Benemérita Universidad Autónoma De Puebla
Facultad De Ciencias Físico-Matemáticas

Morfología Matemática:
Un Enfoque al Procesamiento Digital de Imágenes

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado de:
Licenciada en Matemáticas Aplicadas

por
Marisol Mares Javier

Director
Dr. Gonzalo Urcid Serrano
Óptica, INAOE

Codirectora
Dra. Lucía Cervantes Gómez
FCFM, BUAP

Puebla, Pue., Diciembre 2014

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el haberme brindado las facilidades y el apoyo necesario para realizar mis estudios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. También doy gracias por las becas otorgadas por la Secretaría de Educación Pública de Puebla bajo la convocatoria Becas para la educación superior 2013 para la realización de esta tesis y por la FCFM de la Universidad por haberme apoyado económicamente para asistir y participar en el XVLII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) realizado en la Universidad Juárez de la ciudad de Durango del 26 al 31 de Octubre del presente año.

De manera especial agradezco a la Dra. Lucía Cervantes Gómez por orientarme y estar siempre al pendiente de mi avance durante mi carrera, por su ayuda en la tramitación de becas y apoyos para mi participación en los Congresos Nacionales de la SMM y por sus oportunos consejos para el trabajo de tesis, al Dr. Gonzalo Urcid Serrano por todo el apoyo, paciencia y dedicación, pero sobre todo por la confianza que me ha brindado durante el desarrollo de este escrito. También les doy las gracias a mis sinodales, los Dres. Carlos Guillén Galván, Julio Erasto Poisot Macías y Juan Alberto Escamilla Reyna por el tiempo empleado y su atención para revisar esta tesis así como sus valiosos comentarios que me permitieron enriquecer el contenido y la presentación de este escrito.

Marisol Mares Javier
Noviembre, 2014.

Dedicatorias

Con todo cariño y amor a la persona que ha luchado junto a mí durante mis 24 años de vida para lograr cada una de mis metas, a mi madre la Sra. Celia Javier Alonso.

A mis hermanos: Carlos, Jose Juan y Guadalupe que siempre han estado conmigo para apoyarme y aconsejarme.

A mis amigas y amigos: Karen Tamayo, Silvia Pérez, Patricia Rosas, M. de los Ángeles Calderón, Andrea Peñafort, Verónica Ramírez, Beatriz Peña, Leonardo Remedios, Pablo Alonso, José Luis Prado, David Morante, Miguel A. Saloma y a todos los que me faltan, gracias por acompañarme y hacerme grato todo este tiempo.

Mil gracias a Patricia Pérez, Antonio Tamayo, a mis profesores Tolentino Eslava, Celestino Soriano y a todas aquellas personas importantes en mi vida que siempre estuvieron dispuestas a ayudarme.

Esta tesis se las dedico a todos Ustedes con mucho cariño.

Introducción

En el procesamiento digital de imágenes existen diversos enfoques para trabajar con ellas. La morfología matemática es uno de estos enfoques con una teoría matemática propia bastante desarrollada que reviste un aspecto geométrico y algebraico muy importante que nace como resultado del uso conceptual de la teoría de conjuntos y de los retículos. La importancia de sus propiedades algebraicas radica en el hecho de que estas sirven para evaluar la validez de las transformaciones involucradas en esta teoría. Esta tesis presenta de manera detallada las demostraciones de la mayoría de las propiedades elementales relativas a las operaciones fundamentales de erosión, dilatación, abertura y cerradura morfológicas establecidas para conjuntos y funciones. Además, se dan diversos ejemplos de las operaciones antes mencionadas y se aplican, en combinaciones específicas, a imágenes binarias consideradas como conjuntos y a imágenes en tonos de gris consideradas como funciones. Estas aplicaciones incluyen la detección de bordes, la eliminación de ruido aleatorio y la segmentación de objetos para el reconocimiento de formas.

El procesamiento digital de imágenes es un área muy amplia que abarca desde aquellos procesos cuyas entradas y salidas son imágenes, los procesos que extraen atributos o características cuantificables de una imagen hasta aquellos procedimientos que permiten reconocer objetos de forma individual o en grupo. Históricamente pueden considerarse como las primeras aplicaciones del procesamiento digital de imágenes aquellas relacionadas con la adquisición, mejoramiento e interpretación de imágenes sensadas por sondas espaciales [8]. Tres aspectos principales de esta área de conocimiento son el mejoramiento, la restauración y la identificación de objetos [3, 8, 22]. Los métodos de mejoramiento están orientados al sistema visual humano mientras que los métodos de restauración se basan en criterios óptimos independientes de la visión humana. Por otra parte, la identificación o el reconocimiento de objetos forma parte del análisis preliminar de una imagen para efectos de su interpretación. Entre las herramientas comúnmente empleadas se pueden considerar el análisis de Fourier, los filtros lineales, los métodos estadísticos y los patrones sintácticos para reconocimiento de objetos en imágenes.

La morfología matemática se desarrolló en forma paralela e independiente desde mediados de 1960 como una teoría con métodos propios que se utilizó inicialmente para encontrar relaciones entre la geometría de un medio poroso y sus permeabilidades, la cuantificación de la petrografía de minerales de hierro para predecir sus propiedades de molido y que hoy en día es considerada como una poderosa herramienta de análisis de imágenes, especialmente en aquellas aplicaciones donde los aspectos geométricos son relevantes [17, 26, 27]. La palabra "morfología" considera como su principal objetivo el análisis de las formas y de objetos y la matemática subyacente se basa en teoría de conjuntos, teoría de retículos y topología [11, 26]. La idea esencial para procesar una imagen es utilizar como elemento escudriñador otra imagen más pequeña con una geometría predeterminada adecuada para evaluar las características geométricas y topológicas de los objetos presentes en la imagen y su elección depende de dichas características. El objetivo final es transformar la imagen original en otra que sea más adecuada para su análisis e interpretación [5, 6, 29].

La presente tesis está organizada del siguiente modo: En el Capítulo 1, Preliminares, se expone la perspectiva de la morfología matemática como un enfoque al procesamiento digital de imágenes y se plantean los objetivos de la tesis. En el Capítulo 2, Morfología Matemática Básica, se dan los elementos algebraicos de conjuntos y retículos como fundamento teórico de las operaciones morfológicas básicas para conjuntos y funciones. Las aplicaciones correspondientes con imágenes binarias consideradas como conjuntos y para imágenes en tonos de gris tratadas como funciones, se detallan en el Capítulo 3 de Aplicaciones al Procesamiento Digital de Imágenes. La tesis termina en el Capítulo 4 donde se dan las conclusiones así como las contribuciones realizadas.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Enfoques del Procesamiento Digital de Imágenes

Los métodos matemáticos y las técnicas computacionales usados en el *procesamiento digital de imágenes* (PDI) dependen en general de la naturaleza de la imagen. En seguida se mencionan algunos de estos enfoques.

- **Lineal**. Los métodos de este enfoque están basados en teorías bastante desarrolladas y su principal carácteristica es la reversibilidad de sus operaciones [3, 8, 26]. Dentro de este enfoque podemos encontrar típicamente los filtros que trabajan con una representación de la imagen en el dominio de la frecuencia, obtenida a través de la aplicación de la transformada de Fourier. Aquí la frecuencia se considera como una función de coordenadas espaciales inversas conocidas como frecuencias espaciales. Existen tres versiones de la transformada de Fourier que son el caso continuo, el caso discreto y una técnica particular derivada de esta última es la transformada rápida de Fourier (FFT). Recientemente se introdujo la transformada Wavelet (de "ondillas" o "pulsos") que en el caso de imágenes proporciona información multiresolución. De manera similar, se emplean las transformadas Wavelet continua, discreta y rápida [8].

  Hay filtros lineales que trabajan en el dominio espacial directamente con la imagen. Por ejemplo, la convolución, denotada por "$*$", es una operación espacial que transforma una imagen en otra, lo que en forma matemática se expresa así: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, donde g es la imagen filtrada (salida), f representa la imagen a filtrar (entrada) y h es una función conocida como respuesta al impulso unitario (delta de Dirac) o función de transferencia (i.e., $g = \delta * h = h$). Para el caso discreto de la expresión anterior, g, f y h son matrices y los elementos de esta última definen la naturaleza de la transformación conocida como *núcleo*. Por ejemplo, en un filtro promedio puede usarse como núcleo una matriz solamente de unos multiplicada escalarmente por un divisor que es la suma de sus elementos. El resultado es obtener el promedio local de los pixeles vecinos a un pixel dado según el tamaño de la matriz correspondiente a h y asignar el valor calculado como nuevo nivel de gris del pixel en la imagen resultado. Algunas áreas de PDI donde el enfoque lineal es fundamental son la tomografía y la radiología [3, 8].

- **Estadístico**. Dentro de los métodos estadísticos están aquellos que analizan pixeles en forma simple, por ejemplo los histogramas de niveles de gris de una imagen y que consideran datos como la media, la varianza, el sesgo o la agudeza. En este enfoque se emplean con frecuencia técnicas basadas en los momentos de orden k y momentos centrales del mismo orden. Otros métodos consideran a los pixeles en pares, por ejemplo, métodos de matrices de concurrencia las cuales consideran cárácteristicas como el contraste, la homogeneidad y la correlación espacial. Los filtros estadísticos también se trabajan en el dominio espacial de la imagen [8, 22].

- **Físico-Matemático**. Este enfoque considera una imagen digital como un conjunto espacial de puntos discretos (pixeles) a cuyas posiciones y niveles de gris se les puede asociar, bajo ciertas hipótesis, con variables físicas que se relacionan mediante un modelo físico matemático y consecuentemente éste resulte útil para procesar o analizar la imagen correspondiente. Ejemplos de este enfoque son las técnicas de recocido simulado, contornos activos y del espacio escalado [24].

- **Morfología Matemática**. Este enfoque se distingue de los anteriores en ser de naturaleza no-lineal ya que se fundamenta en la teoría de conjuntos y retículos algebraicos [26, 27]. El objetivo primordial de este punto de vista es obtener información de las formas o posibles estructuras geométricas contenidas en los objetos de interés presentes en una imagen dada, es decir, la morfología de dichos objetos. Un aspecto esencial de este enfoque es el ser constructivo y estratificado, ya que partiendo de las operaciones básicas de erosión y dilatación morfológicas y el concepto de dualidad se deducen operaciones adicionales que permiten ampliar su alcance. Es importante mencionar que las operaciones de la morfología matemática dependen de uno o más elementos estructurales que actúan como sondas o analizadores locales que al interactuar con los pixeles de una imagen dan infomación de carácter geométrico.

Es común que en los enfoques de PDI listados antes se hagan *mediciones* (escalares o vectores) de las características contenidas en una imagen, las cuales se utilizan en el *reconocimiento de patrones* (RP) cuyo objetivo principal es la clasificación de objetos. Un ejemplo típico es la clasificación de imágenes digitales de letras manuscritas en clases patrón de la "A" a la "Z" independientemente de las condiciones en que tales imágenes fueron adquiridas.

1.2. Perspectiva de la Morfología Matemática

La morfología matemática es una técnica no lineal basada en teoría de conjuntos, teoría de retículos, topología y geometría integral. La idea principal del enfoque morfológico es trasformar una imagen en otra que sea más apropiada para su análisis conservando las características esenciales de las formas contenidas en ella. En este sentido, una imagen está compuesta de objetos o estructuras que tienen diferentes formas y niveles de intensidad las cuales son estudiadas por comparación con estructuras de referencia que tienen su propia forma y niveles de intensidad. Por lo tanto los objetos contenidos en una imagen se consideran como conjuntos cuyo análisis se lleva a cabo con simples operaciones entre ellos como intersección, unión y complemento.

Si las diversas regiones de interés tienen asociados diferentes niveles de intensidad y es necesario comparar los niveles de intensidad, resulta particularmente útil la teoría de retículos. Por otra parte, la topología es importante cuando se consideran aspectos como la conectividad u homotopía de los objetos. La geometría integral por otro lado nos ayuda a determinar las dimensiones de las formas. En la presente tesis se expondrán solamente los fundamentos necesarios correspondientes a la teoría de conjuntos y retículos.

La morfología matemática es especialmente útil cuando se quiere describir y representar objetos de una imagen ya que considera principalmente el aspecto geométrico en su análisis. Con un sistema de operadores morfológicos puede formarse una composición que al actuar sobre objetos de formas complejas las descomponen en las partes de interés y las que no lo son. Un ejemplo de esto es la recuperación de objetos en una imagen distorsionada y ruidosa.

1.3. Desarrollo de la Morfología Matemática

La morfología matemática nació a mediados de los años sesenta en Francia, cuando George Matheron estudiaba la relación entre la geometría de los medios porosos y sus permeabilidades y al mismo tiempo Jean Serra cuantificaba la petrografía de los minerales de hierro con el fin de predecir sus propiedades de molido. Estos estudios los llevaron a establecer las bases teóricas para el análisis de imágenes binarias. Un medio poroso es binario en el sentido de que un punto del medio poroso está en un poro o en el material que lo rodea. De esta manera, se consideró como un conjunto al material circundante a los poros y al conjunto de los poros como el complemento. Así, los objetos de la imagen se pueden procesar con operaciones simples de conjuntos. En 1967, G. Matheron propuso las primeras transformaciones morfológicas para determinar la geometría de las imágenes binarias.

La mayor parte del desarrollo de la morfología matemática se llevó a cabo en el Centro de Morfología Matemática (Centre de Morphologie Mathématique) en la Escuela de Minas de París en Fontainebleau creado en 1968 y lidereado por ambos investigadores. El desarrollo de equipo especializado en procesamiento de imágenes, como lo fue el analizador de texturas, les permitió utilizar nuevas transformaciones que se adaptaran al tipo de problema que trataban. Así, el crecimiento de la morfología matemática se fue caracterizando por la interconexión entre teoría, aplicación, métodos y algoritmos. Durante casi una década la morfología matemática trató solo con imágenes binarias. A mediados de 1970, y durante otra década más, se extendió a imágenes en escala de grises, ampliando sus conceptos básicos como la erosión y dilatación, a funciones númericas y creando nuevos operadores tales como el gradiente morfológico y la transformación sombrero de copa. A finales de los años 80 y principios de los 90, J. Serra, C. Ronse y H. Heijmans generalizaron la morfología matemática en el marco teórico del álgebra reticular, en particular su formalizacíon sobre retículos completos. Con esta generalización se dió mayor flexibilidad a la teoría y fue posible aplicarla a una gama más amplia de problemas relacionados con imágenes en color, secuencias temporales de imágenes (video) y grafos discretos [5, 12, 26, 27, 28].

1.4. Objetivos y metodología

En esta tesis se hace un análisis de los fundamentos matemáticos de la Morfología Matemática y se proponen soluciones mediante este enfoque al procesamiento digital de imágenes en las áreas de la ginecología (imágenes de ultrasonido) y la histología (fotomicrografías).

1.4.1. Objetivos general y específicos

El objetivo principal de esta tesis es de presentar en detalle las demostraciones matemáticas de las operaciones básicas de la morfología matemática y varias de sus propiedades algebraicas, así como su ilustración gráfica y su aplicación al procesamiento de diversas imágenes digitales representativas.

Como objetivos específicos listamos los siguientes:

1. Exponer los rudimentos de conjuntos y retículos como base para el desarrollo teórico de la morfología matemática.

2. Demostrar las principales propiedades de las operaciones básicas de la morfología matemática de conjuntos y ejemplificar dichas operaciones y sus composiciones con imágenes binarias adecuadamente diseñadas o seleccionadas.

3. Presentar las interrelaciones entre conjuntos y funciones con el propósito de establecer el nexo entre la morfología matemática de conjuntos y la morfología matemática de funciones.

4. Demostrar las principales propiedades de las operaciones básicas de la morfología matemática de funciones y ejemplificar dichas operaciones y sus composiciones con imágenes en tonos de gris adecuadamente seleccionadas.

5. Aplicar las operaciones morfológicas descritas en 2) y 4), sus composiciones y secuenciación a la detección de bordes, eliminación de ruido aleatorio y segmentación de objetos o grupos de objetos geométricos en imágenes binarias y en tonos de gris; análogamente, ajustar contornos elípticos (dilatados) a formas semiregulares de anomalías en imágenes de ultrasonido en tonos de gris.

Hacemos notar que la motivación detrás del objetivo principal se debe a la consideración de que las demostraciones son un aspecto relevante que comúnmente no se trata de forma explícita y sistemática en los textos de procesamiento digital de imágenes que abordan el enfoque de la morfología matemática de manera superficial (por ejemplo, cf. [3, 5, 6, 8, 14, 22]).

1.4.2. Conceptos y técnicas a desarrollar

Iniciamos la exposición del trabajo de tesis con un repaso de conceptos, propiedades y ejemplos sencillos de conjuntos y retículos como base para definir y demostrar las propiedades algebraicas de las operaciones elementales de la morfología matemática. En particular se tratan las operaciones morfológicas de erosión, dilatación, abertura y cerradura que al componerse entre ellas mismas o combinarlas con operaciones de conjuntos dan como resultado operaciones adicionales entre las cuales mostramos gradientes y filtros morfológicos, enmascaramientos por intersección o unión, y dilatación condicional para reconstrucción de componentes conexas. Estas últimas operaciones se emplean en la detección de bordes, la eliminación de ruido aleatorio y la segmentación de objetos tanto en imágenes binarias como en tonos de gris.

En la parte matemática se ha procurado dar demostraciones con el detalle suficiente para que no haya dificultad en seguir la argumentación deductiva partiendo de las definiciones y propiedades o relaciones previamente demostradas. Se hace empleo de notación estándar para distinguir con claridad la morfología de conjuntos de la morfología de funciones y a la vez mantener compatibilidad con su interpretación para realizar los algoritmos computacionales correspondientes a las operaciones antes mencionadas.

1.4.3. Diseño y selección de imágenes

Básicamente el diseño de imágenes se refiere a dos aspectos. El primero de ellos corresponde a la ilustración de las operaciones morfológicas básicas de erosión, dilatación, abertura y cerradura empleando subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^2$. Específicamente usamos como apoyo el Visualizador de Morfología de Imágenes de A. Conci [4] y la codificación directa en LaTeX [1, 25] mediante el paquete PSTricks [31]. Este último paquete se utilizó también para las gráficas ejemplo con funciones de una variable en $\mathbb{R}$ para ilustrar su erosión y dilatación. El segundo aspecto concierne al diseño de diversos elementos estructurales generados mediante el programa de imágenes Paint Shop Pro [32] y empleados en las aplicaciones tanto del procesamiento morfológico de imágenes binarias como en tonos de gris.

Por otra parte, las imágenes binarias y en tonos de gris empleadas con fines explicativos y de aplicación fueron cuidadosamente seleccionadas para evidenciar y resaltar la aplicabilidad de los métodos morfológicos y ponderar sus alcances dentro de los objetivos planteados anteriormente. Para el procesamiento digital de las imágenes seleccionadas, binarias y en escala de grises, aparte del manejador de imágenes Paint Shop Pro, se usaron las instrucciones correspondientes a la operaciones morfológicas básicas así como otras operaciones no morfológicas de las aplicaciones computacionales Mamba [2] y Mathcad [20]. En particular, en el caso de Mamba la programación correspondiente se realizó con el lenguaje de programación Phyton (bajo nivel) y en el caso del Mathcad se codificaron diversos algoritmos en su propio lenguaje de programación (alto nivel).

Capítulo 2

Morfología Matemática Básica

2.1. Fundamentos algebraicos

Al estudiar cualquier rama de las matemáticas el concepto de conjunto es fundamental. La *morfología matemática* (MM) se fundamenta en la teoría de conjuntos y los retículos. Consecuentemente, en esta sección abordaremos algunas nociones básicas, notación y terminología de la teoría de conjuntos y del álgebra reticular.

2.1.1. Teoría de conjuntos

Intuitivamente consideramos un *conjunto* como una colección de objetos bien definida, es decir, que dado un objeto podemos determinar si este pertenece al conjunto o no. A los objetos les llamaremos *elementos* o *miembros del conjunto* y diremos que *pertenecen* al conjunto. Frecuentemente los conjuntos son denotados por las letras mayúsculas como $A, B, \ldots, Z$ y los elementos por letras minúsculas como $a, b, \ldots, z$; para indicar que x es un elemento de A escribimos $x \in A$ y si x no es elemento de A entonces escribimos $x \notin A$.

Principio de extensión. Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Si A es igual a B lo denotamos por $A = B$, y por $A \neq B$ cuando A y B no sean iguales.

Para especificar el contenido de un conjunto podemos escribir sus elementos entre llaves, por ejemplo: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, indicando que el conjunto A consta de los números 2, 3, 5, 7 y 11. Otra manera de hacerlo es describir la propiedad que caracteriza a los miembros del conjunto y lo haremos de la siguiente forma: $A = \{x : x \text{ satisface } \mathcal{P}\}$ y $\mathcal{P}$ es el predicado "x es un número primo". Aquí las llaves representan las palabras *el conjunto de* y los dos puntos las palabras *tales que*, y se leé "A es el conjunto de los elementos x tales que x satisface la propiedad $\mathcal{P}$"; otro ejemplo está dado por el conjunto, $C = \{x : x \text{ es un entero positivo impar menor o igual que } 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

El conjunto en el cual están contenidos todos los objetos bajo discusión se conoce como *conjunto universal* o *universo del discurso* y se denota por lo general con la letra U. El conjunto que no contiene ningún elemento es llamado *conjunto vacío* o *conjunto nulo* y se denota por $\varnothing$. Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si cada elemento de A es un elemento de B. Para la relación de inclusión entre subconjuntos y conjuntos empleamos la notación $A \subseteq B$. También podemos decir que "*A está contenido en B*" o que "*B contiene a A*"; en este último caso escribimos $B \supseteq A$.

Principio de abstracción: dado un conjunto universal U y una propiedad $\mathcal{P}$ existe un conjunto $A \subseteq U$ cuyos elementos satisfacen $\mathcal{P}$.

Decimos que "*A no está contenido en B*", si alguno de los elementos de A no está en B y lo simbolizamos por $A \nsubseteq B$. A continuación se resumen las propiedades esenciales de la inclusión entre conjuntos.

- Cualquier conjunto A está contenido en U, es decir, $A \subseteq U$ (contención).
- Para cada conjunto A se tiene que $A \subseteq A$ (reflexividad).
- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$ (transitividad).
- $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si y sø'lo si $A = B$ (antisimetría).

Si $A \subseteq B$ es posible que $A = B$. Cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces se dice que "A es un *subconjunto propio* de B". En el Cuadro 2.1 se listan las operaciones básicas entre dos conjuntos A y B subconjuntos de U y suponemos que los elementos x están referidos al conjunto universal U.

Operación entre conjuntos	Expresión matemática
Unión	$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$
Intersección	$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$
Diferencia	$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$
Complemento	$A^c = \{x : x \in U \text{ y } x \notin A\}$
Diferencia simétrica	$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Cuadro 2.1: Operaciones elementales entre conjuntos

Las afirmaciones siguientes son equivalentes y establecen la relación entre la inclusión y las operaciones algebraicas entre conjuntos: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$. En el Cuadro 2.2 se listan las leyes del *álgebra de conjuntos*. Las siguientes definiciones de carácter geométrico son especialmente importantes para la morfología matemática. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la *traslación* de A, denotada por A_x, consta de los elementos de A trasladados por el vector $x \in \mathbb{R}$, es decir,

$$A_x = \{a + x : a \in A\}, \tag{2.1}$$

y la *transposición* o el *simétrico* de A se define como el conjunto,

$$\widehat{A} = \{-a : a \in A\}. \tag{2.2}$$

Los resultados listados en la siguiente proposición serán de gran utilidad en las demostraciones desarrolladas en el Capítulo 2.

Ley algebraica	Expresión matemática
Idempotencia	$A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
Asociatividad	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributividad	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Identidades	$A \cup \varnothing = A$ y $A \cap U = A$; $A \cup U = U$ y $A \cap \varnothing = \varnothing$
Involución	$(A^c)^c = A$
Complementación	$A \cup A^c = U$ y $A \cap A^c = \varnothing$; $U^c = \varnothing$ y $\varnothing^c = U$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Cuadro 2.2: Leyes algebraicas de conjuntos

Proposición 2.1 Igualdades entre operaciones de conjuntos, traslaciones y simétricos:

a) Conmutatividad de la traslación con la unión, $\bigcup_{b\in B} A_b = \bigcup_{a\in A} B_a$.

b) Conmutatividad del complemento con la traslación, $(B^c)_x = (B_x)^c = B^c_x$.

c) Equivalencia de intersección de traslaciones por complementación, $\bigcap_{b\in B} A_b = \bigcap_{a\in A^c} (B^c)_a$.

d) Composición de traslaciones, $(A_x)_y = A_{x+y}$.

e) Distributividad de la traslación sobre la unión, $\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right)_x = \bigcup_{b\in B} A_{b+x}$.

f) Conmutatividad entre uniones dobles y traslaciones, $\bigcup_{x\in X} \left(\bigcup_{y\in Y} B_y\right)_x = \bigcup_{y\in Y} \left(\bigcup_{x\in X} B_x\right)_y$.

g) Distributividad del simétrico sobre la unión, $\widehat{\bigcup_{b\in B} A_b} = \bigcup_{b\in B} \widehat{A_b}$.

h) Oposición de una traslación por simétrización, $\widehat{B_x} = \widehat{B}_{-x}$.

Demostración:

a) $$x \in \bigcup_{b\in B} A_b \Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ tal que } x = a + b$$
$$\Leftrightarrow \exists b \in B, a \in A \text{ tal que } x = b + a \Leftrightarrow x \in \bigcup_{a\in A} B_a$$

b) $y \in (B^c)_x \Leftrightarrow y = b' + x$ tal que $b' \in B^c \Leftrightarrow y \neq b + x \ \forall b \in B \Leftrightarrow y \in (B_x)^c$ ■

c) $$\bigcap_{b\in B} A_b = \Big(\bigcup_{b\in B} (A^c)_b\Big)^c = \Big(\bigcup_{a\in A^c} B_a\Big)^c = \bigcup_{a\in A^c} (B^c)_b$$

d) $z \in (A_x)_y \Leftrightarrow z = (a + x) + y,\ a \in A \Leftrightarrow z = a + (x + y),\ a \in A \Leftrightarrow z \in A_{x+y}$

e) $$y \in \Big(\bigcup_{b\in B} A_b\Big)_x \Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ tal que } y = (a + b) + x$$
$$\Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B \text{ tal que } y = a + (b + x) \Leftrightarrow \bigcup_{b\in B} A_{b+x}$$

f) $$z \in \bigcup_{x\in X} \Big(\bigcup_{y\in Y} B_y\Big)_x \Leftrightarrow \exists x \in X, y \in Y \text{ tal que } z = (b + y) + x$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in Y, x \in X \text{ tal que } z = (b + x) + y \Leftrightarrow z \in \bigcup_{y\in Y} \Big(\bigcup_{x\in X} B_x\Big)_y$$

g) $$\widehat{\bigcup_{b\in B} A_b} = \{-(a + b) : a \in A \text{ y } b \in B\} = \bigcup_{b\in B} \widehat{A_b}$$

h) $\widehat{B_x} = \{-(b + x) : b \in B\} = \{-b - x : -b \in \widehat{B}\} = \widehat{B}_{-x}$

De manera análoga se pueden demostrar las igualdades de los incisos e), f) y g) para la intersección de conjuntos.

2.1.2. Órdenes parciales y retículos algebraicos

Las definiciones de las operaciones de la morfología matemática suponen que el conjunto en el cual se trabaja está dotado de una estructura de retículo completo ya que se identifican con esta estructura de modo natural. Por ello, en esta subsección se presentan los conceptos de órdenes y retículos así como algunos ejemplos, propiedades y tipos de retículos.

Definición 2.1 Se dice que A es un *conjunto parcialmente ordenado* cuando lo dotamos de una relación binaria $\preceq$, que leemos como "precede a" y que para x, y y $z \in A$ se cumplen las siguientes propiedades [13, 15, 16],

- $x \preceq x \; \forall \; x \in A$ (reflexividad).
- Si $x \preceq y$ y $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$(transitividad).
- Si $x \preceq y$ y $y \preceq x \Rightarrow x = y$; (antisimetría).

Denotamos un conjunto parcialmente ordenado por la pareja de objetos $(A, \preceq)$, que resalta el hecho de que A es el conjunto en el cual actúa la relación $\preceq$. A continuación se dan tres ejemplos de órdenes parciales:

Ejemplo 2.1 Sea $\mathcal{P}(A)$ la familia de las partes de un conjunto A. La relación de inclusión de conjuntos "$\subseteq$" es un orden parcial en $\mathcal{P}(A)$, la demostración es trivial y está basada en la relación de pertenencia entre elementos y conjuntos.

Ejemplo 2.2 Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$, se dice que "m divide a n" y se denota por $m \mid n$, si existe un entero k tal que $mk = n$. Justificamos a continuación que esta relación es un orden parcial. Para la reflexividad vemos que $m \mid m$ ya que $m \cdot 1 = m$ $(k = 1)$. En el caso de la transitividad, si suponemos que $m \mid n$ y $n \mid p$ entonces existen $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$ tales que $mk = n$ y $n\ell = p$, por tanto $(mk)\ell = m(k\ell) = n\ell = p$ y como $k\ell = q \in \mathbb{Z}^+$, entonces $mq = p$, es decir, $m \mid p$. Finalmente, para la antisimetría, por hipótesis $m \mid n$ y $n \mid m$, o equivalentemente, $mk = n$ y $n\ell = m$ entonces $m(k\ell) = (mk)\ell = n\ell = m$ si $q = k\ell \in \mathbb{Z}^+$ entonces $mq = m$, lo cual implica que $q = 1$ y en consecuencia $k\ell = 1$, de modo que, $k = 1$ y $\ell = 1$ por lo tanto $m = n$.

Ejemplo 2.3 Sea $\mathcal{R}(A)$ el conjunto de todas las particiones de un conjunto A. Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ $\in \mathcal{R}(A)$, se dice que $\mathcal{R}_1$ es un *refinamiento* de $\mathcal{R}_2$ si cada conjunto de $\mathcal{R}_1$ está contenido en algún conjunto de $\mathcal{R}_2$. Definamos la relación $\sqsubseteq$ como sigue: $\mathcal{R}_1 \sqsubseteq \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \mathcal{R}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{R}_2$. Entonces $(\mathcal{R}(A), \sqsubseteq)$ es un orden parcial.

Se dice que dos elementos de A son comparables si y sólo si, $a \preceq b$ o $b \preceq a$, de lo contrario se dice que a y b *no* son comparables. La palabra "parcial" se usa para enfatizar que algunos pares de elementos no son comparables. En cambio, si cualesquiera dos elementos de A en un orden parcial $(A, \preceq)$ son comparables, entonces se dice que $(A, \preceq)$ es un conjunto *totalmente ordenado* o forma una *cadena*.

Ejemplo 2.4 Sean A y B dos conjuntos totalmente ordenados, entonces el conjunto producto (producto cartesiano) $A \times B$ también es totalmente ordenado, mediante la relación $(a, b) \preceq (a', b')$ si y sólo si, $a \preceq a'$ o $a = a'$ y $b \preceq b'$, denominada *orden lexicográfico* u *orden de diccionario*.

Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Los elementos $a, b \in U$ son llamados *cota superior* de A si $x \preceq a$ y *cota inferior* de A si $b \preceq x$ para todo $x \in A$. A la menor de las cotas superiores se le conoce como el *supremo de* A, denotado por $\sup(A)$, y a la mayor de las cotas inferiores se le conoce como *ínfimo* de A el cual se simboliza por $\text{ínf}(A)$. Si $\sup(A) \in A$, entonces, $\sup(A)$ es llamado el *máximo* de A y se denota por $\text{máx}(A)$; mientras que si $\text{ínf}(A) \in A$, entonces, éste es llamado el *mínimo* de A, denotado por $\text{mín}(A)$. Un conjunto parcialmente ordenado A puede reprentarse del siguiente modo. El elemento a es *predecesor inmediato* de b en A o b es un *sucesor inmediato* de a en A, denotado por $a \ll b$, si no existe un elemento x tal que $a \prec x \prec b$. El diagrama de Hasse de un conjunto finito parcialmente ordenado A, se construye así: si $a \ll b$, se traza una línea que une a y b donde b se escribirá por encima de a y los vértices del diagrama serán los elementos del conjunto.

Ejemplo 2.5 Sea $A = \{1, 3, 4, 8, 12, 15, 16, 24\}$ con la relación "x divide a y" y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ con la relación de orden "$\mathcal{R}_1$ refinamiento de $\mathcal{R}_2$ en $\mathcal{R}(B)$". La figura 2.1 a) y 2.1 b) muestra los diagramas de Hasse de A y $\mathcal{R}(B)$, respectivamente.

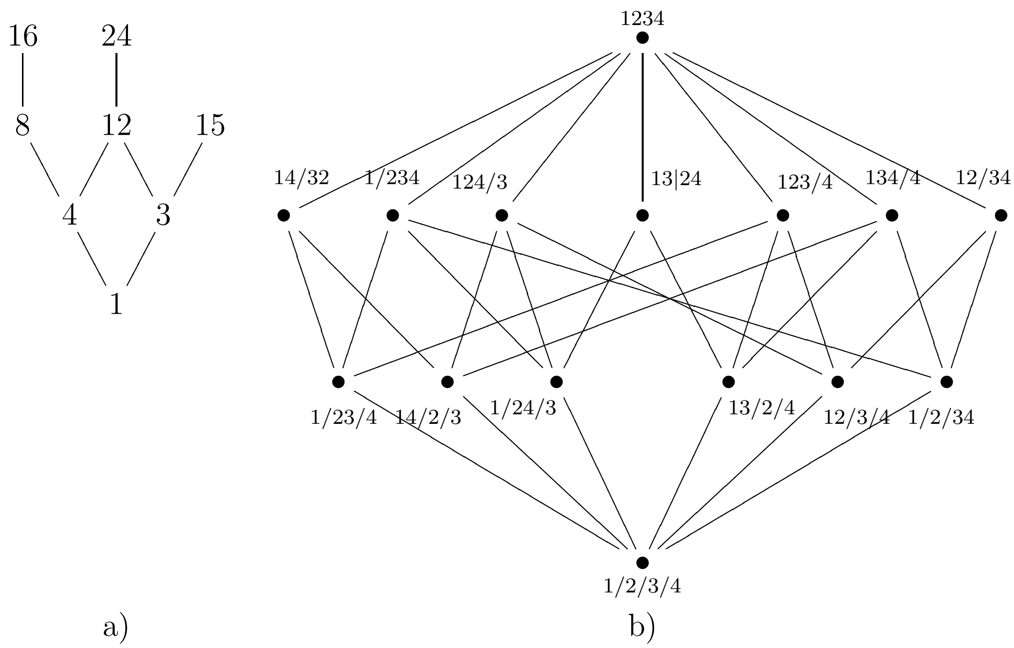

Figura 2.1: Diagramas de Hasse de dos órdenes parciales: a) relación "x divide a y" en A y b) "$\mathcal{R}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{R}_2$" en $\mathcal{R}(B)$; para simplificar la notación de una partición, escribimos p.ej., la partición $\{\{1, 2\}\{3, 4\}\}$ como 12/34.

Definición 2.2 Sea L un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Un *retículo*, denotado por $(L, \curlywedge, \curlyvee)$, es una estructura algebraica en la cual están definidas dos operaciones binarias llamadas *encuentro* y *reunión*, denotadas por $\curlywedge$ y $\curlyvee$, respectivamente, para las cuales $a \curlywedge b = \text{ínf}(a, b)$ y $a \curlyvee b = \sup(a, b)$, existen y pertenecen a L para cualquier par de elementos $a, b \in L$.

Si no hay lugar a confusión con las operaciones de encuentro y reunión podemos simplificar la notación de $(L, \curlywedge, \curlyvee)$ y escribir simplemente L.

Definición 2.3 L dotado de las operaciones binarias $\curlywedge$ y $\curlyvee$ es un *álgebra reticular* si para cualesquiera a, b y $c \in L$, se cumplen las siguientes leyes:

- $a \curlywedge b = b \curlywedge a$ y $a \curlyvee b{=}b \curlyvee a$ (conmutatividad).
- $(a \curlywedge b) \curlywedge c{=}a \curlywedge (b \curlywedge c)$ y $(a \curlyvee b) \curlyvee c{=}a \curlyvee (b \curlyvee c)$ (asociatividad).

- $a \curlywedge (a \curlyvee b) = a$ y $a \curlyvee (a \curlywedge b) = a$ (absorción).

Comprobaremos que las Definiciones 2.2 y 2.3 son equivalentes, ya que las operaciones, $\curlywedge$ y $\curlyvee$, cumplen las propiedades que definen un álgebra reticular. Análogamente, dada un álgebra reticular podemos definir un orden parcial de la siguiente manera: $x \preceq y$ si y sólo si $x \curlywedge y = x$, o equivalentemente, $x \preceq y$ si y sólo si $x \curlyvee y = y$. Verificamos primero que $\curlyvee$ es un orden parcial en L,

- Para la reflexividad usamos la propiedad de absorción dos veces de modo que, $x \curlywedge x = x \curlywedge (x \curlyvee (x \curlywedge y)) = x$ (por idempotencia), lo cual implica, por definición, que $x \preceq x$.

- Para la transitividad, supongamos que $x \preceq y$ y que $y \preceq z$, entonces, $x \curlywedge y = x$ y $y \curlywedge z = y$, así, $x \curlywedge z = (x \curlywedge y) \curlywedge z = x \curlywedge (y \curlywedge z) = x \curlywedge y = x$, y por definición, $x \preceq z$.

- Para la antisimetría, si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces, $x \curlywedge y = x$ y $y \curlywedge x = y$. Por la propiedad conmutativa tenemos que, $x = \curlywedge y = y \curlywedge x = y$, por lo tanto, $x = y$.

Por otra parte, considerando L como un álgebra reticular, vemos que,

- $(x \curlywedge y) \curlywedge x = x \curlywedge (y \curlywedge x) = x \curlywedge (x \curlywedge y) = (x \curlywedge x) \curlywedge y = x \curlywedge y$; además,

- $(x \curlywedge y) \curlywedge y = x \curlywedge (y \curlywedge y) = x \curlywedge y \Leftrightarrow x \curlywedge y \preceq x$ y $x \curlywedge y \preceq y$.

Ahora, suponiendo que $z \preceq x$ y $z \preceq y$, entonces, $z \curlywedge x = z$ y $z \curlywedge y = z$. Consecuentemente, $(z \curlywedge x) \curlywedge (z \curlywedge y) = z \curlywedge z = z$, lo que equivale a, $z \curlywedge (x \curlywedge y) = z$ y por tanto, $z \preceq x \curlywedge y$. Recíprocamente, si $z \preceq x \curlywedge y$, y ya que, $x \curlywedge y \preceq x$ y $x \curlywedge y \preceq y$, por transitividad obtemos que, $z \preceq x$ y $z \preceq y$. Por lo tanto, queda demostrado que un álgebra reticular L es un retículo ■

Dado un retículo L y $H \subseteq L$, se dice que H es un *subretículo* de L si $x \curlywedge y, x \curlyvee y \in H$ para cualesquiera $x, y \in H$. A continuación se numeran las propiedades generales de los retículos así como las propiedades que definen varios tipos de retículos.

Definiciones

- Consistencia, $x \preceq y \Leftrightarrow x \curlywedge y = x$ y $x \preceq y \Leftrightarrow x \curlyvee y = y$.

- Idempotencia, $x \curlywedge x = x$ y $x \curlyvee x = x$.

- Elemento minímo, si $\exists \min(L) \in L \Rightarrow \min(L) \curlywedge x = \min(L)$ y $\min(L) \curlyvee x = x, \ \forall x \in L$.

- Elemento máximo, si $\exists \max(L) \in L \Rightarrow \max(A) \curlywedge x = x$ y $\max(A) \curlyvee x = \max(A), \ \forall x \in L$.

- Regularidad, $\forall x, y \in L$, se cumple que, $x \curlywedge y \preceq x$, $x \curlywedge y \preceq y$, $x \preceq x \curlyvee y$ y $y \preceq x \curlyvee y$.

- Monotonía, si $y \preceq z$ entonces, $x \curlywedge y \preceq x \curlywedge z$ y $x \curlyvee y \preceq x \curlyvee z$.

- Sub-distributividad, $(x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z) \preceq x \curlywedge (y \curlyvee z)$ y $x \curlyvee (y \curlywedge z) \preceq (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$.

- Sub-modularidad, si $x \preceq z \Rightarrow x \curlyvee (y \curlywedge z) \preceq (x \curlyvee y) \curlywedge z$.

Tipos de retículos

- Si un retículo L cumple con la propiedad de subdistributividad en ambos sentidos de la relación $\preceq$, es decir, que satisface las igualdades respectivas, entonces se dice que L es un *retículo distributivo.*

- Un retículo L para le cual $x \preceq z \Rightarrow x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge z$, se denomina *reticulo modular.*

- Si un retículo L tiene un elemento máximo y un elemento minímo, se denomina *retículo acotado* y se denota como $(L, \curlywedge, \curlyvee, \text{máx}(L), \text{mín}(L))$.

- Sea L un retículo acotado entonces x' es el complemento de x si y sólo si $x \curlywedge x' = \text{mín}(L)$ y $x \curlyvee x' = \text{máx}(L)$. Es claro que $\text{mín}(L)' = \text{máx}(L)$ y $\text{máx}(L)' = \text{mín}(L)$. Si todo $x \in L$ tiene complemento se dice que L es *retículo complementado.*

- Un retículo L que cumple que todos sus subconjuntos no vacíos tienen ínfimo y supremo, se dice que es un *retículo completo*; en particular, todo retículo completo es acotado. Si un retículo es completo y distributivo entonces, dado un elemento x, este tiene un único complemento x'.

La propiedad de distributividad implica la propiedad de modularidad. Sin embargo, aunque todo retículo distributivo es modular lo contrario no siempre se cumple. Para más detalles el lector puede consultar [16].

Ejemplo 2.6 Anteriormente, se mencionó que $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si definimos $A \curlywedge B = A \cap B$ y $A \curlyvee B = A \cup B$, para cualesquiera $A, B \subseteq U$, entonces $(\mathcal{P}(U), \cap, \cup)$ es un retículo completo en el que $\text{mín}(\mathcal{P}(U)) = \varnothing$ y $\text{máx}(\mathcal{P}(U)) = U$.

Ejemplo 2.7 Sea D_n el conjunto de los divisores de un número entero positivo exento de cuadrados (en su descomposición como producto de números primos). Entonces, como se vió en el Ejemplo 2.2, $(D_n, |)$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación de divisibilidad. Si definimos $p \curlywedge q = \text{mcm}(p, q)$ (mínimo común múltiplo) y $p \curlyvee q = \text{mcd}(p, q)$ (máximo común divisor), para cualesquiera $p, q \in D_n$, entonces $(D_n, \text{mcm}, \text{mcd})$ es un retículo completo en el que $\text{mín}(D_n) = 1$ y $\text{máx}(D_n) = n$.

2.2. Concepto de transformación morfológica

La idea intuitiva que tenemos acerca de la estructura de los objetos no basta, pues ésta no siempre puede precisarse. Además, es prácticamente imposible dar una descripción objetiva y completa de un objeto cualquiera. Un observador verá un objeto de manera personal, haciendo énfasis en ciertas características que le interesen y así transformara este objeto en otro con ciertos detalles resaltados. El observador dirá que la parte del objeto que le interesa tiene picos, es cuadrado o redondo, pequeño o grande. Estos atributos son el resultado que la persona obtuvo tal vez comparando cierta parte del objeto bajo estudio con una estrella, un cuadrado, un círculo, u objetos similares en forma y tamaño. A estos últimos objetos se les puede identificar como elementos estructurales y a la manera de relacionarlos como una transformación morfológica. Así pues, la morfología matemática es una teoría que considera los aspectos geométricos locales que sean de interés particular al analizar uno o más objetos.

Las transformaciones de la morfología matemática deben cumplir ciertas restricciones, las cuales se conocen como principios y a continuación se describen brevemente. El lector interesado en profundizar en el significado de estos principios puede consultar el tratado de J. Serra [26].

1. **Invarianza bajo traslaciones**. La transformación Ψ es invariante bajo traslaciones si el trasladar el conjunto A mediante el vector x y aplicarle Ψ es equivalente a aplicar la transformación Ψ a A y luego trasladar el conjunto resultante a x. Así, la trasformación Ψ es invariante bajo traslaciones siempre que dada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(A_x) = [\Psi(A)]_x \,. \tag{2.3}$$

   Esta condición se considera natural ya que en general la estructura de los objetos no cambia debido a su posición en el espacio. Por tanto, las trasformaciones que la satisfacen no dependen de la localización de los ejes coordenados.

2. **Invarianza al escalamiento**. Este principio se caracteriza matemáticamente de la siguiente manera, se dice que la transformación Ψ es invariante al escalamiento si y sólo si,

$$\Psi(\lambda A) = \lambda \Psi(A) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^+ \,. \tag{2.4}$$

   Esta caracterización es también bastante plausible ya que, en general, la estructura de los objetos no cambia por reducciones o ampliaciones.

3. **Conocimiento local**. Las condiciones experimentales como el tamaño del área a estudiar y la resolución espacial de los instrumentos de visualización imponen la restricción de un conocimiento parcial. Así dado un conjunto X, conocemos sólo la intersección de X con un conjunto Z, es decir, $X \cap Z$ (donde el conjunto Z está determinado por los instrumentos). Nos interesa saber que la transformación Ψ aplicada a $X \cap Z$ sea suficiente para el análisis de X. En este sentido, las transformaciones que serán consideradas dentro de la morfología matemática son aquéllas trasformaciones cuya aplicación a X acotada por otro conjunto Z' (región de interés) es lo mismo que acotar X por Z, aplicar Ψ y finalmente acotar nuevamente por Z'. Matemáticamente, este principio se describe como sigue,

$$\forall Z' \text{ acotado, } \exists Z \text{ acotado tal que: } \Psi(X) \cap Z' = [\Psi(X \cap Z)] \cap Z' \,. \tag{2.5}$$

   Básicamente, esta igualdad significa que la transformación Ψ solamente requiere de un conocimiento local de los objetos y que se tiene la flexibilidad de seleccionar mediante Z y Z' una región del espacio que sea de interés para analizar dichos objetos.

4. **Semicontinuidad**. Este principio está asociado al problema de determinar la frontera física como el contacto entre dos fases de un medio material. Así, un primer conjunto de condiciones experimentales, como la resolución y magnificación de los instrumentos de visualización y medición determinarán tres conjuntos. En particular, los dos primeros, denotados por X y X', incluyen las zonas que podemos asegurar se encuentran en una u otra fase, y el tercer

conjunto, Δ_1, está determinado por las zonas cuya pertenencia a una u otra fase es imposible de decidir. Cambiando el conjunto de condiciones experimentales es posible determinar otro conjunto, Δ_2, tal que $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$, con grosor diferente de cero. Continuando de esta manera, podemos construir una sucesión encajada $\{\Delta_i\}$ que tienda a un límite $\Delta \neq \varnothing$ (ver topología en Apéndice A). Naturalmente, condicionamos que los conjuntos Δ_i contengan su frontera, es decir, desde el punto de vista de la topología, que dichos conjuntos sean cerrados. Si ahora modificamos la representación del medio material con una transformación Ψ creciente, es decir, si $A \subseteq B$ entonces $\Psi(A) \subseteq \Psi(B)$, consecuentemente se dice que la transformación Ψ es aceptable[1] en morfología matemática siempre que $\Psi(\Delta_i)$ tienda a $\Psi(\Delta)$.

Los cuatro principios de las tranformaciones morfológicas son la base conceptual de la morfología matemática tanto de conjuntos como de funciones. En las siguientes secciones se aplicarán los principios 1) y 2) mientras que los principios 3) y 4) se usarán implícitamente en el contexto de las aplicaciones de las operaciones morfológicas básicas al procesamiento digal de imágenes binarias o en tonos de gris. En general estos principios se verifican en tanto no limiten el desarrollo de la teoría y se han planteado diversos problemas para los cuales la aplicación de métodos morfológicos que los cumplen ha resultado exitosa [6, 7, 11, 17, 29].

2.3. Operaciones básicas morfológicas de conjuntos

El objetivo central de las operaciones de la morfología matemática es extraer las posibles estructuras geométricas relevantes de los objetos contenidos en una imagen considerándola como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$ o de la cuadrícula $\mathbb{Z}^2$. Esta extracción se logra mediante un sondeo con otro conjunto denominado *elemento estructural* (EE) cuya forma geométrica y tamaño dependen de la información que se quiera obtener de los objetos presentes en la imagen. Hacemos notar que el elemento estructural puede considerarse también una imagen que generalmente es de mucho menor tamaño que la imagen original. Las operaciones fundamentales morfológicas han sido propuestas o diseñadas para que el EE interactúe con los objetos de interés de la imagen y al recorrerlos punto a punto pueda verificarse si este encaja o toca con dichos objetos. Los elementos estructurales usados para explorar imágenes bidimensionales (en 2D) son conocidos como *elementos estructurales planos* ya que tienen la misma dimensión que la imagen bajo estudio. En cambio, los elementos estructurales de dimensión 3 son llamados *volumétricos* o *en escala de grises*.

Nótese que los elementos estructurales planos solo dependen de su extensión o dominio espacial y por tanto son independientes de la escala de grises. Al usar elementos volumétricos estos deben tener valores en la misma escala de grises que la imagen de entrada. En cualquier EE se requiere fijar entre sus elementos un punto de referencia, por lo general su centro, que permite modificar la acción de las operaciones morfológicas de modo que al trasladarse por la imagen el centro del EE se coloca en cada punto o pixel de la imagen. Como se mencionó anteriormente la forma y el tamaño deben adaptarse a las características geométricas de los objetos contenidos en la imagen. Por ejemplo un EE con forma rectangular es adecuado para extraer objetos cuya forma esté compuesta por rectángulos. A

[1]El Apéndice C describe muy brevemente el fundamento teórico relativo a la frontera entre dos medios materiales desde el punto de vista de la morfología matemática.

continuación definimos las operaciones morfológicas fundamentales para el procesamiento y análisis de imágenes binarias. Los conjuntos considerados en las definiciones siguientes son subconjuntos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

2.3.1. Erosión y dilatación

Definición 2.4 La *erosión* del conjunto A por el elemento estructural B, denotada como $A \ominus B$, se define como,

$$A \ominus B = \{x : B_x \subseteq A\}, \tag{2.6}$$

donde B_x es el trasladado de B. El resultado de la erosión es un conjunto que contiene aquellos puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que B esta propiamente contenido en A cuando su centro se coloca en x.

Teorema 2.1 La erosión puede expresarse mediante la igualdad siguiente,

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}\,. \tag{2.7}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x \in A \ominus B \quad &\Leftrightarrow \quad B_x \subseteq A \\
&\Leftrightarrow \quad b + x = y \in A \;\; \forall b \in B \\
&\Leftrightarrow \quad x = y - b \;\text{ tal que }\; y \in A \;\; \forall b \in B \\
&\Leftrightarrow \quad x \in A_{-b} \;\; \forall b \in B \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{b \in B} A_{-b} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 2.5 La *dilatación* del conjunto A por un elemento estructural B, denotada por $A \oplus B$, se define como,

$$A \oplus B = \{x : \widehat{B}_x \cap A \neq \varnothing\}. \tag{2.8}$$

El resultado de la dilatación es un conjunto que contiene aquellos puntos $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales al colocar el centro de $\widehat{B}$ en x se cumple que $\widehat{B}_x \cap A \neq \varnothing$. Se dice que $\widehat{B}_x$ "toca" o "pega" con A.

Teorema 2.2 La dilatación puede expresarse del modo siguiente:

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b\,. \tag{2.9}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x \in A \oplus B \quad &\Leftrightarrow \quad \widehat{B}_x \cap A \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \quad \exists y \;\text{ tal que }\; y \in \widehat{B}_x \;\text{ y }\; y \in A \\
&\Leftrightarrow \quad y = x - b \;\text{ para algún }\; b \in B \;\text{ y }\; y \in A \\
&\Leftrightarrow \quad x = y + b \;\text{ para algún }\; b \in B \;\text{ y }\; y \in A \\
&\Leftrightarrow \quad x \in A_b \;\text{ para algún }\; b \in B \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{b \in B} A_b \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 2.2 Se verifica la distributividad del simétrico sobre la dilatación, es decir, se cumple la igualdad $\widehat{A \oplus B} = \widehat{A} \oplus \widehat{B}$.

Demostración:

$$\widehat{A \oplus B} = \widehat{\bigcup_{b \in B} A_b} = \bigcup_{b \in B} \widehat{A_b} = \bigcup_{b \in B} \widehat{A}_{-b} = \bigcup_{b \in \widehat{B}} \widehat{A}_b = \widehat{A} \oplus \widehat{B} \blacksquare \tag{2.10}$$

En la igualdad anterior se usó el inciso g) de la Proposición 2.1.

En la figura 2.2 se muestran los resultados de erosionar y dilatar un subconjunto finito de $\mathbb{Z}^2$ (puntos en negro), con cuatro elementos estructurales distintos. Las coordenadas de los elementos estructurales (EEs) utilizados son: $\{(0,0),(1,0)\}$ para el segmento horizontal, $\{(0,-1),(0,0)\}$ para el segmento vertical, $\{(1,1),(2,2)\}$, para el segmento diagonal y $\{(0,-1)(-1,0),(0,0),(1,0),(0,1)\}$ para la cruz.

Nótese que con base en la definición de la dilatación, los EEs anteriores se simetrizan antes de realizar dicha operación. En la figura 2.2, el conjunto del inciso a) es reducido por la erosión a unos cuantos puntos debido a que solo en estos puntos los EEs estuvieron contenidos en el conjunto (en cada caso). Observamos que el resultado de una erosión depende de la forma y el tamaño del EE; además, el EE del inciso d) en la misma figura no contiene al origen. Más adelante veremos que el resultado es simplemente la traslación de la erosión de la imagen por el EE, cuyo origen ha sido trasladado al centro de la malla donde se encuentra la imagen. Por otra parte, las dilataciones del conjunto original, contienen algunos puntos que se encuentran cerca del objeto. Las definiciones de las operaciones morfológicas de erosión y dilatación dadas en esta tesis corresponden a las dadas por R.M. Haralick [11] y para una explicación de las diferentes notaciones empleadas puede consultarse P. Soille [29]. Ya que no existen las operaciones inversas correspondientes a la erosión y dilatación, las operaciones morfológicas compuestas descritas en la siguiente sección recuperan en la medida que es posible al conjunto original.

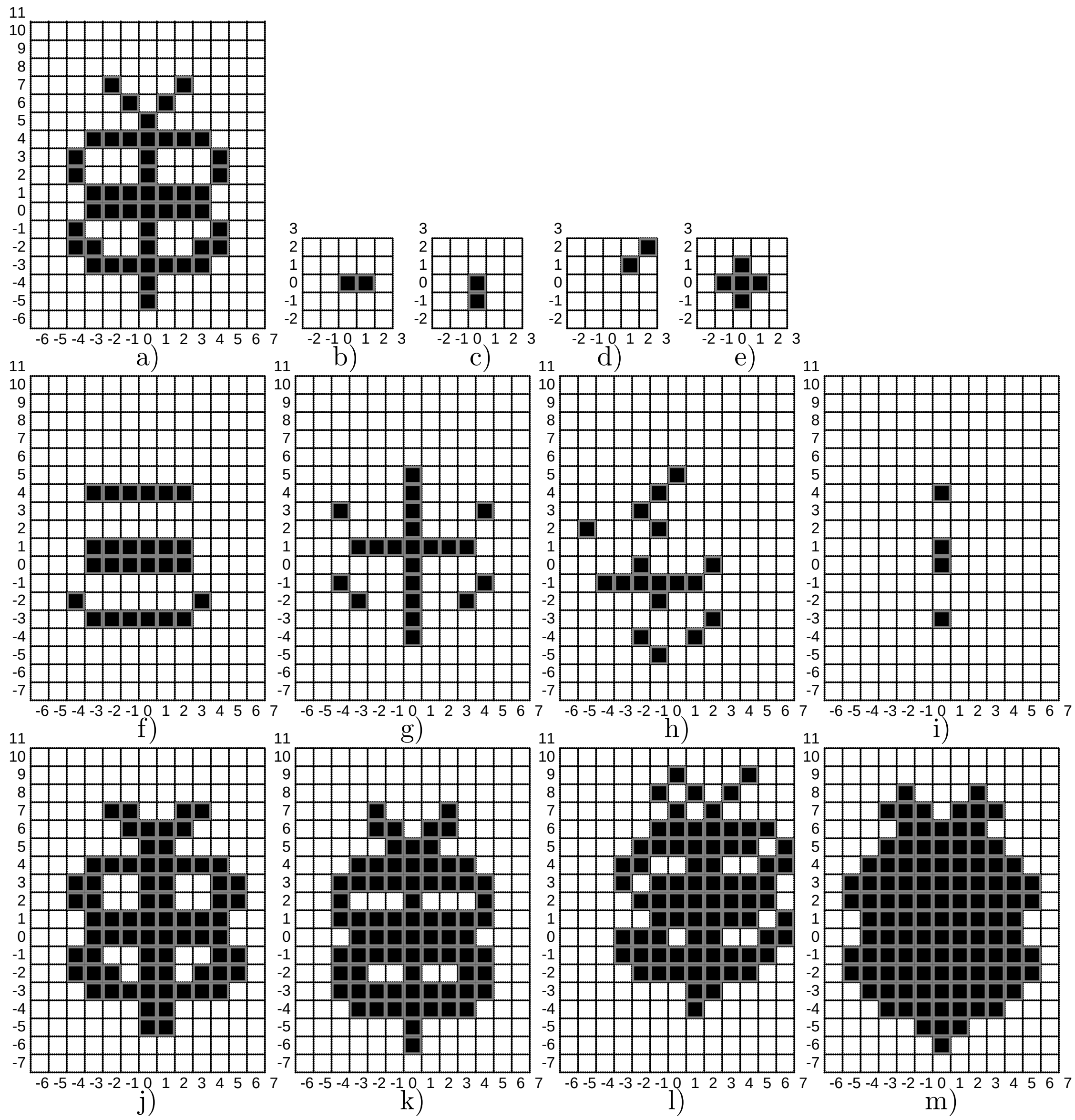

Figura 2.2: a) Subconjunto de puntos del producto cartesiano $[-6,6] \times [-6,9] \subset \mathbb{Z}^2$. Los EEs utilizados son: b) un segmento horizontal, (c) un segmento vertical, d) un segmento diagonal y e) una cruz; f), g), h), e i) son el resultado de erosionar la imagen binaria a) con los EEs b), c), d) y e) respectivamente, y j), k) l) y m) son el resultado de dilatar la "mariposa" en a) con los EEs simétricos de b), c) d) y e), respectivamente.

2.3.2. Abertura y cerradura

A partir de las operaciones de erosión y dilatación se construyen otras operaciones a través de su composición algebraica, como la abertura y cerradura morfológicas que a continuación se definen.

Definición 2.6 La *abertura* de un conjunto A por el elemento estructural B, denotada por $A \circ B$, se define como,

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B, \tag{2.11}$$

En palabras, la abertura consiste en aplicar una erosión de A por B seguida de una dilatación del conjunto resultante por B. Esta nueva operación selecciona los puntos de A que quedan cubiertos por alguna traslación del elemento estructural B que esté completamente contenido en A. Así, la abertura de A se obtiene haciendo que el elemento estructural B pase dentro de A, inclusive tangencialmente en parte de la frontera de A pero sin que ningún elemento de B salga de A. En la siguiente proposición podemos observar este hecho.

Teorema 2.3 La abertura puede expresarse de la siguiente manera,

$$A \circ B = \bigcup_{B_x \subseteq A} B_x \,. \tag{2.12}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} x \in A \circ B &\Leftrightarrow x \in (A \ominus B) \oplus B \\ &\Leftrightarrow \widehat{B}_x \cap (A \ominus B) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists y \text{ tal que } y \in \widehat{B}_x \text{ y } y \in (A \ominus B) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B \text{ tal que } y = x - b \text{ y } B_y \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B \text{ tal que } x = y + b \text{ y } B_y \subseteq A \\ &\Leftrightarrow x \in B_y \subseteq A \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{By \subseteq A} B_y \;\blacksquare \end{aligned}$$

Definición 2.7 La cerradura de A por el elemento estructural B, denotada por $A \bullet B$, se define como,

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B\,, \tag{2.13}$$

En palabras, la cerradura consiste en aplicar una dilatación de A por B seguida de una erosión B. La idea central de esta operación morfológica es recuperar la forma inicial del conjunto dilatado. La siguiente proposición muestra que la cerradura es equivalente a la intersección de los complementos de las traslaciones del elemento estructural contenidas en el complemento de A.

Teorema 2.4 La cerradura puede expresarse como,

$$A \bullet B = \Big(\bigcup_{\widehat{B}_x \subseteq A^c} \widehat{B}_x \Big)^c = \bigcap_{\widehat{B}_x \subseteq A^c} \widehat{B}_x^c \,. \tag{2.14}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x \in A \bullet B &\Leftrightarrow x \in (A \oplus B) \ominus B \\
&\Leftrightarrow B_x \subseteq A \oplus B \\
&\Leftrightarrow (A \oplus B)^c \subseteq B_x^c \\
&\Leftrightarrow y \in (A \oplus B)^c \Rightarrow y \in B_x^c \\
&\Leftrightarrow \widehat{B}_y \cap A = \varnothing \Rightarrow y \neq x + b \;\; \forall b \in B \\
&\Leftrightarrow \widehat{B}_y \subseteq A^c \Rightarrow x \neq y - b \;\; \forall b \in B \\
&\Leftrightarrow \widehat{B}_y \subseteq A^c \Rightarrow x \notin \widehat{B}_y \\
&\Leftrightarrow \widehat{B}_y \subseteq A^c \Rightarrow x \in \widehat{B}_y^c \\
&\Leftrightarrow x \in \widehat{B}_y^c \quad \forall\, \widehat{B}_y \subseteq A^c \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\widehat{B}_y \subseteq A^c} \widehat{B}_y^c \;\; \blacksquare
\end{aligned}$$

La abertura morfológica remueve los puntos que no quedan cubiertos por las traslaciones del elemento estructural que encajan localmente en las partes del conjunto A, mientras que la cerradura morfológica añade los puntos que no son cubiertos por las traslaciones de $\widehat{B}$ contenidas en el complemento de A.

En la figura 2.3 se muestran los resultados de abrir y cerrar un subconjunto finito de $\mathbb{Z}^2$ (puntos en negro), con dos elementos estructurales distintos. Las coordenadas de los elementos estructurales (EEs) utilizados son: $\{(0,0),(0,-1)\}$ para el segmento vertical y $\{(\pm 1,-1),(0,0),(\pm 1,1)\}$ para el aspa.

Nótese que con base en la definición de la dilatación, los EEs anteriores se simetrizan antes de realizar dicha operación. En la figura 2.3, el conjunto del inciso a) es reducido por la erosión a unos cuantos puntos debido a que solo en estos puntos los EEs estuvieron contenidos en el conjunto (en cada caso). Observamos que el resultado de una erosión depende de la forma y el tamaño del EE; además, el EE del inciso d) en la misma figura no contiene al origen. Más adelante veremos que el resultado es simplemente la traslación de la erosión de la imagen por el EE, cuyo origen ha sido trasladado al centro de la malla donde se encuentra la imagen. Por otra parte, las dilataciones del conjunto original, contienen algunos puntos que se encuentran cerca del objeto.

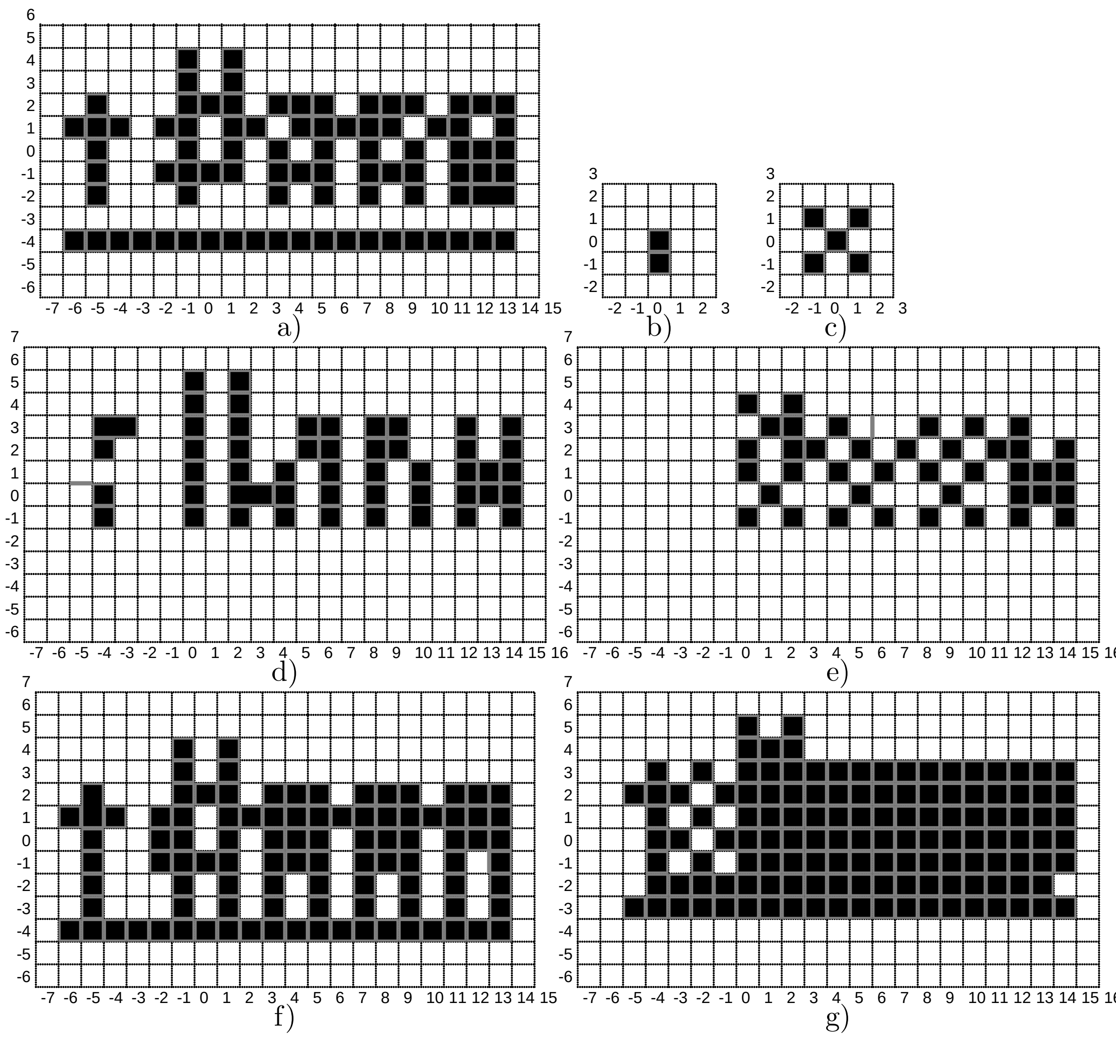

Figura 2.3: a)Subconjunto de puntos del producto cartesiano $[-7, 15] \times [-6, 6] \subset \mathbb{Z}^2$. Los EEs son: b) un segmento vertical y c) un aspa. Los incisos d) y e) son el resultado de aplicar la operación de abertura a la imagen binaria a) con los EEs b) y c) respectivamente, mientras que f) y g) son el resultado de aplicar la operación de cerradura a la imagen binaria a) con los mismos elementos estructurales respectivamente.

2.3.3. Propiedades generales

Sea A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{Z}^2$. A continuación se listan las principales propiedades algebraicas que interrelacionan las operaciones básicas de la morfología matemática incluyendo explícitamente sus demostraciones.

Dualidad. La erosión y la dilatación morfológicas son operaciones duales respecto a la complementación de conjuntos y análogamente la abertura y la cerradura son también duales en el mismo sentido. Esto es,

a) $A \ominus B = (A^c \oplus \widehat{B})^c$,

b) $A \circ B = (A^c \bullet \widehat{B})^c$.

Demostración:

$$\text{a)} \quad \big(A^c \oplus \widehat{B}\big)^c = \Big(\bigcup_{b\in\widehat{B}} A_b^c\Big)^c = \Big(\Big(\bigcap_{b\in\widehat{B}} A_b\Big)^c\Big)^c = \bigcap_{b\in\widehat{B}} A_b = A \ominus B,$$

$$\text{b)} \qquad \big(A^c \bullet \widehat{B}\big)^c = \Big(\Big(\bigcup_{\widehat{\widehat{B}}_x \subseteq (A^c)^c} \widehat{\widehat{B}}_x\Big)^c\Big)^c = \bigcup_{B_x\subseteq A} B_x = A \circ B \ \blacksquare$$

Relaciones de orden. Se cumplen las siguientes relaciones de orden,

a) $0 \in B \Rightarrow A \ominus B \subseteq A \subseteq A \oplus B$,

b) $A \circ B \subseteq A \subseteq A \bullet B$.

Demostración:

a) $x \in A \ominus B \Rightarrow B_x \subseteq A$, y puesto que, $0 \in B \Rightarrow x = x + 0 \in A$. Sea $x \in A$ y como $0 \in B \Rightarrow x = x - 0 \in \widehat{B}_x$, por lo tanto, $\widehat{B}_x \cap A \neq \varnothing$,

b) $A \circ B = \bigcup_{B_x\subseteq A} B_x \subseteq A$. Puesto que, $\bigcup_{\widehat{B}_x\subseteq A^c} \widehat{B}_x \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq \Big(\bigcup_{\widehat{B}_x\subseteq A^c} \widehat{B}_x\Big)^c = A \bullet B \ \blacksquare$

Monotonía. La erosión, la dilatación, la abertura y la cerradura morfólogicas son operaciones crecientes en el sentido de la inclusión de conjuntos, esto es, si $A \subseteq C$, entonces,

a) $A \ominus B \subseteq C \ominus B$,

b) $A \oplus B \subseteq C \oplus B$,

c) $A \circ B \subseteq C \circ B$,

d) $A \bullet B \subseteq C \bullet B$.

Demostración:

a) $x \in A \ominus B \Rightarrow B_x \subseteq A \subseteq C \Rightarrow B_x \subseteq C \Rightarrow x \in C \ominus B$,

b) Nótese que $A \cap C = A \subseteq C$ puesto que $A \subseteq C$, luego si $x \in A \oplus B$
$\Rightarrow B_x \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \widehat{B}_x \cap (A \cap C) \neq \varnothing$, y ya que $\widehat{B}_x \cap (A \cap C) \subseteq \widehat{B}_x \cap C$
$\Rightarrow \widehat{B}_x \cap C \neq \varnothing \Rightarrow x \in C \oplus B$,

c) Aplicando el inciso b) al a) obtenemos que, $(A \ominus B) \oplus B \subseteq (C \ominus B) \oplus B$
y por lo tanto, $A \circ B \subseteq C \circ B$,

d) Aplicando el inciso a) al b) obtenemos que, $(A \oplus B) \ominus B \subseteq (C \oplus B) \ominus B$
y por lo tanto, $A \bullet B \subseteq C \bullet B$ ■

Idempotencia. La abertura y la cerradura morfológicas son operaciones idempotentes. Lo que significa que una segunda composición con el mismo elemento estructural no cambia el conjunto obtenido mediante la primera aplicación del elemento estructural. Así,

a) $(A \circ B) \circ B = A \circ B$,

b) $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$.

Para la demostración de las igualdades anteriores utilizamos la siguiente observación: $B_y = B_y \circ B$, para demostrar esta igualdad de conjuntos, vemos que, por la relación de orden del inciso b), $B_y \circ B \subseteq B_y$. Por otra parte, ya que $B_y \subseteq B_y$, entonces $B_y \subseteq \bigcup_{B_z \subseteq B_y} B_z = B_y \circ B$. De aquí se concluye que $B_y = B_y \circ B$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{a) } & B_x \subseteq A \Leftrightarrow B_x \circ B \subseteq A \circ B \Leftrightarrow B_x \subseteq A \circ B \\ & \Rightarrow A \circ B = \bigcup_{B_y \subseteq A} B_y = \bigcup_{B_y \subseteq A \circ B} B_y = (A \circ B) \circ B, \\ \text{b) } & (A \bullet B) \bullet B = ((A \bullet B)^c \circ \widehat{B})^c = (((A^c \circ \widehat{B})^c)^c \circ \widehat{B})^c \\ & = ((A^c \circ \widehat{B}) \circ \widehat{B})^c = (A^c \circ \widehat{B})^c = A \bullet B \ \blacksquare \end{aligned}$$

Distributividad. La erosión es distributiva con respecto a la intersección de conjuntos, en tanto que la dilatación es distributiva con respecto a la unión de conjuntos. En cambio, la erosión de un conjunto con la unión de EEs corresponde a la intersección de las erosiones del conjunto con cada EE y la dilatación de un conjunto con la unión de EEs es igual a la unión de las dilataciones del conjunto con cada EE. Las expresiones matemáticas respectivas son las siguientes:

a) $(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B)$,

b) $(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B)$,

c) $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$,

d) $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)\,.$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{a) } x \in (A \cap C) \ominus B &\Leftrightarrow B_x \subseteq A \cap C \\
&\Leftrightarrow B_x \subseteq A \text{ y } B_x \subseteq C \\
&\Leftrightarrow x \in A \ominus B \text{ y } x \in C \ominus B \\
&\Leftrightarrow x \in (A \ominus B) \cap (C \ominus B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } x \in (A \cup C) \oplus B &\Leftrightarrow \widehat{B}_x \cap (A \cup C) \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \widehat{B}_x \cap A \neq \varnothing \text{ ó } \widehat{B}_x \cap C \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \in (A \oplus B) \text{ ó } x \in (C \oplus B) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \oplus B) \cup (C \oplus B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } x \in A \ominus (B \cup C) &\Leftrightarrow (B \cup C)_x \subseteq A \\
&\Leftrightarrow (B_x \cup C_x) \subseteq A \\
&\Leftrightarrow B_x \subseteq A \text{ y } C_x \subseteq A \\
&\Leftrightarrow x \in A \ominus B \text{ y } x \in A \ominus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \ominus B) \cap (A \ominus C),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } x \in A \oplus (B \cup C) &\Leftrightarrow (\widehat{B \cup C})_x \cap A \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow (\widehat{B}_x \cup \widehat{C}_x) \cap A \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow (\widehat{B}_x \cap A) \cup (\widehat{C}_x \cap A) \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \in (\widehat{B}_x \cap A) \text{ o } x \in (\widehat{C}_x \cap A) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Iteratividad. Las siguientes igualdades hacen referencia a la composición de la dilatación y erosión con elementos estructurales no necesariamente iguales, es decir $B \neq C$,

1. a) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)\,,$
2. b) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)\,.$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{a) } (A \oplus B) \oplus C &= \bigcup_{c \in C} (A \oplus B)_c = \bigcup_{c \in C} \Big(\bigcup_{b \in B} A_b \Big)_c = \bigcup_{c \in C} \Big(\bigcup_{a \in A} B_a \Big)_c \\
&= \bigcup_{a \in A} \Big(\bigcup_{c \in C} B_c \Big)_a = \bigcup_{a \in A} (B \oplus C)_a = \bigcup_{b \in B \oplus C} A_b\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } (A \ominus B) \ominus C &= ((A \ominus B)^c \oplus \widehat{C})^c = ((A^c \oplus \widehat{B}) \oplus \widehat{C})^c = (A^c \oplus (\widehat{B} \oplus \widehat{C}))^c \\
&= (A^c \oplus (\widehat{B \oplus C}))^c = A \ominus (B \oplus C) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Las propiedades anteriores permiten descomponer una operación morfológica mediante un elemento estructural de mayor tamaño y complejidad geométrica en la misma operación pero con elementos estructurales de menor tamaño y de geometría más simple.

Invarianza bajo traslaciones. La dilatación, la erosión, la abertura y la cerradura morfológicas son invariantes bajo traslaciones.

a) $(A \oplus B)_x = A_x \oplus B = A \oplus B_x$,
$(A \ominus B)_x = A_x \ominus B = A \ominus B_{-x}$.

b) $(A \circ B)_x = A_x \circ B = A \oplus B_x$,
$(A \bullet B)_x = A_x \bullet B = A \oplus B_x$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{a) } A_x \oplus B &= \bigcup_{b\in B}(A_x)_b = \bigcup_{b\in B} A_{x+b} = \bigcup_{b\in B}(A_b)_x = (A \oplus B)_x\,, \\
A \oplus B_x &= \bigcup_{b\in B_x} A_b = \bigcup_{a\in A}(B_x)_a = \Big(\bigcup_{a\in A} B_a\Big)_x = \Big(\bigcup_{b\in B} A_b\Big)_x = (A \oplus B)_x\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } A_x \circ B &= (A_x \ominus B) \oplus B = (A \ominus B)_x \oplus B = ((A \ominus B) \oplus B)_x = (A \circ B)_x\,, \\
A_x \bullet B &= (A_x \oplus B) \ominus B = (A \oplus B)_x \ominus B = ((A \oplus B) \ominus B)_x = (A \bullet B)_x \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Conmutatividad de la dilatación. Se cumple la igualdad, $A \oplus B = B \oplus A$.
Demostración:

$$A \oplus B = \bigcup_{b\in B} A_b = \bigcup_{a\in A} B_a = B \oplus A \ \blacksquare$$

Propiedades adicionales
La erosión morfológica no es una operación conmutativa salvo en el caso de que los conjuntos A y B sean simétricos respecto al origen. Sin embargo, en combinación con la simetrización y la complementación de conjuntos verifica las siguiente igualdad,

$$A \ominus B = \widehat{B^c} \ominus A^c\,.$$

Demostración:

$$A \ominus B = (A^c \oplus \widehat{B})^c = (\widehat{B} \oplus A^c)^c = \widehat{B}^c \ominus A^c = \widehat{B^c} \ominus A^c \ \blacksquare$$

Para algunas de estas propiedades en el Apéndice A se dan demostraciones alternativas basadas en las propiedades de unión e intersección, así como en los resultados de la Proposición 2.1.

2.4. Operaciones morfológicas de funciones

Las definiciones y el cálculo de la morfología matemática de conjuntos no pueden aplicarse directamente al caso de funciones reales de variable real. Por esta razón, en esta sección, se introducen conceptos adicionales que permiten hacer uso de la morfología matemática de conjuntos y mediante ésta definir y calcular adecuadamente las mismas operaciones con funciones. En particular, lo anterior se logra asociando un conjunto único a una función dada.

Definición 2.8 Sea $f : D_f \to \mathbb{R}$, el simétrico de f denotado como $\widehat{f}$, se define como sigue:

$$\widehat{f} : \widehat{D_f} \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \widehat{f}(x) = f(-x). \tag{2.15}$$

Definición 2.9 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_A = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x,y) \in A\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ el conjunto de los reales extendidos. El *tope* de A es una función denotada por:

$$\mathcal{T}(A) : D_A \to \mathbb{R}^* \ \text{ tal que } \ T(A)(x) = \sup\{y : (x,y) \in A\}. \tag{2.16}$$

Definición 2.10 Sea $D_f \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ y $f : D_f \to \mathbb{R}$. La *sombra* o *umbra* de f se define como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{U}[f] = \{(x,y) \in D_f \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}. \tag{2.17}$$

Lema 2.1 Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función entonces,

$$\mathcal{T}(\mathcal{U}[f]) = f. \tag{2.18}$$

Demostración: A continuación se demuestra que los dominios de las funciones f y $\mathcal{T}(\mathcal{U}[f])$ son el mismo.

$$\begin{aligned}&\text{Si } x \in D_{\mathcal{U}[f]} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ (x,y) \in \mathcal{U}[f] = \{(x,y) \in D_f \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\} \Rightarrow x \in D_f\,, \ \text{y} \\ &\text{si } x \in D_f \ \text{ y } \ y = f(x) \Rightarrow y \leq f(x) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ (x,y) \in \mathcal{U}[f] \Rightarrow x \in D_{\mathcal{U}[f]} \Rightarrow D_{\mathcal{U}[f]} = D_f\,.\end{aligned}$$

Para finalizar demostremos que $\mathcal{T}(\mathcal{U}[f](x) = f(x) \ \forall x \in D_f$. En particular,

$$\mathcal{T}(\mathcal{U}[f])(x) = \sup\{y : (x,y) \in \mathcal{U}(f)\} = \sup\{y : y \leq f(x)\} = f(x) \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{U}(f)) = f \ \blacksquare$$

Definición 2.11 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de índices y $\mathcal{F} = \{f_i | f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}, \text{ con } i \in I\}$ una familia de funciones reales. Definimos las funciones *ínfimo* y *supremo* de $\mathcal{F}$, denotadas por $\bigwedge \mathcal{F} : D_\wedge \to \mathbb{R}$ y $\bigvee \mathcal{F} : D_\vee \to \mathbb{R}$, respectivamente, por las siguientes expresiones,

$$\bigwedge \mathcal{F}(x) = \Big(\bigwedge_{i\in I} f_i\Big)(x) = \bigwedge_{i\in I} f_i(x) = \inf_{i\in I}\{f_i(x)\} \quad ; \quad D_\wedge = \bigcap_{i\in I} D_{f_i} \ , \tag{2.19}$$

$$\bigvee \mathcal{F}(x) = \Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big)(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x) = \sup_{i\in I}\{f_i(x) : x \in D_{f_i}\} \quad ; \quad D_\vee = \bigcup_{i\in I} D_{f_i}\,. \tag{2.20}$$

Lema 2.2 Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones reales f_i indizada por I dotada de las operaciones de ínfimo y supremo, y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ dotada de las operaciones de intersección y unión. Entonces, la sombra es un *homomorfismo de retículos completos*, $(\mathcal{F}, \wedge, \vee)$ y $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \cap, \cup)$, es decir,

$$\mathcal{U}\Big(\bigwedge_{i\in I} f_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}[f_i]\,, \tag{2.21}$$

$$\mathcal{U}\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}[f_i]\,. \tag{2.22}$$

Demostración: Sean $f, g \in \mathcal{F}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}\Big(\bigwedge_{i\in I} f_i\Big) &= \{(x,y) \in D_\wedge \times \mathbb{R} : y \leq \big(\bigwedge_{i\in I} f_i\big)(x)\} \\
&= \{(x,y) \in D_\wedge \times \mathbb{R} : y \leq \bigwedge_{i\in I} f_i(x)\} \\
&= \{(x,y) \in D_\wedge \times \mathbb{R} : y \leq f_i(x) \ \text{ para toda } \ i \in I\} \\
&= \bigcap_{i\in I} \{(x,y) \in D_\wedge \times \mathbb{R} : y \leq f_i(x)\} \\
&= \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}[f_i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big) &= \{(x,y) \in D_\vee \times \mathbb{R} : y \leq \big(\bigvee_{i\in I} f_i\big)(x)\} \\
&= \{(x,y) \in D_\vee \times \mathbb{R} : y \leq \bigvee_{i\in I} f_i(x)\} \\
&= \{(x,y) \in D_\vee \times \mathbb{R} : y \leq f_i(x) \ \text{ para algún } \ i \in I\} \\
&= \bigcup_{i\in I} \{(x,y) \in D_\vee \times \mathbb{R} : y \leq f_i(x)\} \\
&= \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}[f_i] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 2.12 La *función erosión* de $f, g \in \mathcal{F}$, denotada por, $f \ominus g : D_{f\ominus g} \to \mathbb{R}$, se define como el tope de la erosión de sus respectivos conjuntos sombra, simbólicamente,

$$f \ominus g = \mathcal{T}(\mathcal{U}(f) \ominus \mathcal{U}(g))\,. \tag{2.23}$$

Teorema 2.5 La erosión de f con g es equivalente a la siguiente expresión,

$$(f \ominus g)(x) = \bigwedge_{a\in D_g} \{f(x+a) - g(a)\} \ \text{ con } \ (x+a) \in D_f\,, \ \text{ y} \tag{2.24}$$

$$D_{f\ominus g} = D_f \ominus D_g\,. \tag{2.25}$$

Demostración: Haciendo los cambios de variable, $x = x' - a$ y $y = y' - b$, se tiene que,

$$\{(x', y') - (a, b) : y' \leq f(x'),\, x' \in D_f\} = \{(x, y) : y \leq f(x + a) - b,\, (x + a) \in D_f\}, \tag{2.26}$$

En lo que sigue omitiremos el hecho que $(x + a) \in D_f$ con el fin de abreviar las expresiones intermedias y al final restituimos esta condición. Continuando, si $y \leq f(x + a) - g(a)$, entonces, $y \leq f(x + a) - b$; es decir, $\forall\, b \leq g(a)$ se tiene la inclusión,

$$\{(x, y) : y \leq f(x + a) - g(a)\} \subseteq \bigcap_{b \leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x + a) - b\}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{b \leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x + a) - b\} = \{(x, y) : y \leq f(x + a) - g(a)\}. \tag{2.27}$$

Ahora, considerando las definiciones previas y resultados anteriores, vemos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f) \ominus \mathcal{U}(g) &= \bigcap_{(a,b) \in \mathcal{U}(g)} \mathcal{U}(f)_{(a,b)} = \bigcap_{a \in D_g,\, b \leq g(a)} \{(x, y) - (a, b) : y \leq f(x)\} \\
&= \bigcap_{a \in D_g} \Big(\bigcap_{b \leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x + a) - b\} \Big) \\
&= \bigcap_{a \in D_g} (\{(x, y) : y \leq f(x + a) - g(a)\}) \\
&= \bigcap_{a \in D_g} \mathcal{U}[f_{-a} - g(a)] = \mathcal{U}\Big[\bigwedge_{a \in D_g} (f_{-a} - g(a)) \Big],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 2.2. Así,

$$f \ominus g = \mathcal{T}(\mathcal{U}(f) \ominus \mathcal{U}(g)) = \mathcal{T}\Big(\mathcal{U}\Big[\bigwedge_{a \in D_g} (f_{-a} - g(a)) \Big]\Big) = \bigwedge_{a \in D_g} (f_{-a} - g(a)) \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow (f \ominus g)(x) = \bigwedge_{a \in D_g} \{f(x + a) - g(a)\} \;\text{ con }\; (x + a) \in D_f\,.$$

Finalmente, por la Definición 2.11 y el Teorema 2.1, se tiene que,

$$D_{f \ominus g} = \bigcap_{a \in D_g} (D_f)_{-a} = D_f \ominus D_g \;\blacksquare \tag{2.30}$$

Corolario 2.1 La sombra de la erosión de $f, g \in \mathcal{F}$ está dada por $\mathcal{U}[f \ominus g] = \mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g]$.

Demostración: de las Ecs. (2.28) y (2.29) vemos que,

$$\mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g] = \mathcal{U}\Big[\bigwedge_{a \in D_g} (f_{-a} - g(a)) \Big] = \mathcal{U}[f \ominus g] \;\blacksquare$$

Definición 2.13 La *función dilatación* de $f, g \in \mathcal{F}$, denotada por, $f \oplus g : D_{f\oplus g} \to \mathbb{R}$, se define como el tope de la dilatación de sus respectivos conjuntos sombra, simbólicamente,

$$f \oplus g = \mathcal{T}(\mathcal{U}(f) \oplus \mathcal{U}(g))\,. \tag{2.31}$$

Teorema 2.6 La dilatación de f con g es equivalente a la siguiente expresión,

$$(f \oplus g)(x) = \bigvee_{a\in D_g} \{f(x-a) + g(a)\} \text{ con } (x-a) \in D_f\,, \text{ y} \tag{2.32}$$

$$D_{f\oplus g} = D_f \oplus D_g\,. \tag{2.33}$$

Demostración: Haciendo los cambios de variable, $x = x' + a$ y $y = y' + b$, vemos que,

$$\{(x', y') + (a, b) : y' \leq f(x'),\, x' \in D_f\} = \{(x, y) : y \leq f(x-a) + b,\, (x-a) \in D_f\} \tag{2.34}$$

En lo que sigue omitiremos el hecho que $(x - a) \in D_f$ con el fin de abreviar las expresiones intermedias y al final restituimos esta condición. Por tanto, si $y \leq f(x - a) + b$, entonces $y \leq f(x - a) + g(a)$; así, $\forall\, b \leq g(a)$ se tiene la inclusión,

$$\bigcup_{b\leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x-a) + b\} \subseteq \{(x, y) : y \leq f(x-a) + g(a)\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{b\leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x-a) + b\} = \{(x, y) : y \leq f(x-a) + g(a)\}. \tag{2.35}$$

Ahora, considerando las definiciones previas y resultados anteriores, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f) \oplus \mathcal{U}(g) &= \bigcup_{(a,b)\in\mathcal{U}(g)} \mathcal{U}(f)_{(a,b)} = \bigcup_{a\in D_g,\, b\leq g(a)} \{(x, y) + (a, b) : y \leq f(x)\} \\
&= \bigcup_{a\in D_g} \Big(\bigcup_{b\leq g(a)} \{(x, y) : y \leq f(x-a) + b\}\Big) \\
&= \bigcup_{a\in D_g} (\{(x, y) : y \leq f(x-a) + g(a)\}) \\
&= \bigcup_{a\in D_g} \mathcal{U}[f_a + g(a)] = \mathcal{U}\Big[\bigvee_{a\in D_g} (f_a + g(a))\Big]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 2.2. En consecuencia,

$$f \oplus g = \mathcal{T}(\mathcal{U}(f) \oplus \mathcal{U}(g)) = \mathcal{T}\Big(\mathcal{U}\Big[\bigvee_{a\in D_g} (f_a + g(a))\Big]\Big) = \bigvee_{a\in D_g} (f_a + g(a)) \tag{2.37}$$

$$\Rightarrow (f \oplus g)(x) = \bigvee_{a\in D_g} \{f(x-a) + g(a)\} \text{ con } (x-a) \in D_f\,.$$

Finalmente, por la Definición 2.11 y el Teorema 2.2, se tiene que,

$$D_{f\oplus g} = \bigcup_{a\in D_g} (D_f)_a = D_f \oplus D_g \;\blacksquare \tag{2.38}$$

Corolario 2.2 La sombra de la dilatación de $f, g \in \mathcal{F}$ está dada por $\mathcal{U}[f \oplus g] = \mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g]$.

Demostración: de las Ecs. (2.36) y (2.37) se obtiene,

$$\mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g] = \mathcal{U}\left[\bigvee_{a \in D_g} (f_a + g(a))\right] = \mathcal{U}[f \oplus g] \quad \blacksquare$$

Corolario 2.3 La sombra de la abertura y cerradura de f por g, donde $f, g \in \mathcal{F}$, está dada respectivamente por, $\mathcal{U}[f \circ g] = \mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g]$ y $\mathcal{U}[f \bullet g] = \mathcal{U}[f] \bullet \mathcal{U}[g]$.

Demostración: Como consecuencia de los Corolarios 2.1 y 2.2 no es difícil ver que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}[f \circ g] &= \mathcal{U}[(f \ominus g) \oplus g] \\
&= \mathcal{U}[(f \ominus g)] \oplus \mathcal{U}[g] \\
&= (\mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g]) \oplus \mathcal{U}[g] \\
&= \mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g]\,, \\
\mathcal{U}[f \bullet g] &= \mathcal{U}[(f \oplus g) \ominus g] \\
&= \mathcal{U}[(f \oplus g)] \ominus \mathcal{U}[g] \\
&= (\mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g]) \ominus \mathcal{U}[g] \\
&= \mathcal{U}[f] \bullet \mathcal{U}[g] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Es importante hacer notar que las igualdades establecidas entre la sombra de una operación morfológica de funciones y sus respectivas sombras con la misma operación de conjuntos son el mecanismo algebraico mediante el cual se corresponden las operaciones de la morfología matemática de funciones con las operaciones de la morfología matemática de conjuntos.

Además, el dominio de las funciones erosión y dilatación se expresa por la misma operación morfólogica entre los conjuntos dominio de las funciones f y g respectivamente. Por analogía de nomenclatura, a la función g se le conoce como *función estructurante* la cual interactúa con f. Las expresiones matemáticas dadas por los Teoremas 2.5 y 2.6 son de capital importancia para el procesamiento digital de imágenes en tonos de gris ya que establecen fórmulas que permiten el cálculo numérico de la erosión o la dilatación y son relativamente fáciles de implementar en algún lenguaje de programación.

Ejemplo 2.8 Considérense las siguientes funciones, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ y $g : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x^2 + 1$ (ver Fig. 2.4). A continuación se calcula la erosión y la dilatación de estas dos funciones. Sea $h_x(a) = f(x+a) - g(a)$ con $a \in [-\epsilon, \epsilon]$. Sustituyendo los correspondientes valores de las funciones, realizando los cálculos y simplificando se tiene que $h_x(a) = 2a^2 + 2ax + x^2 - 1$. Entonces, $h'_x(a) = 4a + 2x$ y $h''_x(a) = 4 > 0 \;\; \forall a \in (-\epsilon, \epsilon)$. Así, $h'_x(a) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{x}{2} \; \forall x \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$. Como $h''_x > 0$ y $a = -\frac{x}{2}$ es el único extremo relativo en $[-\epsilon, \epsilon]$, entonces $a = -\frac{x}{2}$ es el mínimo absoluto en $[-\epsilon, \epsilon]$. Por lo tanto, $\forall x \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$, h'_x tiene un mínimo absoluto en $a = -\frac{x}{2}$. Por otra parte, si $x > 2\epsilon$ entonces $h'_x > 0$, de modo que h es estrictamente creciente y su mínimo absoluto se alcanza en $a = -\epsilon$ y $h_x(-\epsilon) = x^2 - 2\epsilon x + 2\epsilon^2 - 1$. Ahora, si $x < -2\epsilon$ entonces $h'_x < 0$ y la función

h_x es estrictamente decreciente y alcanza su mínimo en $a = \epsilon$ donde $h_x(\epsilon) = x^2 + 2\epsilon x + 2\epsilon^2 - 1$. Consecuentemente,

$$(f \ominus g)(x) = \begin{cases} x^2 + 2\epsilon x + 2\epsilon^2 - 1 & \text{si} \quad x < -2\epsilon\,, \\ \frac{x^2}{2} - 1 & \text{si} \quad -2\epsilon \leq x \leq 2\epsilon\,, \\ x^2 - 2\epsilon x + 2\epsilon^2 - 1 & \text{si} \quad x > 2\epsilon\,. \end{cases} \tag{2.39}$$

Para $f \oplus g$, pongamos $h_x(a) = f(x-a) + g(a)$ donde $a \in [-\epsilon, \epsilon]$, entonces $h_x(a) = x^2 - 2ax + 1$. Luego, si $x \geq 0$, entonces la función h_x es decreciente y alcanza su máximo en $a = -\epsilon$ y si $x < 0$, entonces h_x es creciente y alcanza su máximo en $a = \epsilon$. Por lo tanto,

$$(f \oplus g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2\epsilon x + 1 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \\ x^2 + 2\epsilon x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0\,. \end{cases} \tag{2.40}$$

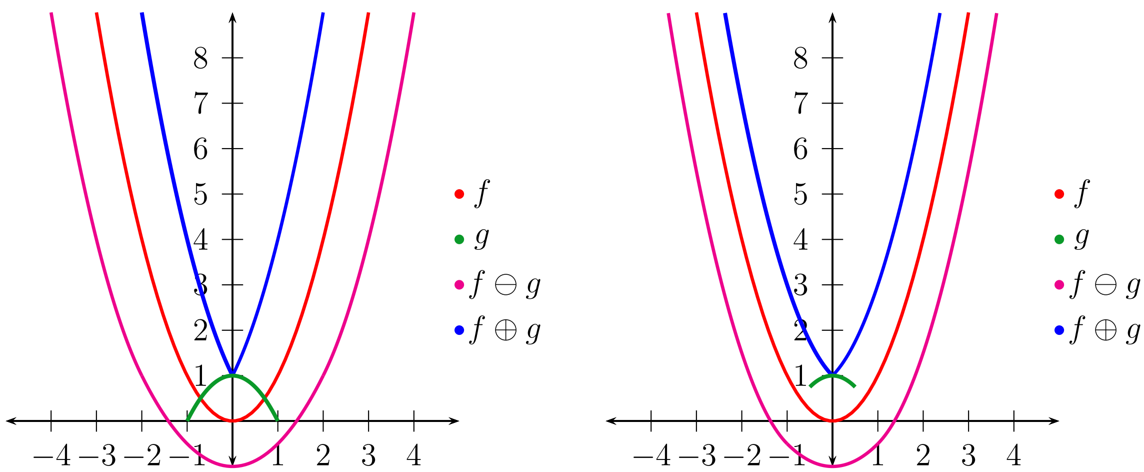

Figura 2.4: Gráfica de las funciones, original f (en rojo), estructurante g (en verde), erosionada $f \ominus g$ (magenta) y dilatada $f \oplus g$ (azul); f es la misma en ambos casos pero el dominio de g es diferente, en la izquierda, $\epsilon = 1$ y en la derecha, $\epsilon = 1/2$.

Corolario 2.4 Si $g = 0$ y hacemos $B = D_g$, entonces las definiciones de erosión y dilatación morfológicas entre funciones se simplifican, respectivamente, a las siguientes expresiones,

$$(f \ominus B)(x) = \bigwedge_{b \in B} f(x+b) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b} \;\; \text{con} \;\; (x+b) \in D_f\,, \tag{2.41}$$

$$(f \oplus B)(x) = \bigvee_{b \in B} f(x-b) = \bigvee_{b \in B} f_{b} \;\; \text{con} \;\; (x-b) \in D_f\,. \tag{2.42}$$

En estas expresiones simplificadas, se observa que el valor funcional de la erosión y la dilatación en un punto x es el mínimo o máximo, respectivamente, considerando la ventana definida por el elemento estructural B (soporte de g) cuando su origen se traslada a x. Además, $D_{f \ominus B} = D_f \ominus B$ y $D_{f \oplus B} = D_f \oplus B$. En este caso particular, ya sea $g = 0$ o $B = D_g$, se les denomina *elemento estructural plano* y la morfología correspondiente se conoce como "morfología matemática plana".

Ejemplo 2.9 Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ y $B = [-\epsilon, \epsilon]$ (ver Fig. 2.5). A continuación se calculan la erosión y dilatación con el elemento estructural B. Para la erosión, sea $h_x(a) = f(x+a) = (x+a)^2$ con $a \in B$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $h'_x(a) = 2(x+a)$ y $h''_x(a) = 2\ \forall a \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por tanto, si $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, h_x alcanza su mínimo en $a = -x$ y $f(x+a) = f(0) = 0$. Si $x > \epsilon$, entonces, $h'_x(a) > 0\ \forall a \in [-\epsilon, \epsilon]$; así, la función es creciente y alcanza su mínimo en $x = -\epsilon$. Pero si $x < -\epsilon$ entonces h_x es decreciente y alcanza su mínimo en $a = \epsilon$. En consecuencia,

$$(f \ominus B)(x) = \begin{cases} (x-\epsilon)^2 & \text{si} \quad x \leq -\epsilon\,, \\ 0 & \text{si} \quad -\epsilon < x < \epsilon\,, \\ (x+\epsilon)^2 & \text{si} \quad x \geq \epsilon\,. \end{cases} \tag{2.43}$$

Para la dilatación, tomando $h_x(a) = (x-a)^2$ con $a \in B$, entonces $h'_x(a) = -2(x-a)$ y $h''_x(a) = 2 > 0$ $\forall a \in (-\epsilon, \epsilon)$ y consecuentemente, h_x no tiene máximos relativos en $(-\epsilon, \epsilon)$. Si $a = \epsilon$, entonces, $h_x(a) = (x-\epsilon)^2$ y si $a = -\epsilon$, entonces, $h_x(a) = (x+\epsilon)^2$. Para $x \geq 0$, $(x-\epsilon)^2 \leq (x+\epsilon)^2$y si $x < 0$, $(x-\epsilon) > (x+\epsilon)^2$. Por lo tanto,

$$(f \oplus B)(x) = \begin{cases} (x-\epsilon)^2 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ (x+\epsilon)^2 & \text{si} \quad x \geq 0\,. \end{cases} \tag{2.44}$$

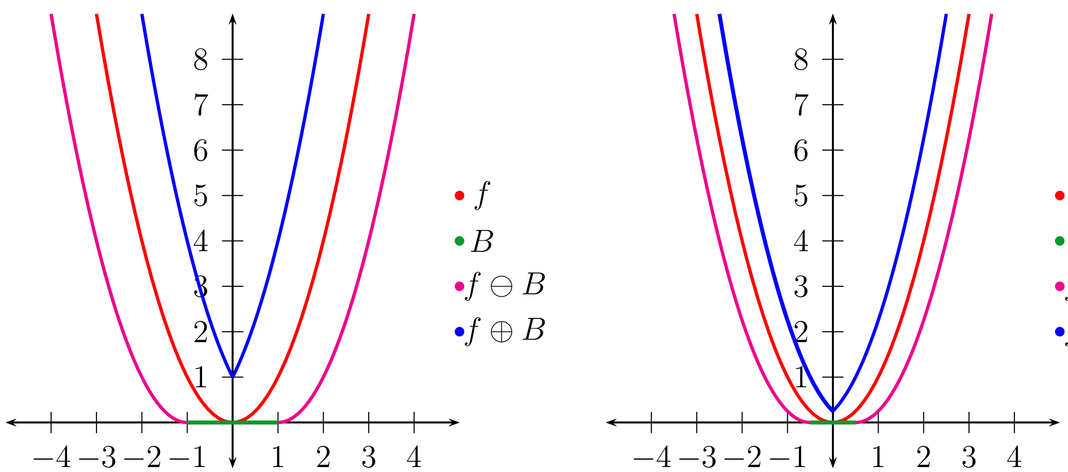

Figura 2.5: Gráfica de las funciones, original f (en rojo), estructurante B (en verde), erosionada $f \ominus B$ (magenta) y dilatada $f \oplus B$ (azul); f es la misma en ambos casos pero el conjunto B es diferente, en la izquierda, $\epsilon = 1$ y en la derecha, $\epsilon = 1/2$.

Definición 2.14 Sean $f, g \in \mathcal{F}$, entonces la abertura y cerradura de la función f con la función g están dadas, respectivamente, por,

$$f \circ g = (f \ominus g) \oplus g \quad \text{y} \quad f \bullet g = (f \oplus g) \ominus g\,. \tag{2.45}$$

Teorema 2.7 Las operaciones morfológicas de abertura y cerradura de dos funciones $f, g \in \mathcal{F}$ se determinan con base en sus sombras y el tope como sigue,

$$f \circ g = \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g]) \quad \text{y} \quad f \bullet g = \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \bullet \mathcal{U}[g])\,. \tag{2.46}$$

Demostración: Aplicando la función tope al resultado obtenido en el Corolorario 2.3 para la abertura y cerradura en términos de sus respectivas sombras, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
f \circ g &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \circ g]) = \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g])\,, \\
f \bullet g &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \bullet g]) = \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \bullet \mathcal{U}[g]) \;\; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Las propiedades de las operaciones de la morfología matemática de funciones son similares a las propiedades de la morfología matemática de conjuntos. Excepto por nomenclatura y notación, las demostraciones de dichas propiedades se fundamentan en las relaciones establecidas entre sombras según los Corolarios 2.1, 2.2 y 2.3, de modo que para evitar razonamientos análogos hacemos la descripción de estas propiedades así como sus respectivas demostraciones en el Apéndice B.

Capítulo 3

Procesamiento Morfológico de Imágenes

3.1. Representación matemática de imágenes digitales

Una imagen continua puede ser considerada como la representación visual de una colección de objetos contenidos en una escena. Matemáticamente puede ser descrita como una función f de dos o tres variables espaciales, que corresponden a un dominio espacial de coordenadas bidimensionales x e y (denotadas como 2D), o de coordenadas tridimensionales x, y y z (denotadas como 3D), respectivamente. Para una imagen digital $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$ representa un valor o nivel de intensidad en el sentido físico en el punto (x, y) o (x, y, z). En el presente contexto, la función f se considera acotada y su rango de valores depende de la escala de intensidades que se esté utilizando. En particular, una *imagen digital* es una función f que ha sido *discretizada espacialmente* y *cuantizada en intensidad*. Entonces, las imágenes digitales en 2D y 3D se reprensentan como las matrices $A = (a_{ij})$ y $A = (a_{ijk})$, respectivamente, donde $a_{ij} = f(x_i, y_j)$ y $a_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k)$ y los subíndices correspondientes recorren los intervalos siguientes $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ y $k = 1, \ldots, p$. Los a_{ij} o a_{ijk} son denominados como *elementos de imagen* o simplemente *pixeles*. Hacemos notar que en la notación matricial los subíndices i y j estan asociados a la *posición del pixel* y $a_{i,j}$ corresponde a la *intensidad del pixel*. En este trabajo restringimos la discusión a imágenes digitales bidimensionales (en 2D).

Según se defina la escala de intensidades, las imágenes se clasifican en binarias, en tonos de gris, o en color. En nuestro caso trataremos únicamente con las dos primeras clases de imágenes. Específicamente, una *imagen binaria* es una función f definida de $D_f \subseteq \mathbb{Z}^2$ a $\{0, 1\}$, donde D_f es el dominio espacial de f. Análogamente, una *imagen en tonos de gris* es una función f que va de $D_f \subseteq Z^2$ a $\{0, 1, ..., L-1\} \subseteq \mathbb{N}$, donde $L-1$ es el valor máximo de la escala de intensidades empleada. En ambos casos, D_f es un rectángulo o cuadrado, y por convenio, $L = 2^k$ siendo k un entero positivo que establece el número de bits utilizados para codificar binariamente los números enteros especificados en la escala correspondiente. Al conjunto $G = \{((x, y), z) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} : z = f(x, y)\}$ se conoce como el *grafo* de G que aparte de representar una imagen digital 2D también puede representarse como una superficie de intensidades en 3D. Una operación monaria comúnmente empleada es la siguiente: el *complemento* o *negativo* de una función discreta y acotada, $f : D_f \subseteq \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1, ..., L-1\}$, se denota por f^c y se define como,

$$f^c(x, y) = (L - 1) - f(x, y)\,. \tag{3.1}$$

3.2. Tratamiento de imágenes binarias

Como se mencionó anteriormente una imagen binaria es una función f con valores en $\{0, 1\}$. Si un punto pertenece a algún objeto en la imagen, al pixel correspondiente lo asociamos con el número 1 y lo representamos en color “negro”, de lo contrario se le asigna el número 0 y se representa en color “blanco”. De acuerdo a esta codificación, los objetos en una imagen binaria se ven en negro y el fondo es blanco. También se emplea la codificación invertida entre negro (0) y blanco (1) como una representación alternativa. En este caso, los objetos de la imagen se ven en blanco y el fondo en negro. Para fines ilustrativos usamos la primera codificación y en las aplicaciones hacemos empleo de la codificación invertida.

Los objetos (subconjuntos) en una imagen binaria están formados por puntos en el plano bidimensional que pertenecen al dominio de definición D_f de la imagen. Así, en una imagen binaria distinguimos dos subconjuntos: el *conjunto de los objetos*, denotado por, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) = 1\}$ y el *conjunto del fondo*, simbolizado por $\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) = 0\}$. Claramente, $D_f = \Omega \cup \Phi$ y $\Omega \cap \Phi = \varnothing$. A continuación, ilustraremos las diferentes operaciones morfológicas aplicadas a una imagen binaria que en particular corresponde a Grecia continental y algunas de sus islas. Por ello usaremos nomenclatura geográfica para explicar el efecto de las operaciones morfólogicas de manera local en diferentes partes de la imagen. Los elementos estructurales utilizados para los siguientes ejemplos son los que se muestran en la figura 3.1.

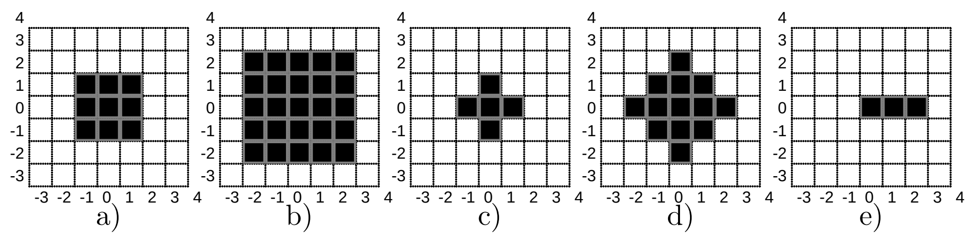

Figura 3.1: Elementos estructurales que contienen el origen $(0, 0)$: a) el cuadrado B_c de 3×3 puntos, b) el cuadrado $2B_c = B_c \oplus B_c$ de 5×5 puntos, c) la cruz B_d con 5 puntos, d) el diamante $2B_d = B_d \oplus B_d$ con 13 puntos y e) el segmento horizontal B_h de 1×3 puntos.

De esta manera, la Fig. 3.2 ilustra las operaciones de erosión y dilatación; similarmente, la Fig. 3.3 ilustra las operaciones de abertura y cerradura. En relación a la Fig. 3.2, la segunda fila muestra que el resultado de erosionar la imagen binaria es otra imagen en la que han permanecido las regiones que tienen igual forma y un tamaño mayor o igual que el elemento estructural, en consecuencia las zonas geográficas terrestres en la imagen se reducen y las bahías o lagos se agrandan. Una de las aplicaciones frecuentes de la erosión binaria es la eliminación de detalles irrelevantes dado que dicha operación es antiextensiva (cf. Cáp. 2, Secc. 2.3). Por otra parte, como la dilatación es una operación extensiva, observamos en la tercera fila de la misma figura que varias zonas terrestres han sido agrandadas haciendo que bahías o lagos se reduzcan y en algunos casos desaparezcan; además, si el espacio entre regiones es suficientemente pequeño entonces estás se unen.

Por parte, en la Fig. 3.3, la abertura binaria, que se muestra en la segunda fila, suaviza las orillas de las diversas regiones geográficas internamente, elimina pequeñas penínsulas, islas e istmos entre regiones cuando son de menor tamaño que el elemento estructural pero mantiene en proporción el tamaño de las regiones contenidas en la imagen. La cerradura, como se muestra en el última fila, por su parte rellena todas las estructuras de fondo que son más pequeñas que el elemento estructural, rellena pequeños lagos o bahías dentro de diversas zonas, rellena canales uniendo regiones cercanas, suaviza las orillas externamente y en de manera similar a la abertura mantiene en proporción el tamaño de las regiones contenidas en la imagen.

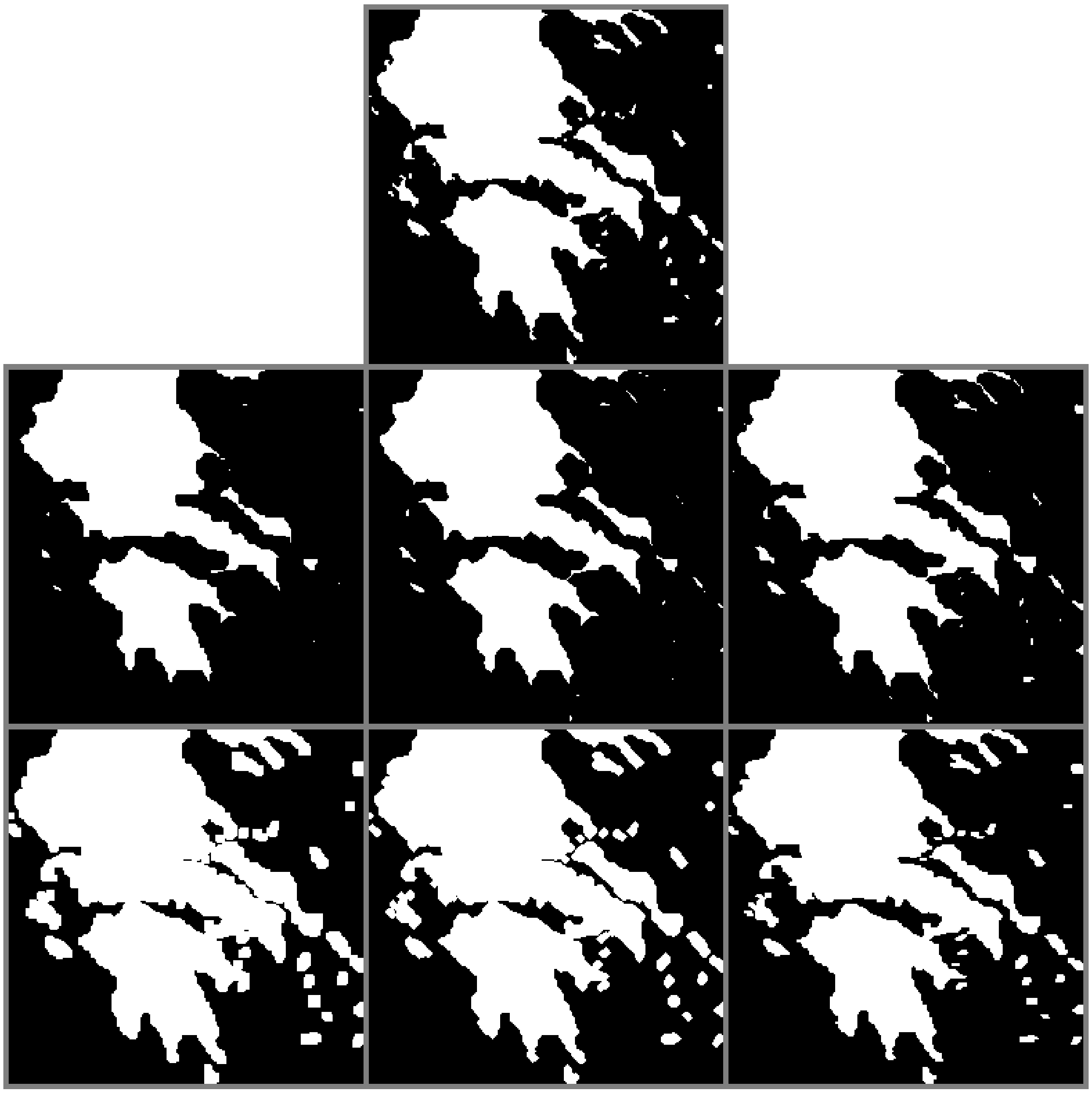

Figura 3.2: 1era fila, imagen binaria; 2da fila, erosiones y 3era fila., dilataciones. Los EE's por columna, de izq. a der., son el cuadrado $2B_c$, el diamante $2B_d$ y el segmento horizontal B_h.

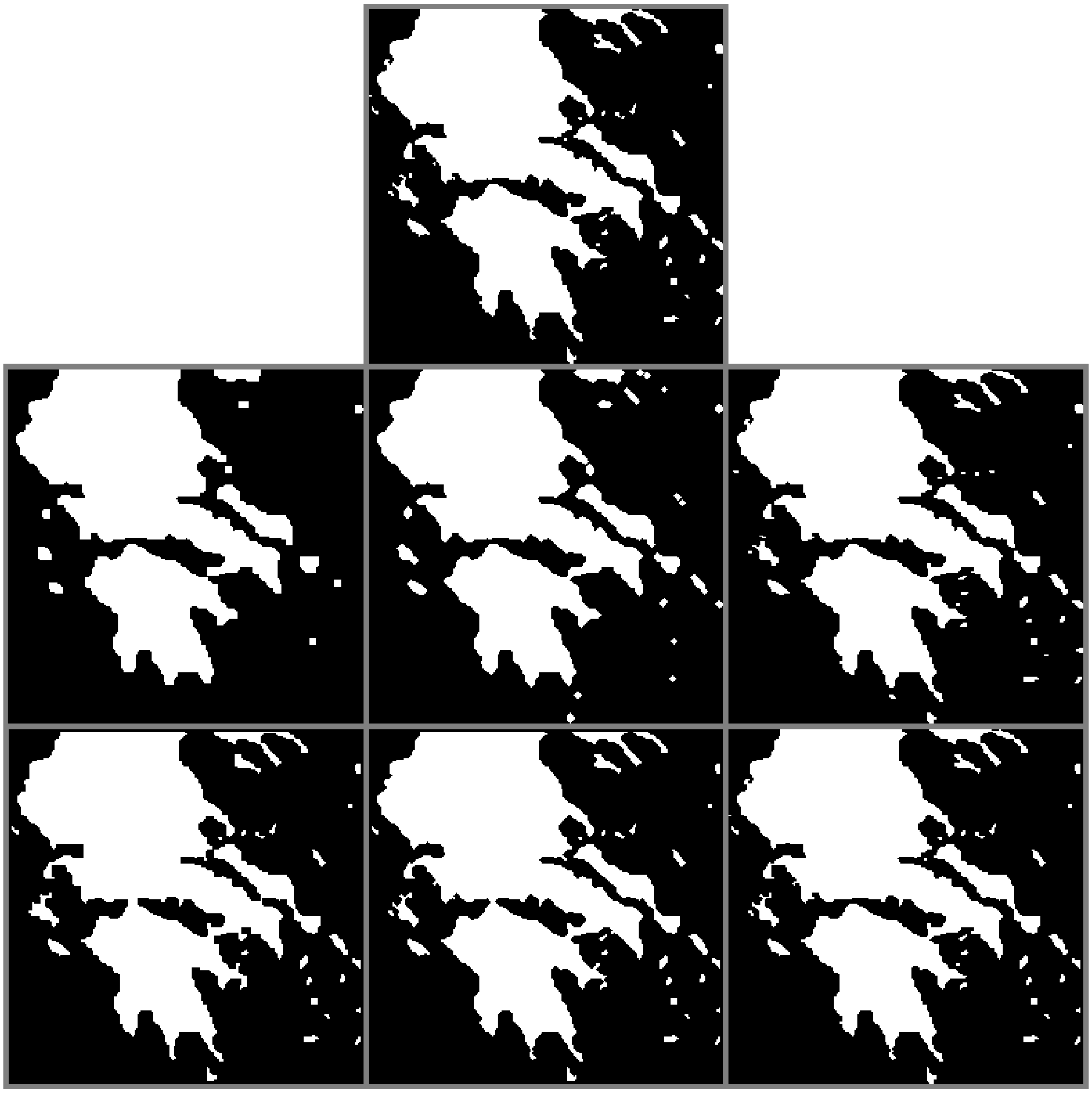

Figura 3.3: 1era fila, imagen binaria; 2da fila, aberturas y 3era fila, cerraduras. Los EE's por columna, de izq. a der., son el cuadrado $2B_c$, el diamante $2B_d$ y el segmento horizontal B_h.

3.2.1. Eliminación de ruido

En esta subsección se presentan ejemplos de eliminación de ruido aleatorio en imágenes binarias. Como en estas imágenes los valores están en el conjunto $\{0, 1\}$, el único tipo de ruido aleatorio a considerar es el ruido impulsivo comúnmente conocido como ruido de "sal" y "pimienta" para referirse al cambio de 0 a 1 y de 1 a 0, respectivamente. Sea $A = (a_{ij})$ una imagen binaria (rectangular) de tamaño $m \times n$ con mn pixeles. Entonces, una *imagen ruidosa* de A se define como una imagen $A_r = (a_{ij}^r)$ afectada por *ruido impulsivo* donde una fracción $p \in [0, 1]$ de sus pixeles, los cuales se seleccionan aleatoriamente siguiendo una distribución de probabilidad uniforme, cambian su valor mediante la siguiente expresión,

$$a_{ij}^r = \tau(\rho(1) \leq p, 1 - a_{ij}, a_{ij})\,, \tag{3.2}$$

para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ y donde $\tau(c, e_v, e_f)$ es la función condicional cuyos argumentos son la condición lógica a evaluar c, la expresión a evaluar e_v en caso de que $c = 1$ (verdadera) y la expresión a evaluar e_f en caso de que $c = 0$ (falsa). Además, $\rho(1)$ es una función generadora de números aleatorios con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. En un contexto computacional la función $\rho(x)$ se denota por $\mathsf{rnd}(x)$ la cual proporciona al azar un número real en el intervalo $(0, x)$. Nótese que τ verifica que el valor del pixel a modificar sea parte de la fracción total de los pixeles sujetos a cambiar su valor. De este modo, la construcción dada por la Ec. (3.2), garantiza la aleatoriedad en la contaminación de la imagen binaria. En particular, si $p = 0$ entonces $A_r = a_{ij}^r = a_{ij} = A$ (imagen original, sin ruido) y si $p = 1$ entonces $A_r = a_{ij}^r = 1 - a_{ij} = A^c$ (imagen invertida, negativo o complemento).

La abertura morfológica aplicada a una imagen binaria ruidosa es capaz de suprimir el ruido de "sal" ya que primero realiza una erosión del fondo y los objetos contenidos en la imagen, pero no así el ruido de "pimienta" ya que al dilatar la erosión previa no cambian aquellos pixeles objeto que originalmente fueron modificados de 1 a 0. Dualmente, la cerradura morfológica aplicada a una imagen binaria ruidosa es capaz de suprimir el ruido de "pimienta" ya que primero realiza una dilatación tanto de los objetos como del fondo pero no así el ruido de "sal" ya que al erosionar la dilatación previa no cambian aquellos pixeles del fondo que originalmente fueron modificados de 0 a 1. Sin embargo, una abertura seguida de una cerradura o viceversa logran, según la naturaleza del elemento estructural empleado, suprimir primero el ruido de "sal" y luego el de "pimienta" o viceversa. A estas composiciones se les conoce como *filtros morfológicos*. De este modo, los filtros morfológicos *abrir-cerrar* y *cerrar-abrir* se definen por las siguientes expresiones:

$$\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B) = (A_r \circ B) \bullet B \quad \text{y} \quad \phi_{\mathrm{ca}}(A_r, B) = (A_r \bullet B) \circ B\,. \tag{3.3}$$

En las figuras 3.4–3.7 se presentan ejemplos de eliminación de ruido con los filtros morfológicos abrir-cerrar y cerrar-abrir usando los elementos estructurales cuadrado y cruz, respectivamente, de la figura 3.1 correspondientes a los incisos a) y c); en ellas pueden verificarse las observaciones anteriores concernientes a la acción de la erosión y dilatación según el orden de composición como corresponde a la abertura y cerradura y consecuentemente en $\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B)$ y $\phi_{\mathrm{ca}}(A_r, B)$.

En la primera fila de la figura 3.4 se muestra la imagen de Grecia modificada con ruido impulsivo aleatorio del 5 % (1era col.) y 10 % (2da col.). La segunda fila muestra el resultado de aplicar la operación morfológica abertura a las imágenes ruidosas de la primera fila y en la tercera fila se aplica una cerradura a las imágenes de la segunda fila. El elemento estructural utilizado en ambos casos fue el cuadrado. Al final se colocó la imagen original para su comparación con los resultados del filtrado mofológico $\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B_c)$. De manera similar, en la figura 3.5 se utilizá el filtro morfológico $\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B_d)$ usando en este caso el elemento estructural cruz. Es fácil distinguir dónde se utilizó el cuadrado o la cruz puesto que en los bordes de los objetos aparecen sus formas. Nótese también que el ruido del 10 % es más agresivo y por lo tanto es más difícil "recuperar" completamente la imagen original. Análogamente, en las figuras 3.6 y 3.7 se muestra el uso del filtro morfológico $\phi_{\mathrm{ca}}(A_r, B)$. Para esta imagen en particular, debido a sus carácteristicas, el filtro morfológico $\phi_{\mathrm{ca}}(A_r, B)$ dá mejores resultados que el filtro morfológico $\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B)$.

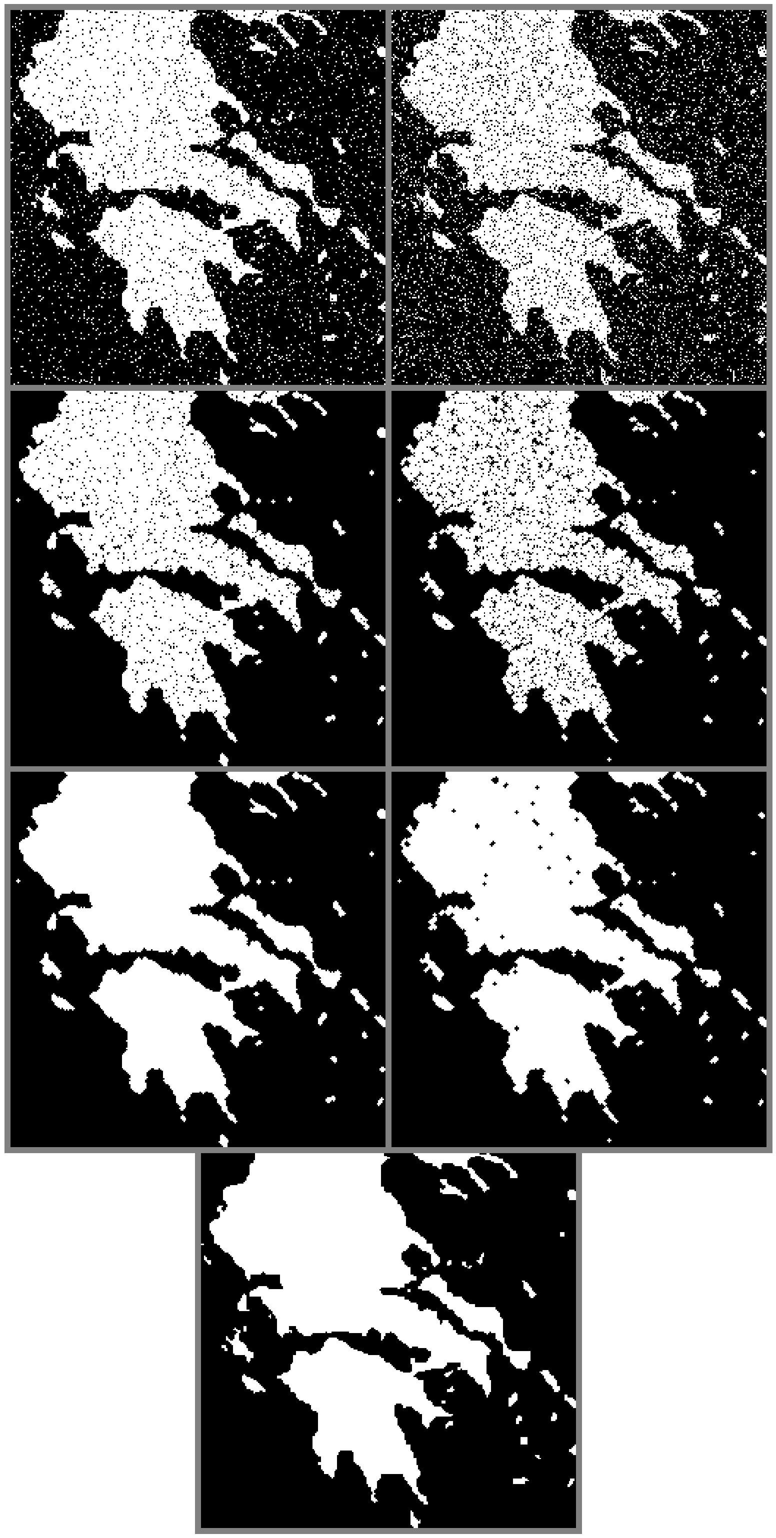

Figura 3.4: Filtrado morfológico $\phi_{\mathrm{ac}}(A_r, B_c)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, aberturas; 3era fila, cerraduras (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen binaria original A.

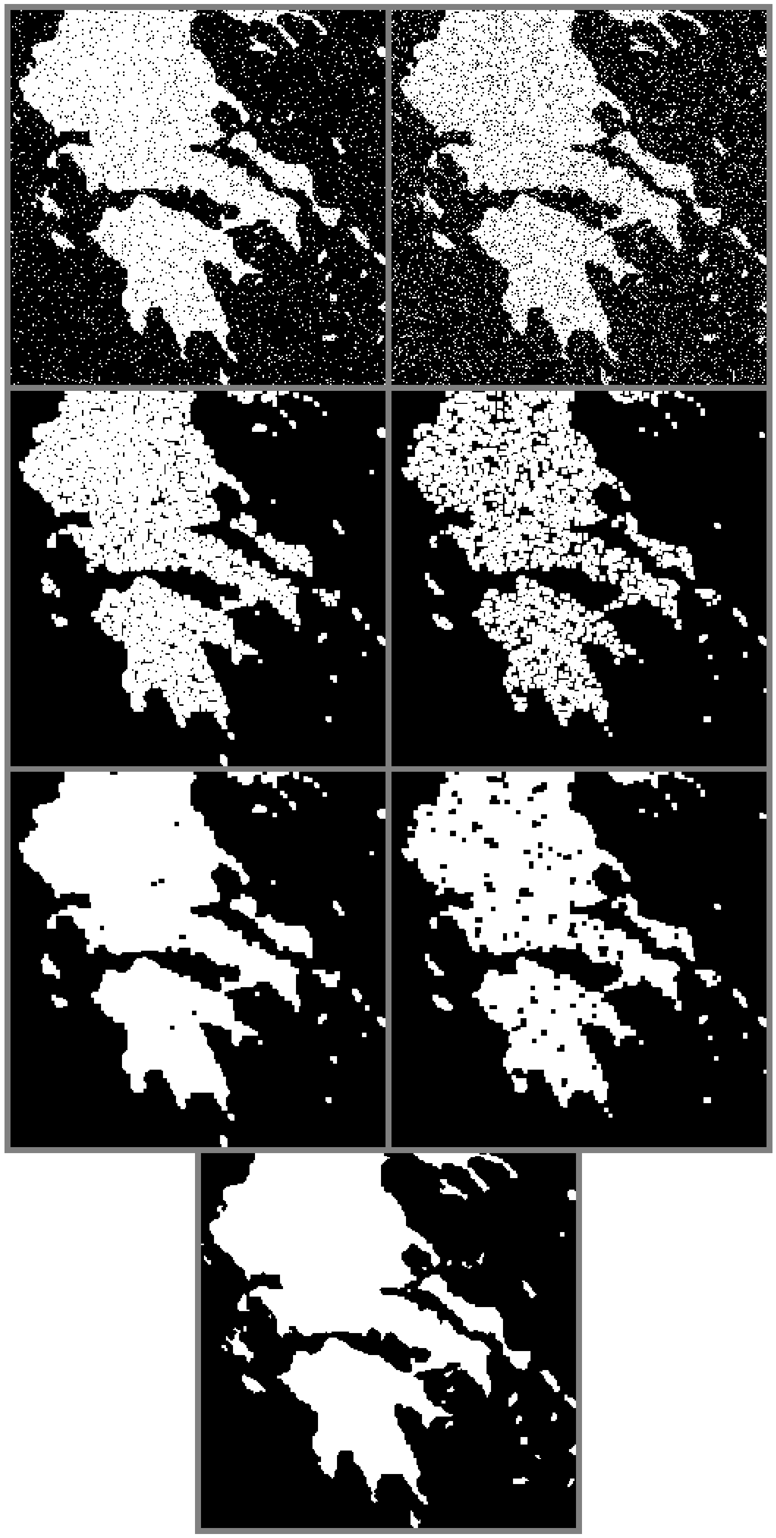

Figura 3.5: Filtrado morfológico $\phi_{\text{ac}}(A_r, B_d)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, aberturas; 3era fila, cerraduras (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen binaria original A.

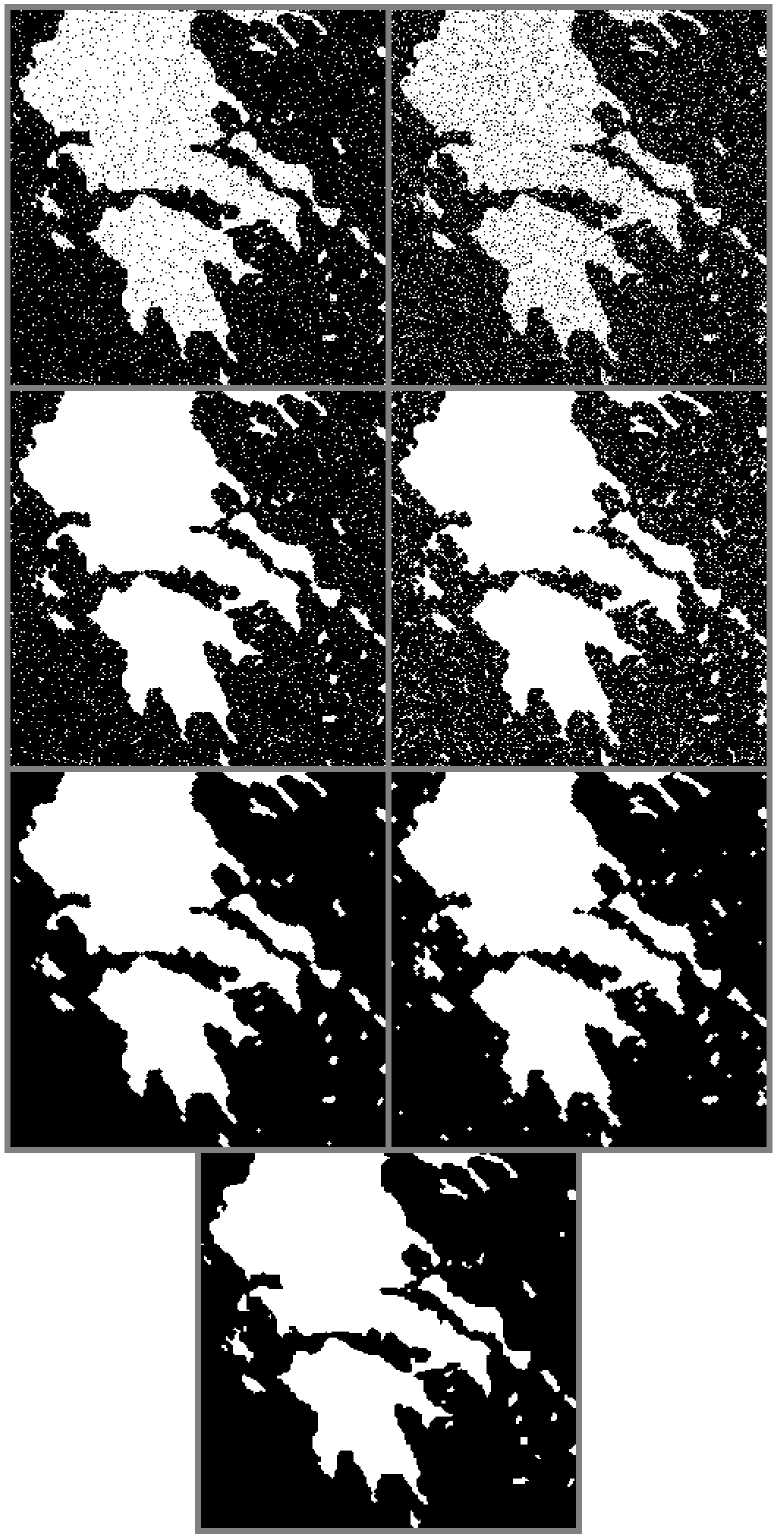

Figura 3.6: Filtrado morfológico $\phi_{\text{ca}}(A_r, B_c)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, cerraduras; 3era fila, aberturas (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen binaria original A.

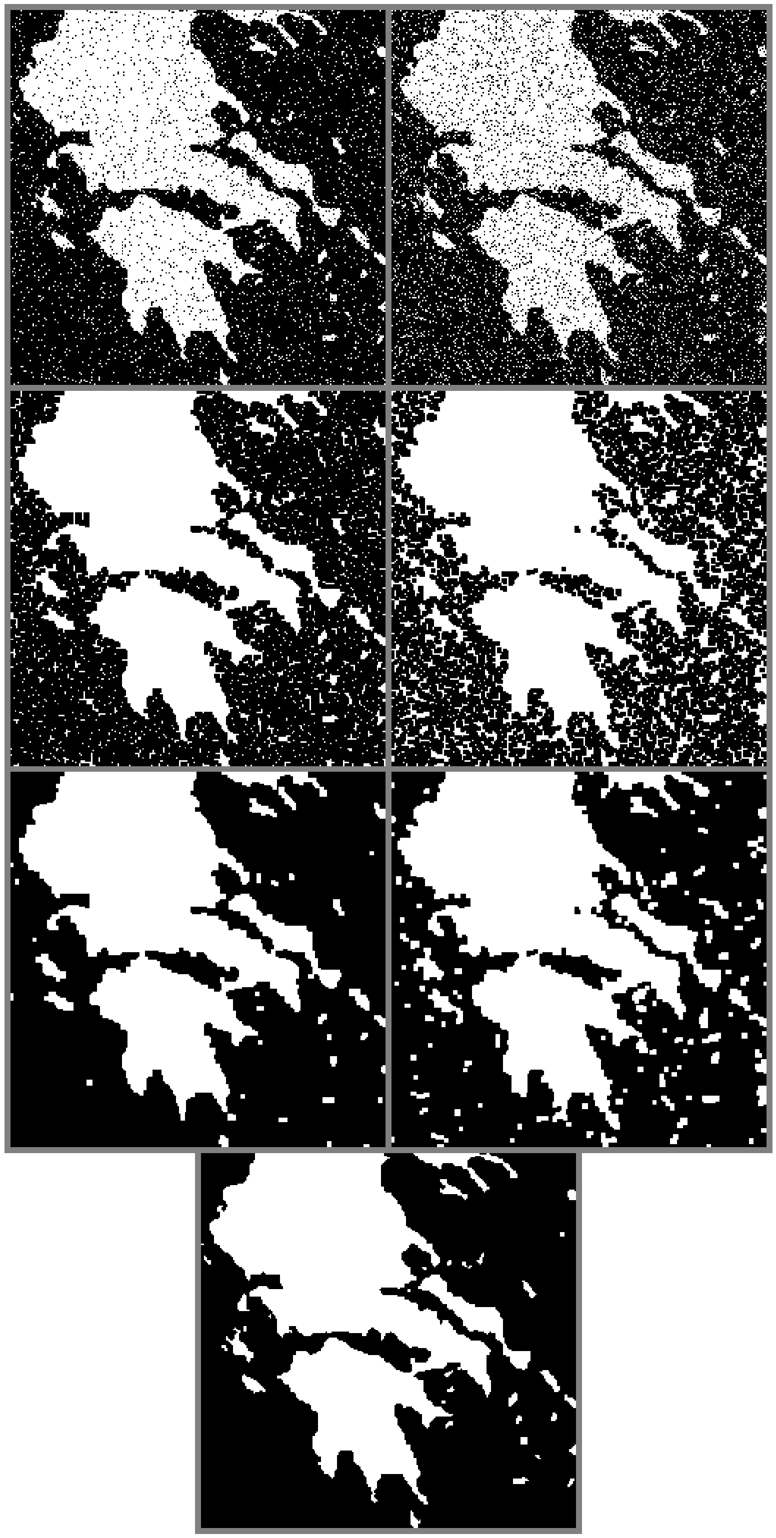

Figura 3.7: Filtrado morfológico $\phi_{\mathrm{ca}}(A_r, B_d)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, cerraduras; 3era fila, aberturas (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen binaria original A.

3.2.2. Detección de bordes

Aquí presentamos tres operaciones simples para la detección de bordes en imágenes binarias. En particular se definen las siguientes diferencias de conjuntos en $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\Delta_i(A,B) = A - A \ominus B, \tag{3.4}$$

$$\Delta_e(A,B) = A \oplus B - A, \tag{3.5}$$

$$\Delta_c(A,B) = A \oplus B - A \ominus B\,. \tag{3.6}$$

Las diferencias de conjuntos anteriores reciben el nombre de *gradiente interior*, *gradiente exterior* y *gradiente central*, respectivamente. En el presente contexto, a las expresiones anteriores se les conoce como *gradientes morfológicos* debido a la similitud que tienen con el concepto de gradiente de una función en análisis, relación que se detalla más adelante. En las figuras 3.8 y 3.9 se muestran ejemplos de detección de bordes usando el gradiente exterior e interior y considerando elementos estructurales que contienen el origen. Estos gradientes son diferencias de operaciones que son extensivas y anti-extensivas y localizan puntos donde hay un cambio de tono dentro de una vecindad dada. El gradiente exterior $\Delta_e(A,B)$ es el resultado de hacer la diferencia entre la dilatación de una imagen y ella misma. Ya que la operación de dilatación es extensiva entonces contiene a la imagen original y así el borde son todos aquellos puntos que fueron añadidos por la dilatación de la imagen original. De manera similar ocurre con el gradiente interior $\Delta_i(A,B)$ pero en este caso el borde serán todos aquéllos puntos de los objetos en la imagen original que fueron removidos por la erosión del conjunto. Por otra parte, el gradiente central $\Delta_c(A,B)$ es la diferencia entre la dilatación y la erosión y constituye un borde grueso que se usa con frecuencia en el procesamiento digital de imágenes para enfatizar la separación de conjuntos de objetos; por ejemplo, en la figura 3.10 se muestra el borde central de la imagen de Grecia. En seguida se demuestra que si $0 \in B$ entonces el gradiente central es la unión de los gradientes exterior e interior.

Proposición 3.1 Sean A, B dos conjuntos en $\mathbb{R}^2$ y $0 \in B$ entonces,

$$\Delta_c(A,B) = \Delta_e(A,B) \cup \Delta_i(A,B). \tag{3.7}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(A \oplus B - A) \cup (A - A \ominus B) &= (A \oplus B) \cap A^c) \cup (A \cap (A \ominus B)^c \\
&= [((A \oplus B) \cap A^c) \cup A] \cap [((A \oplus B) \cap A^c) \cup (A \ominus B)^c] \\
&= [((A \oplus B) \cup A) \cap (A^c \cup A)] \cap [((A \oplus B) \cup (A \ominus B)^c) \cap (A^c \cup (A \ominus B)^c)] \\
&= ((A \oplus B) \cup A) \cap (((A \oplus B) \cup (A \ominus B)^c) \cap (A \ominus B)^c) \\
&= ((A \oplus B) \cup A) \cap (((A \oplus B) \cap (A \ominus B)^c) \cup (A \ominus B)^c) \\
&= ((A \oplus B) \cup A) \cap (A \ominus B)^c \\
&= (A \oplus B) \cap (A \ominus B)^c \\
&= A \oplus B - A \ominus B \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Figura 3.8: Detección del borde interior: 1ra fila, imágen original (duplicada); 2da fila, erosiones y 3ra fila, diferencias entre originales y erosiones. Los EEs son B_d (izq.) y B_c (der.)

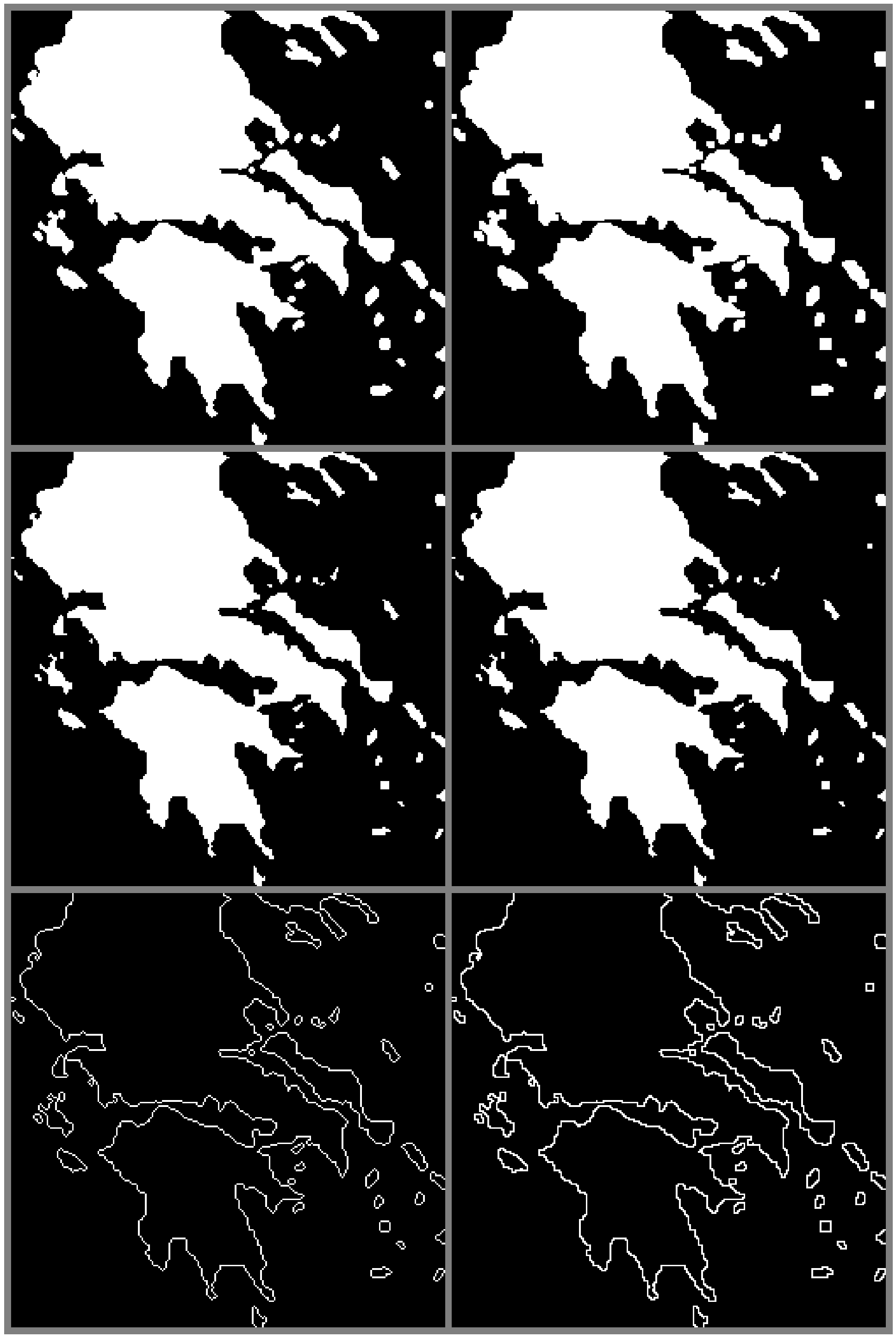

Figura 3.9: Detección del borde exterior: 1ra fila, imágen dilatadas; 2da fila, imagen original (duplicada) y 3ra fila, diferencias entre dilataciones y originales. Los EEs son B_d (izq.) y B_c (der.)

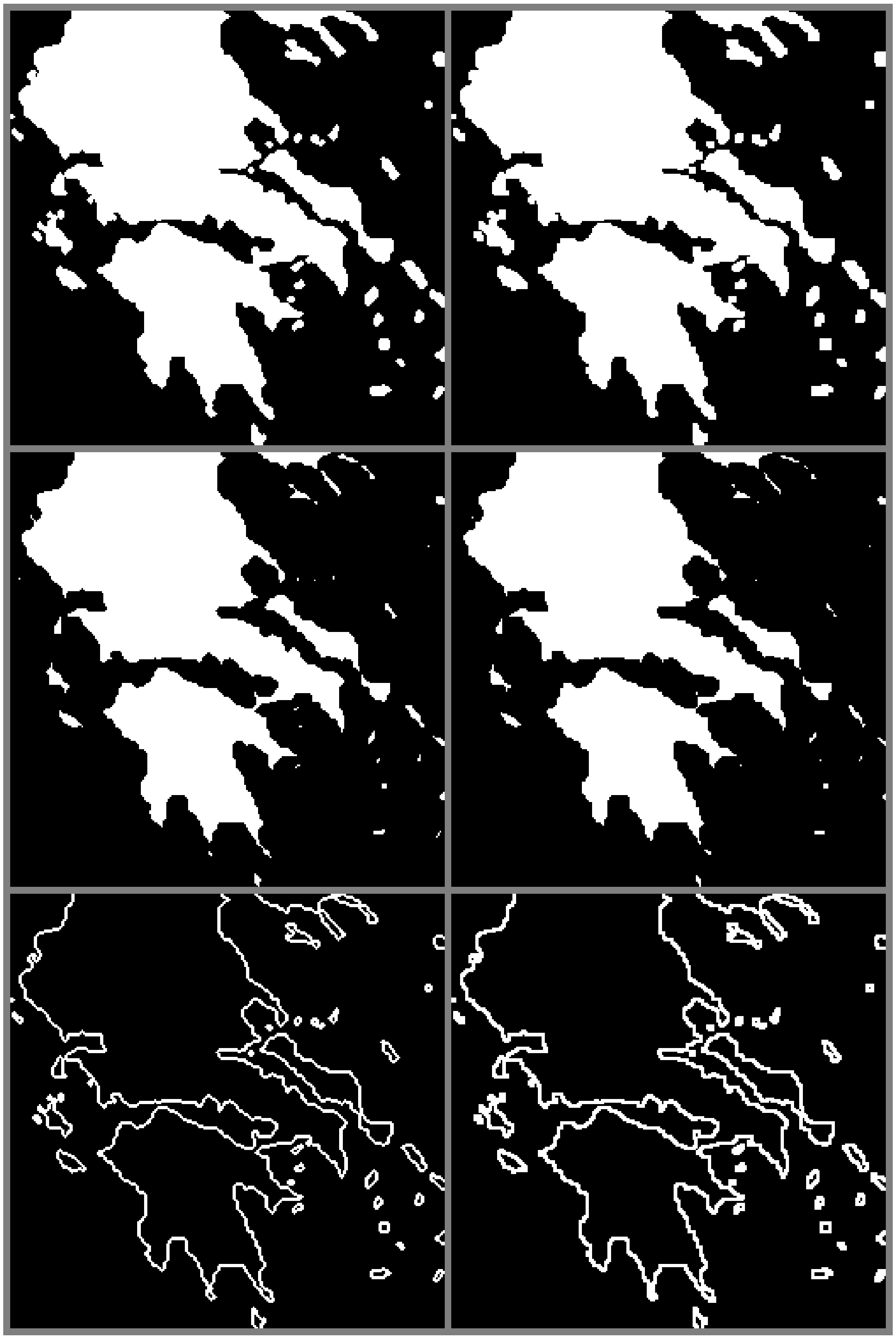

Figura 3.10: Detección del borde central: 1ra fila, dilataciones; 2da fila, erosiones y 3ra fila, diferencias entre dilataciones y erosiones. Los EEs son B_d (izq.) y B_c (der.)

3.2.3. Segmentación de partículas

En esta última subsección damos un ejemplo de segmentación en imágenes binarias entendiendo por ello el proceso de separar grupos de objetos que satisfacen ciertas condiciones. Un paso en el preprocesamiento de imágenes en algunas aplicaciones en miscroscopía concierne al problema de aislar partículas quasi-circulares individuales de partículas similares que se traslapan en grupos de dos o más partículas (ver la fig. 3.11). Suponiendo que todas las partículas son del mismo tamaño después de haber sido adecuadamente binarizadas, damos a continuación una secuencia de operaciones morfológicas básicas que resultan en tres imágenes consistentes respectivamente de: a) las partículas que tocan el marco rectangular de la imagen, b) los grupos de partículas internas al marco que se traslapan, y c) las partículas individuales internas al marco de la imagen.

P1 La imagen binaria a procesar se considera como el conjunto A.

P2 Inicializamos la imagen binaria con la marcación de las partículas que tocan el marco de la imagen considerando el conjunto, $M_b = \partial A$, que es el borde rectangular que limita a A. En este caso, el tamaño de una partícula circular es a lo más de 24×24 pixeles.

P3 Empleamos el esquema iterativo de *dilatación morfológica condicional* para obtener el conjunto de las partículas que tocan el marco de la imagen A, usando ésta misma imagen como conjunto limitante a la propiedad extensiva de la dilatación. De este modo, $P_b^k = (P_b^{k-1}) \oplus B_d) \cap A$, donde, $k = 1, \ldots, \ell_b$ y $P_b^0 = M_b$ (corresponde al inciso a)); en particular, para esta reconstrucción, $\ell_b = 20$ y B_d denota la cruz como EE de 3×3 px. El resto de las partículas que no se encuentran tocando el marco rectangular de A es el conjunto $R = A - P_b^{\ell_b}$.

P4 Para extraer los grupos interiores de la imagen que constan de partículas pegadas o traslapadas empleamos una familia de elementos estructurales la cual consta de segmentos rectilíneos con diversas orientaciones y cuya longitud es mayor que el diámetro de un partícula. Específicamente, la familia de EEs está dada por $\{B_j\}_{j=1}^{8} = \{0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°\}$, donde las vecindades son de 31×31 px para j par y de 25×25 px para j impar. Mediante esta familia se construye la imagen binaria de marcación de las partículas que se traslapan, denotada por el conjunto M_t, y que es igual a $\bigcup_{j=1}^{8}(R \ominus B_j)$. Con esta última imagen inicializamos el esquema iterativo de dilatación condicional para reconstruir los grupos de partículas correspondientes. Así, $P_t^k = (P_t^{k-1} \oplus B_d) \cap R$, donde, $k = 1, \ldots, \ell_t$ y $P_t^0 = M_t$; en particular, para esta reconstrucción, $\ell_t = 45$.

P5 El conjunto, $R' = R - P_t^{\ell_t}$, obtenido del paso anterior nos dá prácticamente el conjunto de las partículas individuales internas salvo por unos fragmentos de partículas que pertenecen a algunos grupos de partículas traslapadas. Estos fragmentos pueden eliminarse por una triple erosión de modo que el conjunto auxiliar, $M_s = ((R' \ominus B_c) \ominus B_c) \ominus B_c) = R' \ominus 3B_c$, nos proporciona la imagen binaria de marcación para obtener exclusivamente las partículas solas o individuales y con ella reconstruirlas en forma análoga a las anteriores por dilatación condicional. Por lo tanto, $P_s^k = (P_s^{k-1} \oplus B_d) \cap R'$, donde, $k = 1, \ldots, \ell_s$ y $P_s^0 = M_s$ (corresponde al inciso c)); en este caso la reconstrucción se realizó tomando $\ell_s = 8$.

P6 Los fragmentos de partículas eliminados en el paso anterior se recuperan en el conjunto, $R'' = R' - P_s^{\ell_s}$, de modo que éstos se reincorporan con los grupos de partículas traslapadas formando el conjunto final de grupos de partículas traslapadas, es decir, $P_t^{\ell_t} = P_t^{\ell_t} \cup R''$ (corresponde al inciso b)).

De los pasos anteriores obtenemos finalmente la segmentación de la imagen binaria A según las condiciones impuestas sobre el tipo de partículas a extraer. Esta segmentación corresponde a una partición de A, ya que $A = P_b^{\ell_b} \cup P_t^{\ell_t} \cup P_s^{\ell_s}$ y $P_b^{\ell_b} \cap P_t^{\ell_t} = \varnothing$, $P_b^{\ell_b} \cup P_s^{\ell_s} = \varnothing$ y $P_t^{\ell_t} \cup P_s^{\ell_s} = \varnothing$. Para efectos de ver la separación lograda, las tres clases de partículas relativas a los incisos a), b) y c), se muestran respectivamente con los colores verde, azul y naranja en una misma imagen (ver fig. 3.12).

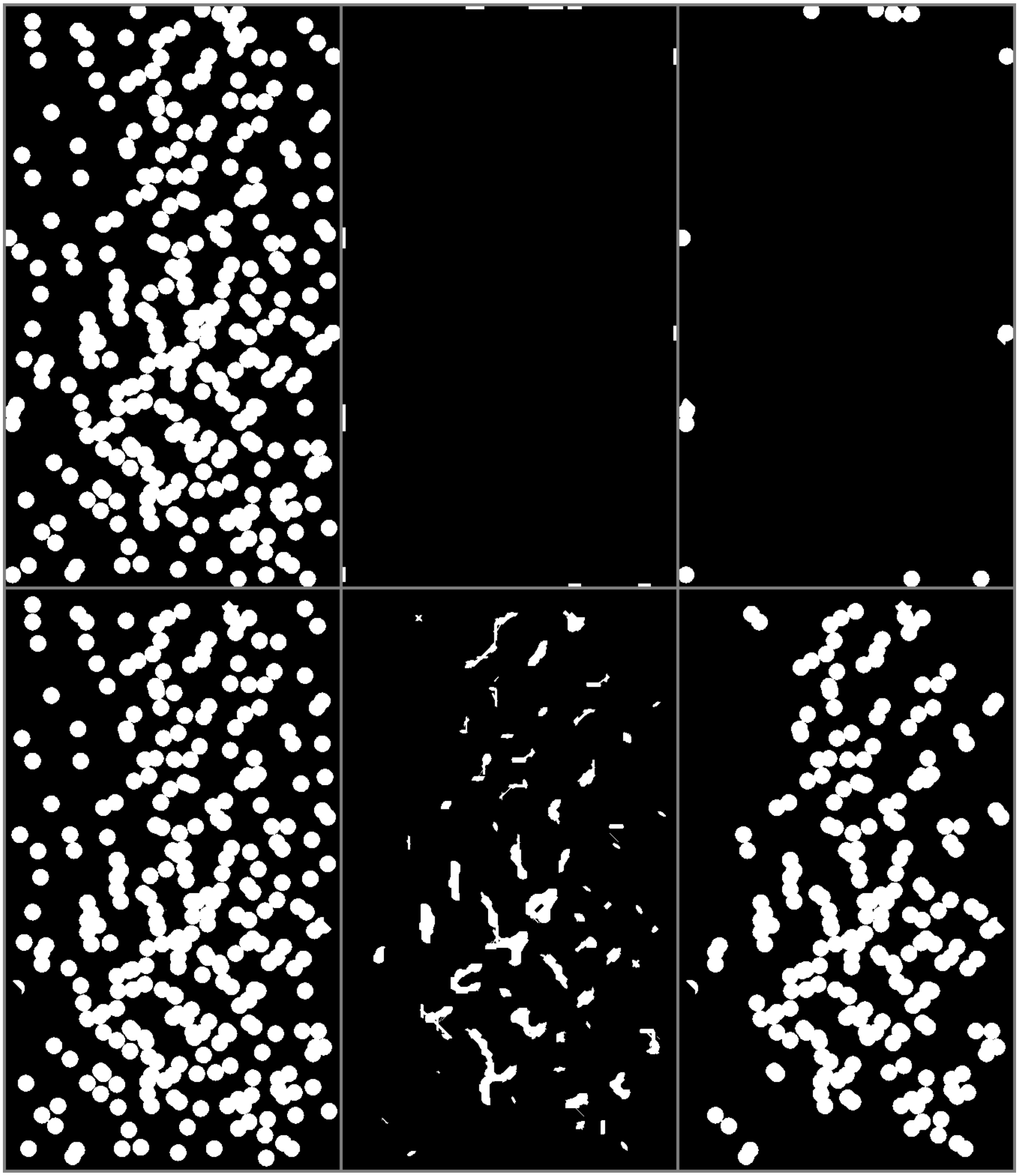

Figura 3.11: Arriba de izq. a der.: imagen binaria original (partículas circulares), marcación de partículas que tocan el marco de A y partículas de borde extraídas. Abajo de izq. a der.: partículas interiores (traslapadas e individuales), marcación de grupos de partículas traslapadas e imagen final con partículas traslapadas extraídas.

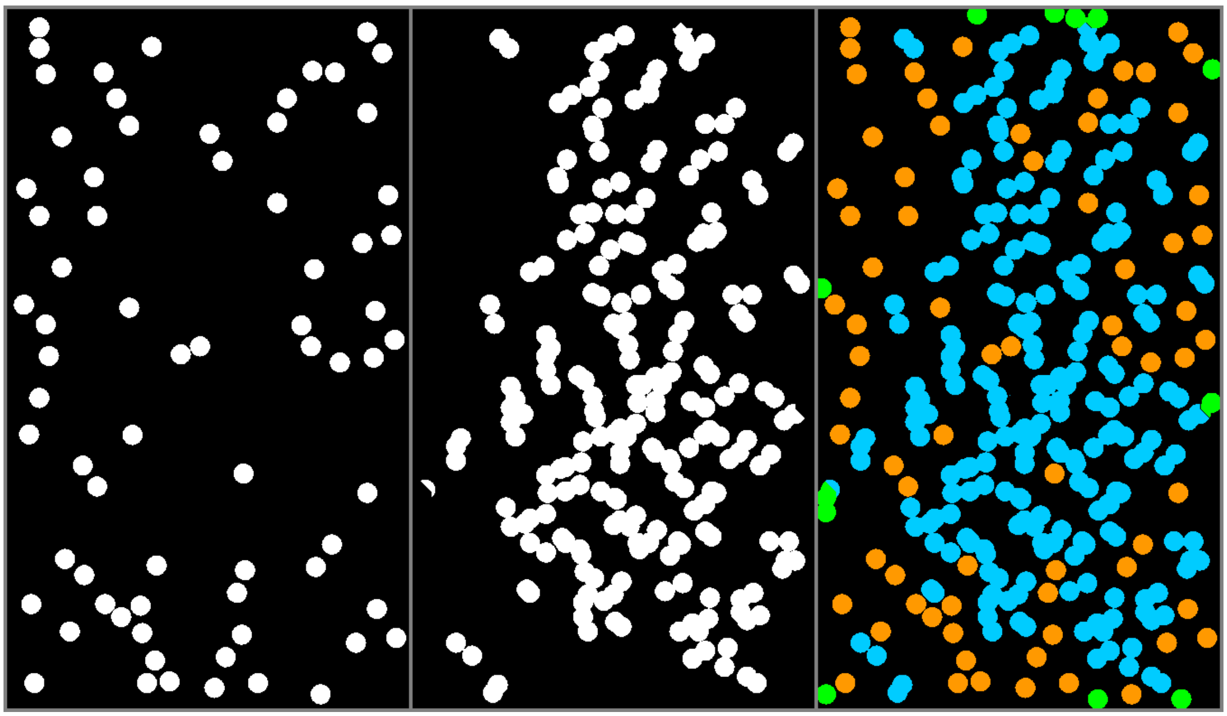

Figura 3.12: Imagen con partículas solas o individuales, imagen con partículas traslapadas (repetida de la figura anterior) e imagen coloreada compuesta con los tres tipos de partículas especificados por a) en verde, b) en naranja y c) en azul.

3.3. Tratamiento de imágenes en tonos de gris

Como se explicó más arriba (Secc. 3.2), una imagen en tonos de gris es una función f con valores en $\{0, 1, ..., L-1\} \subseteq \mathbb{N}$, donde $L-1$ es el valor máximo de la escala de intensidades empleada. El *histograma normalizado* de f se define por el vector $h_k = n_k/n$, donde $k = 0, \ldots, L-1$, n_k es el número de pixeles con valor de gris k y n es el número total de pixeles en la imagen. En particular, el histograma normalizado se identifica con la función de densidad de probabilidad de ocurrencia de los niveles de gris k presentes en la imagen.

Considerando una imagen en tonos de gris cuyo histograma se distribuya sobre toda la escala de grises, los pixeles pertenecientes a uno o más objetos pueden distinguirse de aquellos pixeles que pertenecen al fondo siempre que dicha distribución sea bimodal. En tal caso, el nivel de gris (umbral) que separa los tonos obscuros de los tonos brillantes se encuentra entre ambos modos del histograma y permite distinguir pixeles objeto de los pixeles de fondo. De acuerdo a esta descripción, los objetos en una imagen en tonos de gris se ven en tonos claros o brillantes y el fondo es grisáceo u obscuro. Es importante mencionar que si el histograma de una imagen en tonos de gris no es bimodal entonces es más complejo distinguir que pixeles forman objetos y cuales no. Si empleamos el complemento de f ("negativo"), es decir, $f^c = (L-1) - f$, entonces se invierte la tonalidad de grises de objetos y fondo. En este caso, los objetos de la imagen se ven obscuros o grisáceos y el fondo es claro o brillante. Para fines ilustrativos mostraremos imágenes "positivas" y "negativas" según el contexto de aplicación.

Los objetos (subconjuntos) en una imagen en tonos de gris están formados por puntos de una superficie en el espacio tridimensional. Así, en general, en una imagen en tonos de gris distinguimos tres subconjuntos: el *conjunto de los objetos*, denotado por, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) \geq u_{\max}\}$, el *conjunto del fondo*, simbolizado por $\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) < u_{\min}\}$ y el *conjunto interfaz* entre objetos y fondo dado por $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x, y) \in (u_{\min}, u_{\max})\}$. El conjunto $(u_{\min}, u_{\max})$ es un intervalo de tonos de gris (umbrales) los cuales pueden considerarse que no corresponden a pixeles objeto o de fondo. Claramente, $D_f = \Omega \cup \Phi \cup \Delta$, $\Omega \cap \Phi = \varnothing$, $\Omega \cap \Delta = \varnothing$ y $\Phi \cap \Delta = \varnothing$ (en el caso binario, $u = u_{\min} = u_{\max}$ y $\Delta = \varnothing$).

A continuación, ilustraremos las diferentes operaciones morfológicas aplicadas a una imagen en tonos de gris que en particular corresponde a un edificio (ver figuras 3.13 y 3.14). Los elementos estructurales utilizados para estos ejemplos son los mismos de la figura 3.1 de modo que estamos considerando el caso de morfología matemática de funciones cuyos elementos estructurales son "planos". Hacemos notar que las partes de los objetos en la imagen conectadas con el marco rectangular que la delimita no cambian tanto su morfología como las que se encuentran en el interior de la imagen. Esto se debe a que parte del elemento estructural empleado se encuentra fuera del dominio de definición de la operación morfológica. Una manera de hacer frente a este problema de frontera es extenderla en sus cuatro lados al menos en la mitad del tamaño del EE y asignarles el valor de gris 0, $L-1$, o una combinación de estos según sea necesario. Por otra parte, puede observarse que en cuanto a los tonos de gris, sus valores disminuyen por erosión y aumentan por dilatación (cf. las Ecs. (2.41) y (2.42)). Consecuentemente, el efecto de la erosión y dilatación morfológicas de una imagen mediante un elemento estructural plano ($g = 0$ y $B = D_g$) consiste en obscurecerla o abrillantarla respectivamente.

Figura 3.13: De arriba a abajo: imagen en grises, erosiones y dilataciones; por columna de izq. a der., los EEs son el cuadrado $2B_c$, el diamante $2B_d$ y el segmento horizontal B_h.

Figura 3.14: De arriba a abajo: imagen en grises, aberturas y cerraduras; por columna de izq. a der., los EEs son el cuadrado $2B_c$, el diamante $2B_d$ y el segmento horizontal B_h.

3.3.1. Eliminación de ruido

En esta subsección se presentan ejemplos de eliminación de ruido aleatorio en imágenes en tonos de gris. Como en estas imágenes los valores están en el conjunto $\{0, \ldots, L-1\}$, existen diversos tipos de ruido aleatorio los cuales siguen una determinada función de densidad de probabilidad (p. ej., Gaussiana). Sin embargo, para fines demostrativos y en analogía al caso de las imágenes binarias, consideraremos únicamente el ruido impulsivo (i.e., de "sal" y "pimienta"). Sea $f = (f_{ij})$ una imagen en tonos de gris (rectangular) de tamaño $m \times n$ con mn pixeles. Entonces, una *imagen ruidosa* de f se define como una imagen $f_r = (f^r_{ij})$ afectada por *ruido impulsivo* en donde una fracción $p \in [0, 1]$ de sus pixeles, los cuales se seleccionan aleatoriamente con probabilidad uniforme, cambian su valor mediante la siguiente expresión,

$$f^r_{ij} = \tau(\rho(1) \leq p, \tau(\rho(1) \leq 0{,}5, 0, L-1), f_{ij})\,, \tag{3.8}$$

para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ y donde τ y ρ son las mismas funciones definidas anteriormente al tratar la eliminación de ruido en imágenes binarias. Nótese que $\tau(\rho(1) \leq 0{,}5, 0, L-1)$ verifica que la asignación del valor mínimo o máximo de la escala de grises, 0 o $L-1$, ocurra con la misma probabilidad. De este modo, la construcción dada por la Ec. (3.8), garantiza la aleatoriedad equiprobable en la contaminación de la imagen en tonos de gris. En particular, si $p = 0$ entonces $f_r = f^r_{ij} = f_{ij} = f$ (imagen original, sin ruido) y si $p = 1$ entonces $f_r = f^r_{ij} \in \{0, L-1\}$ para toda (i, j) lo que quiere decir que el ruido impulsivo al 100 % destruye toda la información relativa a los niveles de gris contenidos en el conjunto $\{1, \ldots, L-2\}$.

La abertura morfológica aplicada a una imagen binaria ruidosa es capaz de suprimir el ruido de "sal" ya que primero realiza una erosión del fondo y los objetos contenidos en la imagen, pero no así el ruido de "pimienta" ya que al dilatar la erosión previa no cambian aquellos pixeles objeto que originalmente fueron modificados de a_{ij} a 0 pues el nuevo valor de pixel es el $\max_{(i,j)\in B}\{a_{ij}\}$. Dualmente, la cerradura morfológica aplicada a una imagen binaria ruidosa es capaz de suprimir el ruido de "pimienta" ya que primero realiza una dilatación tanto de los objetos como del fondo pero no así el ruido de "sal" ya que al erosionar la dilatación previa no cambian aquellos pixeles del fondo que originalmente fueron modificados de a_{ij} a $L-1$ ya que el nuevo valor de pixel es el $\min_{(i,j)\in B}\{a_{ij}\}$. Sin embargo, una abertura seguida de una cerradura o viceversa logran, según la naturaleza del elemento estructural empleado, suprimir primero el ruido de "sal" y luego el de "pimienta" o viceversa. A estas composiciones se les conoce como *filtros morfológicos*. De este modo, los filtros morfológicos *abrir-cerrar* y *cerrar-abrir* se definen por las siguientes expresiones:

$$\psi_{\mathrm{ac}}(f_r, B) = (f_r \circ B) \bullet B \quad \text{y} \quad \psi_{\mathrm{ca}}(f_r, B) = (f_r \bullet B) \circ B\,. \tag{3.9}$$

En las figuras 3.15–3.18 se presentan ejemplos de eliminación de ruido con los filtros morfológicos abrir-cerrar y cerrar-abrir usando los elementos estructurales cuadrado y cruz, respectivamente, de la figura 3.1 correspondientes a los incisos a) y c); en ellas pueden verificarse las observaciones anteriores concernientes a la acción de la erosión y dilatación según el orden de composición como corresponde a la abertura y cerradura y consecuentemente en $\psi_{\mathrm{ac}}(f_r, B)$ y $\psi_{\mathrm{ac}}(f_r, B)$.

Figura 3.15: Filtrado morfológico $\psi_{\mathrm{ac}}(f_r, B_c)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, aberturas; 3era fila, cerraduras (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen original en tonos de gris f.

Figura 3.16: Filtrado morfológico $\psi_{\mathrm{ac}}(f_r, B_d)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, aberturas; 3era fila, cerraduras (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen original en tonos de gris f.

Figura 3.17: Filtrado morfológico $\psi_{\mathrm{ca}}(f_r, B_c)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, cerraduras; 3era fila, aberturas (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen original en tonos de gris f.

Figura 3.18: Filtrado morfológico $\psi_{\mathrm{ca}}(f_r, B_d)$: 1era fila, imágenes con 5 % y 10 % de ruido impulsivo; 2da fila, cerraduras; 3era fila, aberturas (resultado del filtrado) y 4ta fila, imagen original en tonos de gris f.

3.3.2. Detección de bordes

Similarmente al caso de la imágenes binarias, aquí damos tres operaciones simples para la detección de bordes en imágenes en tonos de gris. En particular se definen las siguientes diferencias de funciones dadas por:

$$G_i(f,B) = f - f \ominus B, \tag{3.10}$$
$$G_e(f,B) = f \oplus B - f, \tag{3.11}$$
$$G_c(f,B) = f \oplus B - f \ominus B\,. \tag{3.12}$$

Las diferencias de las funciones anteriores reciben el nombre de *gradiente interior*, *gradiente exterior* y *gradiente central*, respectivamente. En el presente contexto, a las expresiones anteriores se les conoce como *gradientes morfológicos* debido a la similitud que tienen con el concepto de gradiente de una función en análisis, relación que se detalla a continuación. En las imágenes en escala de grises los bordes se consideran como el conjunto de pixeles donde los cambios locales de intensidad son abruptos relativos a una vecindad dada. El concepto de gradiente en la física-matemática nos indica en que dirección una función cambia más rápidamente; de forma geométrica el gradiente es un vector normal a la superficie de nivel en el punto bajo estudio.

Definición 3.1 Sea f una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El gradiente de f, denotado por ∇f, es el siguiente vector,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right). \tag{3.13}$$

En el campo del procesamiento de imágenes los gradientes son manejados a través de sus módulos y direcciones más que con su representación vectorial. La magnitud del gradiente está dada por,

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \tag{3.14}$$

y la dirección del gradiente por,

$$(\nabla f)_\theta = \arctan\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{3.15}$$

Esta definición de gradiente definida en $\mathbb{R}^2$ como espacio Euclideano se aplica a funciones continuas, por lo tanto no puede aplicarse directamente a las imágenes digitales ya que éstas se definen en un espacio discreto como $\mathbb{Z}^2$.

Definición 3.2 Sea f una función definida en $\mathbb{R}^2$ y ρB un disco de radio ρ, entonces el *gradiente morfológico* $G(f)$, se determina por el siguiente límite,

$$G(f) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f \oplus \rho B - f \ominus \rho B}{2\rho}. \tag{3.16}$$

Entonces, si f es diferenciable y $x \in \mathbb{R}^2$, se tiene,

$$(f \oplus \rho B)(x) = \sup_{y \in \rho B_x} f(y) = f(x) + \rho|\nabla f(x)| + V(\rho), \tag{3.17}$$

$$(f \ominus \rho B)(x) = \sup_{y \in \rho B_x} f(y) = f(x) - \rho|\nabla f(x)| + V'(\rho). \tag{3.18}$$

donde, $V(\rho)$ y $V'(\rho)$ son términos de error que tienden a cero cuando $\rho \to 0$. Además, puede concluirse que,

$$(f \oplus \rho B)(x) - (f \ominus \rho B)(x) = 2\rho|\nabla f(x)| + (V(\rho) - V'(\rho)). \tag{3.19}$$

De modo que, si $\rho \to 0$ entonces,

$$G(f) = |\nabla f|. \tag{3.20}$$

Así, siendo f una función diferenciable, entonces el gradiente morfológico corresponde al módulo del gradiente de f. Por otra parte, la ecuación 3.16 no puede ser aplicada directamente al caso discreto, puesto que en este caso el valor del radio más pequeño posible es $\rho = 1$. La definición de gradiente en el caso discreto, dada por S. Beucher [23], es entonces la diferencia entre la dilatación y la erosión por un elemento estructural ρB, esto es:

$$G(f, \rho B) = f \oplus \rho B - f \ominus \rho B. \tag{3.21}$$

Notemos que la expresión anterior corresponde al miembro derecho de la ecuación 3.16 para $\rho = 1$ salvo el factor de escala $1/2$ que no afecta el resultado del gradiente morfológico debido a la consideración establecida por el 2do principio de las transformaciones morfológicas. De hecho, si $\rho = 1$ la Ec. (3.21) corresponde al gradiente central $G_c(f, B)$ dado al principio de esta sección. Así, $G(f, \rho B)$ representa la máxima variación de los niveles de intensidad según la interacción local con el elemento estructural y en consecuencia los gradientes morfológicos son frecuentemente aplicados en problemas de segmentación para localizar bordes entre regiones que delimitan objetos y regiones que pertenecen al fondo ya que dichas diferencias enfatizan o resaltan las variaciones altas de intensidad. En las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 se muestran ejemplos de detección de bordes usando el gradiente interior, exterior y central donde los elementos estructurales son la cruz y el cuadrado (planos) que contienen al origen.

Figura 3.19: Detección del borde interior. Por renglones: imagen en grises original (duplicada), erosiones y diferencias entre original y sus erosiones; de izq. a der. en 2do renglón, los EEs usados son B_d (cruz) y B_c (cuadrado), respectivamente.

Figura 3.20: Detección del borde exterior. Por renglones: dilataciones, imagen en grises original (duplicada) y diferencias entre dilataciones y original; de izq. a der. en 1er renglón, los EEs usados son B_d (cruz) y B_c (cuadrado), respectivamente.

Figura 3.21: Detección del borde central. Por renglones: dilataciones, erosiones y diferencias entre dilataciones y erosiones; de izq. a der. en 1er renglón, los EEs usados son B_d (cruz) y B_c (cuadrado), respectivamente.

3.3.3. Segmentación de partículas

De una forma análoga al caso de imágenes binarias pero en el contexto más general de las imágenes en tonos de gris, el área de especialidad del procesamiento digital que trata de determinar la distribución del tamaño de partículas se conoce como *granulometría*. Sin embargo, en la práctica rara vez las partículas de diferente tamaño se encuentran adecuadamente separadas para su conteo. Por ello es necesario realizar una segmentación para separar grupos de partículas de distinto tamaño y posteriomente contarlas. En esta subsección damos un ejemplo particular de este tipo de segmentación y como se logra mediante una secuencia de operaciones morfológicas.

En la esquina superior izquierda de la figura 3.22 se muestra la imagen en tonos de gris de un conjunto de trozos de madera de dos tamaños diferentes con tonalidades claras sobre un fondo gris obscuro. En seguida damos la secuencia de operaciones morfológicas básicas que resultan en la separación respectivamente de: a) los trozos grandes de madera y b) los trozos chicos de madera, ambos internos al marco rectangular de la imagen de tamaño 403×512.

P1 La imagen en tonos de gris a procesar se considera como la función f.

P2 Dado que los trozos chicos de madera tiene un diámetro de aproximadamente 30 pixeles, iniciamos extendiendo la imagen original aumentándo su marco rectangular por 15 pixeles por lado (denotada por f_e) para poder efectuar una erosión morfológica de funciones usando como elemento estructural plano un disco de radio $\rho = 15$ que denotamos por $15B$ y cuyo centro son las coordenadas $(14, 14)$. Por tanto, la imagen en tonos de gris dada por $M_g = f_e \ominus 15B$ resulta en una imagen de marcación de los trozos grandes de madera. Debido al tamaño del EE empleado, esta erosión reduce y obscurece convenientemente en forma simultánea todos los trozos chicos eliminando a la vez el granulado de la superficie de madera en las marcas remanentes correspondientes a los trozos grandes.

P3 Para obtener los trozos grandes de madera cerramos por dilatación la imagen de marcas obtenidas en el paso anterior usando el mismo elemento estructural $15B$. Así, la imagen suavizada que representa los trozos grandes está dada por $M'_g = M_g \oplus 15B$. Con la finalidad de recuperar la textura de la madera presente en la imagen original, obtenemos primero una imagen en grises umbralizada en el nivel de gris 92, posteriormente binarizada en el nivel de gris 64 y escalada nuevamente a la escala de grises $\{0, 255\}$ (negro y blanco). Estas últimas operaciones las podemos representar matemáticamente como:

$$T_g = 255\beta(\tau(M'_g, 92), 64),$$

donde, $\beta(a_{ij}, b) = 0$ si $a_{ij} < b$ y $\beta(a_{ij}, b) = 1$ si $a_{ij} \geq b$, y $\tau(a_{ij}, u) = 0$ si $a_{ij} < u$ y $\tau(a_{ij}, u) = a_{ij}$ si $a_{ij} \geq u$. De este modo, los trozos grandes con su textura de madera se obtienen formando la imagen $S_g = \text{mín}(f_e, T_g)$ la cual se determina pixel a pixel.

P4 Finalmente, obtenemos los trozos chicos realizando la resta de la imágenes en tonos de gris dada por $S_{ch} = f_e - S_g$. La imagen en color falso mostrada en la esquina inferior derecha de la Fig. 3.22 muestra la superposición de las imágenes segmentadas S_g y S_{ch} donde claramente los colores asignados distinguen entre ambos conjuntos de trozos de madera.

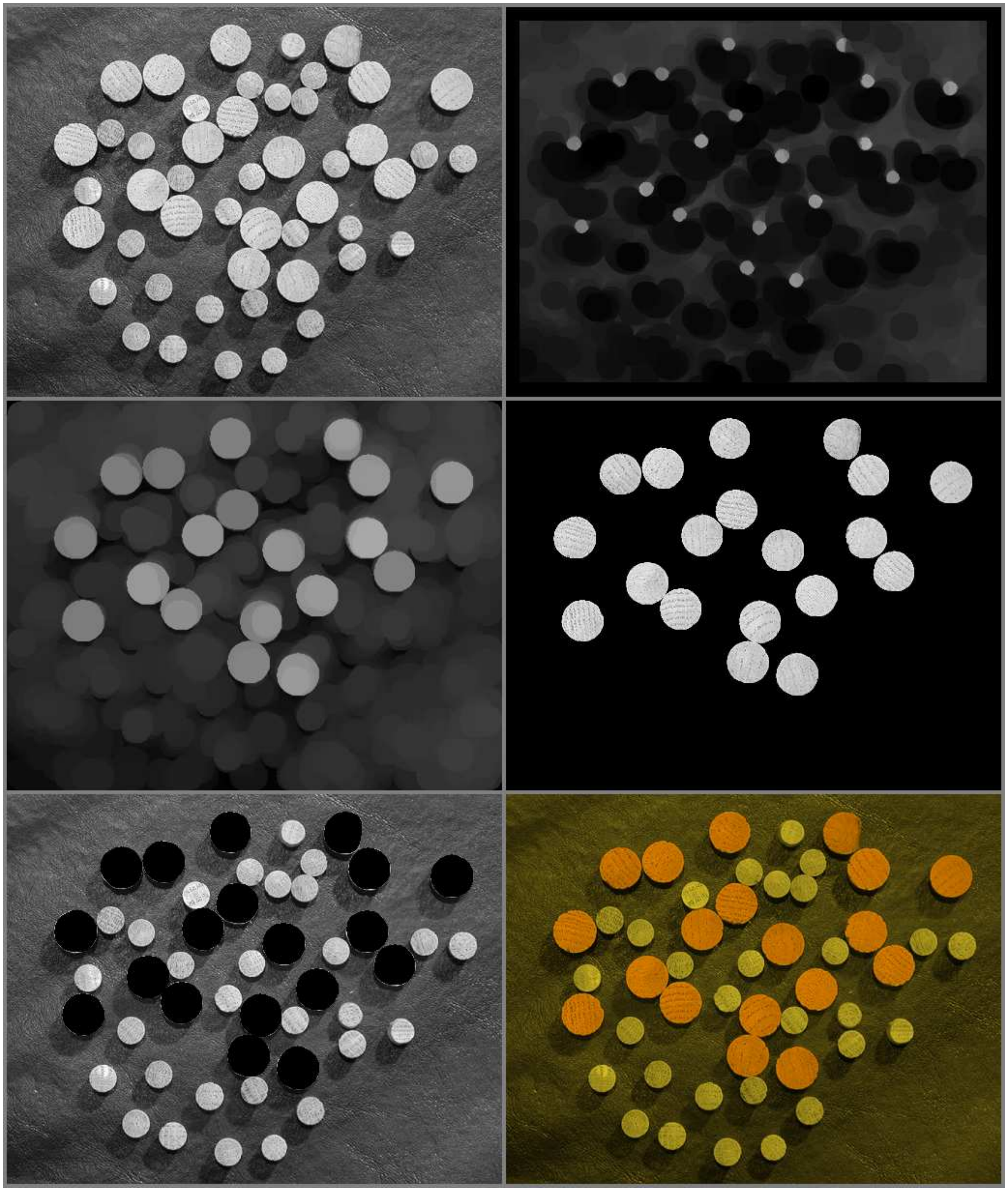

Figura 3.22: 1er renglón, imagen en grises f de trozos de madera y su erosión M_g mediante el EE $15B$; 2do renglón, dilatación M_g' de M_g mediante el EE $15B$ y texturización de los trozos grandes dada por S_g; 3er renglón, imagen en grises S_{ch} de los trozos chicos de madera y superposición en color falso de la segmentación de ambos conjuntos de trozos de madera.

3.4. Realce de formas en imágenes de ultrasonido

Un *ultrasonido* (US) es una onda sonora cuya frecuencia es mayor (rango del ultrasonido médico de 1 a 20 MHz) que la frecuencia de las ondas sonoras perceptibles para el ser humano (rango audible 20 Hz a 20 kHz). Las imágenes por ultrasonido también llamadas ecografías son aquéllas obtenidas a través de un dispositivo de ultrasonido que consta de un transductor el cual se coloca sobre la piel del paciente y al que previamente se le aplica un gel especial para eliminar el aire entre la piel y el transductor. Éste, emite vibraciones generadas por un pulso eléctrico y transmite un haz ultrasónico que se propaga dentro del paciente y que es parcialmente reflejado hacia el dispositivo y produce vibraciones que se convierten en corriente eléctrica y que posteriormente se modifican para convertirse en imágenes digitales. El transductor no emite ultrasonidos de manera continua si no que alterna dos fases, emisión de ultrasonidos y recepción de reflexiones o ecos.

En las imágenes digitales obtenidas por ultrasonido, los niveles bajos de gris se asocian con las reflexiones más intensas (debido a la codificación inversa realizada después de la transducción). El agua, por ejemplo, es el mejor transmisor de ultrasonidos y esta genera una imagen blanca. Así, los tejidos con poca cantidad de agua como los *fibroadenomas*[1] o los *quistes* (pequeños sacos llenos de líquido, p.ej., leche), generan tonos bajos de gris. En la actualidad las imágenes de ultrasonido de senos son utilizadas con bastante frecuencia por que ayudan a detectar anomalías, su localización y sus características morfológicas. En presencia de tumores benignos sus bordes se presentan bastante bien definidos, son esféricos u ovoides de aspecto liso y móvil y aparecen en tonos más claros. En cambio, los tumores malignos son de forma irregular, de aspecto poco uniforme, adheridos entre sí y pueden invadir tejidos subyacentes. Debido a estas carácteristicas se ven en tonos más obscuros. Esta sección presenta ejemplos ilustrativos de realce y aproximación de formas para mejorar la visualización de éstas en algunas imágenes de ultrasonido usando operaciones de la morfología matemática, de conjuntos y algunas de uso común en PDI.

En las figuras 3.23 y 3.25 se presenta el procedimiento seguido para realizar una detección de bordes junto con una aproximación de forma elíptica para delimitar el objeto de interés. La imagen en la parte superior de cada figura muestra una imagen f de ultrasonido de seno en el que aparece un objeto con forma de óvalo que puede resaltarse en la misma imagen. Como puede observarse, los contornos del óvalo se presentan en tonos claros pero también se presentan otras regiones en niveles de gris altos que no necesariamente pertenecen a los bordes del objeto bajo estudio. Así, en este caso, realizamos un pre-procesamiento que consta primero de aplicar un filtro espacial suavizante de tipo Gaussiano cuyo propósito es homogeneizar las diferentes regiones de gris incluyendo al objeto mismo y al resultado f_G se le aplica una función de cambio de contraste potencial para obtener una imagen en grises donde los tonos claros aumentan su brillo y los tonos bajos se obscurecen, es decir, disminuyen su valor. Esta segunda imagen la denotamos por f'_G.

[1] Un fibroadenoma se compone de tejido de glándula mamaria y tejido que ayuda a sostener a éste y es el tumor benigno de las mamas más común y la protuberancia mamaria más común en mujeres menores de 30 años.

Las expresiones que definen a estas dos primeras operaciones con imágenes en tonos de gris están dadas por,

$$f_G(x,y) = s(f(x,y) * e^{-(x_v^2+y_v^2)/2\sigma^2}), \tag{3.22}$$

$$f'_G(x,y) = s((f_G(x,y))^2). \tag{3.23}$$

En la Ec. (3.22), se realiza una convolución de la imagen f con un núcleo de tipo Gaussiano con media cero y varianza $\sigma^2 = 25\pi \approx 78.5$, donde (x_v, y_v) pertenecen a una vecindad de 9×9 pixeles y s es un escalamiento lineal que mapea el rango de f_G a la escala de grises $\{0, \ldots, 255\}$. El cambio de contraste dada por la Ec. (3.23) simplemente eleva al cuadrado el valor de cada pixel y lo rescala linealmente al conjunto $\{0, \ldots, 255\}$ mediante s.

En seguida se hace una umbralización sobre f'_G que asigna a los pixeles con nivel de gris mayor o igual a un umbral $u < \mu$, donde μ es el *promedio global* de gris de f'_G, el tono blanco (255) y todos aquellos pixeles que están por debajo de este umbral constituyen el conjunto de fondo y se les asigna el tono negro (0). En el caso de estas imágenes de ultrasonido los histogramas de las regiones de interés son en general unimodales y en consecuencia la determinación de un valor de umbral óptimo no es fácil. Específicamente, la imagen binaria A_u y el valor de μ están dados por,

$$A_u(x,y) = \begin{cases} 255 & \text{si} \quad f'_G(x,y) \geq u \\ 0 & \text{si} \quad f'_G(x,y) < u \end{cases},$$

$$\mu = \frac{1}{mn} \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} f'_G(x,y).$$

Observemos que en la imagen original hay regiones adyacentes al objeto de interés que prácticamente no tienen borde y que en esta binarización partes del supuesto borde del objeto se unen o desaparecen debido al nivel de umbral seleccionado. Por tanto, la aplicación directa de la extracción de bordes en la imagen binarizada no es una buena idea para realizar una segmentación adecuada. Una técnica útil para resolver esta dificultad consiste en marcar el objeto con un punto interior que aproxime su "centro" y hacer crecer esta marca por dilatación morfológica con un elemento estructural elíptico E para que éste aproxime al objeto deseado lo mejor posible. La primera imagen binaria del tercer renglón de las figuras correspondientes 3.23 y 3.25 muestran el resultado de dilatar k veces una elipse colocada en el punto marcado. La elipse inicial se define por los siguientes parámetros: las coordenadas del centro (h,k), la longitud del semieje menor a, la longitud del semieje mayor b y un ángulo de rotación θ. La expresión matemática para construir el conjunto E es la siguiente,

$$E(x,y) = \frac{[(x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta]^2}{a^2} + \frac{[(x-h)\sin\theta - (y-k)\cos\theta]^2}{b^2} \leq 1. \tag{3.24}$$

Después se determina el borde de la elipse dilatada, dada por $E_\delta = E \oplus kB_c$, mediante el gradiente exterior morfológico, dado por $\Delta_e(E_\delta, B_c) = E_\delta \oplus B_c - E_\delta$, y se une a la imagen binaria resultado de la binarización. De ésta imagen, dada por $A'_u = A_u \cup \Delta_e(E_\delta, B_c)$, ya es posible determinar los bordes de la imagen realizando así una aproximación de la forma completa del objeto en cuestión.

La imagen de bordes, $\Delta = \Delta_e(A'_u, B_c) = A'_u \oplus B_c - A'_u$, se presenta en la primera imagen del segundo renglón de las figuras 3.24 y 3.26. La segunda imagen en las mismas figuras (2do renglón) muestran la composición $f^* = \text{máx}(f, \Delta_{\text{verde}})$ de la imagen de ultrasonido original f con los bordes sobrepuestos en color verde para remarcar la diferencia entre las zonas contrastadas con diversos niveles de gris tanto del óvalo deseado como de las regiones circundantes. En la tercera y última imagen de la misma figura se resalta en color falso la región correspondiente al óvalo, es decir, se muestra la composición $\text{máx}(f^*, E_{\text{guinda}})$.

El resultado final es una imagen mejorada en que el objeto de interés, quiste o fibroadenoma, se muestra delineado para efectos de una representación visual que puede facilitarle al médico el análisis y el diagnóstico de anomalías presentes en este tipo de imágenes. El Cuadro 3.1 resume la información relativa al valor de umbral empleado, el valor del elemento estructural (elipse inicial) y el número de veces que ésta fué dilatada para ajustarse a los bordes existentes del objeto deseado.

Descripción del parámetro	Valor, imagen US-1	Valor, imagen US-2
Umbral $u < \mu$	$54 < 62$	$54 < 62$
Centro (h, k)	$(143, 120)$	$(122, 128)$
Semieje menor a	18	34
Semieje mayor b	30	56
Rotación θ (radianes)	$-\pi/10$	0
Dilataciones k	3	5

Cuadro 3.1: Descripción y valor de parámetros en el realce de objetos

Es importante aclarar que en este par de ejemplos la aplicación de la morfología matemática combinada con operaciones elementales de conjuntos es una manera de abordar el problema de segmentación de objetos en imágenes de ultrasonido; en particular, es una solución parcial en el sentido de no ser del todo automática debido a las características propias de este tipo de imágenes. También cabe mencionar que, independientemente de las facilidades que una técnica de procesamiento imágenes pueda ofrecer, debe tomarse en cuenta que un diagnóstico robusto depende también en su mayor parte de un conocimiento amplio por parte del especialista en el uso de los dispositivos de ultrasonido y de su experiencia clínica en el análisis e interpretación de estas imágenes.

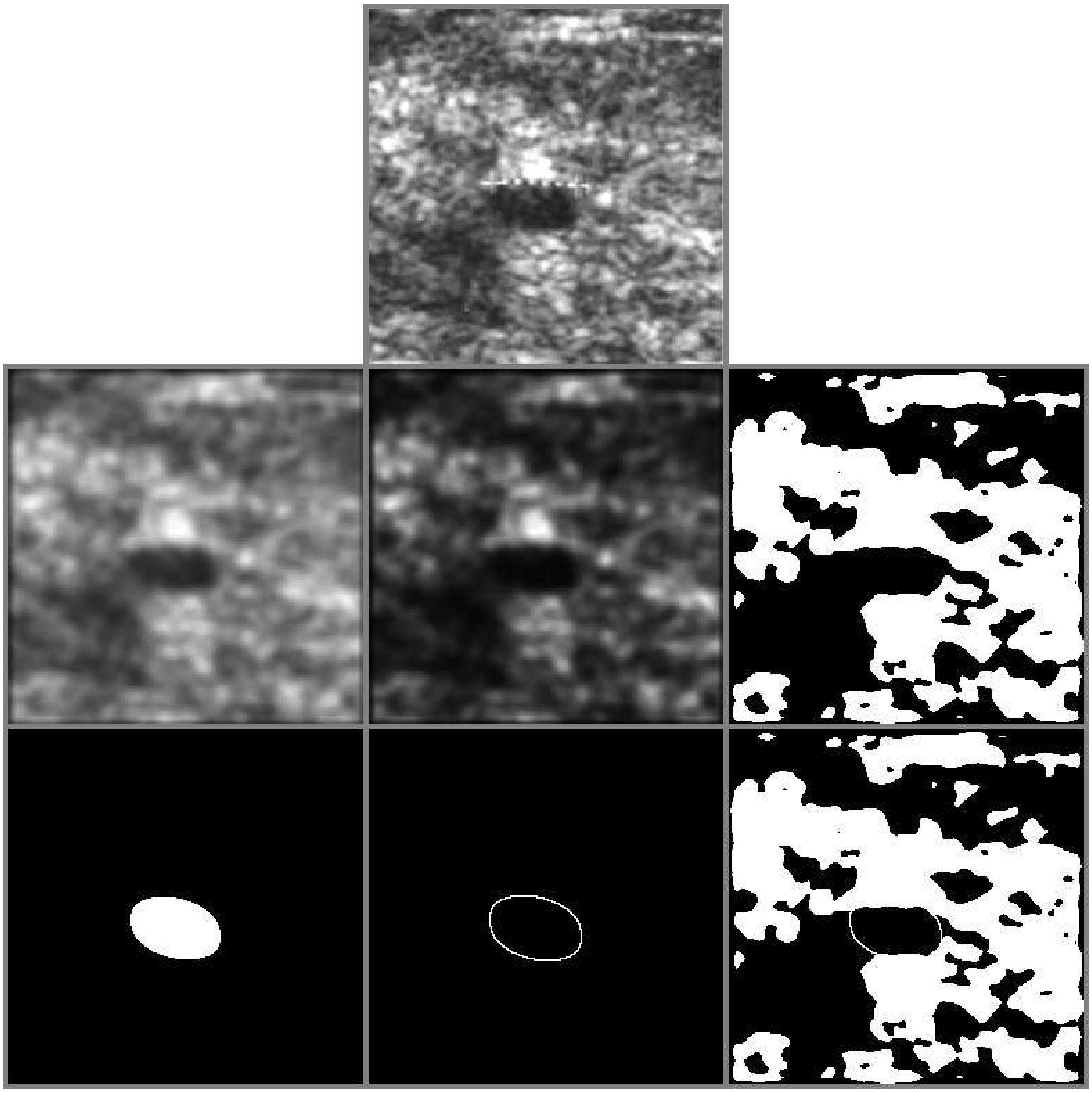

Figura 3.23: 1er renglón, imagen US-1 que presenta un quiste; 2do renglón, de izq. a der., imagen filtrada con núcleo Gaussiano, corrección de contraste gamma y binarización; 3er renglón, elipse dilatada, borde de la elipse dilatada y superposición de ésta con la imagen binarizada.

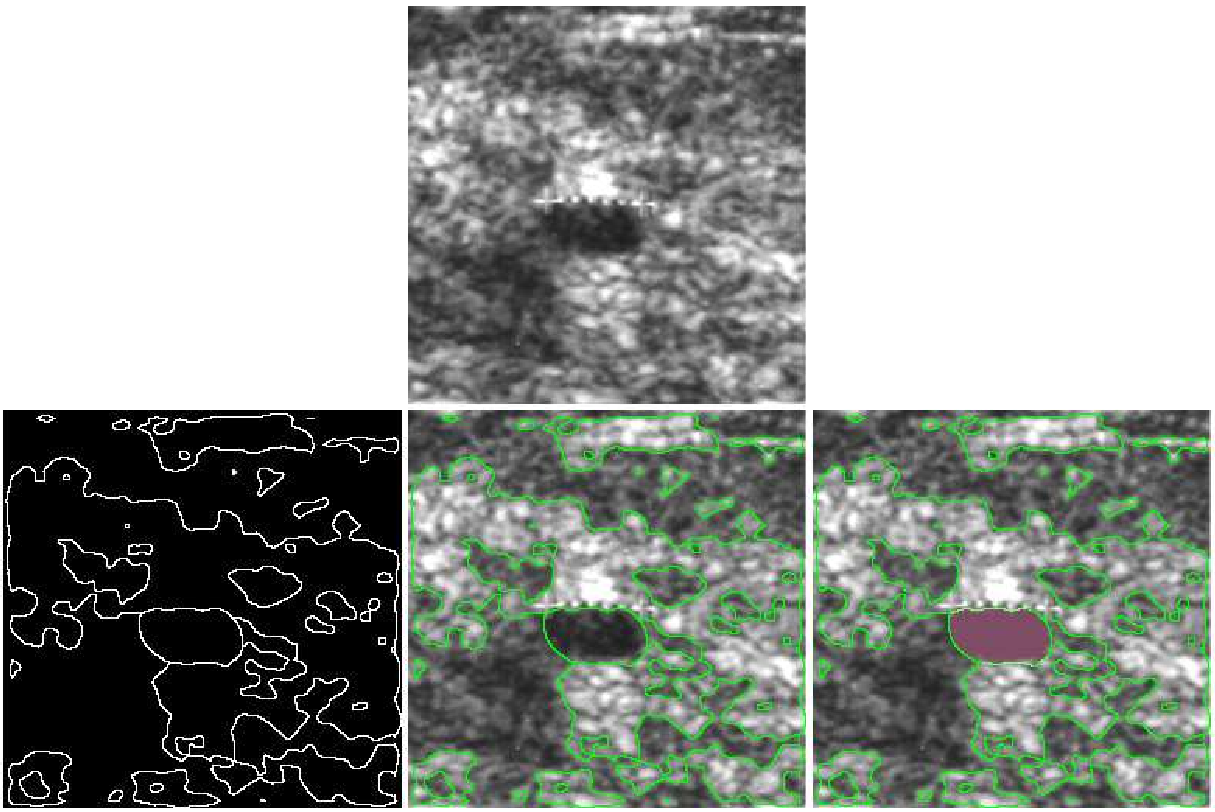

Figura 3.24: 1er renglón, imagen US-1 que presenta un quiste (referencia); 2do renglón, de izq. a der., imagen de bordes de la imagen binarizada con el contorno elíptico sobrepuesto, imagen compuesta por enmascaramiento de la imagen de bordes (en verde) con la imagen original e imagen final realzada con la elipse dilatada (en guinda).

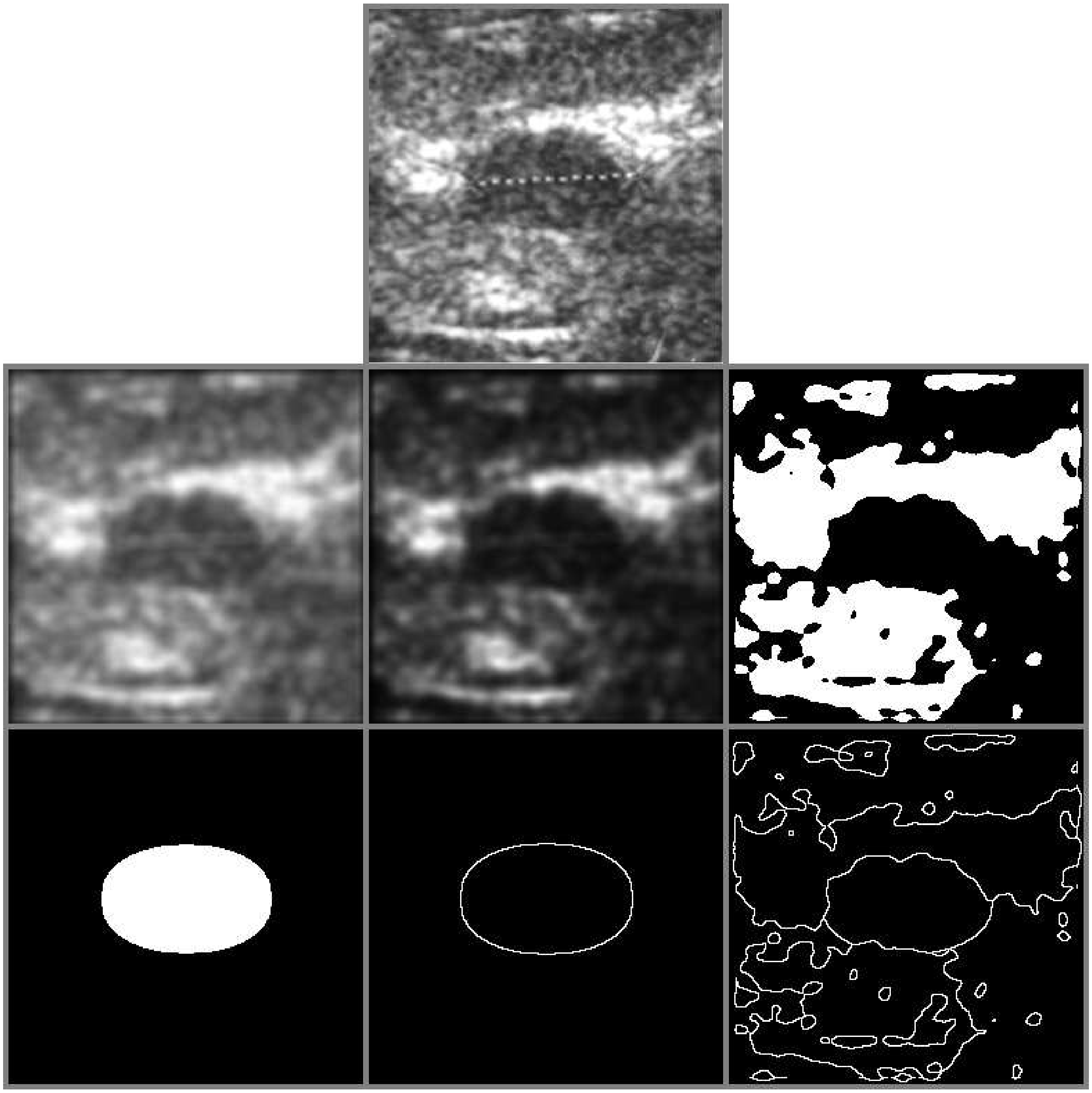

Figura 3.25: 1er renglón, imagen US-2 que presenta un fibroadenoma; 2do renglón, de izq. a der., imagen filtrada con núcleo Gaussiano, corrección de contraste gamma y binarización; 3er renglón, elipse dilatada, borde de la elipse dilatada y superposición de ésta con la imagen binarizada.

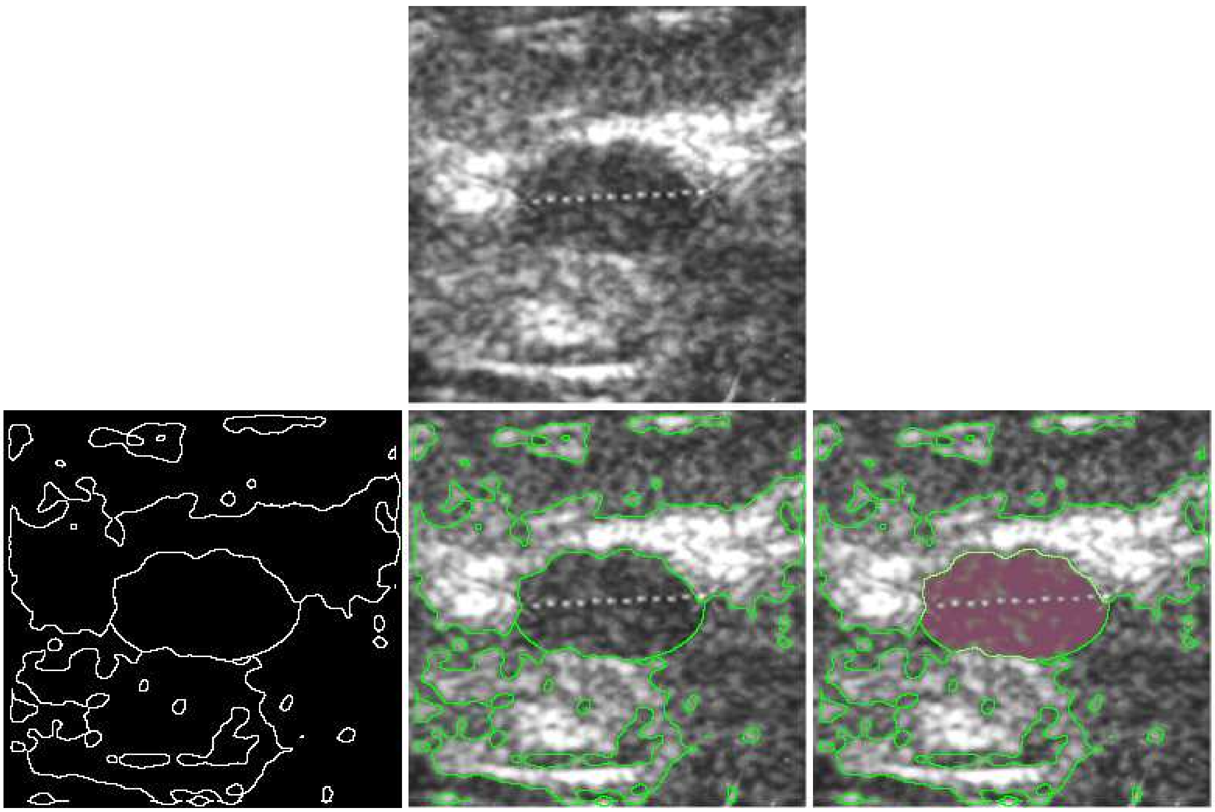

Figura 3.26: 1er renglón, imagen US-2 que presenta un fibroadenoma (referencia); 2do renglón, de izq. a der., imagen de bordes de la imagen binarizada con el contorno elíptico sobrepuesto, imagen compuesta por enmascaramiento de la imagen de bordes (en verde) con la imagen original e imagen final realzada con la elipse dilatada (en guinda).

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Conclusiones generales

Las imágenes digitales sirven como herramienta para resolver problemas interdisciplinarios. En particular, la morfología matemática, que nació con el propósito específico de cuantificar las características minerales de secciones delgadas obtenidas de muestras geológicas, es un enfoque que se ha ido utilizando en otras áreas de investigación.

En esta tesis se expuso la teoría básica de la morfología matemática así como su correspondiente aplicación al procesamiento digital de imágenes. Esta exposición incluye el desarrollo detallado de la gran mayoría de las demostraciones relativas a sus operaciones básicas, sus propiedades algebraicas y las interrelaciones entre conjuntos y funciones. Además, se presentaron ejemplos ilustrativos de algunos de los conceptos teóricos así como el tratamiento morfológico en diversas aplicaciones con imágenes binarias y en tonos de gris. Un resumen del contenido de este trabajo se presentó oralmente en sesión simultánea durante el XVLII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana [18].

4.2. Conclusiones particulares

A continuación listamos las conclusiones específicas derivadas de este trabajo.

Descripción y fundamentos

- Se describieron los enfoques principales al Procesamiento Digital de Imágenes que muestran de manera general como trata cada uno de ellos las imágenes digitales, como las sitúan en determinado contexto matemático y a grosso modo como trabajan con ellas.

- Se dió una descripción intuitiva y un resumen histórico del desarrollo de la morfología matemática.

- Se expuso brevemente lo relativo a conjuntos, órdenes parciales y retículos, conceptos que forman la base para la presentación teórica de la morfología matemática.

Aspectos teóricos de la Morfología Matemática

- Se explicaron las operaciones morfológicas básicas para conjuntos incluyendo las demostraciones detalladas de varias de sus propiedades y se dieron ejemplos ilustrativos de como actúan estas operaciones con subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^2$ con pocos elementos.

- Se presentaron las operaciones morfológicas básicas para funciones incluyendo las demostraciones detalladas de varias de sus propiedades y se elaboraron ejemplos demostrativos de funciones definidas en $\mathbb{R}$.

- Se realizó la justificación de la morfología matemática para funciones a partir de la morfología matemática de conjuntos mediante los conceptos de sombra o umbra de una función y el tope de un conjunto, resaltando la correspondencia de la sombra del minímo o máximo de una familia de funciones con la intersección o unión de sus sombras respectivamente. Además, se hizo énfasis en considerar la sombra como un homomorfismo entre funciones y conjuntos.

- En los Apéndices A y B se exponen demostraciones alternativas o complementarias, respectivamente, de diversas propiedades de la morfología matemática de conjuntos y de funciones. En particular, el Apéndice C muestra un breve resumen del concepto de semicontinuidad en relación al 4to principio que deben satisfacer las transformaciones morfológicas.

Aplicaciones en imágenes digitales

- Se trataron la detección de bordes, la eliminación de ruido aleatorio (impulsivo) y la separación o segmentación de grupos de objetos (partículas) en imágenes binarias.

- Similarmente, se consideraron la detección de bordes, la eliminación de ruido aleatorio (impulsivo) y la separación o segmentación de de grupos de objetos regulares (trozos de madera de diferente diámetro) en imágenes en tonos de gris.

- Finalmente, se mostró un procedimiento híbrido consistente en un pre-procesamiento no morfológico, la detección morfológica de bordes y un ajuste mediante elipses dilatadas a regiones de interés en imágenes de ultrasonido para completar la frontera de regiones anatómicas con posibles anomalías como son, por ejemplo, los quistes o fibroadenomas en glándulas mamarias.

4.3. Contribuciones de la tesis

Aquí hacemos énfasis en los aspectos más relevantes de este trabajo de tesis ya que los puntos a mencionar por lo general no se exponen de manera explícita o aparecen en forma dispersa en la literatura técnica consultada (ver referencias bibliográficas).

1. Se dieron las demostraciones detalladas de las propiedades elementales de la morfología matemática de conjuntos y funciones siguiendo la notación de operaciones binarias como es comúnmente empleada.

2. En particular, las demostraciones correspondientes a la erosión y dilatación morfológicas de conjuntos expresadas como la intersección o unión de conjuntos trasladados (cf. Teoremas 2.1 y 2.2 resp.); análogamente, las demostraciones para las mismas operaciones pero con funciones en términos del ínfimo o supremo de una familia de funciones trasladadas (cf. Teoremas 2.5 y 2.6 resp.).

3. Se realizó el diseño y la selección adecuada de los ejemplos ilustrativos con conjuntos finitos, funciones en $\mathbb{R}$ y similarmente se llevo a cabo una elección representativa de imágenes binarias y en tonos de gris para ilustrar las operaciones elementales de erosión, dilatación, abertura y cerradura morfológicas.

4. Se dieron las soluciones explícitas a diversos problemas planteados en el contexto de las aplicaciones tanto con imágenes binarias como en tonos de gris. Específicamente, la secuenciación de operaciones morfológicas en combinación con operaciones de conjuntos así como la composición de resultados finales en una sola imagen empleando color para una mejor visualización de los resultados.

Apéndice A

Morfología Matemática de Conjuntos: Demostraciones Alternativas

Este apéndice presenta algunas demostraciones alternativas del Capítulo 2. Estos resultados derivan principalmente de las propiedades de uniones e intersecciones de conjuntos así como los resultados enumerados en la Proposición 2.1 así como en los Teoremas 2.1 y 2.2.

Relaciones de orden

a) $0 \in B \Rightarrow A \ominus B \subseteq A \oplus B$.

$$\text{Puesto que } \bigcap_{b \in B} A_b \subseteq A_b \subseteq \bigcup_{b \in B} A_b \ \forall b \in B \ \Rightarrow \text{ si } b = 0 \text{ , se tiene que}$$
$$\bigcap_{b \in B} A_b \subseteq A \subseteq \bigcup_{b \in B} A_b \ \forall b \in B \ \Rightarrow \ A \ominus B \subseteq A \oplus B \, .$$

Monotonía. Si $A \subseteq B$ entonces,

a) $A \ominus B \subseteq C \ominus B$,

b) $A \oplus B \subseteq C \oplus B$,

c) $A \circ B \subseteq C \circ B$,

d) $A \bullet B \subseteq C \bullet B$.

para los incisos a) y b) se tiene por hipótesis que $A \subseteq C$, y si $b \in B$, entonces $A_b \subseteq C_b$.
Demostración:

a) $\bigcap_{b \in \widehat{B}} A_b \subseteq \bigcap_{b \in \widehat{B}} C_b \ \Rightarrow \ A \ominus B \subseteq A \ominus B$

b) $\bigcup_{b \in \widehat{B}} A_b \subseteq \bigcup_{b \in \widehat{B}} C_b \ \Rightarrow \ A \oplus B \subseteq C \oplus B$

c) Si $B_x \subseteq A \Rightarrow B_x \subseteq C$, por tanto, $\displaystyle\bigcup_{B_x \subseteq A} B_x \subseteq \bigcup_{B_x \subseteq C} B_x \Rightarrow A \circ B \subseteq C \circ B$

d) Si $B_x \subseteq C^c \Rightarrow B_x \subseteq A^c$, por tanto,

$$\begin{aligned} \bigcup_{B_x \subseteq C^c} B_x \subseteq \bigcup_{B_x \subseteq A^c} B_x \ &\Rightarrow \Big(\bigcup_{B_x \subseteq A^c} B_x\Big)^c \subseteq \Big(\bigcup_{B_x \subseteq C^c} B_x\Big)^c \\ &\Rightarrow \bigcap_{B_x \subseteq A^c} (B_x)^c \subseteq \bigcap_{B_x \subseteq C^c} (B_x)^c \ \Rightarrow \ A \bullet B \subseteq C \bullet B \ \blacksquare \end{aligned}$$

Distributividad. Si $A \subseteq B$ entonces,

a) $(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B)$,

b) $(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B)$,

c) $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$,

d) $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$.

En relación al comentario hecho después de la Proposición 2.1, inciso c), i.e., a la distributividad de la traslación sobre la intersección, observemos explícitamente que,

$$\begin{aligned} \Big(\bigcap_{b \in B} A_b\Big)_x = \Big(\Big(\bigcup_{b \in B} A_b^c\Big)^c\Big)_x = \Big(\Big(\bigcup_{b \in B} A_b^c\Big)_x\Big)^c \\ = \Big(\bigcup_{b \in B} A_{b+x}^c\Big)^c = \bigcup_{b \in B} (A_{b+x}^c)^c = \bigcup_{b \in B} A_{b+x} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \text{a) } (A \cap C) \ominus B &= \bigcap_{b \in \widehat{B}} (A \cap B)_b = \bigcap_{b \in \widehat{B}} (A_b \cap B_b) = \bigcap_{b \in \widehat{B}} A_b \cap \bigcap_{b \in \widehat{B}} C_b = (A \ominus B) \cap (C \ominus B) \\ \text{b) } (A \cup C) \oplus B &= \bigcup_{b \in B} (A_b \cup B_b) = \Big(\bigcup_{b \in B} A_b\Big) \cup \Big(\bigcup_{b \in B} C_b\Big) = (A \oplus B) \cup (C \oplus B) \\ \text{c) } A \ominus (B \cup C) &= \bigcap_{d \in \widehat{B \cup C}} A_d = \bigcap_{a \in A^c} \widehat{B \cup C}_a^{\,c} = \bigcap_{a \in A^c} (\widehat{B} \cup \widehat{C})_a^c = \bigcap_{a \in A^c} (\widehat{B}^c \cap \widehat{C}^c)_a \\ &= \bigcap_{a \in A^c} (\widehat{B_a}^c \cap \widehat{C_a}^c) = \Big(\bigcap_{a \in A^c} \widehat{B_a}^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{a \in A^c} \widehat{C_a}^c\Big) = \Big(\bigcap_{b \in \widehat{B}} A_b\Big) \cap \Big(\bigcap_{c \in \widehat{C}} A_c\Big) \\ &= (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \\ \text{d) } A \oplus (B \cup C) &= \bigcup_{b \in B \cup C} A_b = \bigcup_{b \in A} (B \cup C)_a = \Big(\bigcup_{b \in A} B_a\Big) \cup \Big(\bigcup_{b \in A} C_a\Big) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Apéndice B

Morfología Matemática de Funciones: Demostraciones Complementarias

Las siguientes demostraciones son las correspondientes a las propiedades de la operaciones de la morfología matemática de funciones. Estas demostraciones hacen uso de los resultados de la morfología matemtica para conjuntos así como del Lema 2.2 relativo al homomorfismo de sombras, las definiciones que involucran el concepto de tope y sus equivalencias con ínfimos y supremos.

Dualidad. Si $x \in (D_f \oplus D_g) \cap (D_f \ominus \widehat{D_g})$ entonces,

$$-(f \oplus g)(x) = ((-f) \ominus \widehat{g})(x) \quad \text{y} \quad -(f \circ g)(x) = ((-f) \bullet \widehat{g})(x).$$

Demostración:
Sea $x \in (D_f \oplus D_g) \cap (D_f \ominus \widehat{D_g})$ entonces, considerando que, $x - a' \in D_f$ (equivalentemente a $x + a \in D_f$), vemos que

$$\begin{aligned}
-(f \oplus g)(x) &= -\bigvee_{a' \in D_g} \{f(x-a') + g(a')\} = \bigwedge_{a' \in D_g} \{-[f(x-a') + g(a')]\} \\
&= \bigwedge_{-a \in D_g} \{-f(x+a) - g(-a)\} = \bigwedge_{a \in \widehat{D_g}} \{(-f)(x+a) - \widehat{g}(a)\} \\
&= ((-f) \ominus \widehat{g})(x) \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(f \circ g) &= -[(f \ominus g) \oplus g] = -(f \ominus g) \ominus \widehat{g} \\
&= ((-f) \oplus \widehat{g}) \ominus \widehat{g} = (-f) \bullet \widehat{g} \blacksquare
\end{aligned}$$

En las demostraciones de la dualidad entre la erosión y la dilatación se usa el siguiente hecho: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Relaciones de orden

a) Si $g(0) = 0 \Rightarrow f \ominus g \leq f \leq f \oplus g$,

b) $f \circ g \leq f \leq f \bullet g$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(0) = 0 &\Rightarrow 0 \in \mathcal{U}[g] \\ &\Rightarrow \mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g] \subseteq \mathcal{U}[f] \subset \mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g] \\ &\Rightarrow \mathcal{U}[f \ominus g] \subseteq \mathcal{U}[f] \subset \mathcal{U}[f \oplus g] \\ &\Rightarrow f \ominus g \leq f \leq f \oplus g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \mathcal{U}[f \circ g] &\subseteq \mathcal{U}[f] \subseteq \mathcal{U}[f] \bullet \mathcal{U}[g] \\ &\Rightarrow \mathcal{U}[f \circ g] \subseteq \mathcal{U}[f] \subseteq \mathcal{U}[f \bullet g] \\ &\Rightarrow f \circ g \leq f \bullet g \ \blacksquare \end{aligned}$$

Crecimiento. Si $f \leq k$ entonces,

a) $f \ominus g \leq k \ominus g$,

b) $f \oplus g \leq k \oplus g$,

c) $f \circ g \leq k \circ g$,

d) $f \bullet g \leq k \bullet g$.

Demostración: Puesto que $f \leq k$ entonces $\mathcal{U}[f] \subseteq \mathcal{U}[k]$; así,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g] &\subseteq \mathcal{U}[k] \ominus \mathcal{U}[g] \\ &\Rightarrow \mathcal{U}[f \ominus g] \subseteq \mathcal{U}[k \ominus g] \\ &\Rightarrow f \ominus g \leq k \ominus g \ \blacksquare \end{aligned}$$

Las demostraciones para los demás casos se hacen de forma análoga a esta demostración.

Idempotencia

a) $(f \circ g) \circ g = f \circ g$,

b) $(f \bullet g) \bullet g = f \bullet g$.

Demostración:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ g &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \circ g] \circ \mathcal{U}[g]) \\ &= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g]) \circ \mathcal{U}[g]) \\ &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \circ \mathcal{U}[g]) \\ &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \circ g]) \\ &= f \circ g \ \blacksquare \end{aligned}$$

La demostración para el caso de la cerradura es semejante a esta última demostración.

Distributividad

a) $(f \wedge g) \ominus k = (f \ominus k) \wedge (g \ominus k)$,

b) $(f \vee g) \oplus k = (f \oplus k) \vee (g \oplus k)$,

c) $f \ominus (g \vee k) = (f \ominus k) \vee (g \ominus k)$,

d) $f \oplus (g \vee k) = (f \oplus k) \vee (g \oplus k)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
(f \wedge g) \ominus k &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \wedge g] \ominus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \cap \mathcal{U}[g]) \ominus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g]) \cap (\mathcal{U}[g] \ominus \mathcal{U}[k])) \\
&= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f \ominus g]) \cap (\mathcal{U}[g \ominus k])) \\
&= \mathcal{T}((\mathcal{U}(f \ominus g) \wedge (g \ominus k)) \\
&= (f \ominus g) \wedge (g \ominus k) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Las demostraciones restantes se hacen de manera análoga.

Iteratividad

a) $(f \ominus g) \ominus k = f \ominus (g \oplus k)$,

b) $(f \oplus g) \oplus k = f \oplus (g \oplus k)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
(f \ominus g) \ominus k &= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f \ominus g] \ominus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f] \ominus \mathcal{U}[g]) \ominus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \ominus (\mathcal{U}[g] \oplus \mathcal{U}[k])) \\
&= f \ominus (g \oplus k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \oplus g) \oplus k &= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f \oplus g]) \oplus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}((\mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g]) \oplus \mathcal{U}[k]) \\
&= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \oplus (\mathcal{U}[g] \oplus \mathcal{U}[k])) \\
&= \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \oplus (\mathcal{U}[g \oplus k])) \\
&= f \oplus (g \oplus k) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Conmutatividad. $f \oplus g = g \oplus f$.

Demostración:

$$f \oplus g = \mathcal{T}(\mathcal{U}[f] \oplus \mathcal{U}[g]) = \mathcal{T}(\mathcal{U}[g] \oplus \mathcal{U}[f]) = g \oplus f \ \blacksquare$$

Apéndice C

Semicontinuidad

La idea de considerar conjuntos cerrados para aproximar a la frontera física entre dos medios materiales, hizo importante el estudio de la familia de los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. En 1969, G. Matheron introdujo en $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ la topología "todo" o "nada"[1] que es la topología generada por los siguientes conjuntos.

Definición C.1 Sea $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ un colección finita de conjuntos abiertos y $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ una colección finita de conjuntos compactos, donde G_i y K_j son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para toda i, j, se define el conjunto $V_{\mathcal{G},\mathcal{K}}$ como sigue:

$$V_{\mathcal{G},\mathcal{K}} = \{C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : C \cap G_i \neq \varnothing \text{ y } C \cap K_i = \varnothing,\ \forall i, j\}. \tag{C.1}$$

Resulta que los elementos de la colección $V_{\mathcal{G},\mathcal{K}}$ así definida generan una topología. De acuerdo a esta topología se definen los siguientes conceptos.

Definición C.2 Dada una colección F_i de elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, se denota por $\overline{\text{lím}} F_i$ y $\underline{\text{lím}} F_i$, a la intersección y unión de los puntos de adherencia de F_i respectivamente.

Ahora se define el concepto que caracteriza el cuarto principio de las transformaciones de la morfología matemática (semicontinuidad).

Definición C.3 Sea A un espacio separable y Ψ una función de A sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, entonces Ψ es *semicontinua superiormente* (función s.c.s) si,

$$\overline{\text{lím}}\Psi(x_i) \subset \Psi(x), \tag{C.2}$$

para algún $x \in A$ y alguna sucesión $\{x_i\}$ tal que $x_i \to x$. De manera similar, Ψ es *semicontinua inferiormente* (función s.c.i) si,

$$\Psi(x) \subset \underline{\text{lím}}\Psi(x_i), \tag{C.3}$$

para alguna sucesión x_i con $x \in A$ tal que $x_i \to x$.

[1] Del francés, "tout" o "rien"; en la bibliografía de habla inglesa se expresa con las palabras "hit" or "miss"

En particular, se tiene el siguiente resultado.

Proposición C.1 Sean A y B dos conjuntos localmente compactos, Hausdorff y separables y Ψ una función creciente de $\mathcal{F}(A)$ en $\mathcal{F}(B)$, entonces Ψ es semicontinua superiormente si y sólo si $F_i \downarrow F$ en A implica que $\Psi(F_i) \downarrow \Psi(F)$ en $\mathcal{F}(B)$.

La notación, $F_i \downarrow F$, significa que $F_{i+1} \subseteq F_i$ y $F = \bigcap F_i$; análogamente, $\Psi(F_i) \downarrow \Psi(F)$ es lo mismo que $\Psi(F_{i+1}) \subseteq \Psi(F_i)$ y $\Psi(F) = \bigcap \Psi(F_i)$. El resultado de esta proposición implica que la propiedad de semicontinuidad es equivalente al cuarto principio de la morfología matemática (para una exposición detallada el lector puede consultar el Capítulo III del tratado de J. Serra [26]).

Bibliografía

[1] Brachet P. *Texmaker: The Universal LaTeX Editor* (www.xm1math.net/texmaker/) 2014.

[2] Beucher N., Beucher S. *Mamba: Mathematical Morphology Library Image* for Python Programming Language (www.mamba-image.org) 2012.

[3] Castleman K.R. *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[4] Conci A. "Análise de Imagens: Morfologia da Imagem, Visualizador v1.0" (www2.ic.uff.br/ tilde aconci/Morfologia/morfologia.html) 2007.

[5] Dougherty E.R. *An Introduction to Morphological Image Processing*, Tutorial Texts Series, Vol. TT9, SPIE Press, Bellingham, Washington, 1992.

[6] Dougherty E.R., Lotufo R.A. *Hands-on Morphological Image Processing*, Tutorial Texts in Optical Engineering, Vol. TT59, SPIE Press, Bellingham, Washington, 2003.

[7] Gonzalez R.C., Woods R.E., Eddins S.L. *Digital Image Processing Using MATLAB, 2nd Ed.*, Gatesmark Publishing, LLC (www.gatesmark.com) 2009.

[8] Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing, 3rd Ed.*, Pearson & Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2008.

[9] Goutsias J., Heijmans H.J.A.M. "Fundamenta Morphologicae Mathematicae," *Fundamenta Imformaticae*, Vol. 41, pp. 1–31, 2000.

[10] Haralick R.M., Sternberg S.R., Zhuang X. "Image analysis using mathematical morphology," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 9, No. 4, pp. 532–550, 1987.

[11] Haralick R.M., Shapiro L.G. "Mathematical Morphology" en *Computer and Robot Vision*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Massachussets, pp. 157–255, 1992.

[12] Heijmans H.J.A.M., Ronse C. "The algebraic basis of mathematical morphology; Part I: Dilations and erosions," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 50, No. 3, pp. 245–295, 1990.

[13] Herstain I.N. *Álgebra Abstracta*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F., 1988.

[14] Jähne B. "Shape" en *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms, and Scientific Applications, 3rd. Ed.*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, pp. 200–208, 1995.

[15] Lipshutz S. *Discrete Mathematics*, McGraw-Hill Book, New York, NY, 1976.

[16] MacLane S., Birkoff G. "Lattices" en *Algebra, 2nd. Ed.*, MacMillan Publishing, New York, NY, 1979.

[17] Maragos P. “Tutorial on andvances in mophological image processing and analysis,” *Optical Engineering*, Vol. 26, No. 7, pp. 623–632, 1987.

[18] Mares-J M., Urcid-S G., Cervantes-G L. “Morfología matemática: Un enfoque geométrico-algebraico al procesamiento de imágenes,” *Resúmenes del XVLII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 12, Secc. Matemáticas e Ingeniería, Durango, Durango, México, Octubre 2014.

[19] Nuñez C.C., Conci A. “A JavaScript tool to present mathematical morphology to the beginner,” *Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology*, Rio de Janeiro, Brazil, Vol. 2, pp. 75–76, 2007.

[20] Parametric Technology Corp. *Mathcad: The Image Processing Extension Pack*, Needham, Massachussets, (`es.ptc.com/product/mathcad/introduction`) 2007.

[21] Pitas I. “Shape Description” en *Digital Image Processing Algorithms and Applications*, John Wiley & Sons, New York, NY, pp. 361–382, 2000.

[22] Pratt W.K. *Digital Image Processing, 4th Ed.*, John Wiley & Sons, New York, NY, 2007.

[23] Rivest J-F., Soille P., BeucherS. “Morphological gradients,” *Journal of Electronic Imaging*, Vol. 2, No. 4, pp. 326–336, 1993.

[24] La Serna Palomino N., Contreras W., Ruiz M.E. “Procesamiento digital de texturas: Técnicas utilizadas en aplicaciones actuales de CBIR,” *Revista de Investigación de Sistemas e Informática*, Vol. 7, No. 1, pp. 57–64, 2010.

[25] Schenk Ch. *MikTeX: Implementation of TeX/LaTeX and Related Programs* (`miktex.org`) 2014.

[26] Serra J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London, United Kingdom, 1982.

[27] Serra J. “An introduction to mathematical morphology” en Special Section on Mathematical Morphology, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing,* Vol. 35, pp. 283–305, 1986.

[28] Serra J. “The Centre de Morphologie Mathématique: An Overview” en *Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, pp. 369–374, 1994.

[29] Soille P. *Morphological Image Analysis: Principles and Aplications, 2nd Ed.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2003.

[30] Sternberg S.R. “Grayscale morphology”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing,* Vol. 35, No. 3, pp. 333-355, 1986.

[31] Van Zandt T. *PSTricks: PostScript Macros for Generic TeX* (`tug.org/PSTricks/main.cgi`) 2007.

[32] Voit R. *Paint Shop Pro*, JASC Software, 2000.