Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caminata Aleatoria: Ruina del Jugador

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Maria Cristina Medel Lopez

Directores de tesis

Gladys Denisse Salgado Suárez
Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
18 de octubre 2021

A los jovenes que, al igual que yo, se encontraron dudosos y con miedo de aventurarse en una carrera, un proyecto o una nueva etapa, les deseo fortaleza y confianza.
Que sus caminos estén llenos de éxito y sobre todo de aprendizaje.

Agradecimientos

Mi gratitud hacia esta máxima casa de estudios, la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, así como a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, por abrirme las puertas a sus salones, bibliotecas, congresos y sobre todo por el trabajo con profesores que me han orientado e inspirado. Tengo confianza en que el acceso a la educación de nivel superior por medio de universidades públicas tiene un papel muy importante en el propósito de mejorar el presente y construir un futuro más equitativo, justo y libre.

Agradezco inmensamente a mis directores de tesis, Dra. Gladys Denisse Salgado Suárez y Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, por su orientación, conocimientos y sobre todo paciencia, sin los cuales este trabajo no habría sido posible. Mi reconocimiento y admiración a su valiosa labor.

La conclusión de este trabajo, ha sido posible también, gracias a las observaciones, correcciones y sugerencias por parte de mi jurado, Dra. Hortensia, Dr. Fernando y M.C. Sergio, muchas gracias por su paciencia y aportaciones, han sido muy valiosas, principalmente para hacerme entender que aún hay mucho trabajo por hacer y esa es mi más grande motivación.

En mi paso por la licenciatura he tenido la fortuna de conocer a profesores que me han ayudado a adquirir conocimientos, pero sobre todo me han ayudado a reconocer y apreciar aspectos de la carrera sumamente valiosos, interesantes y también bellos, que con sus palabras y su trabajo me ayudaron a renovar la confianza en mi misma en más de una ocasión. Entre estos profesores, cuya lista no es corta, se encuentra el Dr. José Dionisio Zacarías Flores, cuya pérdida en el transcurso de esta difícil pandemia dejó inconcluso más de un proyecto, a quién entre muchas cosas agradezco el haberme acercado y encaminado al área de la probabilidad en la cuál deseo y aspiro a seguirme formando. Les expreso mi gratitud a todos ellos en estas palabras y anhelo al igual que todos ellos poner mi trabajo al servicio de la sociedad en la forma más útil y oportuna posible.

Llegar al final de esta etapa adquiere para mi un gran significado al recordar el trayecto de cada semestre, congreso, cada experiencia, las cuales tienen un gran valor no sólo por la oportunidad de aprender y crecer a partir de ellas, si no porque tuve la dicha de compartir esos momentos con personas maravillosas, compañeros que se volvieron amigos a quienes tengo tanto que agradecer. Quién mejor para compartir la incertidumbre de un examen que dos amigos que tomaban el mismo curso, o los días en que el horario nos mantenía desde la mañana hasta casi la noche que otro desafortunado como nosotros al inscribir materias, la mejor compañía para compartir lo que aveces era una dieta no muy saludable, pero si bastante deliciosa entre clases, nadie mejor para animarte en esos cursos complicados, que alguien que ya los había tomado y representaba una esperanza.

Gracias a ustedes, Sofia, Gabriela, Jessica, Lorena, Viviana, Elena, Catita, por todos los recuerdos que construimos juntas, por el ánimo y compañía, aunque lo deseo, no encuentro forma de retribuir todo su apoyo. Las admiro mucho, son mujeres con tantas cualidades, atesoro su gentileza y las risas, les deseo todo el éxito y dicha, así como que el tiempo nos permita compartir aún más.

Juan y David, gracias por su amistad, por las caminatas en el centro y bastantes otras cosas más, pero sobre todo, gracias por confiar en mi, por decir sí a salir a correr, a practicar con la guitarra, siempre con su sensibilidad, paciencia y sentido del humor tan especiales. Los mejores deseos en los proyectos que emprenden y en el porvenir.

Iztelita, fuiste de las primeras personas con quién tuve la oportunidad de platicar en nuestro primer semestre y afortunadamente, con el tiempo, fuimos construyendo una bonita amistad, gracias por añadir música a los días en la facultad, por la confianza que hemos establecido y por transmitirme el amor hacia esta carrera. Que tus nuevas aventuras estén llenas de éxito y felicidad.

Eduardo, amigo eres una persona asombrosa, admiro tu fortaleza, la manera en que haces ver un problema matemático de forma más accesible, tu determinación para encarar un examen, curso u horario complicado, a una sola tinta. Gracias por el ánimo y compañía, por esta valiosa amistad.

Natalia, me siento tan contenta, porque todas esas ocasiones en que me dijiste *”tu puedes”*, *”yo confío en ti”*, *”te mando mi ki”*, acompañado de un abrazo, de la comida tan deliciosa que me compartías, todo eso comienza a hacerse más cercano, infinitas gracias. Siento una gran admiración por la gran persona y matemática que eres. Te deseo mucha felicidad, salud y también que el tiempo nos permita hacer crecer esta amistad.

Oscar, gracias por tu apoyo en lo académico y personal, así como por tu compañía en los regresos de clases, había días buenos y otros no, pero contábamos el uno con el otro, deseo que ambos logremos ser los matemáticos que soñamos.

Una disculpa por la omisión de algunos nombres, sin embargo, no me sería posible recuperar en una lista de forma completa todos los nombres y gestos que llegaron a renovarme el ánimo y avivar el entusiasmo, mi más sincero agradecimiento.

Tengo la fortuna de también compartir esta alegría con amigos muy queridos.

Jessica, las dos niñas de secundaria lo están logrando, después de 10 años de amistad aquí seguimos y seguiremos, "si matara a alguien, ella sería la persona a la que le hablaría para que me ayudara a arrastrar el cuerpo a través de la sala, ella es mi *persona*".

Irais, mi niña brillante, gracias por transmitirme siempre tanta fortaleza, te admiro mucho por la gran mujer y amiga que eres, mi *inge.*

Nancy, nos casamos en una kermés, no duró, pero nuestra amistad deseo que dure toda la vida, en la salud y en la enfermedad, en la riqueza y la pobreza.

Diego, una disculpa por la forma en que inició esta amistad, a mi parecer el desarrollo no ha sido tan malo, mi más sincero agradecimiento por tu apoyo en momentos difíciles.

Hazel, hemos sido compañeros de clases por casi 9 años, gracias, porque en ti siento como si la vida me hubiese regalado a un hermano, te admiro y te agradezco por todo lo compartido.

Y finalmente, estas palabras de agradecimiento culminan con las personas más importantes para mí, los pilares de mi vida, mi amada familia.

Gracias a mis increíbles padres, Israel y Livia, de quienes me siento tan orgullosa, gracias por la confianza que depositan en mi, por su paciencia, por su apoyo en todos los sentidos, escribirlo aquí

parece breve, sin embargo, tienen un inmenso valor en la persona que soy y que sigo construyendo día a día, son para mi un ejemplo de dedicación, generosidad y amor.

De igual forma agradezco a mis maravillosas hermanas, Sandra y Susana, por su compañía en las noches de desvelo, por los almuerzos los días que salía corriendo de casa, pero sobre todo por escucharme a todas horas, por confiar en mi, son el motivo por el que quiero ser cada día mejor, gracias por compartir este sueño conmigo y por impulsarme a seguir soñando y alcanzar nuevas metas, las amo con todo mi corazón.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Si tenemos un sistema o fenómeno observable que evoluciona a través del tiempo, variando entre un conjunto de estados posibles bien definidos y además ésta evolución no es determinista sino que en cada nueva etapa en el tiempo adopta un estado de forma aleatoria entonces este sistema o fenómeno se puede modelar como un proceso estocástico, el cual se define como una sucesión de variables aleatorias $\{X_t\}$ indexadas por un conjunto de parámetros T [Hoel et al., 1972]. Los procesos estocásticos se pueden clasificar de acuerdo al tipo de conjunto que lo parametriza, al conjunto de estados posibles en los que el proceso se puede encontrar y a la relación entre las variables aleatorias que lo conforman.

El problema de la ruina del jugador en su forma clásica plantea lo siguiente: el juego comienza con dos participantes, el jugador A que tiene un capital inicial de k unidades y el jugador B que comienza con un capital de $a - k$ unidades, es decir, que en total están en juego a unidades o fichas, la dinámica consiste en repetir rondas de un juego en el cual no hay empates, quien resulte ganador toma una unidad de su oponente, el juego termina cuando alguno de los dos jugadores se ha quedado sin más dinero que apostar, además, las rondas son independientes entre si y en cada una la probabilidad de ganar del jugador A es p en $(0, 1)$. En una versión distinta del juego se tienen las mismas condiciones salvo que ahora, el capital del oponente, el del jugador B, es demasiado grande, tanto que se considera infinito, llamando así a esta versión como "La ruina del jugador con un oponente infinitamente rico". Ambos fenómenos corresponden a sistemas que se estudian con la teoría de procesos estocásticos. Como jugadores nos interesa por ejemplo saber nuestra probabilidad de quedar arruinados, o conocer el tiempo promedio que tomaría terminar el juego.

En el presente trabajo se reunen conceptos y resultados básicos de la teoría de probabilidad y de procesos estocásticos, con el objetivo de abordar el problema clásico de la Ruina del jugador y su variante de un oponente infinitamente rico, como caminatas aleatorias. Una caminata aleatoria es un caso particular de cadena de Márkov, un tipo de proceso estocástico discreto cuyo estudio ha sido muy extendido porque es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas, pero al mismo tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente [Rincón, 2012]. De igual forma, se propone dar una expresión para la probabilidad de eventos de interés como el quedar arruinado o estimar la duración esperada del juego, cuando se conocen los valores de los parámetros p y k, así como simular el comportamiento que describen los juegos de cada versión en el lenguaje de programación Python y posteriormente comparar los resultados obtenidos.

El trabajo de tesis se encuentra estructurado en cinco capítulos, como se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se presentan definiciones y resultados básicos de la teoría de probabilidad, necesarios para abordar la definición de proceso estocástico, así como algunos de los distintos tipos de procesos.

En el Capítulo 2 se presenta la definición de Cadena de Markov, transición entre estados en uno o n pasos, clasificación de estados, entre otros resultados para este tipo de proceso estocástico.

El Capítulo 3 se relaciona con el Capítulo 2 ya que una Caminata Aleatoria es un tipo de Cadena de Márkov, se muestran resultados y algunos ejemplos.

En el Capítulo 4 se plantea y desarrolla el problema clásico de la Ruina del Jugador, así como su versión con un oponente infinitamente rico. Con los resultados y conceptos de los Capítulos 2 y 3, se hacen observaciones para distintas probabilidades de la caminata aleatoria que modela cada versión del juego. Se presenta también la simulación en el lenguaje de programación Python de los juegos planteados para diferentes valores del parámetro p.

Finalmente, se dan las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 1

Conceptos básicos de probabilidad

El presente capítulo contiene definiciones de conceptos básicos de probabilidad, los cuales posteriormente se vuelven necesarios en la comprensión de la definición de proceso estocástico, cadena de Márkov, caminata aleatoria, entre otras.

1.1. Probabilidad

Definición 1.1.1. *Una colección $\mathscr{X}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una **σ-álgebra** (σ-campo) si cumple con lo siguiente:*

1. *$X \in \mathscr{X}$.*
2. *Si $A \in \mathscr{X}$ entonces $A^c \in \mathscr{X}$.*
3. *Si $\{A\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numerable de elementos en $\mathscr{X}$, entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{X}.$$

Definición 1.1.2. *Sea $\mathscr{C}$ una colección no vacía de subconjuntos del conjunto no vacío Ω. La **σ-álgebra generada** por $\mathscr{C}$ denotada por $\sigma(\mathscr{C})$, es la colección*

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap\{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{ es } \sigma\text{-álbegra y } \mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}\}.$$

Este tipo de colecciones de subconjuntos son importantes y se usan en la definición de espacio de probabilidad y variable aleatoria, para esta última es necesario conocer la σ-álgebra de Borel. Se puede encontrar más de estos conjuntos en [Rincón, 2007].

Definición 1.1.3. *La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ es:*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\},$$

A los elementos de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ se les llama conjuntos de Borel o Borelianos.

Definición 1.1.4. *Una función real P definida en $\mathscr{X}$ se dice que es una **medida de probabilidad** si satisface lo siguiente:*

1. *Para todo $A \in \mathscr{X}$, se tiene que $0 \leq P(A) \leq 1$.*
2. *$P(\Omega) = 1$.*

3. *Es aditiva numerable, es decir, si* $\{A_n\}$ *es una sucesión de eventos disjunta dos a dos en* $\mathscr{X}$*, entonces*

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definición 1.1.5. *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una terna* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, en donde* Ω *es el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio,* $\mathscr{F}$ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *y* P *es una medida de probabilidad sobre* $\mathscr{F}$*.*

Con el espacio de probabilidad definido se tiene ahora un concepto muy importante, el de variable aleatoria, las definiciones mostradas a continuación se encuentran en [González, 2018, Rincón, 2007, Ross, 1997].

Definición 1.1.6. *Una función* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice* $\mathscr{X}$*-medible (*$\mathscr{X}$ *es una* σ*-álgebra de* X*), si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in X | f(x) > \alpha\} \in \mathscr{X}.$$

Definición 1.1.7. *Una* ***variable aleatoria real*** *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, definida en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *tal que es* $\mathscr{F}$*-medible (es decir, para cualquier conjunto Boreliano* B *se cumple* $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$*).*

Definición 1.1.8. *Un* ***vector aleatorio*** *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$*,* $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$*, tal que para cualquier conjunto* B *en* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$*, se cumple que la preimagen* $X^{-1}(B)$ *es un elemento de* $\mathscr{F}$*.*

Una variable aleatoria nos ayuda a trabajar con espacios muestrales que pueden ser no numéricos, además, de que dependiendo del tipo de fenómeno que se trate, los espacios muestrales pueden corresponder a elementos de subconjuntos de $\mathbb{R}$, como el resultado de un volado, o subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, si nuestro experimento fuese la composición de n compuestos químicos en una muestra de subsuelo. Esto nos lleva a la siguiente generalización.

Definición 1.1.9. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* X *una función* $\mathscr{F}$*-medible definida sobre un espacio métrico* S*, entonces se dice que* X *es un* ***elemento aleatorio*** *de* S*.*

Si $S = \mathbb{R}^\infty$ *a* X *se le llama sucesión aleatoria, si* $S = C(a, b)$ *o algún otro espacio de funciones, a* X *se le llama función aleatoria.*

Definición 1.1.10. *La* ***Función de Distribución Acumulativa*** *denotada por* F*, de una variable aleatoria* X *está definida para todos los números reales* b*,* $-\infty < b < \infty$*, como sigue*

$$F(b) = P\{X \leq b\}.$$

Proposición 1.1.1. *Sea* F *la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria* X*, entonces cumple con las siguientes propiedades:*

- F *es una función no decreciente, esto es, si* $a < b$ *entonces* $F(a) \leq F(b)$*.*
- $\lim_{b\to\infty}(F(b)) = 1.$
- $\lim_{b\to-\infty}(F(b)) = 0.$
- F *es una función continua por la derecha, esto es, para cualquier* b *y para cualquier sucesión decreciente* $\{b_n\}, n \geq 1$*, que converge a* b*, se tiene* $\lim_{n\to\infty}(F(b_n)) = F(b)$*.*

La demostración de esta proposición se encuentra en [Ross, 1997].

Definición 1.1.11. *La **función generadora de probabilidad** de una variable aleatoria X con valores enteros es la función*

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k).$$

Definida para valores de t donde esta serie de potencias sea absolutamente convergente.

La definición anterior así como las propiedades de la función generadora de probabilidad se encuentran en [Rincón, 2007].

1.2. Proceso estocástico

A continuación tenemos la definición de proceso estocástico, así como algunos tipos de procesos, estas se encuentran en [Hoel et al., 1972, Rincón, 2012].

Definición 1.2.1. *Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ definidas en un mismo espacio de probabilidad, parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Notar que al ser S subconjunto de $\mathbb{R}$, puede tomarse la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ restringida a S, o bien $S \cap \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathscr{B}(S) = \{S \cap B | B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Hay dos aspectos importantes a considerar en los procesos estocásticos que orientan su estudio así como sus aplicaciones. El primero es el conjunto de parámetros T que representan el tiempo, un proceso estocástico es llamado contínuo si el conjunto T es un intervalo, por otro lado, es llamado discreto si T es un subconjunto de los enteros. En la definición tenemos a una sucesión de variables aleatorias, estas toman valores en un conjunto, a dichos valores se les llama estados, es decir, que en cada etapa o momento del tiempo que observamos el proceso éste tomará algún valor dentro de lo que se denomina espacio de estados S, el espacio de estados puede ser un conjunto finito, de dos elementos incluso, o infinito como elementos en un intervalo.

Al considerar distintos tipos de conjuntos tanto para el espacio de estados S como para T se tienen algunos tipos de procesos cuyo estudio ha sido más profundo.

Un ejemplo de procesos estocásticos a tiempo discreto con espacio de estados discreto, son las Cadenas de Márkov, en este proceso los momentos en que se observan suelen ser elementos de $\{0, 1, \cdots\}$ y los valores que puede tomar van desde solo dos estados (modelando por ejemplo el estado de una máquina 0 descompuesto o 1 en funcionamiento), o de estados infinitos numerables como el número de individuos en una generación de células que se reproducen cada cierta unidad de tiempo. Este tipo de procesos como se verá en el capítulo siguiente cumplen la propiedad de Markov y tienen características muy interesantes.

Por otro lado, se considera un proceso donde el espacio de estados es discreto pero ahora T es continuo, para ciertos fenómenos esto puede hacer al modelo más realista, por ejemplo, si se piensa en los nacimientos o muertes en una población, o la cantidad de llamadas que llegan a una línea telefónica, estos sucesos pueden ocurrir en cualquier momento. Un caso especial de este tipo de procesos son conocidos como procesos de Poisson, los cuales tienen propiedades especiales como que es un proceso con incrementos independientes, esto quiere decir que en intervalos disjuntos de tiempo, los desplazamientos del proceso son independientes unos de otros [Rincón, 2012].

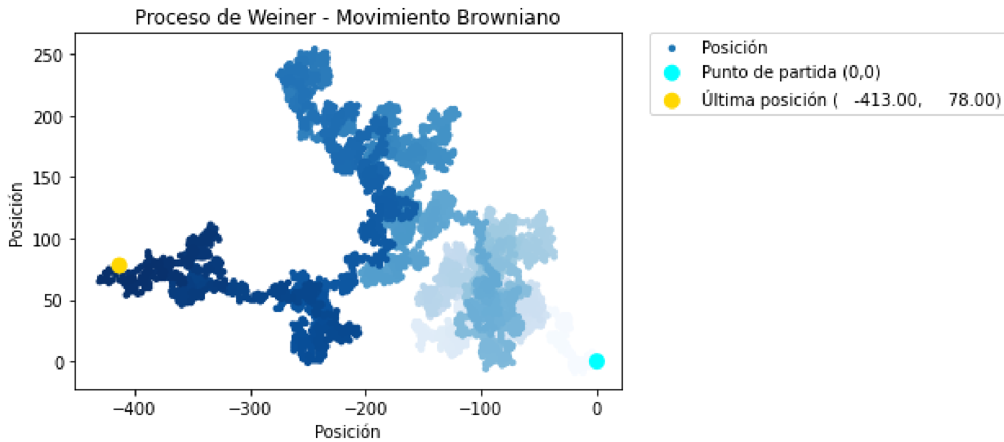

Figura 1.1: Simulación del movimiento browniano para un objeto que se desplaza de forma aleatoria.

Ahora bien, si se piensa en un fenómeno que además de evolucionar en el tiempo con T, un conjunto continuo, también puede tomar valores en un espacio de estados S continuo, un ejemplo que se tiene, es el movimiento exhibido por una partícula completamente sumergida en un líquido o en un gas, ver Figura 1.1. Este tipo de movimiento es conocido como movimiento browniano, la primera explicación de este fenómeno fué dada por Einstein en 1905. Sin embargo, la formulación matemática concisa del movimiento browniano fué dada por Norbert Wiener en 1918, por lo que también se le conoce como proceso de Weiner.

Los procesos estocásticos permiten estudiar los distintos desarrollos que puede tener un cierto fenómeno. De manera gráfica esto queda expresado en las distintas trayectorias posibles que resultan del fenómeno que ha partido de un mismo estado inicial, como se ve en la Figura 1.2. En este caso, los puntos muestrales del modelo de probabilidad pueden tomarse como las rutas muestrales o trayectorias del proceso. Entonces, conceptualmente, cada evento es una colección de rutas [Gallager, 2013]. Nos interesa conocer sobre estas trayectorias si es que tienden a algún valor, si oscilan entre dos o más valores, si tienden a valores grandes o pequeños, etcétera [Feller and Higgins, 1957].

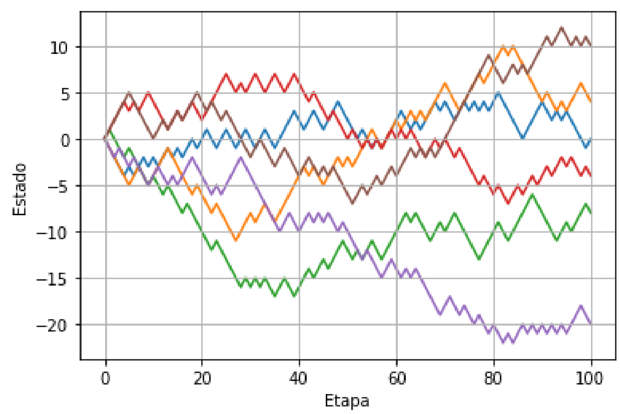

Figura 1.2: Ejemplo de distintas trayectorias que toma un proceso estocástico discreto partiendo del mismo estado.

Capítulo 2

Cadenas de Markov

En el presente capítulo se define una Cadena de Markov, de igual forma, se abordan distintos ejemplos y propiedades.

2.1. Definición y algunas propiedades

Un tipo de proceso estocástico a tiempo discreto son las cadenas, donde sin pérdida de generalidad $S \subseteq \{0, 1, \cdots\}$, finito o infinito y numerable, en cuyo caso se denomina a la cadena finita, o infinita numerable respectivamente. Dado el proceso estocástico $\{X_n\}$, la variable aleatoria X_n representa la posición de la cadena al n-ésimo paso o etapa, y X_0 a la posición inicial del proceso.

Considere que i, j están en S, podrían ser de interés los siguientes eventos, $X_n = i$, que significa que en el paso o etapa n el proceso se encuentra en el estado i, en las cadenas generalmente la probabilidad de que $X_n = i$ depende del valor de los estados ocupados en las etapas previas, partiendo de un valor inicial $x_0 \in S$ lo cual se expresa como $X_0 = x_0$. Por otro lado, si las variables aleatorias $X_{n-1} = i$ y $X_n = j$ se dice que el sistema ha hecho una transición del estado i al estado j en el n-ésimo paso.

Las cadenas de Markov tienen una propiedad característica, piense que se está en el momento presente n, la probabilidad de que el proceso se encuentre en algún estado dentro del conjunto de estados posibles en el momento futuro $n+1$, cuando se tiene conocimiento de todos sus estados previos es la misma a cuando se conoce únicamente su estado presente o actual [Peter W. Jones, 1957]. Esta es la propiedad de Markov la cual se enuncia formalmente a continuación

Definición 2.1.1. *Una **cadena de Markov** es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ con espacio de estados discreto $S \subseteq \{0, 1, \cdots\}$ y que satisface la propiedad de Markov, esto es, que para cualquier entero $n \geq 0$ y para cualesquiera estados $x_0, \dots, x_{n+1}$ se cumple:*

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ &\quad = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Una forma de obtener la distribución conjunta de las variables aleatorias $X_0, X_1, \cdots, X_n$ utilizando la propiedad de Markov es la siguiente [Rincón, 2012].

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdots P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Una cadena de Markov inicia su evolución a partir de un estado inicial x en S, de acuerdo a una distribución inicial, cuya definición se enuncia a continuación

Definición 2.1.2. *La función $\pi_0(x)$, con $x \in S$ se define como*

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x)$$

*es llamada **distribución inicial** y cumple lo siguiente*

- $\pi_0(x) \geq 0$, $x \in S$.
- $\sum_x \pi_0(x) = 1$.

Para algunas cadenas, las probabilidades $P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$ son funciones que dependen de n, las cuales denotan la probabilidad de transición al tiempo n, si este no es el caso y las probabilidades son las mismas para cada n, entonces se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo, en lo que sigue se asumirá que las cadenas son homogéneas en el tiempo. Se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.3. *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados S y sean $x, y \in S$. La función $P(x,y)$ definida como*

$$P(x,y) = P(X_1 = y | X_0 = x)$$

*se le llama **probabilidad de transición** de x a y en un paso de la cadena, y cumple lo siguiente*

- $P(x,y) \geq 0$.
- $\sum_y P(x,y) = 1$.

.

Observación 2.1.1. *Cuando el espacio de estados S es un conjunto finito de n elementos, se tiene que la distribución inicial π_0 es un vector de dimensión n. Además, los valores de la función de transición $P(x,y)$ variando $x, y \in S$ se pueden ordenar en lo que más adelante se definirá como matriz de transición.*

Notación. Sean $i, j \in S$ se tiene que $P(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, en la siguiente definición se denotará como p_{ij}, lo cual se entiende como la probabilidad de transición del estado i al estado j en un paso. La probabilidad de transición en n pasos, $P(X_n = j | X_0 = i)$ se donotará como $p_{i,j}(n)$.

Definición 2.1.4. *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una cadena de Markov, con espacio de estados finito S de m elementos y con $i, j \in S$, al variar los índices i y j obteniendo sus respectivos p_{ij} se construye la **matriz de probabilidades de transición** en un paso, es decir, cada entrada (i,j) de esta matriz cuadrada de orden m es la probabilidad de ir del estado i al estado j en un paso.*

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}.$$

Los elementos de esta matriz son probabilidades y cubren todos los posibles eventos de transición en un paso, teniendo así la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *La matriz de probabilidades de transición $P = (p_{ij})$ cumple las siguientes propiedades.*

a. $p_{ij} \geq 0$.

b. $\sum_j p_{ij} = 1$.

Demostración. 1. Esto se cumple porque p_{ij} es una probabilidad.

2. Se tiene que por descomposición disjunta se cumple

$$\Omega = \bigcup_j (X_1 = j).$$

Por lo que para cualesquiera i y j

$$1 = P(\bigcup_j (X_1 = j|X_0 = i)) = \sum_j P(X_1 = j|X_0 = i) = \sum_j p_{ij}.$$

Esto significa que a partir de cualquier estado i, con probabilidad uno, la cadena pasa necesariamente a algún elemento del espacio de estados en el siguiente tiempo.

□

En realidad cualquier matriz cuadrada que cumpla con estas condiciones se llama matriz estocástica, si para una matriz estocástica se cumple además que $\sum_i p_{ij} = 1$ entonces se dice que es doblemente estocástica.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1\}$, la distribución inicial es $\pi_0 = \{p_0, p_1\}$, su matriz de transición, tomando $a, b \in (0, 1)$ y $p_{00} = a, p_{01} = 1 - a, p_{10} = 1 - b, p_{11} = b$ es la siguiente*

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Es de interés conocer las probabilidades de transición entre dos estados $i, j \in S$ pero ahora en n pasos.

Proposición 2.1.2 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov)**.** *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una cadena de Markov, para cualquier par de números enteros r y n tales que $0 \leq r \leq n$ y para cualesquiera estados $i, j \in S$ se cumple*

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(r) p_{kj}(n - r).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P(X_n = j|X_0 = i) \\ &= P(X_n = j, X_0 = i)/P(X_0 = i), \end{aligned}$$

se tiene que

$$= \sum_k P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)/P(X_0 = i).$$

Utilizando la multiplicación de las probabilidades

$$= \sum_k P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k|X_0 = i)$$
$$= \sum_k p_{kj}(n-r)p_{ik}(r).$$

□

Proposición 2.1.3. *Sea* $\{X_n\}, n \geq 0$ *una cadena de Markov, con espacio de estados* S *finito y* $i, j \in S$*, la probabilidad de transición de* i *a* j *en* n *pasos,* $p_{ij}(n)$*, está dada por la entrada* (i,j) *de la matriz de transición* P *elevada a la* n*-ésima potencia, es decir,*

$$p_{ij}(n) = (P^n)_{ij}.$$

Demostración. La siguiente suma corresponde a la entrada (i,j) de la matriz resultante de multiplicar P consigo misma n veces.

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \sum_{i_1} p_{ii_1}(1)p_{i_1j}(n-1) \\ &= \sum_{i_1i_2} p_{ii_1}(1)p_{i_1i_2}(1)p_{i_2j}(n-2) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}} p_{ii_1}(1)p_{i_1i_2}(1),\cdots,p_{i_{n-1}j}(1) \\ &= (P^n)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 2.1.4. *Sean* A*,* B *matrices cuadradas de orden* m *estocásticas, entonces su producto* AB *es también una matriz estocástica.*

Demostración.

$$C = AB = [a_{ij}][b_ij] = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj},$$

de donde para cualquier c_{ij}

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj},$$

como $a_{ij} \geq 0$ y $b_{ij} \geq 0$ para cualquier $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ se sigue que $c_{ij} \geq 0$, también

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{j=1}^{m} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} * 1 = 1.$$

□

Por el método inductivo se ve que en realidad toda potencia de una matriz estocástica P de orden m, es también una matriz estocástica.

Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una cadena de Markov, se tienen las siguientes clasificaciones para los estados.

Definición 2.1.5. *Se dice que un estado $i \in S$ es recurrente si la probabilidad de que eventualmente regrese a i partiendo de i es uno, es decir, si*

$$P(X_n = i \text{ para alguna } n \geq 1 | X_0 = i) = 1.$$

Por otro lado, un estado transitorio es aquel para el cual la probabilidad anterior es estrictamente menor que 1

$$P(X_n = i \text{ para alguna } n \geq 1 | X_0 = i) < 1.$$

Un estado i se dice que es absorbente cuando se cumple que $p_{ii} = 1$ y por lo tanto, $p_{ii}(n) = 1$.

El concepto de comunicación entre estados permite clasificar a las cadenas mismas.

Definición 2.1.6. *Se dice que el estado j es accesible desde el estado i si existe un entero $n \geq 0$ tal que $p_{ij}(n) > 0$, esto se escribe simplemente como $i \to j$. Se dice además que los estados i y j son comunicantes y se escribe $i \leftrightarrow j$ si se cumple que $i \to j$ y $j \to i$.*

La comunicación es una relación de equivalencia, cumple con las propiedades de reflexión, simetría y transitividad, por lo que se induce una partición del espacio de estados de una cadena de Markov dada por subconjuntos de estados comunicantes, de modo que el espacio de estados se subdivide en clases de comunicación. A la clase de comunicación del estado i se le denota $C(i)$. Por lo tanto, $i \leftrightarrow j$ si y sólo si $C(i) = C(j)$.

Si un estado es recurrente entonces todos los elementos en la misma clase de comunicación lo son, de modo que a la clase misma se le denomina recurrente, de forma análoga si el estado es transitorio, los estados en esa misma clase también lo serán y a la clase se le denominará como transitoria. Tenemos que las cadenas se pueden clasificar de acuerdo a las clases de comunicación.

Definición 2.1.7. *Se dice que una cadena es irreducible si todos sus estados se comunican entre sí. O bien que hay una única clase de comunicación.*

Así como se clasificaban los tipos de estados, así se clasifican a las cadenas.

Definición 2.1.8. *Una cadena de Markov es recurrente si todas sus clases de comunicación (o la única) son recurrentes.*
Una cadena de Markov es transitoria si todas sus clases de comunicación (o la única) son transitorias.

Definición 2.1.9. *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ un proceso estocástico, A un subconjunto del espacio de estados S. El* ***tiempo de llegada*** *o* ***tiempo de alcance*** *T_A de A se define como*

$$T_A = min\{n \geq 0 | X_n \in A\},$$

si $X_n \in A$ para algún $n > 0$ y $T_A := \infty$ si $X_n \notin A$ para todo $n > 0$.

El tiempo de alcance a un estado ayuda a comprender mejor las caracteristicas de un estado recurrente, o transitorio. También será de utilidad para el problema del Capítulo 4, ya que es de interés el alcanzar o llegar a algún estado absorbente. Las definiciones anteriores se encuentran en [Hoel et al., 1972, Peter W. Jones, 1957, Rincón, 2012].

Capítulo 3

Caminata Aleatoria Simple

En este capítulo se da la definición de caminata aleatoria simple, así como algunas propiedades sobre la forma en que se distribuye.

3.1. Definición y algunas propiedades

Una caminata aleatoria simple sobre el conjunto de números enteros es una cadena de Markov con espacio de estados $S \subseteq \mathbb{Z}$, la cual evoluciona en cada nueva etapa únicamente con un desplazamiento de una unidad hacia a la derecha (con probabilidad p), o hacia la izquierda (con probabilidad $q = 1 - p$) con respecto a la posición (estado) actual, esto se puede ver en la Figura 3.1. Se cumple que $p + q = 1$ con p, q en $(0, 1)$.

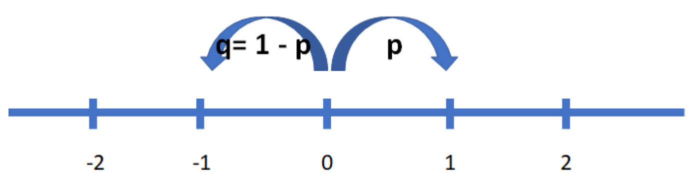

Figura 3.1: Probabilidad de transición en la primera etapa de una caminata aleatoria que inicia en el valor 0.

Definición 3.1.1. *Una* ***caminata aleatoria*** *simple, es un proceso estocástico a tiempo discreto, con espacio de estados $S \subseteq \mathbb{Z}$, que para $i, j \in S$ y para $n \geq 0$, tiene las siguientes probabilidades de transición.*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & si\ j = i + 1, \\ q, & si\ j = i - 1, \\ 0, & otro\ caso. \end{cases} \tag{3.1}$$

Por lo anterior se puede ver que una caminata aleatoria simple en los enteros o unidimensional, cumple con las propiedades de una cadena de Markov, ya que la probabilidad de estar en algún estado en particular al momento $n + 1$ se ve influido únicamente por el estado en que el proceso estuvo en la etapa n y no así por los estados previos.

Note además que la caminata aleatoria es homogénea en el tiempo. Cada realización se puede representar como una línea polígonal, como ejemplo de ello se tiene la Figura 3.2

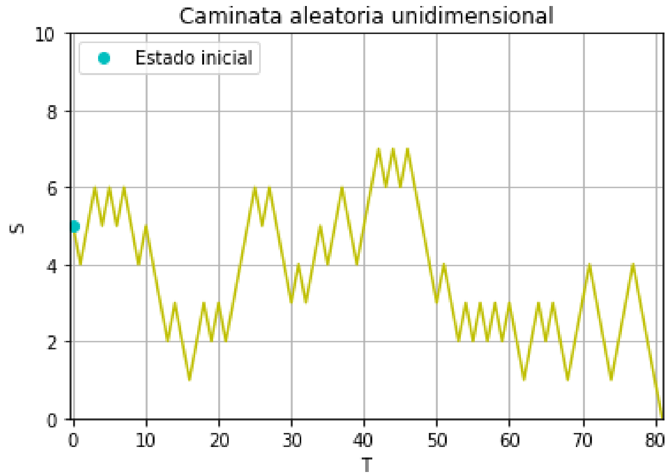

Figura 3.2: Ejemplo de una trayectoria para una caminata aleatoria simple en los enteros, con estado inicial $X_0 = 5$ después de 80 desplazamientos.

El estado del proceso al tiempo n es consecuencia de n desplazamientos realizados de forma aleatoria de una unidad ya sea hacia la izquierda o a la derecha, esto permite descomponer al proceso en una suma de n variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a partir de la posición de origen. Dichas variables son independientes e idénticamente distribuidas de la siguiente forma:

Sea $p \in (0,1)$ y $q = 1-p$,

$$f(\xi) = p^{\frac{1+x}{2}} + q^{\frac{1-x}{2}} \text{ para } x = -1, 1. \tag{3.2}$$

De modo que para $n \geq 1$, se define

$$X_n := X_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n. \tag{3.3}$$

En [Gallager, 2013] se encuentra una definición de caminata aleatoria en la cuál se describe a estas variables aleatorias $\{\xi_i, i \geq 1\}$ como una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y se dice que la caminata está basada en dicha sucesión. Identificar a estas variables aleatorias permite hacer cálculos sobre el valor esperado y varianza de X_n con $n \geq 0$. Sin perdida de generalidad se asume $X_0 = 0$.

Proposición 3.1.1. *Sea* $\{X_n\}, n \geq 0$ *una caminata aleatoria simple con estado inicial* 0. *Para cualquier entero* $n \geq 0$ *se cumple*

1. $E(X_n) = n(p-q)$.

2. $Var(X_n) = 4npq$.

Demostración. 1. Para calcular el valor esperado se utiliza la igualdad (3.3),

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) \\ &= nE(\xi). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$E(\xi) = p(1) + q(-1) = p - q.$$

En consecuencia, $E(X_n) = n(p - q)$.

2. Por la independencia de las ξ's, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(X_n) &= V(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(\xi_i) \\ &= nV(\xi). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} V(\xi) &= E(\xi^2) - E(\xi)^2 \\ &= p(1)^2 + q(-1)^2 - (p-q)^2 \\ &= 1 - (p-q)^2 \\ &= 1 - (p - (1-p))^2 \\ &= 1 - (2p-1)^2 \\ &= 4pq. \end{aligned}$$

Finalmente, $V(X_n) = 4npq$.

□

Note que al tomar la posicion inicial igual a cero, se cumple que después de un número par de desplazamientos la caminata se encuentra en una posición par, por otro lado, al moverse un número impar de pasos la caminata estará en una posición impar, ver Figura 3.3 . Esto último, así como la descomposición de X_n se usa para encontrar su función de distribución.

Proposición 3.1.2. *Sea $\{X_n\}$ una caminata aleatoria simple que inicia en* 0. *Para cualesquiera números enteros n y x tales que $-n \leq x \leq n$ y con n y x ambos pares o impares*

$$P(X_n = x | X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}}. \tag{3.4}$$

Para otros valores de x y n esta probabilidad vale 0.

Demostración. Considere que X_n representa la posición de la caminata al momento n, esta se puede descomponer de la siguiente forma

$$X_n = R_n - L_n. \tag{3.5}$$

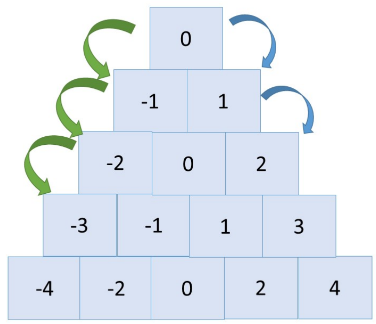

Figura 3.3: Posición de la caminata aleatoria simple luego de un número par o impar de pasos.

Donde R_n y L_n son variables aleatorias que representan el número de pasos, hasta el momento n, dados hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Por lo que se tiene la siguiente ecuación

$$n = R_n + L_n. \tag{3.6}$$

Al sumar (3.4) y (3.5) se tiene

$$R_n = \frac{X_n + n}{2}, \tag{3.7}$$

R_n solo puede tomar valores enteros cuando X_n, n son ambos pares o impares. Por otro lado, de (3.2), considerando, sin pérdida de generalidad, a $X_0 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i + n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i + 1}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donde para cada i en $\{1, \ldots, n\}$, ξ_i se distribuye como una variable aleatoria Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de éxito en cada ensayo). Dado que la suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas con parámetro (p), es una variable aleatoria Binomial de parámetros (n, p), R_n se distribuye de dicha forma. De modo que

$$\begin{aligned} P(X_n = x | X_0 = 0) &= P\left(R_n = \frac{x+n}{2}\right) \\ &= \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

□

Proposición 3.1.3. *Para cualesquiera números enteros n y $x - y$ tales que $-n \leq x - y \leq n$, con n y $x - y$ ambos pares o impares*

$$P(X_n = x | X_0 = y) = \binom{n}{\frac{n+x-y}{2}} p^{\frac{n+x-y}{2}} q^{\frac{n-x+y}{2}}. \tag{3.10}$$

Demostración. Como hipótesis $X_0 = y$ de modo que si se define $Z_n = X_n - y$, se tiene que $(Z_n), n \geq 0$ es una caminata aleatoria simple que inicia en cero, por lo tanto se puede usar el resultado anterior, entonces se sigue que

$$P(X_n = x|X_0 = y) = P(Z_n = x - y|Z_0 = 0).$$

□

Para la demostración de la Proposición 3.1.4, se hace uso del siguiente Lema.

Lema 3.1.1. *Sea $a_0, a_1, \cdots$ una sucesión de números reales o complejos tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente. Defina la función $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, la cual es convergente por lo menos para valores de t en $[0,1]$, el **lema de Abel** asegura que $G(t)$ es una función continua por la izquierda en $t = 1$, es decir,*

$$\lim_{t \to 1} G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Proposición 3.1.4. *Sea $\{X_n\}, n \geq 0$ una caminata aleatoria simple, la probabilidad de un eventual regreso al punto de partida es*

$$1 - |p - q| = \begin{cases} 1, & si\ p = \frac{1}{2}, \\ < 1, & si\ p \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Demostración. Para esta demostración se requieren distintos elementos.

a. Se define p_n como la probabilidad de que la caminata se encuentre en el estado cero al tiempo n con $n \geq 0$, se define además, $p_0 = 1$. Note que $p_n = P(X_n = 0|X_0 = 0) \neq 0$ sólo si n es par. Se define f_k como la probabilidad de que la caminata visite el estado cero por primera vez en el paso $k \geq 0$, se define además, $f_0 = 0$. Note que $f_k \neq 0$ sólo si k es par y $k \neq 0$.
Aquí note que en términos de las probabilidades f_k, la probabilidad de que la caminata regrese eventualmente al origen es
$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k.$$
Esta última es una serie convergente ya que es la suma de probabilidades de eventos disjuntos y por lo tanto, su suma a lo más es uno.

b. Se emplea la igualdad
$$p_n = \sum_{k=0}^{n} f_k p_{n-k}. \tag{3.12}$$
Esta igualdad se explica al descomponer el evento " estar en 0 al momento n " en eventos de la forma " regresar por primera vez a 0 en k pasos y llegar a 0 en $n - k$ pasos más ", para valores de k en $\{0, \ldots n\}$. La probabilidad de cada uno de estos eventos es

$$\begin{aligned} P(X_n = 0, X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, \ldots X_1 \neq 0, X_0 = 0) \\ = P(X_n = 0|X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, \ldots X_1 \neq 0, X_0 = 0) f_k \\ = P(X_n = 0|X_k = 0) f_k \\ = P(X_{n-k} = 0|X_0 = 0) f_k. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple ya que, se supone homogeneidad en el tiempo, por lo tanto, $(P(X_{n-k} = 0|X_0 = 0) = P(X_n = 0|X_k = 0))$.

La ecuación anterior se usa para encontrar la función generadora de probabilidad de la colección de números $f_0, f_1, \ldots$. Esto es, para encontrar

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,$$

al multiplicar (3.11) por t^n, se obtiene que

$$p_n t^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k p_{n-k} \right) t^n,$$

sumando y cambiando el orden se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(t^n \sum_{k=0}^{n} f_k p_{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_k p_{n-k} t^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k} t^{n-k} \\
&= G(t) \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n.
\end{aligned}$$

De modo que,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) - 1 = G(t) \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n. \tag{3.13}$$

Esto significa que para encontrar $G(t)$ se requiere conocer $\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ y esta es la función generadora de probabilidad de los números $p_0, p_1, \ldots$.

c. Por lo que se busca su expresión. Recordar que para cualquier número real a y para cualquier entero n, se tiene el coeficiente binomial

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-(n-1))}{n!}.$$

Como aplicación de esto se tiene que,

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!n!} \\
&= \frac{2^n!(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{n!n!} \\
&= \frac{2^n 2^n(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{n!2^n} \\
&= \frac{2^n 2^n}{n!}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{2^n 2^n}{n!}(-1)^n\cdot -\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot -\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{-5}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-1}{2} \\
&= \frac{(-4)^n}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right) \\
&= (-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}.
\end{aligned}$$

d. Se sigue con la búsqueda de la expresión para la función generadora, se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}p^n q^n t^{2n}.$$

Lo anterior ya que, se considera que los únicos elementos no nulos de la serie son los pares además, de que para estar en la posición de origen habrá que dar la mitad de pasos hacia la izquierda y la otra mitad hacia la derecha. De aquí se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}p^n q^n t^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4pqt^2)^n \\
&= (1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple de la expresión de la serie binomial.

e. Sustituyendo (3.13) en (3.12) se tiene,

$$(1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = G(t)(1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}},$$

finalmente,

$$G(t) = 1-(1-4pqt^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.15)$$

con esta expresión, recordar que la probabilidad buscada, queda en términos de los números $f_0, f_1, \ldots$, por lo que, se hace uso del Lema de Abel (ver Apéndice) para calcular $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_k &= \lim_{t\to 1} G(t) \\
&= 1-(1-4pq)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1-\sqrt{1-4p(1-p)} \\
&= 1-\sqrt{(2p-1)^2} \\
&= 1-|(2p-1)| \\
&= 1-|p-q|.
\end{aligned}$$

$\square$

Del resultado anterior se observa que para cualquier valor de p distinto de un medio, la probabilidad de retorno es estrictamente menor que 1, por lo cual no es seguro regresar. Sin embargo, si se piensa en el caso simétrico donde el retorno es seguro, conviene observar el tiempo esperado en que esto ocurriría, teniendo expresada la función generadora de probabilidad podemos hacer uso de una de sus propiedades para obtener dicho valor esperado, esta propiedad dice que si el n-ésimo momento factorial de una variable aleatoria X de valores en $\{0, 1, \dots\}$ existe, entonces

$$\lim_{t \to 1} G'(t) dt = E[X].$$

Es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_n = \lim_{t \to 1} G'(t) = \lim_{t \to 1} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} = \infty. \tag{3.16}$$

Por lo que aún cuando en el caso simétrico es seguro que eventualmente regresaremos al punto de partida, el tiempo promedio en que ocurre esto es infinito.

Capítulo 4

Problema de la Ruina del Jugador

En el presente capítulo se plantea el problema clásico de la ruina de jugador así como una variante llamada la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico. Y se estudian las características que poseen las caminatas aleatorias que las modelan. Finalmente se muestran los algoritmos de la simulación de ambas versiones, así como los resultados de su implementación en Python.

4.1. Problema de la ruina del jugador clásico.

La ruina del jugador fue el último en una lista de cinco problemas propuestos en el Tratado de Huygens, cuya versión en latín fue publicada por primera vez en 1657, en dicho documento, se hacía el planteamiento de un escenario de juego con dos participantes A y B, cada uno iniciaría con 12 fichas para apostar, quienes lanzarían tres dados, el jugador A ganaría una unidad al jugador B si el resultado de los dados sumaba 11, por el contrario, B ganaba una unidad a su oponente si el resultado de la suma era 14, se preguntaba por la probabilidad de ganar de cada jugador, las respuestas que en dicho documento se presentaban, manejaban por primera vez algunos conceptos básicos de probabilidad como el de extracción con reemplazo o herramientas como arboles de probabilidad. Posteriormente fue respondido por otros autores como Montmort [Basulto and Pérez,].

Actualmente en distintos libros introductorios a los procesos estocásticos se presenta el problema de la ruina del jugador con un enunciado más general. Suponga que hay dos jugadores, el jugador A que comienza con k unidades y el jugador B que comienza con $a-k$ unidades, en cada ronda del juego (no se considera posibilidad de empate) el ganador toma una unidad de su oponente, el juego termina cuando alguno de los dos jugadores se queda sin más unidades que apostar. Las rondas son ensayos independientes entre si y en cada una el jugador A tiene una misma probabilidad p de ganar, con p en $(0,1)$. ¿Cuál es la probabilidad de ruina del jugador A?¿cuál es el tiempo esperado para que termine el juego?

El desarrollo del capital del jugador A, se modela como un proceso estocástico. Inicia con un cierto valor k, que corresponde al estado inicial, varía entre los estados $\{0,1,\ldots,a\}$, y las transiciones ocurren partida a partida, por lo que este es un proceso a tiempo discreto. La transición entre estados queda determinada de la siguiente forma:

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases} p, \text{ si j = i + 1 y } i\notin\{0,a\}\ , \\ q, \text{ si j = i - 1 y } i\notin\{0,a\}\ , \\ 0, \text{ otro caso.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Los estados a y 0 son estados absorbentes, una vez alcanzados el juego termina y ese será el estado para todas las etapas posteriores.

Como lo dice el enunciado, etapa tras etapa se ejecuta un juego, en el que A tiene siempre una probabilidad p de ganar. Se define así al conjunto de variables aleatorias $\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ las cuales se distribuyen de forma similar a (3.2). Se observa así que, $X_n=x_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$, de modo que la forma en que cambia el capital del jugador A, de acuerdo a la Definición 3.1.1, corresponde a una caminata aleatoria unidimensional basada en $\{\xi_i, i\geq 1\}$, con espacio de estados finito $\{0,1,\ldots,a\}$ y dos estados absorbentes $\{0,a\}$.

Debido a que la caminata aleatoria es finita, se puede escribir su matriz de transición, una matriz estocástica de orden $a+1$.

Ejemplo 4.1.1. *Piense en el problema clásico publicado en 1657. Se tiene que el capital inicial de A es de 12 unidades, el capital total es de* 24 *unidades. Para definir el valor de p se toma en cuenta que no se permiten empates por lo que solo se consideran las* 15 *posibles formas en que se puede obtener una suma de* 14 *(que favorece al jugador A) y las* 27 *posibles formas en que se obtiene la suma de* 11 *(que favorece al jugador B), por lo que, el valor de p es* 15/42.

Con ello la matriz de transición es una matriz cuadrada de orden 25 *y se ve como a continuación.*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{27}{42} & 0 & \frac{15}{42} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{42} & 0 & \frac{15}{42} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{42} & 0 & \frac{15}{42} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{42} & 0 & \frac{15}{42} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{27}{42} & 0 & \frac{15}{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La probabilidad de que el jugador A eventualmente quede arruinado, puede encontrarse en la matriz de transición estacionaria, esto es, en el límite de P^n cuando n tiende a infinito. Obteniendo así

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.9991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.0009 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.6913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.3086 \\ 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.5556 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Cada componente (i,j) de esta matriz nos regresa la probabilidad de que partiendo de un estado i eventualmente estemos en el estado j. Por lo que, para este problema, la probabilidad de quedar arruinado corresponde al valor de la componente $(12,0)$ *que tiene el valor de* 0.9991.

De la matriz (4.2) se observa en la primera columna que las probabilidades de ruina cambian al variar los posibles valores del capital inicial. Como es de esperarse el quedar arruinado también depende del valor de p. Por lo tanto, estos dos valores se consideran como los parámetros que determinan la probabilidad de ruina del jugador.

Las herramientas computacionales permiten agilizar rutinas de diagonalización y cálculo de límites, sin embargo, el proceso va aumentando sus costos en tiempo y demás conforme el capital total crece y con ello el orden de la matriz de transición. Sobre todo porque calcular el límite al que tiende la $n-$ésima potencia de la matriz de transición nos devuelve la información de $(a+1)x(a+1)$ componentes, cuando únicamente se tiene interés en una de ellas $(k, 0)$. Por ello es preferible buscar una expresión que calcule esta probabilidad en función de los parámetros antes mencionados: capital inicial y probabilidad de ruina en cada paso.

Proposición 4.1.1. *Para un jugador que inicia con un capital de k unidades y que tiene una probabilidad $p \in (0,1)$ de ganar en cada ronda, su* ***probabilidad de eventual ruina****, u_k, queda determinada por la siguiente expresión. Con $q = 1-p$ y a que representa el capital total.*

$$u_k = \begin{cases} \frac{(\frac{q}{p})^k - (\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^a}, & si\ p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{a-k}{a}, & si\ p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Demostración. Sea τ el tiempo de llegada al conjunto $\{0, a\}$ el cual es el conjunto de los estados absorbentes. Es decir,

$$\tau = min\{n \geq 0 | X_n = 0 \text{ ó } X_n = a\},$$

la probabilidad de ruina es

$$u_k = P(X_\tau = 0 | X_0 = k).$$

Se inicia con un capital k, después de la primera partida, el capital únicamente puede aumentar o disminuir en una unidad con probabilidades p y q, respectivamente. Por el Teorema de la Probabilidad Total [Rincón, 2007], para k en $\{1, \ldots, a-1\}$, se tiene,

$$u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}. \tag{4.4}$$

Notar que, $u_0 = 1$, ya que, el quedar arruinado dado que se ha perdido todo es un evento seguro, por otro lado, $u_a = 0$, ya que, quedar arruinado dado que se ha ganado todo es un evento imposible. Estas igualdades se denominan condiciones de frontera .

Después que el capital cambia, se busca la probabilidad de ruina para ese nuevo capital, de ahí que se busque una ecuación recursiva. Multiplicando el lado izquierdo de (4.4) por $1 = p+q$ y agrupando se tiene

$$\begin{aligned} (p+q)u_k &= pu_{k+1} + qu_{k-1} \\ pu_k + qu_k &= pu_{k+1} + qu_{k-1} \\ p(u_k - u_{k+1}) &= q(u_{k-1} - u_k) \\ u_k - u_{k+1} &= \frac{q}{p}(u_{k-1} - u_k) \\ u_{k+1} - u_k &= \frac{q}{p}(u_k - u_{k-1}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

De la ecuación (4.5) iterativamente se sigue,

$$\begin{aligned}
u_2 - u_1 &= \tfrac{q}{p}[u_1 - 1] & & \\
u_3 - u_2 &= \tfrac{q}{p}[u_2 - u_1] &&= \left(\tfrac{q}{p}\right)^2 [u_1 - 1] \\
u_4 - u_3 &= \tfrac{q}{p}[u_3 - u_2] &&= \left(\tfrac{q}{p}\right)^3 [u_1 - 1] \\
&\vdots \\
u_k - u_{k-1} &= \left(\tfrac{q}{p}\right)^{k-1} [u_1 - 1].
\end{aligned}$$

Al sumar las ecuaciones anteriores se obtiene

$$u_k - u_1 = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i\right] [u_1 - 1]. \tag{4.6}$$

Se define $s_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{q}{p})^i$ y se reescribe la ecuación (4.6) como

$$\begin{aligned}
u_k - u_1 &= [s_{k-1} - 1][u_1 - 1] \\
u_k - u_1 &= s_{k-1}u_1 - u_1 - s_{k-1} + 1 \\
u_k &= 1 + s_{k-1}(u_1 - 1).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Sustituyendo a por k en (4.7) se tiene que

$$u_a = 1 + s_{a-1}(u_1 - 1).$$

Utilizando la condición de frontera $u_a = 0$, se tiene que

$$u_1 - 1 = \frac{-1}{s_{a-1}}. \tag{4.8}$$

Sustituyendo (4.8) en (4.7) se llega a

$$u_k = 1 - \frac{s_{k-1}}{s_{a-1}}. \tag{4.9}$$

Ya que, s_k es la suma de los primeros $k-1$ elementos de una serie geométrica, se tiene que

$$s_k = \begin{cases} k+1, \text{ si } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1-(\frac{q}{p})^{k+1}}{1-\frac{q}{p}}, \text{ si } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.10}$$

En (4.10) se puede ver que se hace una diferencia de dos casos, para p igual a 0.5 y para cuando es diferente de este valor, esta diferencia de casos se sustituye en (4.9) para obtener finalmente,

$$u_k = \begin{cases} \frac{(\frac{q}{p})^k-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^a}, \text{ si } p \neq \frac{1}{2}. \\ \frac{a-k}{a}, \text{ si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

En la Figura 4.1 se muestran las curvas correspondientes a la probabilidad de ruina para distintos valores de p, las cuales representan un escenario de juego donde el capital total es de 30 unidades. Se puede ver como la probabilidad de quedar arruinado eventualmente, varía menos conforme la probabilidad p, se aleja de 0.5. Por ejemplo, para $p = 0.65$ se observa que la probabilidad de ruina es muy cercana a 0 para la mayoría de valores posibles para el capital inicial, valores mayores o iguales a 5. Por otro lado, para $p = 0.35$ la probabilidad de ruina es muy

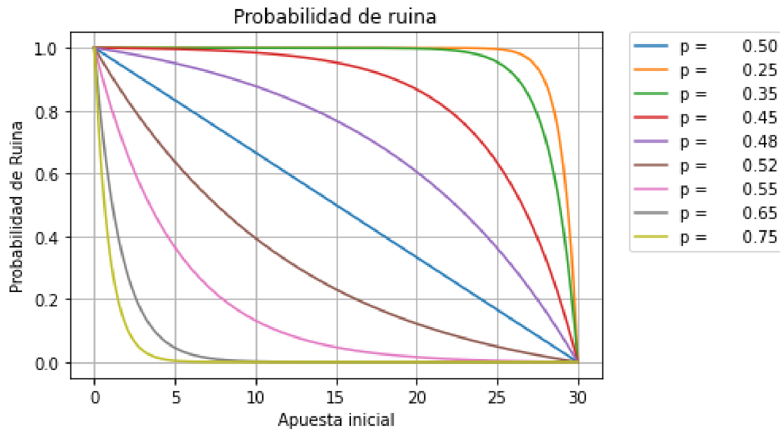

Figura 4.1: Probabilidad de ruina para distintos valores de p y de k cuando el capital total es de 30 unidades.

cercana a 1 aún por ejemplo si se comienza con dos tercios del capital total. Observando que las probabilidades de ruina se vuelven cercanas a cero o uno para valores de p fuera de $(0.4, 0.6)$ para la mayoría de posibilidades de capital incial, es decir, se hace menos sensible al capital inicial. Por lo que podría considerarse que para un juego con estos valores para los parámetros a y p, el juego se torna más interesante para la mayoría de opciones de capital inicial cuando p si se encuentra dentro de dicho intervalo.

Sin embargo, si se considera un capital total diferente a 30 unidades, el intervalo $(0.4, 0.6)$ dejará de ser útil para diferenciar valores de p poco sensibles al capital inicial. Por ejemplo, si se considera un capital total igual a 100 unidades, para los mismos valores de p usados en la Figura 4.1 se tiene el comportamiento de la probabilidad de ruina graficado en la Figura 4.2

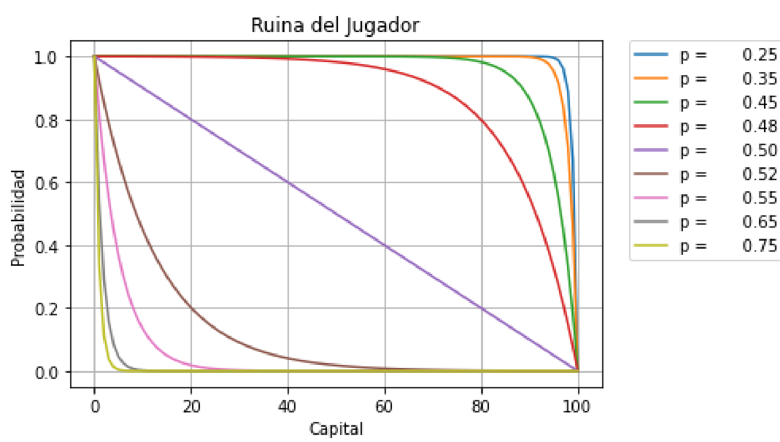

Figura 4.2: Probabilidad de ruina para distintos valores de p y de k cuando el capital total es de 100 unidades.

La segunda pregunta que se plantea en el problema clásico es ¿cuál es la duración esperada del juego? La respuesta está dada por una expresión que también depende del valor del capital inicial (también se requiere conocer el capital total) y de la probabilidad p.

Proposición 4.1.2. *Para un jugador que inicia con un capital de k unidades y que tiene una probabilidad $p \in (0,1)$ de ganar en cada ronda, la **duración esperada del juego**, d_k, queda determinada por la siguiente expresión. Con $q = 1-p$ y a que representa el capital total.*

$$d_k = \begin{cases} \frac{1}{1-2p}\left[k - \frac{a\left(1-(\frac{q}{p})^k\right)}{1-(\frac{q}{p})^a}\right] & si,\ p \neq \frac{1}{2}. \\ k(a-k) & si,\ p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Demostración. Si se inicia con un capital k y se realiza una jugada, esta jugada se suma al número de partidas en que se espera terminar el juego junto con el número de jugadas restantes para el nuevo capital, el cuál puede ser de $k+1$ con probabilidad p o de $k-1$ con probabilidad q. Se tiene así la siguiente ecuación, válida para k en $1,\dots,a-1$

$$d_k = 1 + pd_{k+1} + qd_{k-1}. \tag{4.12}$$

Notar que $d_0 = 0$ y $d_a = 0$ ya que quedar arruinado o ganar todo el capital, ambos casos implican que el juego ha terminado. Estas igualdades se denominan condiciones de frontera.

Por la forma de la ecuación (4.12), al igual que en el caso de la proposición anterior, se busca una ecuación recursiva. Multiplicando el lado izquierdo de dicha ecuación por $1 = p+q$ y reagrupando se tiene

$$\begin{array}{lcl} (p+q)d_k & = & 1 + pd_{k+1} + qd_{k-1} \\ pd_k + qd_k & = & 1 + pd_{k+1} + qd_{k-1} \\ p(d_k - d_{k+1}) & = & 1 + q(d_{k-1} - d_k) \\ d_k - d_{k+1} & = & \frac{1}{p} + \frac{q}{p}(d_{k-1} - d_k) \end{array}$$

$$d_{k+1} - d_k = \frac{q}{p}(d_k - d_{k-1}) - \frac{1}{p}. \tag{4.13}$$

De la ecuación (4.13) iterativamente se sigue,

$$\begin{array}{lcccc} d_2 - d_1 & = & \frac{q}{p}[d_1 - d_0] - \frac{1}{p} & = & \frac{q}{p}[d_1] - \frac{1}{p} \\ d_3 - d_2 & = & \frac{q}{p}\left[\frac{q}{p}[d_1] - \frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p} & = & \left(\frac{q}{p}\right)^2 d_1 - \frac{q}{p^2} - \frac{1}{p} \\ d_4 - d_3 & = & \frac{q}{p}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2 d_1 - \frac{q}{p^2} - \frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p} & = & \left(\frac{q}{p}\right)^3 d_1 - \frac{q^2}{p^3} - \frac{q}{p^2} - \frac{1}{p} \\ & \vdots & & & \end{array}$$

$$d_k - d_{k-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} d_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q^{i-1}}{p^i}. \tag{4.14}$$

Se define $s_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{q}{p})^i$, al sustituir s_k en la ecuación (4.14) se tiene

$$d_k - d_{k-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} d_1 - \frac{1}{p} s_{k-2},$$

el sumar las primeras k ecuaciones da como resultado,

$$d_k - d_1 = d_1(s_{k-1} - 1) - \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{k-2} s_i,$$

de donde sigue

$$d_k = d_1 s_{k-1} - \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{k-2} s_i. \tag{4.15}$$

Por otro lado, al sumar las $a-1$ ecuaciones se llega a

$$d_a = d_1 s_{a-1} - \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{a-2} s_i, \tag{4.16}$$

al sustituir la condición de frontera, $d_a = 0$ en (4.16) , se obtiene

$$d_1 = \frac{1}{s_{a-1}}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{a-2} s_i\right), \tag{4.17}$$

sustituyendo el valor de d_1 de (4.17) en (4.15) se sigue

$$d_k = \frac{s_{k-1}}{s_{a-1}}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{a-2} s_i\right) - \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{k-2} s_i.$$

Se usa el valor de s_k expresado en la ecuación (4.10), en donde se veía la diferencia entre el caso $p = 0.5$ y $p \neq 0.5$, por lo que se hace el desarrollo para dichos casos. Para $p = \frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
d_k &= \frac{k}{a}\left(2\sum_{i=0}^{a-2}(i+1)\right) - 2\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\\
&= \frac{k}{a}\left(2\sum_{i=1}^{a-1} i\right) - 2\sum_{i=1}^{k-1} i\\
&= \frac{k}{a}2\left(\frac{(a-1)(a)}{2}\right) - 2\left(\frac{(k-1)(k)}{2}\right)\\
&= \frac{k}{a}(a-1)(a) - ((k-1)k)\\
&= k(a-k).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $p \neq \frac{1}{2}$, nombrando $r = \frac{q}{p}$ se tiene

$$\begin{aligned}
d_k &= \frac{1-r^k}{1-r^a}\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{1-r}\right)\sum_{i=0}^{a-2}(1-r^{i+1}) - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1-r}\right)\sum_{i=0}^{k-2}(1-r^{i+1})\\
&= \frac{1}{p(1-r)}\left[\frac{1-r^k}{1-r^a}\left((a-1) - \sum_{i=0}^{a-1} r^i\right) - \left((k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} r^i\right)\right]\\
&= \frac{1}{p(1-r)}\left[\frac{1-r^k}{1-r^a}\left((a-1) - \left(\frac{1-r^a}{1-r} - 1\right)\right) - (k-1-\left(\frac{1-r^k}{1-r} - 1\right))\right]\\
&= \frac{1}{p-q}\left[a\left(\frac{1-r^k}{1-r^a}\right) - \left(\frac{1-r^k}{1-r}\right) - k + \left(\frac{1-r^k}{1-r}\right)\right]\\
&= \frac{1}{p-q}\left[a\left(\frac{1-r^k}{1-r^a}\right) - k\right].
\end{aligned}$$

Al reemplazar $r = \frac{q}{p}$ se llega a (4.11)

$\square$

En la Figura 4.2 se presentan las curvas correspondientes a la duración esperada para distintos valores de p, considerando que el capital inicial varía en el conjunto $\{0, 1, \ldots 30\}$, es decir, cuándo el capital total es de 30 unidades. Puede observarse que para los valores fuera del intervalo $(0.4, 0.6)$ que se tienen graficados, la duración es bastante menor en comparación a los valores graficados que si están dentro de dicho intervalo. Se recordará de la Figura 4.3, que para esos valores fuera del intervalo mencionado la probabilidad de ruina es muy próxima a 0 o a 1, por lo tanto, con los resultados mostrados, se tiene que en dichos casos en que las probabilidades favorecen de forma pronunciada a alguno de los jugadores se espera también que el juego termine relativamente pronto. Por otro lado, para aquellos valores en los que la probabilidad de ruina es más próxima a 0.5, la duración esperada aumenta, esto es, que las condiciones más justas del juego implican que este dure más tiempo. La duración esperada alcanza su máximo valor, 225 (para el caso general $(\frac{a}{2})^2$), cuando ambos jugadores tienen igualdad de probabilidades de ganar e igualdad en el capital con el que inician.

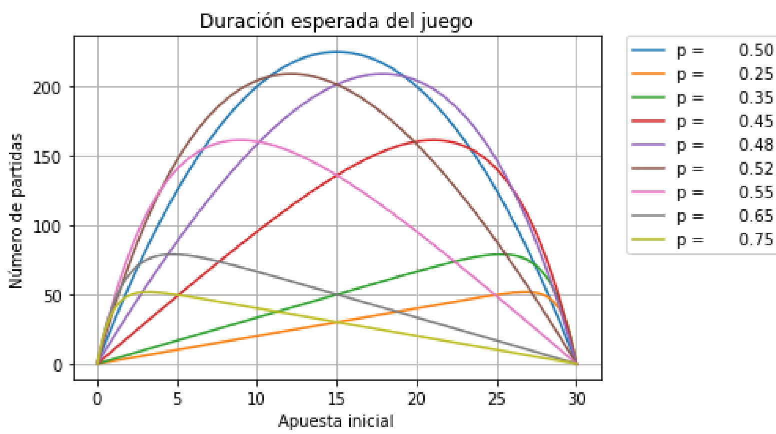

Figura 4.3: Duración del juego para distintos valores de p y de k cuando el capital total es de 30 unidades.

4.2. Problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico

En la versión del problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico, se contemplan condiciones de juego similares a la versión clásica. Hay dos jugadores, A y B, el jugador A inicia con un capital k, participan en rondas de un juego que no permite empates, en cada una el jugador A tendrá una misma probabilidad p de ganar. La diferencia de esta versión con la clásica es que el jugador B tiene ahora un capital muy grande, tanto que se considera infinito, un escenario así podría ser, por ejemplo, aquel en el que se juega contra el casino [Peter W. Jones, 1957]. Por lo que, el juego ahora solo puede terminar cuando el jugador A quede arruinado.

Al igual que para la versión clásica, el capital del jugador A se modela como un proceso estocástico a tiempo discreto, el cual parte de un cierto valor k (capital inicial y estado inicial).

Sin embargo, el capital no varía en un conjunto finito, ahora el conjunto de estados posibles es $\{0, 1, \ldots\}$. La probabilidad de transición entre estados queda definida de la siguiente forma:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & \text{si j = i + 1 y } i \neq 0 \text{ ,} \\ q, & \text{si j = i - 1 y } i \neq 0 \text{ ,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{4.18}$$

A diferencia de (4.1) no hay un estado a que represente el capital total, ya que, este surge de la suma del capital de los jugadores A y B. El estado 0, que representa el caso en que el jugador A queda arruinado conserva la característica de ser un estado absorbente. Al igual que para el problema clásico, se define al conjunto de variables aleatorias $\{\xi_1, \ldots\}$, y se tiene que $X_n = x_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$, por lo tanto y de acuerdo a la Definición 3.1.1, se dice que la forma en que se desarrolla el capital del jugador A corresponde a una caminata aleatoria unidimensional, basada en $\{\xi_i, i \geq 1\}$.

Se hacen las mismas preguntas que para el problema clásico. Para un jugador A, que inicia con un capital de k unidades y que tiene en cada ronda una misma probabilidad p de ganar, ¿cuál es su probabilidad de quedar eventualmente arruinado?, ¿cuál es la duración esperada del juego? Estas preguntas se resuelven reutilizando los resultados en las Proposiciones 4.1.1 y 4.1.2, esto se debe a que establecer que el capital del jugador B es infinito implica que el capital total denotado por a, es también infinito y por lo tanto se evalúa el límite de las ecuaciones (4.3) y (4.11) cuando a tiende a infinito. El resultado del cálculo del límite depende del valor del cociente q/p, cuando $p \neq 0.5$, ya que para el caso en que la probabilidad p es menor o mayor que 0.5, el cociente es mayor o menor que 1 respectivamente. Para el caso simétrico, desde el problema clásico se tuvo una diferencia de casos, y la expresión usada excluye el uso de la variable p. Por lo tanto, se hace la diferencia entre estos tres posibles casos. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

Proposición 4.2.1. *Para el problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico. Si el jugador inicia con un capital de k unidades y su probabilidad de ganar en cada ronda es $p \in (0, 1)$ se tiene que la probabilidad de ruina u_k y la duración esperada del juego d_k, con $s = \frac{1-p}{p}$, son las siguientes para tres distintos casos:*

1. $p < 0.5$*:* $u_k = 1$ *y* $d_k = \frac{k}{1-2p}$.
2. $p = 0.5$*:* $u_k = 1$ *y* $d_k = \infty$.
3. $p > 0.5$*:* $u_k = s^k$ *y* $d_k = \infty$.

Demostración. Para $p \neq 0.5$ y para el caso simétrico, se toma la primera y segunda parte de las ecuaciones (4.3) y (4.11) respectivamente.

1. Cuando $p < 0.5$ se tiene $s > 1$, se sigue que

$$\lim_{a \to \infty} s^a = \infty. \tag{4.19}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{a \to \infty} u_k = \lim_{a \to \infty} \frac{\frac{s^k}{s^a} - 1}{\frac{1}{s^a} - 1} = 1. \tag{4.20}$$

Se toma en cuenta (4.19) y se obtiene

$$\lim_{a \to \infty} d_k = \lim_{a \to \infty} \frac{a(\frac{1}{s^a} - \frac{s^k}{s^a})}{(1 - 2p)(\frac{1}{s^a} - 1)} + \frac{k}{1 - 2p} = \frac{k}{1 - 2p}. \tag{4.21}$$

2. Para el caso simétrico, las expresiones correspondientes a probabilidad de ruina y duración esperada no incluyen el término $s = \frac{1-p}{p}$, se llega así a

$$\lim_{a\to\infty} u_k = \lim_{a\to\infty} \frac{a-k}{a} = \lim_{a\to\infty} \left(1 - \frac{k}{a}\right) = 1. \tag{4.22}$$

$$\lim_{a\to\infty} d_k = \lim_{a\to\infty} a(a-k) = \lim_{a\to\infty} ak - k^2 = \infty. \tag{4.23}$$

3. Por último, tener $p > 0.5$, implica que, $s > 1$ y como consecuencia se llega a

$$\lim_{a\to\infty} u_k = \lim_{a\to\infty} \frac{s^k - s^a}{1 - s^a} = s^k. \tag{4.24}$$

$$\lim_{a\to\infty} d_k = \lim_{a\to\infty} \frac{a(a-s^k)}{(1-2p)(1-s^a)} + \frac{k}{1-2p} = \infty. \tag{4.25}$$

□

En la parte uno de la proposición anterior, la ruina es segura y la duración esperada queda determinada por una expresión que depende de k y p, esta aumenta conforme el capital inicial es mayor, sin embargo, el crecimiento se acentúa más conforme la probabilidad de ganar en cada ronda se aproxima 0.5.

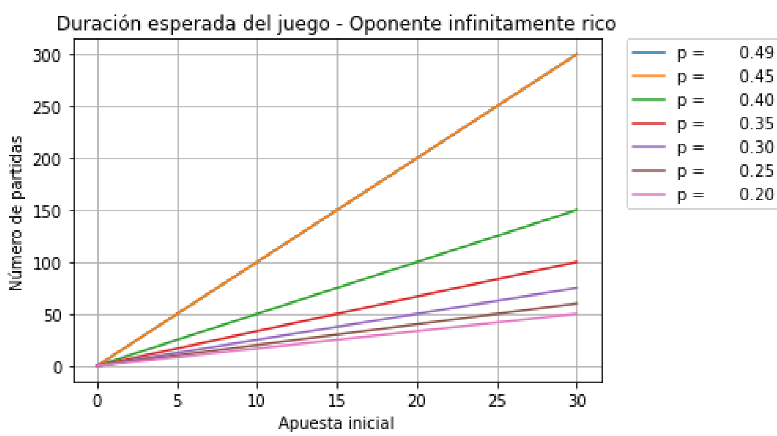

Figura 4.4: Duración del juego para distintos valores de $p < \frac{1}{2}$ y de k.

Para el caso simétrico la ruina también es segura, pero la duración esperada para $p \geq 0.5$ es infinita. Además para el tercer caso, la probabilidad de ruina no es igual a 1, esto quiere decir que no hay certeza de que el jugador A pierda todo, sin embargo, tampoco es posible ganar todo el capital del oponente porque este es infinito. Como se dijo al inicio de esta sección hay un único estado absorbente, si la probabilidad de ruina para los casos en que p es mayor que 0.5 es igual a s^k, entonces $1 - s^k$ es la probabilidad de que para una caminata aleatoria con los parámetros $p > 0.5$, $X_0 = k$, jamás se alcance el único estado absorbente. En el contexto del problema de la ruina del jugador, esto significa jugar infinitamente. La probabilidad de ruina disminuye conforme el capital inicial aumenta, pero la disminución es más acentuada conforme la probabilidad de perder en cada ronda rebasa a 0.5, como se ve en la Figura 4.5.

En la Figura 4.6 se representa el desarrollo del juego para valores de p en cada uno de los tres casos, las trayectorias en colores más ténues son para reflejar la representatividad de las trayectorias de color más intenso. Puede verse que para los casos $p \geq 0.5$ el juego aún no termina luego de 200 partidas.

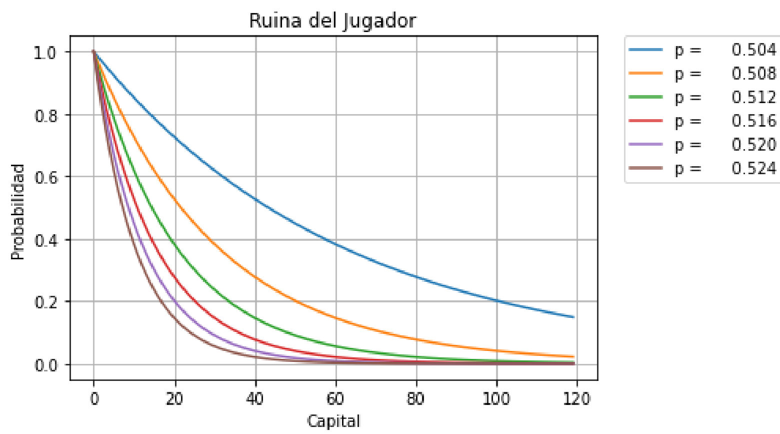

Figura 4.5: Probabilidad de quedar arruinado para distintos valores de $p > \frac{1}{2}$ y de k.

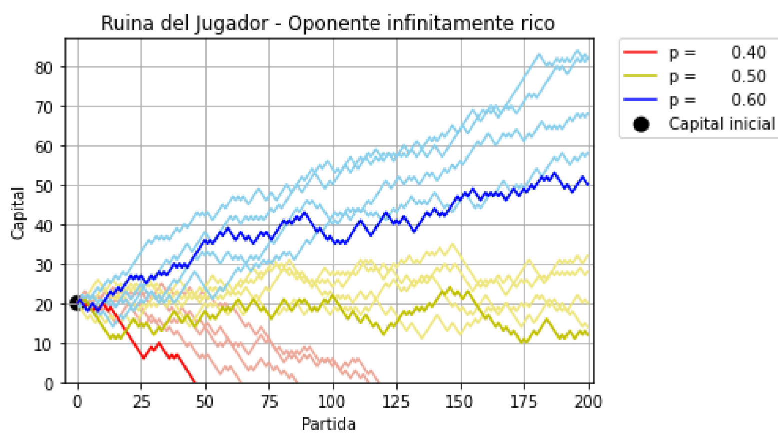

Figura 4.6: Desarrollo del juego para distintos valores de p cuando se inicia con un capital de 20 undiades.

4.3. Simulación del problema clásico y su variante

A continuación se presentan los algoritmos empleados para simular las dinámicas de juego para la versión clásica y para la variante con un oponente infinitamente rico. Así como los resultados de su implementación en el lenguaje de programación Python.

Para la versión clásica del problema de la ruina del jugador, se vió que, el modelo corresponde a una caminata aleatoria con espacio de estados finito, $\{0, \ldots, a\}$, con dos estados absorbentes $\{0, a\}$ que parte de un estado k ($X_0 = k$) y que su transición entre estados en un paso queda definida por(4.1), por lo que su desarrollo depende de tres parámetros, k: capital inicial, a: capital total y p: probabilidad de ganar en cada ronda, en lo que sigue, estos parámetros se denotarán como $capI$,$capT$ y p respectivamente, de igual forma, la probabiliad de ruina y la duración esperada del juego expresadas en (4.3) y (4.11), también dependen de dichos parámetros.

Algorithm 1 Ruina del jugador versión clásica

Input: $capT > 0$, $capI < capT$, $p \in (0, 1)$ ▷ capT y capI son números naturales
Output: Trayectoria, Probabilidad de ruina, Duración esperada

```
Definir valor de LimI, LimI2, LimS

function SIMULACIÓN(p, capI, capT)
    numI ← 0
    ListaD ← insertar(capI)                          ▷ Lista dinámica
    repeat
        x ← número aleatorio en (0,1)
        if x ≤ p then
            capI ← capI + 1
        else
            capI ← capI - 1
        end if
        ListaD ← Insertar(capI)
        numI ← numI + 1
        if capI = 0 ó capI = capT ó numI = LimI then
            Flag ← False
        end if
    until (Flag ≠ True)
    return(ListaD)
end function
function SIMULACIÓN2(p, capI, capT)
    numI ← 0, Registro                               ▷ Registro es un arreglo de dimensión 2
    repeat
        x ← número aleatorio en (0,1)
        if x ≤ p then
            capI ← capI + 1
        else
            capI ← capI - 1
        end if
        numI ← numI + 1
        if capI = 0 ó capI = capT ó numI = LimI2 then
            Flag ← False
        end if
    until (Flag ≠ True)
    Regisro ← capI, numI
    return(Registro)
end function

function MAIN
    Variables: Trayectoria, ProbRuina, DuraEsp
    Trayectoria = SIMULACION(p, capI, capT )
    for i = 0 hasta LimS do
        x, y ← SIMULACIÓN2(p, capI, capT)
        if x = 0 then
            ProbRuina ← ProbRuina + 1
        end if
        DuraEsp ← y
    end for
    ProbRuina ← ProbRuina/LimS
    DuraEsp ← DuraEsp/LimS
end function
```

Para la simulación de estos sistemas de juego y en general de un proceso estocástico, es necesaria una función que genere números pseudoaleatorios. En el lenguaje de programación Python, está disponible el módulo de `random` que implementa generadores de números pseudoaleatorios para varias distribuciones. Para simular las rondas se hace uso de la función básica de este módulo, la función *random*, la cuál genera uniformemente un número flotante aleatorio en el rango [0.0, 1.0). Python utiliza Mersenne Twister como generador principal [Lib/random.py, 2021]. Otro elemento secundario, pero presente en cada una de las implementaciones de los algoritmos presentados en esta sección, es el uso de listas dinámicas para almacenar el registro de las partidas del jugador A, inicializandola con el valor del capital inicial. Estas listas se conforman de nodos, los cuales se componen de forma general de dos campos, aquel que consta de los datos, para un nodo este campo puede contener uno o más datos de diferentes tipos, el otro componente de un nodo es un apuntador, este apunta al nodo siguiente en la lista, por lo que el manejo de apuntadores es necesario para los métodos de inserción de nuevos nodos y para la lectura de la lista misma, en la Figura 4.7 se muestra un esquema de una lista que consta de 3 nodos.

En las implementaciones de los algoritmos, se crean nodos donde se almacena el nuevo capital y de esa manera para cada simulación el número de elementos en la lista será el número de partidas que se requirió para acabar el juego. Para insertar un nuevo nodo se utilizó un método recursivo que busca el último elemento de la lista, es decir, el que tiene su apuntador en NULO, insertando el nuevo nodo al final de la lista. Dicho método recursivo se ve limitado por el lenguaje, es decir, hay un número límite de recursiones permitidas, en Python el límite es de 3000 por lo que, las trayectorias que se van a mostrar no podrán exceder dicho número. Simular el problema un número grande de veces permitiría hacer un cálculo de la probabilidad de ruina, como la proporción de juegos perdidos sobre el total de juegos jugados, mientras que la duración esperada se puede calcular como el promedio de las duraciones, para dichos calculos no es necesario presentar la trayectoria completa, basta con guardar la información del número de iteraciones antes de alcanzar alguna condición de paro y la condición de paro que se alcanzó. Este es el motivo por el que en el algoritmo 1 se muestran dos funciones de simulación, con una se genera la trayectoria que como usuarios nos interesa conocer y la segunda se utiliza para simular un gran número de juegos y hacer los calculos mencionados anteriormente.

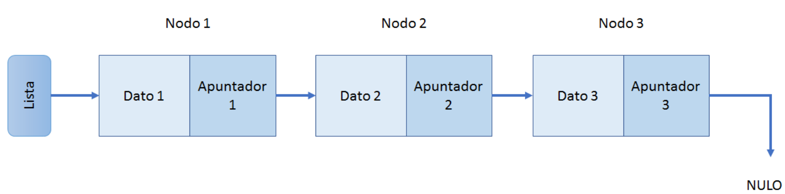

Figura 4.7: Esquema de lista dinámica con tres nodos.

En el Algoritmo 1, la función Simulación requiere de los argumentos $capI$, $capT$, p, y se inicializan las variables: $ListaD$ y $numI$ (número de iteraciones). La simulación consiste en un ciclo *"hacer mientras que"*, en cada iteración se simula el resultado del juego, posteriormente se actualizan el capital del jugador A, el registro y el número de iteraciones acumuladas para después evaluar las condiciones de paro, que consisten en: haber agotado el capital, haber alcanzado el total o bien haber llegado al límite de iteraciones permitidas, una vez alcanzada una de estas condiciones el ciclo termina, en su implementación en Python (ver Anexo) con el valor de la variable $numI$ se llena un arreglo con el desarrollo del capital y este arreglo es el que la función devuelve, en dicho arreglo está la información del número de partidas y del resultado obtenido. La función Simulación2 requiere los mismos parámetros y funciona de manera similar a la función de simulación anterior, con la diferencia de que no inicializa ni requiere de una lista dinámica, en cada iteración del ciclo *"hacer mientras que"* se actualizan las variables $capI$ y $numI$, una vez que se sale del ciclo, la función regresa únicamente el valor de estas dos variables.

A continuación se muestran los resultados de la implementación de este algoritmo en Python (ver Ánexo). Para la primera función de simulación se fijó un límite de iteraciones cercano al límite de recursividad del lenguaje, de 2900 partidas, mientras que, para la segunda función de simulación el límite considerado es de 100000. Los valores ingresados fueron: $capT = 30$, $capI = 10$ y $p = 0.52$. Esto significa que la situación simulada es aquella donde el jugador A tiene un capital inicial de 10 unidades y una probabilidad de 0.52 de ganar en cada ronda, mientras que, su oponente inicia con 20 unidades y su probabilidad de ganar en cada ronda es de 0.48. El desarrollo del capital se manda a imprimir (*Trayectoria*), así como la condición por la cual se detuvo el juego, y el número de partidas jugadas para alcanzar dicha condición de paro (*numI*). Para mostrar la trayectoria del desarrollo del capital, se hace uso de la librería `matplotlib` con la cual se generan las gráficas mostradas en las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10. De igual forma se realiza el cálculo para obtener la probabilidad de ruina y la duración esperada, al realizar 500 simulaciones.

```
10 9 10 11 10 9 10 9 10 11 10 11 12 11 12 13 12 13 12 13 14 15 16 17 16 15 16 17 18 19 18 17 18
      19 20 21 20 19 18 19 20 19 20 19 20 21 22 21 22 21 22 21 22 21 22 23 24 23 24 25 24 23 24
     23 22 21 20 19 18 19 20 21 22 21 20 19 18 17 18 19 18 19 18 19 20 21 20 21 22 23 24 25 24
     25 24 25 26 27 28 29 30

S1 : Despues de  100 partidas
     El jugador gano todo!
--------------------------------------------------
 R E S U L T A D O S
--------------------------------------------------
Luego de  500  simulaciones, con los parametros:
     Probabilidad de perder en cada ronda=  0.52
     Capital inicial=  10
     Capital total=  30
se obtuvo lo siguiente:
     Juegos perdidos=  190
     Juegos ganados=  310
     Promedio de duracion=  209.808 || Duracion esperada=    204.308
     Probabilidad de ruina (promedio)=  0.38 || Probabilidad de ruina=      0.394
```

En los resultados mostrados, puede verse que se presenta el número de jugadas realizadas hasta alcanzar el final del juego, que para esta simulación fue con la ruina del jugador B, luego de 100 partidas, ver Figura 4.8, posteriormente se presentan los resultados de la estimación de la probabilidad de ruina y duración esperada, acompañada de la obtenida por el uso de las expresiones (4.3) y (4.11). La probabilidad del jugador A de quedar arruinado con dichos parámetros es menor que 0.5, en la Figura 4.9 puede verse que para que las condiciones fueran más justas en cuanto a probabilidades de ruina, el jugador A tendría que iniciar con 7 fichas y su oponente con 23, aunque eso sea poco intuitivo. En cuanto a la duración esperada se observa que, para un juego con parámetros $p = 0.52$ y $capT = 30$ un capital inicial de 10 unidades está dentro del conjunto de aquellos valores para el capital inicial que, propician un juego más prolongado en comparación a las otras opciones de capital incial, ver Figura 4.10.

Con la expresión (4.11) se tiene un cálculo de la duración esperada, sin embargo, con las simulaciones es posible explorar como se comporta la duración de los juegos con respecto a este número. En la Figura 4.11 se tienen los resultados de implementar 1000 simulaciones del problema clásico de la ruina del jugador con los valores para $capI$, $capT$ y p usados anteriormente. El límite de iteraciones por simulación considerado fue de 1500, la duración en promedio obtenida fue de 208 juegos, en comparación a los 204 calculados con ayuda de la expresión (4.11), se observa hay similitud entre ambas cifras, sin embargo, la simulación permite observar de manera adicional la dispersión del número de rondas necesarias para terminar los juegos simulados alrededor del valor obtenido teóricamente.

Figura 4.8: Trayectoria de juego.

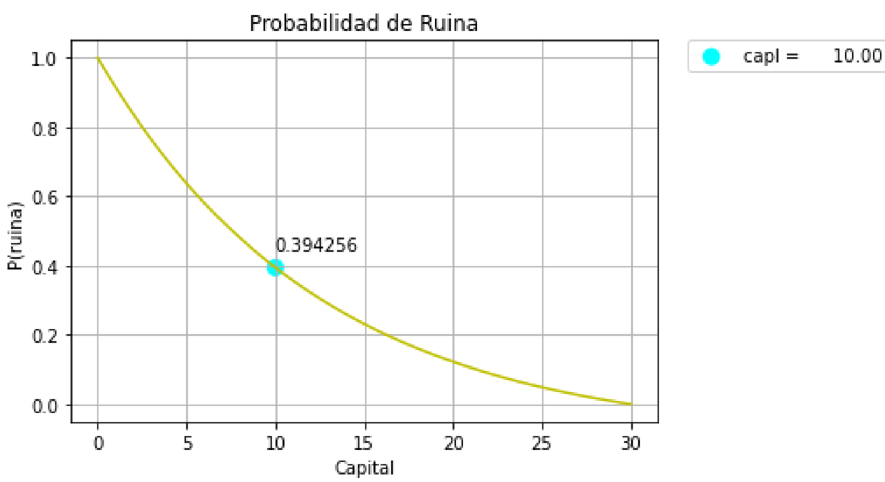

Figura 4.9: Probabilidad de ruina.

Ahora sigue la simulación del problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico, para esta versión del juego se vio que el modelo correspondiente es el de una caminata aleatoria con espacio de estados infinito numerable $\{0, 1, \ldots\}$, con únicamente un estado absorbente que corresponde al estado cero y la probabilidad de transición entre estados en un paso queda definida por (4.18), por lo que ahora solo se requieren los parámetros *capI* y p. En la Proposición 4.2.1 se obtuvo que para decir algo sobre la probabilidad de ruina y la duración esperada del juego es necesario hacer una diferencia entre tres posibles casos, cuando p es mayor, menor o igual a 0.5, para los dichos casos emplean los dos parámetros mencionados anteriormente.

Para esta versión del problema, el programa utilizado tiene una estructura similar al de la versión clásica, hay dos funciones de simulación, una para reproducir trayectorias y otra para

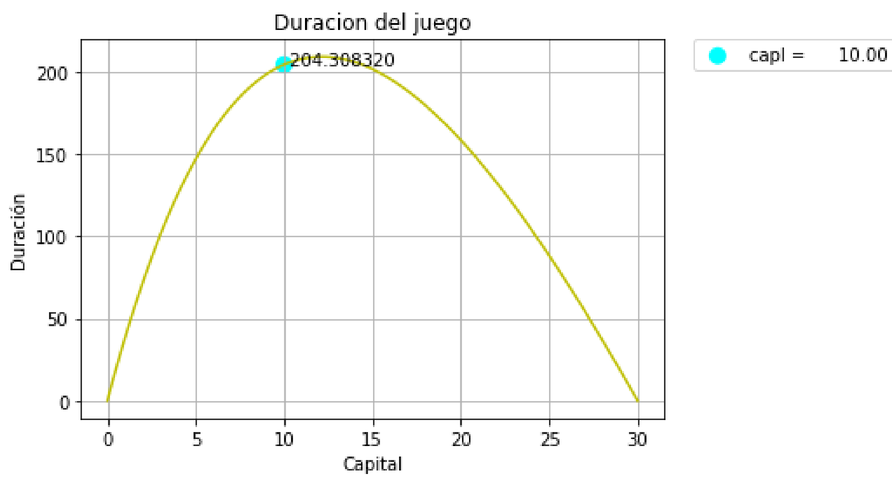

Figura 4.10: Duración esperada del juego.

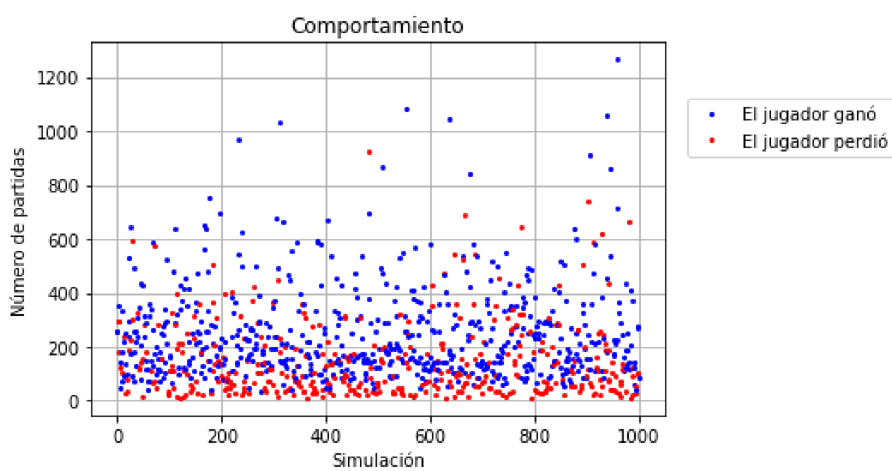

Figura 4.11: Se muestra el resultado de simular 1000 veces el problema de la ruina del jugador, siguiendo el Algoritmo 1, cada punto se ilumina de acuerdo al resultado del juego y su altura corresponde al número de partidas requeridas para llegar a dicho resultado.

hacer cálculos de la probabilidad de ruina y duración esperada, los parámetros que requieren son son p y $capI$, constan de un ciclo que se va a repetir mientras no se alcance una condición de paro, las condiciones son únicamente que, el jugador A haya quedado arruinado o bien, que se haya alcanzado un límite de iteraciones. En el Anexo puede verse que, dependiendo del caso en el que el jugador se encuentre, se presentan la probabilidad de ruina o duración esperada calculadas de acuerdo a la Proposición 4.2.1, el usuario indica el valor de la probabilidad de ganar en cada ronda, el capital inicial y el número de trayectorias que desea ver, lo que corresponde a un número de simulaciones determinado para esos parámetros. Los resultados de algunas simulaciones se presentan en las Figuras 4.12, 4.13 y 4.14 así como en las cajas grises.

Algorithm 2 Ruina del Jugador con un Oponente Infinitamente Rico.

Input: $p, capI > 0$
Output: Trayectoria, Probabilidad de ruina, Duración esperada

```
Definir valor de LimI, LimI2, LimS

function Simulación(p, capI)
    numI ← 0
    ListaD ← insertar(capI)                          ▷ Lista dinámica
    repeat
        x ← número aleatorio en (0,1)
        if x ≤ p then
            capI ← capI + 1
        else
            capI ← capI - 1
        end if
        ListaD ← Insertar(capI)
        numI ← numI + 1
        if capI = 0 ó numI = LimI then
            Flag ← False
        end if
    until (Flag ≠ True)
    return(ListaD)
end function
function Simulación2(p, capI)
    numI ← 0, Registro                    ▷ Registro es un rreglo de dimensión 2
    repeat
        x ← número aleatorio en (0,1)
        if x ≤ p then
            capI ← capI + 1
        else
            capI ← capI - 1
        end if
        numI ← numI + 1
        if capI = 0 ó numI = LimI2 then
            Flag ← False
        end if
    until (Flag ≠ True)
    Regisro ← capI, numI
    return(Registro)
end function

function main
    Variables: Trayectoria, ProbRuina, DuraEsp
    Trayectoria = Simulacion(p, capI )
    for i = 0 hasta LimS do
        x, y ← Simulación2(p, capI)
        if x = 0 then
            ProbRuina ← ProbRuina + 1
        end if
        DuraEsp ← y
    end for
    ProbRuina ← ProbRuina/LimS
    DuraEsp ← DuraEsp/LimS
end function
```

Para el primer caso, se ingresó un valor de p igual a 0.47 y un capital inicial igual a 25 y se indicó mostrar 5 trayectorias, con ello se obtuvo lo siguiente.

```
S 1 : Despues de  279 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 2 : Despues de  329 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 3 : Despues de  109 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 4 : Despues de  313 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 5 : Despues de  525 partidas
      El jugador quedo arruinado!
                          R E S U L T A D O S
//////////////////////////////////////////////////////////////
Luego de  500  simulaciones, con los parametros:
      Probabilidad de perder en cada ronda=  0.47
      Capital inicial=  25
se obtuvo lo siguiente:
      Juegos perdidos=  500
      Juegos no terminados=  0 (limite de iteraciones:  500000  )
      Promedio de duracion=  442.888 || Duracion esperada = 416.667
      Probabilidad de ruina=  1.0
```

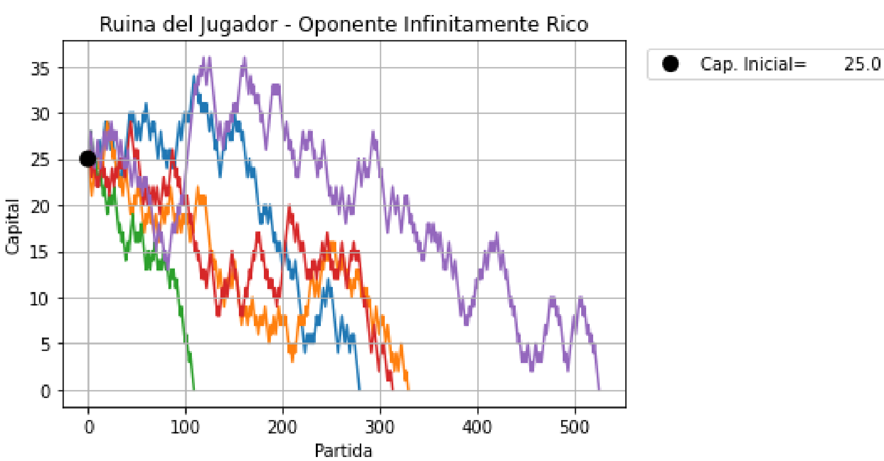

Figura 4.12: Simulación del problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico para el caso $p < 0.5$.

En la Figura 4.12 se aprecia como se alcanza el estado cero en todas las trayectorias, para algunas de ellas se tiene que, el capital del jugador en las primeras partidas logra rebasar por unas cuantas unidades su capital inicial para después comenzar a descender, esto tiene relación con el problema clásico en aquellos escenarios en que la probabilidad de ganar es menor que 0.5, en el sentido de que, en los casos en que se inicia con la gran mayoría del capital en juego se observa que la probabilidad de ruina deja de ser tan cercana a uno. Es decir, que si se tiene una probabilidad desfavorable de ganar partida por partida, este hecho se podría compensar sí solo fuese necesario ganar un par de unidades a su oponente para arruinarlo. Y esto también tiene relación con el hecho de que para los casos en que la probabilidad de ruina es más cercana a cero o a uno la duración es menor en comparación a los casos en que esta probabilidad se encuentra más próxima a 0.5.

Para el caso simétrico, es decir, cuando se tiene que $p = 0.5$, no se consideran funciones para calcular la probabilidad de ruina o la duración esperada, ya que, como resultado de la Proposición

4.2.1, la ruina es segura y la cantidad de juegos esperados es infinita. En la Figura 4.13 se muestra el resultado de su implementación, en el que se indicó mostrar cinco trayectorias de la simulación, con un capital inicial de 20 fichas o unidades. Se aprecian trayectorias que alcanzaron el estado cero, pero otras continúan incluso con ciertas ganancias acumuladas, sin embargo, esto último para el jugador A solo representa que tendrá que jugar más tiempo hasta llegar al estado absorbente.

```
S 1 : El juego aun no ha terminado
S 2 : Despues de  1594 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 3 : Despues de  522 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 4 : El juego aun no ha terminado
S 5 : Despues de  1668 partidas
      El jugador quedo arruinado!
                     R E S U L T A D O S
///////////////////////////////////////////////////////////////
Luego de  500  simulaciones, con los parametros:
     Probabilidad de perder en cada ronda=  0.5
     Capital inicial=  20
se obtuvo lo siguiente:
     Juegos perdidos=  482
     Juegos no terminados=  18 (limite de iteraciones:  500000  )
     Promedio de duracion=  28082.516
     Probabilidad de ruina=  0.964
```

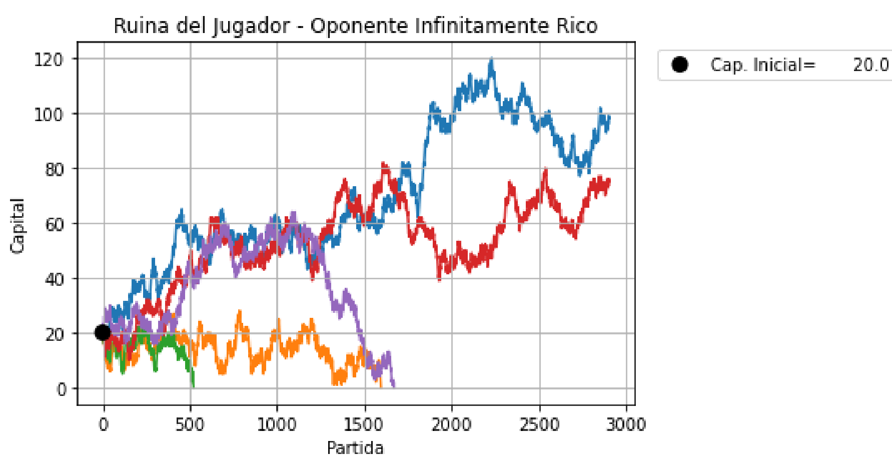

Figura 4.13: Simulación $p = 0.5$.

Si bien las trayectorias presentadas no rebasan las 3000 partidas, con la segunda función simulación se rebasa este límite, se considera uno de 500000 partidas, sin embargo, como puede verse en la caja gris, de 500 simulaciones aún hubo 18 juegos simulados que, después de ese número de partidas, no habían terminado, por esta razón, la probabilidad de ruina calculada como una proporción entre juegos perdidos y juegos jugados es menor que uno y la duración esperada, calculada como un promedio, es un determinado número, sin embargo, se tiene la certeza de que al seguir jugando, eventualmente el jugador A quedará arruinado.

Por último se muestran los resultados para el caso en que la probabilidad de ganar en cada ronda es mayor que 0.5. En la Figura 4.14 se muestran cinco trayectorias correspondientes a $p = 0.515$, todas partiendo de un mismo capital inicial de 5 unidades. Tomar en cuenta un capital inicial menor en comparación a las simulaciones anteriores es para ver que el considerar p mayor que 0.5, se traduce para las simulaciones como una tendencia creciente, aún partiendo de un capital pequeño. Como resultado de la tercera parte de la Proposición 4.2.1 se sabe que la ruina no es segura y que queda determinada por (4.24) que depende de la probabilidad de ganar en cada ronda y del capital inicial, por lo que se muestra al usuario este cálculo, junto con el promedio de juegos perdidos.

```
S 1 : El juego aun no ha terminado
S 2 : El juego aun no ha terminado
S 3 : Despues de  17 partidas
      El jugador quedo arruinado!
S 4 : El juego aun no ha terminado
S 5 : El juego aun no ha terminado
                     R E S U L T A D O S
///////////////////////////////////////////////////////////////
Luego de  500  simulaciones, con los parametros:
     Probabilidad de perder en cada ronda=  0.53
     Capital inicial=  5
se obtuvo lo siguiente:
     Juegos perdidos=  270
     Juegos no terminados=  230 (limite de iteraciones:  500000  )
     Promedio de duracion=  230034.112
     Probabilidad de ruina (proporcion)=  0.54 || Probabilidad de ruina=  0.5484157788376737
```

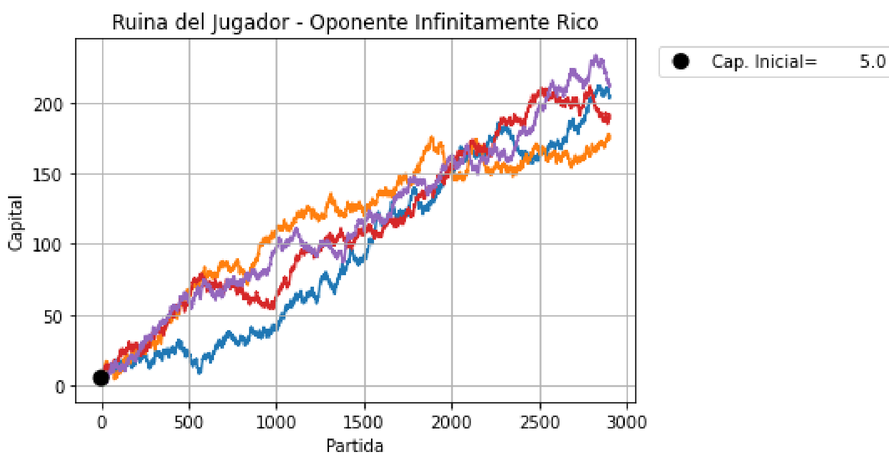

Figura 4.14: Simulación $p > 0.5$.

En la caja gris se puede ver que para 500 simulaciones, 270 concluyeron con la ruina del jugador A, pero 230 aún no habían terminado luego de 500000 partidas, pero, a diferencia del caso simétrico, la ruina podría no ocurrir, porque el capital sigue creciendo.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudió al problema de la ruina del jugador en su versión clásica y en su versión con un oponente infinitamente rico como caminatas aleatorias, las cuales son un caso particular de las cadenas de Márkov. Las caminatas aleatorias que modelan el desarrollo del capital del jugador A están basadas en la suma de variables aleatorias $\{\xi_i, i \geq 1\}$. Donde cada una de dichas variables toma valores 1 con probabilidad $p \in (0,1)$ y -1 con probabilidad $1-p$. Las condiciones del juego dan como resultado las características particulares de estas cadenas. Para la versión clásica el conjunto de estados es finito $\{0, \ldots, a\}$ donde a representa el capital total. Se sabe que una cadena de Márkov con espacio de estados finito tiene al menos un estado recurrente, para este modelo los estados recurrentes consisten en los dos estados absorbentes los cuales representan el término del juego, es decir, cuando se ha perdido todo (estado cero) o cuando se ha ganado el total del capital en juego (estado a). Para el problema con un oponente infinitamente rico se tiene que el espacio de estados deja de ser finito, ya que el capital en juego es la suma del capital de ambos jugadores. En una cadena de este tipo no se asegura algo al respecto de los estados recurrentes, para esta versión se pasa de tener dos, a tener un único estado absorbente, que es el que representa quedar arruinado, esta se convierte así en la única condición en que el juego puede terminar.

El comportamiento de estas caminatas depende de los valores de p, del capital con que inicia el jugador A ya que es el estado inicial y para la versión clásica también del capital total que determina el número de estados en que puede variar el proceso además de que por si mismo consiste en otro estado absorbente. Simular la dinámica de juego reproduciendo las trayectorias que definen para ambas versiones y para distintos casos, permitió comprender mejor la forma en que influyen dichos parámetros. Para la versión clásica se vió que al tener un capital en juego de 30 unidades, las probabilidades de quedar arruinado se aproximan mucho a cero o a uno para la mayoría de valores que puede tomar el capital inicial del jugador A cuando p se encuentra fuera del intervalo $(0.4, 0.6)$, sin embargo, al aumentar el número de unidades en juego este intervalo deja de ser útil para identificar los valores de p que generan una probabilidad de ruina menos marcada y se hace necesario fijar límites más próximos a 0.5, si se desea identificar un intervalo en que las probabilidades de ruina propicien un juego más interesante para la mayoria de opciones de capital inicial. Por otro lado, para la versión con un oponente infinitamente rico, en el caso simétrico se observó como el desarrollo del capital del jugador parece ir oscilando y conforme mayor es el capital inicial más se prolonga la trayectoria hasta alcanzar el estado absorbente.

La duración esperada del juego es en realidad el tiempo promedio en que se espera hacer la primera llegada a alguno de los estados absorbentes. La forma en que se resolvió puede ser sustituida planteando y dando solución a ecuaciones en diferencia de segundo orden no homogeneas. Se pudo observar que, para la versión clásica con a unidades en juego, la duración esperada alcanza su máximo valor cuando ambos jugadores inician con la misma cantidad de fichas $a/2$ y tienen las mismas probabilidades de ganar partida a partida, es decir 0.5. La implementación del Algoritmo 1 permitió comparar el valor que regresa la expresión (4.3) con la información estimada luego de muchas simulaciones, donde se verificó que en promedio la duración esperada coincide con el valor calculado, pero además permitieron hacer observaciones sobre el nivel de dispersión entre las duraciones que tuvieron las simulaciones.

Para hacer conclusiones sobre la probabilidad de ruina o la duración esperada para el problema del jugador con un oponente infinitamente rico se ve como a diferencia de la versión clásica no se hace solo una distinción entre el caso simétrico y asimétrico, sino que es necesario diferenciar los casos en que p es menor o mayor que 0.5, las simulaciones ayudan mucho a entender como para este último caso hay una probabilidad positiva de no alcanzar el estado absorbente, es decir, de no perderlo todo, ya que las trayectorias que se aprecian por ejemplo en la Figura 4.14 tienen una tendencia ascendente, entonces, se ve que no hay forma de llegar así al estado cero.

La importancia de revisar estos problemas con la teoría de caminatas aleatorias y con ello de cadenas de Márkov consiste en que las preguntas sobre la probabilidad de ruina y la duración del juego para ambas versiones, corresponden a estudiar, que se espera de la caminata aleatoria, el que alcance algún estado absorbente y si es así eso cuanto podría demorar. Los procesos estocásticos permiten precisamente estudiar sobre lo que se espera para un sistema que evoluciona de forma aleatoria a largo plazo, o como cambia este modificando ciertos parámetros.

Como trabajo a futuro se plantea el poder estudiar versiones diferentes de este problema, como el caso de un oponente generoso, esta versión consistiría en que el oponente, el jugador B le ceda una unidad al jugador A, en cada ocasión que este haya perdido todo su capital. Para ello se propone emplear resultados más avanzados, como los correspondientes a la teoría ergódica.

Anexos

Apéndice A

Anexo: Códigos en Python

En lo que sigue se muestra la implementación de los algortimos mostrados en la última sección del Capítulo 4, en el lenguaje de programación Python.

Problema de la ruina del jugador clásico.

Implementación de Algoritmo 1. Ruina del jugador versión clásica.

```
# -*- coding: utf-8 -*-

import matplotlib.pyplot as plt
import random as rnd

# El primer l mite es para la rutina de simulaci n que muestra
    trayectorias y
# por lo tanto se hace uso de listas din micas , el segundo es para una
    simulaci n
# que no est  sujeta al l mite de recursividad (3000), por eso es m s
    grande.

Lim_iteraciones1= 2900
Lim_iteraciones2 = 100000

# Para la lista din mica se define la clase nodo y el m todo insertar el
    cu l es
# recursivo.

class nodo():
    def __init__ (self,dato):
        self.sig = None
        self.dato = dato
def inserta (inicio, nodo):
    if (inicio.sig == None):
        inicio.sig = nodo
    else:
        p = inicio.sig
        inserta(p,nodo)

# La primera funci n simulaci n es para presentar las trayetorias que
```

```
    describen el
# comportamiento de la caminata aleatoria, se ingresan los par metros que
    definen
# a dicha caminata y se regresa un arreglo con el desarrollo que tuvo el
    juego.

def simulacion (p, capI, capT):
    flag = True
    cap0 = capI
    path = nodo(cap0)
    numI = 0
    while (flag == True):
        r = rnd.random()
        if (r <= p):
            capI = capI + 1
        else:
            capI = capI - 1
        inserta(path, nodo(capI))
        numI = numI + 1
        if (capI == 0   or  numI == Lim_iteraciones1 or capI == capT):
            flag = False

    tryc = [0]*(numI+1)
    n = path
    for i in range (numI+1):
        tryc[i] = n.dato
        n = n.sig

    return(tryc)

# En la segunda funci n de simulaci n solo se requiere conocer cuantas
    rondas
# fueron necesarias para terminar el juego, por lo que se ingresan los tres
# par metros que definen la caminata, pero se regresa  nicamente  un
    arreglo de
# longitud dos con la informaci n mencionada.

def simulacion2 (p, capI, capT):
    flag = True
    numI = 0
    while (flag == True):
        r = rnd.random()
        if (r <= p):
            capI = capI + 1
        else:
            capI = capI - 1
#          inserta(path, nodo(capI))
        numI = numI + 1
        if (capI == 0   or  numI == Lim_iteraciones2 or capI == capT):
            flag = False

    tryc = [0]*2
    tryc[0] = numI
    tryc[1] = capI

    return(tryc)
```

```

# Para el problema cl sico se deducen expresiones con las que se calcula la
# probabilidad de ruina y la duraci n esperada, se declaran para poder apreciar
# el valor num rico que devuelven con respecto al obtenido de las simulaciones
# para cada ejecuci n.

def p_ruina(p, capI, capT):
    if p == 0.5:
        result = 1 - (capI)/(capT)
    else:
        result = 1 - ((1 - ((1-p)/p)**capI)/(1 - ((1-p)/p)**capT))
    return result

def duracion(p, capI, capT):
    if p == 0.5:
        result = capI*(capT-capI)
    else:
        result = (1/(1-2*p))*(capI - capT * ((1 - ((1-p)/p)**capI)/(1 - ((1-p)/p)**capT)))
    return result

# Siguen los par metros que el usuario debe ingresar
print("----------------------------------------------------------")
print("-------------Problema de la Ruina del Jugador -------------")
print("---------------- B I E N V E N I D O  ---------------------")
p = float(input("Probabilidad de ganar en cada ronda (p) = "))
capI = int(input("Capital inicial (capI) = "))
capT = int(input("Capital total (capT) = "))
numT = int(input(" N mero de trayectorias a mostrar = "))


# El ciclo que sigue manda a llamar a la funci n simular de acuerdo al n mero
# de trayectorias que el usuario espec fico, despu s siguen las instrucciones
# para imprimirlas en un gr fico.

for i in range (numT):
    trayectoria = simulacion(p, capI, capT)
    numRondas = len(trayectoria) - 1
    print("S",i+1,": Despu s de ",numRondas,"partidas")
    if (trayectoria[numRondas]==0):
        print("      El  jugador qued  arruinado!","\U0001F635","\U0001F641")
    else:
        print("      El  jugador gan  todo!","\U0001F603","\U0001F601")

    plt.plot(trayectoria, zorder=1)

plt.grid()
plt.title("Ruina del jugador")
plt.xlabel("Partida")
plt.ylabel("Capital")
```

```
plt . scatter (0, capI , c='black', edgecolors ='none', s=100 , label = 'Cap. Inicial= {0:10.1f}'.format(capI), zorder=2)
plt . legend ( bbox_to_anchor =(1.04 , 0.98) , loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.show()

# Despu s est n las simulaciones secundarias que no se presentan al usuario
# est s son  nicamente  para hacer los promedios que aproximen la probabilidad
# de ruina y la duraci n del juego.

numSim = 500
jperdido = 0
jnperdido = 0
promD = 0
for i in range (numSim):
    trayectoria = simulacion2(p, capI, capT)
    numJ = trayectoria[0]
    if(trayectoria[1]==0):
        jperdido = jperdido + 1
    else:
        jnperdido = jnperdido + 1

    promD = promD + numJ

promD = promD/numSim
promR = jperdido/numSim
promNR = jnperdido/numSim
Ruina = ((1-p)/(p))**capI

# Finalmente se presentan los resultados de estos c lculos.

print("                    R E S U L T A D O S")
print("////////////////////////////////////////////////////////////////")
print("Luego de ", numSim, " simulaciones, con los par metros:")
print("     Probabilidad de perder en cada ronda= ",p)
print("     Capital inicial= ",capI)
print("     Capital total= ",capT)
print("se obtuvo lo siguiente:")
print("     Juegos perdidos= ", jperdido)
print("     Juegos ganados= ", jnperdido)
print("     Promedio de duraci n= ", promD, "|| Duraci n esperada= {0:10.3f}".format(duracion(p, capI, capT)))
print("     Probabilidad de ruina (proporci n)= ", promR, "|| Probabilidad de ruina= {0:10.3f}".format(p_ruina(p, capI, capT)) )
```

Problema de la ruina del jugador con un oponente infinitamente rico.

Implementación de Algoritmo 2. Ruina del jugador versión oponente infinitamente rico.

```
# -*- coding: utf-8 -*-

import matplotlib.pyplot as plt
import random as rnd
```

```

# El primer l mite es para la rutina de simulaci n que muestra
    trayectorias y
# por lo tanto se hace uso de listas din micas , el segundo es para una
    simulaci n
# que no est  sujeta al l mite de recursividad, por eso es m s grande.

Lim_iteraciones1= 2900
Lim_iteraciones2 = 500000

# Para la lista din mica se define la clase nodo y el m todo insertar el
    cu l es
# recursivo.

class nodo():
    def __init__ (self,dato):
        self.sig = None
        self.dato = dato
def inserta (inicio, nodo):
    if (inicio.sig == None):
        inicio.sig = nodo
    else:
        p = inicio.sig
        inserta(p,nodo)

# La primera funci n simulaci n es para presentar las trayetorias que
    describen el
# comportamiento de la caminata aleatoria, se ingresan los par metros que
    definen
# a dicha caminata y se regresa un arreglo con el desarrollo que tuvo el
    juego.

def simulacion (p, capI):
    flag = True
    cap0 = capI
    path = nodo(cap0)
    numI = 0
    while (flag == True):
        r = rnd.random()
        if (r <= p):
            capI = capI + 1
        else:
            capI = capI - 1
        inserta(path, nodo(capI))
        numI = numI + 1
        if (capI == 0  or  numI == Lim_iteraciones1):
            flag = False

    tryc = [0]*(numI+1)
    n = path
    for i in range (numI+1):
        tryc[i] = n.dato
        n = n.sig

    return(tryc)

```

```
# En la segunda funci n de simulaci n solo se requiere conocer cuantas rondas
# fueron necesarias para terminar el juego, por lo que se ingresan los tres
# par metros que definen la caminata, pero se regresa  nicamente  un arreglo de
# longitud dos con la informaci n mencionada.

def simulacion2 (p, capI):
    flag = True
    numI = 0
    while (flag == True):
        r = rnd.random()
        if (r <= p):
            capI = capI + 1
        else:
            capI = capI - 1
#          inserta(path, nodo(capI))
        numI = numI + 1
        if (capI == 0   or  numI == Lim_iteraciones2):
            flag = False

    tryc = [0]*2
    tryc[0] = numI
    tryc[1] = capI

    return(tryc)

# Siguen los par metros que el usuario debe ingresar
print("-----------------------------------------------------------")
print("---Ruina del Jugador con un Oponente Infninitamente Rico---")
print("---------------- B I E N V E N I D O  --------------------")
print("\nIngrese los valores de los siguientes par metros:")


p = float(input("Probabilidad de ganar en cada partida (p) = "))
capI = int(input("Capital inicial (capI) = "))
numT = int(input("N mero de trayectorias a mostrar = "))

# El ciclo que sigue manda a llamar a la funci n simular de acuerdo al n mero
# de trayectorias que el usuario espec fico, despu s siguen las instrucciones
# para imprimirlas en un gr fico.


for i in range (numT):
    trayectoria = simulacion(p, capI)
    numRondas = len(trayectoria) - 1
    if (trayectoria[numRondas]==0):
        print("S",i+1,": Despu s de ",numRondas,"partidas")
        print("      El  jugador qued  arruinado!","\U0001F635","\U0001F641")
    else:
        print("S",i+1,": El juego a n no ha terminado","\U0001F635")
    plt.plot(trayectoria, zorder = 1)
```

```
plt.grid()
plt.xlabel("Partida")
plt.ylabel("Capital")
plt.title("Ruina del Jugador - Oponente Infinitamente Rico")
plt.scatter (0, capI , c='black', edgecolors ='none', s=100 , label = 'Cap. Inicial= {0:10.1f}'.format(capI), zorder = 2)
plt.legend ( bbox_to_anchor =(1.04 , 0.98) , loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.show()

# Despu s est n las simulaciones secundarias que no se presentan al usuario
# est s son  nicamente  para hacer los promedios que aproximen la probabilidad
# de ruina y la duraci n del juego.

numSim = 500
jperdido = 0
jnperdido = 0
promD = 0
for i in range (numSim):
    trayectoria = simulacion2(p, capI)
    numJ = trayectoria[0]
    if(trayectoria[1]==0):
        jperdido = jperdido + 1
    else:
        jnperdido = jnperdido + 1

    promD = promD + numJ

promD = promD/numSim
promR = jperdido/numSim
promNR = jnperdido/numSim


# Finalmente se presentan los resultados de estos c lculos.
print("                     R E S U L T A D O S")
print("/////////////////////////////////////////////////////////////////")
print("Luego de ", numSim, " simulaciones, con los par metros:")
print("     Probabilidad de perder en cada ronda= ",p)
print("     Capital inicial= ",capI)
print("se obtuvo lo siguiente:")
print("     Juegos perdidos= ", jperdido)
print("     Juegos no terminados= ", jnperdido, "(l mite de iteraciones: ",Lim_iteraciones2," )")
if (p < 0.5):
    Duracion = capI/(1-(2*p))
    print("     Promedio de duraci n= ", promD, "|| Duraci n esperada = {0:10.3f}".format(Duracion))
    print("     Probabilidad de ruina= ", promR)

elif (p > 0.5):
    Ruina = ((1-p)/(p))**capI
    print("     Promedio de duraci n= ", promD)
    print("     Probabilidad de ruina (proporci n)= ", promR, "|| Probabilidad de ruina= ",Ruina )
```

```

else:
    print("     Promedio de duraci n= ", promD)
    print("     Probabilidad de ruina= ", promR)
```

Bibliografía

[Basulto and Pérez,] Basulto, J. and Pérez, M. D. La resolución de montmort (1708, 1713) de los cinco problemas propuestos por huygens en su tratado (1657). *IV Congreso Internacional de Historia de la Estadístico y de la Probabilidad*, pages 407–420.

[Feller and Higgins, 1957] Feller, W. and Higgins, E. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* John Wiley and Sons, Nueva York, EUA.

[Gallager, 2013] Gallager, R. G. (2013). *Stochastic Processes: Theory for Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

[González, 2018] González, M. P. (2018). *Un espacio de Variables Aleatorias Normado: Bajo una Medida de Dispersión.* PhD thesis, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

[Hoel et al., 1972] Hoel, P. G., Port, S. C., and Stone, C. J. (1972). *Introduction to Stochastic Processes.* Houghton Mifflin, Los Ángeles, California, EUA.

[Lib/random.py, 2021] Lib/random.py (2021). random - generar números pseudoaleatorios. Último acceso 14 de septiembre de 2021
URL: https://docs.python.org/es/3/library/random.html.

[Peter W. Jones, 1957] Peter W. Jones, P. S. (1957). *Stochastic Processes An Introduction.* CRC Press, Florida, EUA.

[Rincón, 2007] Rincón, L. (2007). *Curso Intermedio de Probabilidad.* Facultad de Ciencias UNAM, CDMX, México.

[Rincón, 2012] Rincón, L. (2012). *Introducción a los Procesos Estocásticos.* Facultad de Ciencias UNAM, CDMX, México.

[Ross, 1997] Ross, S. M. (1997). *A First Course in Probability.* Prentince Hall, New Jersey, EUA.

[Telcs, 2006] Telcs, A. (2006). *The art of Random Walks.* Springer, Budapest, Hungría.