

ANÁLISIS A UN MODELO DE INHIBICIÓN  
MUTUA EN NEUROCIENCIA

TESIS QUE PRESENTA

MICHELLE ROJAS CISNEROS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

DIRECTORES DE TESIS

DRA. LAURA ROCIO GONZÁLEZ RAMÍREZ  
DR. GERARDO FRANCISCO TORRES DEL CASTILLO



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
<http://www.fcfm.buap.mx/>  
Julio 2017

Michelle Rojas Cisneros : *Análisis a un Modelo de Inhibición Mutua en Neurociencia* , Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas © Julio 2017.

E-MAIL:

[mrojascisneros806@gmail.com](mailto:mrojascisneros806@gmail.com)

---

## AGRADECIMIENTOS

El trabajo presente es dedicado a mi madre, por el apoyo y cariño que me brinda siempre. A la Dra. Laura Rocio, por la motivación e inspiración de realizar matemáticas aplicadas; y al Dr. Gerardo Torres por la fascinación a las ecuaciones diferenciales.

Agradezco al Dr. Jorge Velázquez, al Dr. Jacobo Oliveros y al Dr. Juan A. Escamilla por las correcciones y consejos que permitieron culminar esta tesis. Así también, agradezco a gente de Puebla y Morelia por su amistad y apoyo durante la licenciatura.



# ÍNDICE GENERAL

1	PRELIMINARES	3
1.1	Conceptos Básicos	3
1.1.1	Neuronas: Función y Estructura	3
1.1.2	Sinapsis y Tipo de Sinapsis	4
1.1.3	Potencial de Acción	5
1.2	Modelo de Hodgkin–Huxley	6
2	MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA DE DOS NODOS	11
2.1	Introducción	11
2.2	Conectividad de red y ecuaciones dinámicas	12
2.2.1	Aproximación de $F(g_I, g_E) \approx f(-g_I + \lambda g_E)$	14
3	MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA PARA UNA DESCRIPCIÓN NEURONAL COGNITIVA	15
3.1	Introducción	15
3.2	Descripción del experimento	15
3.3	Resultados del Experimento	16
3.4	Modelo	17
4	ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA	21
4.1	Análisis del Modelo	21
4.1.1	Cálculo y análisis de estabilidad de los puntos fijos	23
4.1.2	No existencia de ciclos límites	26
4.2	Bifurcaciones	27
4.2.1	Bifurcación	27
4.2.2	Análisis de Bifurcación del Modelo	29
5	APROXIMACIÓN A LAS CLASIFICACIONES CATEGÓRICAS	33
5.1	Utilización de los resultados analíticos y experimentales	33
5.1.1	Imitación de la fase 1: carga de estímulo	34
5.1.2	Imitación de la fase 2: fase de mantenimiento	35
5.1.3	Imitación de la fase 3: fase de tiempo de reacción	35
5.1.4	Imitación de la fase 4: fase de tiempo de movimiento	36
5.2	Determinación del modelo predictivo	37
5.2.1	Establecimiento del modelo	40
A	SUPERPOSICIÓN Y LINEALIZACIÓN	47
A.1	Principio de superposición	47
A.2	Principio de linealización	47
A.3	Ciclos límites	48
B	CÓDIGO XPPAUT	49
C	CÓDIGO MATLAB	51

c.1	Código Matlab: primera fase	51
c.2	Modelo descriptivo: tercera y cuarta fase	51
c.3	Modelo predictivo: tercera y cuarta fase	53
D	DATOS CATEGÓRICOS	57
D.1	Datos correctos de TR	57
D.2	Datos correctos de TM	57
D.3	Datos incorrectos de TR	58
D.4	Datos incorrectos de TM	59
	BIBLIOGRAFÍA	65
	ÍNDICE ALFABÉTICO	67

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Estructura de una Neurona Multipolar.	4
Figura 2	Fases de un Potencial de Acción.	6
Figura 3	Circuito eléctrico equivalente a un sector celular.	7
Figura 4	Dinámicas del modelo HH.	8
Figura 5	Compuertas en función del potencial.	9
Figura 6	Simplificaciones del modelo de inhibición.	12
Figura 7	Plano fase de las funciones E/S.	14
Figura 8	Descripción de la función E/S de una neurona.	14
Figura 9	Secuencias de la pantalla para la categorización.	16
Figura 10	Gráficas en función del TR y TM.	17
Figura 11	Representación del modelo para las decisiones.	18
Figura 12	Representación de las trayectorias por fase.	20
Figura 13	Función $f(x)$ con asíntota en M cuando $x \rightarrow \infty$ .	22
Figura 14	$f(x)$ con valores distintos de $\sigma$ .	23
Figura 15	Puntos fijos para $E_L = S$ .	24
Figura 16	Puntos fijos de bifurcación silla-nodo.	28
Figura 17	Función de $x$ con $a$ para silla-nodo.	29
Figura 18	Puntos fijos de bifurcación tridente.	29
Figura 19	Función de $x$ con $a$ para tridente.	30
Figura 20	Tamaño de trayectorias largo-corto.	30
Figura 21	Diagramas de bifurcación M y $\sigma$ .	31
Figura 22	Diagramas de bifurcación $E_L$ y $E_S$ .	32
Figura 23	Descripción de primera fase.	34
Figura 24	Descripción de segunda fase.	35
Figura 25	Descripción de tercera fase.	36
Figura 26	Descripción de cuarta fase.	37
Figura 27	Gráficas de radios en función de los intervalos.	38
Figura 28	Rendimiento psicométrico.	39
Figura 29	Gráficas de TR y TM para respuestas correctas.	41
Figura 31	Gráficas de TR y TM para respuestas incorrectas.	42
Figura 30	Gráfica de la función de rendimiento	42
Figura 32	Gráficas de fase 3 y 4 con $f(\cdot)$ .	43
Figura 33	Gráfica de error en TM	44
Figura 34	Ventana de XPPAut.	50

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1	Valor del umbral para cada ángulo.	19
----------	------------------------------------	----

## ÍNDICE DE LISTAS

Listado 1	Código de lecturas de decisión	49
Listado 2	Código de fase 1 en los modelos.	51
Listado 3	Código del modelo descriptivo	52
Listado 4	Código del modelo predictivo	53
Listado 5	Lista de TR correctas	57
Listado 6	Lista de TM correctas	57
Listado 7	Lista de TR incorrectas	58
Listado 8	Lista de TM incorrectos	59

# INTRODUCCIÓN

Nuestro cerebro, para  
mantenerse en forma, necesita  
desafío, exigencia, cambio,  
movilidad.

---

Shlomo Breznitz

Aunque no existe registro alguno de la ocurrencia de emplear modelos matemáticos en distintas ciencias, las exigencias de la vida moderna no las descartan como parte de pruebas de investigación y, gracias a ello, se ha logrado avanzar en la solución de enigmas que han afectado o perturbado al ser humano por siglos.

En la neurociencia, podríamos insinuar que la modelación matemática tomó gran importancia con el modelo de Hodgkin–Huxley (HH), el cual, explica la manera en que responde una neurona a la aplicación de una corriente periódica. Gracias a las investigaciones de estos dos neurofisiólogos —Allan Lloyd Hodgking y Andrew Huxley—, se mejoró la interpretación del potencial de acción, el período refractario, el estado de reposo y otras características más en términos de la geometría del espacio fase. De esta misma manera, Richard FitzHugh construyó un modelo más simple de las características básicas del impulso nervioso en 1968; aunque su modelo se derivó a partir del oscilador de Van der Pol, sus ecuaciones pueden deducirse del modelo de HH [9]. El modelo de FitzHugh se conoce como sistema de FitzHugh–Nagumo (FHN), este último autor también llegó a las mismas ecuaciones diferenciales de manera independiente [14].

A pesar del avance teórico, experimental y tecnológico que se tiene del cerebro, existen aún muchos desafíos en la neurociencia como el incremento de estudio en enfermedades neurodegenerativas y psiquiátricas, o la comprensión de cómo se produce una actividad mental a partir de redes neuronales principalmente.

En un punto de vista estructural, el cerebro se asemeja a un mecanismo que actúa como puerta y decide qué estímulos pueden entrar y cuáles deben bloquearse [10]. Esta organización de sistema se sitúa en el campo de la neurobiología o neurociencia cognitiva, la cual es una rama de la neurociencia que pretende convertirse en una meta-ciencia<sup>1</sup> y que busca entender cómo la función cerebral da lugar a actividades mentales como la percepción, la memoria, el lenguaje y la consciencia a partir de una visión computacional.

---

<sup>1</sup> se define como la ciencia de las ciencias y hace referencia a lo que hay más allá de esta misma.

En esta área de investigación se hace un análisis de proceso cognitivo que consiste en imitar decisiones de categorización temporal largo–corto, esto es, se clasificaba el tiempo que tardaba en reaparecer dos líneas paralelas después de presentarse por primera vez como corto o largo, con el objetivo de estudiar la influencia del intervalo en la planificación y ejecución mediante la medición del tiempo de reacción y el tiempo de movimiento [21]. La novedad en este trabajo será el análisis cualitativo y de bifurcación del modelo de inhibición mutua (capítulo 4) así como una modificación del modelo que asemeje mejor las decisiones de la tarea (capítulo 5).

El análisis matemático realizado, permitió conocer las limitaciones a realizar en las distintas fases del experimento, así también la determinación de una función que produzca la dificultad de categorizar los distintos intervalos.

**EN EL PRIMER CAPÍTULO** se hace un recuento breve de conceptos básicos en neurociencia que servirán de utilidad para la comprensión de esta tesis.

**EN EL SEGUNDO CAPÍTULO** se describen los fundamentos fisiológicos y se establece matemáticamente un modelo de inhibición mutua entre dos nodos.

**EL TERCER CAPÍTULO** presenta un experimento de proceso cognitivo [21] donde se emplea un modelo de inhibición mutua (modelo de estudio). Se narra el experimento y se muestran los resultados de los ensayos para el análisis.

**EN EL CUARTO CAPÍTULO** se realiza un análisis cualitativo del modelo de inhibición mutua [21] con algunas reducciones.

**EN EL QUINTO CAPÍTULO** se realizan las imitaciones de las decisiones categóricas [21]. Se expone una sugerencia de modelo de inhibición mutua y se ilustran los resultados obtenidos así como la conclusión. También se describen las limitaciones y posibles mejoras que se pueden realizar en el modelo de inhibición mutua.

**EL APÉNDICE A** presenta los teoremas de superposición y linealización y una introducción a los ciclos límite.

**EN EL APÉNDICE B** se presenta el código para la imitación de las cuatro etapas de decisiones clasificatorias realizados en XPPAut.

**EL APÉNDICE C** muestra los códigos para la reproducción de los Tiempos de reacción (TR) y Tiempos de movimiento (TM).

**EL APÉNDICE D** despliega la media de los tiempos de reacción y movimiento de las 20 personas en respuestas correctas e incorrectas [21].

En este capítulo se presentan definiciones básicas utilizadas en neurociencias para el entendimiento de los resultados mostrados en esta tesis, así también se presenta el Modelo de HH, el cual, vale la pena mencionar por la importancia que fue y ha seguido siendo en esta disciplina.

## 1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

### 1.1.1 Neuronas: Función y Estructura

La neurona o célula nerviosa es una pequeña estructura que recibe o transmite información por medio de pulsos eléctricos llamados **potenciales de acción** o spikes en el sistema nervioso (véase Figura 2). A la secuencia de potenciales de acción se conoce como *tren de spikes* y cada tren lleva un orden temporal.

Se calcula que el cerebro humano contiene alrededor de 100,000 millones a 1 billón de neuronas, las cuales, se conectan unas con otras y cada una envía señales en promedio a 1,000 neuronas y reciben alrededor de 10,000 sinapsis [27]. La sinapsis es la “unión” de dos neuronas para la transmisión del mensaje; realmente no existe una fusión, pero el espacio entre ellas es tan pequeño que eso asemeja. En la siguiente sección se volverá a mencionar este mecanismo.

No todas las neuronas tienen la misma estructura y dependiendo de la forma su función varía. En su mayoría, una neurona se constituye de un cuerpo celular llamado soma; diversas prolongaciones parecidas a las ramas de un árbol que generalmente transmiten impulsos hacia el soma denominadas dendritas; una prolongación larga conocida como axón, encargado de conducir los impulsos desde el soma hacia otra neurona u órgano, y botones terminales que son la parte extrema del axón, el cual secretan sustancias químicas llamadas neurotransmisores [27]. Los neurotransmisores (noradrenalina, acetilcolina entre otros) excitan o inhiben a la neurona que los recibe y contribuyen a generar o no un potencial de acción [23].

Las diferentes partes que componen a una neurona se presentan en la Figura 1, donde se ejemplifica un tipo de célula nerviosa conocida como neurona multipolar —neurona que se encuentra más frecuentemente. En la Figura 1, se aprecian protuberancias amarillas que cubren al axón llamado mielina, la cual, es una estructura multilaminar que permite viajar un potencial de acción hasta veinte veces más rápido aunque, no todas las neuronas contienen esta vaina. En esta tesis, consideraremos neuronas desmieliniza-

das.

Antes de continuar se debe mencionar que, a la célula que libera el neurotransmisor se conoce como neurona presináptica y la célula receptora de la señal se le llama neurona postsináptica.

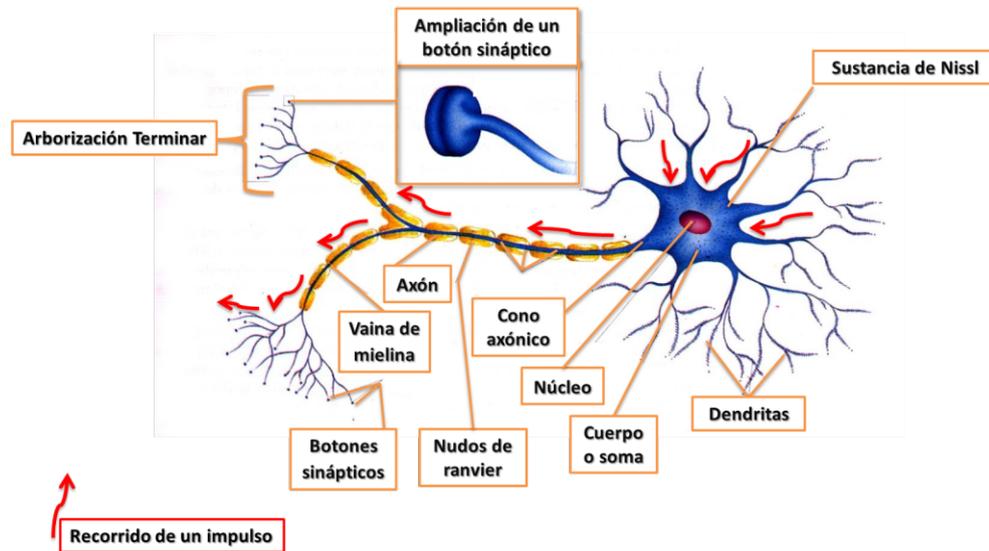


Figura 1: Estructura de una Neurona Multipolar. Figura obtenida de [15].

### 1.1.2 Sinapsis y Tipo de Sinapsis

Existen dos tipos de sinapsis: excitadora e inhibidora. La sinapsis excitatoria aparece cuando la neurona presináptica envía un mensaje que estimule a la actividad de la neurona postsináptica, mientras que la sinapsis inhibitoria hace lo contrario, es decir, bloquea o disminuye la actividad.

Dos células nerviosas pueden conectarse a través de sinapsis químicas o eléctricas, éstas difieren en su estructura y en la manera que transmiten el impulso nervioso. En una sinapsis eléctrica los procesos pre y postsinápticos son continuos, es decir, la información se da de célula a célula por pasos de iones a través de pequeños canales basados en conexinas y sin necesidad de mediciones químicas, además la transmisión es bidireccional y no hay despolarización (aumento de voltaje). La sinapsis química es la sinapsis que mayormente se produce, en este proceso sucede el mecanismo de los neurotransmisores con los receptores de la membrana postsináptica que ya se había mencionado, y al contrario de la sinapsis eléctrica, el mensaje que se envía es unidireccional [12]. En esta tesis, se trabajará con este tipo de sinapsis.

### 1.1.3 Potencial de Acción

Como se había aludido, los potenciales de acción son cambios rápidos del potencial de membrana que viaja a lo largo de la membrana celular. El disparo tiene una amplitud de aproximadamente 100 mV que suele durar de 1 ms a 2 ms y es seguido por un **período refractario**, período durante el cual no se puede generar un segundo potencial de acción incluso con un estímulo intenso. El potencial de acción comienza desde el potencial de reposo, al superar el umbral se produce la despolarización (aumento de voltaje), después una hiperpolarización o repolarización (disminución de voltaje) y al final un período refractario, la duración total va de 3 ms a 4 ms [27]. Si la neurona no alcanza el umbral crítico, no se producirá el potencial de acción, (véase Figura 2). A la fecha, la elección del umbral crítico de excitación en una neurona sigue siendo desconocida, ya que esta varía todo el tiempo y determinarse experimentalmente sigue siendo trabajo de búsqueda.

El potencial de reposo surge del equilibrio entre la fuerza de difusión y la fuerza electrostática. Las neuronas se encuentran en un medio exterior que tiene más  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  que su solución interna. La solución interna es más rica en  $\text{K}^+$  que el exterior. Para este potencial, los canales de fuga y las bombas de sodio-potasio son los principales encargados de intercambiar  $\text{Na}^+$  por  $\text{K}^+$ , para mantener ésta relación. El valor usual del potencial de reposo ( $V_R$ ) es de -70 mV.

Cada potencial de acción comienza con un cambio drástico de voltaje que va de negativo a positivo, en cada uno actúan canales de fuga y bombas de sodio-potasio, pero para la generación de potenciales de acción participan además canales activados por voltaje, unos para el sodio y otros para el potasio. Para la membrana en fase de reposo, éstos canales de activación se hallan cerrados.

Cuando a la célula en reposo le llega un estímulo, se observa un cambio de permeabilidad en la membrana, los iones de sodio ingresan y se produce un incremento de potencial, si este incremento de potencial no alcanza el umbral de excitación entonces no se puede desencadenar el potencial de acción. El mecanismo detrás del potencial de acción ocurre porque a la presentación del umbral comienza la despolarización; los canales de sodio se abren y el  $\text{Na}^+$  ingresa hasta llegar a un pico alto de potencial, los canales de potasio también se abren pero lentamente.

La fase de hiperpolarización se inicia cuando la célula se encuentra en el pico alto de voltaje, ésta etapa es importante para que la neurona vuelva a recuperar su polaridad. Como se mencionó en el anterior párrafo, los canales de potasio se abren junto con los canales de sodio pero más lentamente, cuando la célula llega al punto máximo de voltaje, las compuertas de sodio se cierran y las del potasio ya se encuentran abiertas haciendo escapar el  $\text{K}^+$  fuera de la membrana, los encargados de regresar el  $\text{K}^+$  al exterior son las bombas de sodio-potasio. De esta manera es como se regula a la membrana

celular [24].

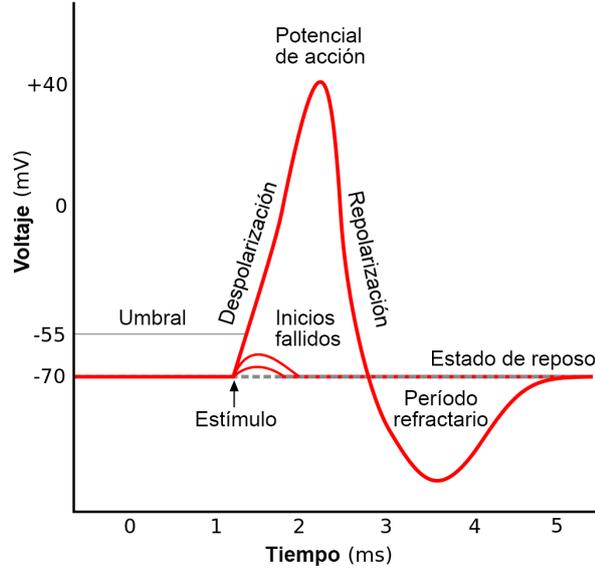


Figura 2: Fases de un Potencial de Acción. Los spikes son un ejemplo de fenómeno umbral (sistemas excitables). Figura obtenida de [6].

## 1.2 MODELO DE HODGKIN–HUXLEY

Uno de los modelos basados en conductancia más conocidos en la neurociencia computacional es el modelo Hodgkin–Huxley. Alan Hodgkin y Andrew Huxley utilizaron el axón gigante de un calamar para construir un modelo que explicara la dinámica del potencial de membrana de una neurona en función de las corrientes iónicas. Su investigación les hizo ganar el Premio Nobel de Fisiología–Medicina en 1963. En el axón encontraron corrientes principalmente de  $K^+$ ,  $Na^+$  y corrientes de fuga  $I_L$  como consecuencia de los iones de  $Cl^-$ . Dando así cuatro ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned}
 C_m \dot{V} &= I_{ext} - \underbrace{G_{Na} m^3 h (V - E_{Na})}_{\text{Corr. } Na^+ (I_{Na})} - \underbrace{G_K n^4 (V - E_K)}_{\text{Corr. } K (I_K)} - \underbrace{G_L (V - E_L)}_{\text{Corr. Fuga } (I_L)} \\
 \dot{m} &= \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}, \\
 \dot{h} &= \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}, \\
 \dot{n} &= \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

La primera ecuación describe la variación de voltaje en una membrana neuronal dependiendo la corriente que reciba ( $I_{ext}$ ) y la dinámica de los canales.  $E_L$ ,  $E_{Na}$  y  $E_K$  son potenciales de reposo;  $G_L$ ,  $G_{Na}$  y  $G_K$  son las conductancias para cada corriente. Las tres ecuaciones resultantes representan

la evolución temporal de las variables de activación en  $m$ ,  $n$  y  $h$ , siendo  $n$  la variable de activación en  $K^+$ ,  $m$  y  $h$  la variable de activación e inactivación correspondientemente de  $Na^+$ . La función  $x_\infty(V)$  describe el estado estacionario cuando  $t \rightarrow \infty$ ; la escala de tiempo en la que se tiende a este estado estacionario lo proporciona  $\tau_x(V)$ , para  $x = \{m, n, h\}$ . Ambas funciones fueron ajustadas por HH a partir de sus valores experimentales.

En el modelo HH se pensó al axón como un circuito eléctrico en paralelo (véase Figura 3).

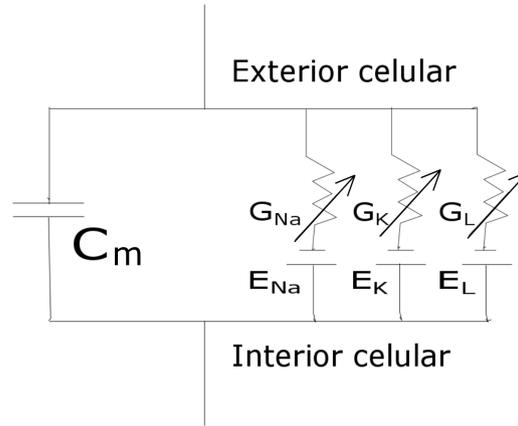


Figura 3: Circuito eléctrico equivalente a un sector de membrana para el modelo HH.

donde la derivada temporal del potencial de una membrana es proporcional a la suma de las corrientes en el circuito. Esto es,

$$\dot{V} = -\frac{1}{C_{m_i}} \sum_i I_i \quad (2)$$

Las suposiciones en la ecuación (2) son las siguientes:

- i) Los potenciales de acción dependen de corrientes  $Na^+$ ,  $K^+$  y de fuga (L).

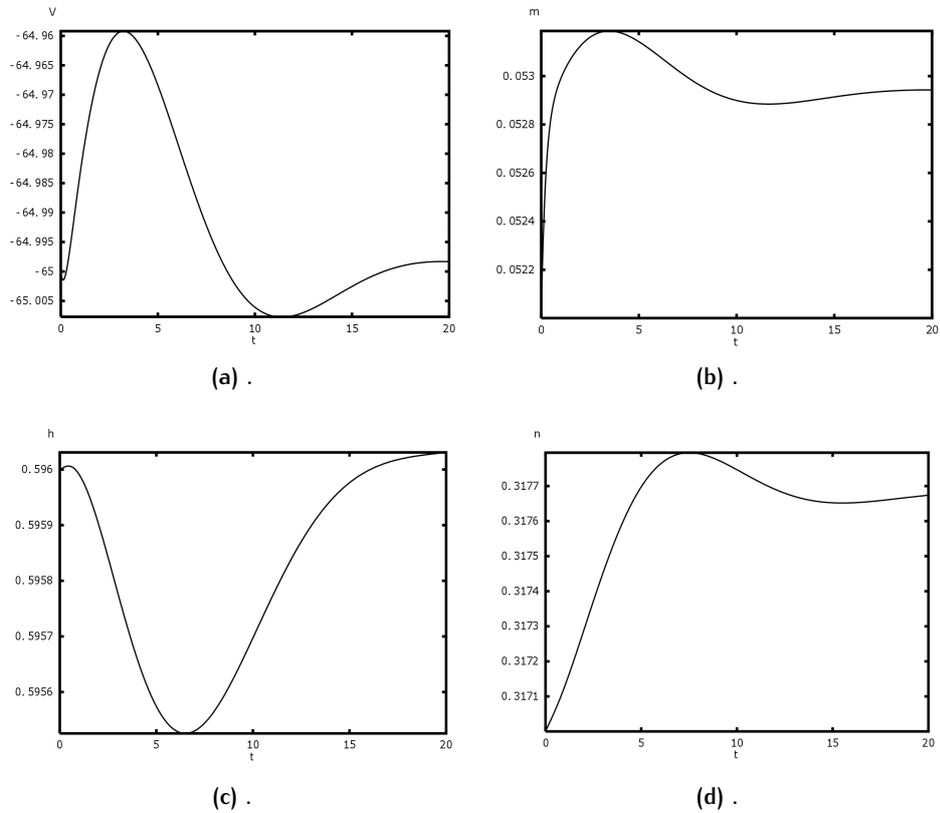
$$\sum_i I_i = I_{Na} + I_K + I_L$$

- ii) Cada corriente iónica se relaciona linealmente al potencial por medio de la Ley de Ohm

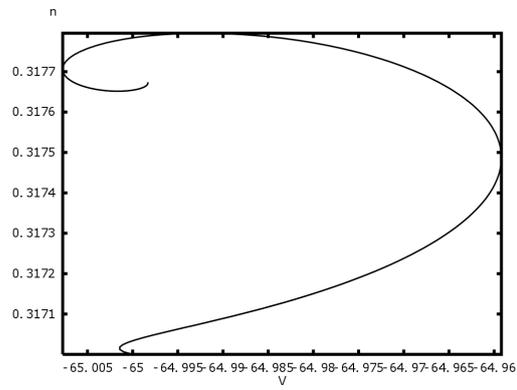
$$I_i(t) = G_i(V(t) - E_i)$$

donde  $G_i$  es la máxima conductancia del canal iónico  $i$  multiplicado por la fracción de canales abiertos para el ión  $i$ ;  $E_i$  es el potencial iónico "reversivo" dado por la ecuación de Nernst.

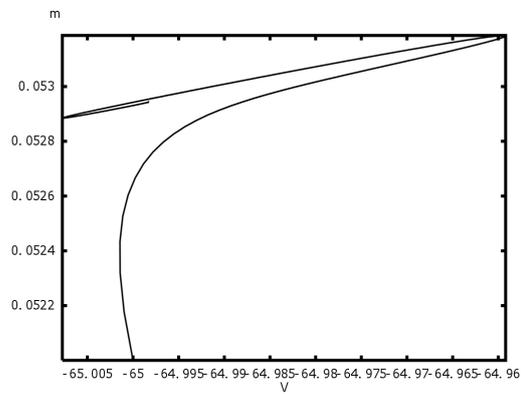
En sus mediciones, Hodgkin y Huxley obtuvieron valores y parámetros para la descripción de cada corriente iónica (véase Figura 4 y 5) reduciendo así al sistema de ecuaciones (1).



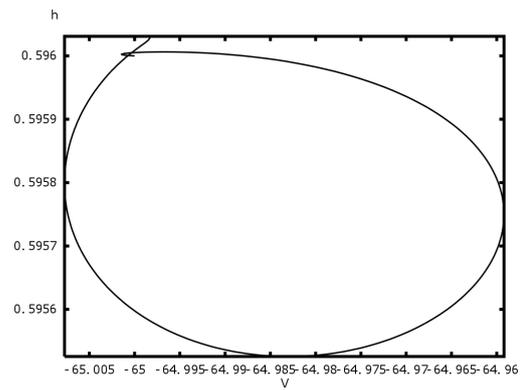
**Figura 4:** Dinámica del (a) potencial de membrana y (b–d) de las variables de compuerta como función del tiempo. Valores fijos en  $C = 1$ ,  $I_{ext} = 0$ ,  $G_{Na} = 120$ ,  $E_{Na} = 50$ ,  $G_K = 36$ ,  $E_K = -77$ ,  $G_L = 0,3$  y  $E_L = -54$ .



(a) .



(b) .



(c) .

Figura 5: Activación de (a) potasio  $n$  y (b–c) activación e inactivación del sodio  $m$  y  $h$  respectivamente en función del potencial de membrana.



# 2

## MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA DE DOS NODOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En 2005, se publicó un artículo acerca de un modelo de inhibición mutua entre dos poblaciones [19], el cual era capaz de describir la integración de un estímulo  $F_1$  en la memoria de trabajo <sup>1</sup>, así como las tomas de decisión a la presentación de un segundo estímulo  $F_2$ . El modelo incorpora tres procesos importantes a las apariciones de los estímulos:

1. Carga rápida inicial del estímulo  $F_1$  en la memoria de trabajo,
2. Mantenimiento lento de  $F_1$  en la memoria de trabajo y
3. Tomas de decisión.

El experimento en [19], consistía en observar lecturas de tasas de disparos en áreas de lóbulos frontales en monos macacos cuando se les aplicaban dos frecuencias de vibraciones mecánicas a la punta del dedo; los monos tenían que clasificar las vibraciones como corto o largo en un monitor cuando se presentaba la frase: “¿ $F_1 > F_2$ ? Si o No”. Para llevar a cabo las pruebas, los simios fueron previamente entrenados [11, 16, 26].

Durante la experimentación, se encontró que la dinámica de esta clase de neuronas, dependía de la fase de la tarea: durante la presentación de  $F_1$  en la memoria de trabajo, la velocidad de disparo dependía del estímulo  $F_1$ ; durante el mantenimiento de  $F_1$  en la memoria de trabajo, hay una persistencia de larga duración de las tasas de disparo dependiente de  $F_1$  a pesar de la ausencia del estímulo; durante la fase de comparación–decisión, tras la presentación del estímulo  $F_2$ , las tasas de disparo segregan inmediatamente en una de las dos categorías, dependiendo la respuesta del mono para la oración “ $F_1 > F_2$ ”.

Cabe destacar que las frecuencias se codificaron en las tres áreas del lóbulo frontal aproximadamente con el mismo número de neuronas (12, 14, 17). Las neuronas se clasificaron de dos maneras: “más” y “menos”. Las tasas de disparo de las neuronas “más” tenían períodos de retardo creciente a la decisión *Si*, mientras que las neuronas “menos” son el complemento de las neuronas “más”, decidiéndose por la respuesta *No*.

Con la clasificación de la actividad del período de retardo en la memoria de trabajo a la presentación del estímulo  $F_1$  y la actividad categórica tras la aparición de  $F_2$ , se comprobó que la memoria de trabajo y las tomas de decisión son variables independientes una de otra que se suponían en modelos

<sup>1</sup> conjunto de procesos que permite almacenar y manipular temporalmente una información para la realización de tareas cognitivas

matemáticos de psicología.

El estudio del modelo de inhibición mutua de dos poblaciones, se retomó en [21] para demostrar que la categorización se destaca como un proceso que vincula la percepción con la toma de decisión y la acción en la selección. En esta tesis, el modelo de [21], será de nuestro interés a analizar, las tareas y resultados del experimento de este último se presentarán en el capítulo 3. En este capítulo se describe brevemente el desarrollo del modelo inhibitorio de dos poblaciones de [19].

## 2.2 CONECTIVIDAD DE RED Y ECUACIONES DINÁMICAS

Por estudios neurofisiológicos en el experimento [19], se encontró que en la etapa de mantenimiento del estímulo había covariación de ruido *positivo* entre pares de neuronas “más” y pares de neuronas “menos”, mientras que entre pares de neuronas donde una era “más” y la otra “menos” se hallaba correlación de ruido *negativo* (las neuronas “más” son la tasa de neuronas que se inclinaban al estímulo  $F_1$  como largo, en cambio, las neuronas “menos” preferían a  $F_1$  como corto).

De esta manera se construye la arquitectura del modelo en la Figura 6a, donde se dan conexiones excitatorias entre neuronas del mismo signo y conexiones inhibitorias entre neuronas de signos opuestos. Para tener una mejor comprensión al modelo, se reduce a dos neuronas de cada tipo, no dejando de lado que en realidad tratamos con muchas neuronas de cada clase.

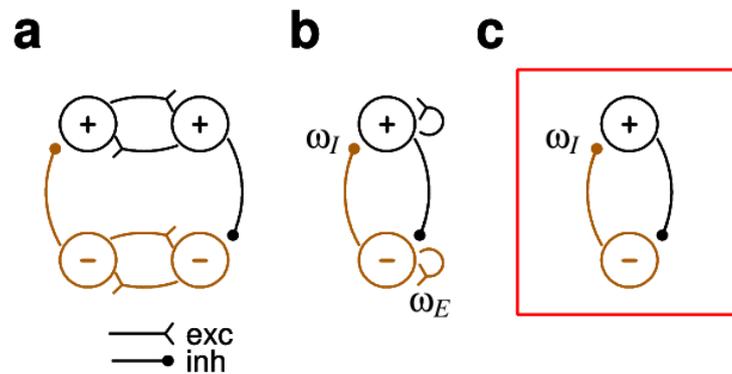


Figura 6: Simplificaciones del modelo de inhibición. Figura obtenida de [20].

De lo anterior, se describe cualitativamente el comportamiento de estos nodos en función de la actividad media de todas las neuronas “más” y “menos”, el modelo se vuelve a reducir en la Figura 6b. La actividad media puede describirse con una variable continua  $x$ , suponiendo que varias neuronas por nodo disparan asincrónicamente haciendo que la actividad sea suave. En estado de estacionario,  $x$  es una función de ciertas entradas excitatoria ( $g_E$ ) e inhibitoria ( $g_I$ ) al nodo,

$$x = F(g_I, g_E) \quad (3)$$

Estas entradas van cambiando con el transcurso del tiempo, así que se puede pensar que  $x$  estará determinada por una constante de tiempo  $\tau$ . De esta forma se generaliza la ecuación (3) a

$$\tau \dot{x} = -x + F(g_I, g_E).$$

donde la población de neuronas decae exponencialmente

Para describir la actividad de cada nodo se asigna a  $x$  el nodo “más” y  $y$  el nodo de signo “menos”. Cada nodo contiene cargas  $w_I$  y  $w_E$  que describen la intensidad de las salidas a las entradas del nodo (pesos sinápticos). Además se incluye que cada nodo puede recibir una señal de excitación externa  $E_x$  al nodo más y  $E_y$  al nodo menos, obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau \dot{x} &= -x + F(w_I y, w_E x + E_x) \\ \tau \dot{y} &= -y + F(w_I x, w_E y + E_y) \end{aligned}$$

En estado estacionario, el valor de cada nodo se define en función del otro nodo. Por ejemplo, para el nodo  $x$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Rightarrow x = F(w_I y, w_E x + E_x) \\ \text{resolviendo para } x &\Rightarrow x = \hat{F}(y). \end{aligned}$$

donde  $x = \hat{F}(y)$  es la curva solución conocida como “ceroclina” para  $x$ , de manera similar se define la ceroclina para  $y$ . Las ceroclinas describen el conjunto de puntos donde  $\dot{x} = 0$ . La forma y posición que adopte, dependerá del valor de los parámetros incluidos en la ecuación. Los cruces de la  $x$  ceroclina con la  $y$  ceroclina definirán los puntos críticos del sistema. Los puntos críticos o fijos del sistema pueden definirse como estables o inestables, dependiendo del comportamiento dinámico de condiciones iniciales cercanas. Un punto fijo es estable si condiciones cercanas se mantienen suficientemente cerca de este. Un punto fijo es inestable si no es estable.

Durante el diseño de este modelo [18], se encontró que para el modelo de una sola neurona, las entradas inhibitorias y excitatorias en la ecuación (3) están determinadas por una combinación aproximadamente lineal. De esta manera, puede ser aproximada usando un factor de escala  $\lambda$ , como

$$F(g_I, g_E) \approx f(-g_I + \lambda g_E).$$

De esta forma, las trazas de la Figura 7 siguen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau \dot{x} &= -x + f(-w_I y + E_x) \\ \tau \dot{y} &= -y + f(-w_I x + E_y) \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.2.1 Aproximación de $F(g_I, g_E) \approx f(-g_I + \lambda g_E)$

Numéricamente se encontró en el modelo que el cambio de  $g_E$  durante la carga, el mantenimiento, y la decisión no cambiaba mucho la forma de la función Entrada-Salida (E/S) y sólo la desplazaba a lo largo del eje de inhibición (véase Figura 8a). Por lo tanto, se optó por calcular la función de E/S de la neurona para el valor de  $g_E$  utilizado en la etapa de mantenimiento de la memoria (curva de negra). Este procedimiento correspondió a la aproximación de la función de E/S de la neurona por una función  $f(\cdot)$  tal que  $s = f(-g_I + \lambda g_E) \approx F(g_I, g_E)$ ; donde  $s$  representa una variable de salida sináptica y  $\lambda$  describe por cuánto la cantidad de un cambio en las entradas excitadoras desplaza las funciones de E/S a lo largo del eje de inhibidores.

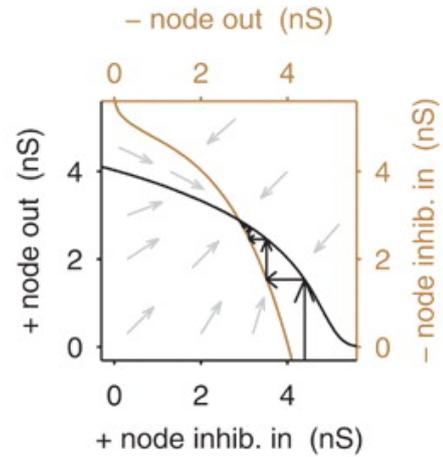


Figura 7: Funciones de E/S en el plano fase la cual, trazan la dinámica de inhibición mutua. Figura obtenida de [20].

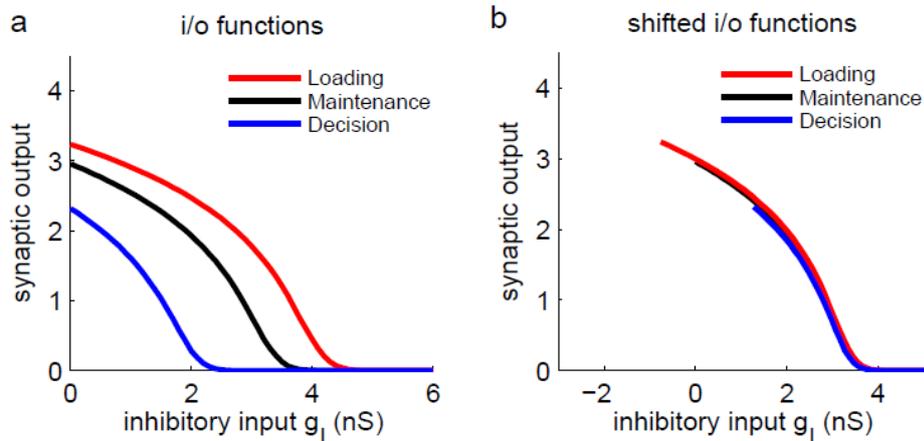


Figura 8: Descripción de la función E/S de una neurona como dependiente de una sola conductancia de entrada. Figura obtenida de [20].

# 3

## MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA PARA UNA DESCRIPCIÓN NEURONAL COGNITIVA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El estudio realizado en el modelo de inhibición mutua en [19] y [18], sirvió para simular los resultados de una tarea de categorización temporal en [21]. El experimento consistía en clasificar intervalos de tiempo como corto o largo y estudiar la influencia que tenía en la planificación y ejecución de la acción a través de mediciones de TR y TM. El tiempo de reacción es el tiempo medido entre la percepción de un estímulo hasta la ejecución del movimiento y el tiempo de movimiento se inicia a partir de la realización del desplazamiento hasta que alcanza el objetivo.

El interés de este estudio fue para verificar que la categorización es un proceso que relaciona la percepción con las tomas de decisión y de movimiento. Intuyen que cualquier estímulo debería categorizarse por experiencias exitosas o no en la vida, y el tiempo posee un papel importante al momento de clasificar el estímulo.

En este capítulo, se describe brevemente las tareas y los resultados obtenidos en [21], así como también el modelo de inhibición mutua propuesto.

### 3.2 DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

Se eligieron veinte personas con un rango de edad  $27,1 \pm 5,2$  años, las cuales fueron sentados frente a un monitor de ordenador; la barbilla y la frente se colocaba en un apoyo para que los ojos estuvieran a 56 cm del centro de la pantalla. La tarea consistía en categorizar ocho intervalos de tiempo (450, 500, 619, 669, 709, 756, 870 y 920) como largo o corto con ayuda de una palanca de mando. Esta palanca se fijó en una plataforma debajo de la mesa, lo que impedía que los sujetos vieran su mano.

La secuencia en la pantalla para la clasificación de los intervalos era la siguiente: Las personas debían mantener posicionado el cursor dentro de un círculo central, después de un retardo ( $500 + \Delta 1000$  ms), dos barras paralelas se presentaban brevemente encima del círculo central desapareciendo en un intervalo de tiempo y apareciendo en la misma posición (intervalo que debía categorizarse). Después de un retraso de 1 s, dos círculos de respuesta aparecían a la periferia del círculo central, uno de color azul en respuesta a “largo” y otro de contorno naranja para respuesta a “corto”, círculos en donde las personas comunicaban su decisión. Estos dos círculos podían ocupar 8 lugares en la periferia, obteniendo 20 combinaciones al azar, la distancia

de círculo a círculo podía ser de 45, 90 ó 180 grados con vértice en el centro de la pantalla (véase Figura 9).

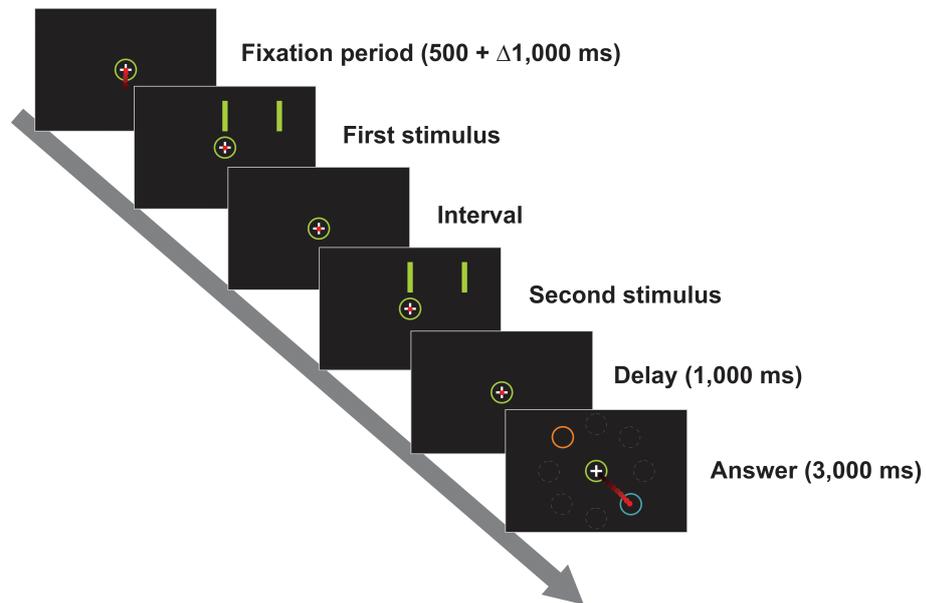


Figura 9: Secuencias de la pantalla para la categorización temporal. Figura obtenida de [22].

Las personas realizaron tres sesiones separadas en diferentes días. En un día, cada persona tenía que clasificar los 8 intervalos y la distancia de los círculos de respuesta era al azar (45, 90 ó 180 grados), durante las tres sesiones, cada intervalo se combinó con los tres ángulos haciendo un total de 480 ensayos. Antes de considerar estos datos, se realizó un entrenamiento previo al experimento.

Al final de cada prueba (por intervalo), aparecía la palabra de “correcto” o “incorrecto” como retroalimentación. A lo anterior, se obtuvieron tiempos de reacción y movimiento en respuestas correctas e incorrectas, así como los tiempos por cada ángulo de separación entre círculos de respuesta.

Para comprender las variaciones del **TM** se analizó la velocidad máxima de movimiento, la área de las trayectorias, los números de submovimientos y los cambios de decisión.

### 3.3 RESULTADOS DEL EXPERIMENTO

Con nivel de significancia  $\alpha = 0,05$  para rechazar la hipótesis nula en un análisis de varianza se encontró que:

- El rendimiento se vió influenciado por la magnitud del intervalo. A intervalos cercanos del intervalo central se observaban más errores (véase Figura 10A).

- La dificultad de categorizar no solo afectaba el proceso de decisión y la planificación del movimiento sino también su ejecución.
- Las posiciones de círculo a círculo afectaban en la categorización del intervalo. Para ángulos mayores el TR crecía y los TM decrecían (véase Figura 10B).
- Las variables cinemáticas en conjunto describen el perfil de TM.

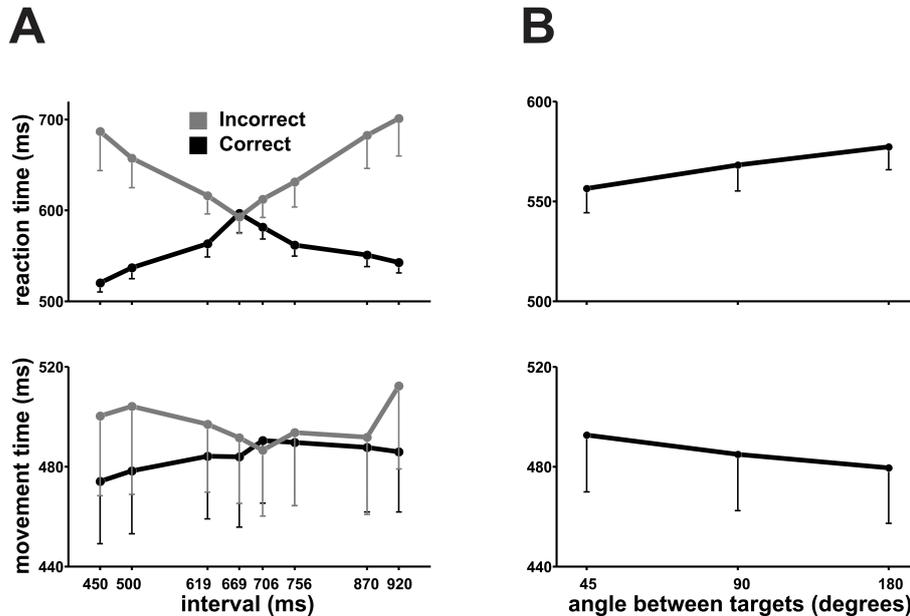


Figura 10: A) Gráficas de los intervalos en función del TR (gráfica de arriba) y del TM (gráfica de abajo); B) Gráfica de los ángulos en función del TR (arriba) Y TM (abajo). Figura obtenida de [22].

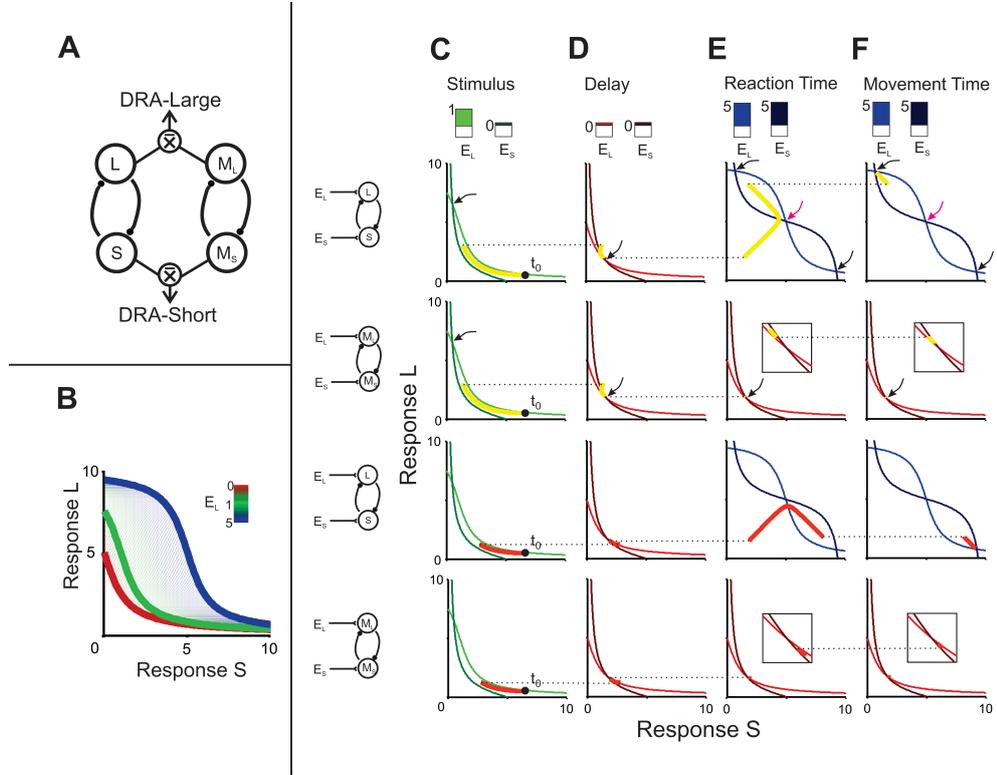
### 3.4 MODELO

Se propuso un modelo de inhibición mutua que imitara los resultados obtenidos del experimento de categorización el cual incluye cuatro fases:

1. Lectura del intervalo a categorizar (estímulo),
2. Retraso en que el estímulo se almacenaba en la memoria de trabajo,
3. Fase de tiempo de reacción en el momento que se presentaron los círculos y el tiempo de movimiento que expresaron para la decisión categórica, y
4. Fase de tiempo de movimiento al llegar a uno de los círculos (véase Figura 11C-F).

El modelo se compone de dos pares de poblaciones neuronales que inhiben mutuamente en forma de preferir una de las dos categorías corto (S) o larga (L):  $L - S$  y  $M_L - M_S$  para la memoria de trabajo. Además de dos unidades de lectura (Downstream Reading Areas (DRA)):  $DRA_L$  promedia

la actividad de L con  $M_L$  y  $DRA_S$  la de S con  $M_S$ . Al principio se propuso solo la población de L – S, la cual era capaz de replicar la trayectoria de respuestas correctas pero no para las incorrectas, de esta manera se propone a la población  $M_L - M_S$  que acumula el paso de tiempo según sea el intervalo en la memoria (véase Figura 11A).



**Figura 11:** A) Construcción del modelo para las decisiones categóricas, B) Ceroclinas de L en función de S para valores distintos de  $E_L$ , C–F) Trayectorias de los intervalos 450 y 920 (fila 3–4 y fila 1–2 respectivamente) en L–S y  $M_L - M_S$  descritas en las cuatro fases. Figura obtenida de [22]

La población L – S se designa por las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \tau \frac{dL}{dt} &= -L + f(E_L - S) + N_L \\ \tau \frac{dS}{dt} &= -S + f(E_S - L) + N_S \end{aligned} \quad (5)$$

mientras que para la población de memoria se crea

$$\begin{aligned} \tau_m \frac{dM_L}{dt} &= -M_L + f(E_L - M_S) + N_{M_L} \\ \tau_m \frac{dM_S}{dt} &= -M_S + f(E_S - M_L) + N_{M_S} \end{aligned} \quad (6)$$

donde

- $\tau$  (155 ms) es una constante para el paso de tiempo y se estimó reduciendo al mínimo la diferencia entre la duración del intervalo de igualdad subjetiva en la simulación con la media de los intervalos a categorizar.

- $\tau_m$  es una constante de tiempo para el almacenamiento de memoria.
- $E_L$  entrada excitadora a los nodos L y  $M_L$ .
- $E_S$  entrada excitadora a los nodos S y  $M_S$ .
- $N_L$ ,  $N_S$ ,  $N_{M_L}$  y  $N_{M_S}$  son ruidos blancos .

Las entradas excitatorias varían dependiendo a la fase de trabajo (véase Figura 11C-F). Comúnmente la función de salida  $f$  se propone como una función sigmoideal (véase Figura 11B) descrita por:

$$f(x) = M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \quad (7)$$

donde  $M$  es la respuesta máxima del nodo y  $\sigma$  es la pendiente de la función sigmoide. Esta función representa la salida de cada nodo que cambia con su entrada.

Para la medición del **TM**, se propuso un umbral en la fase de **TR** que dependía del ángulo de separación entre los círculos de respuesta (45, 90, y 180), al cruzar este umbral, se generaba el movimiento (véase Figura 12).

Para estimar el rendimiento categórico en el modelo, se realizaron 10,000 simulaciones para cada intervalo, así como los **TR** y **TM** para las respuestas correctas e incorrectas. Se resalta que, tanto  $\tau_m$  y los umbrales a cada **TR** y **TM** se ajustaban usando el método de mínimos cuadrados con respecto a los objetivos (véase Cuadro 1).

**Cuadro 1:** Valor del umbral para cada ángulo como inicio de movimiento. El valor del umbral para el ángulo "movimiento" marca el final de movimiento.

Ángulo	Umbral
45°	0.61
90°	0.59
180°	0.54
Movimiento	0.04

En el trabajo [21], además de la reproducción de los resultados experimentales con el sistema de ecuaciones diferenciales (5), también se incluye un modelo de paseo aleatorio donde se intenta replicar los comportamientos de las 20 personas pero que en esta tesis no se abordará.

Los resultados anteriores de este capítulo y los métodos de réplica para los resultados, servirán para la construcción de un nuevo modelo de inhibición mutua que se tiene como objetivo en esta tesis.

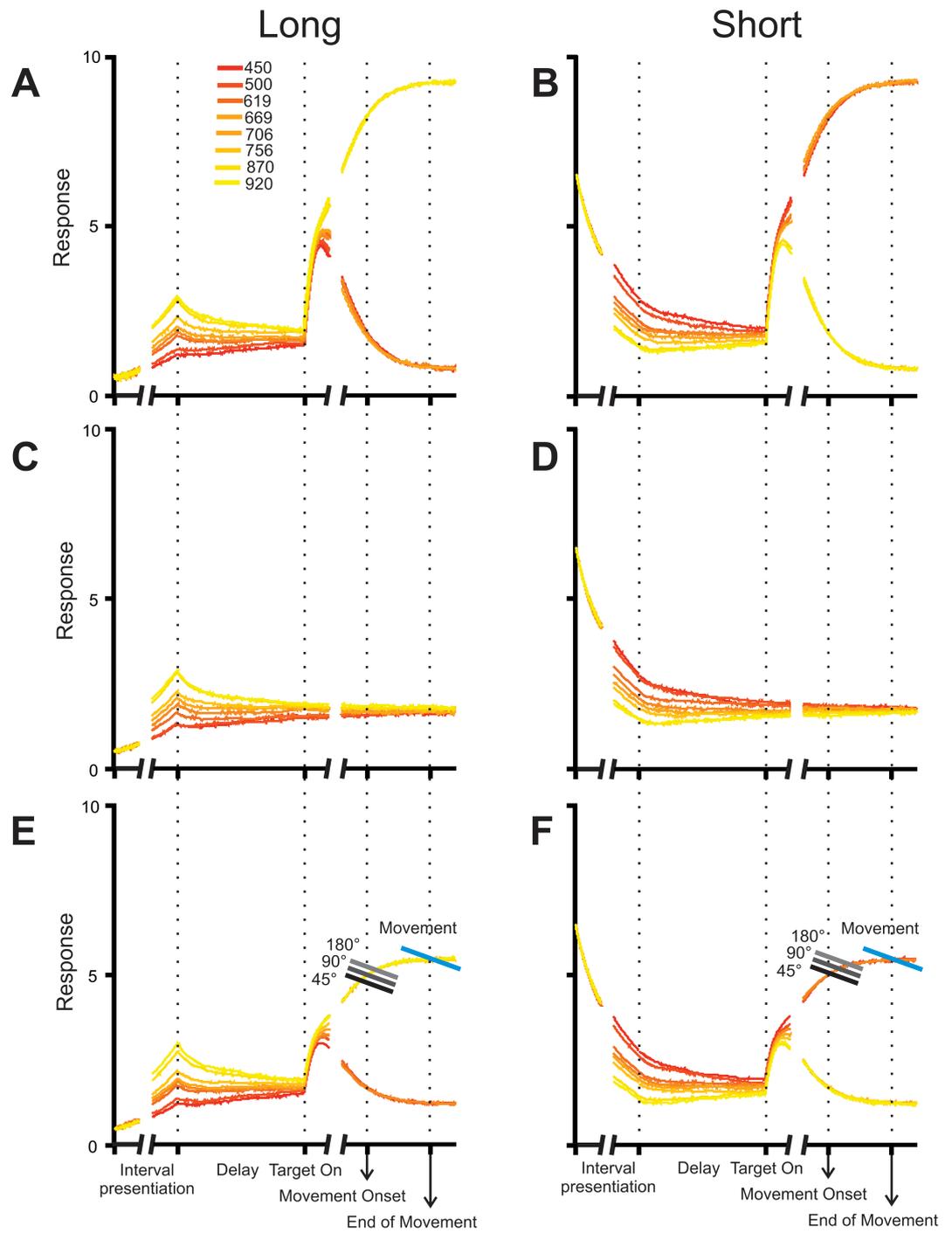


Figura 12: Representación de las trayectorias por fase. Figura obtenida de [22].

# 4

## ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO DE INHIBICIÓN MUTUA

### 4.1 ANÁLISIS DEL MODELO

En esta tesis, para el análisis en los sistemas autónomos (5) y (6), no se considerará el uso de ruido blanco. El uso de ruido en los sistemas conlleva a una investigación de ecuaciones diferenciales estocásticas que bien puede ser usada para una tesis de maestría. De esta manera, se reescriben los sistemas sin estos términos.

$$\begin{aligned}\tau \frac{dL}{dt} &= -L + f(E_L - S), & t > 0 \\ \tau \frac{dS}{dt} &= -S + f(E_S - L)\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\tau_m \frac{dM_L}{dt} &= -M_L + f(E_L - M_S), & t > 0 \\ \tau_m \frac{dM_S}{dt} &= -M_S + f(E_S - M_L)\end{aligned}\quad (9)$$

donde

$$f(x) = M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \quad (10)$$

Observemos que la diferencia entre los sistemas de ecuaciones (8) y (9) son las constantes de tiempo y las variables pero que cualitativamente representan al mismo sistema. De esta manera, solo se expondrá el análisis del sistema (8). Más adelante se explicará la influencia que tuvo el sistema (9) en el modelo del capítulo 3 y que no utilizaremos aquí.

Mencionado lo anterior, iniciaremos con la descripción de la función (10). Sea  $g(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)$  donde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , hacemos álgebra en el rango de  $g$  obteniendo

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right) < g(x) \left(\frac{1}{\pi}\right) < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{g(x)}{\pi} < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{g(x)}{\pi} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} + \frac{g(x)}{\pi} < 1 \\ &\Leftrightarrow M(0) < M\left(\frac{1}{2} + \frac{g(x)}{\pi}\right) < M(1) \\ &\Leftrightarrow 0 < M\left(\frac{1}{2} + \frac{g(x)}{\pi}\right) < M \\ &\Leftrightarrow 0 < f(x) < M\end{aligned}$$

Es decir,  $M$  define el rango de  $f$  en  $\mathbb{R}$  (véase Figura 13).

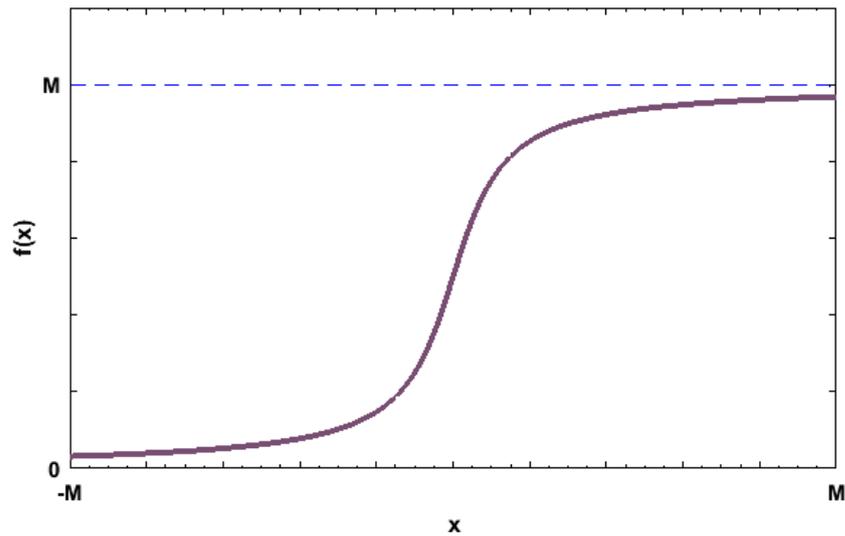


Figura 13: Función  $f(x)$  con asíntota en  $M$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Con  $\sigma > 0$ , se obtienen dos casos:

i) Si  $\sigma \rightarrow 0$ , entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} M, & \text{si } x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

ii) Si  $\sigma \rightarrow \infty$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \\ &= M \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \\ &= M \left( \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right) \\ &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right) \\ &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(0) \right) \\ &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot 0 \right) \\ &= M \left( \frac{1}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{M}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Del análisis anterior,  $\sigma$  definirá la pendiente de la función  $f(\cdot)$ . En la Figura 14 se aprecia esta observación con valores en  $\sigma \rightarrow 0$  y  $\sigma \rightarrow \infty$ . Posteriormente se podrá notar que el cambio de  $\sigma$  tendrá un efecto en la medición de **TR** y **TM** de las tareas.

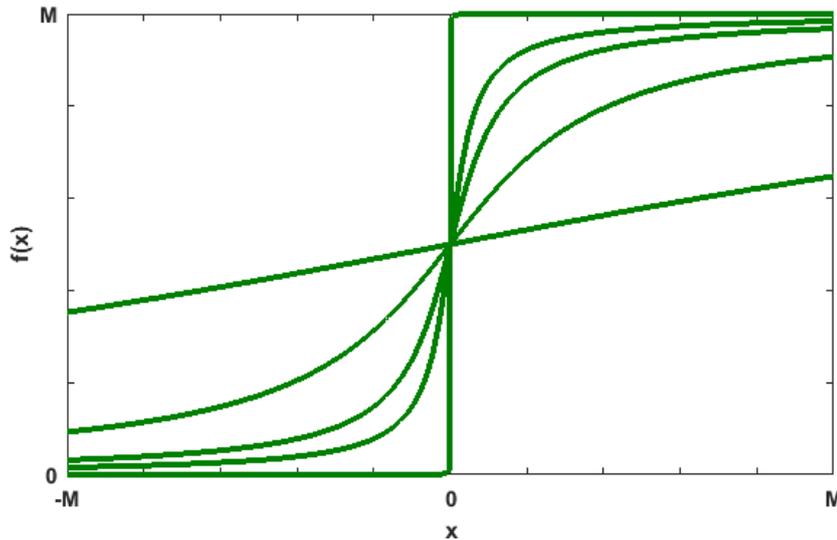


Figura 14:  $f(x)$  con valores distintos de  $\sigma$ . A valores grandes de  $\sigma$ :  $f(x) \approx M/2$ .

Por último, si  $x = E_L - S$  entonces  $x = 0$  si y sólo si  $E_L = S$ , así

$$\begin{aligned}
 f(E_L - S) &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{E_L - S}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \\
 &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{E_L - E_L}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \\
 &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{0}{\sigma}\right)}{\pi} \right) \\
 &= M \left( \frac{1}{2} + \frac{\arctan(0)}{\pi} \right) \\
 &= M \left( \frac{1}{2} + 0 \right) \\
 &= \frac{M}{2}, \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Recíprocamente sucede para  $x = E_S - L$ . En la función  $f(\cdot)$ ,  $x = 0$  resulta ser un punto de inflexión, es decir, el punto donde los valores de la función pasan de un tipo de concavidad a otra.

#### 4.1.1 Cálculo y análisis de estabilidad de los puntos fijos

Para obtener los puntos críticos del sistema, debemos igualar el campo vectorial a cero. De esta manera

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} = 0 &\Leftrightarrow S = f(E_S - L) \quad \text{ceroclína} \\
 \frac{dL}{dt} = 0 &\Leftrightarrow L = f(E_L - S) \quad \text{ceroclína}
 \end{aligned}$$

Dado que  $S$  y  $L$  no pueden expresarse explícitamente, los puntos críticos del sistema (8) estarán determinados por la intersección de las ceroclinas (véase Figura 15)

$$\begin{aligned} S &= f(E_S - f(E_L - S)) \quad \text{y} \\ L &= f(E_L - f(E_S - L)) \end{aligned}$$

Para el caso  $E_L = S$ , se halla que  $E_L = E_S = \frac{M}{2}$  con un máximo de tres puntos críticos cuando  $\sigma \rightarrow 0$  (véase Figura 15). En general, la presencia de puntos fijos en un sistema de ecuaciones diferenciales dependerá del valor que se elija para cada parámetro. En la sección 4.2, se muestra la cantidad de puntos de equilibrio en nuestro sistema al variar una variable y fijando a las demás.

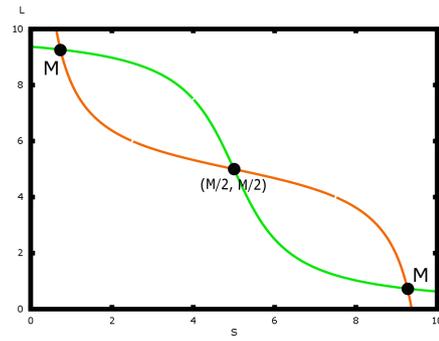


Figura 15: Puntos fijos definidos cuando  $E_L = E_S = M/2$  y  $\sigma = 1$ .

Para establecer la estabilidad de un punto de equilibrio se enuncia la siguiente definición:

**Definición 4.1.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$  donde  $\Omega$  es un abierto en  $\mathbb{R}$ , y sea  $x_0$  un punto fijo de  $x' = f(x)$ .

- i) Se dice que  $x_0$  es *estable* si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\lambda > 0$  tal que para todo  $x \in B(x_0, \lambda)$ ,  $\Phi_x(t)$  está definido para todo  $t \geq 0$  y se tiene  $\Phi_x(t) \in B(x_0, \epsilon)$  para todo  $t \geq 0$ . Donde  $\Phi_x(t)$  es el flujo de la ecuación diferencial <sup>1</sup>.
- ii) Se dice que  $x_0$  es *asintóticamente estable* si  $x_0$  es estable y además existe  $r > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_x(t) = x_0$  para todo  $x \in B(x_0, r)$ .

**Observación 4.1.** Se dice que un punto es inestable si no es estable.

**Estabilidad de los sistemas no lineales**

Los sistemas dinámicos no lineales tienen la característica de no cumplir el principio de superposición. Para poder hacer una aproximación local de las soluciones de un sistema no lineal mediante un sistema lineal es necesario asegurar que la aproximación local permita conocer el comportamiento del sistema lineal, este proceso se llama linealización. Para establecer cuándo un sistema no lineal responde localmente en forma similar al linealizado se utilizan los teoremas siguientes:

<sup>1</sup>

**Definición 4.2.** Sea  $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  dada por  $(t, x) \rightarrow \Phi(t, x)$  y tal que para cada  $x \in \Omega$ . Decimos que  $\Phi$  es el *flujo de la ecuación diferencial* y satisface

$$\Phi(t+s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

para todo  $t, s \in \mathbb{R}$  y  $x \in \Omega$ .

**Teorema 4.1** (De Hartman–Grobman (HG)). *Sea  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f$  suficientemente suave. Supongamos que  $x^*$  es un punto de equilibrio aislado y que  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*}$  no tiene autovalores sobre el eje imaginario. Entonces existe un homeomorfismo  $h$  definido en  $\mathcal{U}$ , entorno de  $x^*$ ,  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva las trayectorias del sistema no lineal sobre las del sistema linealizado. En particular  $h(x^*) = 0$ .*

El Teorema 4.1 establece que el sistema no lineal y el sistema linealizado son localmente homeomorfos en una vecindad de un punto fijo, siempre y cuando los autovalores no sean puramente imaginarios.

**Teorema 4.2** (De las Variedades). *Si  $x^*$  es un punto singular hipérbolico, es decir  $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ , existen variedades locales estable e inestable del sistema no lineal de igual dimensión que los subespacios estable e inestable del sistema linealizado en  $x^*$ . Estas variedades son tan suaves como  $f$  que tiene la misma dimensión que los respectivos subespacios del sistema lineal y son tangentes a ellos.*

Para esta tesis, los Teoremas 4.1 y 4.2 no se analizarán con detalle, más bien, serán utilizados para establecer los resultados cualitativos del sistema. Para mayor referencia a estos dos teoremas consultar [17, 30].

Para el linealizado del sistema (8), definamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-S + f(E_S - L)}{\tau} = h(S, L) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{-L + f(E_L - S)}{\tau} = g(S, L) \end{aligned} \quad (11)$$

Después obtenemos la matriz Jacobiana evaluada en un punto fijo arbitrario  $(S^*, L^*)$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial L} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & -\frac{M}{\pi\tau} \left( \frac{\sigma}{\sigma^2 + (E_S - L^*)^2} \right) \\ -\frac{M}{\pi\tau} \left( \frac{\sigma}{\sigma^2 + (E_L - S^*)^2} \right) & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Con  $a := \frac{M}{\pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma^2 + (E_S - L^*)^2} \right)$  y  $b := \frac{M}{\pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma^2 + (E_L - S^*)^2} \right)$ , la matriz (12) se simplifica en

$$A = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ -b & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Para determinar los valores propios de la matriz, se utiliza la solución de la ecuación

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

De esta manera, los eigenvalores  $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{ab}}{\tau}$  de la matriz  $A$  son puntos hiperbólicos si  $a \in \mathbb{R}/\{\frac{1}{b}\}$  ó  $b \in \mathbb{R}/\{\frac{1}{a}\}$  con  $a, b \neq 0$  y, por el teorema de Hartman–Grobman el comportamiento local en una vecindad alrededor de los puntos de equilibrio  $(S^*, L^*)$  coincide con el comportamiento del sistema linealizado siempre y cuando se cumplan las condiciones.

**Observación 4.2.**  $\sqrt{ab} \notin \mathbb{C}$  porque:

- si  $M$  y  $\sigma$  son de signos opuestos,  $a$  y  $b$  son negativos,
- si  $M$  y  $\sigma$  son positivos,  $a$  y  $b$  son positivos,
- si  $M$  y  $\sigma$  son negativos,  $a$  y  $b$  son positivos.

Notemos que dependiendo del valor de los parámetros, podríamos obtener distintos puntos fijos. En particular, podemos obtener siempre un punto de equilibrio en  $(M/2, M/2)$ .

Evaluando al punto fijo  $(\frac{M}{2}, \frac{M}{2})$  en (13), encontramos que

$$A = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{M}{\pi} \left(\frac{1}{\sigma}\right) \\ -\frac{M}{\pi} \left(\frac{1}{\sigma}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

con valores propios en  $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \frac{M}{\pi\sigma}}{\tau}$ . Así,  $(\frac{M}{2}, \frac{M}{2})$  puede ser punto silla<sup>2</sup> [31] o asintóticamente estable dependiendo de cómo sean  $M$  y  $\sigma$ .

**Observación 4.3.** El sistema (8) al ser modelo de un problema biológico:  $M$ ,  $\sigma$ ,  $E_L$  y  $E_S$  se considerarán positivas de ahora en adelante.

#### 4.1.2 No existencia de ciclos límites

Como anteriormente se ha aludido, estamos interesados en la aproximación de las respuestas categóricas largo – corto realizado en [21], y una de las preocupaciones en este modelo es la existencia de ciclos límite pues se requiere un modelo biestable. Al plantear la existencia de ciclos límites estaríamos en la posibilidad de existencia de soluciones periódicas, lo cual no es una condición deseable al tratar de describir esta categorización. Afortunadamente, el criterio negativo de Bendixson nos proporciona la condición necesaria que permite descartar soluciones periódicas y consecuentemente ciclos límites.

**Teorema 4.3** (Criterio Negativo de Bendixson (CNB)). Sean  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dos funciones diferenciables y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ , simplemente conexo. Si la expresión

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema dado no puede tener una órbita cerrada completamente contenida en  $D$ .

<sup>2</sup>

**Definición 4.3.** Una función diferenciable  $f(x, y)$  tiene un punto de silla en un punto crítico  $(a, b)$  si en cada disco abierto con centro en  $(a, b)$  existen puntos del dominio  $(x, y)$  donde  $f(x, y) > f(a, b)$ , y punto del dominio  $(x, y)$  donde  $f(x, y) < f(a, b)$ . El punto correspondiente  $(a, b, f(a, b))$  sobre la superficie  $z = f(x, y)$  se conoce como punto de silla de la superficie.

*Demostración.* Supongamos que existe una órbita cerrada  $\Gamma$  contenida en  $D$ , con  $\Gamma = (x(t), y(t))$  de período  $T$ . Entonces

$$\begin{aligned} dx &= f(x(t), y(t))dt \\ dy &= g(x(t), y(t))dt \end{aligned}$$

y se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} (f(x, y)dy - g(x, y)dx) \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t))f(x(t), y(t))] dt = 0 \end{aligned}$$

usando el teorema de Green y que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)$  no es idénticamente nula en  $D$  y no cambia de signo, resulta

$$0 = \int_{\Gamma} [f dy - g dx] = \int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx dy \neq 0$$

lo que produce una contradicción. Por lo tanto el sistema dado no puede tener órbitas cerradas completamente contenidas en  $D$ .  $\square$

Para el sistema (11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(S, L)}{\partial S} &= -\frac{1}{\tau} \quad y \\ \frac{\partial g(S, L)}{\partial L} &= -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{\partial h(S, L)}{\partial S} + \frac{\partial g(S, L)}{\partial L} = \left(-\frac{1}{\tau}\right) + \left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{2}{\tau}.$$

Por el criterio negativo de Bendixson, no puede haber órbitas cerradas y por ende, no existen ciclos límites.

## 4.2 BIFURCACIONES

### 4.2.1 Bifurcación

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones dinámicas y este depende de varios parámetros, es de interés conocer los cambios cualitativos que ocurren en el sistema al variar cada parámetro; el estudio de estos cambios cualitativos en el retrato fase se le conoce como teoría de bifurcaciones. La información de los límites de operación estable nos lo proporciona el **diagrama de bifurcación**, que es la representación gráfica de la bifurcación de un sistema dinámico. En los diagramas de bifurcación se visualizan el número de puntos fijos del sistema. Así mismo se determina su estabilidad.

Existen dos tipos de bifurcaciones: locales y globales. Las bifurcaciones locales son aquellas que pueden ser analizadas mediante sus puntos fijos, órbitas locales u otros conjuntos invariantes mientras que las globales no, ya que estas últimas ocurren generalmente cuando hay mayores conjuntos invariantes en el sistema. Las bifurcaciones locales más conocidas son:

- Bifurcación silla–nodo.
- Bifurcación transcrita.
- Bifurcación tridente o *pitchfork*.
- Bifurcación tangencial o *fold*.
- Bifurcación de Hopf.

A continuación, se muestran ejemplos clásicos de bifurcación silla–nodo y tridente.

### ***Bifurcación Silla–Nodo***

La característica visible de una bifurcación silla–nodo es que al variar un parámetro del sistema, dos puntos fijos se aproximan hasta aniquilarse. Un modelo de bifurcación silla–nodo es la siguiente:

$$\dot{x} = a + x^2 \quad (14)$$

donde  $a$  es una variable. En función de  $a$  se encuentran la existencia de diferentes puntos de equilibrio.

- Si  $a < 0$ , los puntos fijos donde  $\dot{x} = 0$  se encuentran en  $x = -\sqrt{-a}$  y  $x = \sqrt{-a}$ . Así para condiciones iniciales menores a  $x = -\sqrt{-a}$  y mayores de  $x = \sqrt{-a}$ , el campo vectorial dirige a las trayectorias en dirección creciente (hacia la derecha en una línea fase horizontal). De lo anterior, se encuentran dos puntos fijos, uno estable y otro inestable (véase Figura 16A).
- Si  $a = 0$ , la parábola sube (véase Figura 16B), haciendo que los puntos fijos se acerquen hasta colisionar a un punto fijo estable  $x^* \approx 0$ .
- Para  $a > 0$ , no existen puntos fijos, ya que  $x = \pm\sqrt{-a} \notin \mathbb{R}$  (véase Figura 16C).

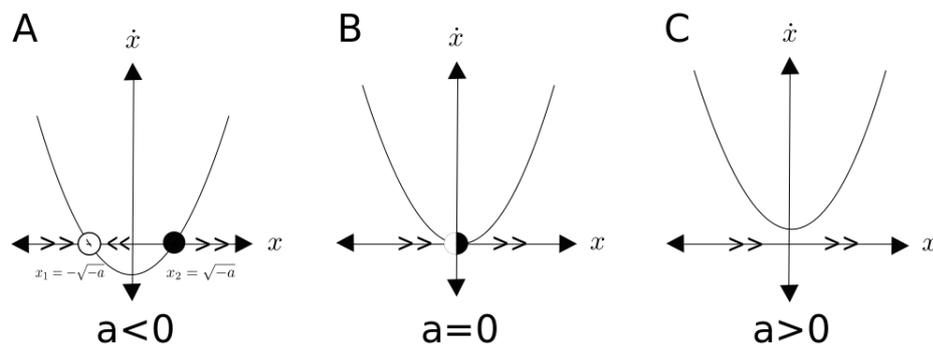


Figura 16: Puntos de equilibrio de una bifurcación silla–nodo en función de  $a$ .

En este ejemplo, se dice que la bifurcación ocurre en  $a = 0$ . El diagrama de bifurcación de  $x$  en función de  $a$  se muestra en la Figura 17.

**Bifurcación Tridente o Pitchfork**

La bifurcación tridente toma ese nombre por su semejanza a un trinche. La característica principal de esta bifurcación es que los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos. Existen dos tipos de bifurcación pitchfork: supercrítico y subcrítico. Enseguida, se da un prototipo de bifurcación supercrítico:

$$\dot{x} = ax - x^3 \tag{15}$$

Obsérvese que esta ecuación es invariante ya que si cambiamos  $x$  por  $-x$  y cancelamos los signos menos se obtiene la misma ecuación. Esta invarianza provoca la simetría mencionada. Haciendo el mismo análisis para encontrar los puntos fijos se obtiene que: para  $a < 0$ ,  $x = 0$  es punto fijo y estable (véase Figura 18A). Si  $a = 0$ ,  $x = 0$  sigue siendo estable pero más débilmente ya que la linealización desaparece (véase Figura 18B). Si  $a > 0$ , el origen se vuelve inestable y dos puntos fijos estables  $x = \pm\sqrt{a}$  aparecen (véase Figura 18C), [29].

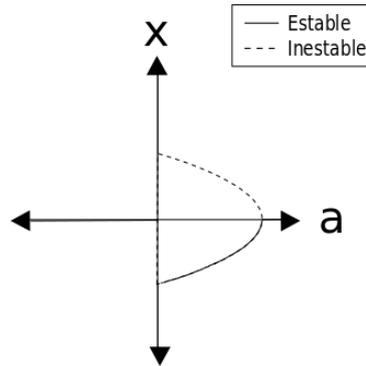


Figura 17: Diagrama de bifurcación de tipo silla-nodo para  $x$  en función de  $a$  para la EDO (14).

El diagrama de bifurcación de (15) se observa en la Figura 19.

**4.2.2 Análisis de Bifurcación del Modelo**

Para las lecturas de decisión corto-largo en la fase 3 y 4 de [21], es de nuestro interés cuando  $E_L = E_S = M/2$ , pues se requiere que el número de trayectorias para las decisiones cortas sean “las mismas” para las decisiones largas, ya que, la probabilidad de ambas se desea, debe ser la misma. Dicho de otra manera, si el punto fijo que representa las decisiones cortas  $S^*$  está más

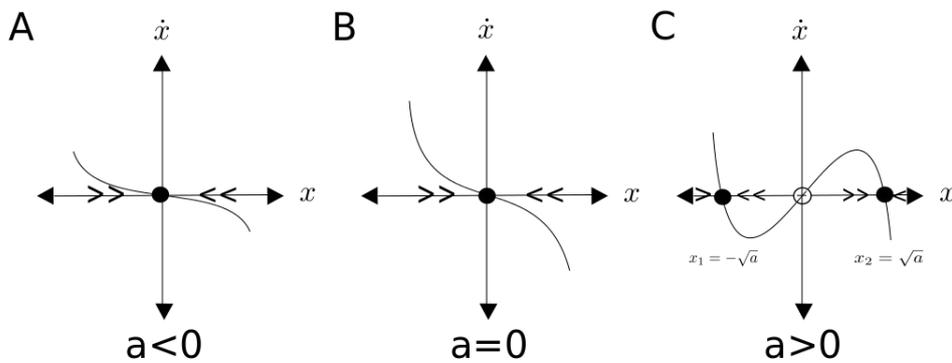


Figura 18: Puntos de equilibrio de una bifurcación tridente en función de  $a$ .

cerca del punto de decisión  $m^* = (M/2, M/2)$ , y  $L^*$  (punto fijo que representa las decisiones largas) está más alejada de  $m^*$ , entonces habría más lecturas para decisión larga (veáse Figura 20a). Recíprocamente, si  $S^*$  está más alejada y  $L^*$  más cerca de  $m^*$ , habrá mayoría de decisiones cortas (veáse Figura 20b).

De lo anterior, los diagramas de bifurcación que se presentan a continuación es a valores de la fase 3 y 4 dados en [21], ya que interesa saber a qué valores de cada parámetro aparecen o dejan de existir los tres puntos fijos para nuestras lecturas categóricas. Nuevamente, dado que del sistema (8),  $\frac{dS}{dt}$  es cualitativamente similar al sistema de  $\frac{dL}{dt}$ , se presentarán la representación de ambas en una misma.

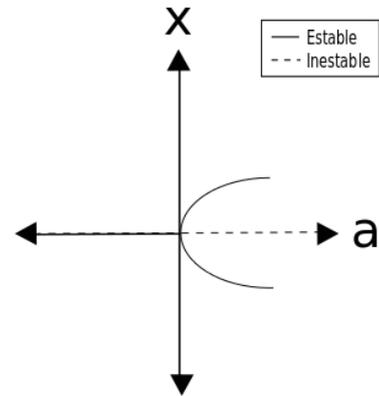


Figura 19: Diagrama de bifurcación de tipo tridente para  $x$  en función de  $a$  para la EDO (15).

En las figuras 21a) y 21b) se obtienen bifurcaciones tipo tridente para  $M$  y  $\sigma$ .

**Observación 4.4.** Durante el análisis de bifurcación de  $\sigma$  y  $M$ , se observó que para todo  $M \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 3,18 \cdot n$  donde  $n = M/10$ , esto cuando ocurre  $E_L = E_S = M/2$ .

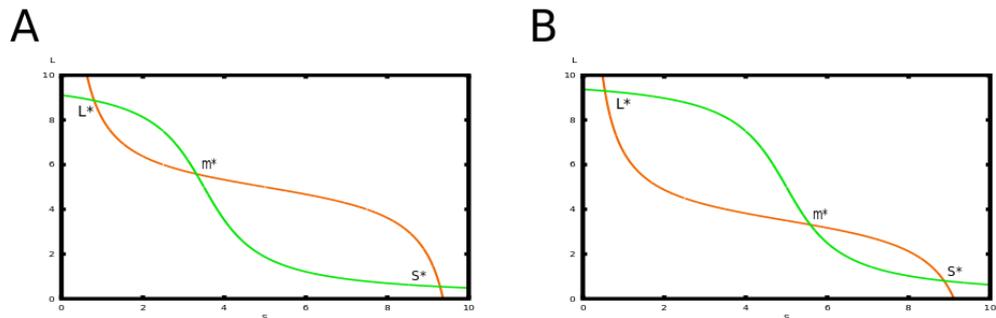
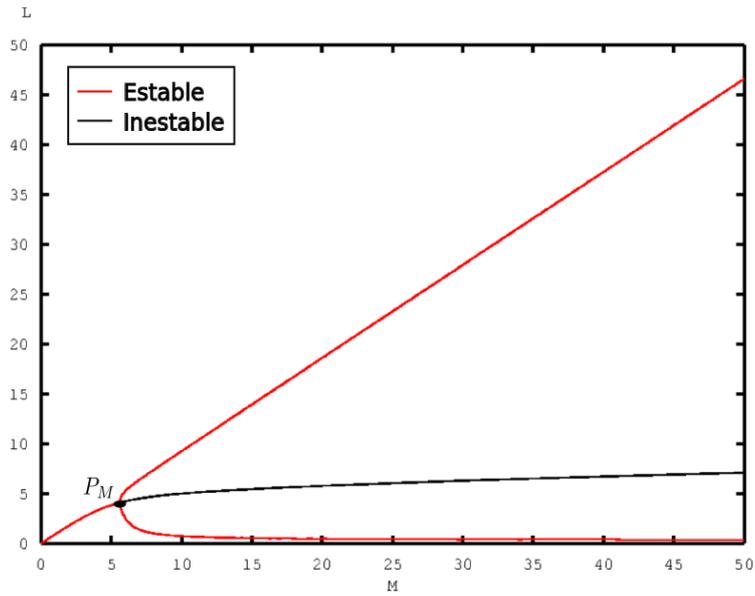
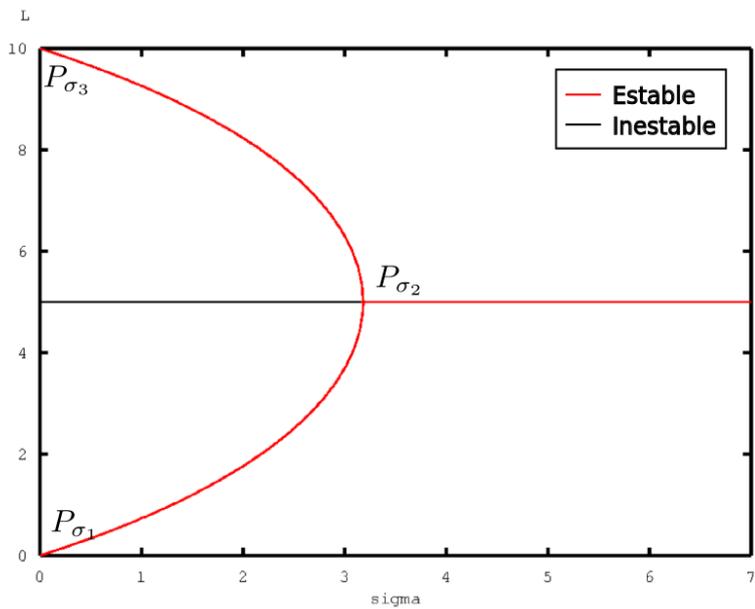
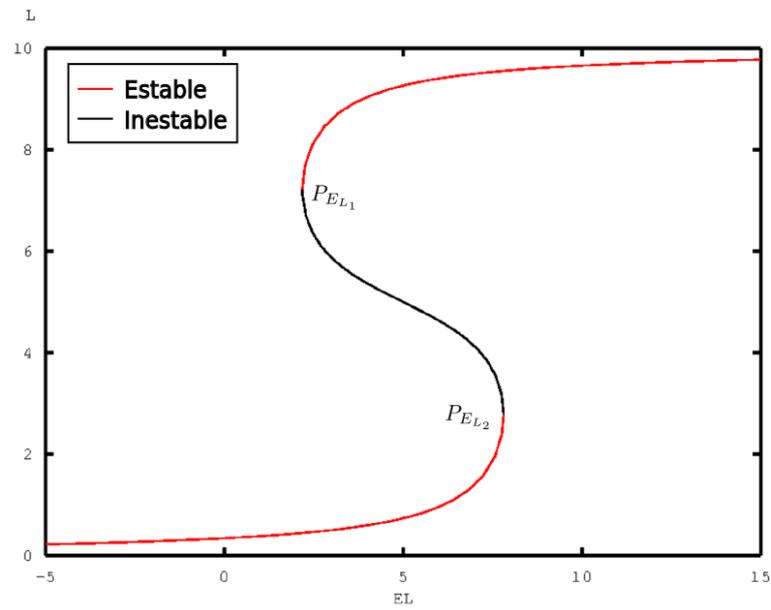
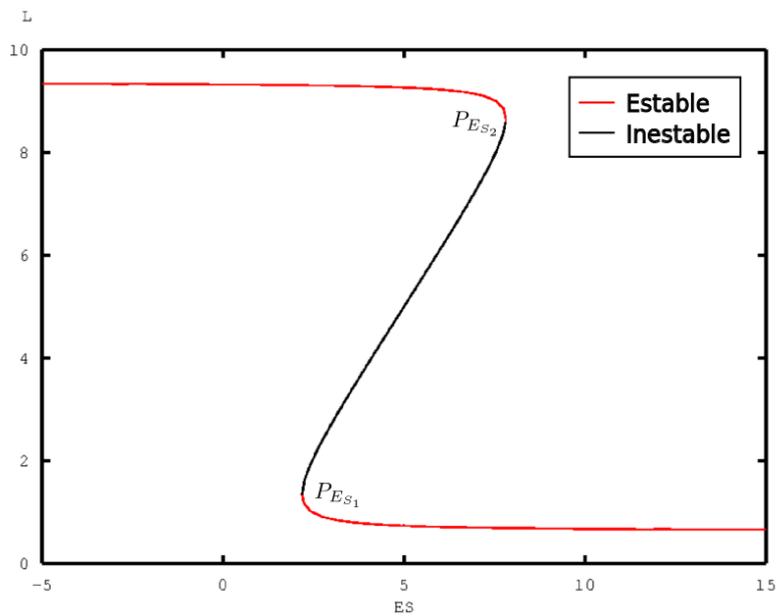


Figura 20: Tamaño de trayectorias para largo-corto.

En las figuras 22a) y 22b) se obtienen bifurcaciones tipo histéresis. Las obtenciones de lecturas para fase 3 y 4 de [21] se da en  $\approx 2,2 < E_L, E_S < \approx 7,8$ .

(a) Diagrama de bifurcación variando  $M$  respecto a  $L$ .(b) Diagrama de bifurcación variando  $\sigma$  respecto a  $L$ .

**Figura 21:** Diagramas de bifurcaciones para el sistema de ecuaciones (8) con parámetros fijos en  $M = 10$ ,  $\sigma = 1$  y  $E_L = E_S = 5$ . (a) Parámetro de bifurcación  $M$  con punto de bifurcación en  $P_M = (5, 4,105)$ . (b) Parámetro de bifurcación  $\sigma$  con punto de bifurcación en  $P_{\sigma_2} = (3,183, 5)$ . Para el caso cuando  $\sigma \rightarrow 0$ , los tres puntos fijos toman valor en  $L = 0, 5$  y  $10$  ( $P_{\sigma_1}$  y  $P_{\sigma_2}$  puntos fijos estables).

(a) Diagrama de bifurcación variando  $E_L$  respecto a  $L$ .(b) Diagrama de bifurcación variando  $E_S$  respecto a  $L$ .

**Figura 22:** Diagramas de bifurcaciones para el sistema de ecuaciones (8) con parámetros fijos en  $M = 10$ ,  $\sigma = 1$  y  $E_L = E_S = 5$ . (a) Parámetro de bifurcación  $E_L$  con punto límite<sup>a</sup> en  $P_{E_{L_1}} = (2,185, 7,223)$  y  $P_{E_{L_2}} = (7,815, 2,777)$ . (b) Parámetro de bifurcación  $E_S$  con punto límite en  $P_{E_{S_1}} = (2,185, 1,34)$  y  $P_{E_{S_2}} = (7,815, 8,655)$ .

<sup>a</sup> también es conocida como bifurcación fold, bifurcación tangente, punto silla-nodo o punto de retorno y es la bifurcación asociada con la aparición de un valor propio  $\lambda = 0$ .

# 5

## APROXIMACIÓN A LAS CLASIFICACIONES CATEGÓRICAS: SIMULACIÓN, ESTUDIO Y RESULTADOS

Construir un modelo que describa algún proceso cognitivo neuronal resulta no tan complejo si se tienen bases matemáticas bien sustentados pero, lograr imitar resultados reales con ello se complica aún más por la varianza de desarrollo que tiene el cerebro.

Para el inicio de esta tesis, se analizó el procedimiento realizado en [21] reproduciendo las respuestas categóricas presentadas en el capítulo 3. A medida que se familiarizaba con los conceptos neurológicos, se concluyó que la presencia de memoria de trabajo en el modelo, no debería ser considerada de modo independiente al sistema (5). Es así como al principio se realizó la búsqueda de acoplamiento para los sistemas de la sección 3.4 además de incluir influencia de nuevas variables, pero el tamaño de muestra proporcionada en [22] (Apéndice D) no favoreció para la replica de respuestas correctas e incorrectas de TR y TM en los modelos propuestos.

En las siguientes secciones se presentará la conducción del sistema (8) para la imitación de las respuestas categóricas descritas en el capítulo 3. Así también, se exhiben las simulaciones con los valores de las variables que mejor describen las clasificaciones para este y otro modelo propuesto. La representación de las fases y aproximación a los datos reales se realizaron en los simuladores XPPAut y MatLab respectivamente (véase Apéndice B C).

### 5.1 UTILIZACIÓN DE LOS RESULTADOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES

Primeramente, se presenta la reproducción de las decisiones categóricas con un modelo descriptivo, esto con el afán de presenciar las conclusiones obtenidas para la construcción de un modelo predictivo. En otras palabras, iniciaremos con la edificación de un modelo teórico para las bases principales del modelo propuesto, el cual se tiene como objetivo el estudio de la influencia del intervalo categórico en la planificación y ejecución en [21].

La semejanza de bifurcaciones que se obtuvieron al variar  $M$  en la subsección 4.2.2, nos condujo al ajuste de los demás parámetros tratándose de obtener trayectorias que describieran cualitativamente la tarea de [21] —en las siguientes subsecciones se describe esta geometría—, lográndose en  $M = 10$  y  $\sigma = 1$ ; el tener esta elección de parámetros se introduce al régimen de tres

puntos fijos (véase Figura 15 y 22).

Para la descripción de las cuatro fases en el cerebro (inicio de la sección 3.4), se auxilió de los estudios realizados en [19] donde se describe un proceso más experimental. De esta manera, se presenta la descripción de cada etapa.

### 5.1.1 Imitación de la fase 1: carga de estímulo

**DESCRIPCIÓN DEL PUNTO CRÍTICO:** Durante la carga de los estímulos, las zonas neuronales largo-corto se encuentran activas junto con la entradas externas  $E_L$  y  $E_S$ . Si ambas zonas reciben la misma entrada excitatoria, el cruce de las ceroclinas proporcionará dos puntos fijos estables. Dado que se requiere que existan decisiones para largo y corto, requerimos que el conjunto de decisión se encuentre alrededor de la separatriz ( $45^\circ$  de las diagonales del plano fase, véase Figura 23). Para que esto último ocurra, se necesita de la inexistencia de entradas excitatorias—descripción dada en la fase 2. Es así como se determina un punto de equilibrio estable para la carga de los intervalos determinado por el valor de  $E_L = 1$  y  $E_S = 0$  (véase Figura 23 y 11), el cual traza geométricamente los intervalos menores al Intervalo Central (IC) como cortas y las mayores como largas.

**INTERVALO CENTRAL:** Aunque bien se sabe que las decisiones de una persona deben tener un comportamiento no lineal, se propone para [21], que el IC sea en 685 (intervalo medio de 450 y 920).

**CONDICIONES INICIALES:** Para que el modelo realice elecciones cortas a la izquierda y largas a la derecha del IC, se buscaron Condiciones Iniciales (CI) donde  $L \approx S$ , es decir, las condiciones del IC se sitúen en la separatriz. Las CI propuestas son  $L = 0,52001$  y  $S = 6,502$ .

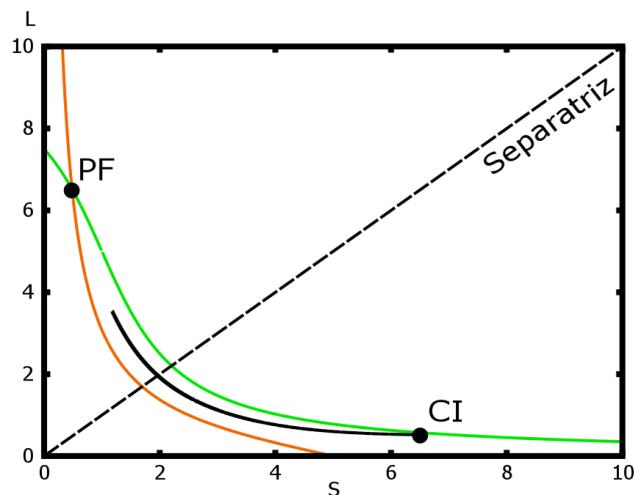


Figura 23: Traza de las trayectorias para la descripción de la carga de estímulo.

### 5.1.2 Imitación de la fase 2: fase de mantenimiento

Para la fase de mantenimiento, es claro que las zonas neuronales largo-corto se encuentran silenciadas y para que se cree una línea de atracción cerca de la separatriz —espacio donde se desea se inicien las tomas de decisión—, deben manipularse las variables de entrada excitatoria. Dado que en esta etapa se piensa ya no hay presencia de estímulo, entonces  $E_L = E_S = 0$  (véase Figura 24 y 11D). Recordando nuevamente, las lecturas se hacen en  $t = 1000$  ms para todos los intervalos, tiempo de mantenimiento en la memoria.

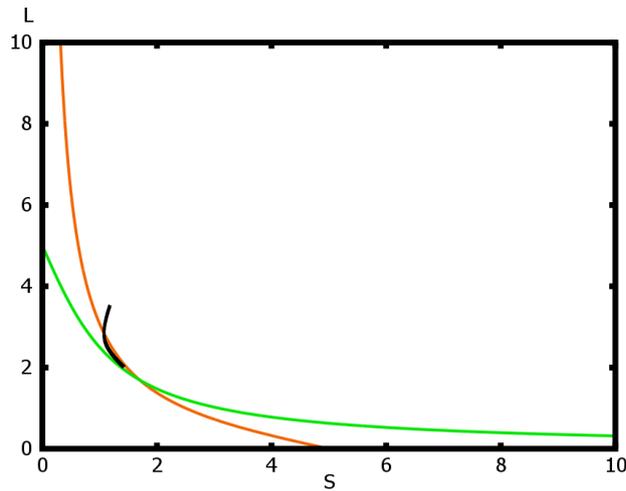


Figura 24: Traza de las trayectorias para la descripción de la fase de mantenimiento.

### 5.1.3 Imitación de la fase 3: fase de tiempo de reacción

**DESCRIPCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS:** Se propone un modelo biestable donde se tienen dos puntos fijos estables a ambos lados de un punto fijo inestable. El punto de equilibrio inestable permite conducir las trayectorias a uno de los puntos críticos estables donde uno representa las elecciones cortas y la otra las elecciones largas (véase Figura 25).

**CONDICIÓN DE LAS ENTRADAS EXCITATORIAS:** En esta etapa, las neuronas inician su elección a una de las dos categorías y se propone que el número de trayectorias a decisiones cortas sea proporcional a decisiones largas, para ello se necesita que las lecturas finales de la fase 2 se encuentren cerca de la separatriz y que las entradas excitatorias  $E_L$  y  $E_S$  sean iguales, pues de no ser así, tendríamos más elecciones largas si  $E_L > E_S$  o elecciones cortas si  $E_S > E_L$  como se aprecia en la Figura 25. En esta ocasión:  $E_S = E_L = 5$ .

**PROPUESTA DE UMBRAL:** Al inicio del capítulo 1, se dijo que una neurona desata potenciales de acción si alcanza cierto umbral pero este varía siempre, es decir, el umbral es dinámico. Hasta la fecha, no se sabe cuáles son las circunstancias que llevan a la célula su elección por cierto umbral.

De esta manera, no es de esperar que para la descripción de los TR,

el umbral que marca el inicio de movimiento sea distinto para cada intervalo categórico. Recordando los resultados del capítulo 3, presentamos que el rendimiento en las personas se veía influenciado por la magnitud del intervalo, esto es, se espera que para intervalos cercanos del IC el TR sea mayor y en los más alejados sea menor.

Para computarizar los TR a la presentación de los objetivos, se propusieron umbrales circulares que simbolizaban el inicio de movimiento, de tal manera que las trayectorias al cruzar cierto umbral se iniciaba la medición del TM (véase Figura 25). Para poder corroborar el párrafo anterior, se manipularon los umbrales de tal manera que los TR del modelo coincidiera con la media del TR de los datos en [21] de cada intervalo (véase Apéndice D).

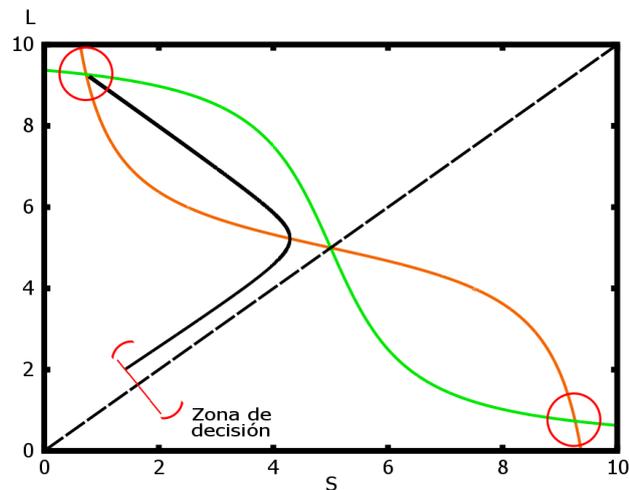


Figura 25: Traza de las trayectorias para la descripción de la fase de TR. Los círculos representan los umbrales como inicio de movimiento y la zona de decisión son las posiciones finales de la segunda fase.

#### 5.1.4 Imitación de la fase 4: fase de tiempo de movimiento

Durante la tarea de categorización, se observó que algunas personas iniciaban su movimiento antes de tomar una decisión (TR más corta) y decidir mientras se mueven (TM más larga) siempre y cuando los círculos de decisión estuvieran cerca uno del otro, ya que una modificación de trayectoria ligera sería suficiente para alcanzar el objetivo deseado.

Dado que los datos del apéndice D, muestran la disvarianza del párrafo anterior, nuevamente se propone un segundo umbral circular que represente el final de movimiento y al mismo tiempo la decisión concluyente de tal manera que se aproxime a la media de los TM del ensayo en [21].

Así, para la traza de la última fase se sigue proponiendo un modelo bies-  
table manteniéndose las mismas CI:  $E_L = E_S = M/2$  (véase Figura 26).

Determinar el tiempo en que las trayectorias cruzaban los umbrales para medir el TR y el TM era cuestión de ajustar radios. La determinación de los

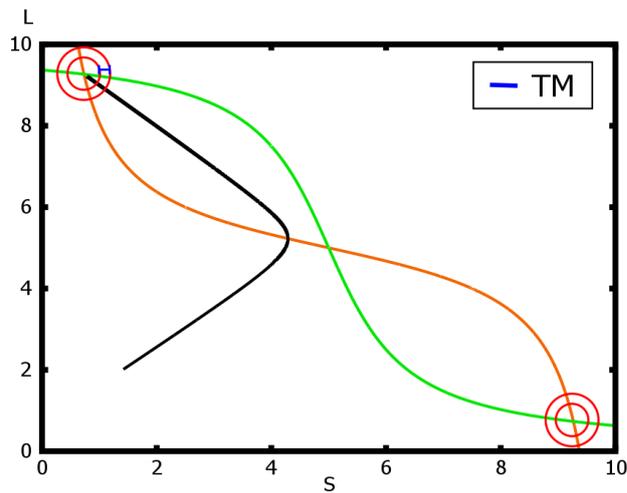
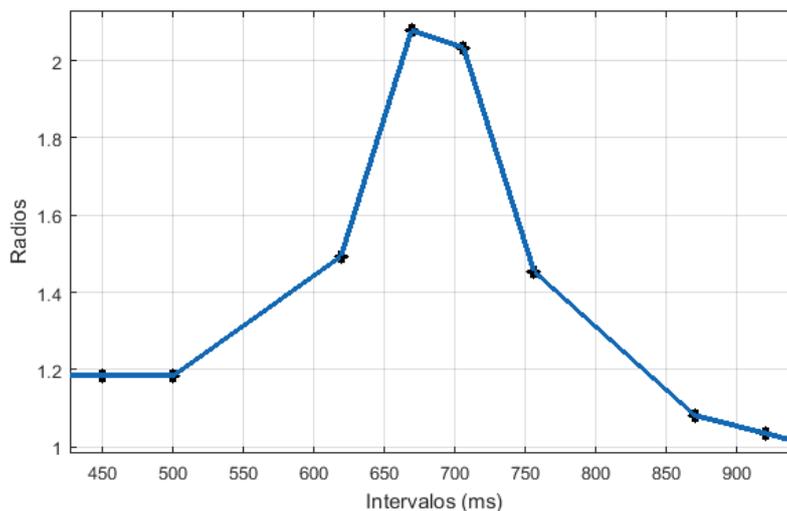


Figura 26: Traza de las trayectorias para la descripción de la fase de **TM**. Los círculos más pequeños ubicados en los puntos fijos laterales representan los umbrales de final de movimiento.

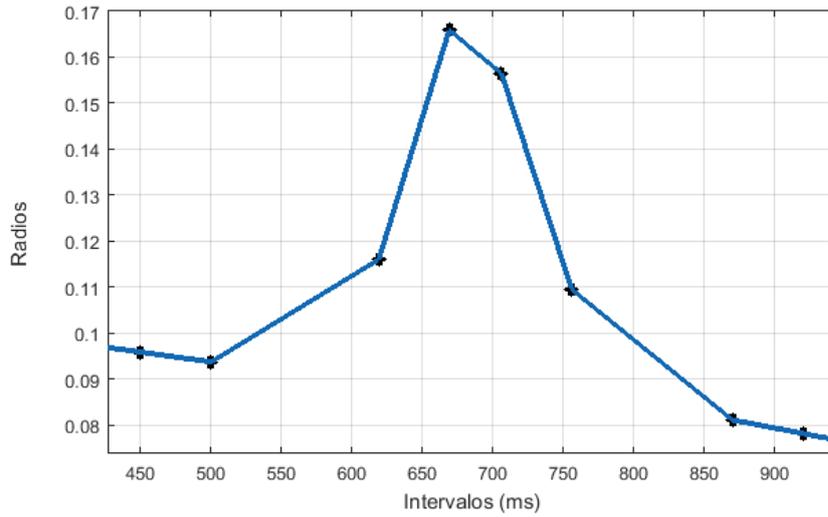
radios permitió describir el comportamiento de los umbrales que en inicio se sospechaba pues, a intervalos cercanos al **IC**, los umbrales son más grandes y a intervalos extremos los intervalos son más chicos (véase Figura 27).

## 5.2 DETERMINACIÓN DEL MODELO PREDICTIVO

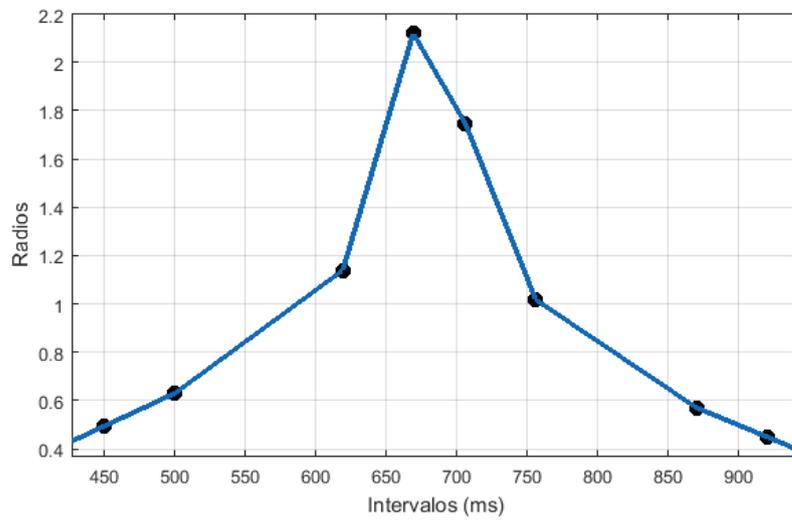
Como se habrá dado cuenta, gran parte del éxito en la reproducción de las respuestas categóricas dependerá de cómo se elijan los umbrales pues, como se aludió anteriormente, proponer un umbral fijo para todos los intervalos a clasificar, no describe el modelo biológico en principio ya que este es dinámico. Para la propuesta de umbrales se echa mano de los resultados descritos en el capítulo 3, primero desechando los que otorgan poca información hasta proponer la más objetiva.



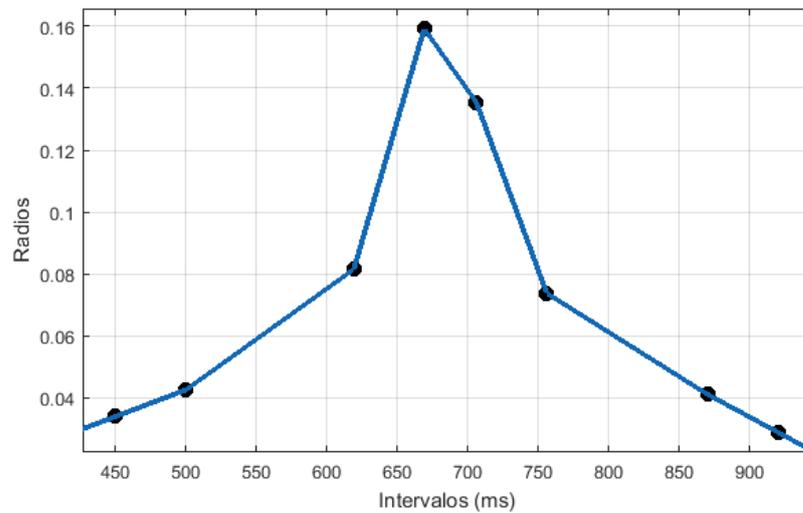
(a) Respuestas correctas en **TR**.



(b) Respuestas correctas en TM.



(c) Respuestas incorrectas en TR.



(d) Respuestas incorrectas en TM.

Figura 27: La longitud de los radios informa la magnitud del umbral por intervalo.

**DETERMINACIÓN DE UMBRAL POR ÁNGULOS.** Recordando los resultados arrojados durante los ensayos [21], se observó que la magnitud del ángulo entre objetivos afectaba en la decisión del intervalo pues, a ángulos mayores, el **TR** crecía y los **TM** disminuían. Determinar umbrales en función del ángulo ( $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $180^\circ$ ) creemos, se hace reflejar en la media de las respuestas en el apéndice D puesto que —representándose en un modelo descriptivo— es labor de correspondencia de ángulos con umbrales: a ángulos estrechos, menor era el umbral; al final el promedio de los tres se reflejaba en uno solo. A pesar de proporcionarse los tiempos por ángulos [22], la unificación de los tiempos por persona no refleja la acertación de las respuestas correctas e incorrectas y consecuentemente, no podía utilizarse para la imitación categórica.

**DETERMINACIÓN DE UMBRAL POR VARIABLES CINEMÁTICAS.** Para la comprensión variada de los **TM**, además de estudiarse la distancia entre objetivos, también se analizaron otras variables cinemáticas (revisar sección 4.2), encontrándose que la dirección del movimiento no influía en el rendimiento (véase Figura 28A) de categorización pero sí en otras variables :

- en los ejes de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , la área de las trayectorias era menor (véase Figura 28B),
- la velocidad máxima fue mayor para movimientos en  $0^\circ$  y  $180^\circ$  y,
- hubo más submovimientos en la dirección de  $270^\circ$ .

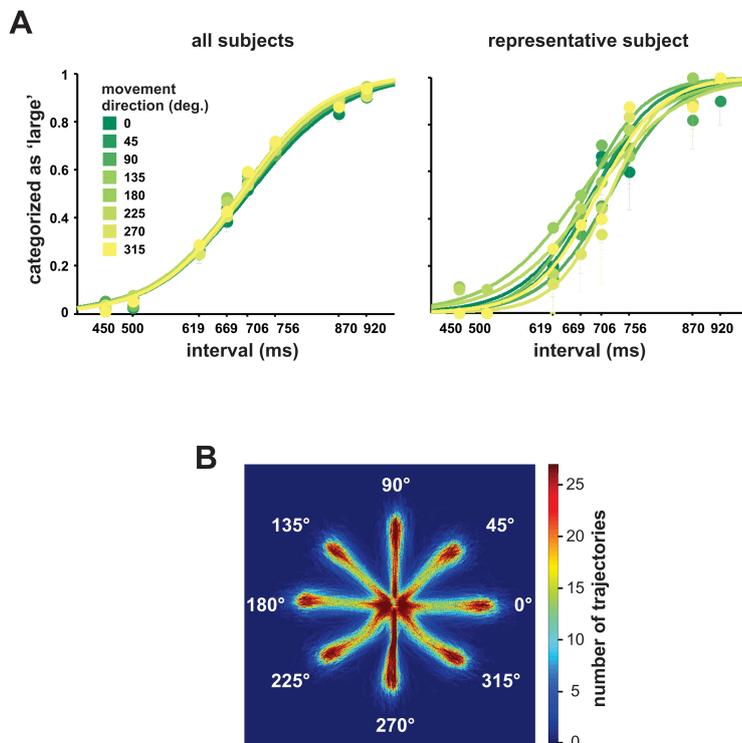


Figura 28: A) Las curvas muestran el rendimiento psicométrico por persona. B) Trayectorias de todos los movimientos de los individuos en la pantalla. Figura obtenida de [22].

A pesar de la influencia de la dirección en los **TM**, ninguna de las variables antes mencionadas describen su perfil, pues es claro que la cinemática es independiente del efecto en los procesos de percepción y categorización.

**DETERMINACIÓN DE UMBRAL POR RENDIMIENTO.** Durante los ensayos [21], para conocer la influencia que se tenía en el rendimiento, se realizó un ANOVA de medidas repetidas con tres factores distintos, encontrándose lo siguiente: ni la dirección del movimiento y ni el ángulo entre los círculos de respuesta influían en el rendimiento del individuo pero la magnitud del intervalo sí lo hacía. Para intervalos próximos al **IC** se observaban más errores, así también los **TR** y de movimiento eran mayores (véase Figura 10A).

Revisando la conducta de los radios en la sección anterior, se condujo a la relación de los umbrales que definen el inicio y fin del movimiento con el rendimiento de los individuos. De esta manera, se decide la propuesta de umbrales que refleje el rendimiento en las pruebas.

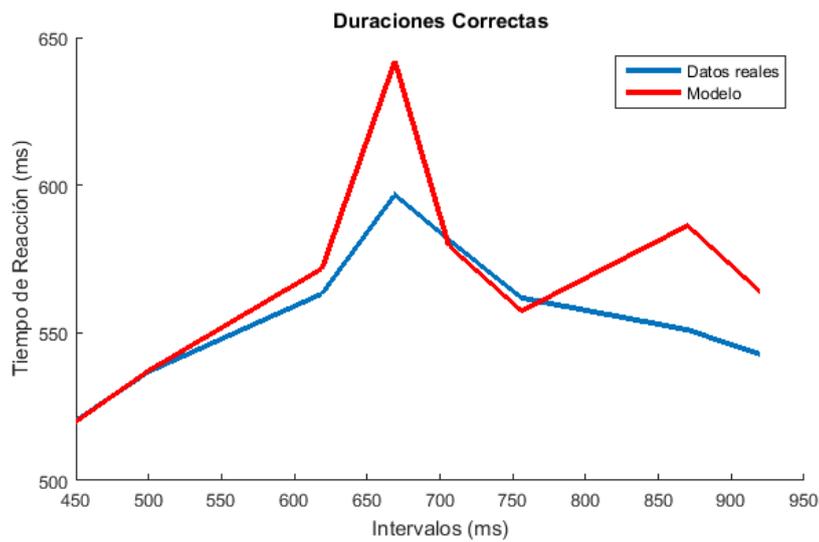
### 5.2.1 Establecimiento del modelo

En principio, para la simulación de la fase 3 y 4, se decidió proponer como umbral la media de los **TR** y **TM** por intervalo obtenidos de los ensayos en [21] (véase Apéndice D), pues evidentemente se pretendía conocer la aproximación del modelo (8) a las respuestas categóricas, obteniéndose las figuras 28 y 29.

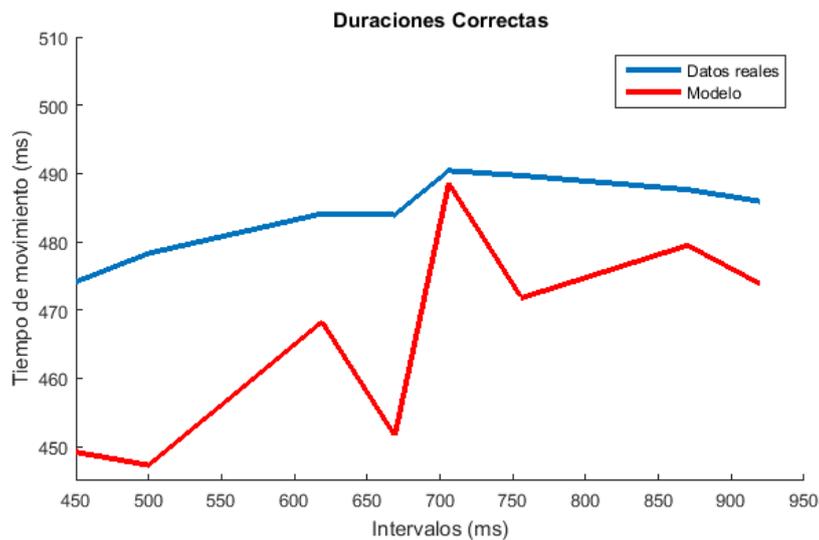
Claramente se observa que la aproximación del modelo a las respuestas categóricas no es tan buena. La imitación de los **TM** en respuestas incorrectas no asemeja el comportamiento de las decisiones en [21]; en cambio, para respuestas correctas se sigue el patron creciente a intervalos cercanos del **IC** y decreciente para intervalos extremos, sin embargo, se describen muy debajo de los datos reales. Por otro lado, los **TR** en respuestas correctas e incorrectas se asimilan mejor a las decisiones categoricas en excepción de los intervalos 656 y 870 para respuestas acertadas e intervalos post inicial y prefinal de las respuestas no acertadas.

Revisando las listas 7 y 8, se encontró que los tiempos de respuestas incorrectas no representaban el tamaño de la muestra propuesta (20 personas), pues en varias ocasiones aparece en acrónimo Not a Number (**NaN**), y probablemente se debía a circunstancias técnicas o indeterminaciones. Esto no solo permite que el modelo falle sino también no se encuentre relación en las decisiones incorrectas, por lo que se decide analizar solo a respuestas correctas. La elevación de picos en los intervalos 656 y 870 de respuestas correctas en **TR**, se familiarizó con la decisión particular de una persona (véase Lista 5) provocando sesgo en los datos; mientras tanto en los **TM** correctos se observa poca variabilidad entre estimadores. Particularmente, si se hiciera un ajuste de parámetros en los **TR**, la imitación del modelo a los datos categóricos es bastante buena, pero como objetivo inicial se pretende la aproximación de

las respuestas considerando esta variabilidad.



(a) Fase 3.



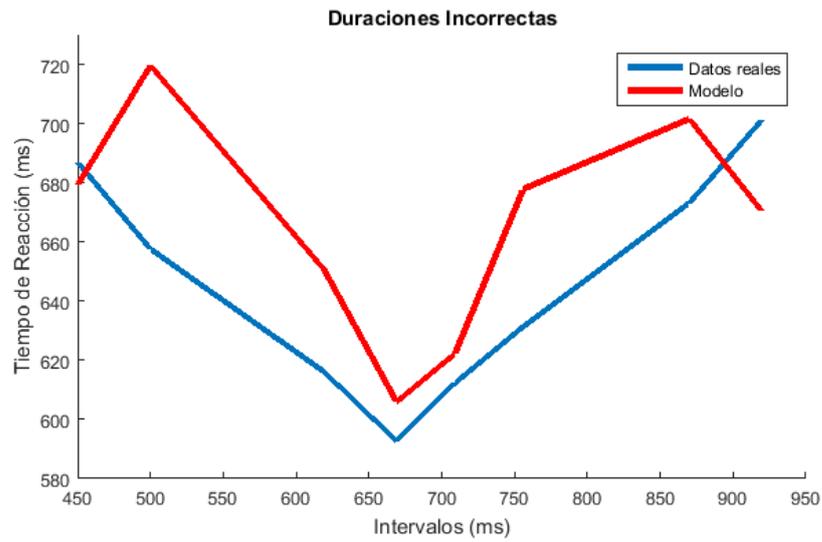
(b) Fase 4.

**Figura 29:** Aproximación del modelo a los datos reales en respuestas correctas. Para las lecturas en el modelo, se ingresó la media por intervalo de los TR y TM de las respuestas dadas por los individuos.

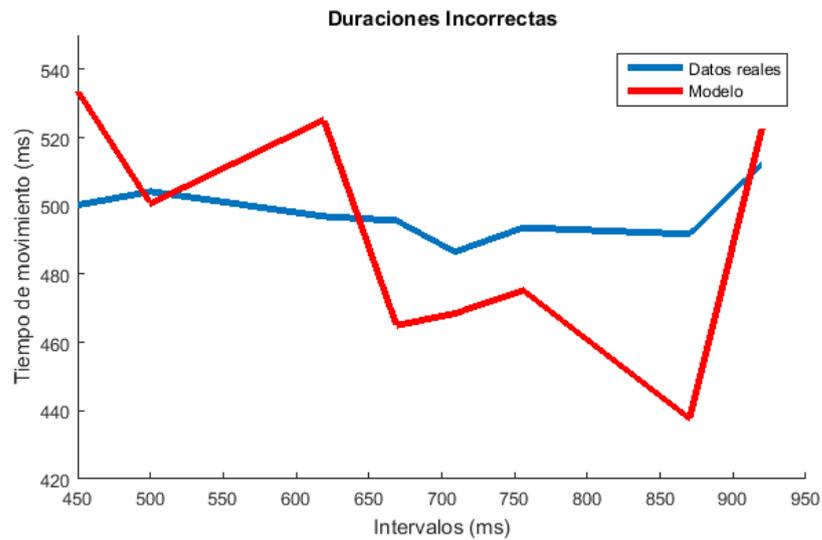
Para la proposición del umbral por rendimiento, se adopta que las trayectorias de TR y TM sigan describiéndose con el promedio de los datos categóricos pero en dependencia de que a intervalos cercanos al IC el tiempo de reacción y movimiento sean mayores. De acuerdo a la descripción anterior se propone que el nivel de rendimiento se defina en la siguiente función:

$$f(\cdot)(x) = e^{-|x|} - ae^{-\frac{|x|}{s}} \quad (16)$$

donde  $a$  especifica la altura de  $y$   $s$  afecta el decaimiento de  $f(\cdot)$  (véase Figura 30).



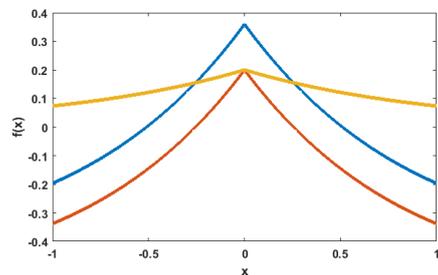
(a) Fase 3.



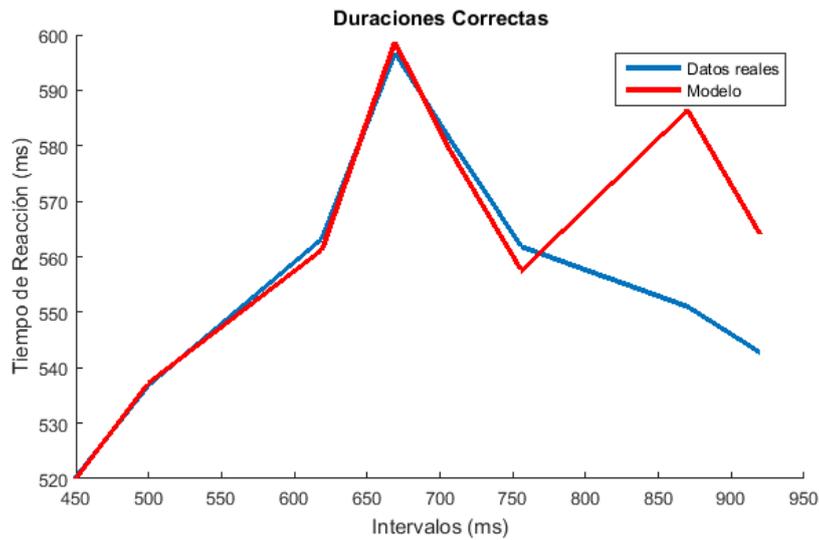
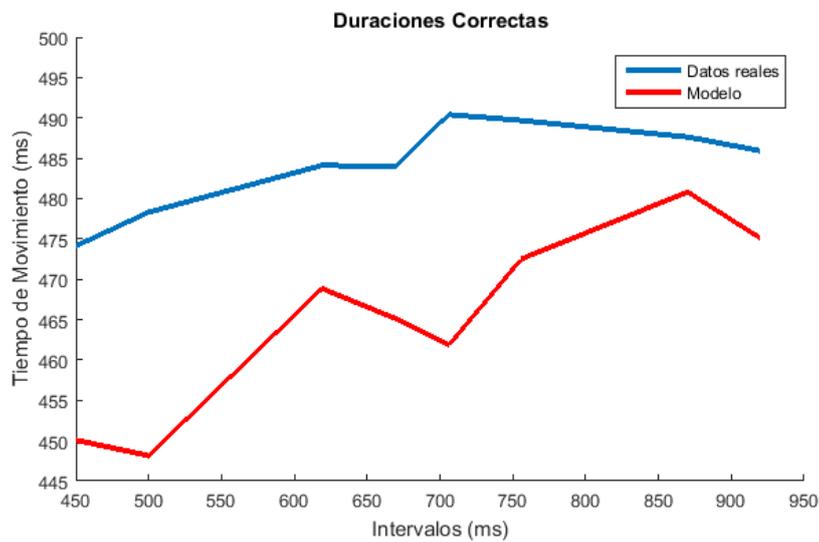
(b) Fase 4.

Figura 31: Aproximación del modelo a los datos reales en respuestas incorrectas.

La media de los **TR** y **TM** en los datos del Apéndice D, refleja que los intervalos centrales no se hallan en 685 pues se registran **TR** más bajos que en **TM**. Para **TR** el intervalo central se encuentra  $\approx 660$  mientras que en **TM** se halla en  $\approx 670$  —la simulación puede verse en el Apéndice C. De esta manera se replican las fases 3 y 4 (véase Figura 32).

Figura 30: Función (16) en variación de  $x$  y  $a$ .

Nuevamente se observa que la reproducción de los **TM** en la figura 32b) no fueron próximas a las respuestas categóricas, pues de acuerdo a los resul-

(a) Replicas de fase 3 con  $f(\cdot)$ .(b) Replicas de fase 4 con  $f(\cdot)$ .Figura 32: Imitación de las respuestas correctas en la fase 3 y 4 con  $f(\cdot)$ .

tados en el capítulo 3 la dirección del movimiento no influyó en el rendimiento de categorización. En la búsqueda de variables que pudieran describir el comportamiento de los TM se halló en [25] que la experiencia visual influye en los movimientos de las manos de punto a punto. Para regiones fronto-paralelos en el plano los movimientos son más curvos. De esta manera se comprende la relación de TM más largos en [21] sin llegar a otra propuesta de umbral.

Con lo anterior se concluye que a pesar de la implicación de un movimiento en una reacción, la definición de una no depende de la descripción de la otra, es decir, los tiempos de reacción y movimiento son independientes entre sí; sin embargo, se realizó una gráfica de error entre el modelo propuesto y la media de los datos categóricos (véase Figura 33), donde se encontró quizás, un comportamiento de lucha de decisión largo-corto mientras se hace

el movimiento.

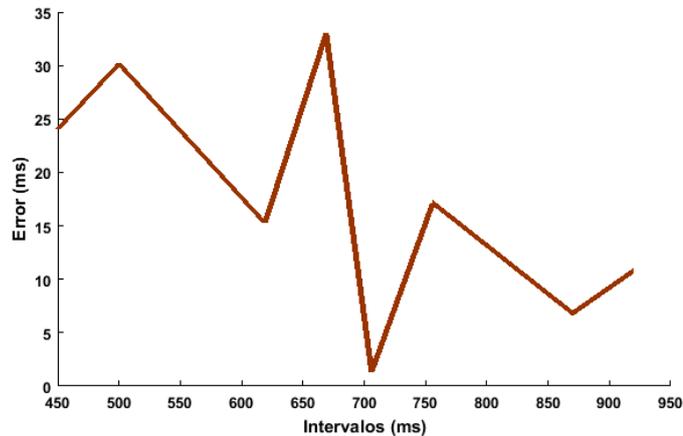


Figura 33: Gráfica de error de los TM para respuestas correctas.

La figura 33 permitió hacer una relación de comportamiento exitoso de vida que se menciona en [21] —pues de experimentos realizados por mí misma— se observó que para experiencias nuevas en un sujeto, no existe un ajuste inicial de movimiento, esta se hace cuando ya se tuvo un estímulo semejante, por ejemplo: en un entrenamiento de beisbol, se realiza una tarea llamada voladeros, el cual consiste en atrapar la pelota cuando es bateada a largas distancias. El tiempo de caída de la pelota dependerá de la curvatura que se haya arrojado, para entonces el jugador debe calcular la distancia que caerá la pelota. En una práctica se observó que los movimientos de acache en el segundo voladero para un jugador novato, dependía del éxito o fracaso que se había tenido del primero; si la primera vez el jugador se encuentra a una distancia larga y el recorrido de la pelota es corta y no se atrapa, seguramente habría un registro de TM corto pues probablemente creería que sobraba tiempo de atrape, y si en la segunda se encuentra con la misma circunstancia tal vez modificará su movimiento con TM más largas y sucesivamente, describiéndose así un ajuste de trayectorias y variando el TM como se observa en la figura 33. Desafortunadamente esto no puede afirmarse pero podría hacerse una propuesta de ensayo para otras investigaciones futuras.

## CONCLUSIONES

De los intentos realizados para la imitación de los TR y TM, queda claro que el comportamiento de las neuronas a la presencia de estímulos es muy variado y complejo para su descripción. En este espacio se resumen todos los resultados obtenidos así como algunas sugerencias para posibles trabajos teóricos o experimentales.

En el capítulo 3, se presentó un modelo de inhibición mutua que fue inspirado de los métodos de soporte mostrados en el capítulo 2 con el objetivo de estudiar la influencia que la duración del intervalo categorizado tenía en la planificación y ejecución del movimiento mediante la medición de los TR y TM, lo que condujo a estudiar este modelo fue la ausencia de justificación matemática observada en [21], pues a primer vistazo no se comprendía la relación de la memoria de trabajo  $M_L-M_S$  con la memoria de almacenamiento temporal L-S. La similitud de los sistemas con que se representaron ambas poblaciones realizó a analizarse solo una, concluyéndose que deberían encontrarse acopladas.

A lo largo de la investigación de tesis se basó en distintos modelos para la proposición de alguno que incluyera memoria de trabajo, pero la aproximación a los TR y TM eran semejantes a los del sistema (8) por lo que se decidió continuar el análisis en este sistema y utilizando los resultados de [21]. De las diferentes variables estudiadas, se encontró que el rendimiento si influía en la planificación del individuo pero no en su movimiento como se afirma en [21]. A pesar de la propuesta de diferentes variables cinemáticas que pudieran describir la ejecución de movimiento en [21], ninguno pudo describir los perfiles de TM y por ende no propinó a la propuesta de un segundo umbral que describiera el final de movimiento. Sin embargo para esperanzas a futuro, el artículo [25] afirma que la experiencia visual influye en los movimientos de las manos de punto a punto y bien, esta podría ser una variable de estudio para la propuesta de umbrales al término del movimiento.

Además de la falta de otras variables experimentales –al menos para las ejecuciones de los movimientos—, se encontró que la alza de pico en el intervalo 870 de los TR se debía a la elección de una persona; por otro lado, la inexistencia de algunos tiempos de reacción y movimiento (marcados con NaN) en las listas de respuestas incorrectas (véase Apéndice D, listas D.3 y D.4) no muestran el reflejo de decisión de 20 personas y con ello es evidente que no existen comportamientos establecidos pues, al verse más errores, se prevee que hubo falta de interés en los ensayos. Los tiempos de reacción y movimiento con el sistema (8) se replican mejor si se hace un ajuste de parámetros pero hacer eso no creemos venga incluido en la maquinaria genética neuronal. De esta manera se concluye que el tamaño de la población no fa-

vorece a la imitación de los TR y TM.

Por último, de las figuras 32a y 32b se concluye que los TR y los TM son independientes una de otra y seguramente deba incluirse influencia visual como se sugiere en [25].

# A

## SUPERPOSICIÓN Y LINEALIZACIÓN

### A.1 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

**Teorema A.1** (De superposición o principio de superposición). Sean  $y_1, y_2, \dots, y_k$  soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden  $n$

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

donde  $x$  esta en un intervalo  $I$ . La combinación lineal

$$Y = \sum_{i=1}^k c_i y_i(x)$$

donde  $c_i$  constantes arbitrarias para  $i = 1, 2, \dots, k$ . También es una solución cuando  $x$  está en el intervalo  $I$ .

*Demostración.* Se prueba el caso  $k = 2$ . Sea

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

el operador diferencial y sean  $y_1(x), y_2(x)$  soluciones de la ecuación homogénea  $L(y) = 0$ . Si definimos  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ , entonces por la linealidad de  $L$ ,

$$L(y) = L(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

□

El teorema A.1 demuestra que cualquier combinación lineal de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución de la ecuación.

### A.2 PRINCIPIO DE LINEALIZACIÓN

En los sistemas dinámicos, la linealización es un método para estudiar la estabilidad local de un punto fijo en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales [7]. Un sistema es no lineal si no se aplica el teorema A.1.

**Teorema A.2** (De primera aproximación o principio de linealización). Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$ , y sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ .

- i) Si todos los autovalores de la derivada  $Df(x_0)$  tienen parte real estrictamente negativa, entonces  $x_0$  es asintóticamente estable.
- ii) Si existe un autovalor de  $Df(x_0)$  con parte real estrictamente positiva, entonces  $x_0$  es inestable.

### A.3 CICLOS LÍMITES

Un **ciclo límite** es una órbita cerrada y aislada, es decir, la imagen de una trayectoria periódica. Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite se dice que es *estable* y de lo contrario *inestable*; en casos donde las trayectorias se alejan y al mismo tiempo se acercan del ciclo se le conoce como ciclo límite *semi-estable* [29]. Los sistemas lineales pueden tener órbitas cerradas pero no son aisladas así que no pueden tener ciclos límites.

El siguiente teorema se establecen métodos para que existan órbitas cerradas en sistemas particulares.

**Teorema A.3** (De Poincaré–Bendixson). *Supóngase que*

- i)  $R$  es un subconjunto cerrado delimitado del plano,*
- ii)  $\dot{x} = f(x)$  es un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a  $R$ ,*
- iii)  $R$  no contiene puntos fijos y*
- iv) existe una trayectoria  $C$  que está confinada en  $R$ ,*

*entonces  $C$  debe aproximarse a una órbita cerrada, es decir,  $R$  contiene ciclo límite.*

# B | CÓDIGO XPPAUT

En este apéndice se muestra el código realizado en XPPAut para la obtención de lecturas en las cuatro fases (Figuras 23–26). Al compilar un código se arroja una ventana donde puede cambiarse el valor de los parámetros directamente (véase Figura 34). Los 8 sistemas de ecuaciones corresponden a cada intervalo para ahorro de simulación en cada uno.

Listado 1: Código de lecturas de decisión

```
L450' = (-L450 + f(EL - S450)) / tau
S450' = (-S450 + f(ES - L450)) / tau
L500' = (-L500 + f(EL - S500)) / tau
S500' = (-S500 + f(ES - L500)) / tau
L619' = (-L619 + f(EL - S619)) / tau
S619' = (-S619 + f(ES - L619)) / tau
L669' = (-L669 + f(EL - S669)) / tau
S669' = (-S669 + f(ES - L669)) / tau
L706' = (-L706 + f(EL - S706)) / tau
S706' = (-S706 + f(ES - L706)) / tau
L756' = (-L756 + f(EL - S756)) / tau
S756' = (-S756 + f(ES - L756)) / tau
L870' = (-L870 + f(EL - S870)) / tau
S870' = (-S870 + f(ES - L870)) / tau
L920' = (-L920 + f(EL - S920)) / tau
S920' = (-S920 + f(ES - L920)) / tau
#
f(x) = M * ((1/2) + (atan(x/sigma)/pi))
#
L450(0) = .52001
S450(0) = 6.502
L500(0) = .52001
S500(0) = 6.502
L619(0) = .52001
S619(0) = 6.502
L669(0) = .52001
S669(0) = 6.502
L706(0) = .52001
S706(0) = 6.502
L756(0) = .52001
S756(0) = 6.502
L870(0) = .52001
S870(0) = 6.502
L920(0) = .52001
S920(0) = 6.502
```

```

#
par tau=155,EL=5,ES=5
par M=10,sigma=1
#
@ total=1500,dt=0.005
@ xp=S450,yp=L450,xlo=0,ylo=0,xhi=10,yhi=10
@ nmesh=500
@ bound=100000
@ maxstor=7000000
done

```

Aunque ya tiene varios años, XPPAut es un potente programa científico que permite solucionar ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

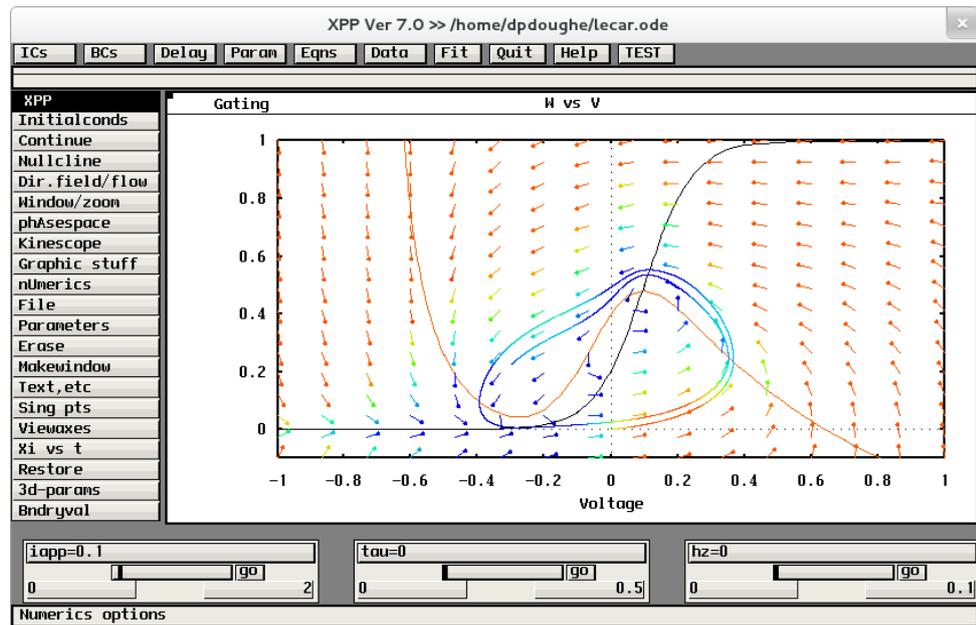


Figura 34: Ventana de XPPAut. Figura obtenida de [3].

# C

## CÓDIGO MATLAB

Los códigos que a continuación se presentan corresponden a las gráficas de [TR](#) y [TM](#) del modelo descriptivo y predictivo. Para la extracción de tiempos, L y S eran llamadas de listas obtenidas en XPPAut.

Por reducción de tiempo, se creó un programa que arrojara las [CI](#) para fase 2 después de haberse leído los intervalos. Las fases 1 y 2 no cambiaron para ambos modelos.

### C.1 CÓDIGO MATLAB: PRIMERA FASE

Listado 2: Código de fase 1 en los modelos.

```
1 close all
2 clc
3
4 C=importadata('fase1.dat');
5
6 Int=[450,500,619,669,706,756,870,920];
7 dt=0.005;
8 F=(Int+dt)/dt;
9 IntL=zeros(8,1);
10 IntS=zeros(8,1);
11
12 disp('Posiciones Iniciales para la segunda fase')
13 fprintf('\nInt   L           S\n');
14
15 for m=1:8
16     IntL(m)=C(F(m),2*m);
17     IntS(m)=C(F(m),2*m+1);
18     fprintf('%d %f %f\n',Int(m),IntL(m),IntS(m));
19 end
```

Dado que el tiempo de lectura en fase 2 era la misma para todos los intervalos (1000 ms), este se hacía directo de XPPAut.

### C.2 MODELO DESCRIPTIVO: TERCERA Y CUARTA FASE

Para simular los [TR](#) y [TM](#) en [21], se propusieron umbrales circulares con centro en punto fijo. La longitud de los radios fueron aproximados a los umbrales originales y es evidente que la magnitud de umbral esta en función

del intervalo.

Listado 3: Código del modelo descriptivo

```

1 close all
2 clc
3
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 %ARCHIVOS A IMPORTAR
6
7 A=importdata('fase3.dat');
8 B=xlsread('S1.xlsx','Hoja1');
9 %Hoja1: TR Correctas, fase3.dat
10 %Hoja2: TM Correctas, fase4RC.dat
11 %Hoja3: TR Incorrectas, fase3.dat
12 %Hoja4: TM Incorrectas, fase4RI.dat
13
14 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
15 %OPERACION CON DATOS DE EXCEL
16
17 PromExc=zeros(8,1);
18
19 for l=1:8
20     PromExc(l)=nanmean(B(1:20,l));
21 end
22
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
24
25 C2=0.73271;
26 C1=9.2673;
27 dt=0.005;
28 indice=zeros(8,1);
29 tiempo=zeros(8,1);
30
31 Int=[450.00,500.00,619.00,669.00,706.00,756.00,870.00,920.00];
32 r=[1.18382,1.18382,1.4933,2.0784,2.03373,1.4542,1.08135,1.0345];
33 %radios TR correctas
34 %r=[0.09589,.09376,.11603,.16583,.156428,.1095,.08116,.078225];
35 %radios TM correctas
36 %r=[.49514,.631,1.1394,2.12,1.7472,1.0175,.570805,.4499];
37 %radios TR incorrectas
38 %r=[0.03404,.042655,.081526,.1592,.13545,.07378,.041176,.028934];
39 %radios TM incorrectas
40
41 fprintf('\nInt T. Modelo T. Datos\n');
42
43
44 for j=1:8
45     if A(:,2*j)<A(:,2*j+1)

```



```

16
17 PromExc=zeros(8,1);
18
19 for l=1:8
20     PromExc(l)=nanmean(B(1:20,l));
21 end
22
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
24 %ALGORITMO DE MATLAB
25
26 k1=0.005;
27 dt=0.005;
28 y=zeros(8,1);
29 PromIntL=zeros(8,1);
30 PromIntS=zeros(8,1);
31 UmbralL=zeros(8,1);
32 UmbralS=zeros(8,1);
33 tiempo=zeros(8,1);
34 tiempo1=zeros(8,1);
35 Int=[450.00,500.00,619.00,669.00,706.00,756.00,870.00,920.00];
36
37 %Intervalos a clasificar
38
39 B1=[453.57,460.33,480.73,498.05,489.05,474.87,484.14,475.08]; %TR
40 B2=[594.48,625.13,677.94,824.85,682.84,652.16,709.7,668.3];
41 %B1=[308.24,301.31,319.5,286.1,329.65,324.24,332.8,339.75]; %TM
42 %B2=[639.83,646.96,672.91,687.64,711.12,673.88,682.11,653.75];
43
44
45 C1=B1/k1;
46 D1=floor(C1);
47 E1=D1*k1;
48
49 C2=B2/k1;
50 D2=floor(C2)+1;
51 E2=D2*k1;
52
53 A1=(E1+dt)/dt;
54 A2=(E2+dt)/dt;
55 k2=k1/dt;
56
57
58 a=1.01;
59 s=.91;
60 cota=42;
61 div=100;
62 Int1=(Int-660)/div;
63
64 for k=1:8

```

```

65     if (-cota/div)<Int1(k) && Int1(k)<(cota/div)
66         y(k)=exp(-abs(Int1(k)))-a*exp(-abs(Int1(k))/s);
67     else
68         y(k)=0;
69     end
70 end
71
72 fprintf('\nInt    L        S    Int. Model Int. Datos\n');
73
74 for j=1:8
75     PromIntL(j)=mean(A(A1(j):k2:A2(j),2*j))-y(j);
76     PromIntS(j)=mean(A(A1(j):k2:A2(j),2*j+1))-y(j);
77
78     if PromIntL(j)<PromIntS(j)
79         i=abs(A(:,2*j+1)-PromIntS(j))<=.00004;
80         tiempo1(j)=find(i,1);
81         tiempo(j)=tiempo1(j)*dt-dt;
82     else
83         i=abs(A(:,2*j)-PromIntL(j))<=.00004;
84         tiempo1(j)=find(i,1);
85         tiempo(j)=tiempo1(j)*dt-dt;
86     end
87
88     fprintf('%d %f %f %f %f\n',Int(j),PromIntL(j),PromIntS(j),
89         tiempo(j),PromExc(j));
90
91 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
92 %GRAFICAS DE LOS DATOS DE EXCEL Y MATLAB
93
94     hold on
95     plot(Int,PromExc)
96     plot(Int,tiempo,'r')
97     title('Duraciones Correctas');
98     ylabel('Tiempo de Reaccion (ms)');
99     xlabel('Intervalos (ms)');
100     %title('Duraciones Incorrectas');
101     %ylabel('Tiempo de Movimiento (ms)');

```

Para las gráficas de la figura 27, Matlab cuenta con varias apps para hacer ajuste de curvas, optimizaciones, entre otros.



# D | DATOS CATEGÓRICOS

En las siguientes listas se presentan la media de los **TR** y **TM** en función de los intervalos clasificados para cada uno de las 20 personas.

## D.1 DATOS CORRECTOS DE TR

Listado 5: Lista de TR correctas

	450	500	619	669	709	756	870	920
1	488.627	507.882	557.431	503.429	522.393	547.179	511.380	527.200
2	477.681	488.114	480.732	510.953	510.026	507.370	484.545	489.014
3	472.889	481.600	483.208	552.000	583.796	538.848	510.414	503.986
4	552.887	544.234	616.238	664.000	595.281	607.288	584.286	566.153
5	552.875	578.125	570.969	559.245	596.320	539.156	554.967	575.138
6	519.250	522.638	547.963	583.961	625.903	534.512	567.723	591.738
7	453.571	460.333	502.000	525.582	502.045	487.207	490.400	488.300
8	573.899	554.894	677.940	709.925	625.196	628.760	588.645	563.242
9	468.708	482.507	503.327	498.053	489.057	474.873	484.145	475.083
10	476.556	490.806	506.246	567.605	562.327	564.153	525.592	516.814
11	534.657	563.516	521.436	527.920	578.412	547.600	530.985	520.727
12	517.479	583.268	575.328	683.964	625.364	533.824	571.854	489.309
13	563.697	605.667	588.476	609.566	587.667	599.757	589.102	575.817
14	528.861	532.060	524.776	572.000	550.085	557.119	552.746	557.556
15	594.485	625.130	632.600	705.514	638.525	593.630	564.814	578.548
16	514.130	530.358	601.021	621.286	546.089	519.393	511.455	516.343
17	516.783	503.453	600.479	560.278	556.739	585.333	551.241	549.191
18	531.912	578.594	574.444	619.875	615.245	586.917	554.302	576.985
19	494.803	499.486	536.739	535.532	637.429	652.167	582.125	524.631
20	572.172	604.339	663.600	824.852	682.840	630.914	709.700	668.292

## D.2 DATOS CORRECTOS DE TM

Listado 6: Lista de TM correctas

	450	500	619	669	709	756	870	920
1	516.090	487.926	516.552	519.184	493.786	515.536	532.640	517.817
2	621.464	616.300	615.857	614.512	605.211	609.907	609.848	630.028
3	466.292	488.214	497.962	522.152	535.082	483.788	490.714	501.662
4	623.831	617.156	672.905	687.636	647.298	670.273	620.700	626.958

5	594.097	559.472	572.828	591.566	577.760	588.178	573.754	570.646
6	326.458	342.609	335.519	358.431	343.161	350.279	332.800	345.923
7	448.271	468.203	437.485	452.509	447.864	450.414	444.260	438.467
8	308.246	301.318	319.500	286.100	329.652	324.240	334.403	339.758
9	422.375	448.380	462.827	433.658	464.429	434.600	441.942	443.250
10	465.653	468.722	450.088	415.895	458.041	478.288	459.479	480.900
11	639.829	646.953	619.333	652.240	711.118	673.873	651.970	653.742
12	500.155	528.366	560.770	554.873	521.879	534.824	572.958	529.782
13	603.924	646.939	607.302	639.547	589.407	609.027	682.102	632.467
14	378.722	389.925	363.017	314.679	384.678	377.045	381.831	392.472
15	509.727	506.043	503.673	500.108	496.725	512.935	506.458	494.242
16	389.754	383.851	415.396	415.857	412.378	386.286	410.682	420.179
17	434.580	452.500	481.000	433.111	455.674	454.074	434.000	443.088
18	376.691	357.641	382.267	408.125	392.306	398.500	380.937	384.985
19	435.493	435.306	464.609	471.129	512.071	493.633	454.804	456.215
20	420.875	420.339	403.400	408.000	429.740	447.914	436.400	415.846

### D.3 DATOS INCORRECTOS DE TR

Listado 7: Lista de TR incorrectas

	450	500	619	669	709	756	870	920
1	707.400	567.500	580.071	546.826	541.500	530.000	557.955	512.917
2	447.000	561.500	500.000	515.517	509.176	513.444	464.833	437.000
3	NaN	549.000	618.895	554.308	540.870	639.833	623.500	679.000
4	662.000	669.125	629.471	618.760	620.800	590.833	747.500	NaN
5	NaN	NaN	636.625	590.842	660.298	600.889	599.000	548.714
6	NaN	612.000	707.056	583.381	609.244	589.000	617.000	688.143
7	549.000	736.000	523.167	515.353	489.700	508.233	513.364	553.000
8	659.333	679.500	659.591	752.219	718.462	759.500	814.600	900.833
9	NaN	609.000	494.400	481.824	486.486	520.765	559.000	NaN
10	NaN	NaN	588.933	558.765	598.261	601.692	739.000	726.500
11	585.500	617.375	549.000	555.979	569.857	699.588	512.333	558.167
12	1063.00	561.000	656.091	547.412	653.282	705.974	714.792	732.118
13	548.667	619.333	594.667	626.053	666.000	658.857	796.538	737.083
14	NaN	633.800	595.929	563.568	573.923	510.800	1098.00	NaN
15	902.500	813.000	645.824	615.400	661.938	726.154	777.846	911.200
16	685.000	517.400	599.583	586.270	713.630	799.438	557.333	650.000
17	827.000	824.750	607.000	595.139	666.115	548.222	689.214	920.000
18	651.750	579.750	596.778	591.050	588.000	552.000	774.222	690.333
19	479.000	NaN	679.333	698.900	587.121	658.833	763.938	622.000
20	850.500	1029.40	861.432	756.578	791.182	914.500	734.583	1056.00

## D.4 DATOS INCORRECTOS DE TM

Listado 8: Lista de TM incorrectos

	450	500	619	669	709	756	870	920
1	510.800	494.000	540.714	529.913	500.659	556.500	549.545	488.417
2	527.333	625.500	562.063	612.517	601.676	680.722	640.333	838.000
3	NaN	560.500	497.263	497.718	505.000	410.167	374.500	608.000
4	826.000	660.875	637.529	654.640	661.533	652.833	711.000	NaN
5	NaN	NaN	544.250	552.316	566.340	601.852	630.091	574.857
6	NaN	320.667	365.944	324.286	336.171	331.862	444.000	346.571
7	501.500	352.000	485.667	448.529	472.720	489.791	495.636	494.500
8	340.000	317.833	364.091	332.750	322.654	322.727	306.200	329.333
9	NaN	478.000	457.850	460.853	443.027	422.706	487.667	NaN
10	NaN	NaN	487.267	502.912	445.435	421.154	448.000	433.500
11	522.000	650.500	645.576	629.319	660.476	678.118	660.667	692.167
12	472.000	784.000	495.364	640.588	583.128	614.211	542.250	568.176
13	692.333	694.333	773.444	640.895	629.778	633.200	644.462	647.000
14	NaN	357.400	351.929	374.091	321.308	351.400	254.000	NaN
15	474.333	507.667	508.176	493.971	506.656	472.231	518.385	509.200
16	440.667	382.600	383.250	393.081	378.296	362.375	414.833	449.400
17	503.667	520.000	455.625	445.139	460.923	454.333	427.214	411.500
18	351.000	411.375	384.148	366.475	407.087	431.083	348.222	353.833
19	454.000	NaN	576.333	490.500	465.759	480.643	507.250	520.000
20	387.625	454.000	422.108	440.200	461.818	504.429	430.500	445.857



## GLOSARIO

**CONEXINAS.** Grupo de proteínas homólogas que forman los canales intermembranas de las uniones comunicante"

**CORTEZA PREFRONTAL.** También es conocido como córtex prefrontal. Se ubica frente a las áreas motora y premotora; encargado de las expresiones de personalidad, tomas de decisión y adecuación del comportamiento.

**EXÁMEN PSICOMÉTRICO.** Son medidas objetivas y tipificadas de una muestra de conducta que permite hacer descripciones y comparaciones de personas con otras o de uno mismo en diferentes momentos.

**MEMORIA DE TRABAJO.** Es un constructo teórico de la psicología cognitiva que se relaciona con la capacidad de mantener en la mente los elementos que son relevantes para la tarea en curso. La memoria de trabajo está relacionada con la memoria de corto plazo pero son distintas entre sí.

**PESOS SINÁPTICOS.** Representan la intensidad de interacción entre cada neurona presináptica y la célula postsináptica.

**RUIDO BLANCO.** Llamado también como sonido blanco. Es una señal aleatoria (no correlativa), en donde una descomposición espectral de Fourier, el dominio de la frecuencia se observan componentes con la misma amplitud.

**SECRETAR.** Producir y expeler las glándulas, membranas y células una sustancia.

**SEPARATRIZ.** Línea que separa dos zonas con propiedades distintas.

**SESGO.** En la estadística se conoce como sesgo de un estimador a la diferencia entre su esperanza matemática y el valor numérico del parámetro que estima. Un estimador cuyo sesgo es nulo se llama insesgado o centrado.

**UMBRAL DE RECEPTOR.** Es la intensidad mínima de energía que un detector puede registrar.



## LISTA DE ACRÓNIMOS

<b>CI</b>	<b>Condiciones Iniciales</b> Haciendo redundancia de la palabra, son las condiciones sujetas a una o al sistema de ecuaciones diferenciales que se imponen a sus derivadas (Zill, 1997).
<b>CNB</b>	<b>Criterio Negativo de Bendixson</b> Siglas del teorema 4.3. Es un criterio que permite descartar la existencia de soluciones periódicas para sistemas de ecuaciones ordinarias tipo autónomo en el plano [13].
<b>DRA</b>	<b>Downstream Reading Areas</b> Traducido como lectura de áreas descendentes. $DRA_j$ promedia las actividades de $j$ y $M_{j_i}$ con $j = \{L, S\}$ e $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , donde $M_{j_i}$ toma su valor de acuerdo a $\tau_{m_i}$ .
<b>E/S</b>	<b>Entrada–Salida</b> Hace referencia a la función de entradas y salidas excitatorias e inhibitorias a una población de neuronas. Como visualización simple véase la Figura 6.
<b>EDO</b>	<b>Ecuación diferencial ordinaria</b> Siglas de referencia.
<b>FHN</b>	<b>FitzHugh–Nagumo</b> Hace referencia al sistema de FitzHugh–Nagumo, el cual, es una simplificación del modelo de Hodgkin–Huxley.
<b>HG</b>	<b>Hartman–Grobman</b> Siglas del Teorema 4.1 el cual, nos asegura que el retrato fase local de un punto fijo hiperbólico ( $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ ) es “topológicamente equivalente” al retrato fase de linealización.
<b>HH</b>	<b>Hodgkin–Huxley</b> Hace referencia al modelo de Hodgkin–Huxley, el cual, es un modelo de conductancia que explica el paso del potencial de acción a través del axón.
<b>IC</b>	<b>Intervalo Central</b> Toma el nombre al intervalo medio entre el intervalo 450 y 920 de los intervalos que se está categorizando en [21].
<b>NaN</b>	<b>Not a Number</b> En español: no es un número. Estas siglas generalmente se utiliza en lenguajes de programación para expresar resultados imposibles de calcular como raíces negativas, indeterminaciones etc.

<b>PF</b>	<b>Punto Fijo</b> Se llama punto de equilibrio o solución estacionaria de una ecuación diferencial a una solución $y(x) = a$ constante para todo $x \in \mathbb{R}$ . Es decir, las soluciones estacionarias son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales.
<b>TM</b>	<b>Tiempos de movimiento</b> Es el tiempo que se inicia a partir de la realización del desplazamiento al objetivo.
<b>TR</b>	<b>Tiempos de reacción</b> Es el tiempo medido entre la percepción de un estímulo hasta la ejecución del movimiento.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] *Conceptos básicos sobre redes neuronales*. <https://grupo.us.es/gtocoman/pid/pid10/RedesNeuronales.htm>.
- [2] *Neurociencia*. [https://html.rincondelvago.com/neurociencia\\_1.-html](https://html.rincondelvago.com/neurociencia_1.-html).
- [3] *Xppaut API*. <https://sourceforge.net/p/sniff/lib/wiki/Xppaut%20-API/>.
- [4] *Ruido blanco*. [https://es.wikipedia.org/wiki/ruido\\_Blanco](https://es.wikipedia.org/wiki/ruido_Blanco), 10 de marzo de 2017.
- [5] *Memoria de Trabajo*. [https://es.wikipedia.org/wiki/Memoria\\_de\\_trabajo](https://es.wikipedia.org/wiki/Memoria_de_trabajo), 14 de diciembre de 2016.
- [6] *Opiniones de Potencial de Acción* [imagen]. <http://www.datuopinion.com/potencial-de-accion>, 2011.
- [7] *Linealización*. <https://es.wikipedia.org/wiki/Linealizaci%C3%B3n>, 31 de diciembre de 2016.
- [8] *Memorias de corta duración: Memoria a corto plazo y memoria de trabajo*. <http://psicologia.isipedia.com/segundo/psicologia-de-la-memoria/03-memorias-de-corta-duracion-memoria-a-corto-plazo-y-memoria-de-trabajo,s.f>.
- [9] L Abbott and Thomas Kepler. Model neurons: from hodking–huxley to hopfield. *Statistical mechanics of neural networks*, pages 5–18, 1990.
- [10] Luis Álvarez. El modelo neurobiológico de la conciencia. *Antropología Iberoamericana*, 9(1):9–34, 2014.
- [11] Carlos D Brody, Adrián Hernández, Antonio Zainos, and Ranulfo Romo. Timing and neural encoding of somatosensory parametric working memory in macaque prefrontal cortex. *Cerebral cortex*, 13(11):1196–1207, 2003.
- [12] Andrés Castell. *Tejido Nervioso*. [www.facmed.unam.mx/deptos/bioce-tis/Doc/Tutorial/tejidos\\_archivos/Page969.htm](http://www.facmed.unam.mx/deptos/bioce-tis/Doc/Tutorial/tejidos_archivos/Page969.htm), s.f.
- [13] Mario Cavani. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, 2004.
- [14] Richard FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, 1(6):445–466, 1961.
- [15] Raquel Graña. *¿Cómo funciona el cerebro?* [imagen]. <http://comofunciona.com/como-funciona-el-cerebro/>, dic 2014.

- [16] Adrian Hernandez, Emilio Salinas, Rafael García, and Ranulfo Romo. Discrimination in the sense of flutter: new psychophysical measurements in monkeys. *The Journal of neuroscience*, 17(16):6391–6400, 1997.
- [17] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54. Cambridge University Press, 1997.
- [18] Christian K. Machens, Ranulfo Romo, and Carlos D. Brody. Flexible control of mutual inhibition: A neural model of two-interval discrimination. Supporting methods. Justificaciones matemáticas para [19].
- [19] Christian K. Machens, Ranulfo Romo, and Carlos D. Brody. Flexible control of mutual inhibition: A neural model of two-interval discrimination. *Science*, pages 1121–1124, 2005.
- [20] Christian K. Machens, Ranulfo Romo, and Carlos D. Brody. *Flexible control of mutual inhibition: A neural model of two-interval discrimination* [imagen]. <http://science.sciencemag.org/content/307/5712/1121.-figures-only>, feb 2005.
- [21] Juan Carlos Méndez, Oswaldo Pérez, Luis Prado, and Hugo Merchant. Linking perception, cognition, and action: Psychophysical observations and neural network modelling. *PloS one*, 9(7):e102553, 2014.
- [22] Juan Carlos Méndez, Oswaldo Pérez, Luis Prado, and Hugo Merchant. *Linking perception, cognition, and action: Psychophysical observations and neural network modelling* [imagen]. <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0102553>, jul 2014.
- [23] Jorge Morales. *Sinapsis*. [https://www.academia.edu/29822463/SEMINARIO\\_de\\_neurotransmisores\\_Autoguardado\\_](https://www.academia.edu/29822463/SEMINARIO_de_neurotransmisores_Autoguardado_).
- [24] Zey Ramos. *Potencial de Acción en Fibra Nerviosa* [video]. [www.youtube.com/watch?v=77wDRHpGay0](http://www.youtube.com/watch?v=77wDRHpGay0), 2012.
- [25] Miall RC and Haggard PN. The curvature of human arm movements in the absence of visual experience. pages *Exp Brain Res* 103: 421–428, 1995.
- [26] Ranulfo Romo, Carlos D Brody, Adrián Hernández, and Luis Lemus. Neuronal correlates of parametric working memory in the prefrontal cortex. *Nature*, 399(6735):470–473, 1999.
- [27] Román Rossi Pool. *Plasticidad y dinámica en redes neuronales*. PhD thesis, Universidad Nacional de Cuyo, 2011.
- [28] Juan Sangüesa. *Vivir Mejor con TDAH del Adulto*. <http://deficitatencionaladulto.cl/blog/?p=287>, noviembre, 2016.
- [29] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, 2014.
- [30] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Society, Providence, 2012.
- [31] G.B. Thomas. *Cálculo: varias variables*. Cálculo. Pearson Educación, 2006.

# ÍNDICE ALFABÉTICO

- Axón, 3
- Bifurcación
  - Silla–Nodo, 28
  - subcrítico, 29
  - supercrítico, 29
  - Tridente o Pitchfork, 29
- Bifurcaciones
  - globales, 27
  - locales, 27
- Ceroclinas, 13
- Ciclo límite, 26, 50
  - estable, 50
  - inestable, 50
  - semi–estable, 50
- Criterio Negativo Bendixson, 26, 65
- Dendritas, 3
- Despolarización, 5
- Diagrama de bifurcación, 27
- Estabilidad, 24
- Hiperpolarización, 5
- Intervalo central, 34
- Lóbulos frontales, 11
- Mielina, 3
- Modelo
  - de inhibición mutua, 11, 17
  - descriptivo, 33, 53
  - Hodgkin–Huxley, 6
  - predictivo, 33, 55
- Neurona, 3
- Neurotransmisores, 3
- Órbita, 26, 50
- Período refractario, 5
- Pesos sinápticos, 13
- Potencial
  - de acción, 3, 5
  - de reposo, 5
- Principio de
  - linealización, 24, 49
  - superposición, 24, 49
- Punto
  - de inflexión, 23
  - estable, 13
  - fijo, 13, 23, 24
  - hiperbólico, 25
  - inestable, 13
- Ruido blanco, 19
- Sinapsis, 3, 4
- Soma, 3
- Spikes, 3
- Teorema
  - de Hartman–Grobman, 24, 65
  - de las Variedades, 25
  - de Poincaré–Bendixson, 50
- Tiempo
  - de movimiento, 15, 66
  - de reacción, 15, 66
- Tren de spikes, 3