BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Bifurcación de Andronov Hopf en la dinámica neuronal

Tesis que para obtener el Título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Leonardo Remedios Santiago

Directora de Tesis

Dra. Lucía Cervantes Gómez

Octubre 2013

Dedico este trabajo a mi familia.

Reconocimientos

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por el apoyo económico que permitió a la conclusión e impresión de este trabajo mediante el proyecto *Aprendizaje de la modelación matemática con ecuaciones diferenciales y en diferencias*.

A la Doctora María Elena Franco Carcedo, por la corrección de estilo en la redacción de este trabajo.

Índice general

Índice de figuras **v**

Introducción **1**

1. Preliminares **5**

1.1. Sistemas dinámicos 5

1.2. Órbitas, puntos de equilibrio, ciclos y retrato fase . . 7

1.3. Conjuntos invariantes 10

1.4. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos 11

2. Equivalencias en los sistemas dinámicos y bifurcaciones **19**

2.1. Equivalencia de los sistemas dinámicos 19

2.2. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio . . 27

2.3. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación 29

2.4. Estabilidad estructural 33

3. Bifurcación de Hopf **37**

3.1. Forma normal de la bifurcación de Hopf 37

3.2. Bifurcación genérica de Hopf 45

4. Aplicaciones **58**

4.1. Modelo depredador presa 58

4.2. Modelo Neuronal 62

Bibliografía **81**

Índice de figuras

1.1. Órbitas en un sistema dinámico de tiempo continuo. . 8
1.2. Ciclos en un sistema dinámico de tiempo continuo. . 9
1.3. Estabilidad de Liapunov. 11
1.4. Conjunto asintóticamente estable que no es estable en el sentido de Liapunov. 12

2.1. Retratos fase. 25
2.2. Homeomorfismo h. 36

3.1. Bifurcación hipercrítica de Andronov Hopf. 39
3.2. Diagramas de bifurcación [4]. 40
3.3. Función de Poincaré para la bifurcación de Hopf. . . 42
3.4. Punto de equilibrio para el mapeo de regreso. 44
3.5. Construcción del homeomorfismo. 46

4.1. Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa. 61
4.2. Estructura de una neurona [4] 63
4.3. Clases de excitabilidad [4]. 65
4.4. Comportamiento del voltaje en la bifuración silla nodo. 69

4.5. Comportamiento del voltaje en la bifuración silla nodo en un círculo invariante. 70
4.6. Comportamiento del voltaje en la bifuración subcrítica de Andronov Hopf. 70
4.7. Comportamiento del voltaje en la bifuración hipercrítica de Andronov Hopf. 71
4.8. Bifurcación silla-nodo. 72
4.9. Bifurcación silla-nodo en un círculo invariante. 73
4.10. Bifurcación subcrítica de Andronov Hopf. 74
4.11. Bifurcación hipercrítica de Andronov Hopf. 75
4.12. Aproximaciones numéricas 76
4.13. Comportamiento del voltaje durante la bifurcación. . 78
4.14. Comportamiento del voltaje durante la bifurcación. . 79

Introducción

Este trabajo comenzó con el interés de estudiar los modelos de la dinámica neuronal. Para comprender las propiedades neurocomputacionales a partir de los resultados de la investigación en neurociencias, se han utilizado diferentes clasificaciones de la respuesta neuronal. Un enfoque que ha ido ganando mucha importancia en las últimas décadas ha sido la interpretación de las respuestas electrofisiológicas de las neuronas como sistemas dinámicos, cuya caracterización se determina mediante las bifurcaciones de estas respuestas o de los modelos que las representan. Este nuevo enfoque fue propuesto por Rinzel y Ermentrout en 1989, profundizado y popularizado además por varios matemáticos, entre los que destaca Izhikevich (2001, 2007); entre las ventajas de este enfoque, tenemos que permite entender las propiedades excitables de muchas neuronas para las cuales no se han siquiera propuesto modelos, e incluso podemos entender las propiedades excitables de neuronas cuyas corrientes iónicas transmembranales todavía no se han medido, siempre y cuando podamos identificar experimentalmente cuál es la bifurcación del estado de reposo a la que se somete el voltaje de la neurona.

El enfoque basado en bifurcaciones tiene la gran ventaja de que, aunque puede haber millones de mecanismos electrofisiológicos de excitabilidad y disparo, se han encontrado solo cuatro tipos diferentes de bifurcación del equilibrio en la respuesta del voltaje neuronal cuando se varía la intensidad de la corriente aplicada; este hecho se

esta utilizando para realizar modelos computacionales de redes neuronales que puedan simular respuestas mas realistas, con múltiples aplicaciones.

Uno de los cuatro tipos de bifurcación que aparecen es la de Andronov Hopf y es en la que nos enfocaremos en este trabajo.

El objetivo de esta tesis es estudiar la bifurcación de Andronov Hopf en sistemas de dimensión 2 mediante la forma normal topológica (esta forma normal es la que se utiliza generalmente para verificar si un sistema de ecuaciones diferenciales presenta este tipo de bifurcación) y mostraremos su aplicación en el análisis de un modelo de variación del voltaje neuronal.

Se presentan las bases matemáticas de la teoría de bifurcaciones de manera autocontenida, con la intención de poner a disposición de los alumnos de licenciaturas en matemáticas interesados en empezar un estudio de estos tópicos un material mas asequible.

El teorema de la forma normal para la bifurcación de Hopf se demuestra siguiendo el enfoque de [5], pero aquí se presenta más desarrollada y escribiendo las definiciones de manera precisa basándonos principalmente en [7].

En el capítulo 1 de este trabajo se introducen las definiciones básicas de los sistemas dinámicos, que nos permitirán llegar a la

definición y, posteriormente, la caracterización de la bifurcación de Hopf. Se incluye una manera de definir los sistemas dinámicos de tiempo continuo a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias que es lo que trabajaremos aquí.

En el capítulo 2 se introducen las principales relaciones de equivalencia que se pueden presentar en los sistemas dinámicos. Estas relaciones de equivalencia nos dicen cuándo dos sistemas son: topológicamente equivalentes, difeomorfos u orbitalmente equivalentes. Estas relaciones de equivalencia permiten dar la definición de bifurcación mediante la aparición de retratos fase que no son topológicamente equivalentes. Una vez introducido el término de bifurcación, se define la forma normal topológica, la cual nos da la forma general de un sistema tal que cualquier otro sistema que cumpla las mismas condiciones de bifurcación sea topológicamente equivalente.

En el capítulo 3 se estudia esta bifurcación, las condiciones de genericidad que debe cumplir y se construye su forma normal topológica.

En el capítulo 4 se analizan dos sistemas dinámicos generados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales; se utilizan las condiciones de genericidad y la forma normal topológica para confirmar que se presenta una bifurcación hipercrítica de Andronov Hopf. El primer sistema es un modelo general de depredador presa con respuesta funcional del tipo Holling II, mientras que el segundo es un

modelo neuronal que incluye una corriente persistente de sodio y una corriente de potasio $I_{Na,p} + I_K$, el cual es equivalente en muchos aspectos al modelo $I_{Ca} + I_K$ propuesto por Morris y Lecar para describir las oscilaciones del voltaje en la fibra muscular del percebe gigante. Debido a la complejidad de las funciones involucradas en este modelo, se usaron aproximaciones numéricas para realizar algunos cálculos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sistemas dinámicos

En esta sección vamos a introducir la terminología básica que se requiere, por ejemplo las definiciones de sistema dinámico, órbitas, conjuntos invariantes y su estabilidad. La noción de sistema dinámico es la formalización de los procesos deterministas. El estado futuro o pasado del sistema se puede determinar por el conocimiento del estado actual y de las leyes que determinan el sistema, siempre que estas leyes no cambien en el tiempo, el comportamiento de tal sistema puede definirse completamente por su estado inicial. Así, la noción de sistema dinámico incluye un conjunto de sus posibles estados (espacio de estados) y una ley de la evolución del estado en el tiempo.

Definición 1.1.1. Un *sistema dinámico* es una tripleta $\{T, X, \varphi^t\}$ donde T es un conjunto que expresa el tiempo (discreto o continuo) X es el espacio de estados y $\varphi^t : X \to X$ es una familia de

operadores de evolución parametrizados por $t \in T$ que satisface las siguientes propiedades:

I. $\varphi^0 = id$

II. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s, \textit{donde } t, s \in T$

Debido a que podría ser que $\varphi^t x$ no estuviera definido para toda pareja $(x, t) \in X \times T$, se exige que se cumpla II cuando ambos miembros de la ecuación estén definidos.

Para comparar los diferentes estados del sistema dinámico, es necesario que el conjunto X satisfaga algunas propiedades; una caracterización general con muchas aplicaciones es que X sea un espacio métrico; por otra parte, el conjunto que expresa el tiempo es algún subconjunto $T \subset \mathbb{R}$, por ejemplo puede ser $\mathbb{Z}$ en el caso de los sistemas dinámicos de tiempo discreto o $\mathbb{R}$ o algún subintervalo de $\mathbb{R}$ en el caso de sistemas dinámicos de tiempo continuo. Para conocer el estado x_t del sistema al tiempo t, es necesario conocer el estado inicial o condición inicial x_0. Los sistemas dinámicos con un operador de evolución definido para $t \geq 0$ y para $t < 0$ se llaman *invertibles*, y en tales sistemas la condición inicial x_0 no solo define los estados futuros del sistema sino también su comportamiento pasado. También es posible que $\varphi^t x_0$ esté definido localmente en el tiempo, es decir, para $0 \leq t < t_0$ donde t_0 depende de $x_0 \in X$. En este trabajo vamos a tratar solo con los sistemas de tiempo continuo.

Vamos a ilustrar esta definición con un ejemplo.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el espacio de estados $X = \mathbb{R}^2$, el conjunto de tiempo $T = \mathbb{R}$ y las transformaciones lineales en X dependientes del tiempo $t \in T$ determinadas por la matriz:

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

donde $\lambda, \mu \neq 0$ son números reales. En este caso el sistema dinámico es de tiempo continuo debido a la elección de $T = \mathbb{R}$. Además el sistema es invertible y está definido para todo (x, t) con $x \in \mathbb{R}^2$. La transformación φ^t es continua y suave tanto en x como en t.

1.2. Órbitas, puntos de equilibrio, ciclos y retrato fase

El estudio de los sistemas dinámicos desde el punto de vista geométrico es de gran importancia, ya que facilita la comprensión de la evolución del sistema. Los objetos geométricos básicos asociados con un sistema dinámico $\{X, T, \varphi^t\}$ son sus órbitas en el espacio de estados y el retrato fase que se compone de estas órbitas. Consideremos un sistema dinámico

$$\{X, T, \varphi^t\} \tag{1.1}$$

Definición 1.2.1. Una *órbita* con estado inicial x_0 es un subconjunto ordenado del espacio de estados:

$$Orb\,(x_0) = \{x \in X \mid x = \varphi^t x_0 \, \forall t \in T \; donde \; \varphi^t está \; definida\}.$$

Las órbitas con un operador de evolución continuo son curvas en el espacio de estados X parametrizadas por el tiempo t y cuya dirección está orientada por la dirección del incremento en el tiempo (Figura 1.1).

Las órbitas más simples de un sistema dinámico son los puntos de

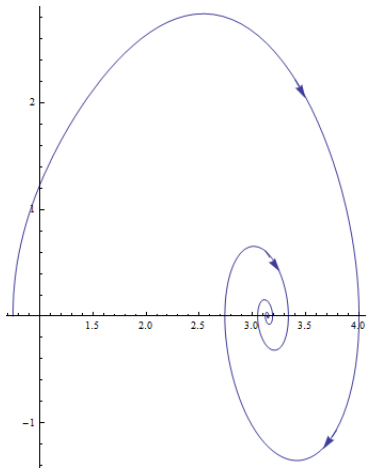


Figura 1.1: Órbitas en un sistema dinámico de tiempo continuo.

equilibrio.

Definición 1.2.2. Un punto $x_0 \in X$ es un *punto de equilibrio* si $\varphi^t(x_0) = x_0 \ \ \forall t \in T$.

Un sistema dinámico con condición inicial x_0, donde x_0 es un punto de equilibrio, permanecerá en $x_0 \ \forall t \in T$. Así, un punto de equilibrio representa el comportamiento más simple de un sistema. El sistema del ejemplo 1.1.2 tiene un solo punto de equilibrio en el origen $x_0 = (0, 0)$. Otra órbita relativamente simple es un ciclo.

Definición 1.2.3. Un *ciclo* u *órbita periódica* L_0 es una órbita que no es un punto de equilibrio y además cumple que para cada punto

$x_0 \in L_0$ satisface que $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ para algún $T_0 > 0$ y $\forall t \in T$.

El T_0 mínimo con esta propiedad se llama periodo del ciclo L_0. Si un sistema tiene condición inicial en un punto x_0 de un ciclo, regresará exactamente a este punto después de un tiempo T_0. Los ciclos en el espacio de estados son curvas cerradas (Figura 1.2). Un tipo de ciclos importantes son los que están aislados.

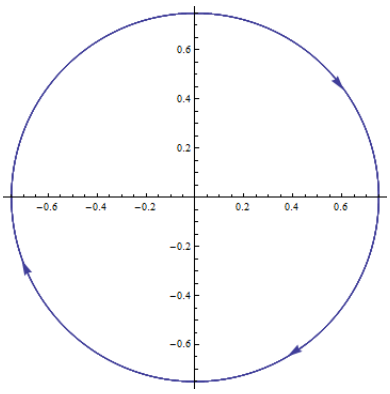


Figura 1.2: Ciclos en un sistema dinámico de tiempo continuo.

Podemos clasificar de manera aproximada todas las órbitas de un sistema dinámico en ciclos, puntos de equilibrio y otras.

Definición 1.2.4. El *retrato fase* de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados en órbitas.

El retrato fase contiene mucha información del comportamiento de un sistema dinámico. Por ejemplo podemos determinar el número y tipos de estados asintóticos a los cuales tiende el sistema cuando $t \to \infty$ (y cuando $t \to -\infty$ si el sistema es invertible).

1.3. Conjuntos invariantes

Para clasificar los nuevos elementos de un retrato fase, en particular los estados asintóticos del sistema, es muy útil la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Un *conjunto invariante* de un sistema dinámico $\{T, X, \varphi^t\}$ es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$ implica que $\varphi^t x_0 \in S$ para todo $t \in T$

Esta definición implica que $\varphi^t S \subset S$ para todo $t \in T$. Los puntos fijos y los ciclos son los ejemplos más simples de conjuntos invariantes. Los conjuntos invariantes que siguen en complejidad son las variedades invariantes, esto es, hipersuperficies de dimensión finita en algún espacio $X = \mathbb{R}^K$.

Para representar un estado asintótico observable de un sistema dinámico, un conjunto invariante S_0 debe ser estable, es decir, debería atraer órbitas cercanas.

Definición 1.3.2. Un *conjunto invariante S_0 es estable* si:

I. Para todo $\epsilon > 0$, la vecindad U_ϵ tal que $U_\epsilon \supset S_0$ existe una vecindad $V \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \in U_\epsilon$ para todo $x \in V$ y todo $t > 0$;

II. Existe una vecindad $U_0 \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \to S_0$ para todo $x_0 \in U_0$ cuando $t \to \infty$.

A un conjunto invariante S_0 que cumple la propiedad I se le llama *estable en el sentido de Liapunov*; si cumple la propiedad II se le llama *asintóticamente estable*. Hay conjuntos invariantes que son

estables en el sentido de Liapunov pero no asintóticamente estables (Figura 1.3).

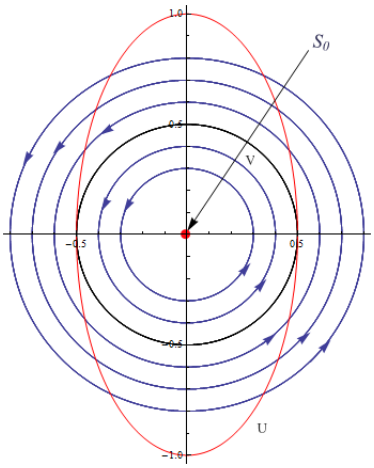


Figura 1.3: Estabilidad de Liapunov.

De manera análoga, hay conjuntos invariantes que son asintóticamente estables pero que no son estables en el sentido de Liapunov, ya que algunas órbitas cercanas a S_0 se aproximan eventualmente a S_0, pero solo después de una excursión fuera de una vecindad pequeña pero fija de este conjunto (Figura 1.4).

1.4. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Una forma muy común mediante la cual podemos generar un sistema dinámico de tiempo continuo es a partir de ecuaciones diferenciales. Supongamos que el espacio de estados de un sistema es $X = \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Muy a menudo la ley

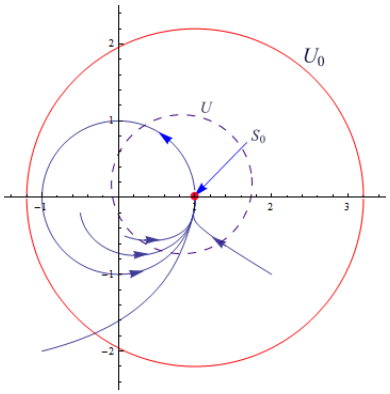


Figura 1.4: Conjunto asintóticamente estable que no es estable en el sentido de Liapunov.

de evolución del sistema está dada implícitamente, en términos de las velocidades $\dot{x}_i$, como funciones de las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots x_n)$:

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right), i = 1, 2, \ldots, n,$$

o en forma vectorial:

$$\dot{x} = f\left(x\right), \tag{1.2}$$

donde la función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable (suave). La función en el lado derecho de (1.2) se llama *campo vectorial*, ya que asigna un vector $f\left(x\right)$ a cada punto x. La ecuación (1.2) representa un sistema de *n ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas*, EDOs para abreviar.

Bajo condiciones muy generales, las soluciones de las EDOs definen un sistema dinámico suave de tiempo continuo. Algunos tipos de ecuaciones diferenciales pueden ser resueltos analíticamente (i.e.

en términos de funciones elementales), aunque a veces una EDO no se pueda resolver analíticamente, si el lado derecho de la ecuación (1.2) es suave, se garantiza la existencia de las soluciones de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. (Existencia, unicidad y dependencia suave) *Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es suave en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Entonces hay una única función* $x = x(t, x_0), x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *que es suave en* (t, x) *y satisface para cada* $x_0 \in U$ *las siguientes condiciones:*

I. $x(0, x_0) = x_0$;

II. Hay un intervalo $\tau = (-\delta_1, \delta_2)$, *donde* $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$, *tal que, para todo* $t \in \tau$,

$$y(t) = x(t, x_0) \in U,$$

y

$$\dot{y}(t) = f(y(t)).$$

El grado de suavidad de $x(t, x_0)$ respecto a x_0 en el teorema 1.4.1 es el mismo que el de f como función de x. La función $x = x(t, x_0)$, considerada como función del tiempo t, se llama solución con condición inicial x_0. Esto define, para cada $x_0 \in U$, dos objetos: una *curva solución*

$$C(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in \tau\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

y una *órbita*, la cual es una proyección de $C(x_0)$ en el espacio de estados,

$$Orb(x_0) = \{x = x(t, x_0), t \in \tau\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ambas curvas están parametrizadas por el tiempo t y su dirección queda determinada por la dirección del incremento en el tiempo. Un vector no nulo $f(x_0)$ es tangente a la órbita $Orb(x_0)$ en x_0. Hay una única órbita que pasa a través de un punto $x_0 \in U$.

Bajo las condiciones del teorema, la órbita se sale de U tanto en $t = -\delta_1$ (y/o en $t = \delta_2$) o siempre pertenece a U; en el último caso podemos tomar $\tau = (-\infty, +\infty)$.

Si $\delta_2 = \infty$, se define el *conjunto ω-límite de x_0* como el conjunto $\omega(x_0) = \{q \in U \mid \exists\{t_n\}_{n\geq 1}$ con $t_n \to \infty$ y $\varphi^{t_n} \to q$, cuando $n \to \infty\}$.

Si $\delta_1 = -\infty$, se define el *conjunto α-límite de x_0* como el conjunto $\alpha(x_0) = \{q \in U \mid \exists\{t_n\}_{n\geq 1}$ con $t_n \to -\infty$ y $\varphi^{t_n} \to q$, cuando $n \to \infty\}$.

Ahora podemos definir el operador de evolución $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$\varphi^t x_0 = x(t, x_0), \tag{1.3}$$

que asigna a x_0 el punto de la órbita al que llega x_0 t unidades de tiempo después. Cada operador de evolución φ^t se define para $x \in U$ y $t \in \tau$, donde τ depende de x_0.

Una de las mayores tareas de la teoría de los sistemas dinámicos es analizar el comportamiento de un sistema dinámico definido por EDOs. Por supuesto, uno podría intentar resolver este problema, únicamente calculando algunas órbitas numéricamente (por simu-

laciones). Sin embargo, el aspecto más usado de esta teoría es que podemos predecir algunas características del retrato fase de un sistema definido por EDOs sin resolver realmente el sistema. El ejemplo más sencillo de tal información es el número y posiciones de equilibrio. En efecto, el equilibrio de un sistema definido por (1.2) son los ceros del campo vectorial dados por:

$$f(x) = 0.$$

Si $f(x_0) = 0$, entonces $\varphi^t x_0 = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La estabilidad de un punto de equilibrio también puede determinarse sin resolver el sistema. Por ejemplo, en el siguiente teorema se proporcionan condiciones suficientes para que un punto de equilibrio x_0 sea estable.

Teorema 1.4.2. Liapunov [1892] *Consideremos un sistema dinámico definido por*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es suave. Supongamos que tiene un equilibrio x_0 *(i.e.* $f(x_0) = 0$*) y denotemos por A la matriz jacobiana de* $f(x)$ *evaluada en el equilibrio:* $A = f_x(x_0)$*. Entonces* x_0 *es estable si todos los valores propios [2]* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de A satisfacen que* $\mathrm{Re}\lambda < 0$*.*

Otra órbita que se puede estudiar a través de la teoría cualitativa son los ciclos límites que definiremos a continuación:

Definición 1.4.3. Un *ciclo límite* Γ es un ciclo de un sistema dinámico que es el conjunto α u ω límite de alguna trayectoria diferente de Γ. Si un ciclo Γ es el conjunto ω-límite de toda órbita en alguna vecindad de Γ, entonces Γ es un *ciclo ω-límite* o *ciclo límite*

estable; si Γ es el conjunto α-límite de toda trayectoria en una vecindad de Γ, entonces Γ es un *ciclo α-límite* o *ciclo límite inestable*, y si Γ es el conjunto ω-límite para algunas trayectorias diferentes de Γ y el conjunto α-límite para otras trayectorias, entonces Γ es un *ciclo límite semiestable*.

Una de las herramientas más útiles en el estudio de la estabilidad de los ciclos limite en sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

es el mapeo de Poincaré o el mapeo del primer retorno. Consideremos Γ una órbita periódica del sistema (1.4), consideremos además una sección transversal local $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. La superficie Σ no necesita ser plana, pero debe ser elegida de tal manera que el flujo sea transverso a la superficie en todas partes, esto es, que $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$, donde $n(x)$ es el vector normal unitario a Σ en x. Denotemos por p el punto donde Γ interseca a Σ y que $U \subset \Sigma$ alguna vecindad de p. Si Γ tiene múltiples intersecciones con Σ, entonces se debe contraer Σ hasta que solo se intersequen en un punto. De esta forma el *mapeo del primer retorno* o el *mapeo de Poincaré* $P : U \to \Sigma$ lo definimos para un punto $q \in U$ por

$$P(q) = \varphi^{\tau} q, \tag{1.5}$$

donde $\tau = \tau(q)$ es el tiempo que necesita la órbita $\varphi^t q$ que comienza en q para regresar por primera vez a Σ. Nótese que generalmente τ depende de q y no es necesario que sea igual a $T = T(p)$ el periodo de Γ, sin embargo $\tau \to T$ cuando $q \to p$.

El siguiente teorema establece la existencia y continuidad del mapeo de Poincaré $P(x)$ y de su primera derivada $DP(x)$.

Teorema 1.4.4. *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^1(E)$ de (1.4). Supongamos que $\varphi^t x_0$ es una solución periódica de (1.4) de periodo T y que el ciclo*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \varphi^t x_0,\ 0 \leq t \leq T\}$$

está contenido en E. Sea Σ una sección transversal que interseca a Γ en x_0. Entonces existe un $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$ definida y diferenciable para $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $\tau(x_0) = T$ y

$$\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

Ahora, para analizar la estabilidad de una órbita periódica al menos en dimensión 2 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.5. *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que $f \in C^1(E)$. Sea $\Gamma(t)$ una solución periódica de (1.4) de periodo T. Entonces la solución periódica $\Gamma(t)$ es un ciclo límite estable si*

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\Gamma(t))\, dt < 0$$

y es un ciclo límite inestable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\Gamma(t))\, dt > 0.$$

Una demostración de los teoremas anteriores se puede revisar en [7].

Durante el resto de este trabajo nos ceñiremos a los sistemas dinámicos de tiempo continuo definidos a través de ecuaciones diferenciales, por lo tanto nuestro espacio de estados es $\mathbb{R}^n$, nuestro operador de evolución es el que se define mediante las soluciones, como se expresó en (1.3) y finalmente el conjunto T que expresa el tiempo queda determinado por las condiciones iniciales, como lo indica el teorema de existencia y unicidad (1.4.1).

Capítulo 2

Equivalencias en los sistemas dinámicos y bifurcaciones

2.1. Equivalencia de los sistemas dinámicos

En esta sección se introducen algunos conceptos de gran interés en este trabajo, como las clases de equivalencia, bifurcaciones, diagramas de bifurcación y la forma normal para las bifurcaciones.

Una de las tareas más importantes es el estudio de las características cualitativas de los sistemas dinámicos y su comportamiento, para poder realizar una clasificación y comparar los sistemas. La comparación de objetos se basa en una relación de equivalencia, lo cual permitirá definir clases de equivalencia entre los objetos. Así, empezaremos definiendo lo que es una relación de equivalencia.

Definición 2.1.1. Una *relación de equivalencia* [6] en un conjunto

A es un subconjunto E del producto cartesiano $A \times A$ que satisface las siguientes condiciones:

I. Reflexivo, es decir, $(x, x) \in E \ \ \forall x \in A$,

II. Simétrico, si $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$,

III. Transitivo, si $(x, y) \in E$ y $(y, z) \in E \Rightarrow (x, z) \in E$.

Esta definición nos servirá para definir cuándo dos sistemas dinámicos son cualitativamente similares o equivalentes; uno esperaría que dos sistemas dinámicos fueran equivalentes si tienen el mismo número de puntos de equilibrio y ciclos, además de regiones de atracción similares.

Definición 2.1.2. Un sistema dinámico $\{T_1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es *topológicamente equivalente* a un sistema dinámico $\{T_2, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envía órbitas del primer sistema a órbitas del segundo sistema, preservando la dirección de las órbitas determinada por el avance del tiempo en el sentido que si una órbita Γ del primer sistema se dirige de x_1 a x_2, entonces sus imágenes se dirigen a una órbita Υ del segundo sistema de $h(x_1)$ a $h(x_2)$.

Recordemos que un *homeomorfismo* f entre dos espacios métricos X y Y es una función biyectiva donde f y la función inversa f^{-1} son continuas [6].

Vemos que mediante esta definición obtenemos una relación de equivalencia en el conjunto de los sistemas dinámicos. En efecto, sea $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ un sistema dinámico, para ver la propiedad reflexiva basta con tomar como homeomorfismo $h = Id$, con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es

decir, la función identidad, que es continua y con inversa continua y preserva las órbitas y su dirección. Para ver la propiedad simétrica, supongamos que $\{T_1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es topológicamente equivalente a $\{T_2, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ y consideremos el homeomorfismo h correspondiente; queremos ver si existe un homeomorfismo g tal que envíe órbitas del segundo sistema al primero y que preserve sus direcciones. Para esto basta considerar a $g = h^{-1}$, ya que como h es un homeomorfismo, entonces g y g^{-1} son funciones continuas, y por las propiedades de h tenemos que g envía órbitas del segundo sistema a órbitas del primero y preserva sus direcciones. Para ver la propiedad transitiva, supongamos que un sistema dinámico $\{T_1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es topológicamente equivalente a $\{T_2, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ y que éste a su vez es topológicamente equivalente a $\{T_3, \mathbb{R}^n, \Phi^t\}$, y consideremos los homeomorfismos h, g correspondientes. Para comprobar que $\{T_1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es topólogicamente equivalente a $\{T_3, \mathbb{R}^n, \Phi^t\}$, consideremos el homeomorfismo $z = g \circ f$, que por ser composición de funciones continuas es continua y cuya inversa es de la forma $z^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, que también es continua, ya que es composición de funciones continuas. De este modo verificamos que mediante la definición 2.1.2 obtenemos una relación de equivalencia para los sistemas dinámicos.

En el caso de los sistemas dinámicos de tiempo continuo hay dos tipos de equivalencia que definiremos a continuación y cuya relación de equivalencia se puede demostrar de forma análoga.

Definición 2.1.3. Dos sistemas dinámicos $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{y} = g(y), y \in \mathbb{R}^n$ se llaman *suavemente equivalentes* (o difeomorfos)

si existe un difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = h(x)$ tal que

$$f(x) = M^{-1}(x)\, g(h(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde

$$M(x) = \frac{dh(x)}{dx}$$

es la matriz jacobiana de $h(x)$ evaluada en el punto x.

Un *difeomorfismo* entre dos subconjuntos U y V de $\mathbb{R}^n$ es una función h invertible y además h y h^{-1} son suaves. Si el grado de suavidad de h es importante, entonces en la definición anterior se escribiría C^k-equivalentes o C^k-difeomorfos.

Si dos sistemas son difeomorfos, entonces son prácticamente indistinguibles, es decir, podemos verlo solo como un cambio de coordenadas. De la definición (2.1.3) se sigue que si x_0 y $y_0 = h(x_0)$ son puntos de equilibrio y $A(x_0)$ y $B(x_0)$ son las matrices jacobianas de f y g respectivamente evaluadas en los puntos de equilibrio, tenemos que

$$A(x_0) = M^{-1}(x_0)\, B(x_0)\, M(x_0)$$

por lo tanto los polinomios característicos de las matrices $A(x_0)$ y $B(x_0)$ coinciden y por lo tanto tienen los mismos valores propios. Además, los ciclos límites difeomorfos tienen el mismo periodo.

Veamos otra clase de equivalencia.

Definición 2.1.4. Dos sistemas dinámicos $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{y} = g(y), y \in \mathbb{R}^n$ se llaman *orbitalmente equivalentes* si existe una función $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave positiva (i.e. $\mu(x) > 0$) tal que

$$f(x) = \mu(x)\, g(x) \, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que si $f(x)$ y $g(x)$ son orbitalmente equivalentes, entonces son homeomorfos, ya que sus órbitas son idénticas excepto por el tiempo de parametrización; así, el homeomorfismo es la identidad.

A veces el estudio de los sistemas dinámicos se realiza de manera local, es decir, no en todo el espacio $\mathbb{R}^n$, pero sí en una región $U \subset \mathbb{R}^n$; tal región puede ser una vecindad del punto de equilibrio o de un ciclo. De esta manera, las equivalencias anteriormente definidas se pueden modificar para hacer un estudio local, por ejemplo la siguiente modificación de la definición (2.1.2) es muy útil para un estudio local.

Definición 2.1.5. Un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es *localmente equivalente topológicamente* cerca de un punto de equilibrio x_0 a un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ cerca de un punto de equilibrio y_0 si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que:

I. Está definido en una pequeña vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0

II. Satisface que $y_0 = h(x_0)$

III. Envía órbitas del primer sistema en U a órbitas del segundo sistema en $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ preservando su dirección.

Veamos un ejemplo para comparar las equivalencias definidas arriba, el cual es un caso particular de la equivalencia del nodo y el foco en un sistema dinámico plano, es decir, $X = \mathbb{R}^2$. Recordemos que, dado un sistema dinámico, si los valores propios de la matriz jacobiana son tales que $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \lambda_{1,2} < 0$, el sistema se denomina nodo. Si los valores propios de la matriz jacobiana son tales que

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ y además $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, entonces el sistema se denomina foco [1].

Ejemplo 2.1.6. Consideremos los dos sistemas dinámicos

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{2.2}$$

El sistema (2.1) tiene matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

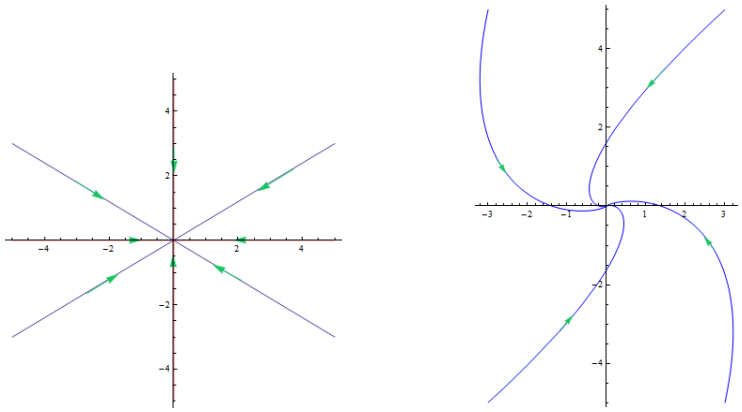
cuyos valores propios son $\lambda_{1,2} = -1$, por lo que la solución del sistema es

$$x(t) = e^{-t},$$
$$y(t) = e^{-t}$$

y sus órbitas en el espacio de estados son líneas rectas (Figura 2.1 (a)). En este caso, por la forma de las soluciones, el origen es estable, ya que las soluciones $e^{-t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Mientras tanto el sistema (2.2) tiene matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$ y sus soluciones tienen forma de espiral (Figura 2.1 (b)). En este caso el origen también es estable.



(a) Nodo (b) Foco

Figura 2.1: Retratos fase.

Ambos sistemas no son orbital ni suavemente equivalentes; el primer hecho es obvio, y tampoco es suavemente equivalente, lo cual se constata ya que no tienen los mismos valores propios, sin embargo son topológicamente equivalentes, por ejemplo, en el disco unitario. Vamos a probar esto explícitamente construyendo el homeomorfismo $h : U \to U$.

Para ello necesitaremos las representaciones polares de los sistemas (2.1) y (2.2) donde $p : T \to \mathbb{R}_+$ es una función que representa el radio de las trayectorias y $\theta : T \to [0, 2\pi]$ es una función que representa el ángulo de las trayectorias, que tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{p} = -p, \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

para (2.1), mientras que para (2.2) tenemos la siguiente representa-

ción polar del sistema:

$$\begin{cases} \dot{p} = -p, \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 e^{-t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 \end{aligned}$$

para el primer sistema, mientras que para el segundo tenemos:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 e^{-t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + t. \end{aligned}$$

Tomemos un punto $b \neq 0$ en U con coordenadas polares (p_0, θ_0) y consideremos el tiempo requerido, τ, para ir del punto $(1, \theta_0)$ hasta el punto b a lo largo de la órbita del sistema (2.1); este tiempo solo depende de p_0 y se calcula fácilmente:

$$\tau(p_0) = -ln\, p_0$$

Ahora consideremos una órbita del sistema (2.2) que comienza en el punto $(1, \theta_0)$ y sea $a = (p_1, \theta_1)$ el punto al cual llega la órbita después del tiempo $\tau(p_0)$. Una función $a = h(b)$ que transforma $b = (p_0, \theta_0) \neq 0$ en $a = (p_1, \theta_1)$ esta dada por:

$$h : \begin{cases} p_1 = p_0 \\ \theta_1 = \theta_0 - ln\, p_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Para $b = 0$ ajustamos $a = 0$, esto es, $h(0)$. De esta manera la función que acabamos de construir transforma U en sí mismo por una rotación, cada círculo p_0=constante por un ángulo dependiente

de p_0. Este ángulo es igual a cero en $p_0 = 1$ y se incrementa a medida que $p_0 \to 0$. Esta función es continua e invertible y envía órbitas del sistema (2.1) a órbitas de (2.2) preservando la dirección. Por lo tanto estos dos sistemas son topológicamente equivalentes en U.

Una combinación de las equivalencias suave y orbital da una relación de equivalencia muy utilizada.

Definición 2.1.7. Dos sistemas $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{y} = g(y),\ y \in \mathbb{R}^n$ se llaman *suavemente orbitalmente equivalentes* si $\dot{y} = g(y)$ es equivalente suavemente a un sistema que es orbitalmente equivalente a $\dot{x} = f(x)$.

2.2. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio

Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ donde f es suave; sea A la matriz Jacobiana de f evaluada en x_0. Sean n_-, n_0, n_+ el número de valores propios de A con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.

Definición 2.2.1. Un punto de equilibrio se llama *hiperbólico* si $n_0 = 0$, esto es, si no hay valores propios en el eje imaginario. Un punto de equilibrio hiperbólico se llama *silla-hiperbólico* si $n_-, n_+ \neq 0$

Para un equilibrio x_0 introducimos los siguientes conjuntos:

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi^t x \to x_0, t \to +\infty\}$$

y

$$W^u(x_0) = \{x : \varphi^t x \to x_0, t \to -\infty\},$$

donde φ^t es el flujo asociado a $\dot{x} = f(x)$.

Definición 2.2.2. $W^s(x_0)$ se llama conjunto estable de x_0, mientras que $W^u(x_0)$ se llama conjunto inestable de x_0.

Teorema 2.2.3. (Variedad local estable) *Dado x_0 un equilibrio hiperbólico (i.e. $n_0 = 0, n_+ + n_- = n$), las intersecciones de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ con una vecindad suficientemente pequeña de x_0 contienen subvariedades suaves $W^s_{loc}(x_0)$ y $W^u_{loc}(x_0)$ de dimensión n_- y n_+ respectivamente. Además $W^s_{loc}(x_0)$ ($W^u_{loc}(x_0)$) es tangente en x_0 con T^s (T^u), donde T^s (T^u) es el espacio propio generalizado correspondiente a la unión de todos los valores propios de A con* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ *(*$\mathrm{Re}\ \lambda > 0$*).*

Globalmente los conjuntos invariantes W^s y W^u son variedades inmersas de dimensión n_- y n_+ respectivamente y tienen la mismas propiedades de suavidad que f. Teniendo esto en cuenta, llamaremos a los conjuntos W^s y W^u variedades invariantes estable e inestable de x_0 respectivamente.

El siguiente teorema da una clasifiación topológica de los puntos de equilibrio hiperbólicos.

Teorema 2.2.4. *Los retratos fase del sistema $\dot{x} = f(x)$ cerca de dos puntos de equilibrio hiperbólicos x_0 y y_0 son localmente topológicamente equivalentes si y solo si estos puntos de equilibrio tienen el mismo número de valores propios con* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ *y* $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$ *en la matriz Jacobiana de f evaluada en x_0 y y_0.*

2.3. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación

Ahora consideremos un sistema dinámico que depende de parámetros, que escribiremos de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, \alpha),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representan las variables fase y los parámetros respectivamente; consideremos el retrato fase del sistema cuando el parámetro varía. Hay 2 posibilidades: que el sistema permanezca topológicamente equivalente al sistema original o no.

Definición 2.3.1. La aparición de retratos fase no equivalentes topológicamente bajo la variación de parámetros se llama *bifurcación*.

Definición 2.3.2. Un *diagrama de bifurcación* de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica junto con los retratos fase representativos de cada estrato.

Definición 2.3.3. La *codimensión* de una bifurcación en un sistema $\dot{x} = f(x)$ es la diferencia entre la dimensión del espacio de parámetros y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.

Equivalentemente, la codimensión es el número de condiciones independientes que determinan la bifurcación.

La siguiente definición es equivalente a la definición 2.1.2 con las modificaciones necesarias debido a la dependencia del parámetro.

Definición 2.3.4. Un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2.4}$$

es equivalente topológicamente a un sistema dinámico

$$\dot{y} = g(y, \beta), y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m \tag{2.5}$$

si:

I. Existe un homeomorfismo del espacio de parámetros $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $\beta = p(\alpha)$.

II. Hay un hoemeomorfismo dependiente del parámetro del espacio fase $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y = h_\alpha(x)$ que envía órbitas del sistema (2.4) a valores del parámetro α en órbitas del sistema (2.5) a valores del parámetro $\beta = p(\alpha)$ preservando la dirección.

Al igual que la definición 2.1.2, la definición 2.3.4 puede modificarse para realizar un estudio local.

Definición 2.3.5. Dos sistemas (2.4) y (2.5) son *localmente equivalentes topológicamente* cerca del origen si existe una función $(x, \alpha) \to (h_\alpha(x), p(\alpha))$ definida en una pequeña vecindad de $(x, \alpha) = (0, 0)$ en el producto directo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y tal que:

I. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo definido en una pequeña vecindad de $\alpha = 0, p(0) = 0$.

II. $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo dependiente del parámetro definido en una pequeña vecindad U_α de $x_0, h_0(0) = 0$ y envía órbitas de (2.4) en U_α a órbitas de (2.5) en $h_\alpha(U_\alpha)$ preservando la dirección.

Sea

$$\dot{\xi} = g\left(\xi, \beta; \sigma\right),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R}^k,\ \sigma \in \mathbb{R}^l \tag{2.6}$$

un sistema simple (polinomial en ξ_i) que tiene en $\beta = 0$ un punto de equilibrio $\xi = 0$ que satisface k condiciones de bifurcación que determinan una bifurcación de codimensión k para este equilibrio. Aquí σ es un vector de los coeficientes $\sigma_i, i = 1, 2, \ldots l$, de los polinomios involucrados en (2.6). Junto con el sistema (2.6) vamos a considerar un sistema

$$\dot{x} = f\left(x, \alpha\right), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{2.7}$$

el cual tiene en $\alpha = 0$ un equilibrio $x = 0$.

Definición 2.3.6. (Forma normal topológica) El sistema (2.6) es una *forma normal topológica* para la bifurcación si cualquier sistema genérico (2.7) con equilibrio $x = 0$ que satisface las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$ es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a (2.6) para algunos valores de los coeficientes σ_i

Es necesario precisar a qué nos referimos cuando decimos un sistema *genérico*. Nos referiremos a un sistema genérico si el sistema cumple un número finito de *condiciones de genericidad*, las cuales tendrán la forma de desigualdades

$$N_i\left[f\right] \neq 0, i = 1, 2, \ldots, s$$

en las cuales cada N_i es alguna función algebraica de ciertas derivadas parciales de $f\left(x, \alpha\right)$ respecto a x y α evaluado en $(x, \alpha) = (0, 0)$;

así, un sistema dependiente de un parámetro "típico" satisface estas condiciones. Para ser exactos, el valor de σ está determinado por los valores de $N_i, i = 1, \ldots, s$. Es útil distinguir las condiciones de genericidad que están determinadas por el sistema en los valores críticos de los parámetros $\alpha = 0$, estas condiciones pueden expresarse en términos de las derivadas parciales de $f(x, 0)$ con respecto a x y evaluadas en $x = 0$ y se conocen como condiciones de *no degeneración*.

Todas las demás condiciones en las cuales las derivadas de $f(x, \alpha)$ respecto a α están involucradas se llaman condiciones de *transversalidad*. El papel de estos dos tipos de condiciones es diferente; las condiciones de que el sistema sea no degenerado garantizan que el valor de equilibrio crítico (singularidad) no es "anormal" o muy degenerado (i.e es típico en una clase de valores de equilibrio que satisfacen las condiciones de bifurcación), mientras que las condiciones de transversalidad aseguran que los parámetros despliegan esta singularidad de una forma genérica.

Si se construye una forma topológica normal, su diagrama de bifurcación tiene claramente un significado universal, ya que siempre aparece como una parte de los diagramas de bifurcación de los sistemas genéricos que exhiben la bifurcación relevante

Definición 2.3.7. (Sistema inducido) El sistema

$$\dot{y} = g(y, \beta), y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m$$

es *inducido* por el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m$$

si $g(y,\beta) = f(y, p(\beta))$, donde $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una función continua.

Definición 2.3.8. (Deformación versal) El sistema (2.6) es una *deformación versal* de la bifurcación local correspondiente si cualquier sistema (2.7) con equilibrio $x = 0$ que satisface las mismas condiciones de bifurcación y condiciones de no degeneración en $\alpha = 0$ es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a un sistema inducido por (3.12) para algunos valores de los coeficientes σ_i.

2.4. Estabilidad estructural

Hay una definición general para la distancia entre dos sistemas dinámicos.

Definición 2.4.1. La *distancia* entre

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.8}$$

y

$$\dot{x} = g(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

en una región cerrada y acotada $U \subset \mathbb{R}^n$ es un número positivo d_1 dado por:

$$d_1 = \max_{x \in U} \{ \| f(x) - g(x) \| + \| \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \| \}$$

los sistemas son ϵ- cercanos en U si $d_1 \leq \epsilon$.

Definamos un sistema estructuralmente estable como el que cumple que cualquier sistema suficientemente cercano es topolǵicamente equivalente a él.

Definición 2.4.2. Estabilidad estructural El sistema $\dot{x} = f(x)$ es *estructuralmente estable* en la región U si existe un $\epsilon > 0$ tal que para cualquier sistema $\dot{x} = g(x)$ que sea ϵ cercano al sistema original, es decir, que $d_1(f, g) < \epsilon$, se cumpla que f y g sean topológicamente equivalentes en U.

Esta definición tiene una desventaja, al considerar la región U fija, ya que incluso una pequeña perturbación del sistema haría que no fuera estructuralmente estable, por ejemplo, hay sistemas que tienen puntos de equilibrio hiperbólicos en la frontera de U o ciclos hiperbólicos que tocan la frontera y según esta definición son estructuralmente inestables, ya que bajo pequeñas perturbaciones del sistema el punto de equilibrio queda fuera de U o los ciclos quedan parcialmente fuera de U, por lo cual ya no serían topológicamente equivalentes. Hay dos formas de manejar este problema. La primera es considerar el sistema dinámico en todo el espacio fase y olvidarse de regiones. Esta manera de hacerlo es perfecta para los sistemas dinámicos definidos en variedades suaves y compactas X, en tal caso la región U en la definición (2.4.2) y también en la definición de distancia debería ser substituida por la variedad compacta X. Desafortunadamente, para los sistemas en $\mathbb{R}^n$ esto fácilmente nos conduce a complicaciones, por ejemplo, la distancia entre cualquiera de dos sistemas puede ser infinita si el supremo en d_1 se toma sobre todo $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto otra opción es seguir trabajando con regiones acotadas pero introducir otra definición de estabilidad estructural.

Definición 2.4.3. Estabilidad estructural de Andronov Un sistema (2.8) definido en una región $D \subset \mathbb{R}^n$ es *estructuralmente*

estable en el sentido de Andronov en una región $D_0 \subset D$ si para cualquier sistema (2.9) suficientemente C^1-cercano en D hay regiones $U, V \subset D, D_0 \subset D$ tal que (2.8) es topológicamente en U a (2.9) en V.

Si (2.8) es estructuralmente estable en $D_0 \subset D$, entonces es estructuralmente estable en cualquier región $D_1 \subset D_0$. Hay casos en que las definiciones (2.4.2) y (2.4.3) realmente coinciden.

Lema 2.4.4. *Si un sistema es estructuralmente estable en una región D_0 con clausura B_0 y todas sus órbitas apuntan estrictamente dentro de B_0, entonces es estrictamente estructuralmente estable en $U = D_0$.*

El siguiente teorema clásico nos da las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema dinámico en el plano sea estructuralmente estable.

Teorema 2.4.5. *Un sistema dinámico suave*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$$

es estructuralmente estable en una región $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ si y solo si:

I. Tiene un número finito de equilibrios y ciclos límites en D_0 y todos ellos son hiperbólicos

II. No hay separatrices de un punto silla regresando al mismo punto silla o conectando dos puntos sillas diferentes en D_0.

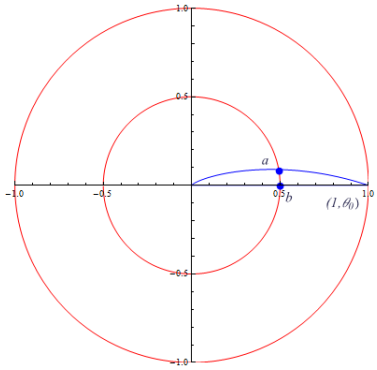


Figura 2.2: Homeomorfismo h.

Capítulo 3

Bifurcación de Hopf

3.1. Forma normal de la bifurcación de Hopf

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales dependientes de un parámetro

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \alpha x_1 - x_2 - x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \dot{x_2} = x_1 + \alpha x_2 - x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

el sistema tiene un punto de equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ para todo α con matriz jacobiana,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Vamos a introducir la variable compleja $x_1 + ix_2$. Esta variable satisface la ecuación dife-

rencial:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{x_1} + i\dot{x_2} \\ &= \alpha x_1 - x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) + i\left(x_1 + \alpha x_2 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \\ &= \alpha\left(x_1 + ix_2\right) + i\left(x_1 + ix_2\right) - \left(x_1 + ix_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right)\end{aligned}$$

la cual podemos reescribir en la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)\, z - z\,|z|^2 . \tag{3.2}$$

Finalmente, usando la representación $z = pe^{i\varphi}$, obtenemos:

$$\dot{z} = \dot{p}e^{i\varphi} + pi\dot{\varphi}e^{i\varphi}$$

lo cual implica que:

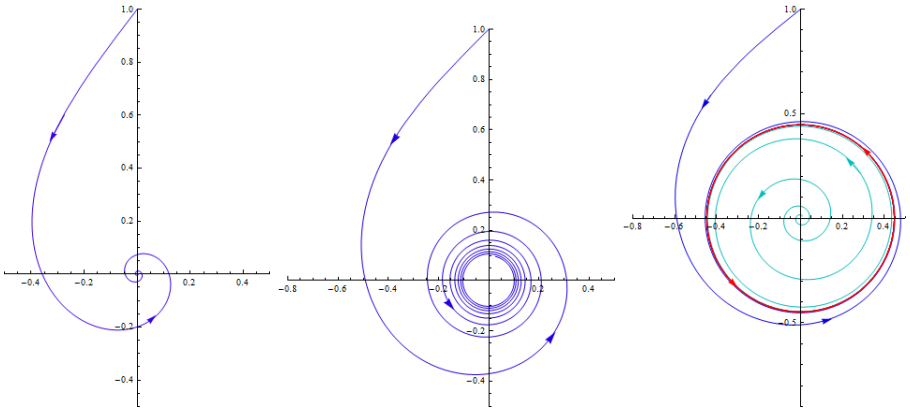
$$\begin{aligned}\dot{p}e^{i\varphi} + pi\dot{\varphi}e^{i\varphi} &= (\alpha + i)\, pe^{i\varphi} - pe^{i\varphi}\,|p|^2 \\ &= pe^{i\varphi}\left(\alpha - p^2\right) + ipe^{i\varphi}\end{aligned}$$

lo cual nos da la forma polar del sistema (3.1):

$$\begin{cases} \dot{p} &= p\left(\alpha - p^2\right), \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Las bifurcaciones del sistema se pueden estudiar fácilmente en la forma polar, ya que las ecuaciones para p y φ están desacopladas. La primera ecuación (definida solo para $p \geq 0$) solo tiene un equilibrio $p = 0$ para todo α. El equilibrio es linealmente estable para $\alpha < 0$; se mantiene estable pero no de manera lineal en $\alpha = 0$ y para $\alpha > 0$ se vuelve inestable. Además hay un punto de equilibrio $p_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ que es estable para $\alpha > 0$. La segunda ecuación describe una

rotación con velocidad constante. El equilibrio $p = 0$ es un foco estable para $\alpha < 0$ y un foco inestable para $\alpha > 0$; en el valor crítico del parámetro $\alpha = 0$ es estable no lineal y es topológicamente equivalente al foco. A veces se denomina foco débilmente atractor. Este equilibrio está rodeado por una órbita periódica única y estable; este ciclo es un círculo de radio $\sqrt{\alpha}$. Todas las órbitas con condición inicial fuera o dentro del ciclo excepto en el origen tienden a éste cuando $t \to \infty$.



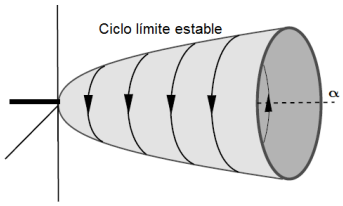
(a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha > 0$

Figura 3.1: Bifurcación hipercrítica de Andronov Hopf.

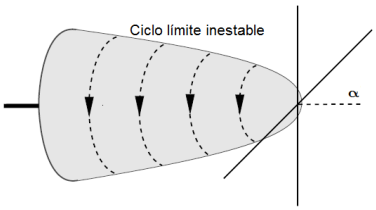
Ahora consideremos el sistema con signo contrario en los términos no lineales

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \alpha x_1 - x_2 + x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \dot{x_2} = x_1 + \alpha x_2 + x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

el cual, bajo un cambio de variable similar al del caso anterior tiene la siguiente forma compleja:



(a) Diagrama de bifurcación para el caso hipercrítico.



(b) Diagrama de bifurcación para el caso subcrítico.

Figura 3.2: Diagramas de bifurcación [4].

$$\dot{z} = (\alpha + i)\, z + z\,|z|^2 .$$

El análisis de este sistema es similar al del caso anterior; este sistema tiene un ciclo límite inestable para $\alpha < 0$ que desaparece cuando α pasa de negativo a positivo. El origen es estable para $\alpha < 0$ y es inestable para $\alpha > 0$; a diferencia del caso anterior, el equilibrio es inestable de forma no lineal en $\alpha = 0$. Esta es la bifurcación de Andronov Hopf. Esta bifurcación se llama hipercrítica cuando el ciclo existe para valores positivos de α, es decir, después de la bifurcación (i.e después de $\alpha = 0$) y es subcrítica cuando el ciclo existe antes de la bifurcación.

En ambos casos se tiene una pérdida de estabilidad en el origen en $\alpha = 0$ cuando se incrementa este parámetro. En el primer caso (con "-" antes de los términos cúbicos) el equilibrio estable es reemplazado por un ciclo límite estable de pequeña amplitud, por lo tanto el sistema permanece en una vecindad del equilibrio y tenemos una pérdida suave de estabilidad o una pérdida no catastrófica de estabilidad. En el segundo caso (con "+" antes de los términos cúbicos) la región de atracción del equilibrio está acotada por el ciclo límite inestable, el cual se contrae a medida que el parámetro se aproxima a su valor crítico, y desaparece;, de esta manera, el sistema es expulsado de la vecindad del equilibrio, que produce una fuerte o catastrófica pérdida de estabilidad. Si el sistema pierde su estabilidad suavemente, es controlable, es decir, si reajustamos el parámetro a valores negativos, el sistema regresa al equilibrio estable. En cambio, si el sistema pierde su estabilidad de manera catastrófica, incluso reajustando el parámetro a valores negativos puede ser que el sistema no regrese al equilibrio estable, ya que podría no hallarse en la región de atracción del punto equilibrio.

Vamos a agregar algunos términos de orden superior y a escribir el sistema (3.1) en forma de vectores

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O\left(\|x^4\|\right), \quad (3.5)$$

donde $O\left(\|x^4\|\right)$ son términos que pueden depender suavemente de α.

Lema 3.1.1. *El sistema (3.5) es localmente equivalente topológicamente cerca del origen al sistema (3.1).*

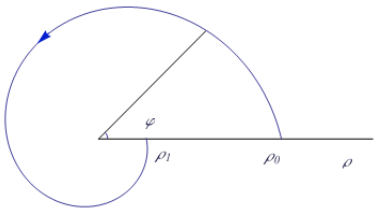


Figura 3.3: Función de Poincaré para la bifurcación de Hopf.

Para probar este lema vamos a reescribir el sistema en coordenadas complejas y probar el siguiente lema equivalente

Lema 3.1.2. *El sistema*

$$\dot{z} = (\alpha + i) z - z |z|^2 + O\left(|z|^4\right) \tag{3.6}$$

es localmente equivalente topológicamente cerca del origen al sistema

$$\dot{z} = (\alpha + i) z - z |z|^2 . \tag{3.7}$$

Demostración. Realizaremos esta demostración por pasos.

Paso 1 *(Existencia y unicidad del ciclo)* Escribiendo el sistema (3.6) en coordenadas polares (ϱ, φ):

$$\begin{cases} \dot{\varrho} = \varrho (\alpha - \varrho^2) + \Phi (\varrho, \varphi) , \\ \dot{\varphi} = 1 + \Psi (\varrho, \varphi) , \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $\Phi = O\left(|\varrho|^4\right)$, $\Psi = O\left(|\varrho|^3\right)$, la dependencia de α de estas funciones no está indicada por simplificación. Una órbita de (3.8) que empieza en $(\varrho, \varphi) = (\varrho_0, 0)$ tiene la siguiente representación (v. Figura (3.3)): $\varrho = \varrho (\varphi; \varrho_0) , \varrho_0 = \varrho (0; \varrho_0)$, donde ϱ satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho (\alpha - \varrho^2) + \Phi}{1 + \Psi} = \varrho \left(\alpha - \varrho^2\right) + R (\varrho, \varphi) , \tag{3.9}$$

donde $R = O\left(|\varrho|^4\right)$. Nótese que la transición de (3.8) a (3.9) es equivalente a la introducción de una nueva parametrización en la cual $\dot{\varphi} = 1$, lo cual implica que el regreso del tiempo a la mitad del eje $\varphi = 0$ es la misma para todas las órbitas que empiezan en este eje con $\varrho_0 > 0$, ya que $\varrho(\varphi; 0) \equiv 0$, podemos escribir la expansión de Taylor para $\varrho(\varphi; 0)$,

$$\varrho = u_0 + u_1(\varphi)\,\varrho_0 + u_2(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3(\varphi)\,\varrho_0^3 + O\left(|\varrho_0|^4\right) \tag{3.10}$$

donde u_i es la i-ésima derivada de ϱ evaluada en $\varphi = 0$. Sustituyendo (3.10) en el lado izquierdo de (3.9) tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d\varrho}{d\varphi} &= \frac{d\left[u_1(\varphi)\,\varrho_0 + u_2(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3(\varphi)\,\varrho_0^3 + O\left(|\varrho_0|^4\right)\right]}{d\varphi} \\ &= u_1\prime(\varphi)\,\varrho_0 + u_2\prime(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3\prime(\varphi)\,\varrho_0^3 + O\left(|\varrho_0|^4\right)\end{aligned}$$

mientras que en el lado derecho tenemos que:

$$\begin{aligned}\varrho\left(\alpha - \varrho^2\right) + R(\varrho, \varphi) = \alpha\left[u_1(\varphi)\,\varrho_0 + u_2(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3(\varphi)\,\varrho_0^3 + \right. \\ \left. O\left(|\varrho_0|^4\right) - \left[u_1(\varphi)\,\varrho_0 + u_2(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3(\varphi)\,\varrho_0^3 + O\left(|\varrho_0|^4\right)\right]^2 + \right.\end{aligned}$$

$$R\left(u_1(\varphi)\,\varrho_0 + u_2(\varphi)\,\varrho_0^2 + u_3(\varphi)\,\varrho_0^3 + O\left(|\varrho_0|^4\right), \varphi\right)$$

y resolviendo las ecuaciones diferenciales lineales resultantes en las correspondientes potencias de p_0 con condiciones iniciales $u_1(0) = 1,\ u_2(0) = u_3(0) = 0$ tenemos que:

$$u_1(\varphi) = e^{\alpha\varphi},\ u_2(\varphi) = 0, u_3(\varphi) = e^{\alpha\varphi}\frac{1 - e^{2\alpha\varphi}}{2\alpha}.$$

Nótese que estas expresiones son independientes del término $R(\varrho, \varphi)$, por lo tanto el mapeo del primer retorno $\varrho_0 \mapsto \varrho_1 = \varrho(2\pi, \varrho_0)$ tiene

la forma:

$$\varrho_1 = e^{2\pi\alpha}\varrho_0 - e^{2\pi\alpha}\left[2\pi + O\left(\alpha\right)\right]\varrho_0^3 + O\left(\varrho_0^4\right) \tag{3.11}$$

para todo $R = O\left(\varrho^4\right)$. El mapeo (3.11)resulta fácilmente analizable para ϱ y $\|\alpha\|$ suficientemente pequeños. Hay una vecindad del origen en la cual el mapeo tiene un solo punto fijo trivial para $\alpha < 0$ pequeño, y un punto de equilibrio extra $\varrho_0^{(0)} = \sqrt{\alpha} + \ldots$ para $\alpha > 0$ pequeño (Figura 3.4). La estabilidad de los puntos fijos también se obtiene fácilmente de (3.11). Tomando en cuenta que un punto de equilibrio positivo del mapeo corresponde a un ciclo límite del sistema, concluimos que el sistema (3.8) (o (3.6)) con cualesquiera términos $O\left(|z|^4\right)$ tiene un único ciclo límite estable que se bifurca del origen y existe para $\alpha > 0$ como en el sistema (3.7). Por lo tanto, los términos de orden superior no afectan la bifurcación del ciclo límite en una vecindad de $z = 0$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

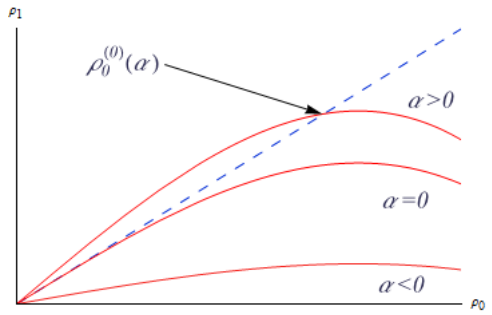


Figura 3.4: Punto de equilibrio para el mapeo de regreso.

Paso 2 *(Construcción del homeomorfismo)* La existencia y unicidad establecidas del ciclo límite es suficiente para las aplicaciones, sin embargo, es necesario un trabajo adicional para probar la equivalencia topológica de los retratos fase.

Sea $\epsilon > 0$ y fijando $|\alpha| < \epsilon$, ambos sistemas (3.6) y (3.7) tienen un ciclo límite en alguna vecindad del origen. Supongamos que se realiza la reparametrización en el sistema (3.6) a partir del tiempo constante de retorno 2π. Además, aplicando un escalamiento lineal de coordenadas en el sistema (3.6) tal que el punto de interseción del ciclo y el semieje horizontal se obtenga en $x^1 = \sqrt{\alpha}$.

Vamos a definir la función $z \mapsto \tilde{z}$ mediante la siguiente construcción: Tomando un punto $z = x_1 + ix_2$ y encontrando los valores (ϱ_0, τ_0), donde τ_0 es el mínimo tiempo requerido para que una órbita del sistema (3.7) se aproxime al punto z empezando del semieje horizontal con $\varrho = \varrho_0$. Ahora tomamos un punto en este eje con $\varrho = \varrho_0$ y construimos una órbita del sistema (3.6) en el intervalo $[0, \tau_0]$ empezando en este punto. Denotemos el punto resultante por $\tilde{z} = \tilde{x_1} + i\tilde{x_2}$; fijamos $\tilde{z} = 0$ para $z = 0$ (v. Figura 3.5). La función construida es un homeomorfismo que, para $\alpha > 0$, envía órbitas del sistema (3.7) a alguna vecindad del origen en órbitas de (3.6) preservando su dirección. El caso $\alpha < 0$ se puede considerar de la misma forma sin el **reescalamiento** de coordenadas.

□

3.2. Bifurcación genérica de Hopf

Consideremos un sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \; x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

con f una función suave, y que tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm iw_0, \;\; w_0 > 0$. Por el teorema de

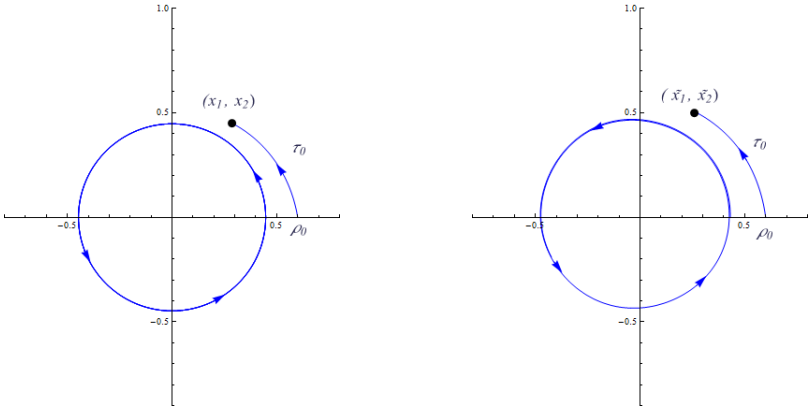


Figura 3.5: Construcción del homeomorfismo.

la función implícita, el sistema tiene un único equilibrio $x_0(\alpha)$ en alguna vecindad del origen para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que $\lambda = 0$ no es un valor propio de la matriz jacobiana. Podemos realizar un cambio de coordenadas para trasladar este equilibrio al origen, por lo tanto podemos asumir que $x = 0$ es el punto de equilibrio para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Así, el sistema puede escribirse como:

$$\dot{x} = A(\alpha)\, x + F(x, \alpha), \tag{3.12}$$

donde F es una función vectorial cuyas componentes $F_{1,2}$ tienen expansiones de Taylor en x empezando con al menos los términos cuadráticos, $F = O(\|x^2\|)$. La matriz jacobiana $A(\alpha)$ puede escribirse como:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

con funciones suaves de α como sus elementos. Sus valores propios

son las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

donde $\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = trA(\alpha)$ y $\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)\, d(\alpha) - c(\alpha)\, b(\alpha) = detA(\alpha)$, así

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)}\right)$$

la condición de la bifurcación de Hopf implica que $\sigma(0) = 0$ y $\Delta(0) = w_0^2 > 0$. Para un $|\alpha|$ suficientemente pequeño podemos introducir

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha),\ w(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$$

y por tanto obtener la siguiente representación para los valores propios:

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha),\ \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)},$$

donde $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha),\ \mu(0) = 0$ y $w(0) = w_0 > 0$.

Lema 3.2.1. *Con la introducción de una variable compleja z, el sistema (3.12) puede ser escrito para $|\alpha|$ suficientemente pequeño como una sola ecuación*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)\, z + g(z, \overline{z}, \alpha), \tag{3.13}$$

donde $g = O\left(|z|^2\right)$ es una función suave de $(z, \overline{z}, \alpha)$

Demostración. Sea $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ correspondiente al valor propio $\lambda(\alpha)$, i.e. $A(\alpha)\ q(\alpha) = \lambda(\alpha)\, q(\alpha)$, y consideremos $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio de la matriz transpuesta, i.e. $A^T(\alpha)$ correspondiente al valor propio $\overline{\lambda(\alpha)}$, $A^T(\alpha)\, p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)} p(\alpha)$. Supongamos sin pérdida de

generalidad que $< q(\alpha), p(\alpha) >= 1$, donde $< \bullet, \bullet >$ es el producto interno de $\mathbb{C}^2$. Cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado de manera única para cualquier α pequeño como

$$x = zq(\alpha) + \overline{zq}(\alpha) \tag{3.14}$$

para algún complejo z, siempre que se especifiquen los vectores propios. Podemos determinar z de la siguiente manera:

$$z =< x, p(\alpha) >$$

en efecto, tomando producto escalar en ambos lados de (3.14) tenemos

$$\begin{aligned} < x, p(\alpha) > &= < zq(\alpha) + \overline{zq}(\alpha), p(\alpha) > \\ &= z < q(\alpha), p(\alpha) > + \overline{z} < \overline{q}(\alpha), p(\alpha) > \\ &= z + \overline{z} < \overline{q}(\alpha), p(\alpha) > \end{aligned}$$

Solo resta ver que $< \overline{q}(\alpha), p(\alpha) >= 0$, nótese que:

$$\begin{aligned} < \overline{q}(\alpha), p(\alpha) > &= < \tfrac{1}{\overline{\lambda}} A\overline{q}(\alpha), p(\alpha) > \\ &= \tfrac{1}{\overline{\lambda}} < A\overline{q}(\alpha), p(\alpha) > \\ &= \tfrac{1}{\overline{\lambda}} < \overline{q}(\alpha), A^T p(\alpha) > \\ &= \tfrac{1}{\overline{\lambda}} < \overline{q}(\alpha), \overline{\lambda} p(\alpha) > \\ &= \tfrac{\lambda}{\overline{\lambda}} < \overline{q}(\alpha), p(\alpha) > \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\right) < \overline{q}(\alpha), p(\alpha) >$$

dado que $\overline{\lambda} \neq \lambda$ para $\|\alpha\|$ suficientemente pequeño, entonces $< \overline{q}(\alpha), p(\alpha) >= 0$. Así, tomando el producto interno en ambos lados

de (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{z} =< \dot{x}, p(\alpha) > &= < A(\alpha) x + F(x,\alpha), p(\alpha) > \\ &= < A(\alpha) x, p(\alpha) > + < F(x,\alpha), p(\alpha) > \end{aligned}$$

haciendo el cambio (3.14) en $< A(\alpha) x, p(\alpha) >$ tenemos que

$$\dot{z} = \lambda(\alpha) z + < F(x,\alpha), p(\alpha) >$$

y finalmente, si hacemos $g(z,\overline{z},\alpha) =< F(x,\alpha), p(\alpha) >$, entonces

$$\dot{z} = \lambda(\alpha) z + g(z,\overline{z},\alpha).$$

□

No es necesario que g sea una función analítica de z (i.e. independiente de $\overline{z}$), así que vamos a escribir g en serie de Taylor en 2 variables complejas

$$g(z,\overline{z},\alpha) = \sum_{k+l\geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \overline{z}^l,$$

donde $g_{kl} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \overline{z}^l} < F(zq(\alpha) + \overline{z}\,\overline{q}(\alpha), \alpha), p(\alpha) >|_{z=0}$

Supongamos que en $\alpha = 0$ la función $F(x,\alpha)$ se puede representar como

$$F(x,0) = \frac{1}{2} B(x,x) + \frac{1}{6} C(x,x,x) + O\left(\|x\|^4\right),$$

donde $B(x,y)$ y $C(x,y,u)$ son funciones vectoriales simétricas y multilineales de $x, y, u \in \mathbb{R}^2$, desarrollando tenemos

$$B_i(x,y) = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 F_i(\xi,0)}{\partial \xi_j, \partial \xi_k} |_{\xi=0} \quad x_j, y_k \quad i = 1,2$$

y

$$C_i(x,y,u) = \sum_{j,k,l=1}^{2} \frac{\partial^3 F_i(\xi,0)}{\partial \xi_j, \partial \xi_k, \partial \xi_l} |_{\xi=0} \quad x_j, y_k, u_l \quad i = 1,2$$

Así, realizando el cambio (3.14) en $B(x,y)$ tenemos que

$$B\left(zq\left(\alpha\right)+\overline{zq}\left(\alpha\right),zq\left(\alpha\right)+\overline{zq}\left(\alpha\right)\right)=z^{2}B\left(q,q\right)+2z\overline{z}B\left(q,\overline{q}\right)+\overline{z}^{2}B\left(\overline{q},\overline{q}\right)$$

donde $q=q\left(0\right)$, por lo tanto, los coeficientes de Taylor $g_{k,l}$, $k+l=2$ de los términos cuadráticos de $g\left(z,\overline{z},\alpha\right)$ podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$g_{2,0}=<B\left(q,q\right),p>,\ g_{1,1}=<B\left(q,\overline{q}\right),p>,\ g_{0,2}=<B\left(\overline{q},\overline{q}\right),p>$$

y similarmente,

$$g_{2,1}=<C\left(q,q,\overline{q}\right),p>.$$

Lema 3.2.2. *La ecuación*

$$\dot{z}=\lambda z+\frac{g_{2,0}}{2}z^{2}+g_{1,1}z\overline{z}+\frac{g_{0,2}}{2}\overline{z}^{2}+O\left(\left|z\right|^{3}\right),$$

donde $\lambda=\lambda\left(\alpha\right)=\mu\left(\alpha\right)+iw\left(\alpha\right),\ \mu\left(0\right)=0,w\left(0\right)=x_{0}>0$ *y* $g_{i,j}=g_{i,j}\left(\alpha\right)$ *puede transformarse mediante un cambio de coordenadas compleja, invertible y dependiente del parámetro*

$$z=w+\frac{h_{2,0}}{2}w^{2}+h_{1,1}w\overline{w}+\frac{h_{0,2}}{2}\overline{w}^{2}$$

$\forall\left|\alpha\right|$ *suficientemente pequeño en una ecuación sin términos cuadráticos:*

$$\dot{w}=\lambda w+O\left(\left|w\right|^{3}\right).$$

Demostración. El cambio inverso de variables está dado por la expresión

$$w=z-\frac{h_{2,0}}{2}z^{2}+h_{1,1}z\overline{z}-\frac{h_{0,2}}{2}\overline{z}^{2}+O\left(\left|z\right|^{3}\right);$$

derivando esta última expresión y utilizando la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \dot{z} - h_{2,0}z\dot{z} - h_{1,1}\left(\dot{z}\overline{z} + z\dot{\overline{z}}\right) - h_{0,2}\dot{\overline{z}}\dot{z} \\ &= \lambda z + \left(\tfrac{g_{2,0}}{2} - \lambda h_{2,0}\right)z^2 + \left(g_{1,1} - \lambda h_{1,1} - \overline{\lambda}h_{1,1}\right)z\overline{z} + \left(\tfrac{g_{0,2}}{2} - \overline{\lambda}h_{0,2}\right)\overline{z}^2 + \cdots \\ &= \lambda w + \tfrac{1}{2}\left(g_{2,0} - \lambda h_{2,0}\right)w^2 + \left(g_{1,1} - \overline{\lambda}h_{1,1}\right)w\overline{w} + \tfrac{1}{2}\left(g_{0,2} - \left(2\overline{\lambda} - \lambda\right)h_{0,2}\right)\overline{w}^2 \\ &\quad + O\left(|w|^3\right).\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variables

$$h_{2,0} = \frac{g_{2,0}}{\lambda},\ h_{1,1} = \frac{g_{1,1}}{\overline{\lambda}},\ h_{0,2} = \frac{g_{0,2}}{2\overline{\lambda} - \lambda}$$

se eliminarán todos los términos cuadráticos. Esta sustitución se puede realizar porque los denominadores son distintos de cero para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que $\lambda(0) = iw_0$ con $w_0 > 0$ $\square$

Lema 3.2.3. *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{3,0}}{6}z^3 + \frac{g_{2,1}}{2}z^2\overline{z} + \frac{g_{1,2}}{2}z\overline{z}^2 + \frac{g_{0,3}}{6}\overline{z}^3 + O\left(|z|^4\right)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0, w(0) = x_0 > 0$ *y* $g_{i,j} = g_{i,j}(\alpha)$ *puede ser transformada por un cambio de coordenadas complejas, invertible y dependiente del parámetro*

$$z = w + \frac{h_{3,0}}{6}w^3 + \frac{h_{2,1}}{2}w^2\overline{w} + \frac{h_{1,2}}{2}w\overline{w}^2 + \frac{h_{0,3}}{6}\overline{w}^3$$

en una ecuación de un solo término cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2\overline{w} + O\left(|w|^4\right)$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demostración. La transformación inversa está dada por:

$$w = z - \frac{h_{3,0}}{6}z^3 - \frac{h_{2,1}}{2}z^2\overline{z} - \frac{h_{1,2}}{2}z\overline{z}^2 - \frac{h_{0,3}}{6}\overline{z}^3 + O\left(|z|^4\right)$$

de donde derivando y utilizando la regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \tfrac{h_{3,0}}{2} z^2 \dot{z} - \tfrac{h_{2,1}}{2} \left(2z\dot{z}\overline{z} + z^2 \dot{\overline{z}} \right) - \tfrac{h_{1,2}}{2} \left(\dot{z}\overline{z}^2 + 2z\overline{z}\dot{\overline{z}} \right) - \tfrac{h_{0,3}}{2} \overline{z}^2 \dot{\overline{z}} + \cdots \\
&= \lambda z + \left(\tfrac{g_{3,0}}{6} - \lambda \tfrac{h_{3,0}}{2} \right) z^3 + \left(\tfrac{g_{2,1}}{2} - \lambda h_{2,1} - \overline{\lambda} \tfrac{h_{2,1}}{2} \right) z^2 \overline{z} \\
&\quad + \left(\tfrac{g_{1,2}}{2} - \lambda \tfrac{h_{1,2}}{2} - \overline{\lambda} h_{1,2} \right) z\overline{z}^2 + \left(\tfrac{g_{0,3}}{6} - \overline{\lambda} \tfrac{h_{0,3}}{2} \right) \overline{z}^3 + \cdots \\
&= \lambda w + \tfrac{1}{6} \left(g_{3,0} - 2\lambda h_{3,0} \right) w^3 + \tfrac{1}{2} \left(g_{2,1} - \left(\lambda + \overline{\lambda} \right) h_{2,1} \right) w^2 \overline{w} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \left(g_{1,2} - 2\overline{\lambda} h_{1,2} \right) w\overline{w}^2 + \tfrac{1}{6} \left(g_{0,3} + \left(\lambda - 3\overline{\lambda} \right) h_{0,3} \right) \overline{w}^3 \\
&\quad + O\left(|w|^4 \right).
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variables

$$h_{3,0} = \frac{g_{3,0}}{2\lambda},\ h_{1,2} = \frac{g_{1,2}}{2\overline{\lambda}},\ h_{0,3} = \frac{g_{0,3}}{3\overline{\lambda} - \lambda}$$

se eliminan todos los términos cúbicos excepto el término $w^2\overline{w}$. Esto se puede realizar ya que todos los denominadores son diferentes de cero para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Uno podría tratar de eliminar el término $w^2\overline{w}$ haciendo $h_{2,1} = \frac{g_{2,1}}{\lambda + \overline{\lambda}}$. Esto es posible para $\alpha \neq 0$, pero el denominador se anula en $\alpha = 0$; para obtener una transformación dependiente suavemente de α haremos $h_{2,1} = 0$, con lo cual resulta que $c_1 = \frac{g_{2,1}}{2}$. El término cúbico $w^2\overline{w}$ es llamado término resonante. □

Lema 3.2.4. ***(Forma normal de Poincaré para la bifurcación de Hopf)*** *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{k,l} z^k \overline{z}^l + O\left(|z|^4 \right),$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$ *y* $g_{i,j} = g_{i,j}(\alpha)$ *se puede transformar por un cambio de coordenadas invertible y dependiente del parámetro*

$$z = w + \frac{h_{2,0}}{2} w^2 + h_{1,1} w\overline{w} + \frac{h_{0,2}}{2} \overline{w}^2 + \frac{h_{3,0}}{6} w^3 + \frac{h_{1,2}}{2} w\overline{w}^2 + \frac{h_{0,3}}{6} \overline{w}^3 \quad (3.15)$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño en una ecuación con solo el término cúbico resonante

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + O\left(|w|^4\right), \tag{3.16}$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demostración. Se sigue de los lemas anteriores. Primero realizamos la transformación

$$z = w + \frac{h_{2,0}}{2} w^2 + h_{1,1} w\overline{w} + \frac{h_{0,2}}{2} \overline{w}^2 \tag{3.17}$$

con $h_{2,0} = \frac{g_{2,0}}{\lambda}$, $h_{1,1} = \frac{g_{1,1}}{\overline{\lambda}}$, $h_{0,2} = \frac{g_{0,2}}{2\overline{\lambda} - \lambda}$ definidos en el lema (3.2.2), esto cancela los términos cuadráticos, pero cambia los términos cúbicos; realizando posteriormente el cambio de coordenadas del lema (3.2.3) eliminamos todos los términos cúbicos excepto el término resonante. □

De esta forma solo necesitamos calcular el coeficiente c_1 en términos de la ecuación dada en el lema anterior. Podemos realizar estos cálculos y seguir el mismo camino que en (3.2.2) o en (3.2.3), pero esto implicaría encontrar la transformación inversa del cambio de variables (3.17), sin embargo, hay otra forma de obtener este coeficiente evitando esta transformación inversa explícitamente. En efecto, hay dos formas de expresar $\dot{z}$ en términos de w y $\overline{w}$, uno de ellos es sustituir (3.17) en la ecuación dada en el lema. La otra consiste en derivar (3.17)

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{2,0} w\dot{w} + h_{1,1}\left(\dot{w}\overline{w} + \dot{\overline{w}} w\right) + h_{0,2}\dot{\overline{w}}\overline{w}$$

y después sustituir $\dot{w}$ y $\dot{\overline{w}}$ usando (3.16). Igualando los coeficientes

de $w^2\overline{w} = w\,|w|$ tenemos que

$$c_1 = \frac{g_{2,0}g_{1,1}\left(2\lambda + \overline{\lambda}\right)}{2\,|\lambda|^2} + \frac{|g_{1,1}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{0,2}|^2}{2\left(2\lambda - \overline{\lambda}\right)} + \frac{g_{2,1}}{2}$$

esta fórmula nos refleja la dependencia de c_1 de α si recordamos que λ y $g_{i,j}$ son funciones suaves del parámetro. En el valor de la bifurcación $\alpha = 0$ la ecuación se reduce a

$$c_1(0) = \frac{i}{2w_0}\left(g_{2,0}g_{1,1} - 2\,|g_{1,1}|^2 - \frac{1}{3}\,|g_{0,2}|^2\right) + \frac{g_{2,1}}{2}.$$

Lema 3.2.5. *Consideremos la ecuación*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))\,w + c_1(\alpha)\,w\,|w|^2 + O\left(|w|^4\right),$$

donde $\mu(0) = 0$ *y* $\omega(0) = \omega_0 > 0$. *Supongamos que* $\mu\prime(0) \neq 0$ *y* $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$ *mediante una transformación lineal de coordenadas dependiente del parámetro, un rescalamiento del tiempo y una reparametrización del tiempo no lineal se puede transformar en una ecuación de la forma*

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)\,u + su\,|u|^2 + O\left(|u|^4\right),$$

donde u *es una nueva coordenada compleja y* θ, β *son el nuevo tiempo y parámetro respectivamente y* $s = signo\ \operatorname{Re} c_1(0) = \pm 1$

Demostración. **Paso 1** (Escalamiento lineal del tiempo) Introduciendo la nueva variable del tiempo $\tau = \omega(\alpha)\,t$ la dirección del tiempo se preserva, ya que $\omega(\alpha) > 0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, así

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)\,w + d_1(\beta)\,w\,|w|^2 + O\left(|w|^4\right),$$

donde $\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}$, $d_1(\beta) = \frac{c_1(\beta(\alpha))}{\omega(\beta(\alpha))}$. Podemos considerar a β como un nuevo parámetro porque:

$$\beta(0) = 0 \text{ y } \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)} \neq 0$$

y por lo tanto el teorema de la función inversa garantiza la existencia local y suavidad de α como función de β. Nótese que $d_1(\beta)$ es complejo.

Paso 2 (Reparametrización del tiempo no lineal) Cambiando la parametrización del tiempo a lo largo de las órbitas mediante la introducción del nuevo tiempo $\theta = \theta(\tau, \beta)$ donde

$$d\theta = \left(1 + e_1(\beta)|w|^2\right) d\tau$$

con $e_1 = \operatorname{Im} d_1(\beta)$. El cambio del tiempo es una transformación parecida a la identidad en una pequeña vecindad del origen. Usando esta nueva definición del tiempo obtenemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i) w + l_1(\beta) w |w|^2 + O\left(|w|^4\right),$$

donde $l_1(\beta) = \operatorname{Re} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ es real y $l_1(0) = \frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\omega(0)}$.

Paso 3 (Escalamiento lineal de coordenadas) Finalmente vamos a introducir una nueva variable compleja u:

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

lo cual es posible debido a que $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$ y así $l_1(0) \neq 0$, de este modo la ecuación toma la forma requerida

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= (\beta + i) u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u |u|^2 + O\left(|u|^4\right) \\ &= (\beta + i) u + su|u|^2 + O\left(|u|^4\right) \end{aligned}$$

con $s = signo\, l_1(0) = signo \operatorname{Re} c_1(0)$. □

Definición 3.2.6. La función real $l_1(\beta)$ es el *primer coeficiente de Liapunov.*

Se sigue que el primer coeficiente de Liapunov en $\beta = 0$ se puede calcular mediante la fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0} \operatorname{Re}\left(ig_{2,0}g_{1,1} + w_0 g_{2,1}\right). \tag{3.18}$$

Teorema 3.2.7. *Supongamos que un sistema bidimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

con f suave tiene $\forall\,|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2} = (\alpha) = \mu(\alpha) \pm iw(\alpha)$$

donde $w(0) = w_0 > 0,\ \mu(0) = 0$ si satisface las siguientes condiciones:

(B.1) *$l_1(0) \neq 0$ donde l_1 es el primer coeficiente de Liapunov*

(B.2) *$\mu\prime(0) \neq 0$*

Mediante un cambio de coordenadas, de parámetros y una reparametrización del tiempo que transforma el sistema en

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm \left(y_1^2 + y_2^2\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O\left(\|y\|^4\right).$$

Usando el lema (3.1.1) podemos eliminar los términos de $O(\|y\|^4)$ y finalmente llegar al siguiente resultado general.

Teorema 3.2.8. ***(Forma normal topológica para la bifurcación de Hopf)*** *Cualquier sistema genérico bidimensional que*

depende de un parámetro

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

que tiene en $\alpha = 0$ *el equilibrio* $x = 0$ *con valores propios*

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i w_0, \;\; w_0 > 0$$

es localmente equivalente topológicamente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm \left(y_1^2 + y_2^2\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de genericidad asumidas en el teorema (3.2.8) son la condición de no degeneración **(B.1)** y la condición de transversalidad **(B.2)** del teorema (3.2.7).

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Modelo depredador presa

Ejemplo 4.1.1. Veamos un ejemplo de esta bifurcación en un modelo depredador-presa perteneciente a la dinámica de poblaciones.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= rx_1(1-x_1) - \tfrac{cx_1x_2}{\alpha+x_1}, \\ \dot{x_2} &= -dx_2 + \tfrac{cx_1x_2}{\alpha+x_1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aquí x_1 y x_2 son las cifras de población a escala, y r, c, d y α son parámetros que caracterizan el comportamiento de las poblaciones aisladas y su interacción. Consideremos α como un parámetro de control y asumamos que $c > d$. Para simplificar los cálculos mas adelante vamos a considerar un sistema polinomial que tiene para $x_1 > -\alpha$ las mismas órbitas que el original, es decir, vamos a considerar un sistema orbitalmente equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = rx_1(\alpha+x_1)(1-x_1) - cx_1x_2, \\ \dot{x_2} = -\alpha dx_2 + (c-d)x_1x_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Este sistema se obtiene al multiplicar ambos lados del sistema original por la función $(\alpha + x_1)$ e introducir una nueva variable de tiempo τ por $dt = (\alpha + x_1)\, d\tau$. El sistema (4.2) tiene un equilibrio no trivial

$$E_0 = \left(\frac{\alpha d}{c-d}, \frac{r\alpha}{c-d}\left[1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right]\right)$$

La matriz jacobiana evaluada en este equilibrio es

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha r d(c+d)}{(c-d)^2}\left[\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right] & -\frac{\alpha c d}{c-d} \\ \frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d} & 0 \end{pmatrix}$$

y así

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\alpha r d(c+d)}{2(c-d)^2}\left[\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right].$$

Tenemos que $\mu(\alpha_0) = 0$ para

$$\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$$

más aun

$$w^2(\alpha_0) = \frac{rc^2 d(c-d)}{(c+d)^3} > 0. \tag{4.3}$$

Por lo tanto en $\alpha = \alpha_0$ el equilibrio E_0 tiene valores propios $\lambda_{1,2}(\alpha_0) = \pm i w(\alpha_0)$ y tiene lugar la bifurcación de Hopf. El equilibrio es estable para $\alpha > \alpha_0$ e inestable para $\alpha < \alpha_0$. Nótese que el valor critico de α corresponde al paso de la recta definida por $\dot{x_2} = 0$ a través del máximo de la curva definida por $\dot{x_1} = 0$. Así, si la recta $\dot{x_2} = 0$ está a la derecha del máximo, el punto es estable, en tanto que si la recta está a la izquierda, el punto es inestable. Para poder aplicar el teorema de la forma normal para el análisis de la bifurcación de Hopf necesitamos verificar que se cumplan las condiciones de genericidad del teorema (3.2.7). La condición de transversalidad

(**B.2**) es fácil de verificar ya que:

$$\mu\prime\left(\alpha_0\right)=\frac{\alpha_0 rd\left(c+d\right)}{2\left(c-d\right)^2}<0.$$

Para calcular el primer coeficiente de Liapunov, fijemos el parámetro α en su valor crítico α_0. En $\alpha=\alpha_0$ el equilibrio no trivial E_0 tiene coordenadas

$$x_1^{(0)}=\frac{d}{c+d},\ \ x_2^{(0)}=\frac{rc}{\left(c+d\right)^2}.$$

Trasladando al origen de coordenadas este equilibrio, por el cambio de variables

$$\begin{cases} x_1=x_1^{(0)}+\xi_1, \\ x_2=x_2^{(0)}+\xi_2 \end{cases}$$

transforma el sistema (4.2) en

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} &= -\frac{cd}{c+d}\xi_2-\frac{rd}{c+d}\xi_1^2-c\xi_1\xi_2-r\xi_1^3\equiv F_1\left(\xi_1,\xi_2\right), \\ \dot{\xi_2} &= \frac{cr\left(c-d\right)}{\left(c+d\right)^2}\xi_1+\left(c-d\right)\xi_1\xi_2\equiv F_2\left(\xi_1,\xi_2\right). \end{aligned}$$

Este sistema se puede representar como

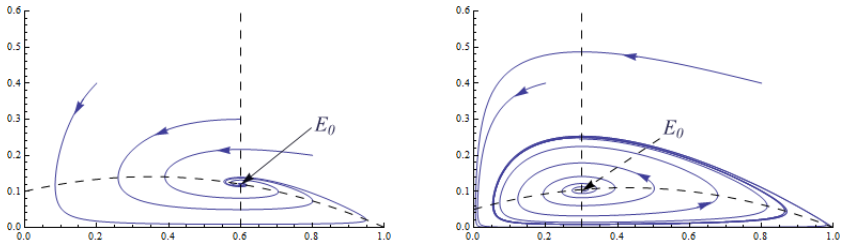
$$\dot{\xi}=A\xi+\frac{1}{2}B\left(\xi,\xi\right)+\frac{1}{6}C\left(\xi,\xi,\xi\right),$$

donde $A=A\left(\alpha_0\right)$ y las funciones multilineales B y C toman en los vectores planos $\xi=\left(\xi_1,\xi_2\right)^T$, $\eta=\left(\eta_1,\eta_2\right)^T$ y $\varsigma=\left(\varsigma_1,\varsigma_2\right)^T$ los valores

$$B\left(\xi,\eta\right)=\begin{pmatrix} -\frac{2rd}{(c+d)}\xi_1\eta_1-c\left(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1\right) \\ \left(c-d\right)\left(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1\right) \end{pmatrix}$$

y

$$C\left(\xi,\eta,\varsigma\right)=\begin{pmatrix} -6r\xi_1\eta_1\varsigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



(a) $\alpha > \alpha_0$ (b) $\alpha < \alpha_0$

Figura 4.1: Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa.

Escribiendo la matriz $A(\alpha_0)$ en la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{w^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix},$$

donde w^2 se determina por la fórmula (4.3). Los vectores complejos p y q:

$$q \sim \begin{pmatrix} cd \\ -iw(c+d) \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} w(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}$$

son los vectores propios:

$$Aq = iwq, \quad A^T p = -iwp.$$

Para la normalización $< p, q >= 1$ podemos tomar, por ejemplo

$$q = \begin{pmatrix} cd \\ -iw(c+d) \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2wcd(c+d)} \begin{pmatrix} w(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hacer los cálculos

$$g_{2,0} =< p, B(q,q) >= \frac{cd(c^2 - d^2 - rd) + iwc(c+d)^2}{(c+d)}$$

$$g_{1,1} =< p, B(q,\overline{q}) >= -\frac{rcd^2}{(c+d)}, \quad g_{2,1} =< p, C(q,q,\overline{q}) >= -3rc^2d^2$$

y calcular el primer coeficiente de Liapunov por la fórmula (3.18)

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{2w^2}\mathrm{Re}\left(ig_{2,0}g_{1,1} + wg_{2,1}\right) = -\frac{rc^2d^2}{w} < 0.$$

Es claro que $l_1(\alpha_0) < 0$ para todas las combinaciones de los parámetros fijos; se cumple la condición de no degeneración (**B.1**) del teorema (3.2.7). Por lo tanto, un único ciclo límite se bifurca del equilibrio vía la bifurcación de Hopf (Figura (4.1)).

4.2. Modelo Neuronal

Ahora veamos un ejemplo de la dinámica neuronal. A fines del siglo XIX, Santiago Ramón y Cajal propuso por primera vez que las neuronas eran elementos funcionales del sistema nervioso, que actuaban como entidades discretas que, intercomunicándose, establecían una especie de red mediante conexiones especializadas o espacios, lo cual se confirmó posteriormente.

Las neuronas transmiten ondas de naturaleza eléctrica originadas como consecuencia de un cambio transitorio de la permeabilidad en la membrana plasmática. Su propagación se debe a la existencia de una diferencia de potencial o potencial de membrana (que surge gracias a las distintas concentraciones de iones a ambos lados de la membrana, según describe el potencial de Nernst) entre la parte interna y externa de la célula (por lo general de -70 mV). La carga de una célula inactiva se mantiene en valores negativos (el interior respecto al exterior) y varía dentro de unos estrechos márgenes. Cuando el potencial de membrana de una célula excitable se despolariza más allá de un cierto umbral (de 65mV a 55mV app) la célula genera

(o dispara) un potencial de acción. Un potencial de acción es un cambio muy rápido en la polaridad de la membrana de negativo a positivo y vuelta a negativo, en un ciclo que dura unos milisegundos.

La transmisión de información del cerebro a un músculo o de un órgano sensorial al cerebro la llevan a cabo las neuronas o células nerviosas, las cuales tienen la siguiente estructura:

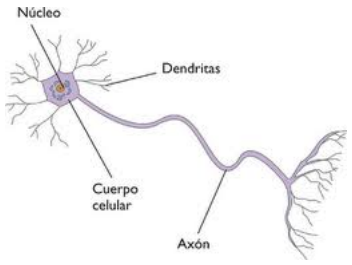


Figura 4.2: Estructura de una neurona [4] .

Un estímulo que llega a las dendritas se codifica y se convierte en impulso eléctrico por el cuerpo celular. El impulso viaja a lo largo del axón y llega a las ramas axonales, después de lo cual pasa a otra neurona. El buen funcionamiento de las neuronas es fundamental para percibir el medio que nos rodea y para reaccionar a los estímulos del exterior. Este funcionamiento adecuado se relaciona con la capacidad de las células para transmitir los impulsos eléctricos con velocidad constante y sin distorsión. Durante la primera mitad del siglo XX, después de haber observado las propiedades eléctricas de las neuronas, se utilizó la siguiente clasificación básica:

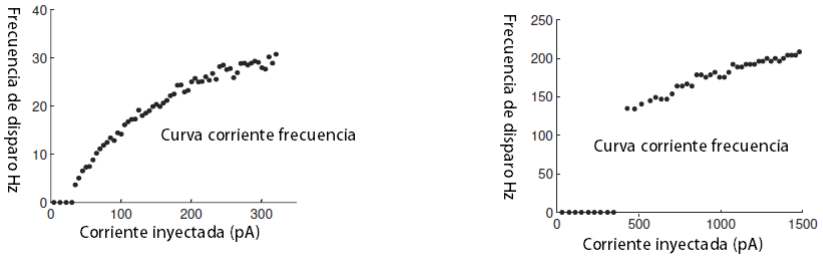
I. Neuronas inhibitorias

II. Neuronas excitatorias

A mediados de ese siglo, el trabajo de Hodgkin y Huxley describió el proceso de transmisión eléctrica a lo largo del axón gigante de calamar, cuyo diámetro es de .5 a 1 mm.; y gracias a estas dimensiones pudo realizar sus experimentos. Uno de los resultados importantes de estos estudios fue que el proceso anteriormente explicado se puede ver como un sistema dinámico. Ellos fueron los pioneros en realizar un estudio de las bifurcaciones en la dinámica neuronal antes de que la teoría de bifurcaciones se hubiera desarrollado. Sus estudios, publicados en 1952, se basaron en la estimulación del axón con impulsos de varias amplitudes e identificaron tres clases de respuestas de la excitabilidad neuronal:

- *Clase 1 de excitabilidad neuronal*: Algunas neuronas generan potenciales de acción cuya frecuencia es arbitrariamente baja y depende de la intensidad de la corriente aplicada.
- *Clase 2 de excitabilidad neuronal*: Otras neuronas generan potenciales de acción cuya frecuencia esta comprendida en cierto rango específico, la cual es relativamente insensible a los cambios de la intensidad de la corriente aplicada.
- *Clase 3 de excitabilidad neuronal*: Otras neuronas generan un solo potencial de acción como respuesta a un impulso de corriente; los disparos repetitivos se pueden generar solo para corrientes extremadamente intensas o no producirse.

La distinción cualitativa entre las clases puede notarse en la relación entre la intensidad de corriente y la frecuencia; en las de clase 1, la frecuencia empieza casi desde cero y se incrementa continua-



(a) Clase 1 de excitabilidad

(b) Clase 2 de excitabilidad

Figura 4.3: Clases de excitabilidad [4].

mente, mientras que para las neuronas de la clase 2, la frecuencia es discontinua, con un salto notable, y en las neuronas de la clase 3, no está definida en ningún punto (v. Figura (4.3)). Obviamente las neuronas que pertenecen a las diferentes clases presentan diferentes propiedades neurocomputacionales. Las neuronas de la clase 1, en las cuales estan incluidas las neuronas piramidales excitatorias corticales, pueden codificar sin problema la intensidad del estímulo de entrada en la frecuencia de disparo de salida; en cambio las neuronas de la clase 2, tales como las interneuronas inhibitorias corticales, no pueden hacerlo, pero pueden disparar en una banda de frecuencia relativamente estrecha. La clase 3 de neuronas no pueden exhibir actividad de disparo sostenida, por lo cual Hodgkin se refirió a éstas como "atípicas".

Durante la segunda mitad del siglo XX, después de los trabajos de Hodgkin y Huxley, empezó a aumentar la cantidad de experimentos y resultados sobre la respuesta eléctrica, con un crecimiento exponencial en las últimas décadas, y surgieron una gran variedad

de patrones distintos; entre otros fenómenos se observó que células con corrientes similares exhibían dinámicas completamente diferentes, con lo cual la clasificación de Hodgkin ya no era suficiente. El artículo de Rinzel y Ermentrout publicado en 1989 resumió el enfoque de varios trabajos de matemáticos y planteó las bases de la nueva visión de la utilización de conceptos de la teoría cualitativa y de la teoría de bifurcaciones para entender, predecir e interpretar estos fenómenos de la dinámica neuronal. Ellos propusieron un nuevo tipo de estudio resaltando que un tratamiento geométrico en el plano fase ofrece la oportunidad de ver y apreciar más claramente la estructura cualitativa detrás de los modelos. Uno puede ver que condiciones iniciales, por ejemplo, quedan en el dominio de cualquier estado de reposo particular o ciclo límite, lo cual es de gran ayuda para el diseño de experimentos, pues permite cambiar un sistema multiestable de un modo a otro. Gracias a este nuevo punto de vista pueden entenderse las diferentes clases de excitabilidad como una consecuencia de las diferentes bifurcaciones del potencial eléctrico del estado de reposo al estado de disparo.

En la actualidad las variables de los modelos neuronales se pueden clasificar en cuatro clases:

I. *Potencial de membrana.*

II. *Variables de exitación*, tal como la corriente de activación de Na^+. Estas variables son responsables del recorrido ascendente de la espiga.

III. *Variables de recuperación*, tal como la corriente de inactivación

y la corriente rápida de activación de K^+. Estas variables son responsables de la repolarización (recorrido descendente) de la espiga.

IV. *Variables de adaptación*, tales como la activación de corrientes dependientes del voltaje lento. Estas variables se acumulan durante un proceso de disparos prolongados y pueden afectar la excitabilidad a largo plazo.

El interés de la teoría matemática de los sistemas dinámicos en las neurociencias, así como también en otras ciencias es que permite encontrar información relevante sobre el sistema sin tener el conocimiento en detalle o una expresión analítica de la evolución del mismo. Por ejemplo, consideremos una neurona inactiva cuyo potencial de membrana está en reposo: desde el punto de vista de los sistemas dinámicos no hay cambios en las variables de estado de tal neurona, por lo que este potencial es un punto de equilibrio. Supongamos que una neurona está en reposo o equivalentemente que el espacio fase tiene un punto de equilibrio estable; pequeñas perturbaciones resultan en pequeñas variaciones alrededor del punto de equilibrio denotadas como potenciales postsinápticos, mientras que las perturbaciones grandes se amplifican por la dinámica intrínseca de la neurona y dan como resultado la respuesta en espigas. Para entender el mecanismo de la dinámica de tales amplificaciones necesitamos considerar la geometría del sistema dinámico cerca del punto de equilibrio. Si aplicamos una corriente suficientemente fuerte a la neurona la llevaremos a un modo de marcapasos, (exhibe una actividad periódica de disparos), lo cual se considera desde el

punto de vista de los sistemas dinámicos un ciclo límite en el espacio fase. La transición entre los estados de reposo y de disparo puede ser desencadenada por las conductancias lentas intrínsecas, lo que resulta en el comportamiento de disparo. Ahora supongamos que la intensidad de la corriente es un parámetro que podemos controlar e incrementarla en forma de rampa; al inicio de la rampa la célula está en estado de reposo, por lo que su retrato fase es un punto de equilibrio estable, después empieza a disparar espigas, lo cual corresponde a un ciclo límite atractor en el retrato fase; desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, esta transición corresponde a una bifurcación de la dinámica de la neurona. En general las neuronas son excitables porque están cerca de una bifurcación del reposo al estado de disparo, de esta forma, la bifurcación determina las propiedades excitables de la neurona; el tipo depende de la electrofisiología de la misma. Una observación sorprendente es que puede haber millones de mecanismos electrofisiológicos de excitabilidad y disparo, pero solo se han encontrado cuatro tipos diferentes de bifurcación del equilibrio a las cuales se pueden someter los sistemas de dimensión 2, y una vez que hayamos entendido estas bifurcaciones, se obtienen las bases para comprender las bifurcaciones de dimensiones mayores. Por lo anterior, considerando estas cuatro bifurcaciones en un arreglo general, podemos entender las propiedades excitables de muchos modelos que ni siquiera han sido inventados; aun más asombroso es que podemos entender las propiedades excitables de neuronas cuyas corrientes no han sido medidas y cuyo modelo no es conocido, siempre y cuando podamos identificar experimentalmente

cuál es la bifurcación del estado de reposo a la que se somete la neurona. Veamos las cuatro bifurcaciones:

I. *Bifurcación Silla-Nodo.* Al observar cómo cambian los retratos fase al aumentar la intensidad de la corriente aplicada (u otro parámetro de bifurcación en un sistema dinámico general), se observa que el punto de equilibrio inestable (*punto silla*) se va acercando al punto de equilibrio estable que corresponde al estado de reposo, hasta que los 2 puntos de equilibrio se unen y se aniquilan el uno al otro. Puesto que el estado de reposo ya no existe, la trayectoria que describe la evolución del sistema salta a un ciclo límite atractor, el cual indica que la neurona empieza a producir potenciales de acción.

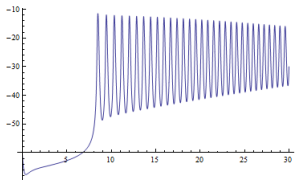


Figura 4.4: Comportamiento del voltaje en la bifuración silla nodo.

II. *Bifurcación Silla-Nodo en un círculo invariante.* Es similar a la bifurcación de silla-nodo, pero en este caso los puntos de equilibrio están contenidos en un círculo invariante, los cuales se van acercando y al unirse y producir la bifurcación, el círculo invariante se convierte en un ciclo límite atractor.

III. *Bifurcación Subcrítica de Andronov Hopf.* En este caso tenemos un punto de equilibrio estable en el interior de un ciclo límite inestable, al aumentar la intensidad de la corriente y acercarnos

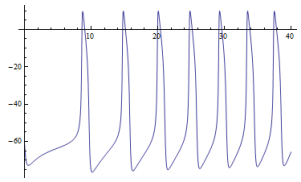


Figura 4.5: Comportamiento del voltaje en la bifuración silla nodo en un círculo invariante.

al punto de bifurcación, el ciclo límite inestable se contrae hacia el punto de equilibrio estable y hace que pierda su estabilidad. Debido a la inestabilidad, las trayectorias divergen del punto de equilibrio y se aproximan hacia un ciclo límite de disparos de larga amplitud o algún otro atractor.

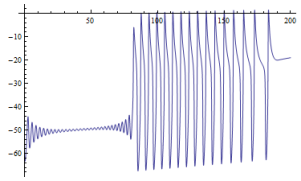


Figura 4.6: Comportamiento del voltaje en la bifuración subcrítica de Andronov Hopf.

IV. *Bifurcación de Andronov Hopf Hipercrítica.* El punto de equilibrio estable pierde su estabilidad y da nacimiento a un ciclo límite atractor de pequeña amplitud; al aumentar la corriente aplicada, la amplitud del ciclo límite se incrementará.

Los sistemas que se someten a las bifurcaciones de Andronov Hopf (hipercrítica o subcrítica) presentan pequeñas oscilaciones del potencial de membrana, mientras que los sistemas que presentan las bifurcaciones de silla-nodo (ya sea en un círculo invariante o

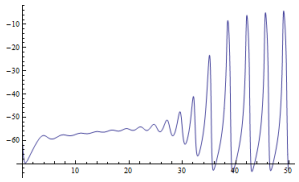


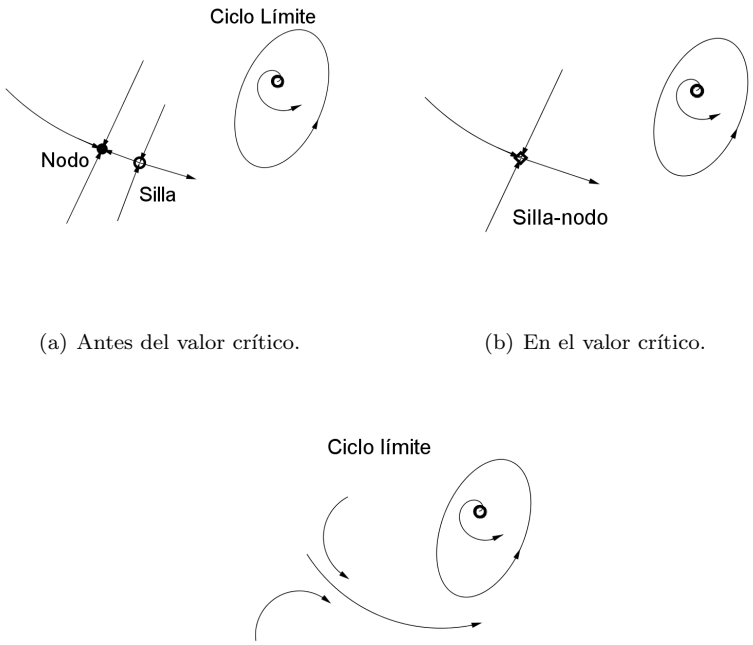
Figura 4.7: Comportamiento del voltaje en la bifuración hipercrítica de Andronov Hopf.

no) no muestran estas oscilaciones. La existencia de oscilaciones de pequeña amplitud crea la posibilidad de resonancia a la frecuencia de los impulsos entrantes y otras características interesantes. Nos referiremos a las neuronas con pequeñas oscilaciones subumbrales como *resonadores*, y a las que no tienen esta propiedad, como *integradores*. En cuanto a las neuronas que exhiben coexistencia de los estados de reposo y de disparo al menos cerca de la transición del reposo al estado de disparo como *biestables*, y a las que no presentan esta característica, como *monoestables*. Para tener mas clara esta clasificación entre resonadores e integradores se puede revisar [3]

Uno de los modelos fundamentales en la neurociencia computacional es el que incluye una corriente persistente de sodio y una corriente de potasio $I_{Na,p} + I_K$, donde la corriente de Na^+ es rápida y la de K^+ es relativamente más lenta:

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - \overbrace{g_L\left(V - E_L\right)}^{\text{débil } I_L} - \overbrace{g_{Na} m\left(V - E_{Na}\right)}^{I_{Na,p}} - \overbrace{g_k n\left(V - E_K\right)}^{I_K} \\ \dot{m} &= \left(m_\infty\left(V\right) - m\right)/\tau_m\left(V\right) \\ \dot{n} &= \left(n_\infty\left(V\right) - n\right)/\tau_n\left(V\right) \end{aligned}$$

Este modelo equivale en muchos aspectos al modelo $I_{Ca} + I_K$ pro-



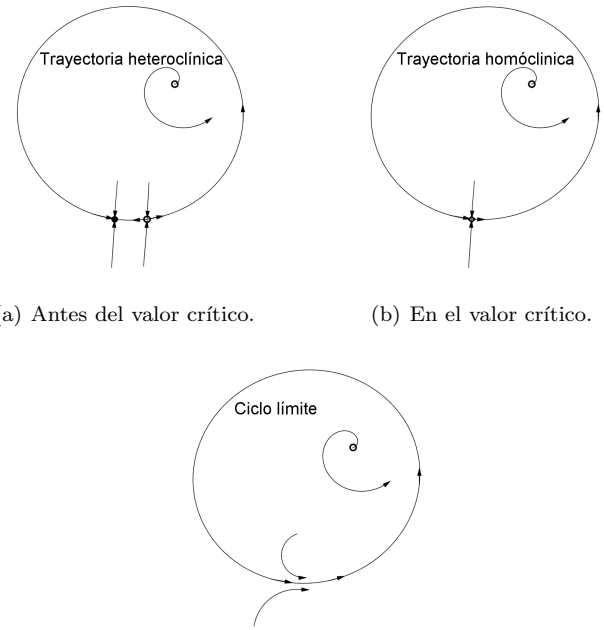
(a) Antes del valor crítico.

(b) En el valor crítico.

(c) Después del valor crítico.

Figura 4.8: Bifurcación silla-nodo.

puesto por Morris y Lecar para describir las oscilaciones del voltaje en la fibra muscular del percebe gigante. Una suposición razonable basada en las observaciones experimentales es que la variable $m\,(t)$ de la puerta de Na^{+} es mucha mas rápida que la variable de voltaje $V\,(t)$ así que m aproxima práctimente de manera instantanea el valor asintótico $m_{\infty}\,(V)$, en este caso podemos sustituir $m = m_{\infty}\,(V)$ en la ecuación del voltaje y reducir el sistema tridimensional anterior



(a) Antes del valor crítico.

(b) En el valor crítico.

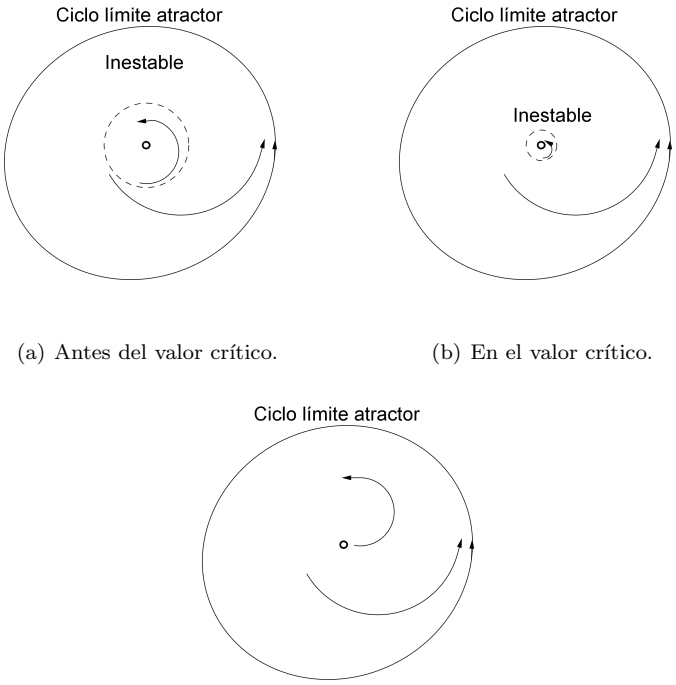
(c) Después del valor crítico.

Figura 4.9: Bifurcación silla-nodo en un círculo invariante.

a un sistema plano

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - \overbrace{g_L\left(V-E_L\right)}^{\text{débil } I_L} - \overbrace{g_{Na}m_\infty\left(V-E_{Na}\right)}^{\text{instantanea} I_{Na,p}} - \overbrace{g_k n\left(V-E_K\right)}^{I_K} \\ \dot{n} &= \left(n_\infty\left(V\right)-n\right)/\tau_n\left(V\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Muchas características interesantes del comportamiento de la variación del voltaje local de una sola neurona se pueden explicar o ilustrar mediante estos sistemas bidimensionales, aún los disparos en ráfagas, los cuales se presentan en neuronas con mayor variedad de canales y que se modelan mediante sistemas con mayor cantidad de ecuaciones, se pueden entender a través del análisis de las bifurcaciones en estos sistemas. En este caso trabajaremos un modelo



(a) Antes del valor crítico.

(b) En el valor crítico.

(c) Después del valor crítico.

Figura 4.10: Bifurcación subcrítica de Andronov Hopf.

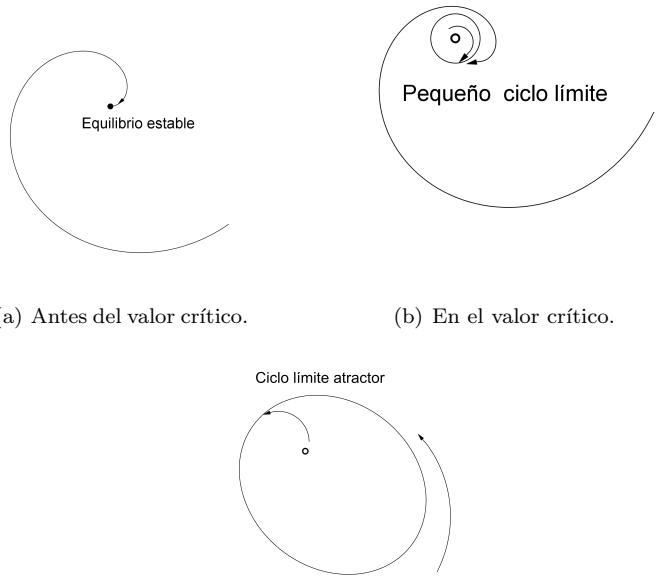
$I_{Na,p} + I_K$ con bajo umbral que presenta la aparición de un ciclo límite vía la bifurcación de Andronov Hopf.

Empezaremos el análisis de este sistema. En este modelo las funciones m_∞ y n_∞ toman la siguiente forma:

$$m_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\left(V_{\frac{1}{2}} - V\right)/k\right\}},$$

$$n_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\left(V_{\frac{1}{2}} - V\right)/k\right\}}.$$

Los parámetros en el modelo son: $C = 1$, $E_L = -78mV$, $g_L = 8$, $g_{Na} = 20$, $g_K = 10$, $m_\infty(V)$ tiene $V_{\frac{1}{2}} = -20$ y $k = 15$, $n_\infty(V)$ tiene



(a) Antes del valor crítico.

(b) En el valor crítico.

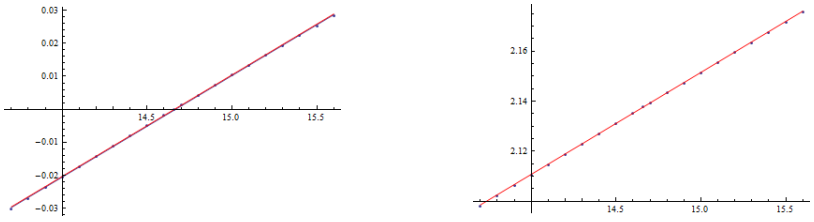
(c) Después del valor crítico.

Figura 4.11: Bifurcación hipercrítica de Andronov Hopf.

$V_{\frac{1}{2}} = -45$, $k = 5$ y $\tau(V) = 1$, $E_{Na} = 60mV$ y $E_K = -90mV$; así pues tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= I - 8(V+78) - 20m_\infty(V-60) - 10n(V+90) \\ \dot{n} &= (n_\infty(V) - n)/\tau_n(V). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Debido a la complejidad de las funciones, un análisis idéntico al del modelo depredador presa es un poco complicado, por lo cual, mediante simulaciones, se ha encontrado que el valor crítico para esta bifurcación es $I_0 = 14{,}659$. Con este parámetro, resolviendo numéricamente las ecuaciones para obtener el punto de equilibrio,



(a) Aproximación: parte real.

(b) Aproximación: parte imaginaria.

Figura 4.12: Aproximaciones numéricas

tenemos que $E_0 = (-56{,}4815, {,}0914299)$ y cuya matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} {,}999998 & -335{,}185 \\ {,}0166141 & -1 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm 2{,}13748i$. Por la complejidad de las funciones involucradas en este modelo, se obtendrán numéricamente algunos valores para los valores propios de la matriz al cambiar el parámetro que en este caso es la corriente aplicada en una pequeña vecindad de I_0 y después procederemos a utilizar el método de mínimos cuadrados para obtener así una aproximación para las funciones de la parte real e imaginaria de los valores propios de la matriz jacobiana (v. Figura 4.12). De esta forma tenemos que $\mu(I) = {,}0307066\,(I - 14{,}659)$ y $w(I) = 2{,}13748\,(I - 14{,}569)$ y así tenemos que $\mu'(I_0) = {,}0307066 \neq 0$, por lo tanto, se cumple la condición de transversalidad (**B.2**) del teorema (3.2.7).

Para calcular el primer coeficiente de Liapunov realizaremos primero un cambio de coordenadas para transladar el punto de equilibrio al origen y fijaremos el valor del parámetro en I_0, con lo cual,

haciendo $V = -56{,}4815 + \gamma_1$ y $n = {,}0914299 + \gamma_2$ tenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma_1} &= -185{,}135 + \frac{2329{,}63 - 20\gamma_1}{1 + 11{,}3828e^{\frac{-\gamma_1}{15}}} - 8{,}9143\gamma_1 - 335{,}185\gamma_2 - 10\gamma_1\gamma_2, \\
\dot{\gamma_2} &= -{,}0914299 + \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{5}(11{,}4815 - \gamma_1)}} - \gamma_2. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Este nuevo sistema se puede escribir de la forma

$$\dot{\gamma} = A\gamma + \frac{1}{2}B(\gamma, \gamma) + \frac{1}{6}C(\gamma, \gamma, \gamma) + O\left(\|\gamma\|^4\right).$$

De esta forma la matriz A y las las funciones multilineales B y C tienen la forma:

$$A = \begin{pmatrix} {,}999998 & -335{,}185 \\ {,}0166141 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B(\gamma, \eta) = \begin{pmatrix} -10(\gamma_1\eta_2 + \eta_1\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C(\gamma, \eta, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$q = \begin{pmatrix} {,}999975 \\ {,}00300479 + {,}00636687i \end{pmatrix}$$

un vector propio asociado a $\lambda = 2{,}13748i$ y consideremos p un vector asociado a A^T y a $\overline{\lambda}$,

$$p = \begin{pmatrix} -{,}002983 + {,}00637684i \\ {,}999975 \end{pmatrix}$$

para la normalización $< q, p >= 1$ tomaremos a

$$p = \begin{pmatrix} {,}500013 + {,}233927i \\ -78{,}4087i \end{pmatrix}$$

ahora podemos hacer los siguientes cálculos:

$$g_{2,0} =< B\left(q,q\right),p >= ,0777259i$$

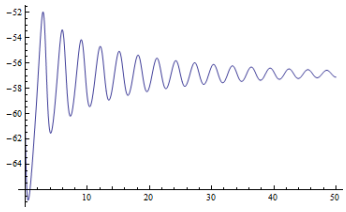
$$g_{1,1} =< B\left(q,\overline{q}\right),p >= ,0298335 + ,0139573i$$

nótese que en este modelo, por la forma de la función multilineal C, tenemos que $g_{2,1} = 0$; utilizando la fórmula (3.18) tenemos que

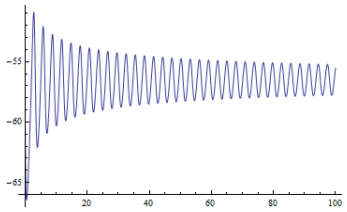
$$l_1\left(I_0\right) = \frac{1}{2w^2}\mathrm{Re}\left(ig_{2,0}g_{1,1} + wg_{2,1}\right) = ,000253767$$

así la condición (**B.1**) del teorema (3.2.7) se cumple y por lo tanto en este modelo se presenta una bifurcación de Andronov Hopf hipercrítica en el valor del parámetro I_0.

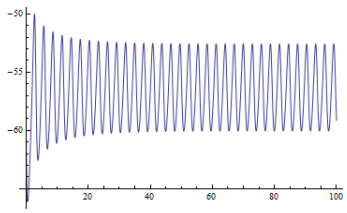
Veamos el comportamiento del voltaje durante la bifurcación, así como también el comportamiento en el plano fase.



(a) Antes del valor crítico.



(b) En el valor crítico.

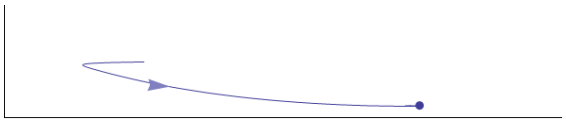


(c) Después del valor crítico.

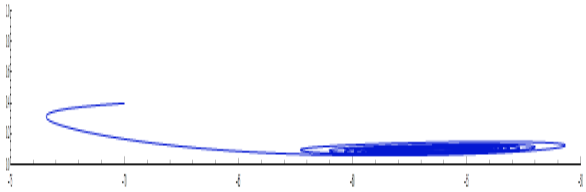
Figura 4.13: Comportamiento del voltaje durante la bifurcación.

La figura 4.13(a) muestra el comportamiento del voltaje en el sistema cuando el parámetro (en este caso es la corriente aplicada)

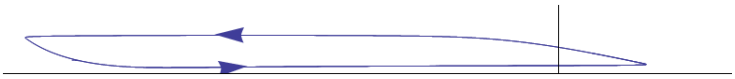
está antes del valor de bifurcación I_0; se nota que el voltaje presenta oscilaciones que van disminuyendo su amplitud hasta converger al punto de equilibrio, por lo tanto éste es un foco estable. En 4.13(b) se observa el comportamiento del voltaje cuando el valor del parámetro se encuentra en el valor crítico I_0; notamos un comportamiento parecido al del caso anterior pero con la diferencia que la velocidad de convergencia es mucho más lenta lo que implica que el punto de equilibrio es un foco débilmente atractor. Finalmente observamos en 4.13(c) que la amplitud del voltaje converge a un valor constante, lo cual nos dice que existe un ciclo límite al cual van a converger las órbitas cuando el parámetro se encuentra después del valor I_0.



(a) Antes del valor crítico.



(b) En el valor crítico.



(c) Después del valor crítico.

Figura 4.14: Comportamiento del voltaje durante la bifurcación.

En la figura 4.14 observamos el comportamiento de las trayectorias en el plano fase; en 4.14(a) antes del valor crítico I_0 vemos

cómo la trayectoria coverge al punto de equilibrio; en 4.14(b) vemos que la trayectoria converge al punto de equilibrio igual que en el caso anterior, pero con una velocidad de convergencia mucho menor y finalmente en 4.14(c) vemos la existencia del ciclo límite al cual converge la trayectoria cuanto $t \to \infty$.

Bibliografía

[1] Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. y Vegas Montaner, J. M. (2003) *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos.* Editorial Thomson. Págs. 124-130.

[2] Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (1982) *Álgebra Lineal.* Editorial Publicaciones Cultural, S.A. Pág. 235

[3] Izhikevich, E. M. (2001) "Resonate and fire neurons". *Neural Networks*, 14.

[4] Izhikevich, E. M. (2007) *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* Editorial The MIT Press. Págs. 8-16, 89, 172-174.

[5] Kuznetsov, Y. A. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Editorial Springer. Caps. 1-3

[6] Munkres, J. R. (1974) *Topology A first course.* Editorial Prentice-Hall. Págs. 22, 104

[7] Perko L. (2001) *Differential Equations and Dynamical Systems.* Editorial Springer. Págs 211-216.

[8] Rinzel, J. y Ermentrout, G. B. (1989) "Analysis of neural excitability and oscillations", en Christof Koch e Idan Segev *Methods in Neural Modeling*, Cap. 7.