BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LA CONTEXTUALIZACIÓN DE UN PROBLEMA CUYA SOLUCIÓN ES SUPUESTAMENTE UN NÚMERO NEGATIVO: ¿CÓMO LOS ESTUDIANTES CONSTRUYEN EL MODELO SITUACIONAL Y EL MODELO MATEMÁTICO?

TESIS PROFESIONAL

PARA LA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
LUIS DAVID BENÍTEZ LARA

DIRECTORES DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

DR. JOSIP SLISKO IGNATOV

H. Puebla de Zaragoza Junio de 2014

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de terminar esta etapa en mi vida, por darme salud y una familia que siempre me ha ayudado.

A mis padres, **Alfredo Benítez Armas** y **Ana Bertha Lara Arellano**, por todo su apoyo, comprensión, paciencia y amor a lo largo de toda mi formación en este nivel.

A mi hermano **Alfredo Benítez Lara** y mi cuñada **Constanza Gabriela Carrillo Ayala** por todo su apoyo, ya que me han demostrado que más que unos hermanos son mis amigos.

A mi prima **Diana Belén Lara Arellano** que ha llegado a ser una nueva alegría en nuestro hogar.

A mis tíos y primos que siempre han estado ahí para ayudarme y apoyarme en los buenos y malos momentos.

A mi asesora, **Lidia Hernández Rebollar**, por su paciencia, ánimo, auxilio en toda esta etapa.

A mis 17 compañeros que fueron un gran ánimo y estímulo para concluir esta etapa.

A **Pedro Ramírez, Gerardo Cortés, Rafael Nava, Erick Rosete** y **Arturo Ríos** por ser mi segunda familia en esta ciudad, por todo su cariño, apoyo y estar ahí cuando los necesito.

A **Néstor Cruz, Fernando Méndez, Michael González, Mario Merino, Eduardo Méndez, Marco Olivier, Rubén Arroyo** y **Víctor Sosa**, porque hicieron mucho por mí en un momento difícil en mi vida, la gente llega cuando uno la necesita.

A todas y cada una de las personas que ayudaron directa o indirectamente en concluir esta tesis.

" . . . No sé qué sería de mí, si no me creyeran en mí . . ."

Índice

Introducción

Desde hace muchos años, la enseñanza de las matemáticas ha sido un gran interrogante, dado que es la materia en la que la mayoría de niños y jóvenes en los niveles básicos muestran más dificultades. En ocasiones, los alumnos creen no ser buenos en esta asignatura y, frecuentemente, el desempeño de éstos depende de otros factores como son los libros de textos el estilo didáctico de los profesores o la naturaleza confusa de los problemas planteados.

Un concepto complicado de adquirir es el de los números con signo porque no se puede, con el sistema tradicional, ir de lo concreto a lo abstracto, es decir, en la escuela tradicional no se parte de problemas concretos para introducir este concepto. Por lo general, estos números se presentan en la recta numérica y la enseñanza se centra en las reglas para operar con ellos.

Esta tesis tiene como propósito estudiar el planteamiento de un problema que involucra números con signo para determinar las causas por las que pocos estudiantes lo resuelven correctamente. El estudio se realizó a través del diseño de cuestionarios y del análisis de las respuestas a éstos, por lo que es una investigación de tipo exploratorio.

Se presentan los resultados de varios instrumentos que se diseñaron para estudiar la interpretación y el análisis de los estudiantes respecto a un problema que apareció en el libro de texto de matemáticas de segundo grado de secundaria (Arriaga, 2008), el cual fue distribuido por la SEP de manera gratuita.

Los estudiantes que contestaron los instrumentos corresponden a dos niveles educativos:

> -El primer grupo, de nivel superior, cursaban el primer año de las carreras de Física, Física Aplicada, Matemáticas, Matemáticas Aplicadas y Actuaria de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP).
>
> -El segundo grupo fue de alumnos de nivel medio superior de una escuela particular del estado de Tlaxcala.

En ambos niveles se encontró que más del cincuenta por ciento de los estudiantes no utilizó un número con signo negativo en la respuesta como se esperaba que lo hicieran. Al analizar las respuestas, se encuentran varias interpretaciones y, debido a la inadecuada redacción del problema, algunas interpretaciones no son del todo incorrectas.

El problema que se estudia en esta investigación utiliza un contexto deportivo, un salto de longitud, el cual, según la implícita suposición del autor, debería de ser conocido por los estudiantes de secundaria. Sin embargo, con el fin de que intervenga un número negativo en la solución del problema, el autor logra una redacción que no evoca el uso del número negativo. Así, se concluye que, un contexto supuestamente pertinente no es suficiente cuando la redacción del problema no propicia la construcción del modelo de la situación, paso básico para la construcción del modelo matemático y la solución del problema, según la teoría de Kintsch (2004) sobre comprensión de textos.

Objetivo

Mostrar que el planteamiento de un problema que apareció en un libro de texto de educación secundaria provoca la construcción de diferentes modelos situacionales, inclusive entre estudiantes de nivel medio superior y superior, debido a una redacción inadecuada y el uso de una situación poco común con la cual los estudiantes no evocan el uso de un número negativo.

En el Capítulo 1 de esta tesis se revisa, brevemente, el desarrollo histórico del concepto de número negativo así como un resumen de algunas investigaciones sobre este concepto y su problemática en la educación matemática.
En el Capítulo 2, se presenta la teoría de Kintsch que nos es útil, más adelante, para analizar las diferentes interpretaciones que hacen los estudiantes del problema en estudio.
En el Capítulo 3, se presentan los resultados de los instrumentos aplicados a los dos niveles educativos. Finalmente, se presenta una conclusión sobre este trabajo de investigación y la bibliografía.
Los resultados de la aplicación del instrumento a los estudiantes de nivel superior se publicaron en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa en 2012 (*Hernández, Slisko y Benítez, 2012*).

Capítulo 1

Las Dificultades con los Números Negativos.

Un concepto muy difícil de asimilar y entender es el de número negativo. Eso demuestran algunas dificultades que tuvieron los matemáticos en el pasado para poder aceptar y tomar como soluciones verdaderas a los números negativos.

En este capítulo mostramos unos modelos de enseñanza de los números negativos, unas reglas que deben cumplir estos modelos para que el concepto sea asimilado por los estudiantes, así como los obstáculos y dificultades que éstos tienen. Una sección es, también, sobre investigaciones en enseñanza de los números negativos, ya que a pesar del tiempo, esos problemas que tenían los matemáticos del pasado, son muy parecidos a los actuales en la comprensión y asimilación de este concepto. De esta manera podemos entender el por qué en la investigación de este objeto de estudio no obtenemos la respuesta esperada debido a las múltiples interpretaciones que puede llegar a tener un estudiante sobre un problema.

1.1 La Naturaleza del Conocimiento de los Números Negativos.

La historia de los números negativos muestra una interesante tensión entre las necesidades cotidianas y formales. El concepto tiene su origen en el Lejano Oriente: los primeros matemáticos que manipularon los números negativos eran de China e India.
En el siglo séptimo el matemático hindú Brahmagupta usó números negativos para representar las deudas. (En tales situaciones, los números positivos representan activos). Él también formuló las reglas para las cuatro operaciones básicas en los números negativos.
Sin embargo, los matemáticos hindúes no aceptaban los números negativos como objetos en sí mismos. Por ejemplo, en el siglo XII el matemático Bhaskara, cuando daban 50 y -5 como dos soluciones para un problema, escribió, "El segundo valor, en este caso no se debe tomar, porque es inadecuado", la gente no aprobaba las soluciones negativas. En la práctica los negativos fueron utilizados para representar deudas o segmentos con un cambio de dirección aunque su existencia como objetos matemáticos era negada.
En Europa, los números negativos surgieron alrededor del año 1500 como herramientas para la manipulación y la solución de ecuaciones.
En su libro de álgebra, El Gran Arte, Cardan (1545), llamó a los números negativos "debitum".
Los números positivos eran llamados "verdaderas soluciones" a las ecuaciones, mientras que los números negativos se definieron como "soluciones ficticias".
Aunque Cardan aceptó plenamente a los números negativos en operaciones matemáticas y estaba dispuesto a tratarlos como normales, por el bien de los cálculos y el cálculo, no tomó la opinión moderna de que los números negativos pueden representar fenómenos no ficticios.
Descartes usó los números negativos para dar una representación completa a las curvas geométricas, ya que dichas curvas se truncan si uno se restringe a valores positivos en el

plano cartesiano. Descartes usó esta extensión para poder aplicar los métodos geométricos en la solución de problemas algebraicos. Como las soluciones geométricas son independientes de las coordenadas, se vio obligado a usar los números negativos, aunque los consideró sin sentido (Kline, 1972). Fue en el siglo XIX que los números negativos emergieron como magnitudes dirigidas (es decir, en el dominio de la electricidad), y el conjunto de los enteros fue definido como una manera de dar a los negativos un estado simétrico al de los positivos.

Este breve examen de la evolución histórica de los números negativos muestra que los negativos y las operaciones de algunos de ellos fueron aterrizados muy pronto en situaciones cotidianas (deudas, dirección) y se exigió, también, a los matemáticos profesionales, formar un sistema coherente de operaciones algebraicas y geométricas.

Sin embargo, la extensión de los números positivos a una nueva clase, que incluyera a los números negativos se resistió hasta el siglo XIX. Esta extensión tuvo que permitir la construcción de los números negativos por la ampliación de la comprensión previa de los números positivos (es decir, la aritmética).

La comprensión de la aritmética implica muchos aspectos: los sentidos de los conceptos que tiene la aritmética (por ejemplo, los diferentes sentidos que tiene el número, "el número como posición" y "el número como acción"), el lenguaje de la aritmética, los procedimientos, principios y leyes. Para entender a los números negativos, cada uno de estos aspectos tuvo que ser extendido.

Freudenthal (1983) propuso cuatro tipos de extensiones:

1. Ampliación del número para referirse a un conjunto (imaginario) de cantidades iguales en magnitud pero de sentido opuesto (es decir, la dirección o el valor) a la cantidad de objetos físicos. El término matemático para la estructura que contiene tanto positivos como los números negativos es un sistema de magnitud dirigido.
2. La extensión del dominio de aplicación para operaciones binarias para incluir operaciones en pares de positivos o negativos y mixtos, negativo-positivo.
3. Extensión de las operaciones unarias para incluir los cambios (es decir, la suma y resta), en ambos, números positivos y negativos.
4. Extensión de la relación de orden a un número de la recta continua que incluye tanto negativos como positivos: por ejemplo, $(-3) < (-2) < (0) < (1)$.

Estas cuatro extensiones se denotan como R1, R2, R3 y R4, y son descritas a continuación en términos generales:

R1: Las magnitudes dirigidas son objetos que tienen magnitud y dos posibles estados (2 direcciones, 2 colores posibles, o cargas). Pueden ser representadas por números de la forma $+a$ o $–a$, donde “a” es la magnitud del objeto, y (+/-) indica una de los 2 estados. Este sentido de magnitudes dirigidas confiere a los números negativos un nivel de objeto matemático.

R2: La adición y sustracción binaria puede ser extendida a un conjunto de magnitudes dirigidas. En otras palabras, es posible combinarlas o separarlas. Así estas acciones llevan a numerosas reglas.

Aquí adición y sustracción se refieren como operación binaria porque tienen 2 entradas y una salida.

R3: Sumar puede ser interpretado como un operador unario. La suma cambia l valor de una magnitud dirigida dada. La entrada de una operación unaria es una magnitud dirigida sencilla/simple/sola, y la salida es una nueva magnitud que fue incrementada por un operador de adición. Por ejemplo, la adición +3 transforma a +4 en +7 y -2 a +1, en este sentido la adición "es una acción". Con esta nueva definición de adición es posible reformular las reglas anteriores reemplazando +/-*b* (magnitud dirigida) por +/-*b* (adición). Ejemplo: La regla

$$-a + (-b) = -(a + b)$$

Esta regla sería interpretada como sigue: Si el número –*a* es aumentado por (-*b*), el resultado será el número –(*a* + *b*).
La sustracción también puede ser interpretada como una operación unaria. La acción "-(*a*)" es el inverso de la acción "+(*a*)". Esta regla modificada se refiere a ésta:

$$+a - (-b) = +(a + b)$$

Así una regla puede ser expresada con la operación "- -"que es idéntica a la operación "+ +" porque el resultado de estas dos acciones en cualquier número serían idénticas. Similarmente, otras reglas pueden ser expresadas con la operación "- +" como en la operación "+ -".

R4: La adición unaria definida en todas las magnitudes dirigidas induce a una relación de orden: Una magnitud *x* se puede decir que es más grande que una magnitud *y* (es decir $x>y$) si existe una adición (unaria) +*a* (con a positivo) transforma a *y* en *x* (es decir, $x = y + a$); "*a*" expresa la diferencia entre 2 magnitudes.

1.2 Los Números Negativos Como Objetos Mentales Verdaderos

Resnick (1991) y Greeno (1992) afirman que partes importantes del conocimiento matemático tienen su origen en la experiencia diaria dada por cantidades de material físico. Dicen que los niños empiezan con modelos de actividad cognitiva en la cual comparan y razonan acerca de cambios, combinaciones y descomposición de cantidades de material físico sin una cuantificación. Este razonamiento es llamado cualitativo o protocuantitativo. Greeno se refiere a esta forma de pensar como razonamiento de modelos mentales o la construcción de una representación de objetos que corresponden con la situación. Una característica peculiar de este modelo es que las operaciones con objetos mentales son similares a las operaciones con cosas que pueden estar en la situación.

Aunque los niños dominen estas formas de razonamiento prontocuantitativas, también aprenden a contar una colección de objetos con la aplicación de las reglas de conteo. Al principio, el conocimiento de conteo y el razonamiento protocuantitativo permanencen separadas. Los niños aplican el conocimiento de conteo en situaciones de razonamiento protocuantitativo, sin embargo, los nombres de los números se refieren a conteo específico o a conjuntos medidos de material. Resnick (1991) y Greeno (1992) llaman a esto como el escenario cuantitativo del pensamiento matemático. Practicando los números llegan a ser asimilados en la vida por si solos, después los niños empiezan a relacionar los números como objetos para razonar.

Resnick (1991) da una detallada cuenta de cómo las clases de principios matemáticos son derivados del razonamiento protocuantitativo y del desarrollo del conocimiento de los niños de cómo los números pueden ser usados para cuantificar conjuntos. Este camino del razonamiento matemático parece limitado para los conceptos que pueden ser directamente relacionados con el material físico. Los números positivos son usados en la cuantificación de material y pueden ser aprendidos de esta forma pero los números negativos son más difíciles de entender de esta manera ya que no se encuentran cantidades negativas en la vida diaria.

Así, no es muy probable que el desarrollo de conceptos matemáticos de mayor nivel ocurra informalmente. Esto se debe a que las situaciones necesarias para su desarrollo no son parte de la vida cotidiana de los niños. Scribner y Cole (1981) concluyen que ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de razonamiento que no ocurren en sus vidas cotidianas puede ser la principal razón de ser de la educación institucional.

Es conocido el gran problema didáctico que implica la enseñanza y el aprendizaje del concepto de número negativo. Su complicado desarrollo histórico sugiere un obstáculo epistemológico para su construcción como objeto mental verdadero (Bachelard, 1980). Uno de los problemas de la enseñanza es vencer este obstáculo epistemológico y ayudar a los estudiantes a construir un modelo coherente para los números negativos (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994).

Se pueden considerar varios obstáculos epistemológicos en la enseñanza y aprendizaje de los números negativos, pero antes, se debe saber que la epistemología es la teoría del conocimiento válido y aun cuando este conocimiento jamás sea un estado y constituya siempre un proceso, este proceso es esencialmente un pasaje de una validez menor a una validez superior. Si se tratara sólo de la validez de la epistemología se confundiría con la lógica (Piaget 1970).

Por primera vez, la noción de obstáculo epistemológico, aparece en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales y está redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas la cual consiste en permitir diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase, concebidas por el profesor, con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje. Entonces, un alumno adquiere un conocimiento, cuando se enfrenta a una situación-problema cuya resolución necesita de ese conocimiento, lo genera en forma de estrategia de solución de la situación. Por lo tanto, el conocimiento es el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones y problemas donde es útil como estrategia de resolución. Una consecuencia de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una idea matemática dependerán de la experiencia obtenida enfrentando problemas y situaciones en las que dicha idea está implicada (Cid 2000).
En la enseñanza se puede encontrar, para cada idea matemática, el conjunto de todos los problemas en las que ésta interviene, lo que obliga a seleccionar un subconjunto de problemas y éste puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un

conjunto de conocimientos referentes a la idea matemática que funcionan con éxito, pero que no son eficaces, e incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de problemas. Una concepción tiene, por tanto, un área de situaciones en el que sirve y otra área de situaciones en el que no posibilita resolver o dificulta la resolución, de manera que el aumento del área de problemas va a forzar a la concepción a desarrollarse para adaptarse a las nuevas situaciones. Podríamos hallar una concepción en la que esta adaptación ya no sea suficiente para enfrentarse a los nuevos problemas. En este caso ya no quedaría otra opción que el rechazo de la concepción y sustituirla por otra.
En estos casos, en los que la ampliación de área de problemas requiere el cambio de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva, y, además, el alumno que la tiene se niega a rechazarla y trata de sostenerla, adaptarla de manera local, de adaptarla lo menos posible, teniendo en cuenta que fracasará en la resolución de problemas, se dice que la concepción es un obstáculo. Y esa concepción de obstáculo se manifestará por medio de los errores que comete, errores que no serán pasajeros ni erráticos, sino reproductibles y constantes (Cid, 2000).

Dureox (1982) plantea una lista de condiciones para poder calificar a una concepción como obstáculo.

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor.
e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma inoportuna y periódicamente.

Así, para este autor, en la teoría de situaciones, la noción de obstáculo epistemológico envuelve una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. De esta manera la definición de obstáculo epistemológico implica el establecimiento de una semejanza entre las concepciones de obstáculo que poseen los alumnos actuales y conceptos fijos y saberes históricos que han dificultado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incluido al saber transmitido.

Ahora bien, cuando Gleaser (1981) empieza su artículo citando la noción de obstáculo, esclarece que considera precoz especificar el término “obstáculo” y que lo usa con una precepción amplia, relacionando con “dificultad”, “umbral”, “síntoma”, etc. Bajo estas circunstancias, el autor toma en cuenta que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras necesidades hasta el concepto actual se pueden comprobar la veracidad de los siguientes obstáculos:

-Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas

La obligación de hacer cálculos algebraicos con diferencias y, específicamente, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no admite la existencia de los números negativos aislados.

-Dificultad para unificar la recta real

La cantidad negativa era tan real como la positiva pero era tomada en un sentido opuesto. Esta diversidad que se establecía entre positivos y negativos no facilitaba su unificación en una recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

-La ambigüedad de los dos ceros

Con esto se trata a las dificultades que hubo entre los matemáticos para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen seleccionado, origen elegido de manera arbitraria. Uno de los razonamientos más amplios entre los matemáticos era que no se podía aceptar la existencia de cantidades que fueran "menos que nada", ya que se negaban a la apreciación de las cantidades negativas como cantidades reales.

-El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas

La superación de los anteriores obstáculos nos permite aceptar a los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no su estructura multiplicativa. La dificultad de justificar la regla de los signos lo resolvió Hankel en 1967, cuando propuso prolongar la multiplicación de R+ a R respetando un principio de permanencia que conservará determinadas propiedades de la estructura de los reales positivos. Esto es:

Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros de un modo metafórico. Estos números ya no son descubiertos, sino inventados o imaginados (Glaeser, 1981)

Se trata de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

Glaeser concluye diciendo que debe ser necesario realizar experiencias con los alumnos para verificar si algunos de los obstáculos puestos a prueba en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales.

1.3 Modelos de Enseñanza y sus límites

Lo siguiente muestra la terminología de un análisis de modelos que pueden ser utilizados para enseñar los números negativos. Un número limitado de ejemplificaciones han sido usadas por los profesores de matemáticas. Cada una captura algunos aspectos importantes de los cuatro sentidos discutidos acá (R1, R2, R3 y R4), pero ninguno puede abarcar todos ellos. Además el conocimiento adquirido con estos modelos es normalmente atado por una representación particular, limitando su aplicabilidad en situaciones nuevas.

Deudas
Los números negativos pueden ser representados como cantidades de deuda. Estas cantidades pueden ser consideradas ficticias, pero el dinero o canica de deuda también pueden ser pensadas como objetos concretos que cambiarán de manos en algún momento en el futuro. Un sistema de deudas e ingresos parece ser natural para el modelo R3, el cual tiene reglas que incluyen adición y sustracción como acciones (agregando y quitando). La naturaleza de un sistema de deudas e ingresos puede llegar a ser tenso cuando es usado como una base para enseñar las otras reglas. R1, son reglas basadas en 2 tipos de cantidades, pero no dirigidas claramente para todos los niños: Deber o tener un objeto no es una propiedad pero tampoco el resultado de una acción. Por lo tanto, los estados deber y tener no son propiedades de los objetos y no pueden ser ejemplificados en 2 estados diferentes de cantidad.

Los obstáculos epistemológicos conectados con el uso de números negativos (a pesar de que no se consideran como números verdaderos) indican que la relación de deudas con objetos matemáticos no es obvia, aunque los niños parezcan ser capaces de usar números negativos para describir las deudas. En R2 las operaciones binarias no parecen estar relacionadas fácilmente. De nuevo, los niños no son capaces de pensar sobre la combinación de 2 cantidades opuestas sino entienden la diferencia entre esas dos cantidades. R4 puede ser fácil de entender junto al modelo de "deber". Los niños pueden comprender posiciones negativas o una métrica junto a una escala de rangos desde *tener mucho* a *deber mucho.* El desplazamiento dentro de esta ordenación también puede ser simple. Por ejemplo: "Si Ana debe 5 dólares y Teresa tiene doce dólares, ¿Qué tan rica es Teresa?" (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994).

Modelos de cancelación (deudas con mayor representación física)

Freudenthal (1983) hace referencia a un posible modelo de enseñanza de números negativos que envuelven un sistema de fichas. De acuerdo a este modelo, las fichas de color blanco y negro podrían usarse para representar 2 tipos diferente de cantidades (iniciando con las reglas de R1). Una suma binaria podía ser representada donde las fichas de distintos colores se alinean unas con otras. Sin embargo sustraer negativos es un poco más complicado ya que los pares de fichas necesitan estar formados artificialmente y de esta manera la nueva cantidad puede ser generada. Ejemplo, el valor de la expresión 3-(-4) puede ser ejemplificada usando 3 fichas negras para representar la cantidad positiva y luego se formarían 4 pares, cada uno de estos pares consiste en una ficha negra y una blanca (después del 1er paso al instante la cantidad negativa va a desaparecer). Finalmente las cuatro fichas blancas artificialmente generadas se quitan. R3 puede ser representado por una adición o quitando algunas fichas de la cantidad inicial. De manera similar en el sistema formal. El nivel de reglas para memorizar se convierte en una prueba en discusión al tratarlo con la dificultad de los problemas. La relación de orden (R4) inducido por este modelo es que 2 líneas de números distintos sin relación alguna entre ellos. (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994).

Elevadores (o distancias)

Son modelos que se pueden relacionar toda la recta numérica con acciones que permiten pasar de un punto a otro. En el sistema de elevadores, los números pueden ser usados para representar tanto posiciones (es decir, el tercer piso) como acciones (es decir, subir esos tres pisos) pero no para representar cantidades. Por lo tanto, las reglas R1 pueden ser más difíciles de asimilar. Los pisos que se encuentran debajo del suelo, tienen una diferente posición, pero no necesariamente un diferente tipo de cantidad. Las operaciones binarias no tienen sentido en estos modelos, es decir, 2 posiciones no pueden ser combinadas. Sin embargo las acciones (Reglas R3) subir y bajar serían fáciles de distinguir. Por definición, este modelo es adecuado para darle un sentido completo a la recta numérica negativa (reglas R4). (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994).

El micro mundo de los enteros (Thompson y Dreyfus, 1988) es otro ejemplo de modelo de elevador. Usando la programación Logo-Like, los niños pueden proyectar movimientos simples o complejos de una tortuga en una recta numérica. El sistema, por lo tanto, ejemplifica muy bien las reglas de R3 (especialmente las reglas de tipo $a-(-b) = a+b$ y de R4 pero no de R1 o de R2. En las pruebas del modelo, estos autores concluyen que los niños tienen dificultades para aprender estas reglas.

Para usar un modelo del elevador, en el cual los números representen cantidades, Janvier (1985) describe la prueba de un modelo de números negativos involucrando globos con aire caliente, el cual fue desarrollado por Luth (1967). A estos globos de aire caliente se les atan bolsas de arena y globos de helio para que desciendan o asciendan. Las reglas R1, dos tipos de cantidades, parecen estar bien representadas en este modelo por los 2 tipos de carga. Las reglas R2, una suma o resta binaria, parece un poco difícil de imaginar. La suma binaria parece involucrar de alguna forma el agregar 2 globos de aire caliente. Las reglas R3, acciones unarias, parecen ser simples en este caso, los niños hábilmente captan el efecto de una bolsa de arena o un globo de helio sobre el globo de aire caliente. Las reglas R4, parecen ser muy difíciles de imaginar en este modelo. Los niños tienden a imaginar una serie de varios globos, cada uno de ellos a un diferente nivel, para captar dichas reglas.

Tiempo

Un modelo que usa al tiempo, con la escala de A.C. a D.C., puede también ser usado en un esfuerzo por transmitir la información sobre los números negativos. Tal modelo puede tener limitantes similares en el conjunto relevante de reglas como los modelos antes mencionados. R1 puede ser difícil de entender por las mismas razones del modelo de elevador. R2 no es posible de todo: Fechas no puede ser adicionadas juntas o sustraídas.

Muchas de las reglas de R3 pueden ser demostradas por agregar o quitar duraciones para y de fechas. R4 puede también ser naturalmente entendido en términos de fecha y duración. Sin embargo, el tiempo es un concepto difícil para los niños más jóvenes; no se puede manipular fácilmente en la experiencia diaria.

Temperatura

Un modelo usando temperatura para enseñar las reglas de los números negativos tiene particulares ventajas y desventajas. Por un lado, los niños pueden estar familiarizados con la terminología de: “grados bajo cero”. Esto puede ser una ventaja para enseñar las reglas de R1 y R4. Los niños pueden pensar en grados negativos como un tipo diferente de cantidad y tener una imagen mental, como un termómetro, para representar el orden y una métrica. Por otro lado, las temperaturas son medidas intensivas, y por lo tanto, R2 o las operaciones binarias no tienen sentido. Por ejemplo, mezclar alguna cantidad de líquido a -15° con otra cantidad del mismo líquido a +20°, esto no resulta +5° de líquido. R4, con las reglas de métrica y orden, tiene problemas similares: el 0 en un termómetro no se refiriere a una carencia de grados; +10° y -10° no se refiere a temperaturas que están igualmente distantes a 0°. Por lo tanto, las actividades con temperatura como referencia pueden llegar extremadamente formales en la naturaleza.

Modelos formales

Un modelo formal para enseñar los números negativos recae en la manipulación de símbolos. Los símbolos menos son utilizados para distinguir un nuevo y diferente tipo de cantidad. Las reglas son pensadas para que los niños puedan aprender y memorizar porque no pueden verificarlas directamente. Por ejemplo, no pueden verificar que la operación de sustracción es un equivalente a la operación de adición. Se espera que los niños aprendan las reglas que aún no pueden entender. Todas las reglas previamente discutidas (R1, R2, R3 y R4) están sostenidas con este modelo, pero las demostraciones formales son necesarias para entenderlas verdaderamente, lo cual suministra un test de confianza de los niños. Los nuevos programas matemáticos tratan de justificar estas reglas. Un ejemplo común de una actividad usando una aproximación es la siguiente:
Si designamos que ($-a$) sea la solución única de la ecuación $a + x = 0$, entonces podemos demostrar que de esa premisa $(-a) + (-b) = -(a+b)$:

Premisa	Inferencia
$a+(-a)= 0$ y $b+(-b)=0$	$a+(-a)+b+(-b)=0$

La adición es conmutativa: $a + b + (-a) + (-b)=0$
La solución es única y definida como $–(a+b)$, $-(a+b) = (-a) + (-b)$ se mantiene.

Tales pruebas descubren propiedades de los negativos que son usadas para preservar la coherencia en las manipulaciones algebraicas. Sin embargo, la naturaleza de los números negativos puede no ser totalmente elocuente para los alumnos sino simplemente una nueva sintaxis. Las demostraciones usualmente son vistas como una invención del profesor.

1.4 Investigaciones Sobre la Enseñanza de Números Negativos.

Varios investigadores en educación matemática se han enfocado en los números negativos, ya que, en secundaria, es un concepto muy complicado de asimilar y de entender dado que ya vienen con una estructura bien cimentada de números positivos y naturales.

Gallardo y Hernández, (2006), muestran una investigación referente a números negativos que se enfoca más en cómo los estudiantes, mediante el Modelo de Bloques, entienden y razonan las operaciones que involucran números negativos. El Modelo de Bloques es considerado un modelo concreto ya que es una representación de los números enteros; su fundamento se basa en su similitud con objetos (bloques) que son familiares para los alumnos o que les pueden resultar llamativos. El Modelo de Bloques se utiliza para representar los números, operaciones numéricas y expresiones algebraicas; los bloques con color representan las cantidades positivas y los bloques sin color representan cantidades negativas. Gallardo entrevistó a dos estudiantes de una escuela secundaria, seleccionados del grupo que tiene menor nivel académico en matemáticas, y les aplicó varios problemas donde debían usar números negativos, éstos ayudan a entender la problemática que tienen los alumnos, ya que se les dificulta mucho la manipulación de números con signo. Un ejemplo claro que menciona es que los alumnos pueden concebir la idea de número con signo (Signos Unarios) pero se les dificulta las operaciones con dos signos (Signos Binarios). Otra dificultad que muestra es que los alumnos inhiben la operación de sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esto es, que se les dificulta hacer una operación de la forma 3 - 8=.

Bruno, (1997) presenta las principales ideas teóricas, conclusiones e implicaciones didácticas de una investigación realizada con alumnos de 12-13 años de edad sobre la enseñanza de los números negativos. Bruno habla de una visión unitaria de la enseñanza de los números, la cual consiste desde los primeros años de educación básica denominado conocimiento numérico, el cual abarca diversos aspectos relativos a los números. Esa visión la separa en tres dimensiones: Abstracta, de recta y contextual. El conocimiento numérico, además de dedicarse al conocimiento de las tres dimensiones, abarca también la transferencia entre las ellas, es decir, la expresión de una dimensión de un conocimiento dado en otra. Bruno afirma que el aprendizaje numérico se produce en el sistema de los números enteros no negativos y concluye con el de los números reales, de esa manera propone varias maneras de extender el conocimiento de los enteros positivos a los reales, pasando por los negativos. La principal conclusión a la que llegaron es que es posible realizar la extensión a los números negativos mostrándolos como los opuestos de los números positivos que conozcan los alumnos en el momento de realizar la extensión sin poner énfasis en la creación del conjunto numérico de los enteros.
La autora concluye que algunas dificultades en la enseñanza de los números negativos son consecuencia del conocimiento previo sobre los positivos, y que un trabajo específico con los positivos las evitaría o las disminuiría.

En otra investigación, Bruno y Martinón (1997), se enfocan más en las operaciones y la manipulación de números negativos, ahora tomando en cuenta el procedimiento de resolución de los problemas, además de que analiza comportamientos y dificultades que surgen al resolver dichos problemas. Ellos entrevistaron a 11 alumnos de nivel secundaria

de 12-13 años de edad seleccionados de 3 escuelas diferentes después de trabajar dos meses con grupos y problemas donde involucran números negativos. Los problemas empleados son sumas de dos estados parciales, estado 1 + estado 2 = estado total. Bruno se enfoca en varios aspectos como el Orden de los Datos, Adaptar la Operación a la Recta Real y Usar Números Positivos. Concluye que los problemas aditivos, que son perfectamente asimilados con números positivos, presentan dificultades cuando en ellos hay negativos. Una gran variedad de razonamientos surge en la resolución de los problemas con números negativos, ya que las estrategias de solución no las emplean siempre de la misma forma.
Bruno afirma que la utilización de los problemas como métodos de enseñanza de las operaciones aditivas de los números negativos exige que los alumnos se familiaricen lo suficiente con determinadas situaciones problemáticas o con determinadas estructuras de problemas.

Como ya vimos, los antiguos matemáticos tenían conflictos en considerar a los números negativos, los problemas que ellos tenían son parecidos a los que muestran en estas fechas los estudiantes al tener contacto con este nuevo concepto. Por ejemplo la unificación de la recta real, donde toman en cuenta los enteros positivos, enteros negativos y el cero, los alumnos no la toman en cuenta como herramienta para resolver problemas sencillos como suma o resta, ya que no ha sido asimilado el concepto de una manera total. Estas investigaciones aportan nuevas ideas y análisis de problemas en los cuales los profesores de educación básica deberían poner más atención ya que si no está bien fundamentada la educación de este nivel, la educación Media Superior y Superior se va a complicar o el nivel de razonamiento puede llegar a ser muy concreto.

Capítulo 2

El Modelo de la Situación en la Comprensión de Textos

El primer paso en la resolución de un problema verbal de matemáticas es la comprensión del texto. De acuerdo con Kintsch (2004), este primer paso es un proceso mental que culmina con la construcción del modelo de la situación. Varios autores han incluido esta etapa en el proceso general de resolución de un problema de matemáticas que requiere de la modelación, lo que algunos han llamado "el ciclo de modelado" (Blum y Borromeo Ferri, 2009; Blomhøj y Kjeldsen, 2006).

En esta tesis se considera que la construcción del modelo de la situación de un problema dado es un proceso cognitivo complejo para el estudiante, que depende del vocabulario empleado, del contexto del problema y de los conocimientos previos del estudiante. Es por esto que en este capítulo se presenta una revisión concisa acerca de la construcción del modelo de la situación, basada, principalmente, en la obra de Kintsch (2004).

Las actividades cognitivas son el conjunto de operaciones mentales cuyo objetivo es que el lector integre la información adquirida, básicamente a través de los sentidos, en una estructura de conocimiento que tenga sentido para él. Algunos ejemplos de operaciones cognitivas son según Jiménez, (2001):

Observar.- Se encuentra estrechamente relacionado con la idea de vigilar, notar o percibir. La finalidad de este proceso es reunir información en referencia a un tema para servir de herramienta a un propósito superior que la originó. Implica un proceso multisensorial en el que entra en juego este propósito predeterminado que orienta esta operación mental, hecho que, desde este punto de vista, admite un conocimiento previo como base del objetivo prefijado.

Analizar.- Capacidad humana que nos permite estudiar un todo, en sus diversas partes o componentes, en busca de una síntesis, comprensión o de su razón de ser.

Abstraer.- Proceso mental que permite al individuo comprender el concepto de un objeto sin tener al objeto de manera tangible, se traduce por ejemplo en la cualidad de separar o extraer aspectos de una situación o problemática con el objetivo de comprender los hechos o conceptos fundamentales que permitirán clarificar la posibilidad de elaborar respuestas.

Representar.- Es la recreación subjetiva, de hechos, fenómenos o situaciones en base a la incorporación de estructuras de pensamiento y vivencias personales a la experiencia que se va a representar. Esto también significa, simular, modelar, dibujar y reproducir.

Redactar.- Esta estrategia constituye un elemento fundamental para el estudiante, ya que en muchas ocasiones determina lo que el alumno presenta como parte de su aprendizaje sin la necesidad de que represente lo que fielmente aprendió. Se denomina como la habilidad ortográfica, gramatical y comunicacional que permite estructurar textos cohesionados y coherentes que reflejen lo que el escritor desea transmitir (Jiménez, S. B. (2001)).

Del conjunto de actividades cognitivas nos vamos a enfocar en aquellas que se involucran en la lectura de comprensión, ya que está compuesta de un conjunto de procesos.

Cuando un lector encuentra una palabra la reconoce (acceso lógico) y activa las características semánticas correspondientes (activación del significado de la palabra); se trata de procesamientos léxicos. Luego, las palabras se agrupan en función de su organización sintáctica (análisis sintáctico, esto es el análisis de las relaciones de concordancia y jerarquía que guardan las palabras agrupándose entre sí en sintagmas, oraciones simples y compuestas de proposiciones o nexos); este ensamble lleva a la formación de proposiciones y el ensamblaje de las proposiciones conduce a la constitución de una representación de texto.

Los aspectos textuales permiten la integración de alto nivel de la información textual de la lectura y comprensión, éstos corresponden a ciertas dimensiones que se pueden manipular: tipo de texto, familiaridad con el entorno que evoca el texto, marcas que aseguran la cohesión, etc. En la actividad de la lectura, las diferentes dimensiones que permiten caracterizar el texto, contenido familiar o no, estructura textual estándar, etc., tienen repercusiones sobre los procesos que hay en juego como seleccionar las informaciones importantes, segmentar la información en paquetes coherentes.

Todos estos aspectos tienen relaciones muy estrechas entre sí, existen fuertes interacciones en la medida en que los efectos que puede tener una dimensión textual varían en función de las otras dimensiones textuales, además, una misma dimensión textual tiene repercusiones en cascada sobre los procesos cognoscitivos aplicados. En general, comprender un texto consiste en construir un modelo mental de la situación en el cual la información del texto se elabora e interpreta a partir de los conocimientos previos de los lectores, y se integra en éstos (Golder & Gaonacíh, 2002). Esos conocimientos previos facilitan la activación de cierto número de procesos esenciales para la comprensión del texto.

En el proceso que se hace al leer una palabra, el lector podrá saber a qué se refiere el texto dependiendo de los conocimientos previos, la experiencia diaria y el contexto de la lectura, por ejemplo, en la oración "La llama come pasto seco en la sabana" encontramos la palabra "llama", el lector podrá pensar en el animal, el verbo "llamar" conjugado en 3ra persona o en el fuego que se forma por combustión. Pero por el contexto del enunciado sabemos que se trata del animal, dado que "come pasto seco" y esa acción no puede ser efectuada por la lumbre ni por el verbo.

Leer es una actividad de reconstrucción: la significación del texto no se ofrece de entrada al lector, no se puede extraer, sino que debe construirse activamente mediante la aplicación de cierto número de operaciones.

2.1 El modelo de Teun A. van Dijk y W. Kintsch (1983)

Las Representaciones Mentales se entienden como aquella forma material o simbólica de dar cuenta de algo real en su ausencia, están organizadas en estructuras que permiten darle sentido al entorno. Al leer, se trabaja con 2 niveles de representación mental,

a) Texto Base
b) Modelo de la situación

a).- El Texto Base se elabora a partir de las proposiciones del texto y expresa su contenido semántico tanto a nivel global como local. Este contenido semántico se encuentra en dos niveles: La microestructura y la macroestructura. Refleja la coherencia interna entre las proposiciones y la organización de éstas. Se podría decir que es como el resumen que una persona hace del texto.

La microestructura describe la significación local literal del texto y está constituida por una red jerarquizada de proposiciones con la proposición más importante en la cima y, en los niveles más bajos, a medida que se desciende éstas son menos importantes. La estructura es algo complicada ya que las proposiciones se jerarquizan en función de la repetición de los argumentos.

La macroestructura está constituida por proposiciones que no corresponden al sentido literal del texto pero el lector las construye mediante la aplicación de las actividades cognitivas ya sea suprimiendo, organizando ciertas proposiciones o elaborando proposiciones más complejas. Por ejemplo "Juan sale de viaje en tren" es una macroproposición construida a partir del siguiente contenido literal: "Juan fue a la estación del tren, compró un boleto, y se dirigió al andén". La elaboración de la macroestructura se desprende la mayor parte de las veces de la interpretación y de la construcción de la microestructura (Figura 1)

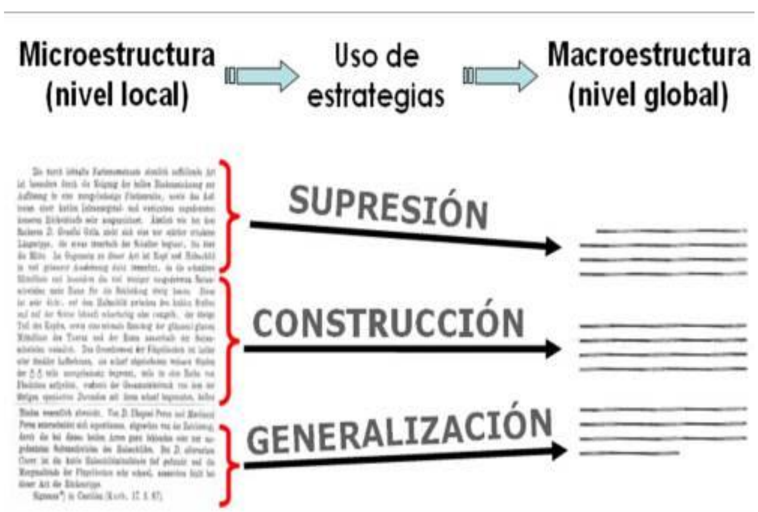


Figura 1. Los procesos involucrados en la construcción de una macroestructura.

b).- El modelo de la situación es una representación de conocimiento separada del texto base. Se puede asimilar o considerar como la “foto” o imagen que el lector se forma de lo que está leyendo; aunque no siempre un modelo de la situación tiene esta característica visual ya que existen textos sumamente complejos de los cuales no se puede realizar una imagen de él.

Como el modelo de la situación se elabora integrando información textual con conocimiento previo del lector, debemos tener en cuenta que los conceptos o experiencias previos son distintas en cada uno de nosotros. No es lo mismo leer un texto sobre los delfines si uno nunca ha visto uno en vivo y en directo, a que si ha habido el privilegio de ver uno de cerca.

Si este modelo de la situación no se incorpora con conocimiento anterior, es posible que los lectores puedan construir una base de texto adecuada pero que falle al ligarlo a su conocimiento previo. Un lector cuyos procesos de comprensión resulten en una base de texto será capaz de recordar y reconocer esta base de texto por un tiempo, pero su pensamiento, su resolución de problemas y su comprensión futuros se verán afectados en lo absoluto.

El modelo de la situación puede ser completado por procesos inferenciales gracias al conocimiento anteriormente adquirido. A mayor conocimiento previo, mejor será la imagen que el lector se hará sobre lo que está leyendo.

El modelo de situación, sin embargo, podría quedar incompleto, o estar errado, y se genera de diferentes maneras. Incluso, puede tener ‘bases de texto” anteriores. Esto es lo que ocurre cuando leemos algo de lo cual ya hemos leído anteriormente o que conocemos muy bien. Sólo traemos a nuestra mente la base de texto del otro texto, y esto hace que nuestra lectura sea más fácil y más rápida.

Debe tenerse en cuenta que la base de texto y el modelo de la situación no son cosas separadas, ya que suceden al mismo tiempo, no debemos entenderlas como entidades independientes dado que son parte del mismo fenómeno de comprensión, el cual se hace de manera automática. (Figura 2)

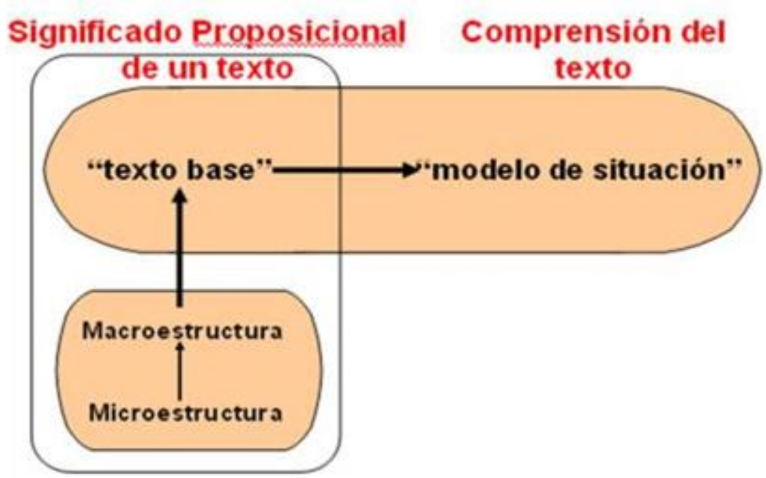


Figura 2 La base de Texto y el Modelo de la Situación forman parte del mismo fenómeno de comprensión.

Cuando alguien lee un texto, primero procesa las palabras y oraciones de las cuales extrae ideas resumidas o más grandes que le dan una especie de resumen del mismo. A la vez el lector se va formando un modelo de la situación; se crea una imagen mental de lo que lee. Como este proceso es complejo, es instantáneo y es personal, se necesitan habilidades para que suceda. Pero a la vez, para complementar la información que pueda faltar, se necesita que el lector aporte a la lectura con su conocimiento previo sobre el tema que se está leyendo, y que rellene los vacíos que el autor ha dejado, a través de actividades cognitivas**.**

En el capítulo que sigue se demostrará que el problema, que se ha seleccionado de un libro de texto de segundo de secundaria, provoca la construcción de diferentes modelos situacionales, tanto en estudiantes de nivel medio superior como superior y que ésta es la causa por la que, alrededor del 50% de los mismos, no respondan satisfactoriamente dicho problema.

Capítulo 3

Aplicación del Instrumento de Investigación

Introducción

El problema que sigue apareció en el libro de matemáticas de segundo grado de secundaria (Arriaga, Benítez y Cortés, 2008):

> "Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Si del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y un paso de ella equivale a 0.70 m y su salto es de 3.80 m ¿con qué número con signo representas el recorrido previo al salto?"

En una investigación previa que consistió en el análisis de las respuestas obtenidas al aplicar este problema a un grupo de segundo grado de secundaria, tomando en cuenta el enfoque ontosemiótico, se concluyó que la redacción del problema provocaba serias dificultades en los estudiantes. Lo anterior fue evidente ya que ningún alumno dio la respuesta esperada que es un número negativo (Hernández, Rodríguez y Slisko, 2010). El problema toma como contexto un entorno deportivo con el cual los alumnos supuestamente deberían estar familiarizados. Sin embargo, para muchos, esta situación resultó ajena. También, la inadecuada redacción utilizada no ayuda a la comprensión total de la circunstancia planteada. Otro detalle es que tiene un dato que no es necesario para hallar la solución y, al utilizarlo, algunos alumnos no pueden dar la respuesta esperada.

Al identificar dichas deficiencias en el texto del problema decidimos aplicarlo en dos grados escolares diferentes de niveles más avanzados, medio superior y superior, para así analizar qué tipo de interpretaciones hacían los alumnos con un conocimiento más amplio de matemáticas. También se quiso averiguar si, en estos niveles, un mayor número de estudiantes podía dar la respuesta esperada.

La metodología consistió en la elaboración de diferentes cuestionarios o instrumentos de investigación con variantes del problema. Al problema redactado como está en el libro de texto de secundaria se le llamó la *versión original*.

En el nivel superior se aplicó la versión original y una versión modificada con la intención de comprobar si con la segunda se podía obtener una mejor interpretación y más respuestas correctas. Además, en otro instrumento se usó la versión original más una advertencia de que en el texto del problema había un dato sobrante.

Para el nivel medio superior, también, elaboramos dos instrumentos de investigación, uno con la versión original del problema que viene en el libro de texto y la otra versión cuenta con una modificación del problema ya que tiene redacción diferente. Este instrumento también cuenta con otras preguntas las cuales nos ayudaron a saber si los estudiantes podían construir el modelo matemático (la recta real).

En este capítulo presentamos la descripción de los instrumentos de investigación de los dos niveles educativos y los resultados que se obtuvieron en cada uno de ellos. La sección 3.1 está dedicada al Nivel Superior y la sección 3.2 al Nivel Medio Superior.

3.1 Nivel Superior

En este nivel se tomaron en cuenta cuatro pruebas de las seis variantes para poder detectar algunas dificultades con el contexto, la redacción, lenguaje inadecuado y uso del dato sobrante. Los participantes fueron 122 alumnos de la Facultad de Ciencias de Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla de las carreras de Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Actuaría. Se tomaron a estos estudiantes porque todos estaban cursando la materia de Cálculo Diferencial y pertenecían a cuatro grupos, dos matutinos que llamaremos A y B, y dos vespertinos que llamaremos C y D. En los cinco grupos había estudiantes de las cinco carreras ya mencionadas. Según los lineamientos administrativos para seleccionar horarios de materias, en los grupos A y B se encontraban los estudiantes con mejor promedio obtenido en el bachillerato. Por eso consideramos que en el C y D estaban los alumnos con menor promedio.

En el libro no aparece un dibujo de la situación, por lo que al instrumento con la versión original, le agregamos la instrucción:

1.- En el espacio de abajo, dibuja, lo más fiel posible, la situación descrita en el problema, tal como lo entiendes tú.

A cada parte del dibujo agrega un nombre e incluye todos los números que aparecen en el texto del problema.

De igual manera agregamos otros reactivos a la prueba, uno es para saber si los estudiantes identificaban el dato sobrante que no era necesario para dar la respuesta:

2.- Antes de pensar sobre la solución debes saber que hay una información en el texto que no es necesaria para responder la pregunta del problema.
a) ¿Cuál es esa información?
b) Justifica tu respuesta.

La tercera indicación es:

3.-Hallar la solución del problema

La finalidad de la siguiente pregunta es saber si hay alguna parte, palabra o idea que no entendieron para así, dependiendo de todas las respuestas, los alumnos nos den su propia percepción de lo que sienten que está mal en el problema.

4.- ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible?

Elaboramos otra versión del problema, a la que llamaremos *versión modificada*, de tal manera que el lenguaje y la redacción del problema lleven a la idea de número negativo. Como se puede ver abajo hemos cambiado la palabra recorrido por posición y también hemos cambiado algunos signos de puntuación.

> "Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa. Un paso de ella equivale a 0.70 metros. El salto de Cecilia usualmente es de 3.8 metros. ¿Qué número con signo describe mejor la posición de Cecilia al realizar los quince pasos?"

La primera instrucción que tienen que atender los estudiantes es la misma que en la versión original que es:

1.- En el espacio de abajo, dibuja, lo más fiel posible, la situación descrita en el problema, tal como lo entiendes tú.

En esta versión sólo agregamos 2 preguntas más, que son:

2.- Hallar la solución del problema

3.- ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible?

La tercera pregunta es con la misma finalidad que de la versión anterior, ahora para ver si en nuestra nueva versión hay las mismas dudas o redujimos el número de cosas incomprensibles para ellos.

Las otras dos versiones que se comparan son la versión original y con la versión donde se le agrega la advertencia del dato sobrante.

Las versiones original y modificada se aplicaron en los grupos A, C y D. La versión original con y sin advertencia se aplicó en los grupos A y B.

Los dibujos y respuestas de los instrumentos que hemos diseñado se analizaron con el objetivo de conocer el desempeño de los estudiantes y determinar si la estructura y formulación del problema es adecuada para inducir el uso de números negativos.

3.1.1. Resultados principales del nivel superior

Consideramos como respuesta correcta del problema a -10.5 m en las dos versiones del problema. El dato sobrante es la longitud del salto de Cecilia que es 3.8 metros y que un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el que mostramos en la Figura 3.

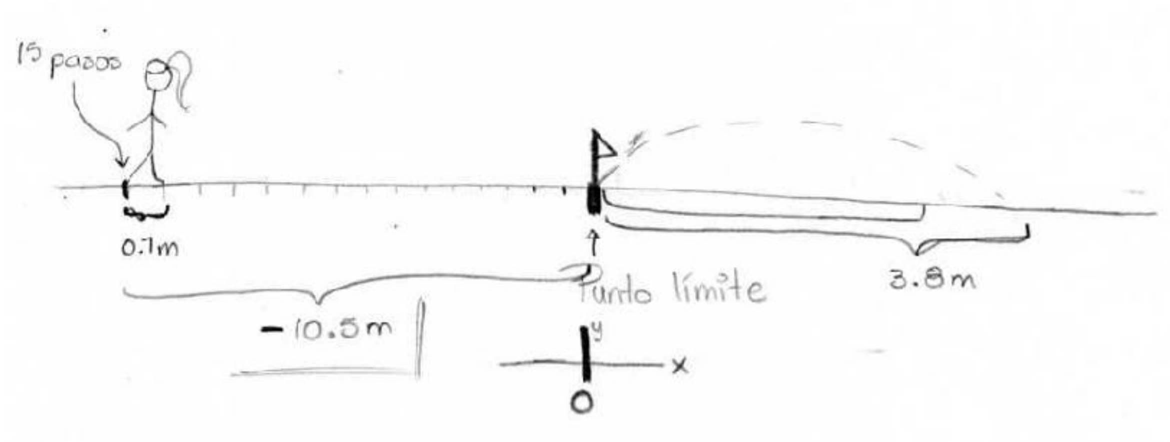


Figura 3. Dibujo que representa correctamente la situación del problema

Los resultados que presentamos muestran, que aún en este nivel, más de la mitad de los estudiantes no dan como resultado un número negativo.

	Versión Original			Versión Modificada		
	correctos	incorrectos	total	correctos	incorrectos	total
A	13	12	25	11	7	18
B	7	19	26	0	0	0
C	10	6	16	4	10	14
D	5	6	11	6	6	12
Subtotales	35	43	78	21	23	44
Porcentajes	44.80%	55.20%		48%	52%	

Tabla 1. Respuestas correctas en las versiones original y modificada

La Tabla 1 muestra que en las respuestas correctas no alcanzan ni un 50% del total de los estudiantes a los que se les aplicó los instrumentos, pero la versión modificada con la palabra “posición” en lugar de “recorrido” aumenta tres puntos porcentuales a la versión original, esto quiere decir que nuestra versión modificada hizo un poco más comprensible la situación planteada. Cabe notar que en el grupo C, con menor promedio en el bachillerato, hubo un porcentaje mayor de aciertos con la versión original (62%) que en la modificada (28%). Mientras que en el grupo A, con el mejor promedio en el bachillerato, se obtuvieron más respuestas correctas en la versión modificada (61%) que en la original (52%). Por otro lado, el mayor porcentaje de respuestas correctas se obtuvo en el grupo A.

Las respuestas incorrectas que fueron dadas por los estudiantes con mayor frecuencia son:

10.5 metros	24
21 metros	6
0 metros	6
signo negativo	5
14.3 metros	4
menos 15 pasos	4

Tabla 2. Respuestas erróneas más frecuentes.

Esto se debe a las diferentes interpretaciones que el problema produce en los alumnos a la hora de leerlo y resolverlo.

3.1.2. Uso del dato sobrante

En el total de los encuestados sólo 18 estudiantes de 122 usaron el dato sobrante de 3.8 para hallar la solución del problema, es decir, solo el 15%. Al comparar las versiones con advertencia y sin advertencia, las cuales fueron aplicadas a los grupos A y B, obtuvimos lo siguiente:

Sin Advertencia		Con Advertencia	
Usaron 3.8	No Usaron 3.8	Usaron 3.8	No Usaron 3.8
9	21	2	37
30.00%	70.00%	5.12%	94.88%

Tabla 3. El uso del dato sobrante

En la **Tabla 3**, se observa que la advertencia de que en el texto del problema había un dato sobrante, disminuyó el uso de este dato de un 30% a un 5%.
En la **Figura 4** se muestra la forma en la que un estudiante utiliza el dato sobrante.

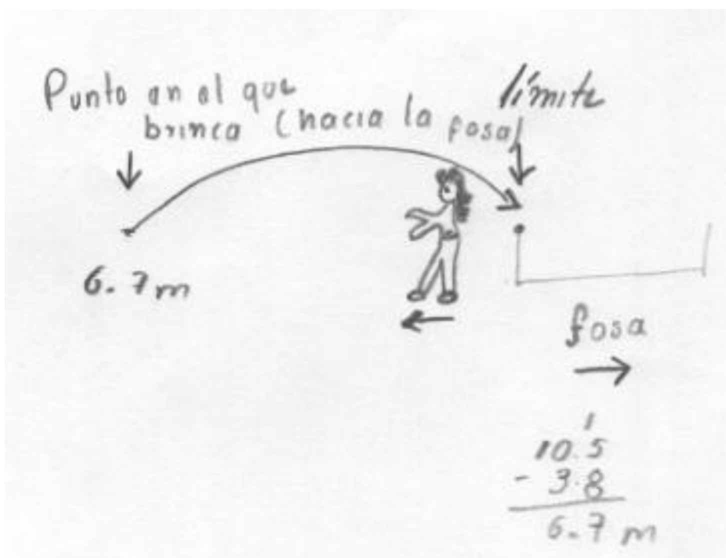


Figura 4. Respuesta de un estudiante que hace uso del dato sobrante.

3.1.3. Dificultades en la construcción de la base de texto

En el enunciado del problema podemos observar que no se describe claramente la posición de Cecilia ya que, al no contar con un dibujo, el lector no conoce la ubicación del punto límite ni de la fosa. Para muchos estudiantes no es claro si Cecilia salta después de dar los 15 pasos o si salta desde el punto límite. El obstáculo principal que hemos detectado para la comprensión del texto es que se pide el recorrido previo al salto, y este incluye los 15 pasos que da Cecilia para alejarse de la fosa (10.5 metros) y otros 10.5 m que tiene que recorrer para dar el salto. Los estudiantes que interpretan de esta forma esta situación no entienden por qué la respuesta debe ser un número negativo. Incluso hay alumnos que no saben qué es una fosa, y otros llegan a confundir el salto de longitud con el salto de altura. Para detectar los problemas que dificultan la construcción de la base de texto, observamos las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible? Las respuestas más frecuentes se muestran en la Tabla 4.

15 pasos en sentido contrario	**32**
Número con signo	**20**
La pregunta	**18**
Punto Límite	**15**
ninguna	**12**
El salto de Cecilia	**10**
qué es fosa?	**8**

Tabla 4. Partes del texto dudosas o incomprensibles según los estudiantes.

3.1.4. Dificultades en la construcción del modelo de la situación

Al observar los dibujos de los estudiantes, detectamos que la redacción del problema y el lenguaje utilizado impiden la construcción de la base de texto, lo que a su vez dificulta la construcción del modelo situacional. La situación que plantea el problema es inusual en una competencia de salto de longitud, sin embargo, sólo un estudiante se percató de este error. Aproximadamente, la mitad de los estudiantes encuestados construyeron modelos situacionales distintos al que plantea este problema. Algunas de las interpretaciones que pudimos registrar son las siguientes:

1. Cecilia camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y después salta 3.8 metros (**Figura 5**).

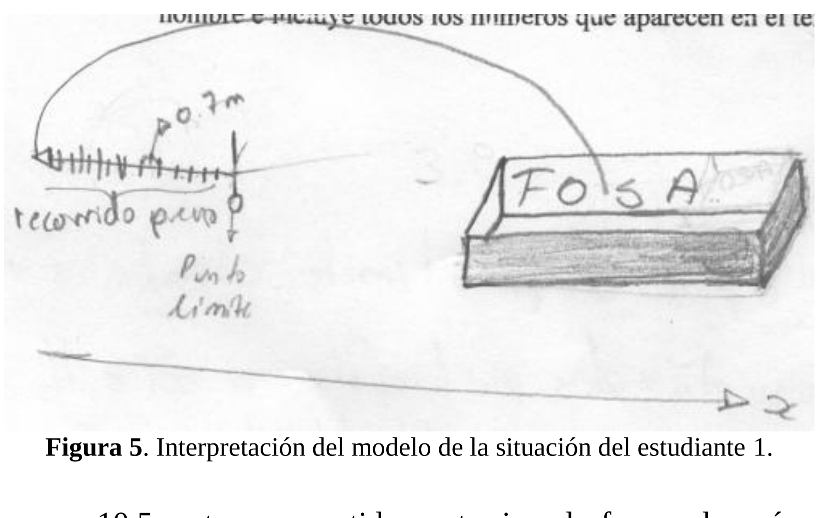


Figura 5. Interpretación del modelo de la situación del estudiante 1.

2. Cecilia recorre 10.5 metros en sentido contrario a la fosa y después recorre otros 10.5 metros hacia la fosa (**Figura 6**).

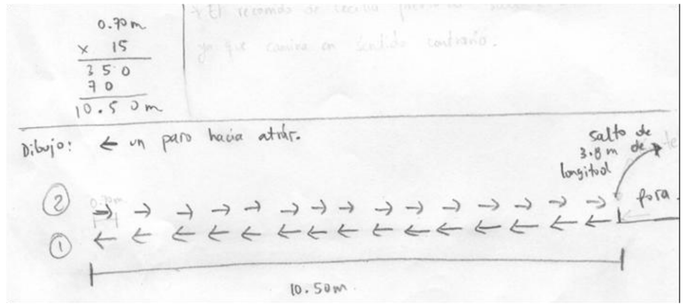


Figura 6. Interpretación del modelo de la situación del estudiante 2.

3. Cecilia recorre -10.5 metros y después 10.5 metros (**Figura 7**).

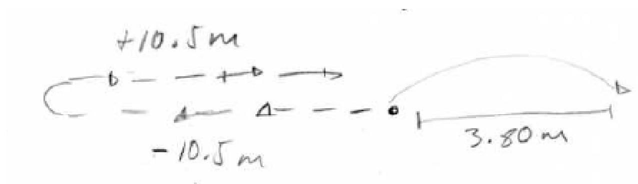


Figura 7. Interpretación del modelo de la situación del estudiante 3.

4. Cecilia recorre 10.5 metros hacia la fosa y salta 3.8 metros (**Figura 8**).

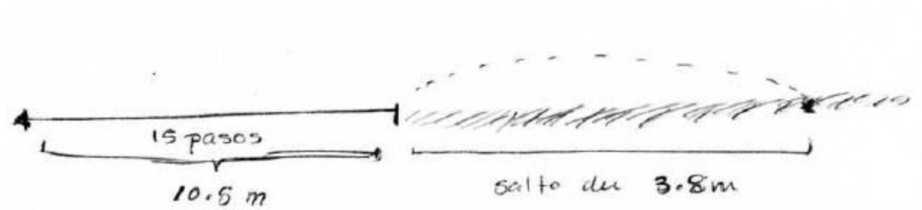


Figura 8. Interpretación del modelo de la situación del estudiante 4.

3.2 Nivel Medio Superior

En el nivel medio superior se aplicó a tres grupos (segundo, cuarto y sexto semestre) del turno matutino de una preparatoria privada, participaron 65 alumnos en total, a cada grupo lo denotaremos A, B y C respectivamente.

En el libro no aparece un dibujo de la situación, por esto se dio la siguiente instrucción:

1. En el espacio de abajo dibuja lo más fiel posible la situación descrita en el problema, tal como la entiendes tú. A cada parte importante del dibujo agrega un nombre.

También se agregó esta indicación a los alumnos:

2. Simplifica el dibujo anterior lo más que puedas, dejando solamente lo que es necesario para la solución. Es importante que en este dibujo incluyas todos los números que aparecen en el texto del problema.

Estas 2 instrucciones son muy parecidas pero se pidieron los dos dibujos para poder compararlos ya que en el primero pide el modelo de la situación con todo lo que entienden y perciben los jóvenes del problema y el segundo para saber si pueden tener un razonamiento más formal y abstracto de la situación del problema y poder representarla. Además en la prueba con la versión original, aparte de los dibujos, se pide hallar la solución del problema como 3er reactivo y al final se hace una pregunta respecto a los problemas matemáticos, ésta es:

4. Este tipo de problemas aumenta mi interés en las matemáticas:
A) Totalmente de acuerdo
B) De acuerdo
C) Indiferente
D) En desacuerdo
E) Totalmente de acuerdo

5. ¿Por qué?

Elaboramos otra versión del problema cambiando la redacción, agregando signos de puntuación, modificando las palabras, y con esto tratamos de dar un entendimiento más claro al alumno de la situación planteada en el programa y sea más sencillo llegar a la idea de número negativo. A esta le llamaremos la versión modificada.

> "Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Se prepara verificando la pista donde correrá y el punto desde donde saltará. Desde el punto del salto, ella da 15 pasos para regresar a la línea de salida porque ya es su turno de competir. La longitud de su salto fue 3.8 m."

En esta versión también se pidió a los alumnos elaborar los dos dibujos pero hay otros tres reactivos, estos son:

1) Si cada uno de sus pasos mide 0.70 m, ¿Qué número positivo o negativo representa mejor la posición de Cecilia al momento en que comienza a correr para dar el salto?

2) ¿Qué número corresponde al punto desde donde saltará?

3) ¿Cuál sería la manera, matemáticamente correcta, de reportar su posición en el momento en que termina el salto?
a) -3.8 m
b) +3.8 m
c) -6.7 m
d) +14.3 m

En los grupos se trató de aplicar la misma cantidad de pruebas de cada versión para poder compararlas y tener el mismo número de pruebas de cada tipo por salón.

3.2.1. Resultados Principales del Nivel Medio Superior

Seguimos considerando que la respuesta correcta al problema es -10.5 m en el caso de estas dos nuevas versiones del problema. Que el dato sobrante es 3.8 m y que un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el que mostramos en la **Figura 3**.

Los resultados en este nivel no son lo que se esperaba, porque los alumnos están más alejados de la noción de número negativo ya que un porcentaje menor obtuvo la respuesta correcta.

	Versión Original		Versión Modificada	
	Correctos	Incorrectos	Correctos	Incorrectos
A	0%	100%	22%	78%
	0	12	2	9
B	0%	100%	0%	100%
	0	10	0	11
C	44%	56%	10%	90%
	4	7	1	9
Totales	12.12%	87.88%	9.38%	90.62%
	4	29	3	29

Tabla 5. Porcentaje de respuestas correctas nivel medio superior

En la Tabla 5 se muestran los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. En el grupo A (2do Semestre) la versión original no tuvo ninguna respuesta correcta, en cambio en la versión modificada hubo un 22% de pruebas con la respuesta esperada. En el grupo B (4to Semestre) no se obtuvo ninguna respuesta correcta. En el grupo C (6to Semestre) la versión original tuvo 12.12% de respuestas correctas y la versión modificada 9.38%. Con la nueva versión que pusimos no pudimos aumentar el número de respuestas correctas esperadas, sólo en el grupo A se obtuvieron más respuestas correctas que en la versión original. El caso del grupo B donde no se obtuvo ninguna respuesta correcta puede atribuirse a que los alumnos no tenían ganas de participar en contestar la prueba.

Las respuestas incorrectas con mayor frecuencia en este nivel son:

10.5 metros	17
No contestó	11
negativo	6
10.5<3.8	5
positivo	4
3.8 metros	2

Tabla 6. Respuestas incorrectas más frecuentes

Estas respuestas incorrectas se deben al gran número de interpretaciones que los alumnos tienen del problema. En este nivel, por los programas educativos, hay conceptos que ya deberían estar totalmente asimilados, pero estas pruebas indican que hace falta reafirmar varios conocimientos.

3.2.2. Uso del dato sobrante

De los 65 alumnos que fueron encuestados, 17 (el 26.15%) usaron el dato sobrante que es el 3.8 (longitud del salto de Cecilia). Al comparar una vez más los resultados entre las dos versiones obtuvimos los siguientes resultados:

	Versión Original		Versión Modificada		Total	
	Usaron el 3.8	No Usaron el 3.8	Usaron el 3.8	No Usaron el 3.8	Usaron el 3.8	No Usaron el 3.8
A	4	8	0	11	4	19
%	33.33	66.67	0%	100%	17.39	82.61
B	5	5	3	8	8	13
%	50	50	27.27	72.73	38.10	61.90
C	0	11	5	5	5	16
%	0	100	50	50	23.81	76.19

Tabla 7. El uso del dato sobrante

En el grupo A la versión modificada no tuvo ningún uso del dato sobrante mientras que en la versión original, 4 estudiantes lo utilizaron. En el grupo B en la versión original de un 50% que usaron el dato, bajó a un 27.27% en la versión modificada. En el grupo C en la versión original ningún estudiante usó el dato sobrante, en cambio, en la versión modificada lo usaron el 50% de los alumnos.

Para ver si los estudiantes entendían mejor la situación del problema, agregamos una pregunta:

2) ¿Qué número corresponde al punto desde donde saltará?

Consideramos que la respuesta correcta a esta pregunta es cero (“0”) o el origen. Los estudiantes contestaron esta pregunta de la siguiente forma:

	Correctos	Incorrectos
A	7	4
%	63.63%	36.37%
B	6	5
%	54.54%	45.46%
C	1	9
%	10%	90%

Tabla 8. Porcentaje de alumnos que identificaron el origen.

Como se puede ver en la Tabla 8, en los grupos A y B más del cincuenta por ciento identificaron el punto desde donde salta Cecilia, pero en el grupo C sólo un 10% lo hizo. Puede ser que esto se deba a que en el grupo C la actitud de cooperación a la hora de la aplicación de las pruebas no fue la mejor, dado que muchos estudiantes no estaban interesados.

También consideramos las respuestas incorrectas para ver si ahí no usaban como referencia el dato sobrante, las respuestas incorrectas fueron:

Respuestas incorrectas	
3.8m/.70=5.42	5
no contestó	3
-10.5	3
.7x15	2
10.5	2
-3.8	1
3.5	1
10.5	1

Tabla 9. Respuestas incorrectas identificando el origen

Vemos que en este caso 6 alumnos usaron el dato sobrante, esto es un 33.33% del total de las respuestas incorrectas.

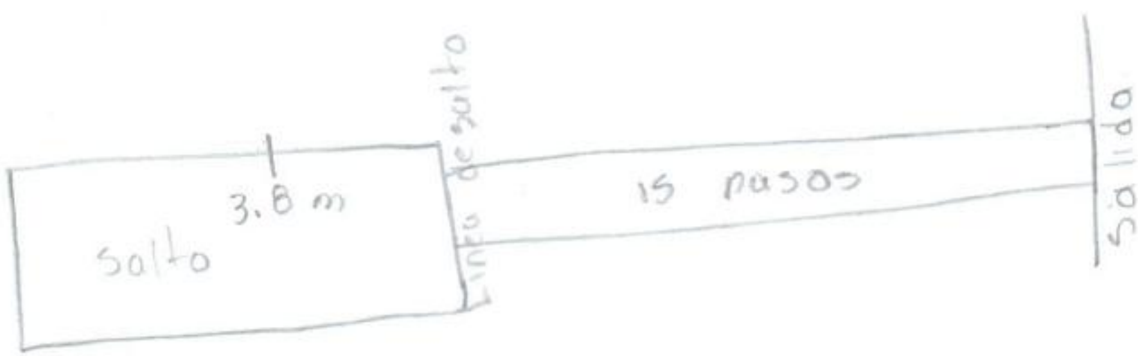


Figura 9. Ejemplo de Uso del 3.8m.

En la versión modificada agregamos la pregunta:

3) ¿Cuál sería la manera, matemáticamente correcta, de reportar su posición en el momento en que termina el salto?
a) -3.8 m
b) +3.8 m
c) -6.7 m
d) +14.3 m

Agregamos esta pregunta para ver si los alumnos ubicaban correctamente el dato sobrante en el problema. Los resultados que obtuvimos son los siguientes:

	Respuestas Pregunta 3					
	a	b	c	d	No	Total
A	1	9	1	0	0	11
%	9.09%	81.82%	9.09%	0%	0%	100.00%
B	1	10	0	0	0	11
%	9.09%	90.91%	0%	0%	0%	100.00%
C	0	8	1	0	1	10
%	0%	80%	10%	0%	10%	100.00%
Totales	2	27	2	0	1	32
	6.25%	84.38%	6.25%	0%	3.12%	100.00%

Tabla 10. Resultados de la pregunta 3

En la Tabla 10 se muestra el porcentaje de alumnos que ubicaron el dato sobrante, en este caso el 84.38% de la versión modificada lo identificaron. Por otro lado, en el grupo C, un 80% lo identifico. Sin embargo, en la tabla 7 vemos que un 50% lo utilizó.

3.2.3. Dificultades en la construcción de la base de texto

En estas versiones no pusimos una pregunta para saber qué no entendían o qué parte del problema se les hacía dudosa. Pero hay algunas cosas que no entendieron cuando analizamos sus respuestas por ejemplo:

En esta caso el alumno convierte los 10.5 metros dados en saltos con la equivalencia de .70 metros y la respuesta la da en saltos. (Figura 10)

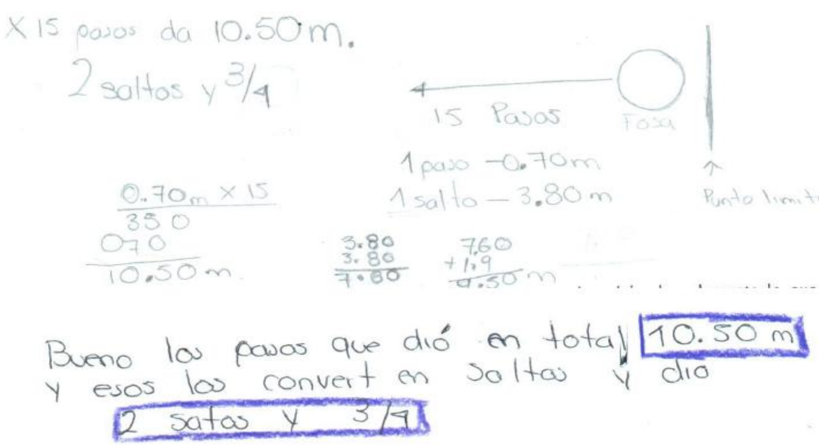


Figura 10.El alumno da la respuesta en saltos.

El punto límite como no saben qué es, lo confunden con la medida de los pasos y lo ubican en su dibujo. Además el modelo no lo unifican. (Figura 11)

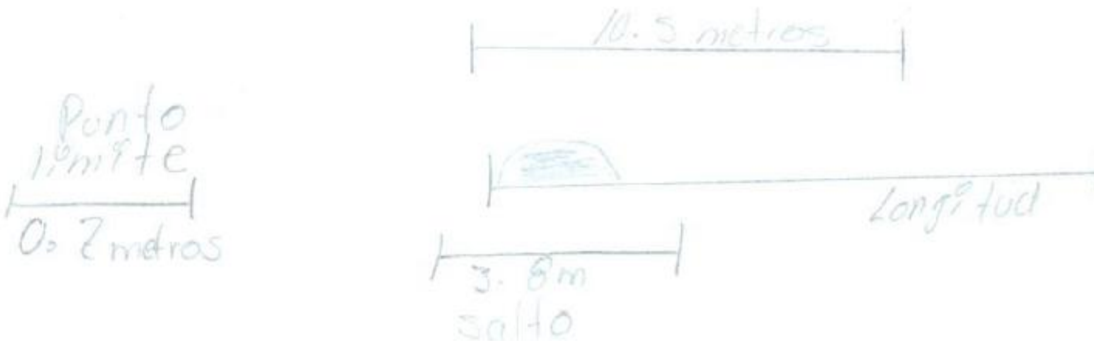


Figura 11. No identifican el punto límite y no unifican el dibujo.

No saben identificar el salto de longitud y tampoco diferenciarlo del salto de altura. (Figura 12)

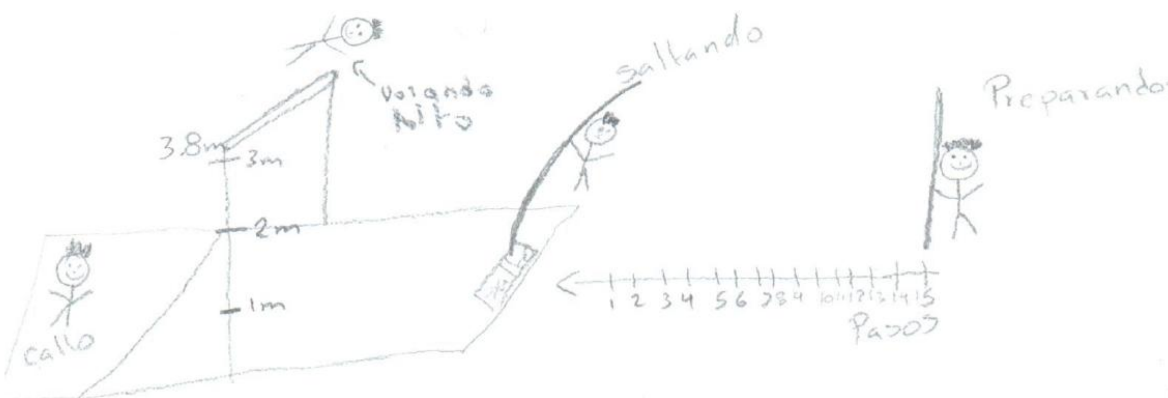


Figura 12 Confunden salto de longitud con salto de altura.

Uno da como respuesta hacer una regla de 3. (Figura 13)

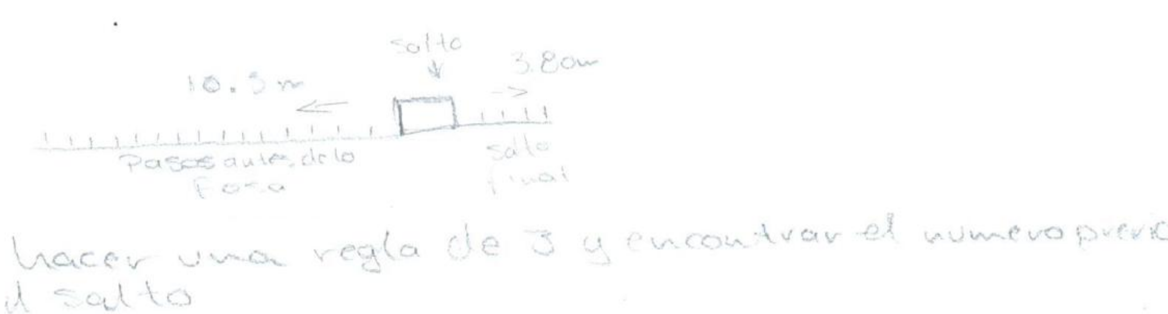


Figura 13. Indican que la respuesta es una regla de 3.

3.2.3. Dificultades en la construcción del modelo de la situación

En este nivel, la mayoría de los alumnos no dibujaron un modelo adecuado de la situación, el análisis de los dibujos nos permite observar los diferentes modelos situacionales que fueron construidos. Por ejemplo:

1.-Estudiante 1: Toma los 10.5m en sentido contrario pero después de esto, Cecilia salta, pero también toma en cuenta el salto en el punto límite. (Figura 14)

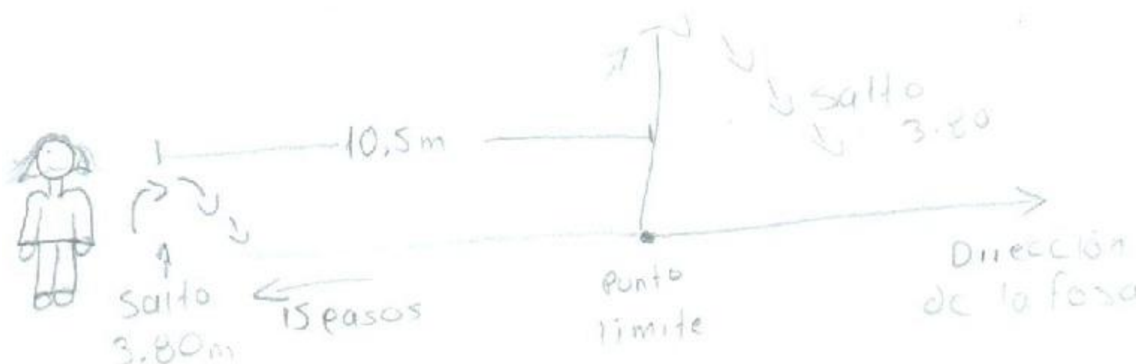


Figura 14. Interpretación de la situación del estudiante 1.

2.-Estudiante 2: Del punto límite camina los 10.5 metros pero no en sentido contrario y ahí mismo del punto límite toma en cuenta el salto de Cecilia. (Figura 15)

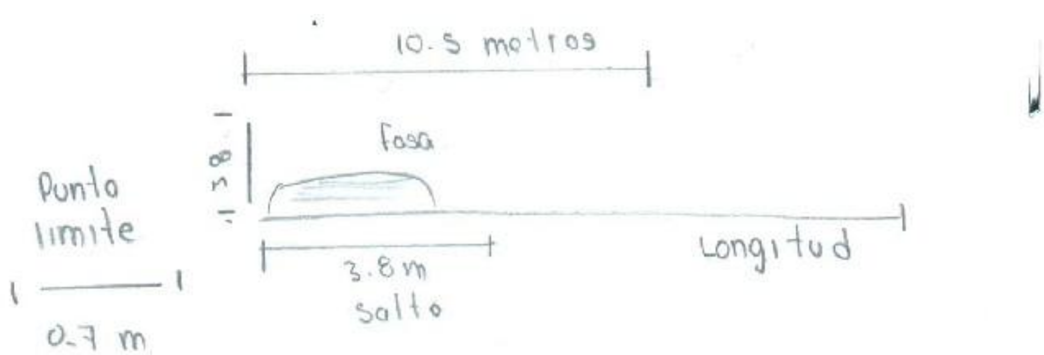


Figura 15. Interpretación de la situación del estudiante 2.

3.-Estudiante 3: Después del punto límite el salto lo da en sentido contrario y toma en cuenta un paso adelante del punto límite. (Figura 16)

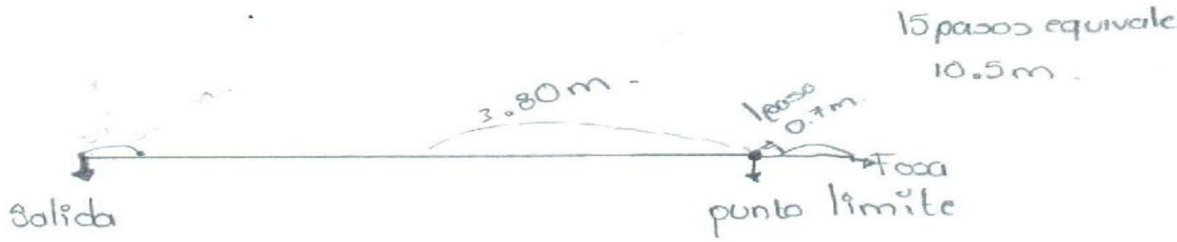


Figura 16. Interpretación de la situación del estudiante 3.

4.-Estudiante 4: Toma el salto desde la línea de salida, da el salto Cecilia y llega a 1.9m y la meta la toma como los 3.8m que vale el salto de Cecilia (Figura 17)

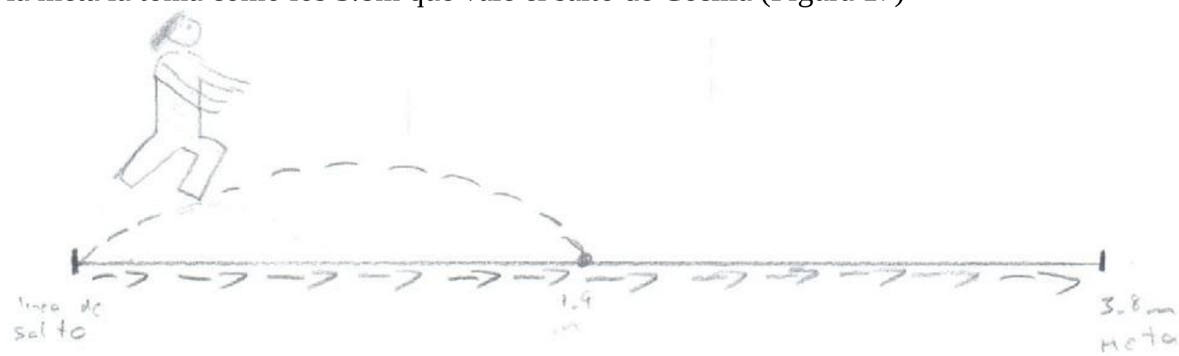


Figura 17. Interpretación de la situación del estudiante 4.

5.-Estudiante 5: Del punto límite camino los pasos en sentido contrario y luego regresa para saltar del punto límite, por eso su recorrido es cero (Figura 18)

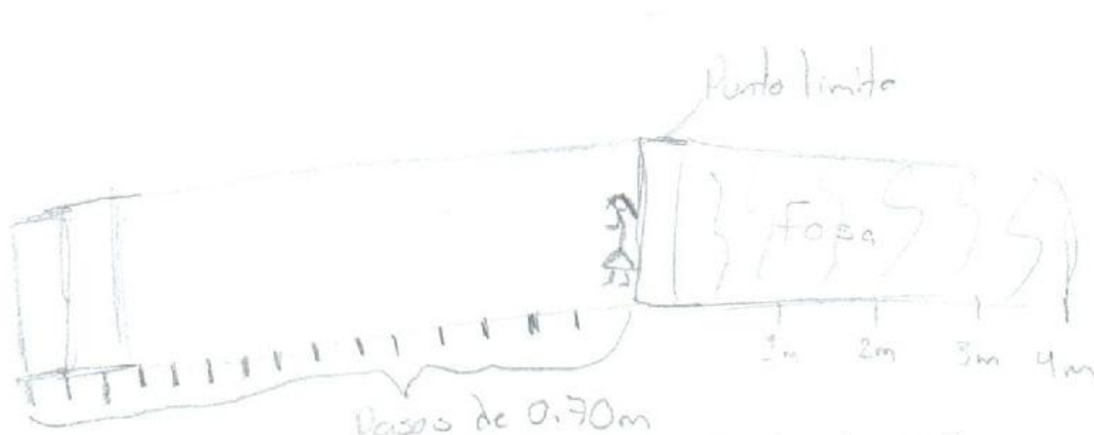


Figura 18. Interpretación de la situación del estudiante 5.

6.- Estudiante 6: En este caso toman los 10.5 en sentido contrario y toman el salto luego de dar los pasos, pero dicen que 3.8m es mayor que 10.5m (Figura 19)

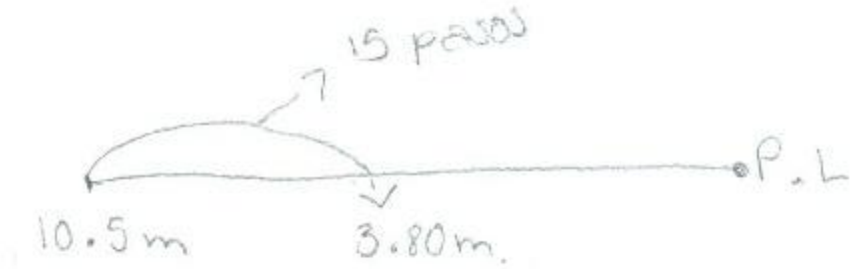


Figura 19. Interpretación de la situación del estudiante 6.

3.2.4. Opinión de los Alumnos sobre los Problemas Planteados

A los alumnos de este nivel también les hicimos una pregunta para saber qué opinaban sobre estos problemas y si éstos les hacían aumentar su interés en las matemáticas. La pregunta es:

4) Este tipo de problemas aumenta mi interés en las matemáticas.

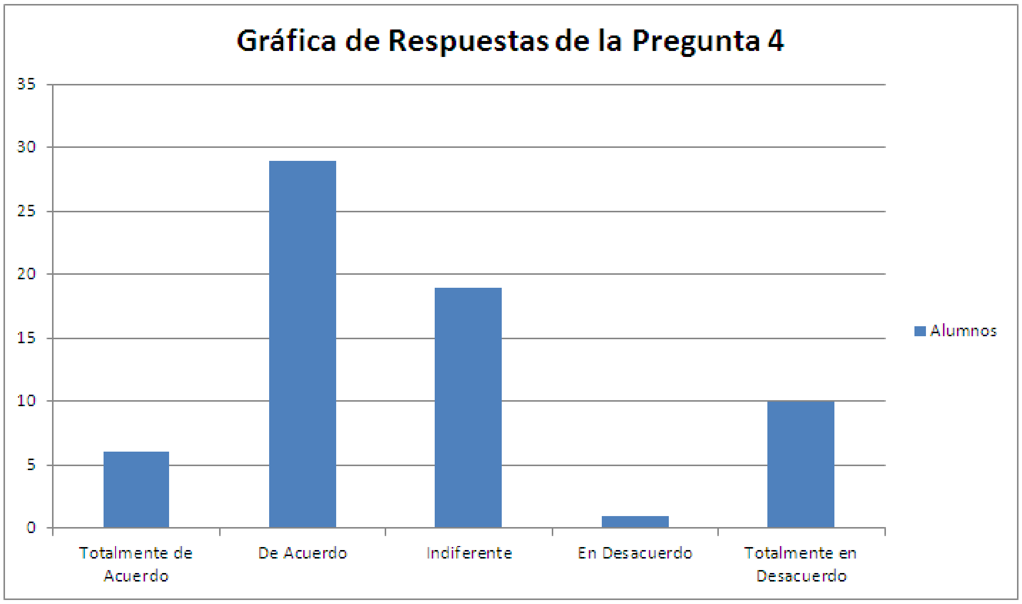
a. Totalmente de acuerdo
b. De acuerdo
c. Indiferente
d. En desacuerdo
e. Totalmente en desacuerdo

5) ¿Por qué?

La pregunta 4 fue respondida de la siguiente manera:

	2do	4to	6to	Total	%
Totalmente de Acuerdo	1	4	1	**6**	9.25%
De Acuerdo	11	11	7	**29**	44.61%
Indiferente	7	2	10	**19**	29.23%
En Desacuerdo	0	1	0	**1**	1.53%
Totalmente en Desacuerdo	4	3	3	**10**	15.38%
Total	**23**	**21**	**21**	**65**	**100.00%**

Tabla 10. Respuestas de los alumnos a la pregunta 4



Gráfica 1. Número de Alumnos que dicen que este tipo de problemas aumentan su interés.

La Tabla 10 nos dice que el 9.25% del total de los estudiantes está totalmente de acuerdo y el 44.61% de acuerdo en que estos problemas aumentan su interés, sumados nos dicen que el 53% está de acuerdo. Por otro lado el 29.23% es indiferente y el 15.38% está totalmente en desacuerdo. En las tablas de abajo se muestran las justificaciones más mencionadas por los alumnos.

Totalmente de acuerdo/De Acuerdo	Alumnos
Nos pone a pensar en como solucionar problemas	6
Ayuda a entender más las matemáticas	6
Ver La manera de como interpretar un problema	4
Te enseñan más cosas	3
Puedes mejorar en la clase de matemáticas	3
Los dibujos mejoran el resultado	3
Es atractivo e interesante	3

Tabla 12. Justificaciones de estar totalmente de acuerdo y de acuerdo

Indiferente	Alumnos
No me gustan las matemáticas	9
No voy a ser maestro de matemáticas	3
No le entiendo	2
Da igual	2

Tabla 13. Justificaciones de ser indiferente

En Desacuerdo/Totalmente en Desacuerdo	Alumnos
No me gusta como enseña el profesor	4
No me gustan	4

Tabla 14. Justificaciones de estar En Desacuerdo o Totalmente en Desacuerdo

En las tablas anteriores podemos observar que los alumnos que están totalmente de acuerdo/de acuerdo es porque les ayuda a comprender las matemáticas y en cómo solucionar los problemas, de ese lado se ve interés y gusto por éstas ya que también los que estaban de acuerdo/totalmente de acuerdo hicieron mejor los dibujos (Tabla 12). Los estudiantes que respondieron "indiferente" a la pregunta 4, es porque no les gustan las matemáticas, algunos justificaron su indiferencia con la idea de que estos problemas son de interés sólo para los que desean ser profesores de esta materia y en otros casos porque no las entienden (Tabla 13).

3.2.5. Simplificación del Modelo de la Situación.

En las pruebas que se aplicaron a nivel medio superior, se les pidió que hicieran dos dibujos de la situación, el primero con todo lo que entendían, así como los datos y los números donde iban, y el segundo debían hacerlo más sencillo, simplificando el primero, ya sea quitando los datos, o los detalles que agregaban, como el dibujo de Cecilia, la fosa, etc. Muchos estudiantes dejaron nada más un dibujo, no hicieron la simplificación de éste.
Al solicitarles la simplificación del dibujo, suponíamos que podían llegar a hacer un dibujo más abstracto de la situación. De manera general los estudiantes de este nivel no pudieron obtener un dibujo abstracto de la situación pero hubo algunos casos que llamaron la atención. Por ejemplo:

1. Caso 1: Algunos alumnos, al leer la indicación de hacer los dos dibujos, repitieron el mismo (Figura 20).

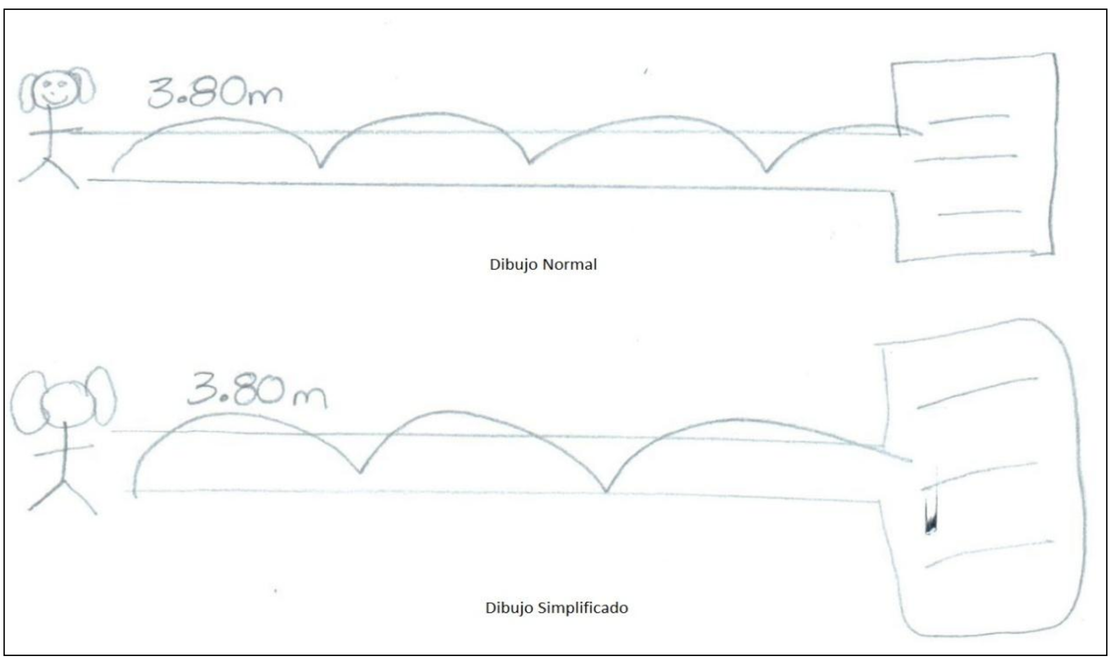


Figura 20. Caso 1: Dibujos Iguales.

2. Caso 2: Un alumno a pesar de que su dibujo ya era sencillo, lo simplificó aún más. (Figura 21).

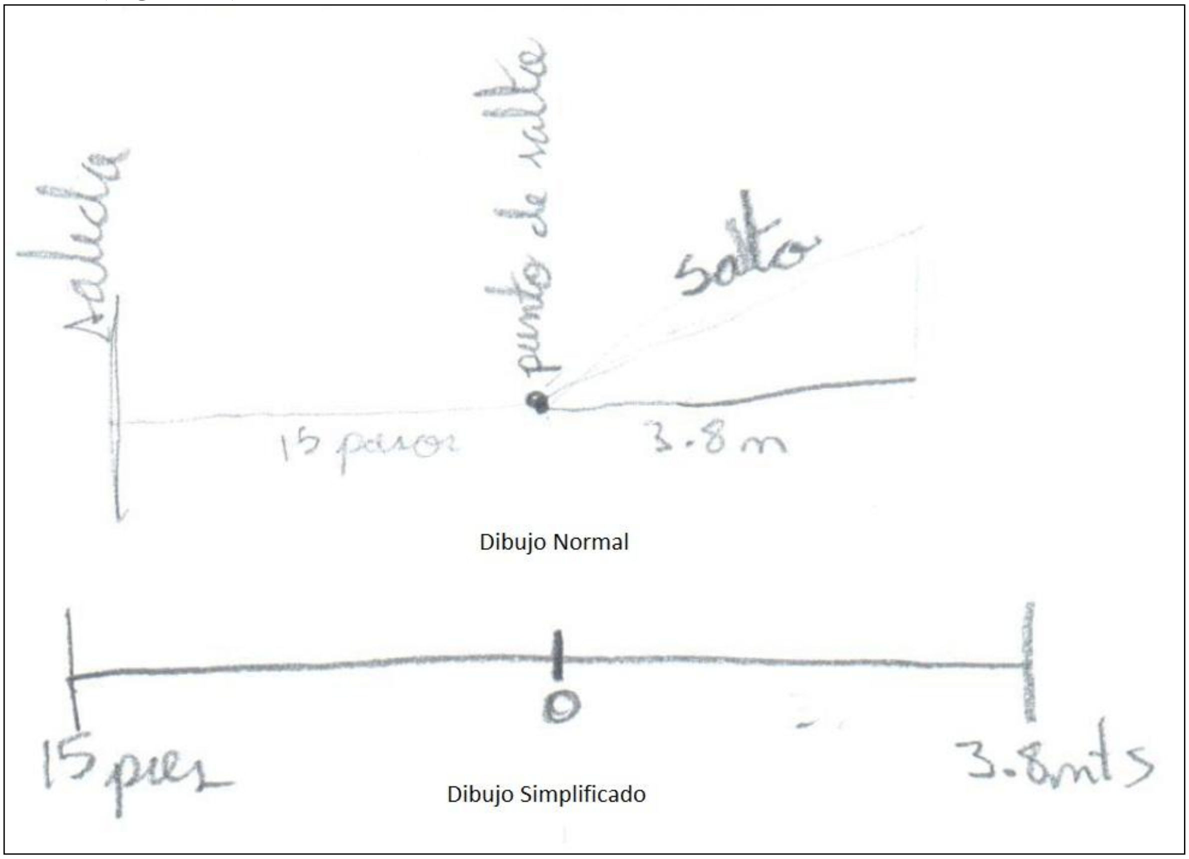


Figura 21. Caso 2: Dibujo aún más simplificado.

3. Caso 3: Se tiene el caso donde un alumno su primer dibujo es abstracto y cuando le piden la simplificación le agrega más detalles (Figura 22).

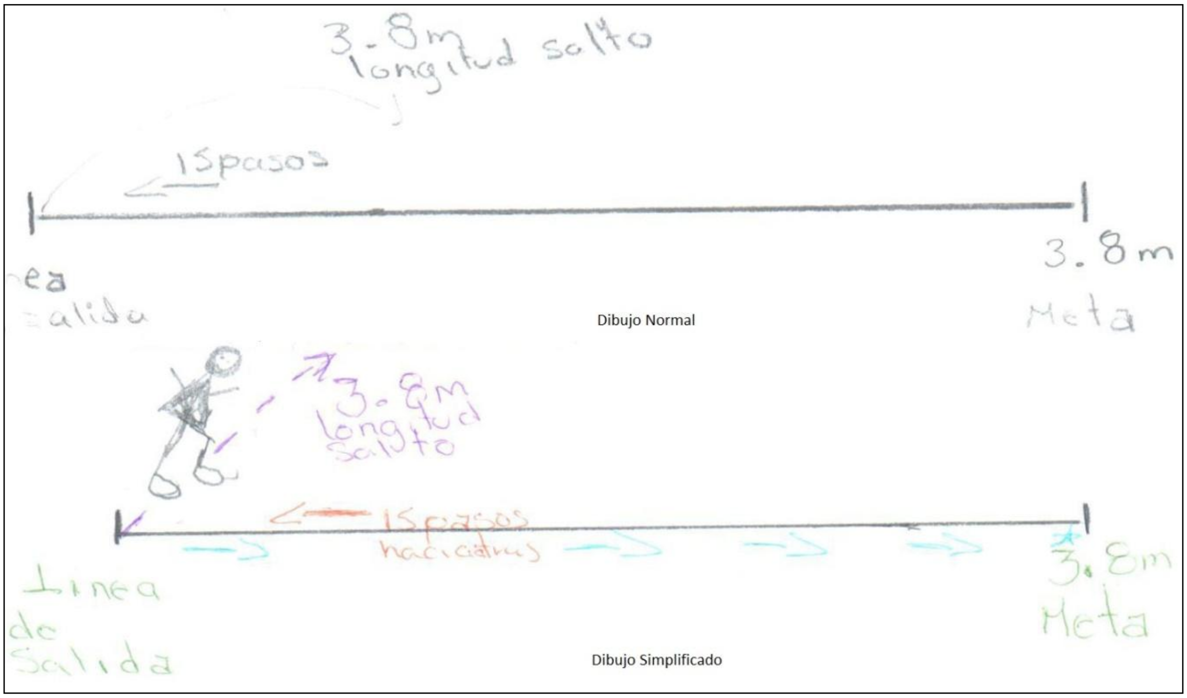


Figura 22. Caso 3: Dibujo simple y el segundo más detallado

4. Caso 4: Un caso muy particular es que hagan su dibujo y en la simplificación, sólo hacen una línea, diciendo que eso describe la situación del problema (Figura 23).

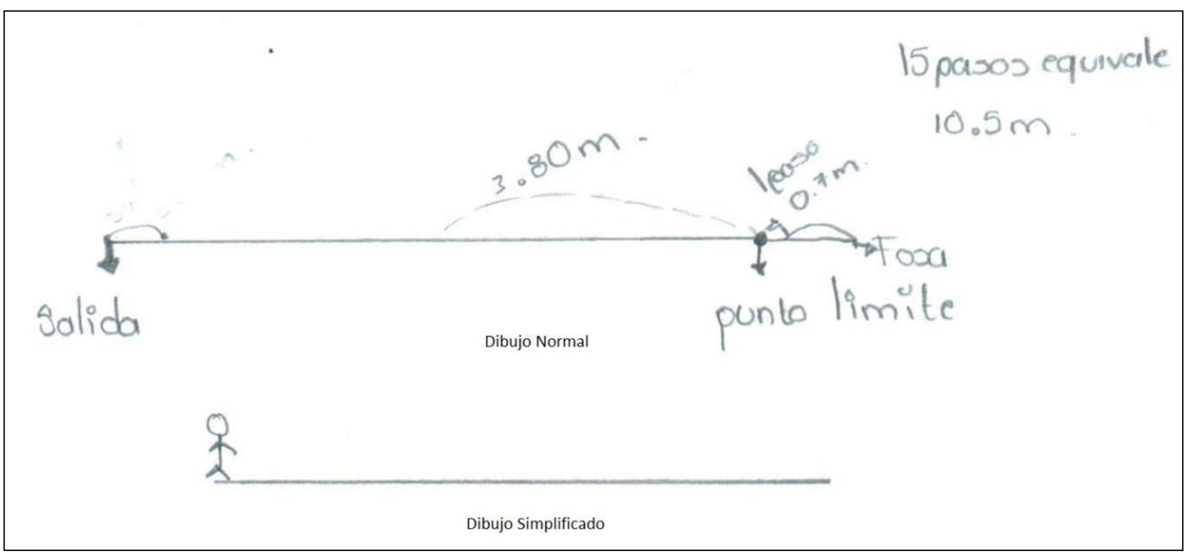


Figura 23. Dibujo de la línea que describe la situación

5. Caso 5.- Otro que llama mucho la atención es que el primer dibujo es sencillo, pero el segundo ya entra con elementos matemáticos como la recta numérica (Figura 24).

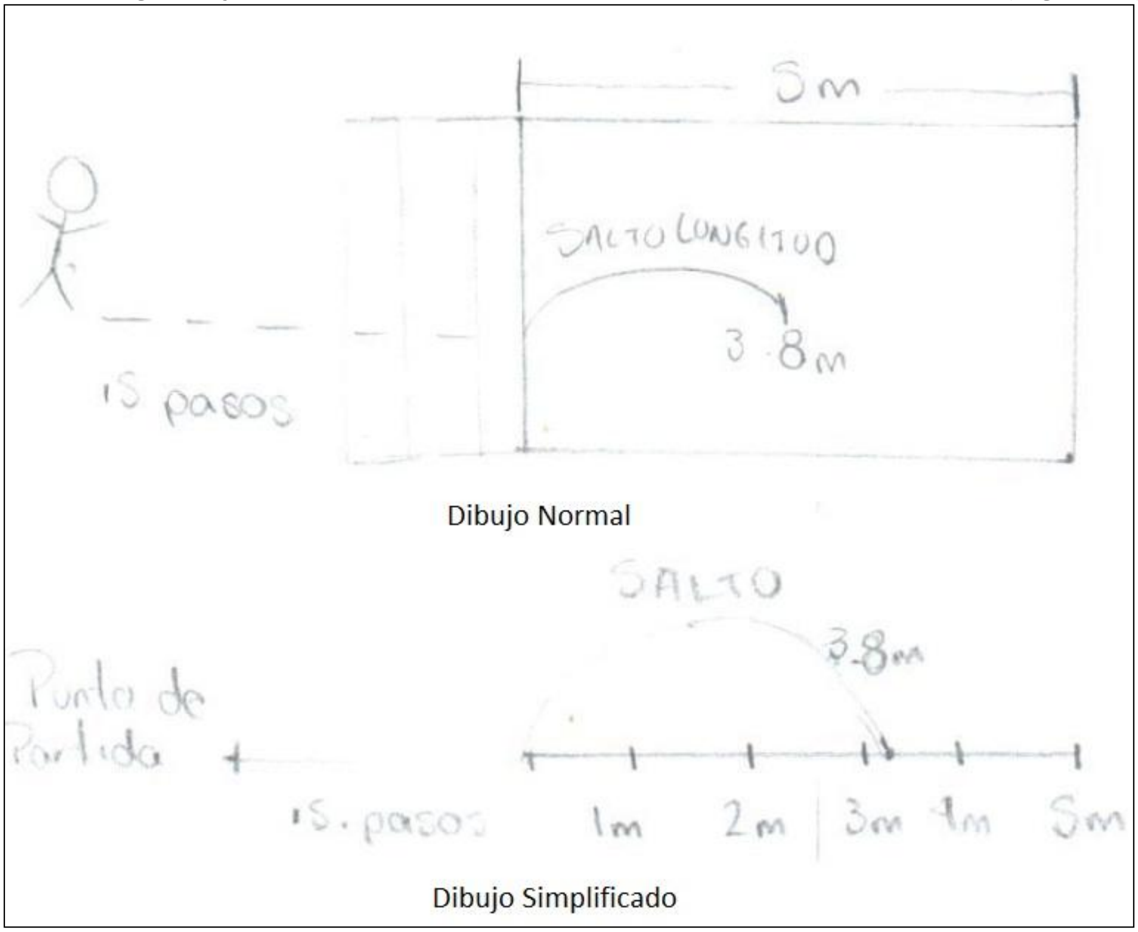


Figura 24. Caso 5: En la simplificación ya entran objetos matemáticos.

Se esperaba que al hacer el dibujo simplificado, éste fuera más abstracto, es decir, que no contara con tantos elementos concretos como son la fosa, el dibujo de Cecilia, etc. y que aparecieran solo elementos matemáticos. De igual forma, en el dibujo más simplificado se esperaba que apareciera como principal elemento matemático la recta real, ya que consideramos que es el modelo matemático más adecuado para describir la situación del problema.

Analizando los casos más representativos, podemos observar que la mayor parte de los estudiantes no simplifica el dibujo, incluso hasta lo hacen más elaborado y concreto. En otro caso vemos que el alumno hace más abstracto el dibujo pero no dibuja la recta real.

Muy pocos fueron los casos donde apareció la recta real. Se esperaba que al solicitar los dos dibujos pudiéramos identificar si los alumnos en ese nivel eran capaces de obtener un dibujo abstracto en el que apareciera el modelo matemático. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se logra una simplificación del dibujo, aun en el dibujo simplificado se obtuvieron dibujos concretos. Los dibujos abstractos, como el caso 5, Figura 24, nos permiten concluir que si la actividad de solicitar la simplificación del dibujo se hiciera sistemática en el salón de clases sería posible obtener el modelo matemático necesario para la resolución del problema.

Capítulo 4

Conclusiones

El problema que se revisó en esta tesis, muestra una falta de claridad en la redacción, dado que la mayoría de interpretaciones dadas por los estudiantes no son las adecuadas para obtener la respuesta que se consideró como correcta.

Además, la inclusión de datos no necesarios en el planteamiento de problemas ocasiona confusión, al emplearlos obligadamente el alumno, o pierde tiempo, o al ocuparlos obtiene una respuesta errónea. El alumno tiene como metodología utilizar todos los datos dados en un ejercicio pero, es probable que los autores presenten los problemas con datos sobrantes para que los estudiantes se quiten ese hábito.

En la aplicación de los instrumentos de estudio en el nivel Medio Superior los resultados no fueron los esperados y sólo hubo una pequeña mejoría usando la versión modificada. Por los resultados podemos concluir que en estos niveles el problema fue poco entendido, entonces a nivel básico podría causar mayor confusión. En algunos casos, en la aplicación de estos instrumentos de estudio, los alumnos (Nivel Superior y Medio Superior) no sabían qué era un “Salto de Longitud”, “Fosa”, etc. Por lo tanto su familiarización con estos conceptos es baja o nula, ya que llegan a confundir el salto de longitud con salto de altura y de esta forma concluimos que, los problemas que se plantean, para poder asimilar y entender un concepto matemático, deben involucrar situaciones con las que estén familiarizados los estudiantes.

Otro aspecto a considerar es que el problema planteado toma en cuenta uno de los modelos de enseñanza que se han propuesto para el aprendizaje de los números negativos, la recta real. Este modelo es adecuado para darle el significado de magnitud dirigida a los números con signo, lo cual corresponde a la regla R1, sin embargo, el autor del problema solicitó un número con signo para el recorrido, el cual no puede ser negativo ni corresponde a este tipo de extensión de los números.

Por otra parte, como el libro en cuestión se distribuye por todo el país, las dificultades para entender y asimilar las situaciones podrían ser mayores para los estudiantes de zonas rurales, ya que la situación que plantea este libro, probablemente, no les parezca común.

El área de matemáticas a nivel básico está muy descuidada al presentar libros con problemas de este tipo, dado que aun en los niveles Medio Superior y Superior encontramos que el problema no se resuelve satisfactoriamente debido a la ambigüedad en la redacción.

Por otro lado, detectamos que los estudiantes no estaban familiarizados con la elaboración de dibujos abstractos, porque al pedirles que hicieran los dos dibujos (que reflejarían sus versiones del modelo situacional y del modelo matemático), éstos fueron hechos, en su mayoría, exactamente iguales.

En los libros de texto de matemáticas es común presentar en el mismo dibujo una mezcla del modelo situacional y del modelo matemático. Por esta razón, no es extraño que los alumnos no los puedan elaborar por separado de manera adecuada. En futuras investigaciones es necesario averiguar qué tipo de enseñanza podría remediar esta deficiencia inducida en el aprendizaje de los alumnos, a través de los libros de texto. La transición consciente y pertinente del modelo situacional al modelo matemático es un paso crucial en el ciclo de modelación matemática en la resolución de problemas (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Bibliografía

Alcina, J., Blecua, J. (1975), *Gramática española*. Ariel, Barcelona.

Arriaga, A., Benítez, M. M. y Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 2, Introducción a las competencias. Educación Secundaria*. México: Pearson Educación.

Ausubel, D. P.et alCols. (1986) *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Editorial Trillas. México.

Bachelard, G. (1980). *La formation de l'esprit scientifique (The formation of scientific spirit).* Librairie philosophique J. Vrin. Paris

Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. (2006), *Teaching Mathematical Modelling Through Project Work*, *ZDM*, Vol. 38 (2)

Blum, W. y Borromeo Ferri, R. (2009), *Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application, Vol. 1, No. 1, 45-58

Bruno, A. (1997), *La Enseñanza de los Números Negativos: Aportaciones de una Investigación,* Revista de Didáctica de las Matemáticas, Número 29, págs. 5-18.

Bruno, A. y Martinón, A (1997) *Procedimientos de Resolución de Problemas Aditivos con Números Negativos*, Universidad de La Laguna, España.

Cid, E. (2000), *Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos*, XIV Seminario Interuniversitario en Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Duroux, A. (1982), *La valeur absolue: difficult´es majeures pour une notion mineure, memoria de DEA*, Publications de l'IREM, Burdeos.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D .Reitel

Gallardo, A. (1996), *'Qualitative analysis in the study of negative numbers'*, Proceedings of the 20th International Conference of PME, Valencia, vol. 2, 377-384.

Gallardo, A. y Hernández A. (2006), *La Extensión del Dominio Numérico de los Naturales a los Enteros Vía El Modelo Concreto de Bloques*, Revista Educación Matemática, Vol. 18 págs. 73-97, Grupo Santillana, México.

Gallego, R. (1995). *Discurso constructivista de las tecnologías*. Editorial libros y libres S. A. Santafé de Bogotá. p. 120-127.

Galve, J.L. (2007) *Procesamiento para la comprensión de palabras escritas (lectura). En Evaluación e Intervención En Los Procesos De La Lectura y La Escritura.* Sevilla: Editorial EOS.(Págs. 17 - 47)

Gascon, J. (1993), *'Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico'*, Recherches en Didactiquedes Mathematiques, 13(3), pp. 295-332.

Glaeser, G. (1981), '*Epist´emologie des nombres relatifs', Recherches en Didactique des Math´ematiques, 2(3), 303-346.*

Golder C. y Gaonacíh D. (2002). *Leer y Comprender: Psicología de la Lectura.* Editorial Siglo XXI (Pag. 127-130).

Greeno, J. G. (1991). *Number sense as situated knowing in a conceptual domain.* Journalfor Research in Mathematics Education, 22(3), 170-219.

Hernández L., Rodríguez F. y Slisko, J. (2010). *Las Dificultades de los Estudiantes de Secundaria al Resolver un Problema que Involucra los Números con Signo: una interpretación ontosemiótica*. Memorias del VIII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2010.

Hernández, L., Slisko, J. y Benítez, L. (2012). *El desempeño de los estudiantes en un problema cuya solución debería ser un número negativo: la influencia del contexto, del lenguaje y del dato sobrante*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa No. 25, pag. 95-104.

Janvier, C. (1985). *Comparison of models aimed at teaching signed integers, Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics* (pp. 135-140).

Jiménez, S. B. (2001). *Habilidades cognitivas básicas: formación y deterioro*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED.

Kintsch, W. (2002). *On the Notions of Theme and Topic in Psychological Process Models of Text Comprehension*. En M. Louwerse y W. van Peer (Eds.)Thematics: Interdisciplinary Studies.Amsterdam: Benjamins, pp. 157 – 170.

Kintsch, W. (2004). *The Construction-Integration Model of Text Comprehension and its Implications for Instruction. En R. B. Rudell y N. Unrau (eds.) Theoretical Models and Processes of Reading*. Newark: International Reading Association, pp. 1270 – 1328.

Kline Morris.(2009) *"Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades"*, Editorial FCE, 2da Edición Mexicana. Pp. 102-105.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Luth, L. M. (1967). *A model for arithmetic of signed numbers*. The Arithmetic Teacher.

Parodi, G. (2005). *Comprensión de Textos Escritos. Argentina*: Eudeba.

Peaget, J. (1970) *Psicología y Epistemología.* Emece Editores, S.A. Buenos Aires, Argentina Pp. 13-14

Resnick, L. B. (1991). *From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge.* In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), Analyses of arithmetic for mathematics teachers (pp. 373-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schwarz B., Khon A. y Resnick L. (1994) *Positives about negative: A case Study of an Intermediate Model for Signed Numbers.* The Journal of the Learning Sciences, Vol. 3, No 1 Pp. 37-92

Scribner, S., y Cole, M. (1981). *The psychology of literacy*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Sesiano, J. (1985). *The appearance of negative solutions in medieval mathematics .rchives for History of Exact Sciences*, 32(2), 105-150.

Thompson,P . y Dreyfus, T. (1988). *Integers as transformations Journal of Research in Mathematics Education*, 19(2), 115-133.

Van Dijk, T., y Kintsch, W. (1983). *Strategies of Discourse Comprehension*. New York: Academic Press.