BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CONJUNTOS FRACTALES AUTOSIMILARES Y EL OPERADOR DE HUTCHINSON

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

MARÍA CRISTINA CID ZEPEDA

DIRECTORES DE TESIS

GERMÁN AUBIN ARROYO CAMACHO

JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

PUEBLA, PUE.

16 de noviembre del 2012.

”La imaginación
es más importante
que el conocimiento.”
-Albert Einstein-

Agradecimientos

Agradezco de manera especial a mis padres por el amor, la educación y el apoyo que me han brindado.

A mi hermano por sus consejos, por los buenos y malos ratos.

Agradezco también al Dr. Germán Aubin Arroyo Camacho y al M.C. Juan Francisco Estrada García por asesorarme en el desarrollo de esta tesis. En particuar al Dr. Germán Aubin Arroyo Camacho le agradezco la paciencia y el tiempo dado y todo lo aprendido bajo su dirección.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres y al Dr. Agustín Contreras Carreto por haber aceptado ser mis sinodales, por sus observaciones y correcciones a esta tesis.

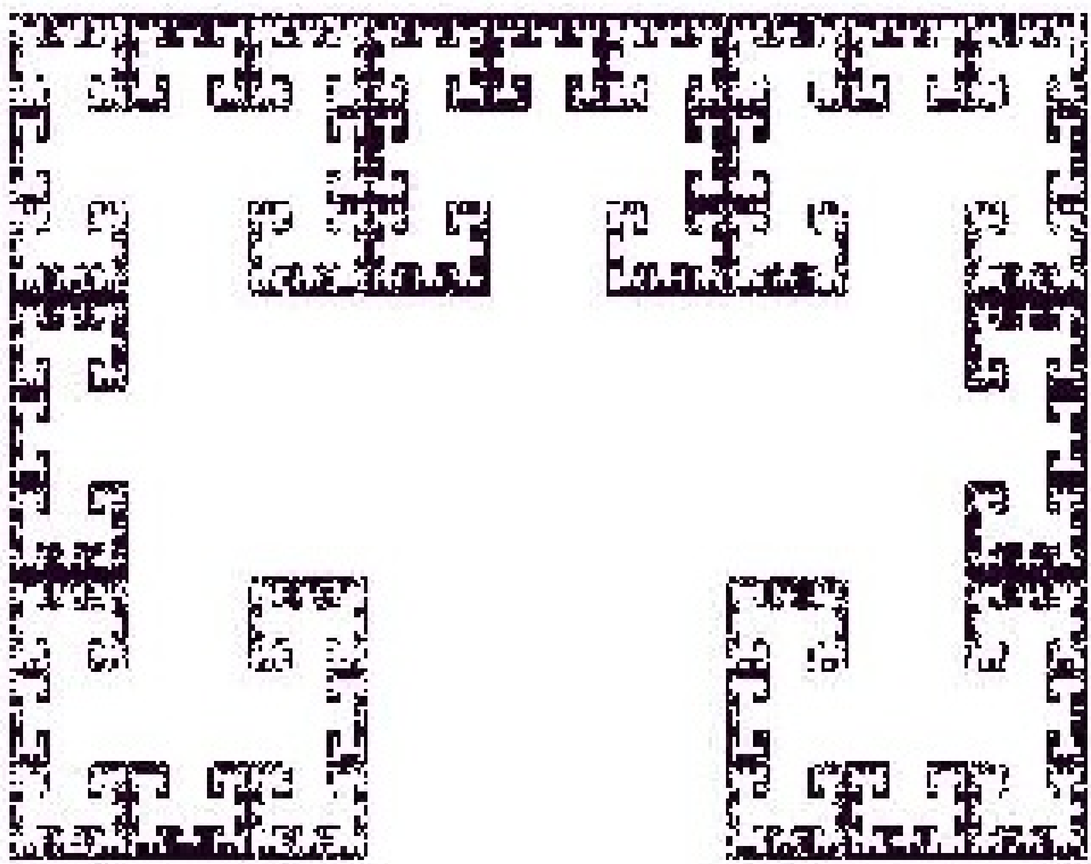
A Jacob, Giovana, Delia, Aida, Fiorela, Agustín, Rafa y al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por el tiempo regalado, por su amistad, sus consejos y su apoyo.

Al CONACyT por el apoyo para realizar mi tesis a través del proyecto CB2010/153850 *Semigrupos en dinámica holomorfa: Representaciones, deformaciones y cirugía casi conforme*.

A la DGAPA por el apoyo para realizar mi tesis a través del proyecto IN108111 *Singularidades Locales en Superficies Complejas*.

Finalmente a todos los que conocí mientras realicé mis estudios de licenciatura y compartieron parte de su vida conmigo.

Índice general



Capítulo 1

Introducción

Subconjuntos del plano como el conjunto de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski son objetos geométricos conocidos como fractales. El término *fractal* fue propuesto por Mandelbrot en 1975 y proviene del latín *fractus*, que significa fracturado, fragmentado, roto o quebrado. Este término hace referencia a que son objetos que cuentan con una estructura bastante irregular, a diferencia, por ejemplo, de un círculo que es una curva suave.

Comenzaremos construyendo el triángulo de Sierpinski. Tomemos un triángulo equilátero junto con su interior. Marcamos los puntos medios de cada lado y los unimos con un segmento de recta. Al unir los puntos medios nos queda un triángulo equilátero invertido inscrito en el triángulo original. El triángulo invertido lo «recortamos» de la figura original, por tanto nos quedan 3 triángulos equiláteros, donde cada uno toca a los otros 2 en uno de sus vértices. Ahora repetimos el proceso en cada uno de los 3 triángulos obtenidos, es decir, esta vez en cada uno de los triángulos marcamos los puntos medios de sus lado; en cada triángulo unimos con un segmento los puntos medios de sus lados. El resultado son 3 triángulos equiláteros invertidos, cada uno inscrito en uno de los triángulos. Los 3 triángulos invertidos los «recortamos». El resultado son 9 triángulos. Repitiendo el proceso una vez más en cada uno de los 9 triángulos, recortaremos 9 triángulos invertidos. El triángulo de Sierpinski se obtiene después de repetir este proceso infinitas veces, ver Figura 1.1.

Denotemos al triángulo de Sierpinski por T. Obsérvese que T está formado por 3 copias reducidas en factor de $\frac{1}{2}$ y la traslación de estas copias, ver Figura 3.3. Si denotamos estas tres transformaciones como S_1, S_2 y S_3, entonces T es invariante respecto a la unión de estas transformaciones, es decir:

$$T = \cup_{i=1}^{n} S_i(T).$$

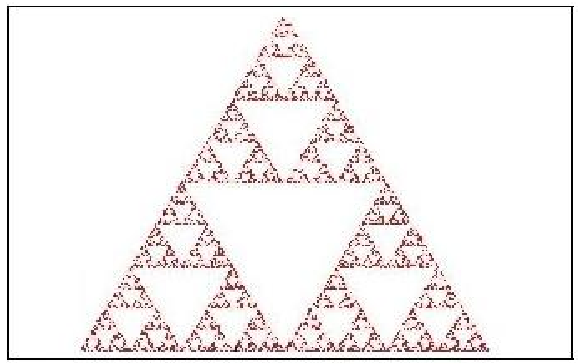


Figura 1.1: Triángulo de Sierpinski

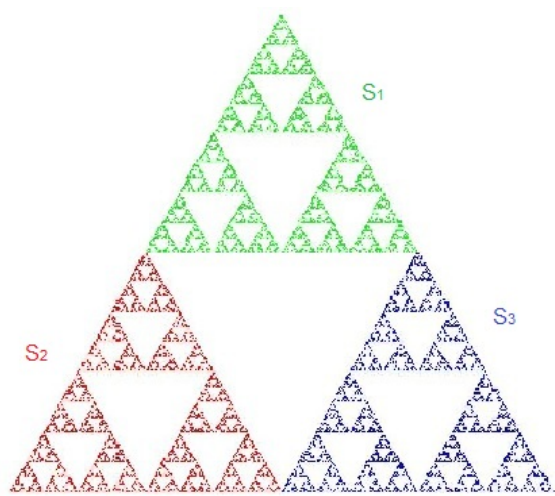


Figura 1.2: Cada color en la figura corresponde a una transformación.

Consideremos $f_1, f_2 \dots, f_n$ contracciones sobre un espacio métrico completo X, podemos definir la siguiente operación: Dado $A \subset X$ compacto, se define:

$$H_{f_1,f_2,\dots,f_n}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A). \tag{1.1}$$

John F. Hutchinson describe la ecuación (1.1) en [4]. La operación $H_{f_1,f_2,\dots,f_n}$ se conoce como operador de Hutchinson asociado a las contracciones $f_1, f_2, \dots, f_n$. Obsérvese que el operador se construye a partir de un Sistema de Funciones Iterado o IFS, es decir, a partir de una familia finita de funciones definidas sobre un espacio métrico completo X.

De hecho, el triángulo de Sierpinski es un punto fijo del operador de Hutchinson asociado a tres contracciones S_1, S_2, S_3 en $\mathbb{R}^2$, es decir, $H_{S_1,S_2,S_3}(T) = T$.

Definamos $\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A$ es compacto y no vacío $\}$. Como cada f_i es continua por ser contracción entonces si A es compacto se cumple que $f_i(A)$ es compacto. Luego el operador de Hutchinson es la unión finita de conjuntos compactos y por tanto esta unión es compacta. Es decir, el operador de Hutchinson asociado a las contracciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ tiene como dominio y contradominio a $\mathcal{H}(X)$.

En el Lema 2.3.2 de la tesis probamos que $H_{f_1,\dots,f_n}$ es una contracción sobre $\mathcal{H}(X)$. Y si X es un espacio métrico completo entonces $\mathcal{H}(X)$ con la métrica de Hausdorff también es un espacio métrico completo, ver Teorema 2.3.1 . Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, $H_{f_1,\dots,f_n}$ tiene un único punto fijo A y $\lim_{n\to\infty} H^n_{f_1,\dots,f_n}(C) = A$ para todo $C \in \mathcal{H}(X)$. Al punto fijo se le llama conjunto atractor del operador $H_{f_1,\dots,f_n}$. Al conjunto atractor se le conoce también como conjunto fractal del operador de Hutchinson asociado a las contracciones $f_1, \dots, f_n$.

Por ejemplo, el triángulo de Sierpinski es el conjunto fractal del operador de Hutchinson definido por las transformaciones S_1, S_2 y S_3.

1.0.1. Medidas fractales

Consideremos ahora a X un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{B}$ la sigma álgebra generada por subconjuntos abiertos de X, es decir, $\mathcal{B}$ es el álgebra de Borel asociada a X. El álgebra de Borel $\mathcal{B}$ hace de X un espacio medible, al que denotaremos por $(X, \mathcal{B})$.

Sea $\mathbb{P}(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre $(X, \mathcal{B})$. Podemos imitar la construcción que se hace del operador de Hutchinson en $\mathbb{P}(X)$. De hecho la métrica de Hutchinson dada en la Definición 3.1.1 hace a $\mathbb{P}(X)$ un espacio métrico completo cuando X es completo, ver Proposición 3.1.2.

Una familia de funciones, $\{f_i \mid f_i : X \to X$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}\}$, pesadas con un vector de probabilidades $(p_1, \dots, p_n)$ definen un operador $T^* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$

semejante al definido en (1.1) de la siguiente forma:

$$T^*(\mu)(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\mu \circ f_i^{-1}(A)) \tag{1.2}$$

con A subconjunto Borel de X.

En la proposición 3.2.4 se demuestra que si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son contracciones entonces T^* es contracción. Y por lo tanto T^* tiene un único punto fijo μ (Ver Teorema 3.2.2). A este punto fijo μ se le llama medida atractora o medida fractal.

Una relación entre conjuntos compactos y medidas la da el soporte de la medida. Donde el soporte de una medida μ se define como: el conjunto de $x \in X$ tales que la medida μ de todos los abiertos que contienen al punto x es positiva.

El operador de Hutchinson H definido en (1.1) y el operador T^* definido en (1.2) están relacionados en el sentido de que el punto fijo de H es el soporte del punto fijo de T^*. La prueba de esta afirmación se da en el Teorema 3.3.3.

1.0.2. Autosimilitud

Calcular el área o la longitud de los conjuntos fractales suele ser poco informativo. Es común encontrar ejemplos de conjuntos fractales cuya longitud es infinita y sin embargo tienen área cero. Es decir, su tamaño unidimensional es infinito y su tamaño bidimensional es cero. Felizmente las medidas de Hausdorff nos permiten calcular una noción de «tamaño» en la dimensión adecuada, siempre que extendamos la noción de dimensión a números no enteros.

La medida de Hausdorff generaliza la idea de longitud, área y volumen. La medida de dimensión cero cuenta el número de puntos en un conjunto si el conjunto es finito y es infinita si el conjunto lo es. La medida unidimensional mide la longitud de una curva suave en $\mathbb{R}^1$. La medida bidimensional mide el área de un conjunto en $\mathbb{R}^2$ y análogamente la medida tridimensional el volumen de un conjunto en $\mathbb{R}^3$. En general por cada dimensión se puede definir una medida de Hausdorff.

La medida de Hausdorff $s-$dimensional de un conjunto K se denota por $\mathcal{H}^s(K)$ y se define de la siguiente manera: Se cubre al conjunto K con una cantidad numerable de conjuntos que tenga diámetro a lo mas ϵ, con $\epsilon > 0$. Se calcula la suma de los diámetros elevados a la potencia s. Cuando ϵ tiende a cero, si s es pequeño entonces el valor de los diámetros elevados a la potencia s tiende a 1. Por tanto la suma de los diámetros elevados a la potencia s diverge. Y si ϵ tiende a cero y s es grande entonces los diámetros elevados a la potencia s tienden a cero. Luego la suma de los diámetros elevados a la potencia s converge a cero. Existe un valor crítico en el que se da el cambio de ∞ a 0. A este

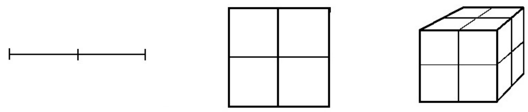


Figura 1.3: Cada figura es unión de objetos semejantes con factor de escala $\frac{1}{2}$

valor crítico se le llama dimensión de Hausdorff. La dimensión de Hausdorff puede tomar valores no enteros.

El siguiente ejemplo nos ayuda a comprender qué significa que un objeto tenga dimensión no entera.

Un intervalo de longitud 1 es la unión de dos intervalos semejantes con factor de escala de $\frac{1}{2}$, entonces la suma de sus factores de escala cumple que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2(\frac{1}{2})^1 = 1$. Un cuadrado de área 1 es la unión de cuatro cuadrados semejantes con factor de escala de $(\frac{1}{2})^2$, entonces al sumar los factores de escala se cumple que: $(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2 = 4(\frac{1}{2})^2 = 1$. Un cubo de volumen 1 es la unión de ocho cubos semejantes con factor de escala de $(\frac{1}{2})^3$, entonces la suma de sus factores de escala cumple: $(\frac{1}{2})^3 + \cdots + (\frac{1}{2})^3 = 8(\frac{1}{2})^3 = 1$. Ver Figura 1.3.

Observamos que los exponentes en cada una de las igualdades coinciden con la dimensión del conjunto. Para el triángulo de Sierpinski, vemos que este objeto está hecho de 3 copias semejantes con factor de escala $\frac{1}{2}$. De manera análoga a la recta, el cuadrado y el cubo, para el triángulo de Sierpinski se debe cumplir que:

$$3(\frac{1}{2})^D = 1 \Rightarrow 2^D = 3 \Rightarrow D = \frac{log(3)}{log(2)} \simeq 1{,}5849.$$

El número D se puede pensar como la dimensión del triángulo de Sierpinski.

Un objeto tiene la propiedad de autosimilitud si el objeto es similar a una parte del mismo. La autosimilitud exige que el objeto sea similar a una parte de él via una similitud. Una *similitud* es una transformación $S : (X, d) \to (X, d)$ tal que para algún $r > 0$ se cumple que $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. A r se le llama *radio o factor de escala*. Para definir autosimilitud, el factor de escala solo se toma en el intervalo $(0, 1)$, es decir, cuando se trata de una contracción. Existen conjuntos fractales como el conjunto de Mandelbrot donde se utilizan otras nociones de similaridad.

Si una familia de similitudes $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ cumple que: $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$, a D se le llama dimensión de similitud de esta familia.

Hutchinson en [4] da la siguiente definición de autosimilitud : Si $K \subset X$, s es la dimensión de Hausdorff y $\mathcal{H}^s(K)$ es la dimensión de Hausdorff $s-$dimensional entonces K es autosimilar respecto a la familia de similitudes $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ si: K es el conjunto fractal para el operador de Hutchinson definido por la familia de similitudes, su medida de Hausdorff es positiva, es decir, $\mathcal{H}^s(K) > 0$ y el conjunto donde se intersecta la imagen de las similitudes tiene medida 0, es decir, $\mathcal{H}^s(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0$, para $i \neq j$.

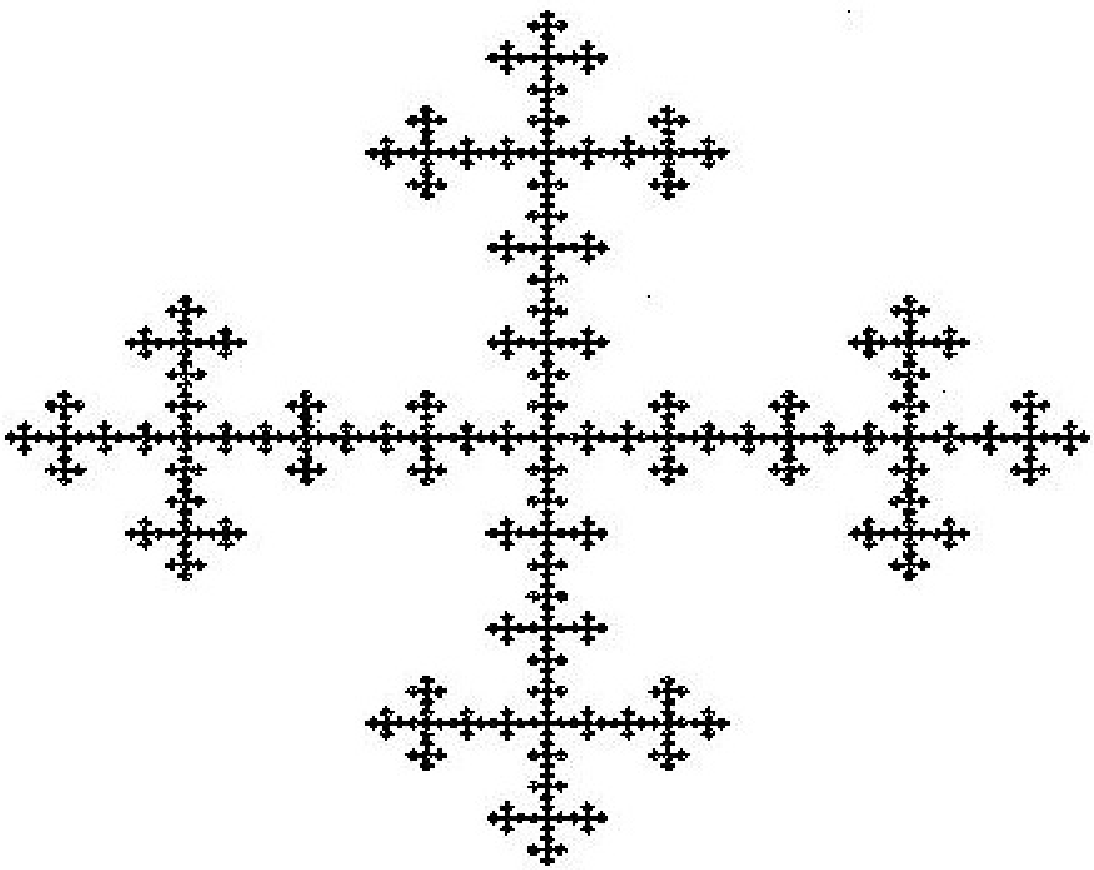
El Triángulo de Sierpinski está hecho a base de infinitas copias de sí mismo. Las copias se traslapan a lo más en un punto, es decir, en conjuntos de medida cero y su medida de Hausdorff es positiva, por lo tanto, es autosimilar.

En el teorema $4.2.2$ se prueba que cuando $0 < \mathcal{H}^k(K) < \infty$ para un conjunto K entonces K es autosimilar si la dimensión de Hausdorff y la de similitud coinciden.

En el desarrollo de esta tesis serán necesarios conocimientos básicos en análisis, topología y teoría de la medida, se usan también algunos teoremas importantes como el Teorema del punto fijo de Banach, el Teorema de representación de Riesz y el Teorema de extensión de Hahn-Banach, que en su momento se enunciarán.

Las imágenes mostrados en esta tesis se hicieron con un programa ejecutado en Matlab.

María Cristina Cid Zepeda
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
noviembre de 2012



Capítulo 2

Conjuntos Fractales.

Al observar muchos de los conjuntos llamados fractales (por ejemplo el triángulo de Sierpinski, el conjunto de Cantor o la curva de Koch), surgen varias preguntas alrededor de estos objetos: ¿En qué espacio viven estos objetos?, ¿Se pueden crear otras figuras fractales?, y de ser cierto esto ¿Cómo explicamos que esto sea posible? Son precisamente estas preguntas las que motivan este capítulo y cuyo fin es darles una respuesta.

2.1. Espacios Métricos

En el espacio de los números reales se tiene la noción de distancia entre cualquier par de puntos si nos fijamos en el valor absoluto de su diferencia. Esta no es la única distancia que se puede definir en $\mathbb{R}$, ni $\mathbb{R}$ es el único espacio en el que podemos definir una distancia. Podemos fijarnos en lo que caracteriza al concepto de *distancia* y dar una definición general de manera que se pueda construir, para un espacio X una distancia. Esta idea junto con algunos resultados en espacios métricos, serán los preliminares necesarios para definir el espacio al que pertenece un conjunto fractal.

Definición 2.1.1. *Sean X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica en X si para cada $x, y, z \in X$ satisface las siguientes propiedades:*

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la pareja ordenada (X, d) se le llama espacio métrico .

Muchos conceptos que se tienen en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual pueden ser trasladados a espacios métricos más generales, por ejemplo, la continuidad. En adelante, expondremos algunas nociones básicas de espacios métricos.

Dado $x_0 \in X$ y $r > 0$, la $bola\ abierta$ con centro en x_0 y radio r, denotada por $B(x_0, r)$, es el conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) > r\}.$$

Un conjunto A será $abierto$ si para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$, tal que $B(x, r_x) \subset A$. Un conjunto B será cerrado si su complemento es abierto.

Es posible definir la continuidad en términos de abiertos y cerrados.

Proposición 2.1.1. *Sean $(X, d_X),\ (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. f es una función es continua si para cada A abierto en Y se cumple que $f^{-1}(A)$ es abierto en X.*

De manera equivalente esta proposición se tiene para cada C cerrado en Y.

Un tipo particular de funciones continuas son las llamdas funciones de Lipschitz. Dados X y Y espacios métricos, decimos que una función $f : X \to Y$ es Lipschitz si existe una constante $M > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(x, y)$, para todo $x, y \in X$. A la mínima constante M se le llama constante de Lipschitz para f y suele escribirse también como Lip f.

En adelante $Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ denotará al conjunto de todas las funciones Lipschitz con constante menores o iguales a 1.

Una $sucesi$ón $de\ Cauchy$, en un espacio métrico X, es una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface la siguiente condición:

$$\text{para cada } \epsilon > 0, \text{ existe } N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ tal que } d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ si } n, m \geq N.$$

Se dice que X es un espacio métrico completo, si toda sucesión de Cauchy converge en X.

La siguiente proposición nos dice que ciertos espacios métricos completos surgen como subespacios cerrados de un espacio métrico completo.

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio métrico completo, Y un subespacio de X. Y es un espacio métrico completo si y sólo si Y es un subespacio cerrado de X.*

En espacios métricos existe la noción de conjunto acotado.

Definición 2.1.2. *Sea A un subconjunto no vacío de X. A será acotado si existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tal que para todo $x,\ y \in A$, se tiene que $d(x, y) \leq k$.*

Al hacer referencia a un conjunto acotado A, tiene sentido fijarnos en el supremo del conjunto de números reales: $\{d(x, y)|x, y \in A\}$, lo cual lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.3. *Si A es un subconjunto no vacío y acotado, llamamos $diámetro$ de A al número*

$$diam(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Un concepto más fuerte que el de conjunto acotado, lo da el de conjunto totalmente acotado, ya que todo conjunto totalmente acotado es acotado pero el recíproco no siempre se cumple.

Definición 2.1.4. *Diremos que $A \subset X$ es un conjunto totalmente acotado o precompacto, si para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in A$, tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$$

En $\mathbb{R}$, una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado, alcanza su máximo y su mínim. En la búsqueda de cual era la característica importante en los intervalos cerrados y acotados para obtener el resultado anterior, condujo al concepto de compacidad. Para hablar de compacidad es necesario dar primero la definición de cubierta abierta y subcubierta finita.

Definición 2.1.5. *Sea $A \subset X$. Si $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, con U_α conjunto abierto de X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se le llama cubierta abierta de A. Si $I' \subset I$ es tal que $A \subset \bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha$, entonces dcimos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ es una subcubierta de A. Si además I' es un conjunto finito, entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una subcubierta finita de A.*

Definición 2.1.6. *Decimos que $A \subset X$ es compacto si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.*

La siguiente proposición nos caracteriza la compacidad de una espacio métrico.

Proposición 2.1.3. *X es un espacio métrico completo y totalmente acotado si y sólo si es compacto.*

Proposición 2.1.4. *Sea $f : X \to X$ continua sobre el espacio métrico (X, d). Si $A \subset X$ es compacto entonces $f(A)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de $f(A)$, entonces $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta de A.
Como A es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}).$$

Entonces

$$f(A) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Por lo tanto $f(A)$ es compacto. □

La proposición anterior nos dice que dado un subconjunto compacto de un espacio métrico X y una función definida sobre X, si la función es continua entonces la imagen del compacto es también un subconjunto compacto.

2.1.1. El espacio de sucesiones.

Un espacio métrico que será de gran utilidad más adelante es el siguiente.

Sean $I := \{1, \ldots, N\}$ con $N \in \mathbb{N}$ y $\Sigma := I^{\mathbb{N}}$, es decir, el producto cartesiano de infinitas copias numerables del conjunto I. Los elementos de Σ son sucesiones infinitas de la forma **i**$= (i_1 \ldots i_n \ldots)$, donde $i_j \in I,\ \forall j \in \mathbb{N}$. El conjunto Σ es llamado espacio de sucesiones o espacio de itinerarios .

Se define la función $d_F : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ como

$$d_F(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|i_n - j_n|}{(N+1)^n} \tag{2.1}$$

para todo **i**$= (i_1 i_2 \ldots i_n \ldots)$, **j**$= (j_1 j_2 \ldots j_n \ldots) \in \Sigma$.

A d_F se le conoce como métrica de Fréchet.

Definición 2.1.7. *Un cilindro es un subconjunto de Σ de la siguiente forma: dado $p \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{x_0, x_1, \ldots, x_n \mid x_k \in I\}$, se define el cilindro como:*

$$C(p, \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}) = \{\boldsymbol{i} \in \Sigma \mid i_{p+k} = x_k,\ con\ k \in \{0, \ldots, n\}\}. \tag{2.2}$$

Los cilindros más sencillos son de la siguiente forma:

$$C(p, x) = \{w \in \Sigma | w_p = x\}, \tag{2.3}$$

con $p \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ fijos. Es decir, todos los puntos de Σ que en la coordenada p tienen el valor x.

Nos preguntamos ahora cómo son las bolas abiertas en este espacio métrico.

Proposición 2.1.5. *Sean* $\mathbf{i}, \mathbf{i}' \in \Sigma$. $d_F(\mathbf{i}, \mathbf{i}') < \frac{1}{(N+1)^n}$ *si y sólo si* $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : i_k = i_k^{'}$.

DEMOSTRACIÓN. Dados $\mathbf{i}, \mathbf{i}' \in \Sigma$ supongamos que en sus primeros n términos son iguales, entonces

$$d_F(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|i_j - i_j'|}{(N+1)^j} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|i_j - i_j'|}{(N+1)^j} < \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^j} = (N+1)^{-n}.$$

De manera equivalente si suponemos que $d_F(\mathbf{i}, \mathbf{i}') < \frac{1}{(N+1)^n}$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|i_j - i_j'|}{(N+1)^j} < \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^j}$ lo cual es cierto si los primeros n términos son los mismos. □

Por la proposición 2.1.5, el conjunto:

$$B_{\frac{1}{(N+1)^n}}(\mathbf{i}) = C(1, \{i_1, \ldots, i_n\}), \tag{2.4}$$

es decir, el cilindro que tiene en el lugar k el valor de i_k, con $k \in \{1, \ldots, n\}$, es la bola con centro en **i** y radio $\frac{1}{(N+1)^n}$.

2.1.2. El Teorema del Punto Fijo de Banach.

Dado $T : X \to X$ una transformación, un punto $x \in X$ se llama punto fijo de T si $T(x) = x$. Es importante saber bajo qué condiciones una transformacion tiene un punto fijo. Existen varios teoremas relacionados con este problema y en esta sección nos enfocamos en uno de ellos, a saber, el Teorema del Punto Fijo de Banach.

Definición 2.1.8. *Sea* $f : X \to X$ *una transformación sobre un espacio métrico* X. f *es una* $contracción$ *si existe* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que* $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, *para todo* x, y *en* X.

A α *se le llama* $factor\ de\ contractividad$ *de* f.

Es claro que f es contracción si Lip $f < 1$. De la definición se puede observar que una contracción es una función uniformemente continua.

El siguiente teorema es uno de los más usados en cuanto a problemas de punto fijo se trata, algunas de sus aplicaciones pueden ser consultadas en [8].

Teorema 2.1.1. *(Teorema del Punto Fijo de Banach) Sea* $f : X \to X$ *una contracción sobre* (X, d) *un espacio métrico completo. Entonces, existe un único* $\mathbf{x} \in X$ *tal que* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *y más aún la sucesión* $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *para cada* $x \in X$ *converge a* $\mathbf{x}$. *Esto es,* $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \mathbf{x}$, *para cada* $x \in X$.

2.2. La métrica de Hausdorff.

Felix Hausdorff, matemático alemán, introdujo la distancia o métrica de Hausdorff en 1944. Dados dos subconjuntos de un espacio métrico la métrica de Hausdorff mide que tan lejos se encuentran el uno del otro.

Denotemos por $\mathcal{H}(X)$ al conjunto de subconjuntos compactos no vacíos del espacio métrico X, es decir, $\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A$ es compacto y $A \neq \emptyset\}$.

Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$, $B \subset X$ y $r > 0$. La *distancia del punto x al conjunto B* se define como: $d(x, B) =$ínf$\{d(x, b) : b \in B\}$.

La *r-vecindad de A* se define como $\mathcal{N}_r(A) = \{y \in$ X $: d(y, A) < r$, para algún $a \in A\}$. A $\mathcal{N}_r(A)$ suele conocérsele también como la nube de radio r centrada en A.

Sea X un espacio métrico y sean *A* y *B* subconjuntos de *X* , decimos que *A* y *B* están dentro de una distancia de Hausdorff r entre sí si y sólo si cada punto de *A* está a una distancia menor que r de algún punto de *B* y cada punto de *B* está a una distancia menor que r de algún punto de *A*. Vista como una definición de métrica, esta idea se enuncia de la siguiente manera.

Definición 2.2.1. *Sean A, B $\subset$ X conjuntos compactos no vacíos. Se define $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}$ como*

$$h(A, B) = \textit{ínf}\,\{r > 0 : A \subset \mathcal{N}_r(B) \text{ y } B \subset \mathcal{N}_r(A)\}.$$

A h se le llama métrica de Hausdorff

La siguiente proposición da una definición equivalente para la métrica de Hausdorff.

Proposición 2.2.1. *Sean A,B$\subset$ X conjuntos compactos no vacíos y $h : \mathcal{H}(X)\times\mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}$ la métrica de Hausdorff. Entonces*

$$h(A, B) = \textit{máx}\,\{d(a, B), d(b, A) : a \in A\ b \in B\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean A,B$\subset$ X conjuntos compactos no vacío y definamos:

$$h = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset \mathcal{N}_r(B) \text{ y } B \subset \mathcal{N}_r(A)\} \tag{2.5}$$

$$h' = \text{máx}\{d(a, B), d(b, A) : a \in A\ b \in B\}. \tag{2.6}$$

Entonces $A \subset \mathcal{N}_h(B)$ *y* $B \subset \mathcal{N}_h(A)$, es decir $d(a, B) < h$ para cada $a \in A$ y $d(b, A) < h$ para cada $b \in B$.

En particular máx$\{d(a, B), d(b, A) : a \in A\ b \in B\} < h$, por tanto $h' < h$.

Por otra parte, observemos que $d(a, B) < h'$ para cada $a \in A$ y $d(b, A) < h'$ para cada $b \in B$ entonces $A \subset \mathcal{N}_{h'}(B)$ *y* $B \subset \mathcal{N}_{h'}(A)$, así $h < h'$.

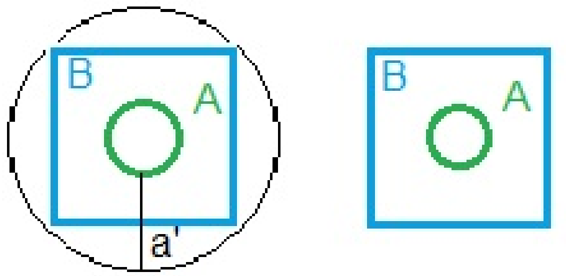


Figura 2.1: Ejemplo de la métrica de Hausdorff entre X y Y

Concluimos que $h = h'$. □

La figura 2.1 se calcula la métrica de Hausdorff entre el conjunto X (curva cerrada verde) y el conjunto Y (curva cerrada azul).

La proposición 2.7 nos facilita la prueba de la siguiente propiedad que será de utilidad más adelante.

Proposición 2.2.2. *Sea $f : X \to X$ entonces*

$$h\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i\right) \leq \text{máx}_{i\in I} h(A_i, B_i), \tag{2.7}$$

donde $I = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente probarlo para $N = 2$, ya que I es un conjunto finito.

$$h(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) =$$

$$\text{máx}\{d(a, B_1 \cup B_2), d(b, A_1 \cup A_2) : a \in A_1 \cup A_2,\ b \in B_1 \cup B_2\} \tag{2.8}$$

Observemos que:

$$\text{máx}\{d(a, B_1 \cup B_2) : a \in A_1 \cup A_2\} =$$

$$\text{máx}\{d(a_1, B_1 \cup B_2), d(a_2, B_1 \cup B_2) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}. \tag{2.9}$$

Así, supongamos que el máximo en la ecuación (2.8) es $d(a, B_1 \cup B_2)$ con $a \in A_1 \cup A_2$ y que este valor se alcanza para algún $a \in A_1$ entonces:

$$\begin{aligned} h(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) &= \text{máx}\{d(a, B_1 \cup B_2) : a \in A_1\} \\ &\leq d(A_1, B_1) = \text{máx}\{h(A_1, B_1), h(A_2, B_2)\} \end{aligned}$$

La prueba se tiene de manera equivalente si el máximo se alcanzara en $d(b, A)$ para $b \in B_1 \cup B_2$. □

Teorema 2.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, entonces $\mathcal{H}(X)$ con la métrica de Hausdorff es un espacio métrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$

i) Se cumple que $h(A, B) \geq 0$ ya que el conjunto $\{r > 0 : A \subset \mathcal{N}_r(B)\ y\ B \subset \mathcal{N}_r(A)\}$ está acotado inferiormente por 0.

ii) Si $h(A, B) = 0$, se tiene que $A \subset \mathcal{N}_0(B)$ y $B \subset \mathcal{N}_0(A)$. Pero $\mathcal{N}_0(B) = B$ y $\mathcal{N}_0(A) = A$. Por lo tanto $A = B$.

   Si $A = B$ entonces $A \subset \mathcal{N}_r(B)\ y\ B \subset \mathcal{N}_r(A)$ para toda $r > 0$, así $h(A, B) = 0$.

iii) En el conjunto $\{r > 0 : A \subset \mathcal{N}_r(B)\ y\ B \subset \mathcal{N}_r(A)\}$ se puede intercambiar el orden de A y B sin que afecte a la definición de h, así $h(A, B) = h(B, A)$.

iv) Resta probar la desigualdad del triángulo.

   Usando la definición de h se demostrará que el $\inf\{r > 0 : A \subset \mathcal{N}_r(C)\ y\ C \subset \mathcal{N}_r(A)\}$ es menor que $h(A, B) + h(B, C)$.

   Sea $\epsilon > 0$. Dado $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq h(A, B) + \epsilon$, de igual forma existe $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq h(B, C) + \epsilon$ entonces $d(a, c) \leq h(A, B) + h(B, C) + 2\epsilon$.

   Sea $r = h(A, B) + h(B, C) + 2\epsilon$, la desigualdad anterior nos dice que para cada $a \in A$ existe $c \in C$ tal que $A \subset \mathcal{N}_r(C)$.

   De manera similar se demuestra que $C \subset \mathcal{N}_r(A)$.

   Así $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C) + 2\epsilon$ y como se cumple para todo $\epsilon > 0$, se concluye que $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

□

Ya que los elementos de $\mathcal{H}(X)$ son subconjuntos de X (es decir son elementos que a la vez son conjuntos), también se suele decir que $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X.

Observemos que la condición de que $A \subset X$ sea compacto y no vacío es vital para que $\mathcal{H}(X)$ sea espacio métrico. Tomemos como ejemplo el siguiente caso: $\mathbb{R}$ con la métrica usual, la distancia entre $\{0\}$ y $[0, \infty)$ es ∞, por lo tanto se restringe el uso a conjuntos acotados; $h(\emptyset, \{0\}) = \infty$, así, se restringe el uso a conjuntos no vacíos y $h([0, 1), (0, 1)) = 0$ pero $[0, 1) \neq (0, 1)$, por lo tanto restringimos el uso a conjuntos cerrados.

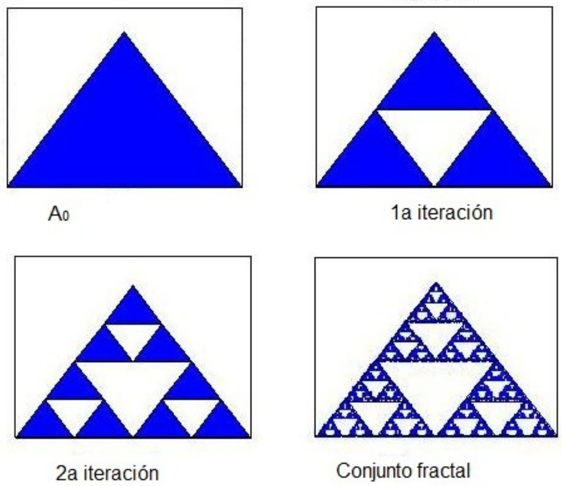


Figura 2.2: Primera, segunda y tercera iteración del operador de Hutchinson aplicado a A_0.

2.3. Conjuntos fractales.

En $\mathbb{R}^2$ consideremos las siguientes contracciones:

$$f_1(x,y) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}),\ f_2(x,y) = (\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{y}{2}),\ f_3(x,y) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{2}).$$

Al aplicar cada una de ellas a la figura de la esquina superior izquierda A_0 (mostrada en la Figura 2.1.) y unir las imágenes de las contracciones se obtiene la figura de la esquina superior derecha. Si ahora a esta nueva imagen la llamamos A_1 y aplicamos nuevamente cada una de las contracciones a A_1, se obtiene la figura de la esquina inferior izquierda, esta imagen será ahora A_2. Repitiendo el proceso se obtiene se obtiene la figura de la esquina inferior derecha o A_3. En el límite de este proceso se obtiene el conjunto conocido como Triángulo de Sierpinski.

Defínase ahora en $\mathbb{R}^3$ las contracciones:

$$f_1(x,y,z) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z}{2}),\ f_2(x,y,z) = (\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z}{2}),$$

$$f_3(x,y,z) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{z}{2}), f_4(x,y,z) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z}{2} + \tfrac{1}{2}).$$

Con un procedimiento análogo al que se usó para crear el triángulo de Sierpinski se obtiene la Figura 2.2.

Surge la pregunta de por qué ocurre esto y para responderla es necesario tener un espacio en el cual sea posible realizar tal estudio, $\mathcal{H}(X)$ es precisamente ese espacio. El Teorema del Punto Fijo de Banach (Teorema 2.1.1) permite probar esta afirmación, via su

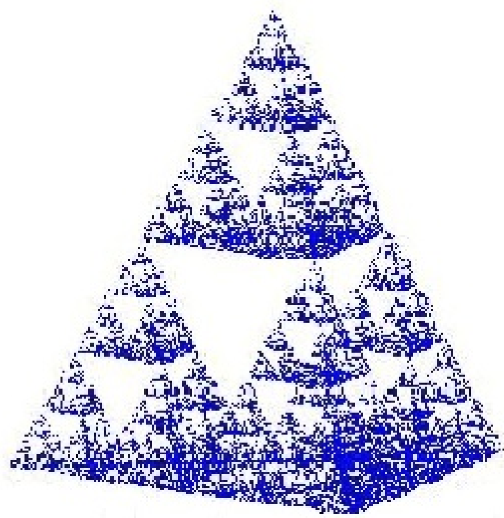


Figura 2.3: Pirámide de Sierpinski.

aplicación a $\mathcal{H}(X)$. Por tanto es necesario saber como son las contracciones en $\mathcal{H}(X)$ y verificar que este espacio es completo.

Se dan los siguientes lemas como medio para definir una contracción sobre $\mathcal{H}(X)$.

Lema 2.3.1. *Sea $f : X \to X$ una contracción sobre un espacio métrico (X, d) con factor de contractividad s. Entonces $f : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ definida por*

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}.$$

para cada $B \in \mathcal{H}(X)$, es una contracción sobre $(\mathcal{H}(X), h(d))$ con factor de contractividad s.

DEMOSTRACIÓN. Como f es contracción, por lo dicho en la sección 2.1.2, f es continua. Por el Lema 2.1.4, f transforma compactos en compactos, lo cual prueba que está bien definida, es decir, $f(\mathcal{H}(X)) \subset \mathcal{H}(X)$.

Para probar que f es contracción, sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

$$h(f(A), f(B)) = \text{ínf}\{r > 0 : f(A) \subset N_r(f(B)) \; y \; f(B) \subset N_r(f(A))\}.$$

Dado $b \in B$, se cumple que $d(f(b), f(A)) \leq h(f(A), f(B))$, es decir:

$$\text{ínf}\{d(f(b), f(a)) : a \in A\} \leq h(f(A), f(B)).$$

Como f es contracción,

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{d(f(b), f(a)) : a \in A\} &\leq \text{ínf}\{sd(b, a) : a \in A\} \\ &= s\text{ínf}\{d(b, a) : a \in A\} \\ &= sd(b, A). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Este valor es una cota superior para $d(f(b), f(A))$, entonces $h(f(B), f(A)) \leq sd(b, A)$. De la misma forma se prueba que $h(f(A), f(B)) \leq sd(a, B)$. Ya que se cumple para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, se tiene que

$$h(f(A), f(B)) \leq sh(A, B)$$

. □

Definición 2.3.1. *Sea* $\{f_1, \dots, f_N\}$ *un conjunto de contracciones sobre un espacio métrico completo* (X, d)*. Sea* $H : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ *tal que*

$$H(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A), A \in \mathcal{H}(X). \tag{2.11}$$

A H *se le conoce como operador de Hutchinson.*

La definición anterior se debe al matemático australiano J. Hutchinson, quien fue el primero en discutir sus propiedades en [4].

El siguiente lema nos da un método para combinar distintas contracciones en un espacio métrico y generar una nueva contracción.

Lema 2.3.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Sean* $f_n : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$*,* $n \in \{1, \dots, N\}$ *contracciones con factor de contractividad* s_n*, cada una. Entonces el operador de Hutchinson es una contracción con factor de contractividad* S *=máx*$\{s_n : n \in I\}$*, para cada* $B \in \mathcal{H}(X)$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

$$\begin{aligned} h(H(A), H(B)) &= h(\bigcup_{i=1}^{N} f_i(A), \bigcup_{i=1}^{N} f_i(B)) \\ &\leq max_{i \in I} h(f_i(A), f_i(B)) \text{ por ecuación (2.7)} \\ &\leq (max_{i \in I} s_i) h(A, B) \\ &= Sh(A, B). \end{aligned}$$

□

El Lema 2.3.1 nos asegura que se puede definir al operador H como en el Lema 2.3.2 , ya que $\{f_n : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X) : f_n$ contracción y $n \in I\}$ por ser un conjunto finito de contracciones tenemos una unión finita de compactos la cual es también un compacto. Así, H es una forma general de tener una contracción en $\mathcal{H}(X)$, esta es la segunda consecuencia importante derivada de la métrica de Hausdorff.

Haremos la siguientes observaciones, necesarias para la prueba del teorema que se enuncia inmediatamente después.

Observación 2.3.1. *Para probar la compacidad de A, se prueba primero que es cerrado y por ser un subconjunto de un espacio métrico completo es completo (Por proposición 2.1.2). Luego se demostrará que es totalmente acotado y por la proposicion 2.1.3 sabemos que ser completo y totalmente acotado implica compacidad, con lo cual habremos terminado.*

Observación 2.3.2. *Una sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ converge a $A \in \mathcal{H}(X)$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $A_n \subset \mathcal{N}_\epsilon(A)$ y $A \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_n)$.*

Las siguientes proposiciones nos permitirán probar la completez de $\mathcal{H}(X)$.

Teorema 2.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{H}(X), h(d))$ es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{A_n : A_n \in \mathcal{H}(X)\}$ una sucesión de Cauchy y

$$A = \{x \in X \text{ :existe una sucesión de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ que converge a } x\}.$$

La prueba se divide en dos partes: en la primera se demuestra que la sucesión $\{A_n\}$ converge a A y en la segunda parte se demuestra que $A \in \mathcal{H}(X)$.

1)Demostración de que la sucesión $\{A_n\}$ converge a A.

Como $\{A_n\}$ es de Cuachy para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ se tiene que $h(A_n, A_m) < \epsilon$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que cumpla con esta desigualdad. Sea $y \in A_n$, escojamos una sucesión de enteros $k_1 < k_2 < \cdots$ tales que $k_1 = n$ y $h(A_{k_j}, A_m) < 2^{-j}\epsilon$ para todo $m \geq k_j$. Definimos una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $y_k \in A_k$ como sigue:

Para $k < n$ escogemos $y_k \in A_k$ arbitrario, para $k = n$ tomamos $y_k = y$ y si $k_j < k < k_{j+1}$ escogemos $y_k \in A_k$ con $d(y_{k_j}, y_k) < 2^{-j}\epsilon$, entonces $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por tanto convergente, ya que X es completo. Si x es su límite, entonces $x \in A$, es decir, $A \neq \emptyset$. Más aun, obsérvese que $d(y, x) = lim_{k\to\infty} d(y, y_k) < \epsilon$, es decir existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N'$, $d(y, x) < \epsilon$ entonces $y \in \mathcal{N}_\epsilon(A)$, por lo tanto $A_n \subseteq \mathcal{N}_\epsilon(A)$.

Ahora se probará que $A \subseteq \mathcal{N}_\epsilon(A_n)$. Sea $x \in A$, existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \in A_k$ tal que $x_k \to x$, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_0,\ d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Como A_k es de Cuachy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1,\ h(A_n, A_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Sea N =máx$\{n_0, n_1\}$ entonces si $k, n \geq N$ implica que dado $x_k \in A_k$ existe $y \in A_n$ tal que $d(x_k, y) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, $d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < \epsilon$ entonces $A \subseteq \mathcal{N}_\epsilon(A_n)$. Tomando N_1 =máx$\{N', N\}$, se cumple que para $n \geq N_1$: $A_n \subset \mathcal{N}_\epsilon(A)$ y $A \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_n)$.

Por lo tanto $\{A_n\}$ converge a A.

2) Se probará que $A \in \mathcal{H}(X)$. Ya se demostró que $A \neq \emptyset$ así que resta probar que es compacto.

Para probar que A es cerrado tomaremos $x \in \overline{A}$ y se demostrará que existe una sucesión $z_n \in A_n$ que converge a x, y por tanto $\overline{A} \subset A$. Así, dado $x \in \overline{A}$ existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{1}{2^n}$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in A_n$ tal que $d(z_n, x_n) < h(A_n, A) + 2^{-n}$. Sea $n \geq n_0$ entonces $d(z_n, x) \leq d(z_n, x_n) + d(x_n, x) < h(A_n, A) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$. Cuando $n \to \infty,\ h(A_n, A) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$ converge a 0. Así $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, es decir, $x \in A$, por tanto A es cerrado.

Resta probar que A es totalmente acotado. Sea n tal que $h(A_n, A) < \frac{\epsilon}{3}$, o de manera equivalente $A_n \subset \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{3}}(A)$ y $A \subset \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{3}}(A_n)$. Como $A \subset \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{3}}(A_n)$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Ya que A_n es compacto entonces es totalmente acotado, por tanto dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $E = \{y_1, \ldots, y_m\} \subset A_n$ tal que $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \frac{\epsilon}{3})$, entonces dado $x \in A_n$ existe $y_i \in E$ tal que $d(x, y_i) < \frac{\epsilon}{3}$. Puesto que $A_n \subset \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{3}}(A)$ para cada y_i existe $x_i \in A$ tal que $d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3}$, entonces el conjunto $E' = \{x_1, \ldots, x_m\}$ cumple que $E \subset \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{3}}(E')$. Así, dado $a \in A$, existe $x_i \in E'$ tal que $d(a, x_i) \leq d(a, a_n) + d(a_n, y_i) + d(y_i, x_i) < \epsilon$, por lo tanto $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$, es decir, A es totalmente acotado. $\square$

Definición 2.3.2. *Sea X un espacio métrico completo. Sean $f_n : X \to X$ contracciones, $n \in \{1, \ldots, N\}$ y H el operador de Hutchinson asociado a esta familia de contracciones. Si A es el único punto fijo de H, a A se le llama conjunto fractal o conjunto atractor respecto a H, es decir,*

$$A := lim_{n\to\infty} H^n(E), \tag{2.12}$$

donde $E \in \mathcal{H}(X)$.

La existencia y unicidad del conjunto fractal se sigue del Teorema 2.3.1.

Ejemplo 2.3.1. *Para el siguiente conjunto de contracciones:*
$f_1(x, y) = (-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x)$, $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$, $f_3(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$,

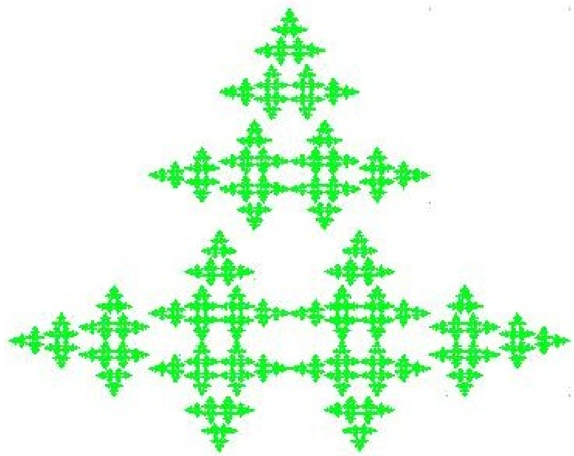


Figura 2.4: Conjunto fractal cuyo factor de escala es $\frac{1}{2}$

el operador de Hutchinson para estas contracciones está dado por $H(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$, $A \in \mathcal{H}(X)$ *y cuyo punto fijo se muestra en la Figura 2.4.*

Ejemplo 2.3.2. *Para el siguiente conjunto de contracciones:*
$f_1(x, y) = (-\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$, $f_2(x, y) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y)$, $f_3(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2})$,
el operador de Hutchinson para estas contracciones está dado por $H(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$, $A \in \mathcal{H}(X)$ *y cuyo punto fijo se muestra en la Figura 2.5.*

Concluimos este capítulo con algunas propiedades del conjunto fractal respecto a H. Supóngase $\{g_1, \ldots, g_N\}$ una familia finita de transformaciones tal que $g_i : X \to X$, para fines prácticos definimos

$$g_{i_1 \ldots i_p} = g_{i_1} \circ \ldots \circ g_{i_p}. \tag{2.13}$$

En adelante se usará la siguiente notación

$$A_{i_1 \ldots i_p} = g_{i_1 \ldots i_p}(A). \tag{2.14}$$

Hacer uso de la notación dada en 2.14, más que simplificar el trabajo, hace evidente el itinerario que sigue A bajo el efecto de las tansformaciones g_{i_j}. Siguiendo esta notación se puede afirmar lago más.

Proposición 2.3.1. *Si* $\{f_1, \ldots, f_N\}$ *es una familia finita de contracciones y* $p \in \mathbb{N}$*, se tiene que*

$$diam(A_{i_1 \ldots i_p}) \leq s_{i_1} \ldots s_{i_p} diam(A), \tag{2.15}$$

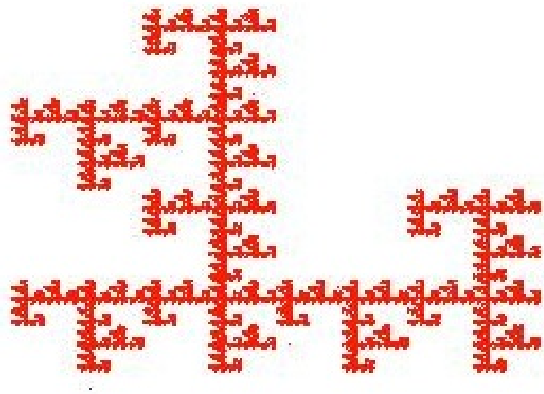


Figura 2.5: Conjunto fractal con factor de escala $\frac{1}{2}$

por tanto, $diam(A_{i_1\dots i_p}) \to 0$ *cuando* $p \to \infty$*, donde* s_{i_j} *es el factor de contractividad de* f_{i_j}*,* $j \in \{1\dots p\}$*.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} diam(A_{i_1\dots i_p}) &= sup\{d(f_{i_1\dots i_p}(x), f_{i_1\dots i_p}(y)) : x, y \in A)\} \\ &\leq sup\{s_{i_1} d(f_{i_2\dots i_p}(x), f_{i_2\dots i_p}(y)) : x, y \in A)\} \\ &\leq sup\{s_{i_1} s_{i_2} d(f_{i_3\dots i_p}(x), f_{i_3\dots i_p}(y)) : x, y \in A)\} \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso,

$$\begin{aligned} diam(A_{i_1\dots i_p}) &\leq s_{i_1} \cdots s_{i_p} sup\{d(x, y) : x, y \in A)\} \\ &= s_{i_1} \cdots s_{i_p} diam(A). \end{aligned}$$

Como $0 < s_{i_j} < 1$, $diam(A_{i_1\dots i_p}) \to 0$ cuando $p \to \infty$. □

Recordando el ejemplo que se dió para generar el triángulo de Sierpinski, sabemos ahora que dicho objeto es un punto fijo para el operador de Hutchinson formado por la familia de contracciones dadas y más aún que podemos acercarnos a este punto fijo después de un cierto número de iteraciones.

El teorema que se enuncia enseguida es una primera explicación del por qué al tomar una parte cualquiera de un punto fijo del operador de Hutchinson y llevarlo a la escala de la figura original, es igual a esta.

Proposición 2.3.2. *Dado* $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ *y* H *el operador de Hutchinson, se tiene que:*

$$H^p(A) = \bigcup_{i_1\dots i_p \in \{1,\dots,N\}^p} A_{i_1,\dots,i_p}. \tag{2.16}$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hará por inducción.
Sea $p = 1$.

$$H^1(A) = H(A) = \bigcup_{i\in\{1,\dots,N\}} A_i,$$

lo cual es cierto, ya que coincide con la definición del operador de Hutchinson.

Supongamos que se cumple para p, entonces,

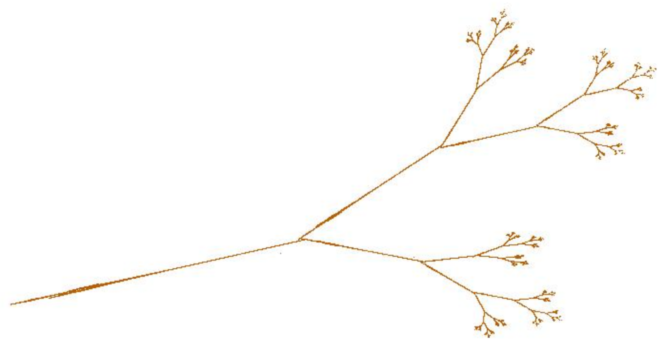
$$\begin{aligned} H^{p+1}(A) &= H(H^p(A)) \\ &= H(\bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} A_{i_1\dots i_p}) \\ &= \bigcup_{j=1}^{N} f_j(\bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} A_{i_1\dots i_p}) \\ &= \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} A_{ji_1\dots i_p} \\ &= \bigcup_{i_1\dots i_{p+1}\ \in\{1\dots N\}^{p+1}} A_{i_1\dots i_{p+1}}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.3. *Si A es el conjunto fractal respecto a H, entonces*

$$A = \bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} A_{i_1\dots i_p}, p \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $p \in \mathbb{N}$ y A el conjunto fractal respecto a H, luego $H^p(A) = A$. Por proposición (2.3.2) $H^p(A) = \bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} A_{i_1\dots i_p}, p \in \mathbb{N}$. Con lo cual se completa la prueba. □



Capítulo 3

Medidas fractales.

Un conjunto X equipado con una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ es un espacio medible, en el cual podemos definir medidas; las cuales son funciones $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ tales que cumplen:

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, donde $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Así, cuando tenemos un espacio X, una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ de X y una medida μ sobre la $\sigma-$álgebra diremos que es un espacio de medida y se denotará como $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Al conjunto de medidas definidas sobre el espacio medible $(X, \mathcal{A})$ lo expresaremos como $\mathcal{M}(X)$.

Para relacionar la estructura topológica con la de medida es necesario considerar la $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}$ la cual es la $\sigma-$álgebra más pequeña que contiene a los subconjuntos abiertos de X. Si X es un conjunto y $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel asociada al conjunto entonces al par $(X, \mathcal{B})$ se le conoce como espacio de Borel.

Sean $(X, \mathcal{B})$ y $(Y, \mathcal{B}')$ espacios de Borel. Si la preimagen de la función $f : (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{B}')$ preserva subconjuntos medibles, a la función se le conoce como Borel medible. Más aún, si $\varphi : (X_1, \mathcal{B}) \to (X_2, \mathcal{B}')$ es una función Borel medible, podemos asignarle a cada medida μ sobre $\mathcal{B}$ una medida sobre $\mathcal{B}'$ mediante la función $\varphi^{\#} : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ definida de la siguiente manera:

$$\varphi^{\#}(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)),\ B \in \mathcal{F}_2.$$

La siguiente proposición puede pensarse como una fórmula de cambio de variable.

Proposición 3.0.1. Sea $\varphi : (X, \mathcal{F}_1, \mu) \to (Y, \mathcal{F}_2)$ una función medible, entonces

$$\int_Y f d\varphi^{\#}\mu = \int_X f \circ \varphi d\mu$$

para cada $f \in \mathcal{C}(X)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B \subset Y$ un subconjunto medible y χ_B la función característica definida sobre B, se tiene:

$$\int_Y \chi_B d\varphi^\# \mu = \varphi^\# \mu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)),$$

la igualdad se debe a la definición de $\varphi^\#$. Por la definición de preimagen de una función y haciendo algunos cálculos se tienen las siguientes igualdades

$$\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu\{x \in X : \varphi(x) \in B\} = \int_X \chi_B(\varphi(x)) d\mu = \int_X \chi_B \circ \varphi d\mu.$$

Así, se cumple la proposición para cualquier función característica. De esto, se cumple también para funciones medibles no negativas, escogiendo una sucesión creciente de funciones simples que converja puntualmente a la función medible no negativa. En particular se cumple para f continua si se considera la parte positiva y negativa de f.

Por lo tanto, la prueba se tiene para cada $f \in \mathcal{C}(X)$. □

Una noción que utiliza tanto la estructura topológica como la de medida es la de soporte de medida.

Definición 3.0.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea μ una medida de Borel. El soporte de μ es el conjunto de $x \in X$ tales que $\mu(B(x, \epsilon)) > 0$ para todo $\epsilon > 0$, donde $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$.

De esta definición podemos decir que el soporte de una medida es el conjunto cerrado más pequeño cuyo complemento tiene medida cero, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 3.0.2. Sean (X, d) un espacio métrico y μ una medida de Borel. Entonces el soporte de una medida μ es el conjunto cerrado más pequeño A, tal que $\mu(X \setminus A) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{x \in X : \forall \epsilon > 0 \ \mu(B(x, \epsilon)) > 0\}$, probaremos que el complemento $X \setminus A$ es abierto.

Sea $x \in X \setminus A$ entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mu(B(x, \epsilon_0)) = 0$.

Afirmamos que $B(x, \epsilon_0) \subset X \setminus A$ de lo contrario existiría $x' \in B(x, \epsilon_0) \cap A$.

Puesto que $x' \in B(x, \epsilon_0)$ entonces $B(x', \epsilon_0 - d(x, x')) \subset B(x, \epsilon_0)$. Y como $x' \in A$ implica que $\mu(B(x', \epsilon_0 - d(x, x'))) > 0$

Por tanto $0 < \mu(B(x', \epsilon_0 - d(x, x'))) < \mu(B(x, \epsilon_0)) = 0$ y esto es una contradicción.

Por lo tanto $B(x, \epsilon_0) \subset X \setminus A$, es decir, A es cerrado. De esto se observa también que A es el conjunto cerrado más pequeño cuyo complemento tiene medida cero, ya que si existiera otro conjunto más pequeño con la misma propiedad digamos B, entonces A

intersectaria al complemento de B pero esto no puede ocurrir por lo hecho en la prueba. $\square$

Una medida de probabilidad sobre un conjunto X es una medida con la propiedad de que $\mu(X) = 1$. Si la medida μ no es de probabilidad pero se cumple que $\mu(X) < \infty$ entonces se puede normalizar, es decir, definir una nueva medida $\mu_0(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$ para cada A subconjunto medible, lo cual genera una medida de probabilidad. Al conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre el conjunto X lo denotaremos como $\mathbb{P}(X)$.

En este capítulo dotaremos al conjunto $\mathbb{P}(X)$ de una métrica de tal forma que sea posible definir una transformación $T : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ cuyos puntos fijos tengan relación con los conjuntos atractores del operador de Hutchinson, definido en el capítulo anterior. A esta transformación se le conoce también como sistema de funciones iterado o IFS y se genera a partir de una familia de funciones $\{w_1, \ldots, w_N\}$ borel medibles.

Se dará un teorema que nos dice que es posible visualizar el punto fijo del IFS, si tomamos $x_0 \in X$ y escogemos $x_n \in \{w_1(x_{n-1}), \ldots, w_N(x_{n-1})\}$ con $n \in \mathbb{N}$, donde la elección de x_n depende de la probabilidad p_i asociada a la función w_i. Y graficamos los puntos con n suficientemente grande de tal manera que nos asegure que $x_n \in A$, donde A es el conjunto atractor del operador de Hutchinson formado por la familia de funciones dadas.

Además, encontraremos una manera <<universal>> de codificar la dinámica de los puntos del conjunto atractor y que nos será de gran utilidad para ver la relación que guarda éste conjunto con el soporte de su medida.

Para tal fin serán necesarios algunos resultados de análisis funcional que en su momento se mencionarán.

3.1. La métrica de Hutchinson

Definimos la métrica d_H en $\mathbb{P}(X)$, el espacio métrico resultante $(\mathbb{P}(X), d_H)$ será completo.

Recordemos que $Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ es el conjunto de todas las funciones $\phi : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz continuas con constante ≤ 1.

Si $\mu \in \mathbb{P}(X)$ podemos definir una funcional lineal $\mu : Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X) \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(\phi) = \int_X \phi(x) d\mu(x)$, con $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$.

Definición 3.1.1. *La métrica de Hutchinson sobre $\mathbb{P}(X)$ se define como:*

$$d_H(\mu, \nu) := sup\{\mu(\phi) - \nu(\phi) : \phi \in \ Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\}, \tag{3.1}$$

para toda $\mu,\ \nu \in \mathbb{P}(X)$.

Daremos las siguientes observaciones, necesarias para demostrar la proposición 3.1.1.

Observación 3.1.1. *Si $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ entonces $-\phi$ está en $Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$.*

Observación 3.1.2. *Dado $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ se tiene que $\mu(-\phi) = -\mu(\phi)$ ya que $\mu(-\phi) = \int -\phi d\mu = -\int \phi d\mu = -\mu(\phi)$.*

De esto se cumple también que $\mu(\phi) = -\mu(-\phi)$.

Proposición 3.1.1. $(\mathbb{P}(X), d_H)$ *es un espacio métrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mu, \nu, \sigma \in \mathbb{P}(X)$.

i) Probaremos que $d_H(\mu, \nu) \geq 0$.

Supongamos que $d_H(\mu, \nu) < 0$.

Dado $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ entonces por la definición de d_H se tiene que $\mu(\phi) - \nu(\phi) < 0$ y$\mu(-\phi) - \nu(-\phi) < 0$ (por observación 3.1.1)

Por otra parte $\mu(-\phi) - \nu(-\phi) = -\mu(\phi) + \nu(\phi)$ (por observación 3.1.2).

Como $\mu(\phi) - \nu(\phi) < 0$ entonces $-\mu(\phi) + \nu(\phi) > 0$, es decir, $\mu(-\phi) - \nu(-\phi) > 0$ lo cual es una contradicción.

Así $d_H(\mu, \nu) \geq 0$.

ii) Se demostrará ahora que $\mu = \nu$ si y solo si $d_H(\mu, \nu) = 0$.

Nótese que $\mu = \nu$ si y solo si para toda $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ se cumple que $\int \phi d\mu = \int \phi d\nu$, es decir, $\mu(\phi) - \nu(\phi) = 0$ esto es cierto si y solo si $d_H(\mu, \nu) = 0$.

iii) Se probará ahora la simetría de d_H. Obsérvese que:

$$sup\{\mu(\phi) - \nu(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} = sup\{\mu(-\phi) - \nu(-\phi)) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\},$$

esto es cierto por obs. 3.1.1.

Y por obs 3.1.2 se tiene que:

$$sup\{\mu(-\phi) - \nu(-\phi)) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} = sup\{\nu(\phi) - \mu(\phi)) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\}.$$

Por lo tanto $d_H(\mu, \nu) = d_H(\nu, \mu)$.

iv)Resta probar que d_H es transitiva.

$$\begin{aligned}
d_H(\mu, \nu) &= sup\{\mu(\phi) - \nu(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} \\
&= sup\{\mu(\phi) + \sigma(\phi) - \sigma(\phi) - \nu(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} \\
&\leq sup\{\mu(\phi) - \sigma(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} + sup\{\sigma(\phi) - \nu(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} \\
&= d_H(\mu, \sigma) + d_H(\sigma, \nu).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.2. $(\mathbb{P}(X), d_H)$ *es un espacio métrico completo.*

Para probar la proposición anterior son necesarios los siguientes resultados.

Sea X un conjunto. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama no negativa si y solo si $f(x) \geq 0$ para toda $x \in X$. Una funcional lineal ϕ definida sobre un espacio vectorial U se llama *positiva* si y solo si $\phi(f) \geq 0$ para toda función $f \in U$ no negativa.

Se dice que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de valores reales *decrece a cero* si y solo si $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots$ para todo $x \in X$ y $lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in X$. Una funcional lineal ϕ definida sobre un espacio vectorial U se llama $\sigma - suave$ si y solo si $\phi(f_n) \to 0$ para cada sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ que decrece a cero.

Teorema 3.1.1. *(Teorema de Dini) Sea X un espacio compacto. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que decrece a cero. Entonces f_n converge uniformemente a cero sobre X.*

El siguiente teorema es una versión del Teorema de Representación de Riesz para funcionales sobre el espacio de funciones Lipschitz con valores reales.

Teorema 3.1.2. *Sea X un espacio métrico y sea ϕ una funcional lineal positiva $\sigma - suave$ sobre el espacio de funciones Lipschitz con valores reales. Entonces existe una única medida Borel finita ν sobre X tal que*

$$\phi(f) = \int f d\nu$$

para cada f en el espacio de funciones Lipschitz con valores reales.

Las pruebas de estos teoremas pueden ser consultada en [2].

Probemos ahora que $(\mathbb{P}(X), d_H)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{P}(X)$ una sucesión de Cauchy, es decir:

Dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$: si $m, n \geq N(\epsilon)$ entonces

$$d_H(\mu_n, \mu_m) = sup\{\mu_n(\phi) - \mu_m(\phi) : \phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)\} < \epsilon.$$

Así, para cada $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$ se cumple que $\{\mu_n(\phi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales y por tanto convergente.

Entonces existe una funcional lineal f tal que $f : Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X) \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$f(\phi) = lim_{n\to\infty} \mu_n(\phi). \tag{3.2}$$

f es $\sigma - suave$, ya que si $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones con valores en los reales que decrece a cero, por el teorema de Dini ϕ_n converge uniformemente a cero sobre X, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M(\epsilon)$ se tiene que $\phi_m(x) < \epsilon$ para cada $x \in X$. Como para cualquier n y $m \geq M(\epsilon)$ se cumple que

$$\mu_n(\phi_m(X)) = \int_X \phi_m(x) d\mu_n(x) < \epsilon\mu_n(X) = \epsilon,$$

entonces $lim_{m\to\infty} f(\phi_m) = 0$.

Por la versión del Teorema de Representación de Riesz para funcionales definidas sobre el espacio de funciones de Lipschitz existe una única medida Borel finita μ sobre X tal que:

$$f(\phi) = \int_X \phi d\mu. \tag{3.3}$$

Resta probar que μ es de probabilidad.

Obsérvese que $\mu(X) = \int_X 1 d\mu = lim_{n\to\infty}\mu_n(1)$, la última igualdad se da por las ecuaciones (3.2) y (3.3).

Por otra parte $lim_{n\to\infty}\mu_n(1) = lim_{n\to\infty} \int_X 1 d\mu_n = lim_{n\to\infty}\mu_n(X)$.

Entonces $\mu(X) = lim_{n\to\infty}\mu_n(X) = 1$, ya que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{P}(X)$.

$\therefore$ μ es de probabilidad.

$\therefore$ $\mathbb{P}(X)$ es completo. $\square$

3.2. Sistema de Funciones Iteradas con probabilidades.

En el capítulo anterior se estudió la forma de construir contracciones sobre $\mathcal{H}(X)$ y vimos que estas contracciones tenía un único punto fijo; a este punto fijo se le llamó conjunto atractor o conjunto fractal. Veremos que en $\mathbb{P}(X)$ se da una situación análoga, es decir, la existencia de medidas atractoras.

A continuación se definen lo que es un Sistema de Funciones Iteradas con probabilidades, el cual utilizaremos para la construcción de una medida atractora. En adelante X será un espacio métrico compacto.

Sea $\mathcal{C}(X)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas con valores reales sobre X, con norma:

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\,\{|f(x)| : x \in X\},\ f \in \mathcal{C}(X). \tag{3.4}$$

Sea **w**:= $\{w_i : X \to X : i = 1 \dots N\}$ una colección de funciones Borel medibles sobre X. Sea **p**:= $\{p_i | i = 1 \dots N\}$ un vector de probabilidades, es decir, $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Definición 3.2.1. $\{X,$***w***,***p***$\}$ *es un Sistema de Funciones Iterado con probabilidades si y solo si el conjunto de probabilidades* ***p*** *asociado es tal que el operador* T *sobre* $\mathcal{C}(X)$*, dado por*

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i(f \circ w_i)(x), \text{ para } f \in \mathcal{C}(X), \tag{3.5}$$

tiene la propiedad $T(\mathcal{C}(X)) \subset \mathcal{C}(X)$*.*

El sistema de funciones iterado es conocido también como (IFS) debido a sus siglas en inglés.

Nótese que si cada w_i es continua entonces $\{X,$**w**,**p**$\}$ es un IFS con probabilidades, para cualquier conjunto **p** de probabilidades asociado, en este caso el IFS se escribirá como $\{X,$**w**$\}$ y nos referiremos a éste simplemente como IFS.

En el resto de este capítulo $\{X,$**w**,**p**$\}$ se utilizará para denotar un IFS con probabilidades donde **w**:= $\{w_i : X \to X : i = 1 \ldots N\}$ una colección de funciones Borel medibles sobre X.

Ejemplo 3.2.1. *Sea* $X = [0, 1]$, $w_1(x) = \frac{1}{3}x,\ w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $N = 2$*. Entonces* $\{X,$***w***,***p***$\}$ *es un IFS para cualquier conjunto de probabilidades* ***p***$= (p_1, p_2)$*.*

3.2.1. Medida atractora.

Sabemos que $(\mathbb{P}(X), d_H)$ es un espacio métrico completo, entonces para poder hablar de una medida atractora es necesario crear primero una contracción en este espacio, para ello son necesarias las siguientes definiciones y teoremas.

El siguiente teorema es una versión del Teorema de Representación de Riesz para funcionales sobre $\mathcal{C}(X)$ con X un espacio métrico compacto.

Teorema 3.2.1. *Sea* X *un espacio métrico compacto y sea* ϕ *una funcional lineal positiva sobre* $\mathcal{C}(X)$*. Entonces existe una única medida Borel finita* ν *sobre* X *tal que*

$$\phi(f) = \int f d\nu$$

para cada f *en* $\mathcal{C}(X)$*.*

Supóngase que Z es un espacio normado sobre el campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, los elementos del dual Z^* se designan usualmente como z^* y escribimos

$$\langle z, z^* \rangle \tag{3.6}$$

en lugar de $z^*(z)$.

Proposición 3.2.1. *Sean Y, Z dos espacios normados. A cada $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ le corresponde un único $T^* \in \mathcal{B}(Z^*, Y^*)$ que satisface*

$$\langle Ty, z^* \rangle = \langle y, T^* z^* \rangle \tag{3.7}$$

para todo $y \in Y,\ z^* \in Z^*$. Más aún T^* satisface $\| T^* \| = \| T \|$.

Proposición 3.2.2. *Dada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ y T una transformación tal que $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ entonces $\int Thd\mu = \int hdT^*\mu$ para cada $h \in \mathcal{C}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ y $h \in \mathcal{C}(X)$ sabemos que $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ define una funcional lineal tal que $\mu(h) = \int hd\mu$, es decir, $\mu \in \mathcal{C}(X)^*$.

Entonces $\int Thd\mu = \mu(Th) = \langle Th, \mu \rangle$, la última igualdad se da por ecuación (3.6).

De manera análoga se tiene que $\int hdT^*\mu = (T^*\mu)(h) = \langle h, T^*\mu \rangle$.

Por la proposición 3.2.1 se cumple que $\langle Th, \mu \rangle = \langle h, T^*\mu \rangle$, con lo cual termina la prueba. □

El Teorema de Representación de Riesz para funcionales sobre $\mathcal{C}(X)$ con X espacio métrico compacto nos dice que el espacio dual de $\mathcal{C}(X)$ es el espacio de Banach de todas las medidas Borel finitas sobre X, denotada por $\mathcal{M}(X)$.

Proposición 3.2.3. *Sea el operador lineal $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ definido por*

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i f(w_i(x)), \tag{3.8}$$

entonces su operador adjunto $T^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ es el siguiente

$$(T^*\nu)(B) = \sum_{i=1}^{N} p_i (w_i^{\#})(\nu) B \tag{3.9}$$

para todo B subconjunto Borel de X.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$, por proposición 3.2.1 se tiene que dado $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}(X))$ existe $T^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}(X))$, que satisface

$$\langle Tf, \nu \rangle = \langle f, T^*\nu \rangle, \tag{3.10}$$

Ahora, $\langle \cdot, \nu \rangle$ define una funcional lineal sobre $\mathfrak{B}(\mathcal{C}(X))$, por el Teorema de Representación de Riesz existe μ una medida de Borel sobre X tal que:

$$\langle Tf, \nu \rangle = \int Tfd\mu = \int_X \sum_{i=1}^{N} p_i (f \circ w_i)(x) d\mu,$$

la última igualdad se da por ec. (3.2.4). Y por proposición $3.0.1$ se tiene que:

$$= \int_X \sum_{i=1}^{N} p_i f dw_i^{\#}(\mu). \tag{3.11}$$

Sea B subconjunto Borel de X y tómese $f = \chi_B$ en ec. (3.11) entonces

$$\int_X \sum_{i=1}^{N} p_i \chi_B dw_i^{\#}(\mu) = \sum_{i=1}^{N} p_i w_i^{\#}(\mu)(B).$$

Así,

$$(T^*\nu)(B) = \sum_{i=1}^{N} p_i (w_i^{\#})(\nu)B,$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ □

Recordemos que una familia de funciones $f_1, \ldots, f_n$ con $n \in \mathbb{N}$, $f_i : X \to X$ es contracción si existe un número $l_i \in [0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq l_i d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Al número l_i se le llama factor de contractividad de f_i. El operador de Hutchinson para esta familia de funciones es una contracción en $\mathcal{H}(X)$ al tomar como su factor de contractividad el número $l =$máx$\{l_1, \ldots, l_n\}$. En el caso de nuestro espacio de medidas si queremos crear contracciones se debe agregar alguna condición al IFS que nos permita definir una función que sea contracción. La siguiente definición da esta condición.

Definición 3.2.2. *Un IFS con probabilidades* $\{X$,***w***,***p***$\}$ *se llama hiperbólico con factor de contracción* s *si y sólo si existe una constante* $0 \leq s < 1$ *tal que*

$$sup\{\frac{d(w_i(x), w_i(x'))}{d(x, x')} : x, x' \in X\} \leq s \tag{3.12}$$

para $i = 1 \ldots N$*, donde* d *denota la métrica sobre* X*.*

Enunciamos ahora el teorema que nos asegura la existencia de puntos fijos en $\mathbb{P}(X)$.

Teorema 3.2.2. *Sea* $\{X$,***w***,***p***$\}$ *un* IFS *hiperbólico con probabilidades. Entonces existe una única medida de probabilidad* μ *sobre* $\mathbb{P}(X)$ *tal que* $T^*\mu = \mu$*, donde* T^* *está dado como en la proposición 3.2.3. Más aún cada medida de probabilidad* $\nu \in \mathbb{P}(X)$ *es atraída a* μ *en el sentido:* $T^{*n}\nu \to \mu$*, donde la convergencia es en la métrica de Hutchinson* d_H*.*

Enunciaremos primero algunas definiciones, teoremas y proposiciones necesarios para la prueba del teorema 3.2.2.

Un proceso de Markov es la cuarteta $(X, \mathcal{F}, \mu, P)$ donde P es un operador positivo no expansivo sobre $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.

No expansivo se refiere a que la norma:

$$\| P \| = sup\{|Pf| : \| f \|_{L^1} \leq 1\} \leq 1. \tag{3.13}$$

Y positivo significa que para cada $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$ y $f > 0$, se cumple que $Pf \geq 0$.

Ahora, sea $\{X$,**w**,**p**$\}$un IFS con probabilidades. Considérese el siguiente proceso de Markov en tiempo discreto $(X, \mathcal{B}(X), \mu, P)$, donde $\mathcal{B}(X)$ denota el álgebra de subconjuntos Borel de X y

$$P(x, B) := \sum_{i=1}^{N} p_i \chi_{w_i(x)}(B), \tag{3.14}$$

es la probabilidad de que dado $x \in X$ al aplicarle cada una de las funciones Borel medibles se cumpla que $x \in B$.

Observemos que por lo hecho hasta este momento el operador T^* está definido sobre $\mathcal{M}(X)$, pero nuestro interés es sólo en las medidas de probabilidad. El siguiente teorema nos asegura que el operador T^* tiene puntos fijos aun si se restringe al espacio $\mathbb{P}(X)$.

Teorema 3.2.3. *Existe una medida de μ tal que*

$$\mu(B) = \int_K P(x, B) d\mu(x), \tag{3.15}$$

para todo subconjunto Borel B de X.

Enunciamos primero dos teoremas necesarios para la prueba

Teorema 3.2.4. *(del Punto Fijo de Schauder) Sea M un subconjunto compacto, convexo, no vacío de un espacio de Banach X, y suponga $T : M \to M$ continua. Entonces T tiene un punto fijo.*

Teorema 3.2.5. *(Alaoglu) La bola unitaria cerrada $S^* = \{x^* :\| x^* \|\leq 1\}$ de X^* es compacta en la topolgía débil*.*

Prueba del teorema 3.2.3

DEMOSTRACIÓN. El operador lineal T definido por

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i f(w_i(x)) \tag{3.16}$$

transforma $\mathcal{C}(X)$ en sí mismo de manera continua. Por lo tanto, el operador adjunto T^* transforma el conjunto $\mathbb{P}(X)$ de medidas de probabilidad sobre X en sí mismo continuamente débil*.

$\mathbb{P}(X)$ es un conjunto convexo y por el teorema de Alaoglu es un conjunto compacto débil* y por el teorema del punto fijo de Schauder T^* tiene un punto fijo $\mu \in \mathbb{P}(X)$.

Por lo tanto el punto fijo μ satisface:

$$\begin{aligned}
\mu(B) = (T^*\mu)(B) = \sum_{i=1}^{N} p_i w_i^{\#}(\mu)(B) &= \sum_{i=1}^{N} p_i \mu(w_i^{-1}(B)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_i \int_X \chi_{w_i(x)}(B) d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{N} p_i \chi_{w_i(x)}(B) d\mu(x) \\
&= \int_X P(x, B) d\mu(x).
\end{aligned}$$

para todo B subconjunto Borel de X. □

La siguiente proposición nos dice que el operador T^* es una contraccion en $\mathbb{P}(X)$.

Proposición 3.2.4. *El operador $T^* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$, dado por*

$$(T^*\nu)B = \sum_{i=1}^{N} p_i (w_i^{\#} \circ \nu) B, \tag{3.17}$$

es una contracción con factor de contractividad s.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ y sea $\phi \in Lip_{\mathbb{R}}^{(\leq 1)}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}
T^*\mu - T^*\nu &= \sum_{i=1}^{N} p_i (w_i^{\#} \circ \mu)(\phi) - \sum_{i=1}^{N} p_i (w_i^{\#} \circ \nu)(\phi) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_i (\mu(\phi \circ w_i) - \nu(\phi \circ w_i)).
\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$T^*\mu - T^*\nu = \sum_{i=1}^{N} p_i s(\mu(s^{-1}\phi \circ w_i) - \nu(s^{-1}\phi \circ w_i))$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{N} p_i s d_H(\mu,\nu) \qquad (3.18)\\ &= s d_H(\mu,\nu). \end{aligned}$$

La ecuación (3.18) se debe a que $Lip(s^{-1}\phi \circ w_i) \leq s^{-1}1s = 1$, ya que:

$$|\phi(w_i(x)) - \phi(w_i(y))| \leq 1d(w_i(x), w_i(y)) \leq 1sd(x,y).$$

Por lo tanto, $d_H(T^*\mu, T^*\nu) = sd_H(\mu,\nu)$. □

Con lo dicho hasta ahora se puede dar la prueba del teorema 3.2.2.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbb{P}(X)$ es una espacio métrico completo con la métrica de Hutchinson d_H y T^* es una contracción en este espacio, basta aplicar el teorema del punto fijo de Banach para asegurar la existencia de una única medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que sea punto fijo para el operador T^* y que dada cualquier otra medida ν, $T^{*n}\nu \to \mu$ con la métrica de Hutchinson. □

Definición 3.2.3. *La medida μ definida en el Teorema 3.2.2, se llama medida atractora o **p**-balanceada del IFS* $\{X,$***w***,***p***$\}$ *con probabilidades.*

3.3. El soporte de una medida atractora.

Ahora veremos cual es la relación entre el soporte de una medida y el atractor A. Este problema se resuelve haciendo uso del espacio de códigos asociado a un IFS con probabilidades. Para esto, se usará la misma notación que se usó en la sección 3.2.3.

La transformacion *shift izquierdo* se define como $\tau_i : \Sigma \to \Sigma$

$$\tau_i(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots) := (i, i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots). \qquad (3.19)$$

En adelante el par (Σ,τ) denotará a un IFS hiperbólico para cualquier conjunto de probabilidades, donde $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ con $N \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.3.1. *Sea la transformación shift izquierdo* $\tau_i : \Sigma \to \Sigma$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, N\}$*, entonces el par* (Σ,τ) *es un* IFS *hiperbólico para cualquier conjunto de probabilidades.*

DEMOSTRACIÓN. Se demostrará que existe una constante $0 \leq s < 1$ tal que para todo *i*, *i'* $\in \Sigma$ y *i*$\neq$*i'* se cumple:

$$\sup\{\frac{d_F(\tau_i(\mathbf{i}), \tau_i(\mathbf{i}'))}{d_F(\mathbf{i}, \mathbf{i}')}\} \leq s,$$

Obsérvese que por la definición de shift izquierdo se cumple que $\tau_i(\mathbf{i}))_1 = \tau_i(\mathbf{i}'))_1$. Entonces

$$d_F(\tau_i(\mathbf{i}), \tau_i(\mathbf{i}')) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(\tau_i(\mathbf{i}))_j - (\tau_i(\mathbf{i}'))_j|}{(N+1)^j} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|i_j - i'_j|}{(N+1)^j},$$

factorizando $\frac{1}{N+1}$ y recorriendo el índice en la última igualdad se tiene que

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|i_j - i'_j|}{(N+1)^{j-1}} = \frac{d_F(\mathbf{i}, \mathbf{i}')}{N+1}.$$

para cada *i*,*i'*$\in \Sigma$ y *i*$\neq$*i'*.

Ya que $\frac{1}{N+1} < 1$ entonces el par (Σ,τ) es un IFS hiperbólico. $\square$

Rercodemos que (Σ, d_F) es un espacio métrico compacto. Ahora al conjunto Σ le daremos la estructura de espacio medible, para esto debemos dar una familia de conjuntos medibles que contega a las bolas abiertas de Σ.

Por la definición de los subconjuntos de Σ llamados cilindros, dada en el capítulo 2, tomamos la familia que contiene a todas las uniones e intersecciones finitas de conjuntos de la forma $C(i, x)$. Esta familia es un álgebra $\mathcal{F}_0$ conocida como el álgebra de cilindros. Y genera una familia de subconjuntos medibles de Σ que denotaremos por $\mathcal{F}$. Observemos que todas las bolas de radio 2^{-n} alrededor de cualquier punto *i*$\in \Sigma$ están contenidas en $\mathcal{F}$ y por tanto se trata de la $\sigma-$ álgebra de Borel.

Ya que $\{\Sigma,\ \tau\ \}$ es un IFS hiperbólico, a $\{\Sigma,\ \tau\ \}$ le podemos aplicar el Teorema 3.2.2 para tener una única medida de probabilidad $\rho \in \mathbb{P}(\Sigma)$, es decir, la medida $\mathbf{p}-balanceada$ para este IFS.

Para el espacio de medida $(\Sigma, \mathcal{F}, \rho)$ podemos definir los operadores análogos a T y T^*, los cuales denotaremos por Θ y Θ^* respectivamente y que se definen de la siguiente forma:

$$(\Theta f)(\mathbf{i}) := \sum_{i=1}^{N} p_i f(\tau_i(\mathbf{i})), \tag{3.20}$$

para toda $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$. Y

$$(\Theta^* \nu)E := \sum_{i=1}^{N} p_i(\tau_i^{\#} \circ \nu)E, \tag{3.21}$$

para toda $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}(\Sigma)}$ y para todo $E \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.3.2. *El atractor de un IFS hiperbólico* (Σ, τ) *es* Σ.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\mathbf{i} \in \Sigma$ definimos el operador de Hutchinson, $H(\mathbf{i}) = \bigcup_{i=1}^{N} \tau_i(\mathbf{i})$. Si A es el atractor para el IFS, entonces por proposición 2.3.2

$$A = \lim_{n\to\infty} H^n(\mathbf{i}) = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,N\}^n} \tau_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{i}).$$

Es decir, $A = \Sigma$ ya que en A están todas las sucesiones cuyas componentes están en $\{1,\ldots,N\}$. $\square$

El siguiente teorema relaciona el atractor A de un IFS hiperbólico $\{X,\mathbf{w},\mathbf{p}\}$ con Σ el atractor de (Σ,τ).

Teorema 3.3.1. *Supongase que $\{X,\boldsymbol{w},\boldsymbol{p}\}$ es un IFS hiperbólico con probabilidades y que A es su único atractor.*

Entonces existe un transformación continua sobreyectiva $\gamma : \Sigma \to A$,

$$\gamma(\mathbf{i}) = lim_{n\to\infty} w_{i_1} \circ w_{i_2} \circ \ldots w_{i_n}(x), \tag{3.22}$$

donde el límite existe y es independiente de $x \in X$. En otras palabras $A = \gamma\Sigma$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$. Dado $x \in X$, $w_{i_1\ldots i_n}(x)$ es una sucesión de funciones, la cual es de Cauchy, ya que:

$$d(w_{i_1\ldots i_n}(x), w_{i_1\ldots i_{n'}}(x)) < s^{n_0} diam(X), \tag{3.23}$$

donde $n_0 =^{min\{n,n'\}}$ y s es el factor de contractividad para el IFS hiperbólico.

Así, dado $\epsilon > 0$ escojamos n_0 tal que $s^{n_0} diam(X) < \epsilon$.

Entonces, si $n, n' \geq n_0$: $d(w_{i_1\ldots i_n}(x), w_{i_1\ldots i_{n'}}(x)) < \epsilon$, lo cual implica que $w_{i_1\ldots i_n}(x)$ es de Cauchy y por tanto convergente ya que X es completo.

Más aun, si $x, x' \in X$, se cumple también que

$$d(w_{i_1\ldots i_n}(x), w_{i_1\ldots i_{n'}}(x')) < s^{n_0} diam(X),$$

es claro que, cuando $n, n' \to \infty$, $d(w_{i_1\ldots i_n}(x), w_{i_1\ldots i_{n'}}(x')) \to 0$ y como $w_{i_1\ldots i_n}(x)$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} w_{i_1\ldots i_n}(x) = \lim_{n\to\infty} w_{i_1\ldots i_n}(x')$.

Por tanto el límite en la ecuación (3.22) existe y es independiente de $x \in X$.

Si $A(x) := lim_{n\to\infty} \mathbf{w}^n(x)$. Entonces el límite pertenece a $A(x)$.

Probemos ahora la continuidad de γ.

Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $s^n diam(X) < \epsilon$ y $\mathbf{i}, \mathbf{i}' \in \{1,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$ tales que sus primeros n términos son iguales, es decir:

$$d_F(\mathbf{i},\mathbf{i}') < (N+1)^{-n}, \text{por proposición 2.1.5.}$$

Entonces,

$$d(\gamma(\mathbf{i}), \gamma(\mathbf{i}')) < \epsilon.$$

Para probar que γ es sobreyectiva tomemos $a \in A(x)$. Por definición

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \{w_{i_1\dots i_n}(x) | i_j \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, n\}\},$$

Así,si tomamos $a \in A(x)$ existe una sucesión $\{\mathbf{i}_n\} \subseteq \Sigma$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_{\mathbf{i}_n}(x) = a$, donde $w_{\mathbf{i}_n}(x) = w_{i_1\dots i_n}(x)$.

Como Σ es compacto la sucesión $\{\mathbf{i}_n\}$ es convergente en Σ. Sea **j**$\in \Sigma$ su punto límite entonces $d_F(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}) \to 0$, entonces si:

$$\alpha(n) = \#\{k \in \mathbb{N} | j_k = i_{n,k}\},$$

$\alpha(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, es decir, para n suficientemente grande la cantidad de términos que coinciden de $\mathbf{i}_n$ y **j** aumenta.

Así $d_F(w_{\mathbf{i}_n}(x), w_{j_1\dots j_n}(x)) < s^{\alpha(n)} diam(X)$.

Por lo tanto:

$$\gamma(\mathbf{j}) = \lim_{n\to\infty} w_{j_1\dots j_n}(x) = \lim_{n\to\infty} w_{\mathbf{i}_n}(x) = a$$

$\square$

Definición 3.3.1. *Sea μ una medida **p**-balanceada para un IFS $\{X,$**w**$\}$ y sea T definido sobre $L_1(X, \mu)$ como en la ecuación* (3.2.4). *Un subconjunto cerrado $G \subseteq X$ se llama recurrente para T si para cada subconjunto O no vacío abierto en G y cada $x \in G$ existe un entero n tal que $(T^{\circ n}\chi_O)(x) > 0$.*

El siguiente teorema será de mucha utilidad para ver la relación entre el soporte de una medida y el atractor.

Teorema 3.3.2. *.Sea μ una medida **p**-balanceada para un IFS $\{X,$**w**,**p**$\}$. Si $G \subseteq X$ es recurrente para T y $\mu(G) > 0$, entonces cada subconjunto abierto O no vacío de G tiene medida estrictamente positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $O \subseteq G$ abierto y no vacío. Sea

$$S^O_{k,m} = \{x \in G : (T^{\circ m}\chi_O)(x) > \frac{1}{k}\}$$

para cada $k, m \in \mathbb{N}$, entonces $S^O_{k,m}$ es un subconjunto Borel de X.
Como G es recurrente para T, se cumple que $G = \bigcup_{k,m} S^O_{k,m}$

Entonces $0 < \mu(G) = \mu(\bigcup_{k,m} S^O_{k,m}) \leq \sum_{k,m} \mu(S^O_{k,m})$, es decir, existen $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(S^O_{k_0,m_0})$.
Así, como $T^*\mu = \mu$:

$$\mu(O) = \int_X \chi_O d\mu = \int_X \chi_O dT^*\mu = \int_X \chi_O dT^{*m_0}\mu = \int_X T^{m_0}\chi_O d\mu > 0.$$

□

Veamos que si A es el atractor de una IFS hiperbólico entonces es recurrente para T.

Teorema 3.3.3. *Sea atractor A de un IFS hiperbólico entonces A es recurrente para T, en particular, el soporte de μ es el atractor de A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$ y O un subconjunto abierto no vacío de A, se demostrará que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m\chi_O(x) > 0$.

Observemos primero que

$$T^m\chi_O(x) = \sum_{\{i_1\ldots i_m\}\in\{1,\ldots N\}^m} p_{i_1}\cdots p_{i_m}\chi_O \circ w_{i_1\ldots i_m}(x).$$

Tomemos $a \in O \subset A$ y $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x,a) < \epsilon\} \subset A$. Por el teorema 3.3.1 existe $\mathbf{i} \in \Sigma$ tal que $\gamma(\mathbf{i}) = \lim_{n\to\infty} w_{i_1\ldots i_n}(x) = a$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(a, w_{i_1\ldots i_n}(x)) < \epsilon$.

Entonces para cada $\mathbf{j} \in B_\epsilon(\mathbf{i}) = \{\mathbf{j} \in \Sigma | d_F(\mathbf{j}, \mathbf{i}) < \epsilon\}$, se tiene:

$$w_{j_i\ldots j_N}(x) \in B_\epsilon(a) \subset O.$$

Por lo tanto $\chi_O \circ w_{i_1\ldots i_N} = 1$, es decir $T^N\chi_O(x) > 0$.

Como el atractor A es recurrente para T cada subconjunto abierto de A tiene medida estrictamente positiva y por la proposición 3.0.2 A es igual al soporte de la medida μ. □

El siguiente paso es describir la relación entre la medida **p**-balanceada μ de un IFS hiperbólico con probabilidades $\{X$,**w**,**p**$\}$ y la medida **p**-balanceada ρ del IFS hiperbólico $\{\Sigma, \tau\}$. Para esto, tomemos la función γ definida en el teorema 3.3.1 y observemos que el operador lineal $\Gamma : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(\Sigma)$ definido como

$$(\Gamma f)(\mathbf{i}) := f(\gamma(\mathbf{i})) \tag{3.24}$$

es inyectivo, ya que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ si y sólo si $f(\gamma(\mathbf{i})) = g(\gamma(\mathbf{i}))$ para cada $\mathbf{i} \in \Sigma$. Como γ es sobreyectiva, $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$, por tanto $f = g$.

Por lo tanto, la transformación

$$\Gamma f \mapsto f \tag{3.25}$$

está bien definida y es una transformación lineal continua de $\Gamma\mathcal{C}(A)$ sobre $\mathcal{C}(A)$, ya que $\Gamma(1) = 1$.

El siguiente resultado es de gran importancia en análisis funcional y será de utilidad en la prueba de la proposición que se enuncia inmediatamente después.

Teorema 3.3.4. *(Teorema de Extensión de Hahn-Banach) Sea X un espacio lineal normado sobre un campo $\mathbb{K}$ y sea $U \subseteq X$ un subespacio lineal. Entonces cada funcional lineal continuo $\varphi : U \to \mathbb{R}$ puedes ser extendido lineal y continuamente a todo X de tal forma que preserve norma, es decir, existe un funcional lineal continuo $\psi : X \to \mathbb{R}$ con las propiedades*

$$\forall u \in U : \psi u = \varphi u \text{ y } \| \varphi \| = \| \psi \|.$$

Proposición 3.3.3. *La transformación $\Gamma^* : \mathbb{P}(\Sigma) \to \mathbb{P}(A)$ es sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Se desea probar que $\forall \nu \in \mathbb{P}(A), \exists \nu' \in \mathbb{P}(\Sigma) : \Gamma^*\nu' = \nu$.

Dado $\nu \in \mathcal{M}(A)$, definimos $\kappa_\nu : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ como

$$\kappa_\nu(\Gamma f) := \nu(f), \tag{3.26}$$

es decir, κ_ν es la composición de ν con Γ ver ecuación definida en (3.25).

Entonces, $\kappa_\nu : \Gamma(\mathcal{C}(A)) \subset \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ define una funcional lineal continua sobre $\Gamma(\mathcal{C}(A))$, por el teorema de Extensión de Hahn-Banach (ver Teorema 3.3.4) existe una funcional lineal continua $\tilde{\kappa_\nu} : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\kappa_\nu}|_{\Gamma(\mathcal{C}(A))} = \kappa_\nu \tag{3.27}$$

y $\|\tilde{\kappa_\nu}\| = \|\kappa_\nu\| = 1$.

Por el teorema de representación de Riesz, existe $\nu' \in \mathbb{P}(\Sigma)$ tal que

$$\tilde{\kappa_\nu}(g) = \int g d\nu', \ \forall g \in \mathcal{C}(\Sigma). \tag{3.28}$$

Obsérvese que ν y $\Gamma^*\nu' \in \mathbb{P}(A)$. Entonces $\nu = \Gamma^*\nu'$ si y solo si $\int \phi d\nu = \int \phi d\Gamma^*\nu'$ para cada $\phi \in \mathcal{C}(A)$.

Así,

$$\int \phi d\Gamma^*\nu' = \int \Gamma \circ \phi d\nu' = \tilde{\kappa_\nu}(\Gamma \circ \phi),$$

la última igualdad se da por la ecuación (3.28) y por la ecuación (3.27) se tiene que

$$\tilde{\kappa_\nu}(\Gamma \circ \phi) = \kappa_\nu(\Gamma \circ \phi).$$

Por la ecuación (3.26) se tiene que $\kappa_\nu(\Gamma \circ \phi) = \nu(\phi)$.

Por lo tanto, $\int \phi d\Gamma^* \nu' = \nu(\phi) = \int \phi d\nu$, con lo cual se completa la prueba. □

Teorema 3.3.5. *Sea $\{X,\boldsymbol{w},\boldsymbol{p}\}$ un IFS hiperbólico con probabilidades, entonces su medida $\boldsymbol{p}$-balanceada μ está dada por $\mu(E) = (\gamma^{\#} \circ \rho)E$, para todo $E \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tilde{T}$ la restricción de T a $\mathcal{C}(A)$.

El teorema (3.3.1) implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\gamma} & A \\ {\scriptstyle \tau_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w_i} \\ \Sigma & \xrightarrow[\gamma]{} & A \end{array}$$

es decir, $\gamma \circ w_i : \Sigma \to A$ y $\tau_i \circ \gamma : \Sigma \to A$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{T})(f)(\mathbf{i}) = (\tilde{T}f)\gamma(\mathbf{i}) = \sum_{i=1}^{N} p_i(f \circ w_i)(\gamma(\mathbf{i})) = \sum_{i=1}^{N} p_i(f \circ \tau_i)(\gamma(\mathbf{i})) \\ = \Theta f(\gamma(\mathbf{i})) = \Theta(\Gamma f)(\mathbf{i}) = (\Theta\Gamma)(f)(\mathbf{i}), \end{aligned}$$

por lo tanto para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(\Gamma\tilde{T}^n)(f)(\mathbf{i}) = (\Theta^n\Gamma)(f)(\mathbf{i}).$$

Como $(\Gamma\tilde{T}^n)^* = \tilde{T}^{*n}\Gamma^*$ y $(\Theta^n\Gamma)^* = \Gamma^*\Theta^{*n}$, entonces

$$\tilde{T}^{*n}\Gamma^* = \Gamma^*\Theta^{*n}.$$

Por proposición anterior, dado cualquier $\kappa \in \mathbb{P}(A)$ existe $\nu \in \mathbb{P}(\Sigma)$ tal que $\Gamma^*\nu = \kappa$ y

$$\tilde{T}^{*n}\kappa = \tilde{T}^{*n}\Gamma^*\nu = \Gamma^*\Theta^{*n}\nu \to \Gamma^*\rho,$$

ya que ρ es la medida **p**-balanceada de $\{\Sigma, \tau\}$.

Por lo tanto $\Gamma^*\rho$ es el único punto fijo si T^* en $\mathbb{P}(A)$ y por tanto en $\mathbb{P}(X)$. □

Es posible visualizar el soporte de la medida atractora de un IFS. Si tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y escogemos $x_n \in \{w_1(x_{n-1}), \ldots, w_N(x_{n-1})\}$ con $n \in \mathbb{N}$, donde la elección de x_n

Figura 3.1: conjunto fractal conocido como la hoja de Barnsley

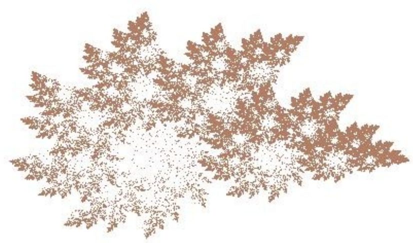
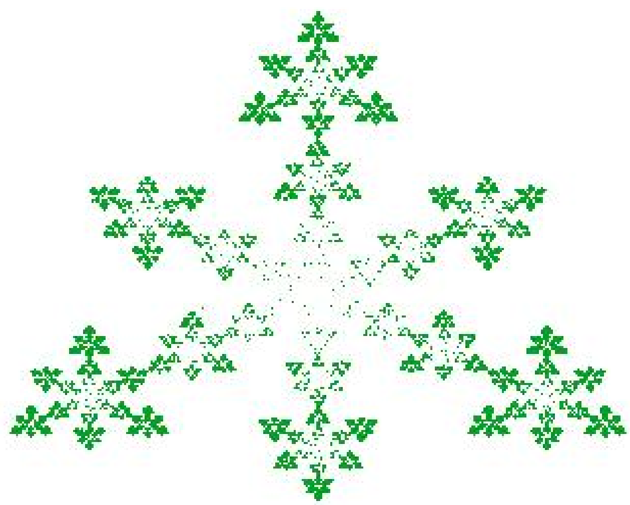


Figura 3.2: conjunto fractal que ocurre como el soporte de una medida

depende de la probabilidad p_i asociada a la funcioón w_i. Y graficamos los puntos con n suficientemente grande de tal manera que nos asegure que $x_n \in A$, donde A es el conjunto atractor del operador de Hutchinson formado por la familia de funciones dadas, entonces la imagen resultante será el soporte de la medida atractora o fractal. De esta forma se concluye que un conjunto fractal ocurre como el soporte de una medida. Las imágenes mostradas en la Figura 3.1 y la Figura 3.2 se obtiene con este procedimiento.



Capítulo 4

Conjuntos Autosimilares.

Una transformación *afín* T es la composición de una transformación $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una traslación, es decir, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es tal que $T(x, y) = A(x, y) + t$ donde t es un vector columna en $\mathbb{R}^n$. Hay un tipo de transformación S llamada *similitud* que es un caso particular de una transformación afín tal que cumple la igualdad $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. A r suele llamársele *radio de escala*. En este capítulo trabajaremos con similitudes donde $0 < r < 1$.

Obsérvese que S tansforma un conjunto en otro que es similar de manera geométrica, de aquí el nombre de similitud.

En este capítulo se verá la relación que existe entre el punto fijo del operador de Hutchinson formado por un conjunto de similitudes $S_1, \ldots, S_n$, la medida de Hausdorff de este punto fijo y el concepto de autosimilitud.

4.1. Medida y dimensión de Hausdorff.

La dimensión y la medida de Hausdorff tienen la ventaja de poder ser definidas para cualquier conjunto, su mayor desventaja es quizá que suele ser muy complicado calcularlas por métodos computacionales, sin embargo, es esencial para comprender la matemática que existe alrededor de un conjunto fractal.

Para definir la medida de Hausdorff, se hablará primero de lo que es una medida exterior, dos métodos para construirla y veremos que la medida de Hausdorff construida precisamente por uno de estos métodos, bajo ciertas condiciones, es una medida. Cabe recalcar que la razón por la cual la medida se construye a partir de una medida exterior es que esta se define para cualquier conjunto, como se verá en la siguiente sección.

4.1.1. Medidas Exteriores.

La medida de Hausdorff se define a partir de una medida exterior. A diferencia de una medida, la medida exterior se define para todo A subconjunto de X, es decir, para cada $A \in 2^X$, donde X es un conjunto.

Una medida exterior sobre X es una función $\overline{\mathcal{M}} : 2^X \to [0,\infty]$ que satisface:

1) $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$.

2) $\overline{\mathcal{M}}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$.

3) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$.

Mencionaremos dos métodos para construir medidas exteriores.

MÉTODO I.

Sea $\{\mathcal{U}_i | i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ una cubierta de subconjuntos de X para $A \subset X$. Si además se cumple que $0 \leq diam(\mathcal{U}_i) \leq \epsilon$ para cada $i \in I$, entonces a $\{\mathcal{U}_i\}$ se le conoce como $\epsilon - cubierta$ de A.

Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X tales que cubren a X y $C : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una función.

Teorema 4.1.1. *Existe una única medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ sobre X tal que:*

1) $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq C(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

2) Si $\overline{\mathcal{M}'}$ es cualquier otra medida exterior sobre X con $\overline{\mathcal{M}'}(A) \leq C(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$ entonces $\overline{\mathcal{M}}'(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.

En la demostración del teorema 4.1.1 se define la medida exterior de la siguiente manera: $\overline{\mathcal{M}}(A) =$ínf$\sum_{B\in\mathcal{D}} C(B)$, donde $B \subset X$ y $\mathcal{D}$ una cubierta de A. El ínfimo es sobre todas las cubiertas de A. Se dice que una medida está construida por el método I, si hace referencia a este teorema y se define precisamente de esta manera.

En [1] se puede consultar la demostración del teorema anterior.

El fin que se persigue es crear una medida, la definición siguiente nos dice cuando los conjuntos son medibles respecto a una medida exterior.

Definición 4.1.1. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior sobre un conjunto X. Un conjunto $A \subset X$ es $\overline{\mathcal{M}}-$medible (en el sentido de Caratheódory) si y solo si*

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash A)\ \forall E \subset X.$$

El teorema 4.1.2 da las condiciones bajo las cuales la medida exterior es una medida.

Teorema 4.1.2. *La colección $\mathcal{F}$ de conjuntos $\overline{\mathcal{M}}$-medibles es una σ-álgebra y $\overline{\mathcal{M}}$ es numerable aditiva sobre $\mathcal{F}$.*

Más adelante construiremos una medida exterior y una sigma álgebra haciendo uso del Teorema 4.1.2, para asegurar que esta medida exterior es una medida.

Consideremos el siguiente ejemplo de una medida exterior sobre $\mathbb{R}$ construida por el método I.

Ejemplo 4.1.1. *Tomemos la colección $\mathcal{A} = \{[a,b) : a < b\}$ de intervalos semi-abiertos y la función $C : 2^X \to [o,\infty]$ definida por $C([a,b)) = \sqrt{b-a}$. Si $\overline{\mathcal{M}}$ es la medida exterior correspondiente al teorema 4.1.1 (método I) entonces el intervalo $[0,1]$ no es $\overline{\mathcal{M}}-$medible (en el sentido de Caratheódory).*

Para comprobar esto observemos que el singular $\{[0,1)\}$ cubre a $[0,1)$ entonces

$$\overline{\mathcal{M}}([0,1)) \leq C([0,1)) = 1. \tag{4.1}$$

Por otra parte si tomamos $a_i < b_i$ con $i \in \mathbb{N}$ tales que $[0,1) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_1,b_i)$ entonces de acuerdo a la medida de Lebesgue se tiene que $1 \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Por lo tanto

$$(\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{b_i - a_i})^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(\sqrt{b_i - a_i})^2 + 2\sum_{i<j}\sqrt{b_i - a_i}\sqrt{b_j - a_j} \geq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \geq 1.$$

Entonces $\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{b_i - a_i} \geq 1$.

Como $\overline{\mathcal{M}}([0,1)) = \text{ínf}\sum_{B\in\mathcal{D}} C(B)$ donde el ínfimo es sobre todas las cubiertas $\mathcal{D}$ formadas por elementos de $\mathcal{A}$, tenemos

$$\overline{\mathcal{M}}([0,1)) \geq 1. \tag{4.2}$$

Así, por las ecuaciones (4.1) *y* (4.2)*, obtenemos que $\overline{\mathcal{M}}([0,1)) = 1$.*

De manera similar se prueba que $\overline{\mathcal{M}}([-1,0)) = 1$.

Si $E = \{[-1,1)\}$ y $A = [0,1]$, A no es $\overline{\mathcal{M}}-$medible (en el sentido de Caratheódory). Ya que, por el teorema 4.1.1

$$\overline{\mathcal{M}}(E) \leq C(E)) = \sqrt{2}$$

y

$$\overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E - A) = 1 + 1 = 2 > \sqrt{2} \geq \overline{\mathcal{M}}(E)$$

Por lo tanto $A = [0,1]$ no es medible.

El ejemplo 4.1.1 hace evidente que al construir una medida por el método I no nos asegura, en particular, que un conjunto cerrado sea medible, por tanto hacen falta condiciones e incluso ver si existe otro método para la construcción de una medida exterior.

Existe un segundo método para la construcción de medidas exteriores que resuelve las dificultades con las que nos encontramos en el ejemplo 4.1.1, y para probar esta afirmación es necesario hablar primero de una medida métrica exterior.

Medida métrica exterior. Al trabajar con conjuntos lo deseable es que sean medibles. En el caso de que sean subconjuntos de un espacio métrico estos conjuntos generalmente son abiertos o cerrados o están construidos a partir de abiertos o cerrados, en particular estos conjuntos suelen ser conjuntos Borel. Daremos una condición que nos asegura que los conjuntos Borel son medibles.

Dos conjuntos A, B en un espacio métrico (X, d) tienen separación positiva si y solo si $d(A, B) > 0$, esto es, existe $r > 0$ tal que $d(x, y) > r$, para cada $x \in A$ y $y \in B$.

Definición 4.1.2. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior sobre un espacio métrico. Decimos que $\overline{\mathcal{M}}$ es una medida métrica exterior si y solo si $\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$ para cualquier par $A, B \subset X$ con separación positiva.*

La razón por la cual se define medida métrica exterior es que los conjuntos Borel con esta medida son medibles como lo corrobora el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior métrica sobre un espacio métrico X. Entonces todo subconjunto Borel de X es $\overline{\mathcal{M}}$-medible.*

La medida $\mathcal{M}$ que se obtiene al restringir $\overline{\mathcal{M}}$ a conjuntos medibles, se llama medida métrica.

MÉTODO II.

En el ejemplo dado para la medida exterior construida por el método I, vimos un conjunto cerrado que no es medible respecto a esta medida. El método que a continuación se expone soluciona este problema.

Sean $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de un espacio métrico X, supongamos que para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ con $x \in A$ y $diam(A) \leq \epsilon$ y que $C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una función.

Una medida exterior se construirá basándonos en estos datos.

Para cada $\epsilon > 0$ sean $\mathcal{A}_\epsilon = \{A \in \mathcal{A} : diam(A) \leq \epsilon\}$ y $\overline{\mathcal{M}}_\epsilon$ la medida exterior del método I determinada por C usando la familia $\mathcal{A}_\epsilon$, es decir,

$$\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(E) = \operatorname{ínf} \sum_{B \in \mathcal{D}} C(B), \tag{4.3}$$

donde el ínfimo es sobre todas las cubiertas numerables $\mathcal{D}$ de E formadas por elementos de $\mathcal{A}_\epsilon$.

Se define $\overline{\mathcal{M}}(E) = lim_{\epsilon\to 0}\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(E) = sup_{\epsilon>0}\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(E)$.

Esta construcción de una medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ de una función de conjuntos se conoce como método II.

El siguiente teorema nos asegura que con una medida construida por el método II, los subconjuntos Borel son medibles.

Teorema 4.1.4. *La función de conjuntos medibles $\overline{\mathcal{M}}$ definida por el método II es una medida exterior métrica.*

DEMOSTRACIÓN. Se probará que para cualesquiera $A, B \subseteq X$ con separación positiva se cumple que $\overline{\mathcal{M}}(A+B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$.

Sean $A, B \subseteq X$, con $d(A,B) > 0$. Como $\overline{\mathcal{M}}$ es una medida exterior, se cumple que

$$\overline{\mathcal{M}}(A\bigcup B) \leq \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B). \tag{4.4}$$

Para la otra desigualda, sean $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < d(A,B)$ y $\mathcal{D}$ una $\epsilon - cubierta$ de $A\bigcup B$, entonces para cada $D \in \mathcal{D}$ se cumple que $diam(D) < \epsilon$ por tanto D solo intersecta al conjunto A o a B debido a la condición de separación positiva, entonces existen dos cubiertas ajenas tal que $\mathcal{D}_1 \bigcup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}_1$ cubre a A y $\mathcal{D}_2$ cubre a B.

Así, si $\overline{\mathcal{M}}$ es la medida exterior construida por el método I se tiene:

$$\sum_{D\in\mathcal{D}} C(D) = \sum_{D\in\mathcal{D}_1} C(D) + \sum_{D\in\mathcal{D}_2} C(D) \geq \overline{\mathcal{M}_\epsilon}(A) + \overline{\mathcal{M}_\epsilon}(B),$$

por 1) del Teorema 4.1.1.

Tomando el ínfimo sobre todas las cubiertas de $A\bigcup B$ y aplicando 2) del Teorema 4.1.1 se tiene que $\overline{\mathcal{M}_\epsilon}(A\bigcup B) \geq \overline{\mathcal{M}_\epsilon}(A) + \overline{\mathcal{M}_\epsilon}(B)$.

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$, se cumple que

$$\overline{\mathcal{M}}(A\bigcup B) \geq \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B). \tag{4.5}$$

$\therefore \overline{\mathcal{M}}(A\bigcup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$, por ecuaciones (4.4) y (4.5).

$\therefore \overline{\mathcal{M}}$ es una medida métrica exterior. $\square$

4.1.2. Medida y dimensión de Hausdorff.

La idea de definir medidas usando cubiertas de conjuntos fue introducida por Carathéodory en 1914. En 1919 Hausdorff usó este método para definir la medida que ahora lleva su nombre.

Sea X un espacio métrico y sea $s > 0$ un posible candidato para la dimensión. La medida exterior de Hausdorff s-dimensional es la medida exterior del método II para la función de conjuntos $C(A) = (diam(A))^s$ y se escribe como $\overline{\mathcal{H}^s}$. La restricción a conjuntos medibles se conoce como medida de Hausdorff s-dimensional y se denota como $\mathcal{H}^s$. Debido a que está construida por el método II, es una medida exterior métrica. Así, en particular, los conjuntos Borel son medibles.
Se da ahora una definición mas precisa.

Dado $A \subset X$ y $s > 0$. Para cualquier $\epsilon > 0$ se define

$$\mathcal{H}^s_\epsilon(A) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam(\mathcal{U}_i))^s : \{\mathcal{U}\}_{i=1}^{\infty} \text{ es una } \epsilon\text{-cubierta de } A\}. \tag{4.6}$$

Para valores más pequeños de ϵ la clase de cubiertas para A se reduce y el valor de $\mathcal{H}^s_\epsilon(A)$ incrementa.

Así, se define:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\epsilon(A) = \sup_{\epsilon>0}\mathcal{H}^s_\epsilon(A). \tag{4.7}$$

A $\mathcal{H}^s(A)$ se le conoce como la medida de Hausdorff s-dimensional.

Veremos una propiedad de la métrica de Hausdorff que nos será útil más adelante.

Proposición 4.1.1. ***(Propiedad de escala)****. Sea g una transformación de similitud con $\lambda > 0$ como factor de escala. Si $A \subset X$ entonces $\mathcal{H}^s(g(A)) = \lambda^s\mathcal{H}^s(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una $\epsilon-$cubierta de A, entonces una $\lambda\epsilon-$ cubierta de $g(A)$ es $\{g(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\sum(diam(g(U_i)))^s = \lambda^s \sum(diam(U_i))^s$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\lambda\epsilon}(g(A)) &= \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam(U_i'))^s : \{U_i'\} \text{ es una } \lambda\epsilon\text{-cubierta de } g(A)\} \\
&\leq \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam(g(U_i)))^s : \{U_i\} \text{ es una } \epsilon\text{-cubierta de } A\} \\
&= \text{ínf } \lambda^s\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam(U_i))^s : \{U_i\} \text{ es una } \epsilon\text{-cubierta de } A\} \\
&= \lambda^s\mathcal{H}^s_\epsilon(A).
\end{aligned}$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon \to 0$ a la desigualdad anterior se tiene que

$$\mathcal{H}^s(g(A)) \leq \lambda^s\mathcal{H}^s(A). \tag{4.8}$$

Para la otra desigualdad, sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una $\epsilon-$cubierta de $g(A)$, entonces $\{g^{-1}(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una $\frac{1}{\lambda}\epsilon-$cubierta de g y procediendo de manera equivalente se tiene que

$$\mathcal{H}^s(g(A)) \geq \lambda^s \mathcal{H}^s(A). \tag{4.9}$$

La igualdad se tiene por las ecuaciones (4.8) y (4.9). □

Obsérvese que en la definición de la medida de Hausdorff $s-$dimensional, la única condición que se impone a s es que sea positiva, surge entonces la pregunta de qué sucede cuando varia el valor de s, veremos que cuando el valor de s aumenta, la medida de Hausdorff $s-$dimensional decrece, en el siguiente teorema se prueba esta afirmación y se da más información de lo que sucede con diferentes valores de s.

Teorema 4.1.5. *Sean B un conjunto Borel y $0 < s < t$. Si $\mathcal{H}^s(B) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(B) = 0$. Si $\mathcal{H}^t(B) > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(B) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\epsilon > 0$, B un conjunto Borel y $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una ϵ-cubierta de B.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(diam(U_i))^t = \sum_{i=1}^{\infty}(diam(U_i))^{t-s+s} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^{t-s}(diam(U_i))^s,$$

entonces $\mathcal{H}^t_\epsilon(B) \leq \epsilon^{t-s}\mathcal{H}^s_\epsilon(B)$.

Si $\mathcal{H}^s(B) < \infty$, entonces

$$\mathcal{H}^t(B) \leq \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{t-s}\mathcal{H}^s_\epsilon(B) = 0 \cdot \mathcal{H}^s(B) = 0.$$

Así, se prueba la primera afirmación y la segunda es cierta por ser la contrarecíproca de la primera. □

El teorema anterior nos dice que dado cualquier $B \subset X$, X espacio métrico, existe un valor crítico $s_0 \in [0,\infty]$ para el cual se cumple que

$$\mathcal{H}^s(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_0 < s \\ \\ \infty & \text{si } 0 < s < s_0. \end{cases}$$

Este valor crítico se llama *dimensión de Hausdorff* de B y lo denotaremos como $dim_H B$. Ver Figura 4.1.

De manera formal:

$$dim_H B = \text{ínf}\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = 0\} = sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}. \tag{4.10}$$

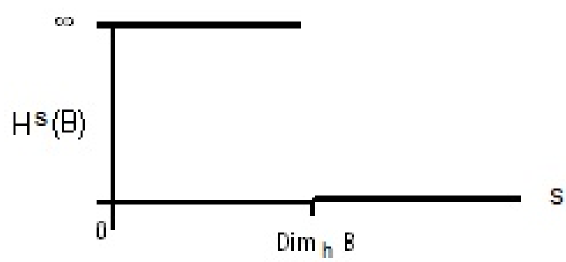


Figura 4.1: Gráfica de $\mathcal{H}^s(B)$ contra s. La dimensión de Hausdorff es el punto en el que se da el «salto» de ∞ a 0

4.2. Conjuntos Autosimilares.

El concepto de dimensión de similitud está asociado al de escala. Como ejemplo, consideremos subconjuntos de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que estén divididos en sub-longitudes, sub-áreas o sub-volúmenes, de longitud ϵ respectivamente y asumamos que tienen longitud (L), área (A) o volumen (V) igual a 1. Si se divide la línea en segmentos de longitud ϵ, entonces ϵ es un valor de escala, es decir, $\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$ con $L = 1$, obsérvese que $L = N\epsilon = 1$, entonces $\epsilon = \frac{1}{N}$.

De manera equivalente para la superficie se tendrían N partes de área ϵ^2, entonces $A = N\epsilon^2 = 1$, así $\epsilon^2 = \frac{1}{N}$. Y para el volumen se concluye que $\epsilon^3 = \frac{1}{N}$.

El exponente de ϵ coincide con la dimensión euclidiana del espacio en el que se encuentra el subconjunto. Si denotamos por D a dicho exponente de manera general se tendría que $N\epsilon^D = 1$, es decir, $D = \frac{log(N)}{log(\frac{1}{\epsilon})}$.

Teorema 4.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y una familia de similitudes $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ donde $Lip(S_1) = r_i < 1$. Entonces existe un único número no negativo s que satisface $\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ defininida como

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{N} r_i^s.$$

Nótese que Φ es una función continua, $\Phi(0) \geq 1$ y $lim_{s\to\infty}\Phi(s) = 0 < 1$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio, existe un valor s_0 tal que $\Phi(s_0) = 1$.

La derivada de Φ es

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^s \log r_i.$$

La cual es menor que 0, por tanto es estrictamente decreciente, por lo tanto existe un único valor s_0 tal que $\Phi(s_0) = 1$. $\square$

Definición 4.2.1. *Si* $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$ *a* D *se le llama dimensión de similitud de la familia de similitudes* $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$.

Para fines prácticos usaremos la siguiente notación:
Si S_i es una similitud para algún $i \in \mathbb{N}$y $K \subset X$ entonces denotaremos $K_i = S_i(K)$

Definición 4.2.2. *Un subconjunto* $K \subset X$ *es autosimilar respecto a la familia de similitudes* $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ *si*

i) $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$.

ii) $\mathcal{H}^k(K) > 0$, $\mathcal{H}^k(K_i \cap K_j) = 0$ *para* $i \neq j$ *y* $k = dim_H$.

Observación 4.2.1. *Si* K *es el punto fijo del operador de Hutchinson asociado a la familia de similitudes y cumple ii) de la definición 4.2.2 entonces es autosimilar.*

El siguiente teorema proporciona información sobre la relación entre la dimensión de Hausdorff y la dimención de similitud. Para demostrarlo la siguiente proposición será de utilidad.

Proposición 4.2.1. *Si* (X, d) *un espacio métrico,* $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ *una familia de similitudes con* $Lip(S_i) = r_i < 1$ *y* D *la dimensión de similitud de la familia de similitudes, entonces*

$$\sum_{(i_1 \ldots i_p) \in \{1, \ldots N\}^p} r_{i_1}^D \cdots r_{i_p}^D = (\sum_{i=1}^{N} r_i^D)^p = 1. \tag{4.11}$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hará por inducción. Si $p = 1$, por el Teorema 4.2.1 se cumple

$$\sum_{i_1 \in \{1, \ldots, N\}} r_{i_1}^D = \sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1.$$

Supongamos que se cumple para $p-1$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{(i_1\dots i_p)\in\{1,\dots N\}^p} r_{i_1}^D\cdots r_{i_p}^D &= \sum_{i=1}^N r_i^D\left(\sum_{(i_1\dots i_{p-1})\in\{1,\dots,N\}^{p-1}} r_{i_1}^D\cdots r_{i_{p-1}}^D\right)\\ &= \sum_{i=1}^N r_i^D(\sum_{i=1}^N r_i^D)^{p-1}\\ &= (\sum_{i=1}^N r_i^D)^p = 1.\end{aligned}$$

□

Al inicio de este capítulo se dijo que se tenía como propósito ver la relación que existe entre el punto fijo del operador de Hutchinson formado por un conjunto de similitudes $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, la medida de Hausdorff de este punto fijo y el concepto de autosimilitud.

El teorema que enunciaremos en seguida es el más importante de este capítulo. En particular, nos dice que un conjunto es autosimilar si su dimensión de Hausdorff y la de similitud son iguales.

Teorema 4.2.2. *Si H es el operador de Hutchinson asociado a la familia de similitudes $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ con constantes de Lipschitz $Lip(S_i) = r_i < 1$. Sea D es la dimensión de similitud de esta familia. Entonces si K es el punto fijo de H y $dim_H = k$,*

i) $\mathcal{H}^D(K) < \infty$ *y por tanto* $k \leq D$.

ii) *Si* $0 < \mathcal{H}^k(K) < \infty$ *entonces* (K *es autosimilar* $\iff$ *si k=D).*

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos i).

Como K es el punto fijo para el operador de Hutchinson, por proposición 2.3.3, dado $p \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$K = \bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} K_{i_1\dots i_p}.$$

En particular $\bigcup_{i_1\dots i_p\ \in\{1\dots N\}^p} K_{i_1\dots i_p}$ es una cubierta para K.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}\sum_{i_1 \ldots i_p \in \{1 \ldots N\}^p} (\text{diam}(K_{i_1 \ldots i_p}))^D &\leq \sum_{i_1 \ldots i_p \in \{1 \ldots N\}^p} r_{i_1}^D \cdots r_{i_p}^D (\text{diam}(K))^D \\ &\leq (\sum_{i=1}^{N} r_i^D)^p (\text{diam}(K))^D \text{por ecuación (4.11)} \\ &= (\text{diam}(K))^D.\end{aligned}$$

Si $r_0 = max\{r_i : 1 \leq i \leq N\}$ entonces diam$(K_{i_1 \ldots i_p}) \leq r_0^p diam(K)$.

Observemos que diam$(K_{i_1 \ldots i_p}) \to 0$ cuando $p \to \infty$, es decir, diam$(K_{i_1 \ldots i_p})$ puede ser tan pequeño como se desee y como K es compacto, se concluye que $\mathcal{H}^D(K) < \infty$.

Se demostrará ahora $ii)$.

Supongamos $0 < \mathcal{H}^k(K) < \infty$ y K es autosimilar, asi $\mathcal{H}^k(K_i \cap K_j) = 0$ si $i \neq j$. Entonces

$$\mathcal{H}^k(K) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^k(K_i) = \sum_{i=1}^{N} r_i^k \mathcal{H}^k(K),$$

por propiedad de escala (ver proposición 4.1.1).

Por tanto $\sum_{i=1}^{N} r_i^k = 1$ y así $k = D$.

Supongamos ahora que $0 < \mathcal{H}^k(K) < \infty$. Entonces

$$\mathcal{H}^D(K) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^D(K_i) = \sum_{i=1}^{N} r_i^D \mathcal{H}^D(K).$$

Como $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$ entonces $\mathcal{H}^D(K) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^D(K_i)$, así $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$, por lo tanto $\mathcal{H}^D(K_i \cap K_j) = 0$, si $i \neq j$. □

Una aplicación del teorema anterior es que, en el caso de los conjuntos fractales, su dimensión de Hausdorff se puede calacular de manera sencilla, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. *La curva de Koch, ver la figura 4.2, por ser un conjunto autosimilar tiene dimensión de Hausdorff igual a* $\log \frac{4}{3}$.

Para probar esta afirmación, observemos primero que este conjunto es el punto fijo para el operador de Hutchinson definido por las siguientes contracciones

$$f_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y),$$

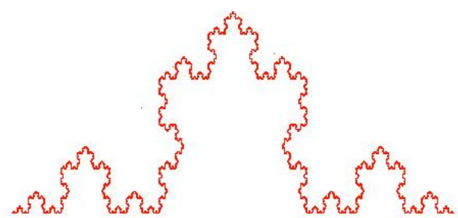
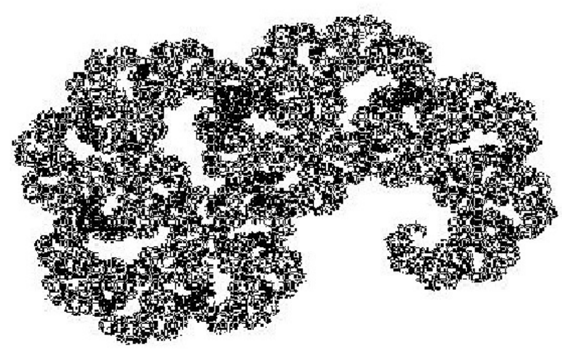


Figura 4.2: Conjunto fractal conocido como la curva de Koch

$$f_2(x,y) = (\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y),$$
$$f_3(x,y) = (\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}),$$
$$f_4(x,y) = (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y).$$

Si s_0 es la dimensión de similitud, sabemos que debe cumplir: $\sum_{i=1}^{4}(\frac{1}{3})^{s_0} = 1$, entonces $s_0 = log\frac{4}{3}$. Por ser autosimilar la dimensión de Hausdorff y la de similitud son iguales.



Bibliografía

[1] Gerald A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc. 1990.

[2] Gerald A. Edgar, *Integral, Probability and Fractal Measures*, Springer-Verlag New York, Inc. 1998.

[3] H. L. Royden, *Real Analysis*, 2a. edición, The MacMillan Company, 1968.

[4] John E. Hutchinson, Fractals and Self-Similarity, *Indiana University Mathematics Journal*, 30 (1981) 713-747.

[5] Kenneth Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and aplications*, Hohn Wiley and sons, 1990.

[6] M. F. Barnsley, *Superfractals*, Cambridge University Press, 2006.

[7] M. F. Barnsley, S. Demko; Iterated Function Systems and the global construction od fractals, *Proc. R. Soc. Lond.* 399 (1985) 243-275.

[8] Ma. Guadalupe Raggi Cárdenas, Juan Alberto Escamilla Reyna, Francisco Javier Mendoza Torres, *Introducción a la Teoría de Espacios Métricos* 1a. edición, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[9] Peter R. Massopust *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*, Academic Press, Inc. 1994.

Índice alfabético