# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

COLEGIO DE MATEMÁTICAS

**"Cálculo Estocástico y su Aplicación en la valuación de algunas opciones exóticas"**

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA:

**LILIANA SANTAMARÍA BARRERA**

DIRECTORES DE TESIS:

**DR. FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA**

**DR. EUGENIO BALANZARIO GUTIÉRREZ**

PUEBLA, PUE. AGOSTO DE 2011

# Contenido

## Dedicatoria

Tengo la fortuna de tener una lista grande de personas a las cuales agradecer su ayuda, apoyo y compañía en el transcurso de mi vida y de mi desarrollo académico; tanto así que me resulta complicado redactar de forma breve estas líneas.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres y hermanos que pese a tantos problemas nunca perdieron su fé en mí. A mis profesores que forjaron en mí amor a esta locura racional que el hombre ha creado para responder a múltiples dudas, que sin tener fin, se hacen mas cada vez mas adictivas.

A mis compañeros y amigos, especialmente a los del infinito que me han apoyado y hasta se empeñaron en despertar en mí el gusto por el álgebra (casi lo logran, pero al gusto hay que darle tiempo).

A las *Topologist Wives* y también a sus maridos porque desde nuestra llegada a Morelia han sido una gran familia para nosotros. Gracias Fer y Bety por su confianza y cariño, en verdad han sido invaluables.

Y dejo el apartado mas especial para el motor escencial de este trabajo: Iván, Valeria y Sebastián. Su amor, paciencia y compañía son lo que me hace vivir. Gracias por el tiempo que sin duda alguna debía estar destinado a ustedes y donaron gentilmente para el cumplimiento de mis proyectos. Creanme, es lo que más me ha dolido sacrificar, pero este logro es por y para ustedes.

Dentro de esta lista quiero incluir a todas las demás personas que han ayudado en mi formación, pero por no hacer mas evidente mi falta de memoria, sólo quiero que sepan que les estoy infinitamente agradecida.

# Introducción

Las opciones son una pieza fundamental dentro del desarrollo de los mercados financieros modernos. Es tal su importancia que en paises como Francia o España, su negociación ha sido síntoma de la modernización de sus respectivos mercados financieros.

Retrocediendo en el tiempo, conviene señalar que los fenicios, los griegos y los romanos negociaban clausulas de opción sobre las mercancias que transportaban en sus naves. El primer mercado de opciones con cierto nivel de organización aparece en Holanda en el siglo XVII. En 1668, José Penso de la Vega en su libro *Confusión de confusiones* analizó las operaciones de opción y forward que se realizaban en la Bolsa de Amsterdam sobre las acciones de la Compañía de las Indias Orientales.

A principios del siglo XVIII, en Inglaterra comenzaron a negociarse opciones sobre las acciones de las principales compañías comerciales. El escándalo producido por la fuerte caida de los precios de la South Sea Company en 1720, atribuido en parte a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía, provocó que el mercado de opciones fuese declarado ilegal, prohibición que estuvo vigente hasta el inicio del siglo XX.

Las opciones sobre acciones se negociaban en los mercados americanos desde hace doscientos años. Un ejemplo ilustrativo es uno de los consejos a los clientes de la firma Tumbridge & Company, con sede en el Wall Street en 1875:

*"si usted piensa que las acciones se irán hacia abajo, compre una PUT, si piensa que las acciones subirán, adquiera una CALL."*

En 1952, Harry Markowitz con su tesis doctoral *Portfolio Selection* sentó las bases para la teoría matemática financiera. En ella describe una noción de primas y covarianzas para acciones ordinarias que permitían cuantificar el concepto de "diversificación" en un mercado. Él mostró como calcular estas primas y varianzas para un portafolio dado cuya varianza es minimal entre todos los portafolios con la misma prima.

En 1969, Robert Merton introdujo el Cálculo Estocástico en el estudio de las finanzas. Al mismo tiempo y con la colaboración de Merton, Fisher Black y Myron Scholes descubrieron su celebrada fórmula de valuación de opciones europeas. Este trabajo ganó en 1997 el premio Nóbel en Economía. Ellos encontraron una solución satisfactoria a un importante problema práctico, encontrar el precio justo para opciones del tipo Call Europeo. En el periodo de 1979-1983, Harrison, Kreps y Pliska usaron la teoría general de procesos estocásticos a tiempo continuo, colocando la fórmula de Balck-Scholes sobre bases teóricas sólidas, logrando como resultado encontrar el precio de numerosos "derivados".

El propósito fundamental de esta tesis consta, en primera instancia de entender el trabajo realizado por estos autores para poder obtener así el precio de algunas opciones exóticas, en particular de las opciones barrera del tipo knock-out y de las lookback.

La tesis se encuentra organizada de la siguiente forma; en el primer capítulo se describen los principales elementos de la teoría de procesos estocásticos. En el capítulo 2 se da una descripción del proceso de Wiener, así como algunos resultados importantes del mismo, que fundamentan los capítulos subsecuentes.

En el capítulo 3 se da un bosquejo general del cálculo estocástico, así como la construcción de la integral de Itô, cabe señalar que en esta parte de la tesis se omiten demostraciones, pues solo necesitamos la parte práctica de este tema. Dentro del capítulo 4, se presenta el marco teórico bajo el cuál el modelo de Black-Scholes-Merton se sustenta, utilizando como herramienta principal el teorema de Girsanov así como la idea de portafolios autofinanciables.

Por último, en el capítulo 5 se aplica la teoría desarrollada en el resto de la tesis para encontrar el precio de opciones exóticas del tipo barrera y lookback, así como un apartado para las conclusiones de la tesis.

CAPÍTULO 1

# Conceptos preliminares.

Un *proceso estocástico* es un modelo matemático que nos permite analizar un fenómeno aleatorio a través del tiempo. La aleatoriedad de este proceso es modelada en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, denominado *espacio de probabilidad*, dotado de una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ y donde $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$. Este proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, donde cada función $X_t$ toma valores en un segundo espacio medible, que para los fines de este trabajo será $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$, donde $\mathbb{R}$ es la recta real con la topología euclideana y $\mathcal{S}$ es la $\sigma$-álgebra de Borel, es decir, $\mathcal{S} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ es la mínima $\sigma$-álgebra que contiene a todos los intervalos abiertos. Si fijamos un punto $\omega \in \Omega$, a la función $t \mapsto X_t(\omega)$ para $t \geq 0$, se le denominará la *trayectoria* del proceso $X$ asociado a $\omega$.

Dentro de la teoría de la probabilidad y en particular de los procesos estocásticos, un concepto de gran relevancia es el de *función medible*, puesto que para poder estudiar una variable aleatoria necesitamos conocer su comportamiento con respecto a la medida de probabilidad. Para ello, introducimos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $X$ *una variable aleatoria sobre* $\Omega$. *Decimos que* $X$ *es* $\mathcal{F}$*-medible, si para todo* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *se cumple que* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Una función relevante asociada a una variable aleatoria es aquella que nos proporciona el "promedio" de todos los valores que ésta puede tomar, la cual se define formalmente como sigue:

DEFINICIÓN 1.2. *Sea* $X$ *una v.a. sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Definimos la* esperanza de $X$*, denotada como* $\mathbb{E}(X)$*, como sigue:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

*Diremos que* $X$ *es integrable si* $\mathbb{E}|X| < \infty$*. A esta función también se le denota como*

$$\int X d\mathbb{P}$$

Notemos que cuando la variable $X$ es discreta su esperanza se reduce a una suma sobre todos sus posibles valores; por ejemplo, si $X$ toma valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidades $p(x_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces la esperanza se calcula como $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$. Cuando $X$ es una variable aleatoria real continua, con función de densidad $f(x)$, su esperanza se expresa como $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$. Cabe señalar que la esperanza es un operador lineal, por lo que se cumple que para toda constante $a$ y cualesquiera variables aleatorias $X, Y$

$$\mathbb{E}(aX + Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Continuando nuestro estudio de los procesos estocásticos, podemos ver que al ser éstos una colección de variables aleatorias indexadas en un conjunto (el de los naturales para análisis discreto, o bien, un intervalo, comúnmente $[0, T]$ ó $[0, \infty)$ para análisis continuo), que nos representan la evolución de un fenómeno a través del tiempo, necesitamos conocer de alguna manera la información que nos brinda el pasado y su influencia en el presente. Para ello, definiremos la esperanza condicional de una variable aleatoria con respecto a una $\sigma$-álgebra.

DEFINICIÓN 1.3. *Sea $X$ una v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathcal{G}$ una $\sigma$-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Entonces, la* esperanza condicional *de $X$ dado $\mathcal{G}$ se define como la variable aleatoria $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, tal que*

(1) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *es $\mathcal{G}$-medible;*
(2) *para todo $A \in \mathcal{G}$*

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P} < \infty$$

Algunas propiedades generales de esta variable se presentan a continuación.

TEOREMA 1.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $X, Y$ variables aleatorias integrables sobre él y sean $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ $\sigma$-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$. Entonces, la esperanza condicional tiene las siguientes propiedades:*

(1) $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$, *para toda $a, b \in \mathbb{R}$;*
(2) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$;
(3) $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathcal{G})$, *si $X$ es $\mathcal{G}$-medible;*
(4) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$, *si $X$ es independiente de $\mathcal{G}$;*
(5) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$, *si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$;*
(6) *Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$.*

Demostración. (1) Sea $B \in \mathcal{G}$ dado, entonces

$$\begin{aligned}
\int_B (a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))d\mathbb{P} &= a\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} + b\int_B \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})d\mathbb{P} \\
&= a\int_B X d\mathbb{P} + b\int_B Y d\mathbb{P} \\
&= \int_B (aX + bY)d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

lo cual prueba la primera propiedad.

(2) Por la segunda condición, de la definición 1.3 se cumple que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \int_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X).$$

(3) Primero verificaremos el resultado para $X = \mathbb{I}_A$, (función característica del conjunto $A$), donde $A \in \mathcal{G}$. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{I}_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})d\mathbb{P} &= \int_{A\cap B} \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap B} Y d\mathbb{P} \\
&= \int_B \mathbb{I}_A Y d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

para todo $B \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\mathbb{I}_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A Y|\mathcal{G}).$$

De manera análoga se obtiene el resultado cuando $X$ es una función simple $\mathcal{G}$-medible, es decir

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{I}_{A_j},$$

donde $A_j \in \mathcal{G}$ para $j = 1, 2, \ldots, m$. Finalmente, el resultado en el caso de que $X$ sea no negativa se sigue de aproximar a $X$ por funciones simples $\mathcal{G}$-medibles, llevando esto al caso general en el que a una variable aleatoria cualquiera se le descompone en su parte positiva y su parte negativa a las que se les puede aproximar por funciones simples.

(4) Como $X$ es independiente de $\mathcal{G}$, las variables aleatorias $X$ y $\mathbb{I}_B$ son independientes para todo $B \in \mathcal{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{E}(X) d\mathbb{P} &= \mathbb{E}(X) \int_B d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{I}_B) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{I}_B) \\
&= \int_B X d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

lo cual prueba la propiedad 4.

(5) Por la definición 1.3, tenemos que

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P},$$

para cada $B \in \mathcal{G}$ y

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},$$

para cada $A \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, se sigue que

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{H})d\mathbb{P}$$

para cada $A \in \mathcal{H}$. Aplicando de nueva cuenta la definición 1.3, tenemos que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

(6) Consideremos los conjuntos

$$A_n = \left\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq -\frac{1}{n}\right\} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $A_n \in \mathcal{G}$. Si $X \geq 0$ casi en todas partes, entonces,

$$0 \leq \int_{A_n} X d\mathbb{P} = \int_{A_n} \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} \leq -\frac{1}{n}\mathbb{P}(A_n),$$

lo cual significa que $\mathbb{P}(A_n) = 0$. Puesto que

$$\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

entonces

$$\mathbb{P}\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) < 0\} = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ casi en todas partes.

□

La característica temporal de un proceso estocástico sugiere un flujo de tiempo en el cual, para cada instante $t \geq 0$, podemos hablar acerca del pasado, presente y futuro, y comparar lo que un observador del proceso conoce en el presente con lo que sabía de él en el pasado o lo que sabrá en el futuro. Para esto, equipamos a nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de una *filtración*, que consiste de una sucesión no-decreciente $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ de $\sigma$-álgebras de $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, para $0 \leq s < t < \infty$.

Diremos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ es un *espacio de probabilidad filtrado* cuando estemos considerando un espacio de probabilidad dotado de una filtración.

Dado un proceso estocástico $(X_t)$, la elección más pequeña que podemos hacer de una filtración es la generada por el proceso mismo, es decir

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t),$$

y es tal que $(X_s)$ es $\mathcal{F}_s^X$-medible para cada $s \in [0, t]$. Para cada $A \in \mathcal{F}_t^X$ es posible decidir al tiempo $t$, si el evento $A$ ha ocurrido o no.

La introducción de una filtración sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ abre la posibildad de analizar conceptos útiles e importantes como el que se presenta a continuación.

DEFINICIÓN 1.5. *El proceso estocástico $X$ es* adaptado *a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, si para cada $t \geq 0$, $X_t$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible.*

A partir de este momento, todos los procesos que analizaremos en el presente trabajo cumplirán con esta propiedad.

Dos tipos de procesos de gran relevancia son los que a continuación se definen.

Definición 1.6. *Un proceso estocástico* $X_t$ *es de* Markov*, si para cada* $0 \leq s \leq t$ *y* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, se cumple que*

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s).$$

Esta igualdad establece que el estado del proceso para instantes futuros $t > s$ es independiente del pasado, (tiempos antes de $s$), dado el estado del proceso en el presente (en el intante $s \geq 0$). Esta propiedad se encuentra presente en fenómenos cuya evolución queda perfectamente determinada una vez que se establece la ley de movimiento y un estado inicial del sistema, no influyendo lo sucedido antes del estado inicial. Por tal motivo, un proceso de Markov determina una función de probabilidad de transición de un estado a otro dada por,

$$p(s, x, t, A) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s = x),$$

donde $0 \leq s \leq t,\ x \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Esta función de cuatro variables proporciona la probabilidad de que el proceso se encuentre en $A$ al tiempo $t$ dado que se encontró en el estado $x$ en un instante anterior $s$.

El otro tipo de procesos a los que haremos referencia son aquellos que poseen la propiedad de ser *Martingala*, concepto introducido por Paul Pierre Lévy y desarrollado en gran parte por Joseph Leo Doob, al pretender demostrar la existencia de juegos infalibles.

Definición 1.7. *Una sucesión* $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *de variables aleatorias es llamada* Martingala *con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ *si:*

(1) $\xi_n$ *es integrable, para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(2) $\xi_n$ *es* $\mathcal{F}_n$*-medible, para cada* $n \in \mathbb{N}$

(3) $\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \xi_n$ *c.s., para cada* $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 1.8. *Caminata Aleatoria Simétrica. Para hacer la construcción de este proceso consideremos el experimento que consiste en lanzar una moneda, donde la probabilidad de que el resultado sea águila* $(A)$ *o sol* $(S)$ *es igual a* $1/2$ *en cada caso. Denotemos la sucesión de posibles resultados como* $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$. *En otras palabras,* $\omega$ *es una sucesión infinita de lanzamientos donde* $\omega_n$ *es el n-ésimo resultado. Sean*

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_j = S, \\ -1 & \text{si } \omega_j = A, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

*considerando* $M_0 = 0$ *por simplicidad. Entonces el proceso* $M_k$ *es una caminata aleatoria simétrica. En cada lanzamiento, el proceso sube o baja una unidad con la misma probabilidad. En la figura (1) se ejemplifica una caminata aleatoria en 5 pasos.*

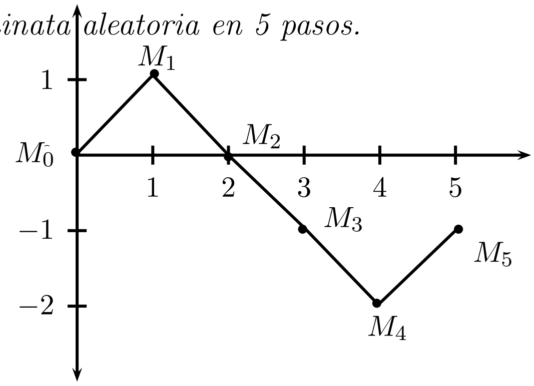



FIGURA 1. Caminata aleatoria

Una característica importante que tiene el proceso $(M_n)$ del ejemplo anterior es la de ser una martingala. Para verificar esto, elegimos enteros no negativos $k < l$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_l|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[(M_l - M_k) + M_k|\mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k|\mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[M_k|\mathcal{F}_k], \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k|\mathcal{F}_k] + M_k, \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k] + M_k = M_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $M_l$ es una martingala.

En general, si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d., entonces la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama *caminata aleatoria*, donde

$$M_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

Se puede probar que si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ define una caminata aleatoria unidimensional y sin pérdida de generalidad, $X_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, entonces $\{S_n - n\mathbb{E}X_1\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala. Incluso, si además $X_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ y $\mathbb{E}X_1 = 0$, entonces $\{M_n^2 - nVarX_1\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala.

## 1. Tiempos de paro

La definición de *martingala* se puede generalizar para procesos continuos de forma natural. Diremos que un proceso $(X_t)$ posee esta característica si es adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t$ e integrable para cada $t \geq 0$ y además para cada $0 \leq s \leq t$, se cumple que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$, casi en todas partes.

Una de las herramientas más importante que se deriva de esta definición es el teorema de paro óptimo, el cual establece que dado un fenómeno particular, es necesario poner especial atención en un instante $\tau(\omega)$ en el cuál este fenómeno se manifiesta por primera vez. Entonces, de manera intuitiva, podemos fijarnos en el evento $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$ que nos dice si el fenómeno ocurre antes o en el instante $t$. Esta idea la podemos formular en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ *un espacio de probabilidad filtrado. La variable aleatoria* $\tau$ *es un* tiempo de paro *con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}$*, si el evento* $\{\tau \leq t\}$ *pertenece a la* $\sigma$*-álgebra* $\mathcal{F}_t$*, para cada* $t \geq 0$.

Lo anterior significa que podemos decidir si $\tau(\omega)$ ocurrió o no, sobre la base de información disponible hasta el instante $t$, evitando así tener que ver hacia el futuro. Por ejemplo, consideremos la caminata aleatoria simétrica del ejemplo (1.8). Definimos $\tau$ como el primer instante en que $M_t = 1$, esto es

$$\tau = \inf\{i \geq 0 : M_i = 1\};$$

entonces $\tau$ es un tiempo de paro. Por otro lado, si definimos la variable

$$\rho = \sup\{i \geq 0 : M_i = 1\}$$

vemos que ésta no es un tiempo de paro. Ahora bien, si consideramos un tiempo de paro $\tau$ y una martingala $X_n$ entonces la variable $X_{\tau \wedge n}$ es también un tiempo de paro y una martingala véase [**2**], donde $\tau \wedge n$ es el mínimo de $\tau$ y $n$.

Notemos que cuando un proceso $X_t$ es una martingala, se cumple que $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, para cada $t \in [0, \infty)$; sin embargo, la igualdad $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ no necesariamente ocurre cuando $\tau$ es un tiempo de paro. El teorema de paro óptimo permite superar este inconveniente.

TEOREMA 1.10. *(Teorema de paro óptimo). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado. Supongamos que el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}\{\tau < k\} = 1$. Entonces,*

$$\mathbb{E}[X_\tau] = X_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$X_\tau = X_{\tau\wedge n} + (X_\tau - X_n)\mathbb{I}_{\tau>n},$$

lo cual implica que

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) + \mathbb{E}(X_\tau \mathbb{I}_{\tau>n}) - \mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_{\tau>n}).$$

Por hipótesis, el último término tiende a 0 cuando $n$ tiende a $\infty$. Ahora, como $X_\tau$ integrable, la serie

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k \mathbb{I}_{\tau=k})$$

es convergente; por lo tanto, el término medio

$$\mathbb{E}(X_\tau \mathbb{I}_{\tau>n}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k \mathbb{I}_{\tau=k})$$

tiende a 0 cuando $n$ tiende a $\infty$. Por último, como $X_{\tau\wedge n}$ es una martingala, se cumple que

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0).$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

$\square$

CAPÍTULO 2

# Procesos de Wiener

A principios del siglo XX, Albert Einstein propuso un modelo físico para el movimiento de las partículas de polen suspendidas en el agua, movimiento que fué descubierto y descrito por el botánico Robert Brown en 1827. Einstein propuso la función de transición para el movimiento browniano, (como se le denominó en honor a Brown), en su teoría cinético-molecular del calor. Sin embargo, el tratamiento riguroso de este modelo fue desarrollado por Norbert Wiener. Por esta razón, al movimiento browniano también se le denomina Proceso de Wiener. Este tratamiento ha resultado ser un modelo extremadamente útil para el desarrollo de la probabilidad y del análisis matemático en general. El objetivo principal de este capítulo es el de analizar las propiedades principales de este proceso.

Definición 2.1. *El proceso de Wiener (o movimiento browniano) es un proceso estocástico* $W = \{W_t : 0 \leq t < \infty\}$*, tal que:*

1) $W_0 = 0$ *c.s.;*
2) *Las trayectorias* $t \mapsto W_t$ *son continuas c.s.;*
3) *Para cada sucesión finita de tiempos* $0 < t_1 < \cdots < t_n$ *y cualesquiera conjuntos Borel* $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$*, la probabilidad*

$$\mathbb{P}\{W_{t_1} \in A_1, \ldots, W_{t_n \in A_n}\}$$

*tiene densidad conjunta*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} p(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j),$$

*donde* $x_0 = 0,\ t_0 = 0,\ p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ *para cada* $x, y \in \mathbb{R}$, *y* $t > 0$.

A la función $f(x_1,\ldots,x_n)$ de la definición anterior se le denomina *densidad de transición.*

TEOREMA 2.2. *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ *espacio de probabilidad filtrado y* $W_t$ *un proceso de Wiener adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_t$. *Entonces* $W_t$ *cumple las siguientes propiedades:*

(1) $\mathbb{E}(W_s W_t) = \min\{t, s\}$.
(2) $\mathbb{E}(|W_t - W_s|^2) = |t - s|$.
(3) $(W_t - W_s) \sim \eta(0, t-s)$, *para* $0 \leq s \leq t$[1].

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $s, t \in \mathbb{R}$, tales que $0 \leq s \leq t$. La condición 3) de la definición (2.1) implica que,

$$f(x,y) = p(s,0,x)p(t-s,x,y), \text{ para } x, y \in \mathbb{R},$$

por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(s,0,x)(\int_{-\infty}^{\infty} yp(t-s,x,y)dy)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(s,0,x)dx = s.\end{aligned}$$

[1] $\eta(\mu,\sigma)$ representa a la distribución normal con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma$

(2) Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $0 \leq s \leq t$. Entonces, por el inciso 1) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|W_t - W_s|^2\right) &= \mathbb{E}\left({W_t}^2\right) - 2\mathbb{E}\left(W_s W_t\right) + \mathbb{E}\left({W_s}^2\right) \\ &= t - 2s + s = t - s.\end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para toda $s, t \geq 0$, podemos concluir que

$$\mathbb{E}\left(|W_t - W_s|^2\right) = |t - s|.$$

(3) Sean $s, t \in \mathbb{R}$, tales que $0 \leq s \leq t$ y $A \subset \mathbb{R}$ Borel. La condición 3) de la definición (2.1) implica que

$$f(x, y) = p(s, 0, x)p(t - s, x, y) \qquad \text{para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_t - W_s \in A\} &= \int\int_{\{(x,y):y-x\in A\}} p(s, 0, x)p(t - s, x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, 0, x)(\int_{\{y:y-x\in A\}} p(t - s, x, y)dy)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, 0, x)(\int_A p(t - s, x, x + u)du)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, 0, x)(\int_A p(t - s, 0, u)du)dx \\ &= \int_A p(t - s, 0, u)du \int_{-\infty}^{\infty} p(s, 0, x)dx \\ &= \int_A p(t - s, 0, u)du.\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que $W_t - W_s \sim \eta(0, t - s)$.

$\square$

La siguiente definición nos ayudará a entender el comportamiento de las trayectorias que sigue el proceso de Wiener.

Definición 2.3. *La* variación *de una función* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *se define como:*

$$[f,f](T) = \limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

*donde* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ *es una partición de* $[0,T]$ *y*

$$\Delta t = \max_{0 \le i < n} |t_{i+1} - t_i|.$$

Veamos que, aunque el proceso de Wiener no es diferenciable en todo punto, su variación cuadrática si es finita; característica que usó Itô al definir su integral.

Teorema 2.4. *Sea* $W_t$ *el proceso de Wiener y sea* $n \in \mathbb{N}$ *fijo. Sea* $t_i^n = \frac{i}{n}T$*, con* $i = 0, 1, \ldots, n$*, una partición homogénea de* $[0,T]$*. Denotemos con*

$$\Delta_i^n W = W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}.$$

*Entonces,*

$$[W,W](T) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n W)^2 = T \text{ en } L^2.$$

Demostración. Por lo discutido en el inciso 3) del teorema (2.2) tenemos que $\Delta_i^n W \sim \eta(0, \frac{T}{n})$, lo cual nos dice que $\mathbb{E}(\Delta_i^n W) = 0$ y que

$$\mathbb{E}\left((\Delta_i^n W)^2\right) = \mathrm{Var}(\Delta_i^n W) - (\mathbb{E}(\Delta_i^n W))^2 = \frac{T}{n}.$$

Por otra parte, para calcular $\mathbb{E}\left[(\Delta_i^n W)^4\right]$ usamos la función característica de $\Delta_i^n W$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((\Delta_i^n W)^4\right) &= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \mathbb{E}(\exp{(i\lambda \Delta_i^n W)}) \\
&= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} p\left(\frac{T}{n}, 0, x\right) dx\right] \\
&= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{T}{n})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2\frac{T}{n}}} dx\right] \\
&= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{T}{n})}} e^{-\frac{\lambda^2 \frac{T}{n}}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-i\lambda\frac{T}{n})^2}{2\frac{T}{n}}} dx\right].
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x-i\lambda t}{\sqrt{2\frac{T}{n}}}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((\Delta_i^n W)^4) &= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \left[\frac{e^{-\frac{\lambda^2 \frac{T}{n}}{2}}}{\sqrt{2\pi(\frac{T}{n})}} \sqrt{2\frac{T}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du\right] \\
&= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} \left[\frac{e^{-\frac{\lambda^2 \frac{T}{n}}{2}}}{\sqrt{2\pi(\frac{T}{n})}} \sqrt{2\frac{T}{n}} \sqrt{\pi}\right] \\
&= \frac{d^4}{d\lambda^4}\bigg|_{\lambda=0} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \frac{T}{n}} \\
&= \left[3\frac{T^2}{n^2} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{T}{n}} - 6\lambda^2 \frac{T^3}{n^3} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{T}{n}} + \lambda^4 \frac{T^4}{n^4} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{T}{n}}\right]\bigg|_{\lambda=0} \\
&= 3\frac{T^2}{n^2}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n W)^2 - T\right]^2\right) &= E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left((\Delta_i^n W)^2 - \frac{T}{n}\right)\right]^2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left((\Delta_i^n W)^2 - \frac{T}{n}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[E\left((\Delta_i^n W)^4\right) - 2\frac{T}{n}E\left((\Delta_i^n W)^2\right) + \frac{T^2}{n^2}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{3T^2}{n^2} - \frac{2T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2}\right] = \frac{2T^2}{n} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. □

Del teorema anterior, se puede deducir que, abusando un poco de la notación $(dW_t)^2 = dt$.

Como se mencionó anteriormente, una propiedad relevante para obtener información de los procesos estocásticos es la de *Markov*, es decir, dados $0 < s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\{W_u\}_{0 \leq u \leq s}$, a lo que también se le conoce como *pérdida de memoria*. Además, se pueden caracterizar los procesos de Wiener a partir del concepto de martingala, lo que se establece en el teorema de Lévy cuyo enunciado y demostración se verá en el siguiente capítulo. El siguiente resultado es de nuestro interés dado su uso en el cálculo del valor de una opción en el capítulo 5.

TEOREMA 2.5. *La función $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ es una martingala.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}_t$ la filtración asociada a $W_t$, para cada $t \geq 0$. Como $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ es una composición de funciones continuas y $W_t$ es adaptada a $\mathcal{F}_t$, entonces $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ es adaptada a $\mathcal{F}_t$.

Ahora bien, sea $0 \leq s < t$, como $W_s$ es $\mathcal{F}_s - medible$ y $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{W_t}|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(e^{W_t - W_s}e^{W_s}|\mathcal{F}_s\right) \\
&= e^{W_s}\mathbb{E}\left(e^{W_t - W_s}|\mathcal{F}_s\right) \\
&= e^{W_s}\mathbb{E}\left(e^{W_t - W_s}\right).
\end{aligned}$$

Por el inciso 3 del teorema (2.2), $W_t - W_s \sim \eta(0, t-s)$, por lo que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{W_t - W_s}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x p(t-s, 0, x)dx \\
&= e^{\frac{t-s}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t-s, 0, x-t)dx \\
&= e^{\frac{t-s}{2}}.
\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\mathbb{E}\left(e^{W_t - \frac{t}{2}}|\mathcal{F}_s\right) = e^{W_s - \frac{s}{2}},$$

por lo que también es integrable. Por lo tanto, $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ es martingala. $\square$

A la función del teorema anterior se le denomina *martingala exponencial.*

## 1. Principio de Reflexión

La propiedad de Markov en el proceso de Wiener se puede definir de forma equivalente utilizando la variable auxiliar $\rho$ que sea un tiempo de paro para $W = \{W_t : 0 \leq t < \infty\}$, tal que para cada $t \geq 0$ el evento $\{\rho \leq t\}$ dependa únicamente de la historia del proceso hasta el instante $t$.

Ahora bien, al fijar un nivel $a$, nos gustaría saber en qué momento el proceso pasa por este nivel, en particular el primer instante en que $W_t = a$, que definimos como

$$\rho_a = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : W_t = a\} & \text{si } \rho_a < \infty \\ \infty & \text{d.o.f.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Se puede ver que $\rho_a$ es también un tiempo de paro, ya que por la continuidad de las trayectorias de $W_t$, se cumple

$$\{\rho_a \leq t\} = \{W_s = a\}, \qquad \text{para alguna } 0 \leq s \leq t.$$

Tenemos grandes ventajas al usar el proceso de Wiener como base en un modelo, pues recordemos que las trayectorias de éste, vistas como límite de caminatas aleatorias, tienen cierta simetría. Esta característica nos ayudará para calcular la distribución de $\rho_a$.

LEMA 2.6. *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ el proceso de Wiener y sea $a > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}[\rho_a < t] = 2\mathbb{P}[W_t > a]$$

DEMOSTRACIÓN. Si $W_t > a$, por la continuidad de las trayectoria del proceso de Wiener, $\rho_a < t$. Además, como $\rho_a$ es un tiempo de paro, entonces por la propiedad fuerte de Markov, $\{W_{t+\rho_a} - W_{\rho_a}\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener, así que usando la simetría de este proceso tenemos que $\mathbb{P}[W_t - W_{\rho_a} > 0 | \rho_a < t] = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[W_t > a] &= \mathbb{P}[\rho_a < t, W_t - W_{\rho_a} > 0] \\
&= \mathbb{P}[\rho_a < t]\mathbb{P}[W_t - W_{\rho_a} > 0 | \rho_a < t] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}[\rho_a < t].
\end{aligned}$$

$\square$

Una versión más refinada del teorema anterior es la siguiente.

Teorema 2.7. *Principio de reflexión. Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Wiener y sea $\rho$ un tiempo de paro. Definimos*

$$\widetilde{W_t} = \begin{cases} W_t, & t \leq \rho \\ 2W_\rho - W_t, & t > \rho; \end{cases} \tag{2.2}$$

*entonces $\{\widetilde{W_t}\}_{t\geq 0}$ es también un proceso de Wiener estándar.*

Para ver la utilidad del teorema anterior, consideremos el instante $\rho = \rho_a$ y en la función $W_t \mapsto \widetilde{W_t}$ que refleja la porción de la trayectoria después de $\rho_a$ a través del nivel $a$, como se muestra en la figura 1.

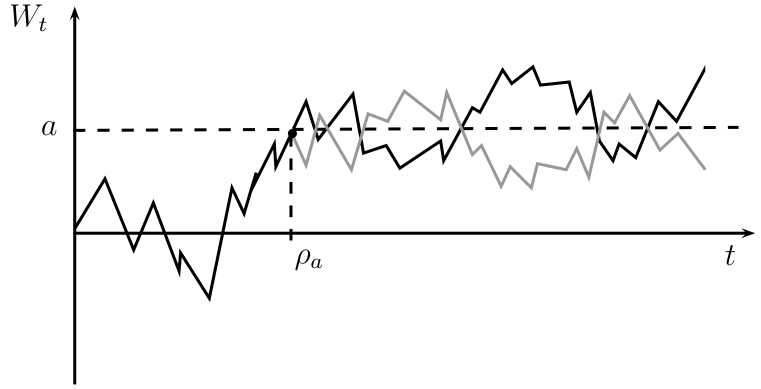



FIGURA 1. Trayectoria del proceso de Wiener y su reflejo

La demostración del teorema 2.7 hace uso de la *propiedad fuerte de Markov*, por lo que unicamente haremos uso de él, si se desea analizar a detalle se puede consultar en [**4**].

LEMA 2.8. *(Distribución conjunta del Proceso de Wiener y su máximo). Sea* $M_t = \max_{\{0\leq s\leq t\}}\{W_s\}$*, el nivel máximo que alcanza el proceso de Wiener en el intervalo* $[0,t]$*. Entonces, para* $a \geq x > 0$ *y toda* $t \geq 0$*,*

$$\mathbb{P}[M_t \geq a, W_t \leq x] = 1 - \Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right),$$

*donde*

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

*es la función de distribución normal estándar.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a > 0$ y sea $\rho_a$ definida como en 2.1. Notemos que $M_t \geq 0$ y es no decreciente. Entonces $\{M_t \geq a\} = \{\rho_a \leq t\}$. Tomando $\rho = \rho_a$ y usando el principio de reflexión para $a \geq x \geq 0$ y

$t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_t \geq a, W_t \leq x] &= \mathbb{P}[\rho_a \leq t, W_t \leq x] \\
&= \mathbb{P}[\rho_a \leq t, 2a - x \geq \widetilde{W}_t] \\
&= \mathbb{P}[2a - x \leq \widetilde{W}_t].
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se obtiene dado que, cuando $\widetilde{W}_t \geq 2a - x$ ocurre, es porque el proceso $\{\widetilde{W}_s\}_{s \geq 0}$ necesariamente ha pegado en el nivel $a$ antes de $t$. Por lo que podemos concluir que

$$\mathbb{P}[M_t \geq a, W_t \leq x] = 1 - \Phi\left(\frac{2a - x}{\sqrt{t}}\right).$$

$\square$

CAPÍTULO 3

# Cálculo Estocástico

Alrededor del año 1900, Bachelier propuso un modelo matemático para el precio de bienes del *Paris Stock Exchange*. Asumió que los incrementos infinitesimales $dX_t$ del precio son proporcionales al incremento $dW_t$ del proceso de Wiener:

$$dX_t = \sigma dW_t,$$

donde $\sigma$ es una constante positiva. Como resultado de ésto, tenemos que si el precio inicial es $X_0 = x$, entonces para $t > 0$

$$X_t = x + \sigma W_t.$$

Esta aproximación de Bachelier tiene un defecto; que el precio del bien puede tomar valores negativos. Para corregir esta falla, Paul Samuelson observó que los inversionistas trabajan en términos de sus pérdidas o ganancias $dX_t$ y en proporción al capital invertido $X_t$. Además, los precios relativos $\frac{dX_t}{X_t}$ de un bien fluctúan demasiado; es decir, pueden ser proporcionales a $dW_t$,

$$dX(t) = \sigma X_t dW_t. \tag{3.1}$$

Esta igualdad es una ecuación diferencial, con la dificultad de que $W_t$ es no diferenciable. Una manera de solucionar este problema fue desarrollada por K. Itô en la década de los 40's, quien da un significado riguroso de (3.1) en el desarrollo de su *teoría de integración estocástica y ecuaciones diferenciales estocásticas*, escribiéndola como una ecuación integral que involucra una nueva clase de integrales. De esta forma, la igualdad (3.1) se podrá escribir como:

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_t dW_t,$$

donde la integral del lado derecho es denominada *Integral de Itô.*

## 1. Construcción de la integral de Itô.

Con la intención de dar sentido a la integral de Itô para un proceso estocástico $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ respecto al proceso de Wiener, es decir, la integral de la forma

$$\int_0^T X_t dW_t, \tag{3.2}$$

desarrollaremos su construcción, primero para *procesos simples* y después se extenderá a una clase más grande de procesos por aproximación. Esta construcción nos conducirá a enunciar sin demostración algunos resultados técnicos.

Consideremos entonces como elementos iniciales un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ y un proceso de Wiener estándar unidimensional $\{W_t\}_{t\geq 0}$. Pediremos que tanto el proceso $\{X_t\}$ como $\{W_t\}$ sean adaptados a la filtración.

Denotaremos por $L^2(\mathbb{P})$ al espacio vectorial de variables aleatorias $X$ que son cuadrado integrables, es decir, que cumplen la condición

$$||X||_{L^2(\mathbb{P})} = (\mathbb{E}|X|^2)^{1/2} < \infty.$$

La función $X \to ||X||_{L^2(\mathbb{P})}$ define una norma en $L^2(\mathbb{P})$ y este espacio es completo respecto de esta norma, es decir, es un espacio de Hilbert. Esto quiere decir que toda sucesión de Cauchy dentro de este espacio es convergente.

*Paso 1: Integral para procesos simples.* Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ una partición del intervalo $[0, T]$. Un proceso estocástico *simple* es un proceso de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1})},$$

en donde $X^k$ es una variable $\mathcal{F}_{t_k}$-medible y cuadrado integrable. Un proceso simple es entonces un proceso "constante" por pedazos y con trayectorias continuas por la derecha y con límite por la izquierda. Denotaremos por $\mathcal{H}_0^2$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos simples. La integral estocástica de Itô de un proceso simple $X$ respecto del proceso de Wiener, denotada por $I(X)$, se define entonces de forma natural como la variable aleatoria

$$I(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \int_0^T X_s dW_s.$$

Notemos que esta variable aleatoria es integrable, además es cuadrado integrable y cumple la siguiente igualdad fundamental llamada *isometría* *de Itô*,

$$(3.3) \qquad ||I(X)||_{L^2(\mathbb{P})} = ||X||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)},$$

donde

$$||X||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)} = \left(\mathbb{E}\int_0^T |X_t|^2 dt\right)^{1/2}.$$

En efecto, si $\Delta W_k$ denota la diferencia $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ y $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ entonces,

$$\begin{aligned}
||I(X)||^2_{L^2(\mathbb{P})} &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n-1} X^k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\right|^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j,k=0}^{n-1} X^j X^k \Delta W_j \Delta W_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (X^k)^2 (\Delta W_k)^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X^k)^2 \Delta t_k \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) \\
&= ||X||^2_{L^2(\mathbb{P}\times dt)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral estocástica asigna entonces a cada elemento del espacio $\mathcal{H}_0^2$ una variable aleatoria dentro del espacio $L^2(\mathbb{P})$. De esta forma se tiene el mapeo lineal $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(\mathbb{P})$, que resulta ser continuo por la isometría de Itô. *Paso 2: Extensión por aproximación.* Ahora extendemos la integral estocástica a procesos más generales. Sea $\mathcal{H}^2$ el espacio de todos los procesos $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ medibles y adaptados

tales que
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty.$$
El espacio $\mathcal{H}^2$ resulta ser un subespacio lineal cerrado de $L^2(\mathbb{P} \times dt)$. Notemos que la única diferencia que existe entre estos dos espacios es que a los elementos de $\mathcal{H}^2$ se les pide que sean medibles y adaptados. Podemos decir que todo proceso simple es un elemento de $\mathcal{H}^2$, por lo que tenemos la siguiente contención de espacios $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(\mathbb{P}\times dt)$, donde puede probarse que $\mathcal{H}_0^2$ es denso en $\mathcal{H}^2$ respecto de la norma $L^2(\mathbb{P} \times dt)$. Por tal motivo, para cualquier proceso $X \in \mathcal{H}^2$ existe una sucesión de procesos $X^k \in \mathcal{H}_0^2$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} ||X - X^k||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)} = 0. \tag{3.4}$$

Esta aproximación se puede llevar a cabo por truncación, así todo proceso en $\mathcal{H}^2$ puede ser aproximado por un proceso acotado. A su vez, todo proceso en $\mathcal{H}^2$ acotado puede ser aproximado por procesos acotados continuos, los que a su vez se pueden aproximar por procesos simples, que son de la siguiente forma
$$\sum_{j=0}^{n} X_{t_j} \cdot \mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$
donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ es una partición homogénea de $[0, T]$. Por la isometría de Itô, la sucesión $\{I(X^k)\}$ es una sucesión de

Cauchy en el espacio $L^2(\mathbb{P})$, puesto que para $k, l \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\begin{aligned} ||I(X^k) - I(X^l)||_{L^2(\mathbb{P})} &= ||I(X^k - X^l)||_{L^2(\mathbb{P})} \\ &= ||X^k - X^l||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)} \\ &\leq ||X - X^k||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)} + ||X - X^l||_{L^2(\mathbb{P}\times dt)}. \end{aligned}$$

Finalmente, por la propiedad 3.4, la última expresión se puede hacer tan pequeña como se desee tomando $k$ y $l$ lo suficientemente grandes. Entonces de manera natural, se puede definir, para cada $X \in \mathcal{H}^2$,

$$I(X) = \lim_{k\to\infty} I(X^k),$$

donde este límite debe entenderse dentro del espacio $L^2(\mathbb{P})$. Esto significa que la variable aleatoria $I(X)$ es un elemento de $L^2(\mathbb{P})$ y es tal que

$$\lim_{k\to\infty} ||X - X^k||_{L^2(\mathbb{P})} = 0.$$

Para analizar lo anterior con mayor detalle ver [**5**].

La isometría de Itô y la propiedad de esperanza nula se cumplen también para procesos en $\mathcal{H}^2$. De esta forma tenemos un mapeo lineal y continuo de la siguiente manera, $I : \mathcal{H}^2 \to L^2(\mathbb{P})$.

*Paso 3: La integral como un proceso.* Ahora sólo resta hacer una pequeña extensión de forma continua. Para cada $t \in [0, T]$ y $X \in \mathcal{H}^2$ se define

$$I_t(X) = \int_0^T X_s \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}(s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s.$$

Esto permite ver a la integral estocástica no como una variable aleatoria sino como un proceso. Este proceso no tiene que ser continuo, sin embargo existe una versión continua de él con la propiedad de ser martingala con respecto a la filtración natural del proceso de Wiener. Denotaremos por el mismo símbolo a tal martingala.

*Paso 4: Extensión por localización.* Mediante un procedimiento llamado de localización es posible extender la definición de integral de Itô a procesos medibles y adaptados que cumplen la condición más relajada

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^2_{loc}$ el espacio de los procesos que cumplen esta condición. El proceso de localización hace uso de *tiempos de paro*. El nuevo espacio $\mathcal{L}^2_{loc}$ contiene a $\mathcal{H}^2$ y es de tal forma que, para cada proceso $X \in \mathcal{L}^2_{loc}$, existe una sucesión creciente de tiempos de paro $\{\tau_n : n \geq 1\}$ tal que $X_t \cdot \mathbb{I}_{(\tau_n \geq t)} \in \mathcal{H}^2$, en donde $\tau_n \to T$ cuando $n \to \infty$. Se define entonces la integral estocástica

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_s \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}(s) \cdot \mathbb{I}_{(\tau \geq t)}(w) dW_s.$$

De nuevo, es posible demostrar la existencia de este límite y su independencia de la sucesión de tiempos de paro con la que localizamos. En este caso ya no es posible garantizar que la integral sea una martingala, pero sí una martingala local, es decir, el proceso $I_{t\wedge\tau_n}(X)$ es una martingala para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, para cualquier función continua $f$, el proceso $\{f(W_t) : 0 \leq t \leq T\}$ tiene trayectorias continuas y acotadas, por lo tanto, es un elemento de $\mathcal{L}^2_{loc}$ y tiene sentido la expresión

$$\int_0^t f(W_s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Con esto se concluye la parte de ideas generales bajo las cuales puede construirse la integral de Itô. Para mayor detalles ver [**7**].

## 2. Propiedades de la integral.

La integral estocástica de Itô cumple varias propiedades aunque solo mencionaremos algunas de ellas a manera de resumen. Iniciaremos mencionando que la integral $I_t : \mathcal{L}^2_{loc} \to L^2(P)$ es lineal, su esperanza es cero y se cumple la isometría de Itô

$$\mathbb{E}\left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 = \mathbb{E} \int_0^t |X_s|^2 ds.$$

En particular, para $X \in \mathcal{H}^2$ la integral $I_t(X)$, vista como un proceso, es una martingala, es decir, es integrable, adaptado y para $0 \leq s \leq t$ se cumple $\mathbb{E}(I_t(X)|\mathcal{F}_s) = I_s(X)$. Además, existe una versión continua de tal proceso. En general para $X \in \mathcal{L}^2_{loc}$, la integral $I_t(X)$ ya no es una martingala sino una martingala local, véase [**4**].

## 3. Ecuaciones diferenciales estocásticas.

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad \text{donde } t \in [0, T], \tag{3.5}$$

con condición inicial $X_0$ que se asume $\mathcal{F}_0$-medible y $X_t$ independiente de $W_t$ para cada $t \in [0, T]$. La incógnita en esta ecuación es el proceso $X_t$ y los coeficientes $b(t, X)$ y $\sigma(t, X)$ son funciones de $[0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conocidos usualmente como coeficientes de *tendencia* y *difusión* respectivamente. Recordemos que en sentido estricto $dW_t$ no está bien definido, sin embargo la ecuación (3.5) se puede interpretar como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{3.6}$$

donde la primera es una integral de Riemann mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Este proceso puede interpretarse como un sistema determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica. A un proceso de la forma (3.6) se le llama *proceso de Itô*. Para que esta ecuación tenga alguna solución se le deben imponer condiciones a los coeficientes. De manera análoga al caso determinista, los teoremas básicos de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas establecen que bajo ciertas condiciones de regularidad los coeficientes $b$ y $\sigma$ satisfacen la condición de Lipschitz en la variable $x$,

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2,$$

y la condición de crecimiento en $x$,

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

para alguna constante $K > 0$. En este caso, existe un proceso estocástico $X_t$ solución de (3.5) que es adaptado, continuo y uniformemente acotado en $L^2(\mathbb{P})$, es decir, $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ y es además único en el sentido de *indistinguibilidad*, es decir, si $X_t$ y $Y_t$ son solución, entonces $\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ para } 0 \leq t \leq T) = 1$. En este caso a tal solución se le llama *solución fuerte* de la ecuación. Lo anterior permite identificar y plantear una forma de resolver el problema que, por la complejidad de sus cálculos, no es una técnica muy aplicable. Sin embargo, la famosa *fórmula de Itô* es el resultado clave para realizar algunos de estos cálculos. Este importante resultado establece que si $X_t$ es un proceso de Itô dado por la ecuación (3.5) y $f(t,x)$ es una función de clase $C^1$ en $t$ y de clase $C^2$ en $x$, entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{3.7}$$

donde los subíndices indican derivada parcial y (3.5) se sustituye en (3.7) usando la siguiente *tabla de multiplicación de McKean.*

| $\times$ | $dt$ | $dW_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dW_t$ | 0 | $dt$ |

Notemos que como las derivadas involucradas son funciones continuas, las integrales estocásticas están bien definidas. Un resultado inmediato de esta fórmula es la llamada *regla del producto de Itô* que nos dice que, dados dos procesos de Itô $X_t$ y $Y_t$, se cumple que

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t. \tag{3.8}$$

En efecto, si tomamos $f(t,x,y) = xy$, entonces $f_t = 0$, $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 1$ y $f_{yy} = 0$, entonces sustituyendo en la ecuación

(3.8) obtenemos lo deseado. Una aplicación importante de la regla del producto se da en el siguiente teorema, donde únicamente daremos una idea general de la demostración.

Teorema 3.1 (Teorema de caracterización de Lévy). *Sean* $W = \{W_t : 0 \leq t < \infty\}$ *un proceso estocástico y* $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t) : 0 \leq t < \infty\}$ *la filtración generada por este proceso. Entonces* $W_t$ *es un proceso de Wiener si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) $W_0 = 0$ *c.s;*

(2) *Las trayectorias* $t \mapsto W_t$ *son continuas c.s;*

(3) $W_t$ *es una martingala con respecto a la filtración* $\mathcal{F}_t$*;*

(4) $[W, W](t) = t$ *para toda* $t \geq 0$.

Demostración. Dentro de las condiciones del teorema de Lévy, resalta que no pide normalidad al proceso. Sin embargo, dentro de la definición del proceso de Wiener se pide que sus incrementos sean normales, por lo que el método para establecer esta condición será comprobar en la fórmula de Itô-Doeblin, las únicas propiedades del proceso de Wiener que se utilizaron; un proceso continuo con variación cuadrática $[W, W](t) = t$. Por lo tanto, la fórmula de Ito-Doeblin garantiza que para cada función $f(t, x)$ cuyas derivadas parciales existan y sean continuas,

$$df(t, W_t) = f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt. \tag{3.9}$$

Como $dW_t dW_t = dt$, integrando la ecuación anterior tenemos que

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t [f_t(s, W_s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, W_s)]ds + \int_0^t f_x(s, W_s)dW_s. \tag{3.10}$$

Ahora, por hipótesis, $W_t$ es una martingala, así que la integral

$$\int_0^t f_x(s, W_s) dW_s$$

también lo es. Así en $t = 0$, esta integral toma el valor cero, por lo que la su esperanza siempre es cero. Aplicado la esperanza en (3.10), se obtiene

(3.11)

$\mathbb{E}f(t, w_t) =$

$$f(0, W_0) + \mathbb{E}\int_0^t [f_t(s, W_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s)] ds + \int_0^t f_x(s, W_s) dW_s.$$

Sea $u \in \mathbb{R}$ fijo. Definimos

$$f(t, x) = \exp\{ux - \frac{1}{2}u^2 t\},$$

entonces $f_t(t, x) = -\frac{1}{2}u^2 f(t, x)$, $f_x(t, x) = uf(t, x)$ y $f_{xx}(t, x) = u^2 f(t, x)$. En particular,

$$f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x) = 0.$$

Para esta función $f(t, x)$, el segundo término del lado derecho de (3.10) es cero, por lo que $\mathbb{E}\exp\{uW_t - \frac{1}{2}u^2 t\} = 1$, es decir,

$$\mathbb{E}\exp\{uW_t\} = e^{\frac{1}{2}u^2 t}.$$

Que es la función generadora de momentos para la distribución normal con media cero y varianza $t$, por lo tanto $(W_t)$ es un proceso de Wiener.

$\square$

CAPÍTULO 4

# Medida neutral al riesgo

Una herramienta importante para resolver la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton, es el teorema de Girsanov, el cual postula que, bajo un cambio de medida de probabilidad, el valor descontado de los activos es una martingala. Para ello, haremos uso de algunos resultados de la teoría de la Medida , véase [**1**].

Comenzamos con un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria $Z$ tal que $\mathbb{E}(Z) = 1$. Entonces, podemos definir una nueva medida de probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$ dada por

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{para cada } A \in \mathcal{F}. \tag{4.1}$$

Cada variable aleatoria $X$ definida sobre nuestro espacio de probabilidad, tiene ahora dos esperanzas, una bajo la medida original $\mathbb{P}$, y otra bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$, la cual denotaremos como $\widetilde{\mathbb{E}}X$. Ambas están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$\widetilde{\mathbb{E}}X = \mathbb{E}[XZ]. \tag{4.2}$$

Si $\mathbb{P}\{Z > 0\} = 1$, entonces para cada conjunto $A \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$, también $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}(X) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X}{Z}\right] \tag{4.3}$$

Donde $Z$ es la *derivada de Radon-Nikodym* de $\widetilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$, denotada como

$$Z = \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}.$$

EJEMPLO 4.1. *Sea $X$ una v.a. con distribución normal estándar sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos*

$$Z = \exp\{-\theta X - \frac{1}{2}\theta^2\},$$

*donde $\theta$ es una constante positiva. Entonces, bajo la medida*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

*la variable aleatoria $Y = X + \theta$ tiene distribución normal estándar. En particular, $\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = 0$, mientras que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + \theta = \theta$.*

De manera análoga al ejemplo anterior, este cambio de medida se puede hacer no sólo con una variable, sino con un proceso, bajo ciertas restricciones. Para verificar esto, consideremos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ con $0 \leq t \leq T$ donde $T$ está fijo. Supongamos además que $Z$ es una variable aleatoria positiva casi en todas partes que satisface que $\mathbb{E}(Z) = 1$. Entonces podemos definir el proceso derivado de Radon-Nikodým

$$Z_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Notemos que para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_s] = Z_s,$$

por lo cual $Z_t$ es una martingala. Además de ser martingala, a nuestro proceso le vamos a pedir que cumpla con otras condiciones, las cuales se enuncian en los siguientes lemas.

Lema 4.2. *Sea $t \in [0, T]$ dado y sea $Y$ v.a. $\mathcal{F}_t -$ medible. Entonces*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = \mathbb{E}[YZ_t].$$

Demostración. Se cumple que

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}[YZ_t].$$

□

Lema 4.3. *Sean $s, t$ tales que $0 \leq s \leq t \leq T$ dados y sea $Y$ una v.a. $\mathcal{F}_t$-medible. Entonces*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}[YZ_t|\mathcal{F}_s].$$

Demostración. Al ser $\frac{1}{Z_s}$ y $E[YZ_t|\mathcal{F}_s]$ funciones $\mathcal{F}_s$-medibles, el producto es $\mathcal{F}_s$-medible. Ahora probaremos que se cumple la igualdad propuesta en el lema. Sea $A \in \mathcal{F}_s$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}[YZ_t|\mathcal{F}_s]d\widetilde{\mathbb{P}} &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_A \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}[YZ_t|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbb{I}_A YZ_t|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A YZ_t] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_A Y] \\
&= \int_A Y d\widetilde{\mathbb{P}}.
\end{aligned}$$

Lo cual verifica el lema. $\square$

Teorema 4.4. *(Girsanov unidimensional). Sea* $W_t$, $0 \leq t \leq T$ *un proceso de Wiener sobre el espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. *Sea* $\Theta_t$, $0 \leq t \leq T$, *un proceso adaptado a la filtración. Definimos*

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 du\right\}, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_u du, \tag{4.5}$$

*y asumimos que*

$$\mathbb{E}\int_0^T {\Theta^2}_u {Z^2}_u du < \infty. \tag{4.6}$$

*Sea* $Z = Z_T$*.Entonces* $\mathbb{E}(Z) = 1$ *y bajo la medida de probabilidad* $\widetilde{\mathbb{P}}$*, el proceso* $\widetilde{W}_t$ *es un proceso de Wiener.*

Demostración. Primero demostraremos que el proceso $\widetilde{W}_t$ es un proceso de Wiener. Con este fin haremos uso del teorema de Lévy. Notemos que

$$\widetilde{W}_0 = W_0 + \int_0^0 \Theta_u du = 0.$$

Para verificar la segunda condición del teorema de Lévy, veamos que

$$d\widetilde{W}_t d\widetilde{W}_t = (dW_t + \Theta_t dt)^2 = dW_t dW_t = dt$$

lo cual implica que $[\widetilde{W}, \widetilde{W}](t) = [W, W](t) = t$. Ahora solo resta verificar que $\widetilde{W}_t$ es una martingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$. Primero observemos que $Z_t$ es martingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$, con este fin verificamos que $Z_t$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$, para ello definimos

$$X_t = -\int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 du \qquad \text{y} \qquad f(x) = e^x.$$

Entonces $f'(x) = e^x = f''(x)$, por lo que

$$\begin{aligned} d(Z_t) &= df(X_t) \\ &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t dX_t \\ &= e^{X_t}\left(-\Theta_t dW_t - \frac{1}{2}\Theta_t^2 dt\right) + \frac{1}{2}e^{X_t}\theta_t^2 dt \\ &= -\Theta_t Z_t dW_t. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t \Theta_u Z_u dW_u,$$

por lo que $Z_t$ es una integral de Itô y la condición (4.6) garantiza que además es una martingala. En particular, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$. Por definición $Z = Z_T$ y como $Z_t$ es martingala, se cumple que

$$Z_t = \mathbb{E}[Z_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Lo anterior prueba que $Z_t$ es un proceso derivado de Radón-Nikodým para cada $t \in [0, T]$. Ahora resta probar que $\widetilde{W}_t Z_t$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Para ello, usaremos la fórmula del producto de Itô y calculamos

$$\begin{aligned}
d(\widetilde{W}_t Z_t) &= \widetilde{W}_t dZ_t + Z_t d\widetilde{W}_t + d\widetilde{W}_t dZ_t \\
&= -\widetilde{W}_t \Theta_t Z_t dW_t + Z_t dW_t + Z_t \Theta_t dt \\
&\quad + (dW_t + \Theta_t dt)(-\Theta_t Z_t dW_t) \\
&= (-\widetilde{W}_t \Theta_t + 1) Z_t dW_t.
\end{aligned}$$

Como la expresión final no tiene términos que dependan de $dt$, el proceso $\widetilde{W}_t Z_t$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$.

Sean $0 \leq s \leq t \leq T$ dadas. Por el lema (4.3) y aplicando la propiedad de martingala para $\widetilde{W}_t Z_t$ bajo $\mathbb{P}$ vemos que

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{W}_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[\widetilde{W}_t Z_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \widetilde{W}_s Z_s = \widetilde{W}_s.$$

Esto prueba que $\widetilde{W}_t$ es martingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$. □

De aquí en adelante, nos referiremos a la medida $\widetilde{P}$ como *medida neutral al riesgo*, porque bajo ella el valor descontado de un activo es una martingala.

## 1. Modelo de Black-Scholes-Merton

En esta sección veremos el caso simplificado donde tenemos un stock cuyo valor se modifica en una sucesión de instantes $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. Consideremos un inversionista con capital inicial de $y_0$ dólares en el instante 0. Durante el periodo de tiempo $(n, n+1)$ veremos el cambio en su stock para instantes posteriores a $n$. Basados en esta información decidiremos comprar $A_{n+1}$ acciones.

Las inversiones negativas están permitidas en este mercado, si- $A_n(\omega) \leq 0$ para alguna $n$ y $\omega$, entonces estamos en una *venta corta ó short selling* para esta $\omega$. Esto significa que vendemos $A_n(\omega)$ stocks que no tenemos, esperando que en el instante $T$ ganemos lo suficiente para pagar nuestras deudas.

Sea $S_n$ el valor del stock en el instante $n$. Simplifiquemos aún mas nuestro modelo asumiendo que $|S_{n+1} - S_n| = 1$. Esto es, el valor del stock fluctúa exactamente una unidad en cada instante y el valor de las acciones se actualiza precisamente en cada instante $n = 1, 2, \cdots$. Al instante $T$ se le denomina *fecha de maduración* y en este caso coincide con la fecha de expiración.

Sea $\Omega$ la colección de todos las posibles sucesiones $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T)$ donde cada $\omega_j$ toma posibles valores $\pm 1$. Intuitivamente, $\omega_j = 1$ si y solo si el valor de nuestro stock sube 1 dólar en el instante $j$. Así, $\omega_j = -1$ significa que el stock bajó una unidad y $\Omega$ es la colección de todos los posibles movimientos del stock que son teóricamente posibles. Podemos ver que estamos en el caso del ejemplo (1.8).

Supongamos que tenemos una opción call europea a $C$ dólares. Si $S_T(\omega) > 0$ entonces ganaremos $S_T(\omega) - C$ dólares. Esto porque podemos comprar el stock a $C$ dólares y venderlo instantáneamente a $S_T(\omega)$. Por otro lado, si $S_T(\omega) \leq C$ no es aconsejable comprar. Por lo tanto, no importa lo que suceda el precio de la opción es $(S_T(\omega) - C)^+$. Entonces una pregunta importante a resolver es *¿cuál será el valor justo de una opción call europea?*. Esta pregunta fué resuelta por Black y Scholes (1973) y Merton (1973).

Si bien, el trabajo realizado por Black y Scholes es independiente del que hiciera Merton, ambos coinciden en las siguietes hipótesis:

1° Ausencia de costos de transacción e igualdad en impuestos. Los mercados están abiertos todo el tiempo y las operaciones se pueden llevar a cabo de forma continua. Los préstamos y las ventas en corto se permiten sin restricciones. Las tasas de activos y pasivos son iguales.

2° El precio del subyacente se modifica de forma continua. Sea $S = S(t)$ la función que denota el precio al instante $t$ de un bien de responsabilidad limitada como una acción de un stock. La posición dinámica para el retorno puede describirse por una integral estocástica de Itô con trayectorias continuas simples dadas por

$$dS = [\alpha S - D_1(S,t)]dt + \sigma S dW,$$

donde: $\alpha$ es el parámetro de tendencia de precio del bien, $\sigma$ es el de difusión y $D_1$ es el pago de dividendos. Aquí $D_1$ debe satisfacer que $D_1(0,t) = 0$.

3° El precio de los bonos es libre de riesgo. En la formulación original del modelo de Black y Scholes se asume que la tasa de interés instantánea es constante.

4° Todos los inversionistas están de acuerdo con la volatilidad, es decir, no van a influir en el precio del bien obligándo a variaciones en el mismo.

5° La función $S$ que denota el precio de la opción es de segundo orden con respecto de $t$.

En el caso particular de que no haya pago de dividendos ($D_1 = 0$) y $\sigma$ constante, estas hipótesis llevan a la fórmula de Black-Scholes para una opción de tipo Call Europea con precio de ejercicio $L$ y fecha de maduración $T$.

Para poder establecer la solución a la pregunta inicial necesitamos establecer una definición financiera.

DEFINICIÓN 4.5. *Una estrategia $A$ es una estrategia de cobertura si:*

a) *Usando $A$ no nos conduce a la quiebra; es decir, $M_n(\omega) \geq 0$ para toda $n = 1, \ldots, T$, donde,*

$$M_n(\omega) = M_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = y_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j(\omega)[S_j(\omega) - S_{j-1}(\omega)] \tag{4.7}$$

*y la sucesión $\{A_i(\omega)\}_{i=1}^{T}$ es nuestra estrategia de inversión.*

b) *$M$ alcanza el valor del stock en el instante $T$; es decir,*

$$M_T(\omega) = (S_T(\omega) - C)^+.$$

*Por supuesto, toda estrategia $A$ es también previsible.*

Bajo las hipótesis del modelo, tenemos que $y_0$ es el "precio justo" de una opción dada. Si empezamos con $y_0$ dólares podemos encontrar una estrategia de inversión que reproduzca el valor de dicha opción en el instante $T$, sin importar como se modifique el valor del stock.

La solución de Black y Scholes transcrita en el presente modelo simplicado depende en primer lugar del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Aquí $\mathscr{P}(\Omega)$ denota el conjunto potencia de $\Omega$. Definimos la medida de probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$ de forma que $X_j(\omega) = \omega_j$ son variables aleatorias i.i.d. que toman valores $\pm 1$ con probabilidad $1/2$ respectivamente, como en la sección anterior. Así bajo la medida $\widetilde{\mathbb{P}}$ el valor del stock varía aleatoriamente pero de forma justa, es decir, le permite al poseedor de la opción cumpir con sus obligaciones con el dueño del bien por el que se firma la opción.

Otra forma equivalente de definir a $\widetilde{\mathbb{P}}$ es como la medida producto:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(d\omega) = Q(d\omega_1)\cdots Q(d\omega_T) \qquad \text{para cada } \omega \in \Omega,$$

donde $Q(\{1\}) = Q(\{-1\}) = 1/2$. Usando este espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \widetilde{\mathbb{P}})$, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ son procesos estocásticos. Bajo esta notación, presentamos la famosa fórmula de Black y Scholes.

TEOREMA 4.6. *(Fórmula de Black y Scholes). Una estrategia de cobertura existe si y sólo si*

$$y_0 = \mathbb{E}[(S_T - C)^+].$$

DEMOSTRACIÓN. Necesidad. Supóngase que existe una estrategia $A$ de cobertura. Entonces, por definición, $M_n \geq 0$ para toda $n$ y $M_T = (S_T - C)^+$ casi en todas partes. Por otro lado, por la igualdad [4.7] se cumple que

$$\mathbb{E}M_T = \mathbb{E}M_1 = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 = \mathbb{E}[(S_T - C)^+]$ como se deseaba. □

Para probar la segunda parte necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Representación de Martingala. En* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \widetilde{\mathbb{P}})$, *el proceso* $S$ *es una martingala. Cualquier otra martingala* $H$ *es una transformada de* $S$*; es decir, existe un proceso predecible* $J$ *tal que*

$$H_n = \mathbb{E}H_1 + \sum_{i=1}^{n} J_i(S_i - S_{i-1}) \qquad \textit{para toda } n = 1, \cdots, T. \tag{4.8}$$

Demostración. Como $H$ es adaptado, $H_n$ es una función únicamente de $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$. Abusando un poco de notación, podemos decir que

$$H_n(\omega) = H_n(\omega_1, \cdots, \omega_n) \qquad \text{para cada } \omega \in \Omega. \tag{4.9}$$

Por la propiedad de martingala, se sigue que $\mathbb{E}[H_{n+1}|\mathscr{F}_n] = H_n$ casi en todas partes. Ahora, supóngase que $\varphi_1 \cdots, \varphi_n$ son funciones acotadas tales que para cada $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_i$ es función unicamente de $\omega_i$. Entonces, por la independencia de las $\omega_i$'s, se cumple

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_i H_{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega_i) H_{n+1}(\omega_1, \ldots, \omega_n, -1) Qd(\omega_1) \cdots Qd(\omega_n) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} \varphi_1(\omega_i) H_{n+1}(\omega_1, \ldots, \omega_n, 1) Qd(\omega_1) \cdots Qd(\omega_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_i N_n\right],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $N_n(\omega) = \frac{1}{2}H_{n+1}(\omega_1, \ldots, \omega_n, -1) + \frac{1}{2}H_{n+1}(\omega_1, \ldots, \omega_n, 1)$. Nótese que $N_n$ es $\mathscr{F}_n$-medible para cada $n = 1, \ldots, T$. Además, por (4.10) y la propiedad de Martingala de $H$ se sigue que $M = N$ casi en todas partes. Es por esta razón que se da la siguiente igualdad

$$H_n(\omega) = \frac{1}{2}H_{n+1}(\omega_1, \dots, \omega_n, 1) + \frac{1}{2}H_{n+1}(\omega_1, \dots, \omega_n, -1), \tag{4.11}$$

para casi toda $\omega \in \Omega$. De hecho, como $\Omega$ es finito y $\widetilde{\mathbb{P}}$ es medida positiva sobre los elementos de $\Omega$, la igualdad se da para toda $\omega$. Mas aún, como $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ entonces lo anterior sigue siendo válido para $n = 0$ si se define $H_0 = \mathbb{E}(H_1)$.

Como $H_n(\omega) = \frac{1}{2}H_n(\omega) + \frac{1}{2}H_n(\omega)$ la siguiente igualdad se da para toda $0 \leq n \leq T-1$ y toda $\omega \in \Omega$:

$$H_{n+1}(\omega_1, \dots, \omega_n, 1) - H_n(\omega) = H_n(\omega) - H_{n+1}(\omega_1, \dots, \omega_n, -1). \tag{4.12}$$

Si definimos $d_i = H_{i+1} - H_i$, entonces $H_{n+1}(\omega) - H_0 = \sum_{i=0}^n d_i(\omega)$. Aplicando lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} H_{n+1}(\omega) - H_0 &= \sum_{i=0}^n \left[d_i(\omega)\mathbb{I}_{\{1\}}(\omega_{i+1}) + d_i(\omega)\mathbb{I}_{\{-1\}}(\omega_{i+1})\right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left(H_{i+1}(\omega_1, \dots, \omega_i, 1) - H_i(\omega)\right)\left[\mathbb{I}_{\{1\}}(\omega_{i+1}) - \mathbb{I}_{\{-1\}}(\omega_{i+1})\right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left(H_{i+1}(\omega_1, \dots, \omega_i, 1) - H_i(\omega)\right)\left[S_{i+1}(\omega) - S_i(\omega)\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (4.8) con $J_i(\omega) = H_i(\omega_1, \dots, \omega_i, 1) - H_{i-1}(\omega)$ y $H_0 = \mathbb{E}H_1$. $\square$

Ahora, veamos la segunda parte de la demostración de la fórmula de Black y Scholes.

Demostración. Suficiencia. El proceso $Y_n = \mathbb{E}\left[(S_T - C)^+ | \mathscr{F}_n\right]$ donde $0 \leq n \leq T$, es una martingala no negativa. Además, este proceso cumple que $Y_T = (S_T - C)^+$ casi seguramente y de aquí que lo cumple para toda $\omega \in \Omega$. Por el teorema de representación de martingala, podemos encontrar un proceso predecible $A$ tal que

$$Y_n = \mathbb{E}Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(S_i - S_{i-1}).$$

Por lo tanto, $A$ es una estrategia de cobertura con $y_0 = \mathbb{E}Y_1$. Por la propiedad de martingala, se tiene que $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}Y_2 = \cdots = \mathbb{E}Y_T$. Esto implica que $y_0 = \mathbb{E}\left[(S_T - C)^+\right]$, lo que prueba el teorema. $\square$

CAPÍTULO 5

# Valuación de opciones exóticas

## 1. Opciones Exóticas

Las opciones exóticas, son aquellas en las que, a diferencia de las Europeas, su pago depende de la trayectoria que sigue el precio del subyacente. Los tipos de opciones exóticas consideradas dentro de este trabajo, son del tipo barrera y lookback.

## 2. Opciones Barrera del tipo Knock-Out

Existen muchos tipos de opciones barrera dependiendo de la ubicación de la misma y de la forma en la que se llega a ella. Si el precio del bien comienza abajo de la barrera y la cruza hacia arriba, causando el llamado *knock out*, se dice que la opción es del tipo *up-and-out*. Una opción *down-and-out* tiene la barrera abajo del precio inicial del subyacente y tiene un knock out si el precio cae por debajo de la barrera. Otras opciones son las *knock in*, que al igual que las knock out tiene sus versiones *up-and-in* y *down-and-in*.

En esta sección trataremos una opción call up-and-out sobre un proceso de Wiener geométrico. La metodología con la que se calculará su valor se puede aplicar de forma análoga a las up-and-in, down-and-out y down-and-in en sus versiones put y call.

**2.1. Call Up-and-out.** Consideremos el precio del subyacente $S_t$ como el proceso de Wiener geométrico dado por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \tag{5.1}$$

donde $\widetilde{W}_t$ es un proceso de Wiener bajo la medida neutral al riesgo $\widetilde{\mathbb{P}}$. Consideremos ahora un call Europeo con fecha de expiración $T$, precio de ejercicio $K$ y una barrera up-and-out $B$, donde $K < B$.

La solución de la ecuación diferencial estocástica que denota el valor del precio del subyacente es

$$S_t = S_0 e^{\sigma \widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} = S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t},$$

donde $\widehat{W}_t = \alpha t + \widetilde{W}_t$, y $\alpha = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$. En efecto, considérese la función de descuento $D_t = e^{-rt}$, donde $r$ es la tasa de interés fijada en la opción, entonces

$$\frac{dD}{D} = -rdt,$$

por lo que

$$D_t S_t = S_0 \exp\{\sigma \widetilde{W}_t + (\alpha - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}.$$

Sean $a = \sigma$ y $b = \alpha - r - \frac{\sigma^2}{2}$, entonces si $f(t,x) = e^{ax+bt}$, se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = bf, \qquad \frac{\partial f}{\partial \widetilde{W}} = af, \qquad \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{W}^2} = a^2 f,$$

lo que implica que

$$\frac{df}{f} = (b + \frac{a^2}{2})dt + ad\widetilde{W},$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{dD_tS_t}{D_tS_t} &= (\alpha - r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma d\widetilde{W}\\ &= (\alpha - r)dt + \sigma d\widetilde{W}\\ &= \sigma(\frac{\alpha - r}{\sigma})dt + \sigma d\widetilde{W}\\ &= \sigma\Theta dt + \sigma d\widetilde{W} = \sigma(\Theta dt + d\widetilde{W}).\end{aligned}$$

Considérense

$$Z_t = \exp\{-\Theta\widetilde{W}_t + \frac{\Theta^2}{2}\}, \qquad \widehat{W}_t = \widetilde{W}_t + \Theta t \qquad \widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\widetilde{\mathbb{P}}.$$

Por el teorema de Girsanov, el proceso $\widehat{W}_t$ es un proceso de Wiener en $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{P}})$, por lo que

$$\frac{dD_tS_t}{D_tS_t} = \sigma d\widehat{W},$$

entonces

$$D_tS_t = S_0 + \int_0^t \sigma D_uS_u d\widehat{W}_u.$$

Como $d\widetilde{W} = -\Theta dt + d\widehat{W}$, entonces

$$\begin{aligned}dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma s_t(-\Theta dt + d\widehat{W})\\ &= \alpha S_t dt - S_t(\alpha - r)dt + \sigma S_t d\widehat{W}\\ &= S_t r dt + \sigma S_t d\widehat{W}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma\widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\},$$

es la solución de (5.1).

Ahora, definimos

$$\widehat{M}_t = \max_{0\leq t\leq T} \widehat{W}_t,$$

por lo que,

$$\max_{0\leq t\leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T}.$$

La opción tendrá knock-out si y solo si $S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T} > B$. De otra forma, si $S_0 e^{\sigma \widetilde{M}_T} \leq B$, el pago de la opción está dado por

$$(S_T - K)^+ = (S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K)^+.$$

Es decir, el pago de la opción es

$$\begin{aligned}
V_T &= (S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K)^+ \mathbb{I}_{(S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T} \leq B)} \\
&= (S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K) \mathbb{I}_{(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} \geq K,\ S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T} \leq B)} \\
&= (S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K) \mathbb{I}_{(\widehat{W}_T \geq k,\ \widehat{M}_T \leq b)},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde:

$$k = \frac{1}{\sigma} \log \frac{K}{S_0}, \qquad b = \frac{1}{\sigma} \log \frac{B}{S_0}. \tag{5.3}$$

Veamos que el precio de una opción call up-and-out satisface la ecuación de Black-Scholes-Merton con las modificaciones pertinentes de la barrera. La metodología seguida para la obtención del precio de esta opción funciona en situaciones donde la solución analítica puede ser obtenida.

Teorema 5.1. *Sea $v(t,x)$ la función que denota el precio de una opción call up-and-out, con las hipótesis de que la opción no ha tenido un knock-out hasta el instante $t$ y que $S_t = x$. Entonces $v(t,x)$ satisface* *la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton*

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + rx\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = rv(t,x) \tag{5.4}$$

*en el rectángulo* $\{(t,x); 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq B\}$ *y satisface las condiciones de frontera:*

$$v(t,0) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{5.5}$$

$$v(t,B) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{5.6}$$

$$v(T,x) = (x-K)^+, \qquad 0 \leq x \leq B. \tag{5.7}$$

Para justificar las condiciones de frontera, veamos que la condición (5.5) se cumple debido al principio de no arbitraje, es decir, cuando el precio del bien o subyacente comienza en el valor 0, permanece ahí. La condición (5.6) se sigue de que al ser $S_t$ un proceso de Wiener geométrico, que se caracteriza por oscilar demasiado, en cuanto llega al nivel $B$ inmediatamente baja y vuelve a cruzar infinidad de veces, entonces el valor de la opción es cero, puesto que está en el punto de knock-out. Sin embargo, el precio del bien no puede ser 0. Para solucionar este inconveniente definimos una nueva variable, $\rho$ como el primer instante en el que $S_t = B$, por lo que $S_t < B$ para $0 \leq t \leq \rho$ y $S_\rho = B$. Si el precio del bien no pega en la barrera hasta la fecha de expiración, diremos que $\rho = \infty$. La única excepción se dá cuando durante la vigencia de la opción, la trayectoria del precio del bien no le pega a la barrera en instante alguno hasta la fecha de expiración, por lo que su valor sería igual al que tuviera una opción call Europea.

Nótese que la variable $\rho$ es un tiempo de paro. En particular, el proceso

$$(5.8) \qquad e^{-r(t\wedge\rho)}V_{t\wedge\rho} = \begin{cases} e^{-rt}V_t & \text{si, } 0 \le t \le \rho, \\ e^{-r\rho}V_\rho & \text{si, } \rho < t \le T, \end{cases}$$

es $\widetilde{\mathbb{P}}-$martingala, por el *teorema de paro óptimo.*

Ahora, demostraremos el teorema (5.1).

Demostración. Calculemos la derivada del valor descontado de la función de pago de la opción call up-and-out:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}v(t,S_t)) &= e^{-rt}[-rv(t,S_t)dt + \frac{\partial}{\partial t}v(t,S_t)dt + \frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t)dS_t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,S_t)dt] \\ &= e^{-rt}[-rv(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial t}v(t,S_t) + rS_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,S_t)]dt + e^{-rt}\sigma S_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t)d\widetilde{W}_t. \end{aligned}$$

Como deseamos que el valor descontado de la función de pago sea martingala, es decir, queremos que se cumpla

$$d(e^{-rt}v(t,S_t)) = e^{-rt}\sigma S_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t)d\widetilde{W}_t,$$

entonces

$$e^{-rt}[-rv(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial t}v(t,S_t) + rS_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,S_t)]dt = 0,$$

lo cual prueba que la función de pago de la opción call up-and-out satisface la ecuación de Black-Scholes-Merton. $\square$

## 3. Cálculo del precio de la opción del tipo Call Up-and-Out

Para valuar este tipo de opciones, usaremos las siguientes hipótesis que ya han sido justificadas en la sección 2.1.

Consideremos el precio libre de riesgo de una opción call up-and-out con función de pago $V_t$, dada por la ecuación (5.1) que en el instante cero es $V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}[e^{-rT} V_T]$.

Usando la función de densidad conjunta del proceso de Wiener y su máximo, así como los valores dados en (5.3) vemos que, para $k \geq 0$ debemos integrar sobre la región $\{(m, w) : k \leq w \leq m \leq b\}$. Si $k < 0$ la región de integración es $\{(m, w) : k \leq w \leq m, 0 \leq m \leq b\}$.

Hemos asumido que $S_0 < B$, por lo que $b$ debe ser estrictamente positivo, pues de no ser así la opción estaría "out of the money". De manera natural $S_0 > 0$ y $b, k$ son finitos. Cuando $0 < S_0 \leq B$, el valor de la opción en el instante cero de la opción call up-and-out es

(5.9)

$$\begin{aligned}
V_0 &= \int_k^b \int_{w^+}^b e^{-rT} \left(S_o e^{\sigma w} - K\right) \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dm dw \\
&= -\int_k^b e^{-rT} \left(S_0 e^{\sigma w} - K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} \Big|_{m=w^+}^{m=b} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b \left(S_0 e^{\sigma w} - K\right) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} w^2} dw \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b \left(S_0 e^{\sigma w} - K\right) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw \\
&= S_0 I_1 - K I_2 - S_0 I_3 + K I_4,
\end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} w^2} dw,$$
$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} w^2} dw,$$
$$I_3 = \frac{1}{2\pi T} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw,$$
$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}}.$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{w-\gamma T}{\sqrt{T}}$, vemos que cada una de estas integrales es de la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\beta + \gamma w - \frac{1}{2T} w^2} dw &= \frac{1}{2\pi T} \int_k^b e^{-\frac{1}{2T}(w-\gamma T)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} dw \\ &= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}k - \gamma T}^{\frac{1}{\sqrt{T}}b - \gamma T} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.\end{aligned}$$

Usamos la propiedad de simetría de la normal y la última igualdad para ver que

(5.10)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\beta + \gamma w - \frac{1}{2T} w^2} dw &= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \left[\eta\left(\frac{b-\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - \eta\left(\frac{k-\gamma T}{\sqrt{T}}\right)\right] \\ &= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \left[\eta\left(\frac{-k+\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - \eta\left(\frac{-b+\gamma T}{\sqrt{T}}\right)\right] \\ &= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \left[\eta\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\log\frac{S_0}{B} + \gamma\sigma T\right]\right)\right. \\ &\qquad \left. - \eta\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\log\frac{S_0}{B} + \gamma\sigma T\right]\right)\right]\end{aligned}$$

Definimos

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log s + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]. \tag{5.11}$$

La integral $I_1$ es de la forma (2.3) con $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T$ y $\gamma = \alpha + \sigma$, así que $\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = 0$ y $\gamma\sigma = r + \frac{1}{2}\sigma^2$. Por lo que,

$$I_1 = \eta\left(\delta_+\left(T, \frac{S_o}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right).$$

De forma análoga, la integral $I_2$ es de la forma (2.3) con $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T$ y $\gamma = \alpha$, así que $\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = -rT$ y $\gamma\sigma = r - \frac{1}{2}\sigma^2$. Por lo que

$$I_2 = e^{-rt}\left[\eta\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right)\right].$$

Para $I_3$ tenemos que $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2b^2}{T}$ y $\gamma = \alpha + \sigma + \frac{2b}{T}$, asi que

$$\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = \log\left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1},$$

$$\gamma\sigma T = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \log\left(\frac{B}{S_0}\right)^2.$$

Por lo que,

$$I_3 = \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}\left[\eta\left(\delta_+\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right)\right].$$

Por último, para $I_4$, tenemos que $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2b^2}{T}$ y $\gamma = \alpha + \frac{2b}{T}$, así que

$$\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = -rT + \log\left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1},$$

$$\gamma\sigma T = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \log\left(\frac{B}{S_0}\right)^2.$$

Por lo que,

$$I_4 = e^{-rT}\left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[\eta\left(\delta_-\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right)\right].$$

Sustituyendo los valores obtenidos en y bajo la hipótesis de que $0 < S_0 \leq B$, tenemos que la fórmula para calcular el precio de una opción del tipo call up-and-out es

(5.12)

$$\begin{aligned}
V_0 = S_0 &\left[\eta\left(\delta_+\left(T, \frac{S_o}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right)\right] \\
&- e^{-rt}\left[\eta\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right)\right] \\
&- B\left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}\left[\eta\left(\delta_+\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right)\right] \\
&+ e^{-rT}K\left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[\eta\left(\delta_-\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Sea $t \in [0, T)$ dada, y $0 < x \leq B$ tal que $S_t = x$. Si la opción no ha pegado en la barrera hasta el instante $t$, su valor se obtiene reemplazando $T$ por la fecha de expiración $\tau = T - t$ y reemplazando $S_0$ por $x$ en (5.12), lo que nos dá el precio de un call como la función de dos variables

$$\begin{aligned}
v(t, x) = x &\left[\eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&- e^{-r\tau}K\left[\eta\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&- B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - \eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&+ e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[\eta\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - \eta\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right], \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

donde $0 \leq t < T$ y $0 < x \leq B$. La fórmula (5.13) se obtuvo bajo las hipótesis de que $\tau > 0$ y $0 < x \leq B$. Para $0 < t \leq T$ y $x > B$, tenemos que $v(t,x) = 0$ por la naturaleza de la opción. Si el precio del bien pega en la barrera antes de la fecha de expiración, entonces inmediatamente excede la barrera, por lo que $v(t,B) = 0$ para $0 \leq t \leq T$, sin embargo, $v(T,B) = B - K$. Para $x = 0$, $v(t,0) = 0$ porque la opción está "out of the money". Finalmente, si la opción no pega en la barrera hasta la fecha de expiración, entonces el pago de la opción es el de una call Europea, es decir, $v(T,x) = (x-K)^+$. En resúmen, $v(t,x)$ satisface las condiciones de frontera (5.5)-(5.7).

## 4. Opciones Lookback

El precio de esta opción está en función del valor máximo que alcanza el precio del bien durante la vigencia de la misma. En esta sección consideraremos una opción lookback con fecha de ejercicio variable, lo que implica analizar un nuevo tipo de diferencial que no está en función del tiempo ni del proceso de Wiener.

**4.1. Opción Lookback con fecha strike variable.** Consideremos el modelo para el precio del bien como

$$S_t = S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t},$$

donde $\widehat{W}_t = \alpha t + \widetilde{W}_t$ y $\alpha = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$. Definimos

$$\widehat{M}_t = \max_{0 \leq u \leq t} W_u, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

para escribir el máximo del precio del bien hasta el instante $t$ como

$$Y_t = \max_{0 \le u \le t} \widehat{S}_u = S_0 e^{\sigma \widehat{M}_t}.$$

Consideraremos además, la función de pago de la opción lookback en la fecha de expiración como

$$V_T = Y_T - S_T.$$

Notemos que esta función es no negativa, ya que $Y_T \ge S_T$. Sea $t \in [0, T]$ dada. En el instante $t$ el precio libre de riesgo para una opción lookback es

$$V_t = \widetilde{\mathbb{E}} \left[ e^{-r(T-t)} \left( Y_T - S_T \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \tag{5.14}$$

Como el par de procesos $(S_t, Y_t)$ tiene la propiedad de Markov, existe una función $v(t, x, y)$ tal que

$$V_t = v(t, S_t, Y_t),$$

que como veremos en el siguiente teorema, cumple con las condiciones de la ecuación de Black-Scholes-Merton.

TEOREMA 5.2. *Sea $v(t, x, y)$ la función que denota el precio de la opción lookback con fecha strike variable, en $t$, donde $S_t = x$ y $Y_t = y$. Entonces $v(t, x, y)$ satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton*

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x, y) + rx \frac{\partial}{\partial x} v(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, x, y) = rv(t, x, y), \tag{5.15}$$

*en la región* $\{(t,x,y): 0 \leq t < T, 0 \leq x \leq y\}$ *y satisface las condiciones de frontera*

$$v(t,0,x) = e^{-r(T-t)}y, \qquad 0 \leq t \leq T, y \geq 0 \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}v(t,y,y) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, y \geq 0 \tag{5.17}$$

$$v(T,x,y) = y - x, \qquad 0 \leq x \leq y. \tag{5.18}$$

Para realizar la prueba de este teorema, procedemos de manera análoga a lo realizado con las opciones barrera, derivando la función de pago descontado de la opción lookback, donde al hacerlo aparecerá el término $dY_t$. Como $Y_t$ es un proceso continuo y no decreciente, entonces su variación cuadrática es cero. Para ver esto, consideremos la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ de $[0,T]$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}\right)^2 \\
&\leq \max_{j=1,\ldots,m}\left(Y_{t_j} - Yt_{j-1}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}\right) \\
&= \max_{j=1,\ldots,m}\left(Y_{t_j} - Yt_{j-1}\right)\cdot\left(Y_T - Y_0\right).
\end{aligned}$$

Cuando $m \to \infty$, $\max_{j=1,\ldots,m}\left(Y_{t_j} - Yt_{j-1}\right) \to 0$ por la continuidad del proceso $Y_t$. Por lo tanto, la variación cuadrática acumulada de $Y_t$ es cero, lo que quiere decir que

$$dY_t dY_t = 0.$$

Por otra parte, el término $dY_t$ no está en función de $dt$, o equivalentemente el proceso $Y_t$ no puede ser escrito de la forma

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \Theta(u)du \tag{5.19}$$

para alguna función $\Theta(t)$. Es claro que $Y_t$ es una función no decreciente, continua y el conjunto en donde $Y_t$ es estrictamente creciente tiene medida 0. Esto último debido a que si $Y_t$ es estrictamente creciente, entonces $S_t$ tambien lo es, pero $S_t$ no lo puede ser en un conjunto grande puesto que es no diferencible. Por lo que la longitud de los "puntos planos" de $Y_t$ sobre el intervalo $[0, T]$ suman $T$. Además, si la ecuación (5.19) se diera, la función $\Theta(u)$ tendría que ser 0 para toda $u \in [0, T]$ porque al ser $\Theta(u)$ Lebesgue integrable y creciente, suponiendo que para alguna $u$, $\Theta(u)$ fuese mayor que 0, existiría un intervalo en el cual sería estrictamente positiva lo que es una contradicción. Este argumento implica que $Y_t = Y_0$ para toda $t \in (0, T]$, pero $Y_t > Y_0$ para toda $t > 0$. Por lo tanto, concluimos que $Y_t$ no puede ser expresado como (5.19).

Afortunadamente podemos trabajar con la diferencial de $Y_t$. Hemos mostrado que $dY_t dY_t = 0$, de forma similar se puede argumentar que $dY_t dS_t = 0$. Ahora probaremos el teorema.

Demostración. Calculamos la derivada de la función de pago de una opción lookback con fecha strike variable usando la fórmula de

Itô-Doublin

$$
\begin{aligned}
d\left(e^{-rt}v\left(t,S_t,Y_t\right)\right) &= e^{-rt}\Bigg[-rv\left(t,S_t,Y_t\right)dt+\frac{\partial}{\partial t}v(t,S_t,Y_t) \\
&+\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t,Y_t)+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}v(t,S_t,Y_t)dS_tdS_t \\
&+\frac{\partial}{\partial y}v(t,S_t,Y_t)\Bigg] \\
&= e^{-rt}\Bigg[-rv(t,S_t,Y_t)+\frac{\partial}{\partial t}v(t,S_t,Y_t) \\
&+rS_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t,Y_t)+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,S_t,Y_t)\Bigg]dt \\
&+e^{-rt}\sigma S_t\frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t,Y_t)d\widetilde{W}_t \\
&+e^{-rt}\frac{\partial}{\partial y}v(t,S_t,Y_t)dY_t. \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

El coeficiente del término $dt$ debe ser 0 porque $v(t,S_t,Y_t)$ es martingala lo que nos da la fórmula de Black-Scholes y Merton. A diferencia del precio de la opción barrera, aquí aparece el término $e^{-rt}\frac{\partial}{\partial y}v(t,S_t,Y_t)$ que también debe ser 0. Cuando $S_t<Y_t$, $Y_t$ permanece constante y naturalmente $dY_t$ es cero. Sin embargo, cuando $S_t=Y_t$, el término $e^{-rt}\frac{\partial}{\partial y}v(t,S_t,Y_t)$ debe ser 0 porque $dY_t$ es “positivo”, lo que nos da la condición [41]. La condición [42] es el pago de la opción. Si en algún instante $t$, $S_t=0$ entoces, $S_T=0$, por lo que la variable $Y_t$ permanecerá constante en el intervalo $[t,T]$, es decir, si $Y_t=y$ entonces $Y_T=y$ y el precio de la opción en el instante $t$ será el valor descontado desde $T$ a $t$, lo que nos da la condición [43]. □

**4.2. Reducción de dimensión.** Un inconveniente para trabajar con las opciones lookback bajo el modelo de Black-Scholes-Merton, es que su precio queda determinado en función de tres variables. Notemos que $v(t,x,y)$ tiene la siguiente propiedad escalar

$$v(t,\lambda x,\lambda y)=\lambda v(t,x,y), \qquad \text{para toda } \lambda>0;$$

lo que nos permite cambiar a $v(t,x,y)$ de una función de tres variables a la función $u(t,z)$ de acuerdo a la siguiente igualdad

$$u(t,z)=v(t,z,1), \qquad 0\leq t\leq T,\ \ 0\leq z\leq 1;$$

así, podemos cambiar a $v(t,x,y)$ de la siguiente forma

$$v(t,x,y)=yv(t,\frac{x}{y},1)=yu(t,\frac{x}{y}), \qquad 0\leq t\leq T,\ \ 0\leq x\leq y,\ \ y\geq 0.$$

De acuerdo a la ecuación anterior, podemos obtener las derivadas parciales para posteriormente sustituirlas en la ecuación de Black-Scholes-Merton

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,y) &= y\frac{\partial t}{\partial}u(t,\frac{x}{y}),\\
\frac{\partial}{\partial x}v(t,x,y) &= y\frac{\partial}{\partial z}\left(t,\frac{x}{y}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(t,\frac{x}{y}\right),\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(t,\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(t,\frac{x}{y}\right),\\
\frac{\partial}{\partial y}v(t,x,y) &= u\left(t,\frac{x}{y}\right)+y\frac{\partial}{\partial z}\left(t,\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\\
&= u\left(t,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial z}u\left(t,\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Black-Scholes-Merton

$$
\begin{aligned}
0 &= -rv(t,x,y) + \frac{\partial}{\partial t}v(t,x,y) + rx\frac{\partial}{\partial x}v(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x,y) \\
&= y\left[-ru\left(t,\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(t,\frac{x}{y}\right) + r\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(t,\frac{x}{y}\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(t,\frac{x}{y}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Dividiendo entre $y$ y haciendo el cambio de variable $z = \frac{x}{y}$ vemos que $u(t,z)$ satisface la ecuación de Black-Scholes-Merton

$$
\frac{\partial}{\partial t}u(t,z) + rz\frac{\partial}{\partial z}u(t,z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u(t,z) = ru(t,z), \tag{5.21}
$$

donde $0 \leq t < T,\ \ 0 < z < 1$. Las condiciones de frontera [40]-[42] también se cumplen para $u(t,z)$ y pueden ser obtenidos a partir $v(t,x,y)$ de la siguiente forma

$$
e^{-r(T-t)}y = v(t,0,y) = yu(t,0)
$$

lo que implica que

$$
u(t,0) = e^{-r(T-t)},\ 0 \leq t \leq T. \tag{5.22}
$$

Además

$$
0 = \frac{\partial}{\partial y}v(t,y,y) = u(t,1) - \frac{\partial}{\partial z}u(t,1)
$$

lo cual implica que

$$
u(t,1) = \frac{\partial}{\partial z}(t,1),\ 0 \leq t \leq T. \tag{5.23}
$$

Finalmente,
$$y - x = v(T, x, y) = yu\left(T, \frac{x}{y}\right)$$
lo que implica que
$$u(T, z) = 1 - z,\ \ 0 \le z \le 1. \tag{5.24}$$
La ecuación (5.21) y las nuevas condiciones de frontera determinan la unicidad de la función $u(t, z)$. Como consecuencia, también queda determinada la unicidad de la función $v(t, x, y)$.

**4.3. Cálculo del precio de una opción lookback.** Calcularemos la función $v(t, x, y)$ para $0 \le t < T$ y $0 < x \le y$. Esta última condición es suficiente, dado que $Y_t \ge S_t$. Sea $t \in [0, T)$ y $\tau = T - t$. Entonces
$$Y_T = S_0 e^{\sigma \widehat{M}_t} e^{\sigma(\widehat{M}_T - \widehat{M}_t)} = Y_t e^{\sigma(\widehat{M}_T - \widehat{M}_t)}.$$
Si $\max_{t \le u \le T} \widehat{W}_u > \widehat{M}_t$, es decir, si $\widehat{W}$ tiene un nuevo máximo en $[t, T]$, entonces
$$\widehat{M}_T - \widehat{M}_t = \max_{t \le u \le T} \widehat{W}_u - \widehat{M}_t.$$
De otra forma, si $\max_{t \le u \le T} \widehat{W}_u \le \widehat{M}_t$, entonces $\widehat{M}_T = \widehat{M}_t$. En cada caso tenemos que,
$$\begin{aligned} \widehat{M}_T - \widehat{M}_t &= \left[\max_{t \le u \le T} \widehat{W}_u - \widehat{M}_t\right]^+ \\ &= \left[\max_{t \le u \le T} \Big((\widehat{W}_u - \widehat{W}_t) - (\widehat{M}_t - \widehat{W}_t)\Big)\right]^+. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\sigma$ y considerando que $S_t = S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t}$ y $Y_t = S_0 e^{\sigma \widehat{M}_t}$, tenemos que

$$\sigma\left(\widehat{M}_T - \widehat{M}_t\right) = \left[\max_{t\le u\le T} \sigma\left(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t\right) - \log\frac{Y_t}{S_t}\right]^+ . \tag{5.25}$$

Sustituyendo $Y_T$ en la expresión (5.14) y desarrollándola, tenemos que

$$\begin{aligned} V_t = {} & e^{-r\tau}\widetilde{\mathbb{E}}\left[Y_t \exp\left[\max_{t\le u\le T}\sigma\left(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t\right) - \log\frac{Y_t}{S_t}\right]^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ & - e^{rt}\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rT}S_T \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Como el valor descontado del precio del bien $S_t$ y $Y_t$ son $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingala, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$V_t = e^{-r\tau}Y_t\widetilde{\mathbb{E}}\left[Y_t \exp\left[\max_{t\le u\le T}\sigma\left(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t\right) - \log\frac{Y_t}{S_t}\right]^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] - S_t. \tag{5.27}$$

Definimos la función

$$g(x,y) = \widetilde{\mathbb{E}}\exp\left\{\left[\max_{t\le u\le T}\sigma(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t) - \log\frac{y}{x}\right]^+\right\}, \tag{5.28}$$

donde $x = S_t$ y $y = Y_t$. Sustituyendo (5.28) en la ecuación (5.27) tenemos que

$$V_t = e^{-r\tau}Y_t g(S_t, Y_t) - S_t,$$

o equivalentemente

$$v(t,x,y) = e^{-r\tau}yg(x,y) - x. \tag{5.29}$$

Para calcular $g(x,y)$, notemos que

$$\max_{t\le u\le T}\sigma(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t) = \sigma\max_{t\le u\le T}(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t)$$

y $\max_{t\le u\le T}(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t)$ tiene la misma esperanza condicional bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ que $\max_{t\le u\le T}(\widehat{W}_u - \widehat{W}_0) = \widehat{M}_\tau$. Entonces la función $g(x,y)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \widetilde{\mathbb{E}} \exp\{\left[\sigma\widehat{M}_\tau - \log\frac{y}{x}\right]^+\} \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}\{\widehat{M}_\tau \le \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\} + \frac{x}{y}\widetilde{\mathbb{E}}[e^{\sigma\widehat{M}_\tau}\mathbb{I}_{\{\widehat{M}_\tau \ge \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\}}] \end{aligned}$$

Ahora para calcular el lado derecho de la ecuación anterior, veamos que si reemplazamos $T$ por la variable $\tau$ y a $m$ por $\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}$ de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x} - \alpha\tau\right] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{y}{x} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right] \\ &= -\delta_-\left(\tau, \frac{x}{y}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[-\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x} - \alpha\tau\right] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[-\log\frac{y}{x} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right] \\ &= -\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

donde $\delta_\pm(\tau, s)$ está definido por (5.11).

El primer sumando del lado derecho de (4.3) tiene la forma (5.40) del apéndice A, por lo que

(5.30)
$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\widehat{M}_\tau \le \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\} = \eta\left(\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right)$$

dado que

(5.31) $$\exp\{\frac{2\alpha}{\sigma}\log\frac{y}{x}\} = \exp\{\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\log\frac{y}{x}\} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}.$$

Ahora, veamos que

$$\tag{5.32} \begin{aligned} &\frac{x}{y}\widetilde{\mathbb{E}}[e^{\sigma \widehat{M}_\tau}\mathbb{I}_{\{\widehat{M}_\tau \geq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\}}] \\ &\quad= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} e^{\sigma m}\widetilde{f}_{\widehat{M}_\tau}(m)dm \\ &\quad= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm \\ &\quad\quad- \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}\eta\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right)dm. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} &\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm \\ &\quad= \frac{2xe^{r\tau}}{y\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau-\sigma\tau)^2}dm. \end{aligned}$$

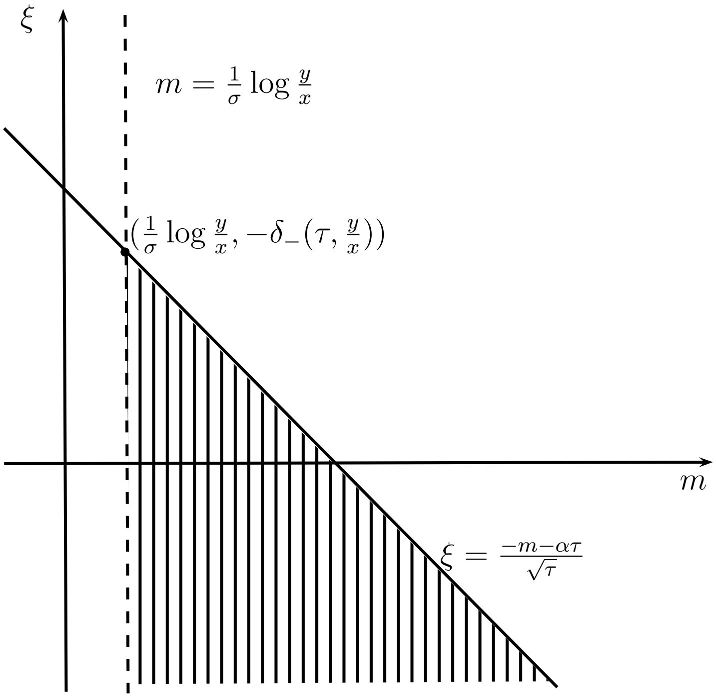
Ahora, haciendo el cambio de variable $\xi = \frac{\alpha\tau+\sigma\tau-m}{\sqrt{\tau}}$, el límite inferior de la integral anterior se modifica por

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\alpha\tau+\sigma\tau-\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\log\frac{x}{y}+r\tau+\frac{1}{2}\sigma^2\tau\right) = \delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right).$$

Con estas modificaciones, tenemos que

$$\tag{5.33} \begin{aligned} \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm &= \frac{2xe^{r\tau}}{y\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi \\ &= \frac{2xe^{r\tau}}{y}\eta\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

Para calcular el segundo término en (5.32), debemos integrar sobre la región que se muestra en la siguiente figura:




Como $\sigma + 2\alpha = \frac{2r}{\sigma}$ entonces

$$
\begin{aligned}
(5.34) \qquad & -\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}\eta\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right)dm \\
&= -\frac{2\alpha x}{y\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{\tau}}(-m-\alpha\tau)} e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi dm \\
&= -\frac{2\alpha x}{y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau} e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}dmd\xi.
\end{aligned}
$$

Calculando la integral interior tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau} e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}dm &= \frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}\Big|_{m=\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{m=-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau} \\
&= \frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2}{\sigma}r(-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau)-\frac{1}{2}\xi^2} - \frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2r}{\sigma^2}\log\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\xi^2}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sigma}r(-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau)-\frac{1}{2}\xi^2 &= -\frac{\xi^2}{2}-\frac{2r\xi\sqrt{\tau}}{\sigma}-\frac{2r\alpha\tau}{\sigma}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2+\frac{2r^2\tau}{\sigma^2}-\frac{2r\alpha\tau}{\sigma}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2+\frac{2r\tau}{\sigma^2}(r-\sigma\alpha)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2+r\tau,\end{aligned}$$

y

$$e^{\frac{2r}{\sigma^2}\log\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\xi^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Así que

$$\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau}e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}dm=\frac{\sigma}{2r}e^{-\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2+r\tau}-\frac{\sigma}{2r}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Ahora, sustituyendo el resultado anterior en (5.35), obtenemos

$$\begin{aligned}(5.35)\qquad & -\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty}2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}\eta\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right)dm\\ &= -\frac{\alpha\sigma x}{ry\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{-\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2+r\tau}d\xi\\ &\quad+\frac{\alpha\sigma}{r\sqrt{2\pi}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi\\ &= -\frac{\alpha\sigma x e^{r\tau}}{ry\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{-\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)^2}d\xi\\ &\quad+\frac{\alpha\sigma}{r}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\eta\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{y}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

En la primera integral del lado derecho de última igualdad hacemos el cambio de variable $\nu = \xi + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}$ y el límite superior se modifica por

$$\begin{aligned}
-\delta_-(\tau, \frac{y}{x}) + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[-\log\frac{y}{x} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + 2r\tau\right] \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{y} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right] \\
&= \delta_+(\tau, \frac{x}{y}).
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned}
(5.36)\quad & -\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}\eta\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right)dm \\
& = -\frac{\alpha\sigma x}{ry}e^{r\tau}\eta\left(\delta_+(\tau, \frac{x}{y})\right) + \frac{\alpha\sigma}{r}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, recapitulando un poco, recordemos que la función $v(t, x, y)$ con $0 \leq t \leq T$ y $0 \leq x \leq y$ se cambió por la función $g(x, y)$ y hasta este momento se han calculado los términos involucrados en la ecuación (5.29), obteniendo

$$\begin{aligned}
v(t, x, y) = e^{-r\tau}y\Bigg[&\eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{x}{y}\right)\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right) \\
&+ 2\left(\frac{x}{y}\right)e^{r\tau}\eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{y}\right)\right) \\
&- \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)\left(\frac{x}{y}\right)e^{r\tau}\eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{y}\right)\right) \\
&+ \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)\left(\frac{y}{x}\right)e^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right)\Bigg] - x \\
= \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right)&x\eta\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{y}\right)\right) + e^{-r\tau}y\ \ \eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{x}{y}\right)\right) \\
\frac{\sigma^2}{2r}&e^{-r\tau}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}x\ \ \eta\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

La última expresión corresponde al precio de una opción look-back.

## 5. Conclusiones

El presente trabajo cumple la finalidad primordial de analizar el marco teórico de modelo de Black-Scholes-Merton, así como su implementación en la valuación de opciones del tipo look-back y barrera. Si bien, existen opiniones divergentes acerca de la validez de este modelo, en la práctica continúa teniendo vigencia, dada su simplicidad computacional, parte que ya no pudo ser analizada en esta tesis, pero que tiene gran relevancia para trabajos posteriores.

La idea mas brillante en el desarrollo del modelo de Black-Scholes-Merton es la forma en la que obtienen su famosa fórmula, basándose en portafolios auto-replicables, cuyo tratamiento fué limitado, pero que de ser analizado con mayor detalle puede ser explotado de mejor forma para la valuación de diversos instrumentos financieros. Si bien, la idea original era explotar este modelo hasta sus últimos alcances, lo extenso que resulta este trabajo impidió concluir este objetivo; sin embargo, dado que el marco teórico que se mostró esta bien fundamentado, se puede proceder de forma casi análoga con la obtención del precio de otras opciones como es el caso de las asiáticas.

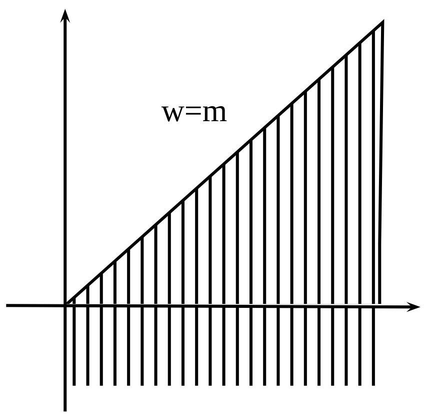
# Apéndice A

**Función de distribución conjunta de un Proceso de Wiener con tendencia $\alpha$ y su máximo.**

Sea $\widetilde{W_t}$ con $0 \leq t \leq T$ un proceso de Wiener definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$, tal que bajo la medida $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\widetilde{W_t}$ tiene tendencia cero (i.e. es martingala). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y defínanse los procesos

$$\widehat{W_t} = \alpha t + \widetilde{W_t} \qquad \text{y} \qquad \widehat{M_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \widehat{W_t}.$$

Nótese que $\widehat{W_t}$ tiene tendencia $\alpha$ bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\widehat{M_T} \geq 0$ y $\widehat{W_t} \leq \widehat{M_T}$, por lo que, el par de variables aleatorias $(\widehat{M_t}, \widehat{W_T})$ toma valores en el conjunto, $\{(m, w); w \leq m, m \geq 0\}$ que se muestra en la siguiente figura:




Para calcular la función de distribución conjunta de $(\widehat{M_T}, \widehat{W_T})$, definimos la martingala exponencial

$$\widehat{Z}(t) = e^{-\alpha \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} = e^{-\alpha \widehat{W}_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Por lo que podemos definir una nueva medida de probabilidad $\widehat{\mathbb{P}}$ como

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A \widehat{Z}(T) d\widetilde{\mathbb{P}}, \qquad \text{para cada } \ A \in \mathcal{F}.$$

Entonces, por el teorema de Girsanov, $\widehat{W_t}$ es un proceso de Wiener con tendencia cero, por lo que la función de distribución conjunta bajo $\widehat{\mathbb{P}}$ es

$$f_{\widehat{M_T},\widehat{W_T}}(m,w) = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2m-w)^2}, \qquad w \leq m, m \geq 0. \tag{5.37}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}}\{\widehat{M_T} \leq m, \widehat{W_T} \leq w\} &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\widehat{M_T} \leq m, \widehat{W_T} \leq w\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{\widehat{Z}_T}\mathbb{I}_{\{\widehat{M_T} \leq m, \widehat{W_T} \leq w\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{\alpha \widehat{W}_T - \frac{1}{2}\alpha^2 T}\mathbb{I}_{\{\widehat{M_T} \leq m, \widehat{W_T} \leq w\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{w}\int_{-\infty}^{m} e^{\alpha \widehat{W}_T - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \widehat{f}_{\widehat{M_T},\widehat{W_T}}(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Asi, la densidad de $(\widehat{M_T}, \widehat{W_T})$ bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ es

$$\frac{\partial^2}{\partial m \partial w}\widetilde{\mathbb{P}}\{\widehat{M_T} \leq m, \widehat{W_T} \leq w\} = e^{\alpha \widehat{W}_T - \frac{1}{2}\alpha^2 T}\widehat{f}_{\widehat{M_T},\widehat{W_T}}(m,w) \tag{5.38}$$

La fórmula anterior es válida cuando $w \leq m$ y $m \geq 0$, de otra forma es cero, por lo que para valores fijos $m$ y $w$ en la región de integración, se tiene que

$$\widetilde{f}_{\widehat{M_T},\widehat{W_T}} = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} \tag{5.39}$$

De la fórmula anterior podemos deducir integrando sobre el rango el rango del par de variables $(\widehat{M_T}, \widehat{W_T})$, el siguiente resultado:

$$(5.40)\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{\widehat{M}_T \leq m\} = \eta\left(\frac{m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\alpha m}\eta\left(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right), \qquad m \geq 0,$$

donde la función de densidad bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ de la variable aleatoria $\widehat{M}_T$ es

(5.41)
$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_T}(m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(m-\alpha T)^2} - 2\alpha e^{2\alpha m}\eta\left(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right) \qquad m \geq 0.$$

Ésta última expresión es la que se usará en la sección 3 del capítulo 5, para calcular el precio de la opción tipo call con barrera up-and-out. Para mayores detalles ver [**6**].

# Bibliografía

[1] Bartle, R. G., *The elements of real analysis*. Wiley, New York, 1972.

[2] Brzézniak Z., Zastawniak T., *Basic Stochastic Processes: a course through exercises*, Undergraduate Mathematics Series. Springer, London, New York, 1999.

[3] Etheridge A., *A course in Financial Calculus*, Cambridge University Press. United Kingdom, 2002.

[4] Karatzas I., Shreve E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1991.

[5] Oksendal B. K., *Stochastic Differencial Equations: An introduction whit applications*. Springer Verlag, Berlin, 1992.

[6] Shreve E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, New York, 2004.

[7] Steele J. M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Applications of Mathematics. Springer Verlag, New York, 2000.