ y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{41}, y_{42}, y_{43} &\in \{0, 1\} \\ z_1, z_2, z_3, z_4 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

### 3.4 Instancias de aplicación

Supóngase el caso de una empresa petroquímica. La dirección de la empresa tiene la intención de renovar su red de producción y distribución, que actualmente se compone de dos plantas de refinación, dos DCs y cientos de puntos de venta (bombas de gas y minoristas de Gas Licuado del Petróleo – GLP). Después de una serie de reuniones, se decidió reubicar los DCs, dejando la posición y características de las dos plantas de producción sin cambios. Los productos del TEMC se subdividen en dos productos homogéneos (representados por los subíndices  $k = 1, 2$ ): combustible para el transporte del motor y el GLP (este último vendido en cilindros). Hay cuatro posibles emplazamientos adecuados para recibir un DC y, entre éstos, dos se debe seleccionar. Un DC es económicamente factible si su nivel de actividad es mayor que  $q_j^- = 1\,500\,000$  hectolitros por año y más bajo que  $q_j^+ = 2\,500\,000$  hectolitros por año; para los valores intermedios, el costo aumenta aproximadamente con una tendencia lineal caracterizado por un costo fijo de 10 millones de pesos anuales y por un costo marginal anual de \$ 0.35 por hectolitro.

El mercado se subdivide en tres distritos ( $r = 1, 2, 3$ ) caracterizado por valores de demanda diaria (en hectolitros por año) igual a

$$(d_{1r}) = (220000, 1050000, 1900000) \text{ y } (d_{2r}) = (900000, 300000, 500000).$$

La cantidad media diaria (en hectolitros por año) de las dos materias primas disponibles en las plantas de producción tienen las siguientes capacidades:

$$(p_{1i}) = (1500000, 2000000) \text{ y } (p_{2i}) = (800000, 950000).$$

Finalmente, los costos de transporte (en \$/hl/100) de mercancía son  $(c_{1ijr}) = \$ 0.74$  y  $(c_{2ijr}) = \$ 0.56$ , se obtienen multiplicando el costo por kilómetro y hectolitro por las distancias entre las plantas de producción y los puntos de demanda (RSs) a través de los DCs, todo esto se puede deducir de la tabla 3-1.

Por ejemplo,  $c_{1111} = 0.0074 \times 2 \times 936 = \$ 13.8528/\text{hl}$ .

**Tabla 3-1:** Distancias entre ubicaciones (km).

Plantas	DCs	Distritos de ventas ( $r = 1, 2, 3$ )		
1	1	936	1 363	1 426
	2	860	1 624	1 136
	3	790	981	1 281
	4	2 225	2 822	1 979
2	1	1 071	1 498	1 561
	2	618	1 382	894
	3	1 177	1 368	1 668
	4	1 412	2 009	1 166

Obtenemos estas distancias mediante el uso de los datos existentes de Internet (medida en km) [61].

*\* El anterior es un aproximado. Condiciones de la carretera, desvíos, las condiciones meteorológicas, tráfico, etc., afectan la distancia de conducción.*

Y todos los cálculos se basan en la carretera como la vía principal. Las desviaciones pueden fluctuar entre 5 y 20 km.

### 3.4.1 Primera instancia

Los subíndices empleados en la formulación se asocian de la siguiente forma:

$i$ : Subíndice asociado a la planta de producción

1 = Tamaulipas (TAM)

2 = Veracruz (VER)

$j$ : Subíndice asociado a los DCs que han de servirse

1 = Guanajuato (GUA)

2 = Hidalgo (HID)

3 = San Luis Potosí (SLP)

4 = Tabasco (TAB)

$r$ : Subíndice asociado a los clientes (RSs)

1 = Estado de México (MEX)

2 = Nuevo León (NLE)

3 = Oaxaca (OAX)

$k$ : Subíndice asociado a los productos

1 = Combustible para el transporte del motor

2 = GLP

Así, el modelo de MBIP es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 13.8528x_{1111} + 10.4832x_{2111} + 20.1724x_{1112} + 15.2656x_{2112} + \\ & + \dots + 17.2568x_{1243} + 13.0592x_{2243} + 392\,000y_{11} + 472\,500y_{12} + \\ & + \dots + 840\,000y_{43} + 10\,000\,000z_1 + \dots + 10\,000\,000z_4 \end{aligned}$$

sujepto a

$$x_{1111} + x_{1112} + x_{1113} + \dots + x_{1141} + x_{1142} + x_{1143} \leq 1\,500\,000$$

$$x_{1211} + x_{1212} + x_{1213} + \dots + x_{1241} + x_{1242} + x_{1243} \leq 2\,000\,000$$

...

$$x_{2211} + x_{2212} + x_{2213} + \dots + x_{2241} + x_{2242} + x_{2243} \leq 950\,000$$

$$x_{1111} + x_{1211} = 220\,000y_{11}$$

$$x_{1112} + x_{1212} = 1\,050\,000y_{12}$$

...

$$x_{2143} + x_{2243} = 500\,000y_{43}$$

$$1\,120\,000y_{11} + \dots + 2\,400\,000y_{13} \geq 1\,500\,000z_1$$

$$1\,120\,000y_{21} + \dots + 2\,400\,000y_{23} \geq 1\,500\,000z_2$$

...

$$1\,120\,000y_{41} + \dots + 2\,400\,000y_{43} \leq 2\,500\,000z_4$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} = 1$$

...

$$y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} = 1$$

$$x_{1111}, x_{1112}, x_{1113}, x_{1121}, \dots, x_{2233}, x_{2241}, x_{2242}, x_{2243} \geq 0$$

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{41}, y_{42}, y_{43} \in \{0, 1\}$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}.$$

El tiempo de solución fue de cero segundos y el reporte de la solución al modelo de la primera instancia es la siguiente:

La solución óptima tiene un costo diario de \$ 82 660 280, correspondiente a la segunda y la tercera de los DCs  $z_1^* = 0$ ,  $z_2^* = 1$ ,  $z_3^* = 1$ ,  $z_4^* = 0$  lo cual significa que se abren dos fábricas, una en la localización 2 y otra en la localización 3. Para las variables enteras  $y_{23}^* = y_{31}^* = y_{32}^* = 1$ , siendo las demás cero. El primer centro sirve a el tercer distrito de ventas, mientras que el segundo se utiliza para el primer y segundo distrito de ventas. Esto significa que los clientes 1 y 2 serán atendidos por la fábrica que se instale en la localización 3 y el cliente 3 será atendido por la fábrica que se instale en la localización 2.

Sin embargo, las variables de decisión  $x_{kijr}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 4$ ;  $r = 1, \dots, 3$ ; toman los siguientes valores (en hl por año):

$$\begin{array}{llll} x_{1131}^* = 220\,000 & x_{1132}^* = 1\,050\,000 & x_{1223}^* = 1\,900\,000 & \\ x_{2131}^* = 500\,000 & x_{2132}^* = 300\,000 & x_{2223}^* = 500\,000 & x_{2231}^* = 400\,000 \end{array}$$

Y que corresponden a TAM/SLP/MEX (columna uno), TAM/SLP/NLE (columna dos), VER/HID/OAX (columna tres) y VER/SLP/MEX (columna cuatro).

### 3.4.2 Segunda instancia

Para la segunda instancia, se consideran los costos más altos de localización en cada planta, de manera que los parámetros  $f_j$  asociados son los siguientes:

$$(f_j) = (10942000, 19808000, 18092000, 14198000).$$

Por tanto, cambian los parámetros de la función objetivo de la primera instancia y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 13.8528x_{1111} + 10.4832x_{2111} + 20.1724x_{1112} + 15.2656x_{2112} + \\ & + \dots + 17.2568x_{1243} + 13.0592x_{2243} + 392\,000y_{11} + 472\,500y_{12} + \\ & + \dots + 840\,000y_{43} + 10\,942\,000z_1 + \dots + 14\,198\,000z_4 \end{aligned}$$

El conjunto de restricciones no contiene modificaciones, por lo que la solución al modelo de la segunda instancia es la siguiente:

Se repite el reporte de la solución de la primera instancia. Excepto: la solución óptima tiene un costo diario de \$ 100 560 300. Aumentó el costo total.

Sin embargo, las variables de decisión  $x_{kijr}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 4$ ;  $r = 1, \dots, 3$ ; toman los siguientes valores (en hl por año):

$$\begin{aligned} x_{1131}^* &= 220\,000 & x_{1132}^* &= 1\,050\,000 & x_{1223}^* &= 1\,900\,000 \\ x_{2131}^* &= 600\,000 & x_{2132}^* &= 200\,000 & x_{2223}^* &= 500\,000 & x_{2231}^* &= 300\,000 & x_{2232}^* &= 100\,000 \end{aligned}$$

Y que corresponden a TAM/SLP/MEX (columna uno), TAM/SLP/NLE (columna dos), VER/HID/OAX (columna tres), VER/SLP/MEX (columna cuatro) y VER/SLP/NLE (columna cinco).

### 3.4.3 Tercera instancia

Para la tercera instancia se consideran los costos más bajos de localización en cada planta. Así, los parámetros asociados  $f_j$  son los siguientes:

$$(f_j) = (7156000, 8614000, 4708000, 7930000).$$

Por tanto, los parámetros de la función objetivo cambian nuevamente y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 13.8528x_{1111} + 10.4832x_{2111} + 20.1724x_{1112} + 15.2656x_{2112} + \\ & + \dots + 17.2568x_{1243} + 13.0592x_{2243} + 392\,000y_{11} + 472\,500y_{12} + \\ & + \dots + 840\,000y_{43} + 7\,156\,000z_1 + \dots + 7\,930\,000z_4 \end{aligned}$$

El conjunto de restricciones no contiene modificaciones, por lo que la solución al modelo de la tercera instancia es la siguiente:

Se repite el reporte de la solución de la primera instancia. Excepto: la solución óptima tiene un costo diario de \$ 75 982 280. Disminuyó el costo total.

Sin embargo, las variables de decisión  $x_{kijr}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 4$ ;  $r = 1, \dots, 3$ ; toman los siguientes valores (en hl por año):

$$\begin{aligned} x_{1131}^* &= 220\,000 & x_{1132}^* &= 1\,050\,000 & x_{1223}^* &= 1\,900\,000 \\ x_{2131}^* &= 800\,000 & x_{2223}^* &= 500\,000 & x_{2231}^* &= 100\,000 & x_{2232}^* &= 300\,000 \end{aligned}$$

Y que corresponden a TAM/SLP/MEX (columna uno), TAM/SLP/NLE (columna dos), VER/HID/OAX (columna tres), VER/SLP/MEX (columna cuatro) y VER/SLP/NLE (columna cinco).

### 3.4.4 Cuarta instancia

Los parámetros del modelo que observan la demanda  $d_{kr}$  y la oferta  $p_{ki}$  son los siguientes:

$$(d_{1r}) = (900000, 800000, 400000), (d_{2r}) = (700000, 800000, 500000) \text{ y } (p_{ki}) = (1200000).$$

Los parámetros de la función objetivo cambian nuevamente. A partir de este cambio en los niveles de producción y, por tanto, en las demandas de cada planta, se tiene el siguiente conjunto de restricciones que sustituyen a los conjuntos respectivos del modelo presentado en la primera instancia y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 13.8528x_{1111} + 10.4832x_{2111} + 20.1724x_{1112} + 15.2656x_{2112} + \\ & + \dots + 17.2568x_{1243} + 13.0592x_{2243} + 560\,000y_{11} + 560\,000y_{12} + \\ & + \dots + 315\,000y_{43} + 10\,000\,000z_1 + \dots + 10\,000\,000z_4 \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_{1111} + x_{1112} + x_{1113} + \dots + x_{1141} + x_{1142} + x_{1143} &\leq 1\,200\,000 \\ x_{1211} + x_{1212} + x_{1213} + \dots + x_{1241} + x_{1242} + x_{1243} &\leq 1\,200\,000 \\ \dots & \\ x_{2211} + x_{2212} + x_{2213} + \dots + x_{2241} + x_{2242} + x_{2243} &\leq 1\,200\,000 \\ x_{1111} + x_{1211} &= 900\,000y_{11} \\ x_{1112} + x_{1212} &= 800\,000y_{12} \\ \dots & \\ x_{2143} + x_{2243} &= 500\,000y_{43} \\ 1\,600\,000y_{11} + \dots + 900\,000y_{13} &\geq 1\,500\,000z_1 \\ 1\,600\,000y_{21} + \dots + 900\,000y_{23} &\geq 1\,500\,000z_2 \\ \dots & \\ 1\,600\,000y_{41} + \dots + 900\,000y_{43} &\leq 2\,500\,000z_4 \end{aligned}$$

El conjunto de restricciones contiene modificaciones, por lo que la solución al modelo de la cuarta instancia es la siguiente:

La solución óptima tiene un costo diario de \$ 65 573 720 correspondiente a la segunda y la tercera de los DCs  $z_1^* = 0$ ,  $z_2^* = 1$ ,  $z_3^* = 1$ ,  $z_4^* = 0$  lo cual significa que se abren dos fábricas, una en la localización 2 y otra en la localización 3. Para las variables enteras:  $y_{21}^* = y_{23}^* = y_{32}^* = 1$ , siendo las demás cero. El primer centro sirve a el primer y tercer distrito de ventas, mientras que el segundo se utiliza para el segundo distrito de ventas. Esto significa que los clientes 1 y 3 serán atendidos por la fábrica que se instale en la localización 2 y el cliente 2 será atendido por la fábrica que se instale en la localización 3.

Sin embargo, las variables de decisión  $x_{kijr}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 4$ ;  $r = 1, \dots, 3$ ; toman los siguientes valores (en hl por año):

$$\begin{aligned}
 x_{1121}^* &= 100\,000 & x_{1132}^* &= 800\,000 & x_{1221}^* &= 800\,000 & x_{1223}^* &= 400\,000 \\
 x_{2132}^* &= 800\,000 & x_{2221}^* &= 700\,000 & x_{2223}^* &= 500\,000
 \end{aligned}$$

Y que corresponden a TAM/HID/MEX (columna uno), TAM/SLP/NLE (columna dos), VER/HID/MEX (columna tres) y VER/HID/OAX (columna cuatro).

### 3.5 Código fuente en lenguaje LINGO

A continuación se presenta el código fuente en lenguaje LINGO del TEMC, de manera que nos sirva para cualquier otra tabla de datos de características similares (véase figura 3-2). En el ANEXO A se expone la forma de definir estos parámetros.

```

[ _1] MIN !Z; = @SUM(MATRIZ(i,j,r):CostoTransporte(i,j,r)*Distancia(i,j,r))+
[ _2] @SUM(DC(j):CostoFijo*LocalizarDC(j)+
[ _3] CostoMarginal*@SUM(Distritos(r):Demanda(r)*MoverRS(j,r)));
[ _4] @FOR(PLANTA(i): @SUM(ASIGNA(j,r):Distancia(i,j,r)) ≤ Capacidad(i));
[ _5] @FOR(ASIGNA(j,r): @SUM(PLANTA(i):Distancia(i,j,r))=Demanda(r)*MoverRS(j,r));
[ _6] @FOR(DC(j): @SUM(RS(r):(Demanda(r))*MoverRS(j,r)) ≥ q(j)*LocalizarDC(j));
[ _7] @FOR(DC(j): @SUM(RS(r):(Demanda(r))*MoverRS(j,r)) ≤ Q(j)*LocalizarDC(j));
[ _8] @SUM(DC(j):LocalizarDC(j))=P;
[ _9] @FOR(RS(r): @SUM(DC(j):MoverRS(j,r))=1);
[ _10] @FOR(MATRIZ(i, j, r): Distancia(i,j,r) ≥ 0);
[ _11] @FOR(DC(j): @BIN(LocalizarDC(j))); @FOR(ASIGNA(j,r): @BIN(MoverRS(j,r)));

```

**Figura 3-2.** Código fuente en lenguaje LINGO del TEMC.

donde la función objetivo (Z) minimiza el costo total resultante de la suma de los costos de transporte [ \_1], los costos fijos de la localización de los DCs [ \_2] y los costos variables de los DCs [ \_3]. Restricción [ \_4] de suministro (capacidad de producción). Restricción [ \_5] de la demanda. Restricciones [ \_6] y [ \_7] mantienen la actividad del almacén entre la actividad mínima y la capacidad. Restricción [ \_8] el número de plantas por localizar. Restricción [ \_9] establece que cada cliente debe ser servido por una sola planta. Restricción [ \_10] de no negatividad de decisión. Finalmente [ \_11] las variables binarias utilizadas en este modelo.

A manera de ejemplo, en la figura 3-3 se presenta la impresión de una solución dada por el algoritmo para la primera instancia conformada por dos plantas, cuatro instalaciones, tres clientes y dos productos.

Solución óptima global encontrada.		
Valor de la función objetivo:	82 660 280	
Cota de la función objetivo:	82 660 280	
Total de iteraciones:	23	
Tipo de modelo:	MIP	
Total de variables:	64	
Variables enteras:	16	
Total de restricciones:	89	
Total de no ceros:	280	
Variable	Valor <sup>5</sup>	Costo Reducido <sup>6</sup>
MOVERRS(HID, OAX)	1	30 985 680
MOVERRS(SLP, MEX)	1	14 828 400
MOVERRS(SLP, NLE)	1	20 313 720
DISTANCIA1(TAM, SLP, MEX)	220 000	0
DISTANCIA2(TAM, SLP, MEX)	500 000	0
DISTANCIA1(TAM, SLP, NLE)	1 050 000	0
DISTANCIA2(TAM, SLP, NLE)	300 000	0
DISTANCIA1(VER, HID, OAX)	1 900 000	0
DISTANCIA2(VER, HID, OAX)	500 000	0
DISTANCIA2(VER, SLP, MEX)	400 000	0
LOCALIZARDC(HID)	1	10 000 000
LOCALIZARDC(SLP)	1	10 000 000

Figura 3-3. Ejemplo archivo de texto arrojado por el algoritmo.

### 3.5.1 Comentarios finales

Debe observarse que el cambio en los valores de los parámetros del modelo conduce a distintos resultados. Es claro que podrían plantearse un sinnúmero de supuestos distintos y, por tanto, de variaciones de los parámetros del modelo matemático. Sin embargo, no es la intención del presente trabajo evaluar exhaustivamente las distintas posibilidades

<sup>5</sup> Contiene el valor óptimo de cada variable.

<sup>6</sup> El Costo Reducido indica la cantidad en que tendría que “mejorar” (aumentar en un máximo, disminuir en un mínimo) el coeficiente objetivo asociado para que resultase “rentable” asignar un valor no nulo a la variable.

que se pueden formular, sino que, al contrario, mostrar que el proceso de modelación es, esencialmente, un generador de conocimiento sobre el problema abordado, de manera que el proceso de modelar brindará elementos relevantes para el apoyo en la toma de decisiones finales.

Así, las cuatro instancias presentados pretenden dar a notar cómo a partir de un modelo pueden generarse cuestionamientos sobre los supuestos en los cuales se fundamenta el modelo del TEMC. Dichos cuestionamientos deben conducir a una evaluación más detallada de aspectos específicos que en un principio son calificados de manera cualitativa e, incluso, ignorados en algunas ocasiones.

Por último, lo que se desea compartir a través de esta primera instancia de aplicación es la evidencia de cómo la modelación matemática en los sistemas de distribución permite generar conocimiento sobre los distintos problemas que pueden abordarse a través de las herramientas matemáticas, en este caso la programación entera. Asimismo, mostrar que los modelos matemáticos de decisión proveen de elementos y datos que apoyan la toma de decisiones.

Cabe señalar que los resultados obtenidos en las cuatro instancias por el modelo matemático de programación entera son diferentes. Se concluye que el resultado del análisis propone la reubicación de dos DCs los cuales pertenecen a los estados de Hidalgo y San Luis Potosí.

## 4. Pruebas y Resultados

*“Cuán insensato es el hombre que deja transcurrir el tiempo estérilmente.”  
Johann Wolfgang von Goethe*

En este capítulo, se presentan aplicaciones de los resultados obtenidos en el capítulo 3, dando respuesta a los tres objetivos específicos planteados en un inicio de cada una de las instalaciones encontradas, para luego presentar las recomendaciones correspondientes para poder implementar las nuevas instalaciones. Recordemos que inicialmente se buscará la red de distribución óptima.

### 4.1 Introducción

Un buen experimento debe lograr imparcialidad y validez en las conclusiones y permitir que el experimento sea reproducible [8]. Los pasos que se siguieron para el desarrollo del experimento fueron los siguientes:

- Definición de objetivos del experimento.
- Descripción de la implementación del algoritmo (generación de instancias).
- Implementación del algoritmo.
- Análisis y representación gráfica de los resultados.

### 4.2 Implementación del algoritmo

#### 4.2.1 Ambiente computacional

Para resolver el problema del TEMC fue implementado en código LINGO y se utilizó LINGO 14.0 para resolver el problema generado. El proceso de experimento computacional se desarrolló en una máquina Acer Aspire One con un procesador 1.60 GHz con 1 GB de RAM. Los modelos se resolvieron en cero segundos.

El proceso que se siguió durante el experimento computacional fue el siguiente: una vez que se tuvo el modelo matemático, éste se implementó en LINGO, como problema se utilizó el problema TEMC propuesto por Ghiani [41], una vez que se tuvieron resultados el siguiente paso fue la implementación del modelo TEMC en LINGO. El paso siguiente fue obtener las instancias de prueba y los valores de los costos de localización, y que en específico son para el problema del TEMC.

Para definir los valores de los parámetros, se partió de la premisa de que las capacidades de producción deben ser al menos iguales a las demandas para cada uno de los productos, de lo contrario según las restricciones de la sección 3.2, no sería posible solucionar el problema. Adicionalmente los costos de localización deben ser comparativamente más altos a los costos de transporte por unidad transportada.

Generamos los costos de localización de las posibles instalaciones dados por el parámetro  $f_j$  entre en rango de [10000, 2000000], escritos de la siguiente manera en MATLAB:

```
a = 10000; b = 2000000;  
F = a + (b - a) * unidrnd (10, 1, 4)
```

Aquí, de los números del 1 al 10, escojo en forma aleatoria uniforme, un vector de 1 x 4. Análogamente se procede para generar los vectores de la demanda y de producción entre el rango de [30000, 2000000].

```
a = 30000; b = 2000000;  
D = a + (b - a) * unidrnd (10, 3, 2)
```

Una vez que MATLAB haya generado los vectores aleatorios se copian-pegan en LINGO y se corren en cada uno de los algoritmos. Dichas posibilidades o candidatos están definidos como las formas posibles de cumplir la demanda que se escogió anteriormente. Debido a que la demanda está ligada a un cliente y a un producto, se hace necesario evaluar las diferentes combinaciones de plantas e instalaciones. Puede pensarse hasta este punto que los valores que se asignan a las variables son los mismos de la demanda que se escogió en el principio de la iteración, sin embargo, los valores asignados

no son siempre iguales a este valor, ya que es posible que alguna de las plantas no tenga la capacidad suficiente para cumplir con la demanda.

### 4.3 Resultados

Interpretamos los resultados obtenidos de LINGO 14.0. Para hacer clara la representación del resultado arrojado por LINGO 14.0 se presenta la figura 4-1. Además, se representa el flujo de productos en la red por medio de líneas, la cuales finalizan con una flecha. El costo de transporte ( $Z_1$ ) es el costo más alto, el costo fijo ( $Z_2$ ) y el costo marginal ( $Z_3$ ) de los dos DCs elegidos: Hidalgo (HID) y San Luis Potosí (SLP) obtenido de la primera instancia. Además, la figura 4-2 muestra la solución gráfica obtenida de la primera instancia. Analíticamente se tiene:

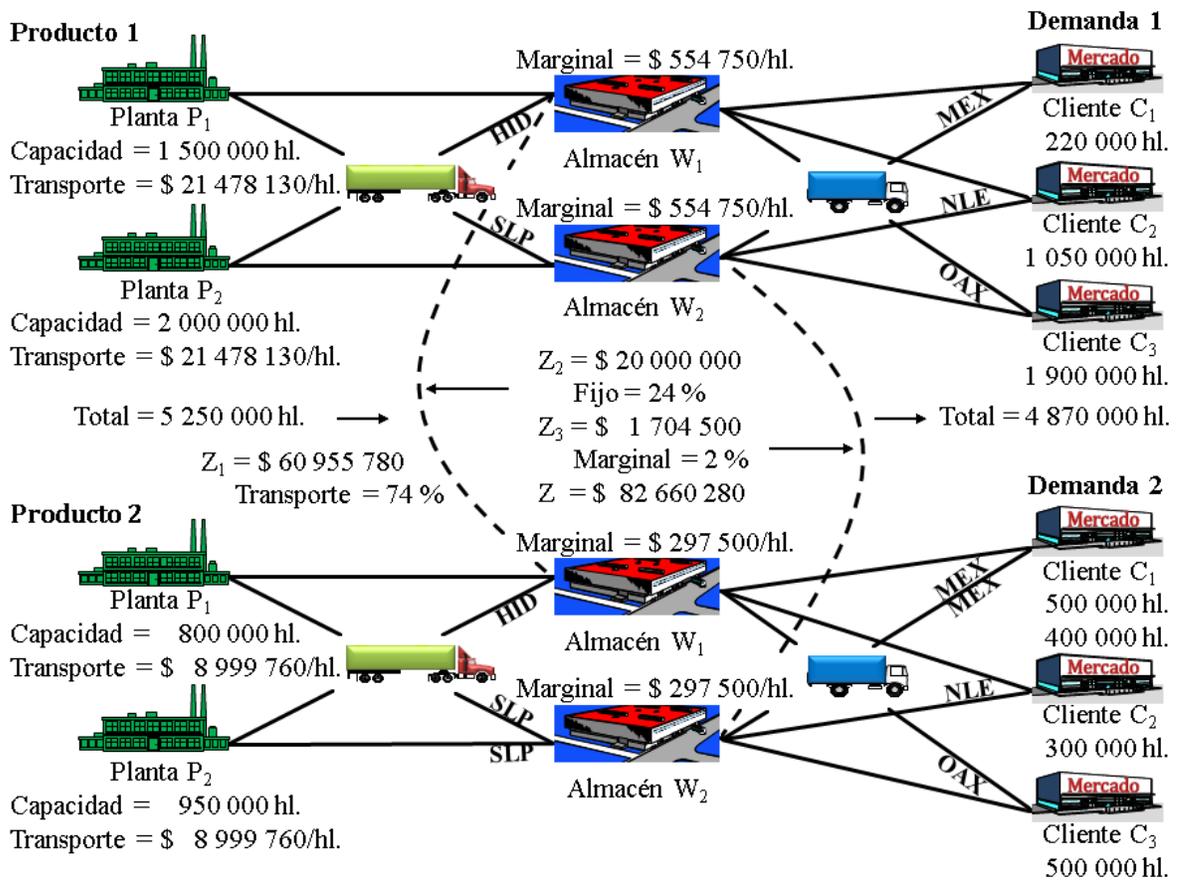
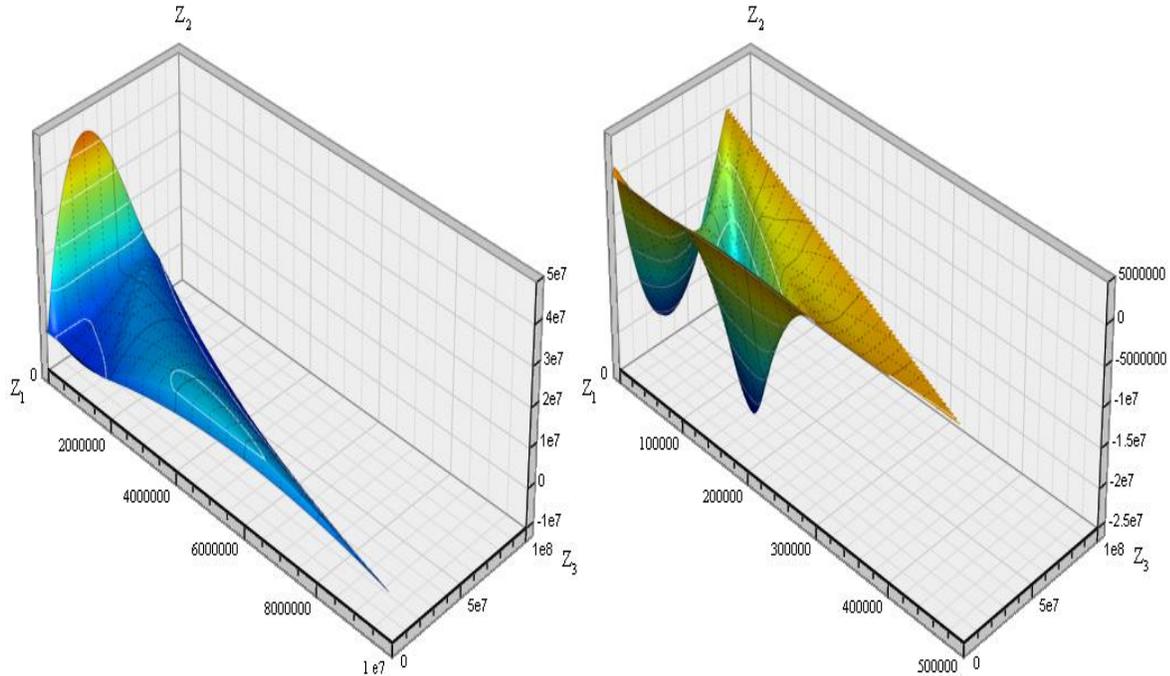


Figura 4-1. Un pequeño TEMC de la solución de la primera instancia.



**Figura 4-2.** Solución gráfica de la primera instancia.

La tabla 4-1 muestra un resumen de los valores obtenidos para la función objetivo del problema TEMC, la primera columna muestra las instancias, la segunda columna expone los valores obtenidos para la función objetivo del problema y la tercera columna expone los tiempos de ejecución de LINGO 14.0, mostrados de izquierda a derecha.

Además, puede notarse que los valores óptimos para las instancias primera y segunda están marcados con un asterisco, indicando que son los mejores valores que se obtuvieron por el algoritmo de BB.

**Tabla 4-1:** Valores obtenidos para la función objetivo del problema TEMC.

INSTANCIA	FUNCION OBJETIVO (\$)	TIEMPO DE EJECUCION
1	82 660 280*	00:00:00
2	100 560 300*	00:00:00
3	75 982 280	00:00:00
4	65 573 720	00:00:00

### 4.3.1 Análisis de resultados

En este sentido, la solución viable que utiliza el conjunto de DCs 2 y 3 es el costo más bajo en comparación con otras combinaciones que se muestran. Sin embargo, los tiempos de cálculo no difieren. Mediante el establecimiento de las demandas de los dos grupos de productos fue posible analizar la funcionalidad del modelo, así como identificar los posibles DCs para componer el sistema de distribución. En cualquier situación, el modelo del TEMC muestra resultados satisfactorios con respecto a la calidad de la solución y el tiempo de cálculo necesario para resolver las instancias. Por lo tanto, la necesidad de control de la empresa para gestionar el cuidado de las zonas de consumo, así como la necesidad de realizar estudios más precisos en cuanto a la demanda de cada producto.

Otro aspecto que merece ser mencionado con respecto al tiempo de respuesta se debe a la naturaleza de los problemas ya que como se menciona anteriormente están dentro de la clasificación de optimización combinatoria y dependiendo el tamaño de las instancias entre más grandes sean, es necesario consumir más tiempo para llegar a una solución, así que es preciso utilizar otro tipo de enfoque. Por ejemplo, las heurísticas o metaheurísticas, que permiten alcanzar buenos resultados en períodos de tiempo adecuados. Algunos enfoques que ya han sido utilizados para resolver estos problemas son: TS, búsqueda dispersa, LR, GRASP, entre otros [1], [25], [64]. Estos trabajos han mostrado buenos resultados para estos problemas, sin embargo, existen otros enfoques que pudieran proporcionar soluciones más eficientes, y ahí se encuentra una oportunidad de desarrollo, éstos son: SA, GAs, redes neuronales, inteligencia artificial, algoritmos inspirados en insectos (hormigas, termitas, abejas, etc.), entre muchos otros [25], [28], [64], [78].



## 5. Conclusiones y Trabajo Futuro

### 5.1 Conclusiones

Es importante destacar que la metodología de IO utilizada en este estudio nos permitió desarrollar formulaciones e implementaciones que mostraron buenos resultados para la viabilidad logística.

Durante la realización del presente proyecto pudimos apreciar de mejor manera las aplicaciones que la IO presenta para la industria, así como tener más conocimiento acerca del software presente en el mercado y que sirve como apoyo para el trabajo dentro de la IO. Como se puede observar en este caso, para la localización de centros de distribución y asignación de la demanda de los mismos, lo cual nos permite ofrecer un ejemplo tangible de aplicación, ya que en nuestro país no se dan a conocer casos de éxito en los que se hayan aplicado la IO, esto aunado a la falta de cultura y capacitación para la aplicación de la misma, ya que en la mayoría de las ocasiones cuando se presenta un problema se opta por opciones de solución que pueden parecer más sencillas y menos complicadas.

En este trabajo se estudió el modelo matemático de MBIP para el TEMC, el cual es un problema de localización de instalaciones de múltiples productos en dos escalones, utilizado para determinar la mejor configuración entre las plantas, centros de distribución y clientes de una cadena logística. Por lo tanto, el modelo determina la cantidad de materias primas que se deben proporcionar, así como qué los proveedores deben cumplir con cada una de las plantas de las exigencias de cada producto a cada zona de consumo, así como costos en línea con la propuesta minimizar el costo estratégico.

La revisión del estado del arte recopila la información acerca de lo que se ha trabajado del problema comenzando por los problemas de localización, su importancia y los

avances que se han presentado en esta línea de investigación; hasta la presentación de técnicas de solución para problemas similares al estudiado. Entre las más estudiadas se encuentran las técnicas de descomposición y aproximación (descomposición de Benders, ramificación y acotamiento, y relajación Lagrangiana) y algunas metaheurísticas como son recocido simulado, algoritmos genéticos y búsqueda Tabú.

Se implementa un código para resolverlo en LINGO 14.0, que utiliza el método de ramificación y acotamiento. El modelo propuesto contiene un total de 64 variables, 16 de ellas enteras y 48 continuas, así como 89 restricciones que fue resuelto en ¡cero segundos!, con 23 iteraciones y con una función objetivo la cual consiste en minimizar los costos totales.

El propósito de este proyecto fue encontrar la ubicación de plantas. Elegimos, para localizar dos centros de distribución, la primera planta ubicada en el estado de Hidalgo y la segunda ubicada en el estado de San Luis Potosí. Finalmente, se minimizó el costo total. Podemos deducir que LINGO es una herramienta muy útil y amigable para la solución de problemas de optimización discreta de tamaño moderado en un tiempo razonable.

Por tanto, se concluye que el objetivo del presente trabajo se ha alcanzado al mostrar la bondad de la programación entera en la modelación y la solución de problemas de decisión asociados a los sistemas de distribución y la utilidad de la información obtenida en el desarrollo del modelo matemático como apoyo en el proceso de la toma de decisiones.

## **5.2 Trabajo Futuro**

Como futuras líneas de investigación están la comparación entre el método de relajación Lagrangiana y el planteado basado en ramificación y acotamiento y, dada la similitud de la posible estructura de una solución, la resolución con la técnica de descomposición de Benders.

Proponer instancias de prueba de gran escala y utilizar procedimientos metaheurísticos como algoritmos genéticos, recocido simulado, búsqueda Tabú, entre otros.

## A. LINGO

LINGO (Linear, INteractive, and General Optimizer) es una herramienta de optimización basada en Fortran diseñado por LINDO Systems Inc. LINGO es un lenguaje “no procedimental” o de especificación; cuando introducimos un problema sólo podemos expresar lo que queremos, pero no cómo hacerlo; él se preocupa de cómo hacerlo. Es decir, “*nosotros le decimos a LINGO lo que queremos y él hace el resto*”. Con este programa expresamos nuestro problema de una forma sencilla, muy parecida a la escritura matemática habitual.

LINGO tiene incorporada una librería con funciones matemáticas, estadísticas y financieras que nos permiten expresar fórmulas complejas de una manera clara y sencilla. Podemos representar nuestros datos dentro del programa en forma natural como una lista, pero LINGO también puede leer los datos desde ficheros externos o desde hojas de cálculo.

Con LINGO podemos resolver tres tipos de modelos:

- **Modelos directos:** en estos modelos todos los valores de las variables pueden ser determinados directamente, sin recurrir al “solucionador” (en inglés *solver*). Con estos modelos LINGO funciona como una hoja de cálculo.
- **Modelos simultáneos:** están formados por ecuaciones interrelacionadas que **no** se pueden resolver por sustitución directa. LINGO utilizará el *solver* apropiado (dispone de cuatro *solver* distintos) para encontrar un conjunto de valores para las variables que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones.
- **Modelos de optimización:** están formados por una función objetivo a optimizar y restricciones; tanto la función objetivo como las restricciones están dadas por me-

dio de expresiones que contienen las variables de decisión del problema. Cuando ejecutamos un modelo de optimización, LINGO devuelve tanto un valor de cada variable de decisión como el correspondiente valor de la función objetivo (máximo o mínimo). La función objetivo se expresa mediante

$$\text{MAX} = \text{expresión}; \quad \text{o} \quad \text{MIN} = \text{expresión};$$

LINGO no exige que el formato de los problemas tenga una estructura determinada. Tenemos total libertad en la forma en que escribamos el problema; sin embargo, el sentido común nos aconseja que la estructura que demos a nuestros problemas deba ser aquella que proporcione mayor claridad a la hora de leerlos. También es importante que los identificadores de las variables nos ayuden a recordar lo que representan.

Las funciones que podemos utilizar con conjuntos son:

@FOR: Es utilizado para generar conjuntos de restricciones.

@SUM: Calcula la suma de una expresión sobre todos los miembros de un conjunto.

@MAX: Calcula el máximo de una expresión sobre todos los miembros de un conjunto.

@MIN: Calcula el mínimo de una expresión sobre todos los miembros de un conjunto.

Usando funciones de dominios para variables.

@FREE: Cualquier valor.

@GIN: Variable entera.

@BIN: Variable binaria.

@BND: Rango para la variable.

Los **conjuntos** son simplemente grupos de objetos relacionados. Un conjunto puede ser, por ejemplo, una lista de productos, tareas o plantas. Cada elemento del conjunto puede tener una o más características asociadas a él; las llamamos atributos. Estos atributos pueden ser datos o pueden ser variables [56]. LINGO reconoce dos tipos de conjuntos:

- **Primitivos:** Es un conjunto compuesto sólo de objetos que no pueden ser reducidos posteriormente. Ejemplo: El conjunto de “m” plantas.

SETS:

PLANTAS / 1..m/ : CAPACIDAD;

END SETS

- **Derivados:** Es definido a partir de uno o más conjuntos. Ejemplo: El conjunto formado por las rutas entre “n” DCs y “p” distritos.

SETS:

DC / 1..n/;

DISTRITO / 1..p/;

ASIGNA (DC, DISTRITO);

END SETS

Luego, se necesitará construir una sección de datos para ingresar el costo fijo, costo de almacén o marginal, costo de transporte, las capacidades de las plantas y las demandas de los clientes. Por ejemplo:

DATA:

CostoFijo      CostoMarginal =

?                    ?;

END DATA

Dado que los datos han sido definidos, se puede construir la función objetivo, cuyo objetivo está sustentado en minimizar la suma de costo fijo y almacén. Poniendo esto en sintaxis dentro de LINGO, se tiene:

```
MIN = @SUM(DC (j) : CostoFijo * LocalizarDC (j)
+CostoMarginal * @SUM (Distrito (r) : Demanda (r)*MoverRS (j,r)));
```

El siguiente paso será ingresar las restricciones de la demanda; como se muestra a continuación:

@FOR (ASIGNA (j,r): @SUM (PLANTA (i): Distancia (i,j,r))  
= Demanda (r)\*MoverRS (j,r));

Después, se deberá convertir la variable ASIGNA en la variable binaria, por medio de la función @BIN. Sin embargo, encajar la función @BIN en una función @FOR es una manera más eficiente de enlazar un sistema, como se muestra a continuación:

@FOR (ASIGNA (i,j,r): @BIN (MoverRS (j,r)));

Finalmente, incluir las restricciones lógicas.

## B. Factores que pueden influir en la decisión final

Tabla B-1: Centro de Distribución HID.

<b>DATOS GENERALES</b>
<p><b>Capital:</b> Pachuca</p> <p><b>Superficie:</b> 20 813 km<sup>2</sup></p> <p><b>Población:</b> 2 345 514 habs.</p> <p><b>Número de Municipios:</b> 84</p> <p><b>Ubicación:</b> En la región centro-oriental de México.</p>
<b>CLIMA DE NEGOCIOS</b>
<p>La calidad, aptitudes y habilidades de la fuerza laboral en Hidalgo le permiten desarrollarse en procesos de alta tecnología y han permitido la instalación en Hidalgo de empresas líderes en su ramo como Bombardier, Gunderson Greenbier, ASF Keystone (Grupo Amsted), Cementos Lafarge, Cargill, Grupo Bimbo, Procter &amp; Gamble y Bursatec.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• En materia de costos laborales, el Estado de Hidalgo está clasificado como una de las zonas más competitivas a nivel nacional.</li><li>• La industria manufacturera concentró 62.8 % de la inversión extranjera directa recibida por el estado en 2008, mientras que la minería concentró 34.7 %; el resto se dirigió a los sectores de construcción, comercio y servicios financieros.</li><li>• El estado de Hidalgo cuenta con una importante industria por su localización cercana al Distrito Federal. Es sede de las Cementeras Cruz Azul, Tolteca y Holcim Apasco; y las mineras Real del Monte y Pachuca (propiedad de Grupo Peñoles), Minera Autlan, Compañía Minera San Miguel, Las compañías lecheras Alpura, Real de Tizayuca y Santa Clara; de Totis, Devlyn, las textil Grypho, Toallas San Marcos y Cobertores San Luis.</li><li>• El sector más importante del estado es el de servicios, por la amplia presencia del ámbito comercial y el turismo.</li></ul>

**Tabla B-1:** (Continuación)

<b>UBICACION GEOGRAFICA ESTRATEGICA, INFRAESTRUCTURA Y COMUNICACIONES</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hidalgo se ubica en la región centro oriente del país. A 65 Kilómetros al norte del núcleo poblacional y económico más importante de la República Mexicana.</li> <li>• El Producto Interno Bruto (PIB) del estado ascendió a casi 170 mil millones de pesos en 2008, con lo que aportó 1.6 % al PIB nacional.</li> <li>• Las actividades terciarias, entre las que se encuentran los servicios inmobiliarios y el comercio, aportaron 50 % al PIB estatal en 2008.</li> <li>• Hidalgo cuenta con 865 kilómetros de vías férreas y posee 1 aeropuerto.</li> </ul>
<b>POTENCIAL DEL SECTOR PRIMARIO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El sector ganadero es importante, sobre todo en el ganado vacuno y ovino, aunque la producción avícola y apícola representan un fuerte ingreso. También existen diversas piscifactorías donde se crían principalmente truchas y carpas.</li> </ul>
<b>RECURSOS HUMANOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La población económicamente activa en Hidalgo es de 947 500 de la cual el 99.4 % es población económicamente ocupada.</li> <li>• Las regiones industrializadas presentan un índice de emigración reducido, lo que asegura una oferta estable de trabajadores, también gracias a una vinculación educativa que promueve el Gobierno del Estado.</li> <li>• El Estado cuenta con mano de obra altamente calificada para procesos industriales de alta tecnología. Cuenta con universidades Politécnicas con carreras especializadas diseñadas para empresas fabricantes de software y desarrollo de tecnología en procesos de ingeniería. Adicionalmente, cuenta con el Centro de Investigación Italo-Mexicano en Manufactura de Alta Tecnología Hidalgo (CIIMMATH), que está vinculado a la cadena productiva de la industria metalmecánica establecida en el estado.</li> <li>• Hidalgo reportó casi 1 millón de trabajadores en el tercer trimestre de 2009, principalmente en las actividades agropecuarias y la manufactura, lo que representó 3.8 % y 2.3 % respecto al personal ocupado en esos sectores a nivel nacional.</li> <li>• De un total de 91 602 egresados del área de ingeniería y tecnología en el país, 1 948 egresaron de Hidalgo, lo que representó 2.1 % del total, durante el ciclo escolar 2006-2007.</li> </ul>

**Tabla B-1:** (Continuación)

<b>CALIDAD DE VIDA</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La calidad de vida en Hidalgo es un factor relevante, al contar con centros urbanos que ofrecen alternativas residenciales, zonas comerciales y acceso a servicios de salud y educación de alta calidad.</li> </ul>
<b>INVERSION EXTRANJERA</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hidalgo recibió 40 millones de dólares por concepto de inversión extranjera directa (IED) en 2008, lo que representó 0.2 % de la IED recibida en México.</li> <li>• De acuerdo al estudio de Competitividad Estatal de México, llevado a cabo por el Instituto Mexicano para la Competitividad A.C., Hidalgo cuenta entre sus fortalezas con una favorable tasa neta de participación laboral de la mujer, lo que muestra una sociedad incluyente para el desarrollo profesional.</li> <li>• La entidad está clasificada también en la posición número 4 a nivel nacional en tener un sistema político estable, lo que permite un ambiente de paz social y gobernabilidad.</li> </ul>
<b>TURISMO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hidalgo es un estado lleno de historia y de manifestaciones culturales. Sus artesanías son la muestra de la gran creatividad e imaginación de los hidalguenses.</li> <li>• El estado de Hidalgo tiene recursos turísticos muy importantes que gracias a la cercanía con la ciudad de México son aprovechados de manera intensa.</li> <li>• El corredor turístico de la montaña incluye la región cercana a la ciudad de Pachuca, y al norte de la misma: el Bosque de El Chico (primer parque nacional) es otro de los atractivos más frecuentados del estado, así como los Prismas Basálticos de San Miguel Regla, los pueblos mágicos de Mineral del Monte y Huasca de Ocampo y el área natural protegida de la Barranca de Metztitán.</li> <li>• En otras regiones de la sierra están la Barranca de Tolantongo, el Parque Nacional Los Mármoles, la barranca del Río Moctezuma, las barrancas de los ríos Claro y Amajac.</li> <li>• Existen numerosas haciendas que destacan por su belleza, como las de Santa María Regla, San Miguel Regla. Asimismo son notables los conventos de los Santos Reyes en Metztitlán, Templo y Ex-Convento de Nicolás de Tolentino en Actopan. Cerca de Zempoala se encuentran los Arcos de Zempoala, también conocidos como Arcos del Padre Tembleque.</li> </ul>

**Fuente:** Tomado de [34], [88], [93].

**Tabla B-2:** Centro de Distribución SLP.

<b>DATOS GENERALES</b>
<p><b>Capital:</b> San Luis Potosí</p> <p><b>Superficie:</b> 63 068 km<sup>2</sup></p> <p><b>Población:</b> 2 410 414 hab.</p> <p><b>Número de Municipios:</b> 58</p> <p><b>Ubicación:</b> En la altiplanicie central mexicana.</p>
<b>CLIMA DE NEGOCIOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La ubicación geográfica de San Luis Potosí ofrece fácil y rápido acceso a los inversionistas, consumidores y proveedores. Ello permite operar a las empresas con costos y niveles de rentabilidad competitivos. Esto se sustenta en las riquezas naturales e infraestructura, así como en el trabajo de su población, avances continuos en la integración tecnológica de sus actividades industriales, comerciales y de servicios, extractivas y artesanales.</li> <li>• El Producto Interno Bruto (PIB) del estado ascendió a más de 198 mil millones de pesos en 2009, con lo que aportó 1.8 % al PIB nacional.</li> <li>• La industria manufacturera aportó 27 % al PIB estatal en 2009.</li> </ul>
<b>UBICACION GEOGRAFICA ESTRATEGICA, INFRAESTRUCTURA Y COMUNICACIONES</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• San Luis Potosí cuenta con 1 235 kilómetros de vías férreas.</li> <li>• Posee 2 aeropuertos, 1 internacional y 1 nacional.</li> <li>• San Luis Potosí es considerado el centro logístico del país. Los dos Recintos Fiscalizados Estratégicos (Refies) con que cuenta San Luis Potosí, representan una ventaja competitiva más para el estado, ya que son los primeros en operar en el país, y esta figura atrae inversiones productivas que no quieren ubicarse en la zona fronteriza.</li> <li>• Otra de las ventajas que ofrece el estado, son las vías de comunicación y la cercanía con los puertos más importantes, tanto del Golfo de México, como del Pacífico, así como la frontera norte del país, resultan competitivas para las empresas.</li> <li>• La capital potosina, cuenta con dos puertos intermodales muy importantes, que distribuyen mercancías producidas en San Luis Potosí y en otros estados, lo que constituye otra ventaja competitiva.</li> </ul>
<b>SECTOR MINERO</b>
<p>Otras actividades de menor relevancia son la ganadería, fruticultura, avicultura, apicultura, producción forestal, pesquera, minera, comercio, turismo e industria.</p>

**Tabla B-2:** (Continuación)

<b>RECURSOS HUMANOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• San Luis Potosí reportó cerca de un millón de trabajadores en el tercer trimestre de 2009, principalmente en el comercio y las actividades agropecuarias, lo que representó 2.1 % y 3.1 % respecto al personal ocupado en esos sectores a nivel nacional.</li> <li>• San Luis Potosí ofrece ventajas competitivas a las inversiones productivas, y entre ellas se encuentra el excelente clima laboral. Debido a las buenas relaciones entre el gobierno del estado, los inversionistas y las representaciones sindicales desde hace cuatro años, no ha estallado ninguna huelga a nivel estatal.</li> </ul>
<b>INVERSION EXTRANJERA</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• San Luis Potosí recibió 77 millones de dólares por concepto de inversión extranjera directa (IED) en 2009, lo que representó 0.3 % de la IED recibida en México.</li> <li>• La industria manufacturera concentró 98 % de la inversión extranjera directa recibida por el estado en 2008, el resto se dirigió al comercio.</li> </ul>
<b>TURISMO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desde las zonas Altiplano, Centro y Media, hasta llegar a la Huasteca, San Luis Potosí es un Estado diverso, un desafío constante a cada paso y cada mirada. Cuenta con oferta turística en todas sus vertientes: reuniones, aventura y naturaleza, ecoturismo, rural, cultural, religioso y deportivo.</li> <li>• La ciudad de San Luis Potosí enamora con su centro histórico, espacio para el caminar reposado que ofrece bellas miradas; la del día, surcada por un cielo azul infinito, bóveda perfecta para la arquitectura barroca y neoclásica, y; la noche, donde cada detalle resalta con el nuevo Plan Maestro de Iluminación Escénica en edificios y fachadas de gran valía para los potosinos.</li> <li>• La ciudad de San Luis Potosí confirma su vocación natural como destino de turismo de reuniones, sobre todo al contar próximamente con un moderno Centro de convenciones y Exposiciones, el cual cuenta con 45 mil metros cuadrados de construcción y una capacidad para albergar a 11 mil personas cómodamente ubicadas en un espacio de 10 mil metros cuadrados.</li> <li>• San Luis Potosí ofrece moderna infraestructura carretera, aeropuerto internacional, hoteles de primera categoría, y restaurantes para variedad de gustos.</li> <li>• Su multiplicidad geográfica ofrece al visitante opciones para todos los gustos. En el Altiplano tenemos pueblos mineros, señoriales haciendas, desierto y la magia de una mirada al pasado, con bellos y evocadores lugares como Real de Catorce, Charcas, Moctezuma, Venado y Guadalcázar.</li> </ul>

**Tabla B-2:** (Continuación)

- La Huasteca es una región de tierras húmedas e inmensos pastizales: ríos, cascadas, pozas, ojos de agua, grutas y sótanos abismales son ideales para disfrutar del rapel, rafting y tirolesa; o simplemente recorre los ríos color turquesa esmeralda en panga, desde Tamasopo, Ciudad Valles, Matlapa, Tamazunchale, Aquismón, El Naranjo y hasta San Martín. El centro histórico vislumbra un pasado que cobra vida, además de distinguirse por sus calles, fachadas y arquitectura. En el estado de San Luis Potosí existen espacios culturales como museos, teatros y galerías que asombran a propios extraños.
- Nada más llegar a San Luis Potosí salta a la vista la rica herencia histórica y artística con que cuenta el estado, ya que la influencia del pasado es notable incluso en las costumbres y modo de vida que prevalece hoy en día entre sus habitantes. La arquitectura colonial en la ciudad de San Luis es, sin duda alguna, ejemplo de belleza y originalidad en construcciones religiosas, entre las que predominan el Templo de la Virgen del Carmen, el Santuario de Guadalupe, la Capilla de Loreto y de Aranzazú.
- Otros atractivos del estado son los afamados balnearios de aguas termales como el Taninul y el Bañito, así como las imponentes cascadas: Tamul y Micos, ubicadas en el municipio de Ciudad Valles. Además de su arquitectura y sus manantiales, San Luis cuenta con hermosas manifestaciones de su pasado prehispánico, testimonios virreinales, esplendores naturales y artesanías.

**Fuente:** Tomado de [34], [88], [92].

## Referencias

- [1] Alegre, J., Aragón, A., Casado, S., Delgado, C., & Pacheco, J. (2003). *Resolución de 2 modelos de localización mediante Búsqueda Dispersa*. Recuperado el 14 de Agosto de 2014, de <http://www.uv.es/asepuma/XV08.pdf>
- [2] Antunes, A., & Peeters, D. (2000). A dynamic optimization model for school network planning. *Socio\_economic Planing Sciences* 34, 101-120.
- [3] Antunes, A., & Peteers, D. (2001.). On solving complex multi-period location models using simulated annealing. *European Journal of Operational Research*, 130, 190-201.
- [4] Araya, M. G. (2014). *Academia.edu*. Recuperado el 25 de 04 de 2014, de Análisis de modelos de localización para apoyar la distribución de bins en huertos de manzanas: [http://www.academia.edu/1403072/ANALISIS\\_DE\\_MODELOS\\_DE\\_LOCALIZACION\\_PARA\\_APOYAR\\_LA\\_DISTRIBUCION\\_DE\\_BINS\\_EN\\_HUERTOS\\_DE\\_MANZANAS](http://www.academia.edu/1403072/ANALISIS_DE_MODELOS_DE_LOCALIZACION_PARA_APOYAR_LA_DISTRIBUCION_DE_BINS_EN_HUERTOS_DE_MANZANAS)
- [5] Badeau, P., Guertin, F., Gendreau, M., Potvin, J.-Y., & Taillard, E. (1997). A Parallel Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Transpn. Res.-C, Vol. 5 (2)*, 109-122.
- [6] Bai, X., & Shahidehpour, S. M. (1996). Hydro-Thermal Scheduling by Tabu search and Decomposition Method. *IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11 (2)*, 968-974.
- [7] Barbarosoglu, G., & Özgür, D. (1999). Hierarchical design of an integrated production and 2-echelon distribution system. *Europen Journal of Operational Research*, 464-484.
- [8] Barr, R. S., Golden, B. L., Kelly, J. P., Resende, M. G., & Stewart, W. R. (1995). Designing and Reporting on Computational Experiments with Heuristics Methods. *Kluwer Academic Publishers*, 9-32.
- [9] Beamon, B. M. (1998). Supply Chain Design and Analysis: Models and Methods. *International Journal of Production Economics, Vol. 55, No. 3*, 281-294.

- [10] Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik* 4, 238-252.
- [11] Blazewicz, J., Ecker, K., Pesch, E., Schmidt, G., & Weglarz, J. (2007). *Handbook on scheduling: From theory to applications*. Berlin: Springer.
- [12] Brito, I. d., Yoshizak, H. T., & Belfiore, P. (2011). A multi-commodity two-stage production-distribution system design problem: the impact of different customs systems. *POMS 22nd Annual Conference*, (págs. 1-20). Reno, Nevada, U.S.A.
- [13] Brucker, P. (2007). *Scheduling Algorithms. Fifth Edition*. New York: Springer.
- [14] Buzai, G. D. (1995). Los modelos de localización-asignación. *Serie Geográfica n° 5*, 1-19.
- [15] Caballero, J. A., & Grossmann, I. E. (2007). Una revisión del estado del arte en Optimización. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática e Industrial, Vol. 4 (1)*, 5-23.
- [16] Carrizosa, E. (2005). Algunas aportaciones de la investigación operativa a los problemas de localización. *International Review of Geographical Information Science and Technology*, 268-277.
- [17] Castillo, J. M. (2014). *Universidad Peruana los Andes virtual*. Recuperado el 03 de Octubre de 2014, de <http://distancia.upla.edu.pe/libros/sistemas/05/INVESTIGACION%20OPERATIVA%20II.pdf>
- [18] Castro, A. (13 de 07 de 2011). *Lab. Algoritmos computacionales*. Recuperado el 25 de Enero de 2014, de <http://btocastro.blogspot.com/2011/07/complejidad-computacional.html>
- [19] Chappell, M., Halpenny, B. B., Campbell, B. D., & Derrick. (2013). *Teoría de la complejidad computacional, Problemas computacionales, Los modelos de máquinas y las medidas de complejidad, Clases de complejidad, Problemas abiertos importantes, Dificultad, Teoría de la complejidad continua, Historia*. Recuperado el 25 de Enero de 2014, de [http://centrodearticulos.com/articulos-utiles/article\\_112504.html](http://centrodearticulos.com/articulos-utiles/article_112504.html)
- [20] Chau, K. W. (2004). A two-stage dynamic model on allocation of construction facilities with genetic algorithm. *Automation in Construction* 13, 481-490.
- [21] Chopra, S. M. (2001). *Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. 2ª Edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

- [22] Clay, L. T. (09 de 1998). Recuperado el 25 de Enero de 2014, de [http://www.claymath.org/millennium/P\\_vs\\_NP/](http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/)
- [23] Current, J. D. (2001). Discrete Network Location Models. *Facility Location Theory: Applications and Methods*, 85-112.
- [24] Dakin, R. J. (1965). A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. *Computer Journal*, Vol. 8 (3), 250-255.
- [25] Dasci, A., & Verter, V. (2001). Theory and Methodology: A continuous model for production-distribution system design. *European Journal of Operational Research* 129, 287-298.
- [26] Daskin, M. S. (1995). *Network and Discrete Location. Models, Algorithms, and Applications*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- [27] Daskin, M. S. (2003). Facility Location in Supply Chain Design. *Working paper, 03-010*, 1-38.
- [28] Díaz, A., Glover, F., Ghaziri, H. M., González, J., Laguna, M., Moscato, P., y otros. (1996). *Optimización Heurística y Redes Neuronales en Dirección de Operaciones e Ingeniería*. Parainfo: España.
- [29] Díaz, F. V. (18 de 07 de 2014). *Blogs Institucional de monografías*. Recuperado el 24 de Septiembre de 2014, de <http://www.monografias.com/trabajos40/localizacion-planta/localizacion-planta.shtml>
- [30] Dogan, K., & Goetschalckx, M. (1999). A primal decomposition method for the integrated design of multi-period production±distribution systems. *IIE Transactions* 31, 1027-1036.
- [31] Dréo, J., Pétrowski, A., Siarry, P., & Taillard, E. (2006). *Metaheuristics for Hard Optimization*. Berlin: Springer-Verlag.
- [32] F. J. Vasko, D. N. (2003). A large-scale application of the partial coverage uncapacitated facility location problem. *Journal of the Operational Research Society*, 11-20.
- [33] Galeon, E. A. (2014). *Algoritmos genéticos*. Recuperado el 08 de Octubre de 2014, de <http://eddyalfaro.galeon.com/geneticos.html>
- [34] García, F. (2014). *ProMéxico*. Recuperado el 23 de Septiembre de 2014, de <http://www.promexico.gob.mx/>

- [35] García, J. P. (04 de 05 de 2014). *Introducción al diseño de sistemas productivos y logísticos*. Recuperado el 02 de Noviembre de 2014, de <http://personales.upv.es/jpgarcia/LinkedDocuments/1%20Introduccion.pdf>
- [36] Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: Macmillan Higher Education.
- [37] Garrido, R. (2001). *Modelación de Sistemas de Distribución de Carga*. Santiago: Universidad Católica de Chile.
- [38] Gen, M., Cheng, R., & Lin, L. (2008). *Network Models and Optimization. Multiobjective Genetic Algorithm Approach*. London: Springer.
- [39] Geoffrion, A. M. (1972). Generalized Benders Decomposition. *Journal of optimization theory and applications: Vol. 10 (4)*, 237-260.
- [40] Geoffrion, A. M., & Graves, G. W. (1974). Multicommodity Distribution System Design by Benders Descomposition. *Management Science, Vol. 20, No. 5*, 822-844.
- [41] Ghiani, G. (2004). Introduction to Logistics Systems Planning and Control. En *3.4 Two-Echelon Multi Commodity Location Models* (págs. 95-107). Great Britain: John Wiley & Sons Ltd.
- [42] Gisbert, M. L. (1993). Las Teorías de Localización Industrial: una breve aproximación.\*. *Estudios Regionales N° 35*, 51-76.
- [43] Glover, F. (1990). Tabu Search: A Totorial. *Interfaces 20 (4)*, 74-94.
- [44] Gutiérrez Andrade, M. Á., Silva, S. D., & Goddard, B. R. (2000). Un problema de localización de plantas de gran escala. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 7(1-2)*, 117-124.
- [45] Hakimi, S. L. (1964). Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research 12(3)*, 450-459.
- [46] Hakimi, S. L. (1965). Optimum location of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems. *Operations Research, 13*, 462-475.
- [47] Hale, T., & Moberg, C. (2003). *Location science research: A review. Annals of Operations Research, 123(1)*, 21-35.
- [48] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones, Novena edición*. México: McGraw-Hill.

- [49] Hugos, M. (2003). *Essentials of Supply Chain Management*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- [50] ITESM. (2008). Recocido Simulado. *Departamento de Matemáticas, CSI*, 1-2.
- [51] Jang, Y.-J., Jang, S.-Y., Chang, B.-M., & Park, J. (2002). A combined model of network design and production/distribution planning for a supply network. *Computers & Industrial Engineering* 43, 263-281.
- [52] Jayaraman, V., & Pirkul, H. (2001). Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities. *European Journal of Operational Research*, 133, 394-408.
- [53] Jayaraman, V., & Ross, A. (2003). Production, Manufacturing and Logistics: A simulated annealing methodology to distribution network design and management. *European Journal of Operational Research* 144, 629-645.
- [54] K. S. Hindi, T. B. (1994). Efficient Solution of a Multi-commodity, Two-stage Distribution Problem with Constraints on Assignment of Customers to Distribution Centres. *International Transactions in Operations Research*, 5(6), 519-527.
- [55] Krajewski, L. J. (2000). *Administración de operaciones: Estrategia y análisis*. México: Pearson.
- [56] Laguna, J. G. (18 de 12 de 2006). *Estadística e Investigación Operativa*. Recuperado el 23 de mayo de 2014, de <http://www.eio.uva.es/~laguna/io21/Lingo02.doc>
- [57] Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, Vol. 28 (3), 497-520.
- [58] Love, R. F., Morris, J. G., & Wesolowsky, G. O. (1988). *Facilities location. Models & Methods. Volume 7*. New York: North-Holland.
- [59] M. Saeed Jabalameli, B. B. (2010). Capacitated Facility Location Problem with Variable Coverage Radius in Distribution System. *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, 1-7.
- [60] M.T. Melo, S. N. (2001). Large-scale models for dynamic multi-commodity capacitated facility location. *Fraunhofer*, 1-51.
- [61] Mark, L. (2013). *Buscador de distancia*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2014, de Calculadora de distancia: <http://www.distanciasentre.com/>

- [62] Martínez, R. H., & Suazo, R. J. (2004). The facility location decisions in the supply chain. *Revista Ingeniería Industrial - Año 3, N° 1- Segundo Semestre*, 57-68.
- [63] Mazzola, J. B., & Neebe, A. W. (1999). Lagrangian-relaxation-based solution procedures for a multiproduct capacitated facility location problem with choice of facility type. *European Journal of Operational Research* 115, 285-299.
- [64] Mier, M. O., & Sánchez, Á. G. (2005). Revisión bibliográfica del problema multiperiodo de localización de instalaciones con capacidades distintas. *IX Congreso de Ingeniería de Organización*, 1-9.
- [65] Miguel, A. S., Espino, A., Martínez, J., Jiménez, B., & Weber, J. (25 de 09 de 2012). *Tema 8: Complejidad computacional*. Recuperado el 25 de Enero de 2014, de <http://ocw.uc3m.es/ingenieria-informatica/teoria-de-automas-y-lenguajes-formales/material-de-clase-1/tema-8-complejidad-computacional>
- [66] Min, H., Ko, H. J., & Ko, C. S. (2006). A genetic algorithm approach to developing the multi-echelon reverse logistics network for product returns. *Omega*, 34(1), 56-69.
- [67] Monca, E. (2014). *Localización de la Planta Final*. Recuperado el 15 de Julio de 2014, de <http://es.scribd.com/doc/46748551/Localizacion-de-La-Planta-1-Final>
- [68] Mota, I. F. (1990). Apuntes de programación entera. En UNAM. México.
- [69] Olivares Benitez, E. G. (2010). A supply chain design problem with facility location and bi-objective transportation choices. 729-753.
- [70] Olvera, L. D. (30 de 10 de 2009). *Teoría de Lugares Centrales*. Recuperado el 24 de Junio de 2014, de <http://www.angelfire.com/ma2/geouruguayleo/newlugcen.html>
- [71] Ortiz, M. (14 de 07 de 2011). *Complejidad Computacional*. Recuperado el 25 de Enero de 2014, de <http://mauortiz117.blogspot.mx/2011/07/complejidad-computacional.html>
- [72] Pereira, U. T. (2011). Location and optimal sizing problem in distribution systems using the P-median Model and Solved through Ant Colony Algorithm. *Scientia et Technica Año XVI, No. 48*, 287-297.
- [73] Pinedo, M. L. (2008). *Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems, Third Edition*. New York: Springer.

- [74] Pirkul, H. V. (1996). Production, Transportation, and Distribution Planning in a MultiCommodity Tri-Echelon System. *Transportation Science*. *Computer Operational Research*, 30(4), 291-302.
- [75] Pirkul, H., & Jayaraman, V. (1998). A Multi-commodity, Multi-plant, capacitated facility location problem: Formulation and efficient heuristic solution. *Computers Ops Res. Vol. 25 (10)*, 869-878.
- [76] Plaza, S. (14 de 12 de 2012). *Unidad II.- Complejidad computacional*. Recuperado el 25 de Enero de 2014, de <http://sergioptoro.wordpress.com/complejidad-computacional/>
- [77] Podhuvan, S. (20 de 02 de 2014). *Teoría de la localización de von Thünen*. Recuperado el 06 de Junio de 2014, de [es.wikipedia.org/wiki/Teoría\\_de\\_la\\_localización\\_de\\_von\\_Thünen](http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_la_localización_de_von_Thünen)
- [78] Poole, D., & Mackworth, A. (2010). *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Canada: Cambridge University Press.
- [79] Prawda, J. (2004). *Métodos y modelos de investigación de operaciones. Modelos determinísticos, Vol. 1 (Vol. 1)*. México: Limusa.
- [80] Robinson, L. G. (1994). Uncapacitated facility location: General solution procedure. *European Journal of Operational Research*, 76:410–427.
- [81] Rodríguez-Piñero, P. T. (2014). *Introducción a los algoritmos genéticos y sus aplicaciones*. Recuperado el 08 de Octubre de 2014, de <http://www.uv.es/asepuma/X/J24C.pdf>
- [82] Rosenfeld, R., & Irazábal, J. (2013). *Computabilidad, complejidad computacional y verificación de programas*. Buenos Aires, Argentina: Edulp.
- [83] Ruiz, A. L., & Juan, P. T. (2003). *Investigación operativa para ingenieros*. Reproval, S.L.: Universidad Politécnica de Valencia.
- [84] Santiago. (12 de 01 de 2007). *Teoría de la localización industrial*. Recuperado el 28 de Mayo de 2014, de <http://geografia.laguia2000.com/economia/teoria-de-la-localizacion-industrial>
- [85] Sendra, J. B., & Maass, S. F. (1995). Modelos de localización-asignación y evaluación multicriterio para la localización de instalaciones no deseables. *Serie Geográfica, n° 5,*, 97-112.
- [86] Shapiro, J. F. (2000). *Modeling the Supply Chain*. United States of America: Thomson.

- [87] Simchi-Levi, D., Chen, X., & Bramel, J. (1997). *The Logic of Logistics: Theory, Algorithms, and Applications for Logistics and Supply Chain Management, Second Edition*. New York, Inc: Springer-Verlag.
- [88] SRE. (02 de 04 de 2013). *Secretaría de Relaciones Exteriores*. Recuperado el 22 de Septiembre de 2014, de <http://www.sre.gob.mx/>
- [89] Troncoso, J., Garrido, R., & J, X. I. (2002). Facilities Location Models: An Application for the Forest Production and Logistics. *Bosque*,23(2), 57-67.
- [90] Villa, M., Leguizamón, G., & Niño, K. (2010). Solución al problema de localización (CFLP) a través de Búsqueda Tabú y Relajación Lagrangeana, caso de estudio: Industria de productos alimentarios. *Departamento de Ingeniería Industrial. Universidad de los Andes, Bogotá D.C., Colombia*,1-7.
- [91] Wales, J. (09 de 03 de 2013). *Clases de complejidad*. Recuperado el 09 de Marzo de 2014, de <http://es.wikipedia.org/wiki/NP-hard>
- [92] Wales, J., & Sanger, L. (15 de 09 de 2014). *San Luis Potosí*. Recuperado el 22 de Septiembre de 2014, de [http://es.wikipedia.org/wiki/San\\_Luis\\_Potos%C3%AD](http://es.wikipedia.org/wiki/San_Luis_Potos%C3%AD)
- [93] Wales, J., & Sanger., L. (17 de 09 de 2014). *Estado de Hidalgo*. Recuperado el 22 de Septiembre de 2014, de [http://es.wikipedia.org/wiki/Estado\\_de\\_Hidalgo](http://es.wikipedia.org/wiki/Estado_de_Hidalgo)
- [94] Waters, D. (2007). *Global Logistics: New Directions in Supply Chain Management, 5th ed*. Great Britain: Reviews.
- [95] Wildbore, B. L. (2008). Theoretical and Computational Analysis of the Two-Stage Capacitated Plant Location Problem. *Doctoral Thesis, Massey University*.
- [96] Yilmaz, P., & Catay, B. (2006). Strategic level three-stage production distribution planning with capacity expansion. *Computers & Industrial Engineering* 51, 609-620.

