BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

UN TEOREMA DE I. N. BAKER PARA COMPONENTES COMPLETAMENTE INVARIANTES EN EL CONJUNTO DE FATOU

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

JUAN CARLOS SÁNCHEZ FLORES

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUE. JUNIO DE 2012

Índice general

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos holomorfos generados por la iteración de funciones holomorfas tiene su inicio a finales del siglo XIX, motivado por el análisis de la convergencia para el método de Newton. Pero no fue hasta los trabajos de Pierre Fatou (1878 - 1929) [Fatou, 1919], [Fatou, 1926] y de Gaston Julia (1893 - 1978) [Julia, 1918], en los alrededores de los años 20, que la teoría global fue seriamente estudiada. Estos dos matemáticos estudiaron principalmente la iteración de funciones racionales de la esfera de Riemann. Pierre Fatou fue el primero en estudiar en 1926 las funciones enteras trascendentes (funciones con una singularidad en el infinito). La innovación más importante en lo trabajos de Fatou y Julia fue, sin duda, el uso de la teoría de familias normales para dividir la esfera en dos conjuntos de comportamiento dinámico totalmente diferente; estos conjuntos son hoy conocidos como los conjuntos de Fatou y Julia, o equivalentemente el conjunto estable y el conjunto caótico de la función holomorfa en cuestión. Aunque Julia y Fatou describieron de manera extensa y detallada los conjunto de Fatou y Julia dejaron en el camino multitud de problemas abiertos.

Las propiedades fundamentales de los conjuntos de Fatou y Julia se establecieron primero para funciones racionales en [Baker, 1964] y [Baker, 1962], y para funciones enteras trascendentes en [Baker, 1963]. En su último artículo, Fatou estudió en más detalle la iteración de funciones enteras trascendentes, dando ejemplos que apuntaban a diferencias significativas a la teoría que había sido desarrollada para funciones racionales. Preguntó las siguientes cuestiones fundamentales acerca de una función entera trascendente f:

(i) ¿ Son los puntos periódicos repulsores de f densos en $J(f)$?

(ii) ¿Hay ejemplos donde $J(f) = \mathbb{C}$? ¿En particular, es cierto para $f(z) = e^z$?.

(iii) ¿Puede $J(f)$ ser totalmente disconexo?

La mayoría de las preguntas planteadas por Fatou, fueron resueltas por I. N. Baker durante la década de 1965 - 1975. En su investigación Baker trabajó en muchos problemas de análisis complejo y tenía una amplia gama de colaboradores, pero la teoría de la iteración, su gran amor, fue por muchos años un interés solitario. Sin embargo, cuando el tema volvió a renacer alrededor de 1980, en parte como resultado de la llegada de las computadoras gráficas, se hizo evidente a los nuevos adeptos que Baker había estado desde hace muchos años tranquilamente y cuidadosamente completando las bases iniciadas a principios del siglo por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Julia Gaston. También indicó el camino hacía numerosos desarrollos futuros, tanto al probar nuevos resultados como al plantear problemas difíciles.

En esta tesis estudiaremos un teorema de los muchos de I. N. Baker. En el primer capítulo se enuncian los preliminares, estos son resultados generales de análisis matemático, topología y variable compleja que nos ayudan a entender mejor la demostración de proposiciones, lemas y teoremas que se dan en los capítulos subsecuentes. En el capítulo dos se enuncian resultados generales relacionados con familias normales los cuales nos ayudarán a estudiar los conjuntos de Fatou y Julia. En el tercer capítulo se realiza el estudio de puntos fijos, su clasificación y se dan ejemplos de ellos. Además se definen los conjuntos de Fatou y Julia se enuncian algunas propiedades básicas de estos conjuntos, así como la clasificación de las componentes de Fatou. Finalmente en el capítulo cuatro se enuncia y se demuestra el teorema principal de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos a suponer una cierta familiaridad con el análisis complejo de una variable, sin embargo recordaremos algunos resultados que son de particular importancia para nuestro propósito. Los resultados que aparecen en este capítulo pueden ser encontrados en la siguiente bibliografía [Agarwal *et al.*, 2011], [Antimirov *et al.*, 1998], [Conway, 1978], [Fernández y de la Torre, 1983], [Iribarren, 2008], [Noguchi, 1998], [Palka, 1990], [Shirali y Vasudeva, 2006], y [Tamariz, 1982].

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1 *Un espacio métrico es un par (E, d) formado por un conjunto E y una aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$ llamada distancia en E (o métrica) que cumplen los siguientes axiomas:*

1. $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$,
2. $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$ *y*
3. $\forall x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición 1.2 *Sean M un espacio métrico, $x \in M$ y $r > 0$, entonces definimos*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$
$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

$B(x,r)$ y $\bar{B}(x,r)$, se definen como la bola abierta y la bola cerrada, respectivamente, con centro en x y radio r.

Definición 1.3 *Sea M un espacio métrico, para cada $G \subset M$, donde $G \neq \emptyset$, se define el diámetro de G como*

$$\delta(G) = sup\{d(x,y) : x \in G, y \in G\}.$$

Al Conjunto $G \subset M$, $G \neq \emptyset$, se le llama acotado si $\delta(G) < \infty$.

Definición 1.4 *Sea M un espacio métrico, se dice que $G \subset M$ es abierto si para cada $x \in G$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset G$.*

Definición 1.5 *Sean M un espacio métrico y $x \in M$, un conjunto $V \subset M$ es una vecindad o entorno de x, si existe una bola abierta con centro x y radio r, que está contenida en V y lo denotamos por $V(x)$. Si el conjunto V es abierto, decimos que V es una vecindad abierta del punto x.*

Notación 1.1 *Al conjunto de todas las vecindades de x lo denotamos como*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset M \ \mid \ V \text{ es vecindad de } x\}.$$

Definición 1.6 *Sean M un espacio métrico, $A \subset M$ y $x \in M$. Se dice que x es un punto de acumulación de A si toda vecindad de x contiene puntos distintos de x, es decir $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V^* \cap A \neq \emptyset$, donde $V^* = V \backslash \{x\}$. De otra forma, x es un punto de acumulación de $A \subset M$ si, y sólo si, $\forall B(x,r)$ con $r > 0$ se tiene que*

$$B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos el conjunto de puntos de acumulación de A por A'.

Teorema 1.1 *[Fernández y de la Torre, 1983] Sean M un espacio métrico, $A \subset M$ y x un punto de acumulación de A. Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ el conjunto $V^* \cap A$ contiene infinitos puntos.*

Definición 1.7 *Sea M un espacio métrico, un conjunto $F \subset M$ es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Definición 1.8 *Sea M un espacio métrico, $A \subset M$. Definimos el interior de A, int A, como el conjunto $\cup\{G : G \text{ es abierto y } G \subset A\}$. Se le llama clausura de A, $\bar{A}$, al conjunto $\cap\{F : F \text{ es cerrado y } F \supset A\}$.*

Definición 1.9 (Propiedad de Cantor) *Sea M un espacio métrico, se dice que M, posee la propiedad de Cantor, si toda familia contable de conjuntos $\{A_0, A_1, \ldots\}$, cada uno cerrado y no vacío, $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$ e $\inf\{\delta(A)\} = 0$, tiene intersección no vacía.*

Definición 1.10 *Sean $\{x_1, x_2, \ldots\}$ una sucesión en un espacio métrico M y $x \in M$, decimos que $\{x_n\}$ converge a x ($x = \lim x_n$ ó $x_n \to x$), si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x, x_n) < \epsilon$ siempre que $n \geq N$.*

Definición 1.11 *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico M, es llamada una sucesión de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.*
Si M es un espacio métrico tiene la propiedad de que cada sucesión de Cauchy tiene límite en M, entonces diremos que M es completo.

Proposición 1.1 *[Conway, 1978]* $(\mathbb{C}, d)$*, donde $d(z, w) = |z - w|$ con $z, w \in \mathbb{C}$ es completo.*

Teorema 1.2 *[Conway, 1978] Un espacio métrico M es completo si, y sólo si, posee la propiedad de Cantor.*

Teorema 1.3 *[Iribarren, 2008] Sean M un espacio métrico completo y $G \subset M$, entonces (G, d) es un espacio métrico completo si, y sólo si, G es cerrado en M.*

1.1.1. Compacidad

El concepto de compacidad es una extensión de los beneficios de la finitud a los conjuntos infinitos. Muchas de las propiedades de los conjuntos compactos son análogas a las propiedades de los conjuntos finitos las cuales son bastante triviales.

Definición 1.12 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$. Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos de M tal que $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$, recibe el nombre de cubierta de A.*
Decimos que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de A, si $\mathcal{F}$ cubre a A y todo los conjuntos de $\mathcal{F}$ son abiertos.

Definición 1.13 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ no vacío. Decimos que A es precompacto si a cualquier número real $\epsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in A$ tales que*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon).$$

Teorema 1.4 *[Iribarren, 2008] Si A es un conjunto precompacto de un espacio métrico (M, d), todo subconjunto no vacío de A es precompacto.*

Definición 1.14 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ no vacío. Decimos que A posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass, si todo $T \subset A$ subconjunto infinito admite un punto de acumulación en A, es decir $T' \cap A \neq \emptyset$. A tales conjuntos los llamaremos BW.*

Definición 1.15 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ se dice que es compacto, si toda cubierta abierta de A admite una subcubierta finita.*

Teorema 1.5 *[Fernández y de la Torre, 1983] Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ es finito, entonces A es compacto.*

Definición 1.16 *Sea M un espacio métrico, un conjunto $A \subset M$ se dice relativamente compacto si $\bar{A}$ es compacto.*

Definición 1.17 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ subconjunto no vacío. Decimos que A es secuencialmente compacto si cada sucesión en A posee una subsucesión convergente en A.*

Teorema 1.6 *[Conway, 1978] [Cubierta de Lebesgue] Si (X, d) es un espacio secuencialmente compacto y si $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que si $x \in X$, existe un conjunto $G \in \mathcal{F}$ con $B(x, \epsilon) \subset G$.*

Definición 1.18 *Sean M un espacio métrico y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de M, se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita si para toda $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset \mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$.*

Teorema 1.7 *[Shirali y Vasudeva, 2006] Todo conjunto compacto en un espacio métrico es precompacto.*

Teorema 1.8 *[Tamariz, 1982] Sea M un espacio métrico, un conjunto $A \subset M$ es compacto si, y sólo si, cada colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de A con la propiedad de intersección finita tiene $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.*

Corolario 1.1 *[Shirali y Vasudeva, 2006] Todo espacio métrico compacto es completo.*

Lema 1.1 *[Iribarren, 2008] [Propiedad de Bolzano-Weierstrass] Un conjunto A de un espacio métrico M es relativamente compacto si, y sólo si, toda sucesión de elementos de A admite una subsucesión parcial convergente (no necesariamente en A).*

Teorema 1.9 *[Conway, 1978] Si M es un espacio métrico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *M es compacto.*

(b) *Cada conjunto infinito tiene un punto límite.*

(c) *M es secuencialmente compacto.*

(d) *M es completo y para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en M tal que*

$$M = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon).$$

1.1.2. Conexidad

Definición 1.19 *Sea M un espacio métrico, un subconjunto T de M, se le llama arco que une los puntos $x, y \in M$ si existe un intervalo compacto $[a, b]$, donde $b > a$ y una aplicación $\phi : [a, b] \to M$ continua en $[a, b]$ tal que $\phi([a, b]) = M$ con $\phi(a) = x$, y $\phi(b) = y$.*

Definición 1.20 *Sea M un espacio métrico, un subconjunto A de M, se le llama arco conexo si para cada par $x, y \in A$ existe un arco en A que une los puntos x, y.*

Definición 1.21 *Sean M un espacio métrico y $A \subset M$ no vacío. A es disconexo si existen dos conjuntos S y T en el subespacio A tales que,* *(1)* $S, T \neq \emptyset$ *y* $S \cap T = \emptyset$.

(2) S, T *son conjuntos abiertos en* A.

(3) $A = S \cup T$.

Si A no es disconexo, decimos que A es conexo.

Proposición 1.2 *[Iribarren, 2008] Sea* M *un espacio métrico,* M *es conexo si, y sólo si, los únicos conjuntos de* M *que simultáneamente son abiertos y cerrados son el* $\emptyset$ *y* M.

Definición 1.22 *Sean* M *un espacio métrico y* $A \subset M$ *no vacío. Se dice que* A *es un dominio, si* A *es abierto y conexo.*

Definición 1.23 *Sean* M *un espacio métrico y* $A \subset M$ *no vacío. Se dice que* A *es un continuo, si* A *es compacto y conexo.*

Definición 1.24 *Sea* M *un espacio métrico,* M *se dice localmente conexo si para cada punto* $x \in M$ *y todo entorno* S *de* x*, existe un entorno* T *de* x *tal que* $T \subset S$ *y* T *conexo.*

1.2. Variable compleja

En esta sección se estudian los números complejo, se definen las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de números complejos. Además, se da la definición de módulo, conjugado de un número complejo. Finalmente se dan algunas otras propiedades de los números complejos y algunos resultados importantes.

Definición 1.25 *Un número complejo* z*, es una pareja ordenada,* (a, b)*, con* $a, b \in \mathbb{R}$*, donde* a *es llamada la parte real de* z *y* b *es llamada la parte imaginaria de* z*. Denotamos esto por* $a = \operatorname{Re} z$ *y* $b = \operatorname{Im} z$*. El conjunto de los números complejos se denota por* $\mathbb{C}$.

Dos números complejos, $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son iguales si, y sólo si, sus partes real e imaginaria son iguales, es decir, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

Definición 1.26 *Sean* $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *números complejos, donde* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$*, se definen las siguientes operaciones:*

(i) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$.

(ii) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Dados v, w y z números complejos, se cumplen las siguientes propiedades de campo:

(i) Conmutatividad de la suma: $v + w = w + v$.

(ii) Conmutatividad de la multiplicación: $vw = wv$.

(iii) Asociatividad de la suma: $(v + w) + z = v + (w + z)$.

(iv) Asociatividad de la multiplicación: $v(wz) = (vw)z$.

(v) Ley distributiva: $(v + w)z = vz + wz$.

(vi) Existen el número complejo cero, $0 = (0, 0)$ tal que $z + 0 = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y el número complejo, $1 = (1, 0)$ tal que $1z = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

(vii) Para cada $z = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{C}$ y x o y no cero admite inverso, el cual está dado de la forma $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

Proposición 1.3 *El conjunto* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *con la suma y multiplicación de la Definición 1.26 forma un campo.*

Definición 1.27 *Un número complejo* z *de la forma* $z = (0, y)$*, se dice que es un número complejo puro.*

El número complejo $(0, 1)$, es llamado la unidad imaginaria y se denota por el símbolo $i : i = (0, 1)$. El número $(0, y)$ puede ser considerado como el producto de el número real $y = (y, 0)$ y la unidad imaginaria $(0, 1)$,

$$(y, 0) \cdot (0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0).$$

Entonces lo podemos escribir como: $(0, y) = iy$.

Multiplicando a la unidad imaginaria por si misma tenemos que:

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

esto es, $i^2 = -1$.

Definición 1.28 *La forma algebraica de un número complejo es* $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ *donde* $x, y \in \mathbb{R}$*, donde* $z = x + iy$.

Definición 1.29 *Sea* $z = a + bi$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$*, un número complejo, el conjugado de* z *se define como* $\bar{z} = a - bi$ *y se denota como* $\bar{z}$.

Definición 1.30 *Sea* $z = a + bi$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$*, un número complejo, el módulo de* z *está definido por* $\mid z \mid = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Teorema 1.10 *[Palka, 1990] El valor absoluto o módulo y conjugado de un número complejo satisfacen las siguientes propiedades. Sean* $z, w \in \mathbb{C}$*, tenemos:*

(i) $|zw| = |z|\,|w|$.

(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(iii) $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

(iv) $|z/w| = |z| \,/\, |w|, \quad$ *con* $w \neq 0$.

(v) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.

(vi) $|z| = |\bar{z}|, \qquad z\bar{z} = |z|^2$.

(vii) $\mathrm{Re}\, z = (z + \bar{z})/2, \qquad \mathrm{Im}\, z = (z - \bar{z})/2i$.

Definición 1.31 *La forma trigonométrica de un número complejo* $z = x+iy$ *está dada por,* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$*, donde* $x = r\cos\theta$*,* $y = r\sin\theta$ *y* $r = \mid z \mid$.

En la Definición 1.31 al ángulo θ se le llama el argumento de z, y es denotado por $\theta = \arg z$, este es el ángulo medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, teniendo así una periodicidad de 2π, por lo que z es respresentado como:

$$z = r(\cos z(\theta \pm 2n\pi) + i\sin(\theta \pm 2n\pi)),$$
$$\theta = \arg z,\ r = |z|,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Otra forma de expresar el número complejo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, es haciendo uso de la forma exponencial. Si θ es un número real, definimos la expresión $e^{i\theta}$ llamada la fórmula de Euler como:

$$e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Definición 1.32 *La forma exponencial de un número complejo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ es dada por:*

$$z = re^{i\theta} \quad \text{ó} \quad z = \mid z \mid e^{i \arg z}.$$

La expresion $re^{i\theta}$ es conocida como la forma polar del número complejo $z = x + iy$, y a θ se le llama el argumento de z.

Definición 1.33 *Dado $n \in \mathbb{N}$, el número complejo $w = z^{1/n}$ se le llama raíz enésima de un número complejo z, si $w^n = z$.*

Teorema 1.11 *[Antimirov* et al.*, 1998] Un número complejo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ diferente de cero, tiene exactamente n diferentes raices, las cuales están dadas por la fórmula*

Definición 1.34 *La función exponencial, e^z, está definida por la expresión*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

De la fórmula de Euler, haciendo $y = n\theta$, obtenemos la siguiente fórmula conocida como la fórmula de Moivre,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

1.2.1. El plano extendido y su representación esférica

Muchas veces, en análisis complejo se emplean funciones que se aproximan a infinito ó toman el valor de infinito cuando la variable se acerca a un punto dado. Para discutir esta situación introducimos el plano extendido el cual es $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$. También introducimos una función distancia en $\mathbb{C}_\infty$ para discutir las propiedades de continuidad de funciones asumiendo el valor infinito. Para lograr esto y dar un dibujo concreto de $\mathbb{C}_\infty$, respresentamos a $\mathbb{C}_\infty$ como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, esto es,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

donde a S se le conoce como esfera de Riemann.

Sea $N = (0, 0, 1)$; es decir, N es el polo norte de S. Además, identificamos $\mathbb{C}$ con $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ entonces $\mathbb{C}$ corta a S a lo largo del ecuador. Para cada punto $z \in \mathbb{C}$ consideramos la línea recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por z y N. Esta intersecta a la esfera en un solo punto, $Z \neq N$. Si $|z| > 1$ entonces Z esta en el norte de la esfera. Si $|z| < 1$ entonces Z esta en el sur de la esfera; además, para $|z| = 1$, entonces $Z = z$ (Véase Fig. 1.1).

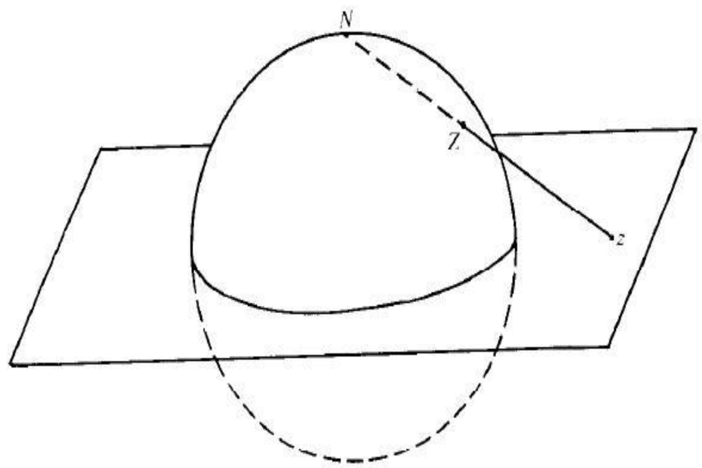

Figura 1.1: Proyección estereográfica.

Esta correspondecia es una biyección entre los puntos $\mathbb{C}$, que hemos identificado con $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, y los de la superficie S excepto el polo N. Cuando $|z| \to \infty$, Z se aproxima a N, de aquí que si a N le hacemos corresponder el punto del infinito, obtenemos una biyección entre el plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$ y S. Está biyección entre los puntos de $\mathbb{C}_\infty$ y S es llamada Proyección Estereográfica.

La forma intercambiar coordenadas es la siguiente. Sea $z = x + iy$ un punto de $\mathbb{C}$, entonces el correspondiente $Z = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z^2|+1}, \frac{(-i)(z+\bar{z})}{|z^2|+1}, \frac{|z^2|-1}{|z^2|+1}\right)$.
Por el contrario si $Z = (x_1, x_2, x_3)$ es dado, el correspondiente $z \in \mathbb{C}$ está dado por $z = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$.

Ahora definimos la función distancia entre puntos pertenecientes al plano extendido de la siguiente forma: para $z, z^{'} \in \mathbb{C}_\infty$ definimos la distancia de z a $z^{'}$, $d(z, z^{'})$, como la distancia correspondiente entre los puntos Z y $Z^{'}$ en $\mathbb{R}^3$. Si $Z = (x_1, x_2, x_3)$ y Z=$(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})$, entonces

$$d(z, z^{'}) = \sqrt{(x_1 - x_1^{'})^2 + (x_2 - x_2^{'})^2 + (x_1 - x_3^{'})^2}.$$

Usando el hecho de que Z y $Z^{'}$ están en S, se tiene

$$[d(z, z^{'})]^2 = 2 - 2(x_1 x_1^{'} + x_2 x_2^{'} + x_3 x_3^{'}).$$

Como $Z = (\frac{z+\bar{z}}{|z^2|+1}, \frac{(-i)(z+\bar{z})}{|z^2|+1}, \frac{\left|z^2\right|-1}{|z^2|+1})$, llegamos a que

$$d(z, z^{'}) = \frac{2\left|z-z^{'}\right|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+\left|z^{'}\right|^2)}}.$$

De manera similar tenemos que $z \in \mathbb{C}$

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

1.3. Funciones de variable compleja

La definición de una función de variable compleja es análoga a la definición al caso real o, más general, a la de espacio topológico. En esta sección estamos interesados en estudiar funciones de una variable compleja y algunos teoremas importantes. Si desea tener una visión más amplia de está teoría se puede consultar [Agarwal *et al.*, 2011], [Antimirov *et al.*, 1998] y [Noguchi, 1998].

Definición 1.35 *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Si asignamos a cada punto $z \in G$ un número complejo único $w = f(z)$ decimos que la ecuación $w = f(z)$ define una función de valores complejos en G. Una función de valores complejos se puede escribirse de la siguiente forma:*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de variables reales y son la parte real e imaginaria respectivamente de $w = f(z)$, es decir, $u(x, y) = \operatorname{Re} z$ y $v(x, y) = \operatorname{Im} z$.

Definición 1.36 *Sea S es un conjunto de números complejos, la imagen del conjunto S en el z-plano, baja la aplicación f, es el conjunto $S' = f(S) = \{f(z) : z \in S\}$. Así f es una aplicación ó transformación de S en su imagen que es el conjunto $f(S)$.*

Definición 1.37 *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y S un subconjunto de números complejos, la imagen inversa de S, $f^{-1}(S)$, es el conjunto $f^{-1}(S) = \{z \in A : f(z) \in S\}$.*

Definición 1.38 *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función biyectiva, sea $g : f(A) \to A$ definida como: $\forall w \in f(A), g(w)$ es el único elemento de A tal que $f[g(w)] = w$ está función g es llamada la inversa de f, denotada como f^{-1}.*

Definición 1.39 *Un conjunto S se dice invariante hacia adelante o invariante bajo f si, y sólo si, $f(S) \subset S$. Un conjunto S se dice invariante hacia atrás bajo f si, y sólo si, $f^{-1}(S) \subset S$. Un conjunto S es llamado completamente invariante si este es invariante hacia adelante y hacia atrás.*

1.3.1. Límite y continuidad de una función de variable compleja

Definición 1.40 *Sean $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y z_0 es un punto de acumulación de A, se dice que, w_0 es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y se denota por:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0.$$

Si f está definida en un entorno de z_0 (a excepción tal vez de z_0 mismo) y si para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall z \in A$, $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| < \epsilon$.
Es decir, dado un entorno de radio ϵ alrededor del límite, w_0, podemos determinar un entorno de radio $\delta(\epsilon, z_0)$, alrededor de z_0.

Definición 1.41 *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, se dice que, f es continua en z_0 si para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para cada $|z - z_0| < \delta$ tenemos $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.*
Una función de variable compleja f es continua en A si es continua para todo $z \in A$.

Teorema 1.12 *[Antimirov et al., 1998] Una función $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ es continua en un punto $z_0 = x_o + iy_0$ si, y sólo si, su parte real y su parte imaginaria, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, respectivamente, son continuas en el punto (x_0, y_0).*

Definición 1.42 *Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, se dice que f es uniformemente continua en A si para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ tenemos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Teorema 1.13 *[Conway, 1978] Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función continua y si K subconjunto compacto de A, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto.*

Teorema 1.14 *Una función $f : A \to \mathbb{C}$ continua en un conjunto cerrado y acotado es acotada en valor absoluto en ese conjunto, es decir, existe algún $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| < M.$$

Teorema 1.15 *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función continua y si K en un conjunto cerrado y acotado de A, entonces f uniformente continua en K.*

1.3.2. Derivada de una función de variable compleja

Definición 1.43 *Una función de variable compleja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es derivable (en sentido complejo) en $a \in \Omega$ si existe el límite*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(a) - f(z)}{a - z},$$

en tal caso, este límite se denota por $f^{'}(a)$. A $f^{'}(a)$ se le conoce como la derivada de f en a. Se dice que f es diferenciable en Ω si es diferenciable para todo $z \in \Omega$.

Proposición 1.4 *Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in A$, entonces f es continua en a.*

Definición 1.44 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann) *Las ecuaciones de derivadas parciales,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Son llamadas las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Usaremos indiferentemente la siguiente notación para denotar la derivadas parciales de u y v:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Teorema 1.16 *[Antimirov* et al.*, 1998] Sean $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in int(A)$ con $z_0 = x_0 + iy_0$, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es diferenciable en z_0, entonces las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ con respecto de x y y existen en el punto (x_0, y_0). Además, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0),$$

en (x_0, y_0).

Teorema 1.17 *[Antimirov* et al.*, 1998] Sean $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in int(A)$, si las funciones de dos variables, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en el punto (x_0, y_0) y sus derivadas parciales son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces la función,*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

es diferenciable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$.

Definición 1.45 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en todos los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que f es holomorfa en Ω. A las funciones definidas y holomorfas en todo $\mathbb{C}$ se les llama funciones enteras. En este caso la función $f' : z \in \Omega \to f'(z) \in \mathbb{C}$ es llamada la función derivada o derivada de f, y también la denotamos por $\frac{df}{dz}$.*

Si f es holomorfa, entonces $\frac{1}{f(z)}$ es holomorfa fuera del conjunto $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$, y

$$(\tfrac{1}{f})' = -\tfrac{f'}{f^2}.$$

Si f_1 y f_2 son funciones holomorfa y a_1 y a_2 son constantes, se sigue:

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)' = a_1 f_1' + a_2 f_2'.$$

La fórmula de Leibniz se escribe de la siguiente forma:

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'.$$

Definición 1.46 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica en A si para todo $z_0 \in A$ existen $r_0 > 0$ y una serie de potencias centrada en z_0, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n (z - z_0)^n$ tal que $B(z_0, r_0) \subset A$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r_0)$.*

Teorema 1.18 *[Agarwal* et al.*, 2011] Si f es holomorfa en un abierto conexo Ω y $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$, entonces f es constante.*

Teorema 1.19 *[Noguchi, 1998] Una función f es analítica si, y sólo si, es holomorfa.*

1.3.3. Puntos de ramificación y ramas

Definición 1.47 *Si a cada valor de z correspondes sólo un valor de w, decimos que w es una función unívoca de z. Si más de un valor de w corresponde a cada valor de z decimos que w es una función multívoca ó multivaluada.*

Definición 1.48 *Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas; cada miembro de esta colección será llamada una rama de la función.*

Se acostumbra considerar un miembro particular como una rama principal de la función multívoca y el valor de la función correspondiente a esta rama el valor principal.

Cada rama de la función es unívoca. Con el fin de mantener la función unívoca, escogemos una barrera artificial como el eje de los reales positivos, la cual no acordamos cruzar. Esta barrera se llama una rama y el 0 se llama punto de ramificación.

1.4. Clases de singularidades y clases de funciones

Existen diferentes tipos de funciones en variable compleja. En esta sección definiremos una clase de funciones, la cual estudiaremos en esta tesis. Además de definir los tipos de singularidades.

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja.

Definición 1.49 *Un punto en el cual $f(z)$ deja de ser analítica es llamado un punto singular o singularidad de $f(z)$.*

Definición 1.50 *Un punto singular z_0 de $f(z)$ es llamada singularidad aislada si existe $\delta > 0$ tal que $f(z)$ es analítica en $0 <\mid z - z_0 \mid< \delta$.*

Si z_0 es una singularidad aislada de f, entonces z_0 puede ser una singularidad removible, polo o singularidad esencial. A continuación se definen estas singularidades.

(i) El punto z_0 es una singularidad removible de $f(z)$ si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y pertence a $\mathbb{C}$.

(ii) El punto z_0 es un polo de $f(z)$ si,

$$\lim_{z\to z_0} \mid f(z) \mid= \infty.$$

(iii) Una singularidad esencial, es una singularidad aislada que no es polo, ni punto de ramificación, ni singularidad removible.

Definición 1.51 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene un polo de orden n en z_0, si f tiene un polo en z_0 y n es el mínimo natural tal que: $f(z)(z - z_0)^n$ tiene una singularidad removible en z_0.*

Definición 1.52 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es meromorfa en el abierto Ω y se denota $f \in M(\Omega)$ si f es analítica en Ω excepto a lo sumo en una cantidad de puntos que sean todos singularidades aisladas evitables o polos.*

Definición 1.53 *Una función entera $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función que esta bien definida y es analítica (hólomorfa) en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.20 *[Noguchi, 1998] Si f es una función entera, entonces uno de los siguientes casos se cumple:*

1. *f es una función constante.*
2. *f tiene un polo en ∞, i.e., f es un polinomio.*
3. *f tiene una singularidad esencial aislada en ∞.*

En el último caso, 3 decimos que f es entera trascendente. Al conjunto de está clase de funciones las denotaremos por $\mathcal{E}$.

Definición 1.54 *Un punto $z_0 \in A$, es un valor omitido o un valor excepcional de Picard de una función $f : A \subset \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ si, $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in A$. Al conjunto de valores excepcionales de Picard se le denota por $\mathcal{PV}(f)$.*

Teorema 1.21 (Pequeño de Picard.) *[Conway, 1978] El número de valores omitidos de una función entera no constante f es a lo más dos.*

Teorema 1.22 (Grande de Picard) *[?] Si una función meromorfa f en $A\backslash\{z_0\}$ tiene una singularidad esencial en z_0, entonces f toma todos los valores de $\mathbb{C}_\infty$ un número infinito de veces en $v^*(z_0)$ una vecindad de z_0, excepto a lo más para dos punto de $\mathbb{C}_\infty$.*

Teorema 1.23 *[Barsegian y Begehr, 2005] Cada función continua de un espacio compacto en un espacio métrico es acotada.*

1.5. Curvas, contornos, y dominios simplemente conexos

En esta sección, definimos algunos pocos términos que serán usados en el capítulo 4. Para más detalles consultar [Agarwal *et al.*, 2011], [Bak y Newman, 2010], [Goluzin, 1969], [Greene y Krantz, 2006], [Krantz, 2007] y [Rudin, 1987].

Definición 1.55 *Si*

Definición 1.56 *La curva γ se dice que es simple, si $z(t_1) \neq z(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$, es decir, γ no se interseca ella misma.*
La curva γ se dice que es cerrada, si $z(a) = z(b)$. La region acotada por la curva cerrada γ se denota como $I(\gamma)$.

Definición 1.57 *La curva γ es llamada curva cerrada simple o curva de Jordan si es cerrada y $a < t_1 < t_2 < b$ entonces $z(t_1) \neq z(t_2)$, es decir, γ no se interseca ella misma excepto en los puntos finales.*

Definición 1.58 *Una curva γ dada por el rango de*

1. *$z^{'}(t) = x^{'}(t) + iy^{'}(t)$ existe y es continua en $[a, b]$.*
2. *$z^{'}(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.*

Definición 1.59 *Una curva γ dada por el rango de*

1. *$z(t)$ existe y es continua excepto para un número finitos de puntos en (a, b).*
2. *Cualquier punto $c \in (a, b)$, donde $z(c)$ no es continua, ambos el límite izquierdo $\lim_{t \to c^-} z(t)$ y el límite derecho $\lim_{t \to c^+} z(t)$ existen y son finitos.*
3. *En los puntos finales $z(a)$ y $z(b)$ el límite derecho $\lim_{t \to a^+} z(t)$ y el límite izquierdo $\lim_{t \to b^-} z(t)$ existen y son finitos.*

Definición 1.60 *La curva γ es llamada suave a pedazos si z y $z^{'}$ son continuas a pedazos.*

Definición 1.61 *Un contorno γ es una sucesión de curvas suaves $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ tal que el punto final de γ_k coincide con el punto inicial de γ_{k+1} para $1 \leq k \leq n - 1$. En este caso, escribimos*

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n.$$

Definición 1.62 *Sea de*

Definición 1.63 *Sea $f(z)$ una función meromorfa en un dominio simplemente conexo S, y γ un contorno cerrado simple orientado positivamente en S tal que, para todo $z \in \gamma$, $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq \infty$. Entonces,*

$$ind_a\gamma = w(f(\gamma), a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z) - a}dz,$$

es llamado el número de vueltas de $f(\gamma)$ *alrededor de* a *o el índice de una curva* $f(\gamma)$ *con respecto a un punto* a. *Este representa el número de veces que la curva* $f(\gamma)$ *da vueltas alrededor del punto* a.

Capítulo 2

Familas Normales

En este capítulo estudiaremos algunos resultados de familias normales y analizamos de forma local cuando un conjunto es estable basándonos en el concepto de familias normales, esto con la finalidad de poder definir en el siguiente capítulo los conjuntos de Fatou y Julia. Estos temas, así como los resultados pueden ser encontrados en [Bergweiler, 1995], [Conway, 1978], [De Amo, 2009], [Gamelin, 2001], [Noguchi, 1998] y [Palka, 1990].

2.1. Sucesión de funciones

En esta sección trabajaremos con sucesiones de funciones complejas definidas en un subconjunto G de $\mathbb{C}$. La sucesión queda determinada por una función f, la cual tiene dominio los naturales y codominio el espacio de las funciones complejas. Para denotar el n-ésimo término de la sucesión lo escribimos como f_n en vez de $f(n)$ y denotamos a toda la sucesión como $\{f_n\}$.

Definición 2.1 *Sea*

$$\mathbb{F} = \{f \mid f : A \to \mathbb{B}\},$$

a $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}$ le llamamos una familia de funciones de $\mathbb{F}$.

Definición 2.2 *Sea $\mathcal{F}$ el espacio de funciones complejas de $G \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Una sucesión de funciones complejas es una aplicación $f :\ n \in \mathbb{N} \to f(n) = f_n \in \mathcal{F}$, que suele representarse como $\{f_n\}$.*

Definición 2.3 *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión, llamaremos subsucesión de* $\{f_n\}$ *a una sucesión* $\{f_{n_i}\}$ *donde* $n_i < n_{i+1}$.

Definición 2.4 *Sea* $\{f_n\}$ *decimos que la sucesión converge puntualmente si, y sólo si, para todo* $z \in G$, *la sucesión* $\{f_n(z)\}$ *converge.*

Definición 2.5 *Se dice que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a una función* f *en* $G \subset \mathbb{C}$ *si para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, *para todo* $n \geq N$ *y para todo* $z \in G$.

Definición 2.6 *Una sucesión* $\{f_n\}$ *esta acotada uniformente en* $G \subset \mathbb{C}$ *si existe* $M > 0$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y para toda* $z \in G$, $|f_n(z)| \leq M$.

Definición 2.7 *Una familia* $\mathfrak{F}$ *es localmente acotada, si para cada punto* z_0 *en el dominio existe un valor real* M *y una vecindad de* z_0 *en donde* $| f(z) |< M$, *para todo punto* z *en la vecindad y toda función en la familia.*

2.2. Compacidad y convergencia en el espacio de funciones analíticas

En esta sección se define una métrica en el conjunto de todas las funciones analíticas sobre un abierto G. (Ω, d) siempre denotará un espacio métrico completo.

Definición 2.8 *Si* G *es un conjunto abierto en* $\mathbb{C}$ *y* (Ω, d) *es un espacio métrico, entonces definimos:*

- $C(G, \Omega)$ *es el espacio de funciones continuas que van de* G *en* Ω.
- $H(G)$ *es la colección de funciones holomorfas sobre* G, $H(G) \subseteq C(G, \mathbb{C})$, *donde* $C(G, \mathbb{C})$ *es el espacio de funciones continuas que van de* G *en* $\mathbb{C}$.
- $M(G)$ *es el conjunto de todas las funciones meromorfas sobre* G *y* $M(G) \subseteq C(G, \mathbb{C}_\infty)$, *donde* $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ *es el espacio de funciones continuas que van de* G *a la esfera.*

Para definir una métrica en $C(G, \Omega)$ primero, debemos establecer algunos hechos sobre los conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$.

Proposición 2.1 *[Conway, 1978] Si G es un abierto en $\mathbb{C}$, entonces existe una sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de G tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Es más, los conjuntos K_n se pueden elegir para satisfacer las siguientes condiciones:*

(i) $K_n \subset int\ K_{n+1}$.

(ii) Si $K \subset G$ compacto, entonces $K \subset K_n$ para algún n.

Si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde K_n es compacto y $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, se define

$$\rho_n(f,g) = \sup\{d(f(z), g(z)) \ : z \in K_n\}, \tag{2.1}$$

para todas las funciones f y g en $C(G,\Omega)$. Además se define

$$\rho(f,g) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}. \tag{2.2}$$

Como $t(1+t)^{-1} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, la serie en 2.2 está dominada por el término $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$, entonces la serie 2.2 es convergente.

Proposición 2.2 *[Conway, 1978] El espacio $(C(G,\Omega),\rho)$ es un espacio métrico.*

Lema 2.1 *[Conway, 1978] Sea la métrica definida como en la Ecuación 2.2. Dado $\epsilon > 0$, entonces existen un $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$ tal que para f y g en $C(G,\Omega)$,*

$$\sup\{d(f(z), g(z) \ : \ z \in K)\} < \delta \ \Rightarrow \ \rho(f,g) < \epsilon. \tag{2.3}$$

Recíprocamente, si dados $\delta > 0$ y algún conjunto compacto $K \subset G$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todas f, g en $C(G,\Omega)$,

$$\rho(f,g) < \epsilon \ \Rightarrow \ \sup\{d(f(z), g(z) \ : \ z \in K)\} < \delta. \tag{2.4}$$

Proposición 2.3 *[Conway, 1978]*

(a) *Un conjunto* $\vartheta \subset (C(G,\Omega),\rho)$ *es abierto si, y sólo si, para cada* $f \in \vartheta$ *existe un conjunto compacto* K *y una* $\delta > 0$ *tales que* $\{g : d(f(z),g(z)) < \delta,\ z \in K\} \subset \vartheta$.

(b) *Una sucesión* $\{f_n\}$ *en* $(C(G,\Omega),\rho)$ *converge a* f *si, y sólo si,* $\{f_n\}$ *converge a* f *uniformemente en todos los subconjuntos compactos de* G.

Demostración 2.1 *Supongamos que* ϑ *es abierto y sea* $f \in \vartheta$ *entonces para algún* $\epsilon > 0$, $\{g \mid \rho(f,g) < \epsilon\} \subset \vartheta$. *Pero por la primera parte del Lema 2.1 tenemos que existe un* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* K.

Corolario 2.1 *La colección de conjuntos abiertos es independiente de la elección de los conjuntos* $\{K_n\}$. *Esto es, si* $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n'$ *donde cada* K_n' *es compacto y* $K_n' \subset$ *int* K_{n+1}' *y si* μ *es la métrica definida por los conjuntos* $\{K_n'\}$, *entonces un conjunto es abierto en* $(C(G,\Omega),\mu)$ *si, y sólo si, es abierto en* $(C(G,\Omega),\rho)$.

En lo sucesivo, cuando consideremos a $C(G,\Omega)$ como un espacio métrico se supondrá que la métrica esta dada por la ecuación 2.2, para alguna sucesión $\{K_n\}$ de compactos tal que $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$ y $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Proposición 2.4 $C(G,\Omega)$ *es un espacio métrico completo.*

Definición 2.9 *Una familia* $\mathcal{F} \subset C(G,\Omega)$ *es normal en* G *si cada sucesión de funciones* $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ *tiene una subsucesión* $\{f_{n_i}\}$ *convergente en* $C(G,\Omega)$.

Observación 2.1 *La definición antes mencionada se parece a la definición de subconjuntos secuencialmente compactos, pero el límite de la subsucesión no se requiere que este en el conjunto* $\mathcal{F}$.

Proposición 2.5 *Un conjunto* $\mathcal{F} \subset C(G,\Omega)$ *es normal si, y sólo si, su clausura es compacta* ($\bar{\mathcal{F}}$ *es compacto).*

Demostración 2.2 *Se sigue del Lema 1.1*

Teorema 2.1 *Una familia* $\mathcal{F}$ *de funciones analíticas es normal en un dominio* G *si, y sólo si,* $\mathcal{F}$ *es normal en cada punto* $z_0 \in G$ *(esto es, en alguna vencidad* U *de* z_0*).*

Proposición 2.6 *[Conway, 1978] Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal si, y sólo si, para todo conjunto compacto $K \subset G$ y $\delta > 0$ existen funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ existe al menos un k, $1 \leq k \leq n$, con*

$$\sup\{d(f(z), f_k(z) \ : \ z \in K)\} < \delta.$$

Demostración 2.3 *Suponemos que $\mathcal{F}$ es normal y sean K y $\delta > 0$ dados. por el Lema 2.1, existe un $\epsilon > 0$ tal que la Ecuación 2.4 es válida. Como $\mathcal{F}$ es normal por la Proposición 2.5 tenemos que $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto. Como $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto, por el Teorema 1.7 tenemos que $\bar{\mathcal{F}}$ es precompacto, además como $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}$ por Teorema 1.4 tenemos que $\mathcal{F}$ es precompacto. Así que existen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que:*

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f \ : \ \rho(f, f_k) < \epsilon\},$$

Pero por la elección de ϵ, tenemos que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f \ : \ (f(z), f_k(z)) < \delta, \, z \in K\},$$

esto es, $\mathcal{F}$ satisface la condición de la proposición.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ posee la propiedad establecida. Como $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}$ entonces $\bar{\mathcal{F}}$ también satisface la propiedad establecida. Podemos asumir que $\mathcal{F}$ es cerrado; como $C(G, \Omega)$ es completo, por el Teorema 1.3 $\mathcal{F}$ debe ser completo. Por la segundad parte del Lema 2.1, se sigue que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado y por la parte (d) del Teorema 1.9 tenemos que $\mathcal{F}$ es compacto, como $\mathcal{F}$ es cerrado, $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto y de la Proposición 2.5 tenemos que $\mathcal{F}$ es normal.

Teorema 2.2 (Convergencia de Weierstrass) *[Palka, 1990] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en un conjunto abierto $G \subset \mathbb{C}$ y supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre los conjuntos compactos de G a una función f, $f : G \to \mathbb{C}$ cuando $n \to \infty$, entonces f es analítica en G y, además $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ (derivada de orden k) converge uniformemente sobre los conjuntos compactos de G.*

2.3. Teorema de Arsela-Ascoli y Montel

Definición 2.10 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en un punto $z_0 \in G$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces,*

$$d(f(z), f(z_0)) < \epsilon,$$

para todo $f \in \mathcal{F}$.

Definición 2.11 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en un conjunto $E \subset G$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para $z, z^{'} \in E$ y $|z - z^{'}| < \delta$, entonces*

$$d(f(z), f(z^{'})) < \epsilon,$$

para todo $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.7 *[Conway, 1978] Si una familia $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en cada punto de G, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre cada subconjunto compacto de G.*

Demostración 2.4 *Sea $A \subset G$ compacto y $\epsilon > 0$ fijo. Por hipótesis para todo $w \in A$, existe $\delta_w > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta_w$ entonces,*

$$d(f(w), f(w_0)) < \tfrac{\epsilon}{2}$$

para cada $f \in \mathcal{F}$. Ahora $B(w, \delta_w \mid w \in A)$ forma una cubierta abierta de A; Como A es compacto existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in A$ tal que $A \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B(w_k, \delta_{w_k})$. Ahora como A es compacto por el Teorema 1.9 tenemos que A es secuencialmente compacto, y por lo tanto cumple con la hipótesis del Teorema 1.6 entonces para cada $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset B(w_k, \delta_{w_k})$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con esto sean $a_1, a_2 \in A$ con $|a_1 - a_2| < \delta$ tenemos que existe $a_k \in A$ con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $B(a_1, \delta) \subset B(w_k, \delta_{w_k})$ entonces se cumple que $d(f(a_1), f(w_k)) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(f(a_2), f(w_k)) < \frac{\epsilon}{2}$ aplicando la desigualdad del triángulo se tiene

$$d(f(a_1), f(a_2)) \leq (f(a_1), f(w_k)) + d(f(a_2), f(w_k)) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua en A.

Teorema 2.3 (Rouché.) *[Noguchi, 1998] Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$. Sean φ y ψ dos funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que se verifica,*

$$| \varphi(z) - \psi(z) |<| \varphi(z) | + | \psi(z) |, \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Entonces φ y ψ tienen el mismo número de ceros (contando los órdenes de multiplicidad) en Ω.

Corolario 2.2 *Sea Ω un abierto acotado del plano complejo $\mathbb{C}$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente y f no se anula en ningún punto de $\partial\Omega$, es decir $f(z) \neq 0$ $\forall z\partial\Omega$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$ entonces f_m y f tiene el mismo número de ceros en Ω.*

Demostración 2.5 *Como $\partial\Omega$ es compacto y $f(z) \neq 0$ para todo punto en $\partial\Omega$, entonces existe $\rho > 0$ tal que:*

$$| f(z) |\geq \rho, \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Haciendo uso de la hipótesis de la convergencia uniforme,

$$\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m, \textit{ implica que } | f(z) - f_n(z) |< \rho, \forall z \in \partial\Omega.$$

Así tenemos que para $n \geq m$, $f, f_n \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) \cap H(\Omega)$ y para $z \in \partial\Omega$,

$$| f(z) - f_n(z) |< \rho \leq| f(z) |\leq| f(z) | + | f_n(z) |.$$

Usando el Teorema 2.3, ambas funciones han de tener el mismo número de ceros en Ω. La desigualdad anterior dice que ambas funciones no se anulan en la frontera, por lo que también es valido en $\overline{\Omega}$.

Teorema 2.4 (Hurwitz.) *[Bergweiler, 1995] Sean D un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en D, supongamos que $f_n \to f$ uniformemente sobre los compactos de D (f necesariamente holomorfa). Si $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, o bien $f \equiv 0$.*

Demostración 2.6 *La función f es holomorfa en D por el Teorema 2.2. Ahora supongamos que f no es idénticamente cero en D y que existe $a \in D$ tal que $f(a) = 0$. Los ceros de f son aislados, por lo que existe $r > 0$ tal que*

$$\overline{B(a,r)} \subset D : 0 <| a - z |\leq r \ \ con \ f(z) \neq 0.$$

Ahora podemos aplicar el Corolario 2.2, para n *suficientemente grande, por lo que,* f_n *y* f *tienen el mismo número de ceros en* $B(a,r)$*, pero esto es una contradicción con la hipótesis de que* $f_n(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D$*, y todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 2.8 *[De Amo, 2009] La familia* $\mathcal{F}$ *normal de funciones continuas sobre un conjunto* G *abierto del plano complejo, están puntualmente acotadas, es decir para todo* $z \in G$ *el conjunto* $\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{F}\}$ *está acotado.*

Demostración 2.7 *Obsérve que para cada* $z \in G$ *la aplicación de* $C(G,\Omega) \to \Omega$ *definida por la regla de asociación* $f \to f(z)$ *es continua; Por la Proposición 2.5 tenemos que* $\bar{\mathcal{F}}$ *es compacta, como la función es continua por el Teorema 1.13 tenemos que su imagen es compacta en* Ω *y por lo tanto* $\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{F}\}$ *esta acotado.*

Proposición 2.9 *[De Amo, 2009] Una familia* $\mathcal{F}$ *normal de funciones continuas sobre un abierto* G *de* $\mathbb{C}$ *es puntualmente equicontinua, es decir, para todo* $a \in G$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $|z-a| < \delta$ *implica que* $|f(z) - f(a)| < \epsilon$*. para toda* $f \in \mathcal{F}$*.*

Demostración 2.8 *Fijemos* $a \in G$ *y* $\epsilon > 0$*, existe* $\rho > 0$ *tal que* $K = \overline{B(a,\rho)}$*. Por otro lado la familia* $\{U(f,K,\frac{\epsilon}{3}) \ : f \in \bar{\mathcal{F}}\}$*, donde* $U(f,G,r) = \{g \in C(G,\mathbb{C}) \ : p_k(g-f) < r\}$ *y* $p_k(f) = \max\{|f(z)| \ : z \in K\}$*, es un recubrimiento de* $\bar{\mathcal{F}}$*, por la Proposición 2.5 tenemos que* $\bar{\mathcal{F}}$ *es compacto, luego podemos elegir un recubrimiento finito que lo contenga, esto es, existen* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \bar{\mathcal{F}}$ *tales que* $\bar{\mathcal{F}} \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U(f_k, K, \frac{\epsilon}{3})$*.*

Por la continuidad para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$*, existe* $0 < \delta_k < \rho$ *tal que* $|z-a| < \delta_k$ *implica que* $|f_k(z) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{3}$ *y elegimos* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$*.*

Ahora, tomenos cualquier $f \in \bar{\mathcal{F}}$ *y que* $|z-a| < \delta$ *para algún* $k, f \in U(f_k, K, \frac{\epsilon}{3})$*.*

$$|f(z) - f(a)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(a)| + |f_k(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Lema 2.2 *[De Amo, 2009] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en un abierto G de $\mathbb{C}$. Supongamos que la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es puntualmente equicontinua y que $\{f_n\}$ converge puntualmente en cada punto de un subconjunto $A \subset G$ denso en G, entonces $\{f_n\}$ es uniformemente convergente sobre los compactos de G.*

Demostración 2.9 *Fijemos un compacto arbitrario $K \subset G$, probaremos que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en K.*
Sea $\epsilon > 0$, por la equicontinuidad puntual de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, para cada $z \in G$ existe $\delta = \delta(z) > 0$ tal que si $w \in G$ y $|z - w| < \delta$ entonces

$$|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\epsilon}{5} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Ahora $\{B(z, \delta(z)) : z \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es un conjunto compacto entonces existen $z_1, z_2, \ldots, z_m \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(z_k, \delta(z_k))$; Por la densidad de A existen $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tal que $a_k \in B(z_k, \delta(z_k))$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Por la convergencia puntual en los puntos del conjunto denso $A \subset K$, la sucesión $\{f_n(a)\}$ es de Cauchy para toda $a \in A$, asi para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ con $p, q \geq n_k$, entonces

$$|f_p(a_k) - f_q(a_k)| < \frac{\epsilon}{5}. \tag{2.6}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ y sean $p, q \geq n_0$ y $z \in K$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $z \in B(z_j, \delta(z_j))$. Ahora utilizando la Ecuación 2.6 y dos veces la Ecuación 2.5 tenemos que:

$$\begin{gathered} |f_p(z) - f_q(z)| \leq |f_p(z) - f_p(z_k)| + |f_p(z_k) - f_p(a_k)| + \\ |f_p(a_k) - f_q(a_k)| + |f_q(a_k) - f_q(z_k)| + |f_q(z_k) - f_q(z)| < \epsilon. \end{gathered}$$

Así $\{f_n\}$ es de Cauchy uniformente convergente.

Lema 2.3 *[De Amo, 2009] Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas sobre un abierto G puntualmente acotado en G. Sea A un conjunto (infinito) numerable de G y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{F}$, entonces existe una subsucesión parcial $\{f_{\rho(n)}\}$ convergente en cada punto de A.*

Demostración 2.10 *Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, como por hipótesis la sucesión de complejos $\{f_n(a_1)\}_n$ está acotada, admite una subsucesión parcial convergente; llamémosla $\{f_{\sigma_1(n)}(a_1)\}_n$. Del mismo modo, la sucesión $\{f_{\sigma_1(n)}(a_2)\}_n$ está acotada vamos a escribir como $\{f_{\sigma_2(n)}(a_2)\}_n$ la subsucesión parcial convergente que admite. Observar que estamos garantizando que $\{f_{\sigma_2(n)}(a_1)\}_n$ converge, pues $\{f_{\sigma_2(n)}(a_1)\}_n$ es una subsucesión parcial de $\{f_{\sigma_1(n)}(a_1)\}_n$. Escribamos como sigue para precisar la notación,*

Existe una función $\tau_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \tau_1$.

Procedemos por inducción, dadas las aplicaciones $\sigma_k, \tau_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes con $\{f_{\sigma_k(n)}(a_j)\}_n$ convergentes para $1 \leq j \leq k+1$ podemos definir $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \tau_k$. La sucesión $\{f_{\sigma_k(n)}(a_{k+1})\}_n$ está acotada y por lo tanto admite una subsucesión parcial $\{f_{\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1})\}_n$ convergente, que garantiza la convergencia de $\{f_{\sigma_{k+1}(n)}(a_j)\}_n$ para $1 \leq j \leq k+1$.

Llamemos $\varphi(n) = \sigma_n(n)$ para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que la sucesión $\{f_{\varphi(n)}\}$ es subsucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge para todo punto en A.

Primero veamos que $\{f_{\varphi(n)}\}$ es subsucesión parcial de $\{f_n\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) = \sigma_{n+1}(n+1) = (\sigma \circ \tau)(n+1) &= \sigma_n(\tau_n(n+1)) \\ \geq \sigma_n(\tau_n(n)) &= (\sigma_n \circ \tau_n) = \varphi(n). \end{aligned}$$

Ahora probaremos que, para $p \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_{\varphi(n)}(a_p)\}_n$ es convergente. Para ello bastara probar que $\{f_{\varphi(p+n)}(a_p)\}_n$ es convergente. Y esto lo vamos a lograr probando que es una subsucesión parcial de $\{f_{\sigma_p(n)}(a_p)\}_n$ la cual es evidentemente convergente.

Vamos a probar que existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que, $\varphi_{p+n} = \sigma_p \circ \psi_n$. Como

$$\begin{aligned} \varphi(p+n) = \sigma_{p+n}(p+n) &= (\sigma_{p+n-1} \circ \tau_{p+n-1})(p+n) \\ &= \sigma_{p+n-1}(\tau_{p+n-1}(p+n)) \\ &= (\sigma_{p+n-2} \circ \tau_{p+n-2})(\tau_{p+n-1}(p+n)) \\ &= (\sigma_{p+n-2} \circ \tau_{p+n-2} \circ \sigma_{p+n-1})(p+n) \\ &\vdots \\ (\sigma_p \circ \tau_p \circ \ldots \circ \sigma_{p+n-1})(p+n) &=: \sigma_p(\psi_n), \end{aligned}$$

y con esto tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &:= (\tau_p \circ \ldots \circ \tau_{p+n-1} \circ \tau_{p+n})(p+n+1) \\ &> (\tau_p \circ \ldots \circ \tau_{p+n-1})(p+n) =: \psi_n,\end{aligned}$$

con lo que podemos concluir que $\{f_{\varphi(p+n)}(a)_p)\}_n$ *es una subsucesion parcial de* $\{f_{\tau_p(n)}(a_p)\}_n$ *y por lo tanto* $\{f_{\varphi(p+n)}(a_p)\}_n$ *es convergente.*

Teorema 2.5 (Arsela-Ascoli) *[Conway, 1978] Una familia* $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ *es normal si, y sólo si, las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

(a) *Para cada* $z \in G$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ *tiene cerradura compacta.*

(b) $\mathcal{F}$ *es equicontinua en cada punto de* G.

Observación 2.2 *Notar que si* $G \subset \mathbb{R}$ *ó* $G \subset \mathbb{C}$ *la primera condición equivale a,*

a) *Parar cada* $z \in G$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ *esta acotado.*

Demostración 2.11 *Primero supongamos que* $\mathcal{F}$ *es normal, de las Proposiciones 2.8 y 2.9 se sigue que para cada* $z \in G$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ *está puntualmente acotado y que* $\mathcal{F}$ *es equicontinua en cada punto de* G *respectivamente.*

Ahora probemos la suficiencia. Sea A *un conjunto denso y numerable en* G. *Si consideramos una sucesión* $\{f_n\}$ *de elementos de* $\mathcal{F}$, *por el Lema 2.3 tenemos que existe una subsucesión parcial* $\{f_{\varphi(n)}\}$ *convergente en cada punto de* A. *Como la equicontinuidad se hereda por subfamilias,* $\{f_{\varphi(n)}\}$ *lo habrá de ser en* A *y por el Lema 2.2 tenemos que* $\{f_{\varphi(n)}\}$ *converge uniformente sobre compactos de* G.

Ahora, por el Lema 1.1, tenemos que $\{f_{\varphi(n)}\}$ *converge a una función* f *de* $C(G, \mathbb{C})$.

Teorema 2.6 (Montel) *Una familia* $\mathcal{F}$ *en* $H(G)$ *es normal si, y sólo si, está uniformente acotada en cada compacto de* G.

Demostración 2.12 *Supongamos que* $\mathcal{F}$ *es normal, por la Proposición 2.5 tenemos que* $\bar{\mathcal{F}}$ *es compacto. Sea* $K \subset G$ *un conjunto compacto, la familia* $\{U(f, K, 1)\ f \in \bar{\mathcal{F}}\}$ *es un recubrimiento abierto del compacto* $\bar{\mathcal{F}}$, *del que se puede extraer un recubrimiento finito, es decir, existen* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \bar{\mathcal{F}}$: $\bar{\mathcal{F}} \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U(f_k, K, 1)$.

Ahora por continuidad, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *existe* $M_k > 0$ *tal que* $|f_k(z)| \leq M_k$, *para todo* $z \in K$. *Sea* $M = 1 + \text{máx}\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$. *Para* $f \in \mathcal{F}$ *y* $z \in K$ *se tiene que existe* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tal que* $f \in U(f_k, K, 1)$ *y* $|f(z)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z)| < 1 + M_k < M$, *por lo tanto* $\mathcal{F}$ *está uniformemente acotada.*

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ *está uniformemente acotada en cada compacto de* G. *Sea* $K \subset G$ *compacto. La acotación uniforme sobre compactos nos dice que existe* $M_k > 0$ *tal que* $|f(z)| < M_k$ *para todo* $z \in K$ *y para toda* $f \in \mathcal{F}$. *Sea* $a \in G$ *y* $\epsilon > 0$, *por la hipótesis de uniformemente acotado sobre compactos, existen un* $r > 0$ *y* $M > 0$ *tal que* $\bar{B}(a, r) \subset G$ *y* $|f(z)| \leq M$ *para todo* $z \in \bar{B}(a, r)$ *y para todo* $f \in \mathcal{F}$. *Sea* $|z - a| < \frac{1}{2}\epsilon$ *y* $f \in \mathcal{F}$; *entonces usando la fórmula elemental de Cauchy con* $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(z)| = &|\frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - a} dw| \\ &\frac{1}{2\pi}| \int_\gamma f(w) \frac{f(w)}{(w - z)(w - a)} dw| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r M \frac{|z - a|}{\frac{r}{2} r} = \frac{2M}{r} |z - a|. \end{aligned}$$

Si elegimos $\delta = \text{mín}\{\frac{\epsilon M}{2r}, \frac{r}{2}\}$, *entonces*

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon \text{ para todo } f \in \mathcal{F}.$$

Así la familia $\mathcal{F}$ *es puntualmente equicontinua en* G *y usando el Teorema 2.5 se tiene que* $\mathcal{F}$ *es normal.*

Corolario 2.3 *Sean* G_1, G_2 *abiertos en* $\mathbb{C}$. *Supongamos que* G_2 *está acotado. Entonces la familia* $\{f \in H(G_1) \ : f(G_1) \subset f(G_2)\}$ *es normal.*

Demostración 2.13 *Claramente para cada compacto* $K \subset G_1$ *la familia dada está uniformemente acotada por estar en* G_2. *Aplicando el Teorema 2.6 se tiene el resultado.*

De la Sección 1.2.1 sabemos que la métrica esférica está dada por $2 \mid dz \mid \backslash(1+ \mid z \mid^2)$. La longitud esférica de una curva $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, está dada por

$$\text{longitud esférica de } \gamma = \int_\gamma \frac{2 \mid dz \mid}{1+ \mid z \mid^2} = \int_b^a \frac{2 \mid \gamma'(t) \mid dt}{1+ \mid \gamma'(t) \mid^2}.$$

Si ahora $w = f(z)$ es una función meromorfa, entonces la longitud esférica de la imagen de la curva $f \circ \gamma$ está dada por

$$\text{longitud esférica de } f \circ \gamma = \int_{\gamma} \frac{2 \mid f'(z) \mid}{1 + \mid f'(z) \mid^2} \mid dz \mid.$$

Esto no lleva a definir la derivada esférica de $f(z)$.

Definición 2.12 *Si $f : D \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa en el dominio D, entonces definimos la derivada esférica de f, $f^{\#}$, como*

$$f^{\#} = \frac{2 \mid f'(z) \mid}{1 + \mid f'(z) \mid^2}.$$

La longitud esférica de $f \circ \gamma$ es simplemente

$$\textit{longitud esférica de } f \circ \gamma = \int_{\gamma} f^{\#}(z) \mid dz \mid.$$

Lema 2.4 *[Gamelin, 2001] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio de D si $f_k(z) \to f(z)$ normalmente en D, entonces $f_k^{\#}(z) \to f^{\#}(z)$ uniformemente sobre los compacto de D.*

Teorema 2.7 (Marty) *[Gamelin, 2001] Una familia $\mathcal{F} \subset M(D)$ es normal en $C(D, C_\infty)$ si, y sólo si, la familia de derivadas esféricas $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D.*

Demostración 2.14 *Supongamos que la familia de derivadas esféricas están uniformemente acotadas cerca de $z_0 \in D$, es decir,*

$$f^{\#}(z) \leq C \textit{ para } C > 0, \mid z - z_0 \mid < r \textit{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Si $\mid z_1 - z_0 \mid < r$ y γ es el segmento de línea recta de z_0 a z_1, entonces la distancia esférica de $f(z_0)$ a $f(z_1)$ está estimada por

$$\sigma(f(z_0), f(z_1)) \leq \int_{\gamma} f^{\#}(z) \mid dz \mid \leq C \mid z_0 - z_1 \mid.$$

Por que la estimación no depende de la función $f \in \mathcal{F}$, consideradas como funciones de la métrica Euclidiana a la métrica esférica, la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en z_0. El Teorema 2.5(Arsela-Ascoli) implica que $\mathcal{F}$ es normal.

Por otro lado, si la familia de derivadas esféricas de la funciones en $\mathcal{F}$ no están uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de D, entonces existe $f_k \in \mathcal{F}$ tal que el máximo de $f_k^{\#}$ sobre algún compacto de D tiende a $+\infty$. Por el Lema 2.4, $\{f_k\}$ no puede tener una subsucesión convergente normalmente, por lo tanto $\mathcal{F}$ no es normal.

Capítulo 3

Iteración de funciones, puntos fijos y conjuntos de Fatou y Julia

La transformación $w = f(z)$ del plano z en el plano w puede pensarse también como una transformación del plano z en sí mismo. Con esta interpretación, los puntos para los cuales $z = f(z)$ permanecen fijos, serán de gran importancia en nuestro trabajo ya que nos permitiran establecer algunas propiedad básicas de la teoría de Fatou-Julia. Los resultados en este capítulo se encuentran en [Baker, 1968], [Barsegian y Begehr, 2005], [Bergweiler, 1995], [Chuang, 1990], [Hua, 1998] y [Milnor, 2006].

3.1. Iteración de funciones y puntos fijos

Al conjunto de la clase de funciones enteras trascendentes lo denotaremos por $\mathcal{E}$, esto es:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Ejemplo 3.1 *Funciones en la clase $\mathcal{E}$.*

(i) $f(z) = \lambda \sin(z), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $g(z) = \lambda e^z, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $h(z) = e^z + \sin(z)$.

(iv) $t(z) = e^z + z$.

De aquí en adelante trabajaremos con funciones en la clase $\mathcal{E}$.

Definición 3.1 *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja en $\mathcal{E}$ se define la n-ésima iterada de f como: la composición de f n veces, es decir,*

$$f^n = f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f,$$

donde

$$z_1 = f(z_0),\ z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2),\ \ldots,\ z_n = f(z_{n-1}),\ \textit{asi}\ z_n = f^n(z_0),\ \textit{esto es,}$$

$f^n(z_0) = f(f(f \ldots f(z_0)))$.

Notación 3.1 *La n-ésima iterada de f se denota como $f^n(z)$, donde $z \in \mathbb{C}$.*

Observación 3.1 *Las funciones en la clase $\mathcal{E}$ cumplen lo siguiente:*

$$\textit{Si } f \in \mathcal{E}, \textit{ entonces } f^n \in \mathcal{E}.$$

Definición 3.2 *Dado $z_0 \in X = \mathbb{C}$, la órbita hacia adelante de z_0 es el conjunto*

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^n(z_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Definición 3.3 *Dado $z_0 \in X = \mathbb{C}$, la órbita hacia atrás de z_0 es el conjunto*

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0 : n = 0, 1, 2, \ldots\},$$

esto es, el conjunto de las pre-imagenes de z_0 bajo $f, f^2, f^3, \ldots$.

Definición 3.4 *Dado $z_0 \in X = \mathbb{C}$, la gran órbita de z_0 es el conjunto*

$$O(z_0) = O^-(z_0) \cup \{z_0\} \cup O^+(z_0).$$

Definición 3.5 *Un punto $z_0 \in A$ es llamado un punto excepcional de f si $O^-(z_0)$ es finita. El conjunto de puntos excepcionales de f es denotado por $\mathbf{E}(f)$.*
Al número de elementos de $\mathbf{E}(f)$ se le denota por $\mid \mathbf{E}(f) \mid$ y se le conoce como la cardinalidad de $\mathbf{E}(f)$.

Definición 3.6 *Un punto* $z_0 \in A$ *es llamado un punto omitido de* f*, si* $O^-(z_0)$ *es vacío.*

Definición 3.7 *Decimos que* z_0 *es un punto periódico de período* n *de la función* f*, si* n *es el menor natural que cumple que* $f^n(z_0) = z_0$*.*
Si z_0 *es un punto periódico de período* n*, entonces* $O^+(z_0)$ *es llamada una órbita ciclíca o periódica.*

Definición 3.8 *Decimos que* z_0 *es un punto preperiódico de período* n *de la función* f *si existe* $m > 0$ *tal que* $f^{m+n}(z_0) = f^n(z_0)$*.*
Si z_0 *es un punto preperiódico de período* n*, entonces* $O^+(z_0)$ *es llamada una órbita preperiódica.*

Definición 3.9 *Una órbita que no es periódica ni preperiódica en* z_0*, se dice que es una órbita errante.*

Definición 3.10 *Un punto* z *que cumple que* $f(z) = z$*, se llama punto fijo de la función* f*.*

Ejemplo 3.2 *La función* $f(z) = \lambda e^z - \lambda$ *es una función entera trascendente, para encontrar sus puntos fijos, observemos:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda e^z - \lambda, \\ &= \lambda(e^z - 1). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} f(0) &= \lambda(e^0 - 1), \\ &= \lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(0) = 0$*, es decir* $z_0 = 0$ *es un punto fijo de* f*.*

Sin embargo, no siempre resulta fácil determinar si una función, tiene puntos fijos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 *La función* $f(z) = e^z$ *es una función entera trascendente, por definición de punto fijo,*

$$\begin{aligned} e^z &= z, \\ \Leftrightarrow e^z - z &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación sólo tiene soluciones aproximadas mediante métodos numéricos.

Además hay funciones enteras trascendente que no tienen puntos fijos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 *Sea la función entera trascendente $f(z) = e^z + z$, por definición de punto fijo,*

$$\begin{aligned} e^z + z &= z \\ \Leftrightarrow e^z + z - z &= 0, \\ \Leftrightarrow e^z &= 0, \end{aligned}$$

pero esto no puede pasar ya que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto la función $f(z)$ no tiene puntos fijos.

Los puntos fijos son importantes en la teoría de iteración, pero pueden no existir para funciones enteras trascendentes en la primera iterada, así que se tendría que analizar para otras iteradas.

Definición 3.11 *Sea $z_0 \neq \infty$ un punto periódico de orden n, es decir, $f^n(z_0) = z_0$. El número $\lambda = (f^n)'(z_0)$ es llamado el multiplicador de $f(z)$.*

Observación 3.2 *(a) Por la regla de la cadena,*

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^j(z_0)).$$

(b) Este tiene que ser modificado si $z_0 = \infty$: definimos a λ como:

$$\lambda = \frac{1}{f^n(\frac{1}{z_0})}.$$

Gracias al multiplicador podemos caracterizar a los ciclos de puntos periódicos de la siguiente forma:

Definición 3.12 *Sea z_0 un punto periódico. Se clasifica el punto periódico de acuerdo al multiplicador λ como sigue:*

(a) *Atractor si* $\mid \lambda \mid < 1$,

(b) *Super atractor* $\mid \lambda \mid = 0$,

(c) *Repulsor si* $\mid \lambda \mid > 1$,

(d) *Indiferente si* $\mid \lambda \mid = 1$.

Los ciclos indiferentes están subdivididos en 2 casos:

(i) *Indiferente racional si* $\mid \lambda^n \mid = 1$, *para algún* $n \in \mathbb{N}$, *es decir,* λ *es raíz n-ésima de la unidad.*

(ii) *Indiferente irracional si* $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Las siguientes definiciones y resultados muestran la relación que existe entre el multiplicador y la definición topológica.

Definición 3.13 *Un punto fijo* z_0 *de una función* f *es atractor si existe una vecindad* V, *donde la sucesión* $\{f^n(z_0)\}$ *converge uniformemente a la función constante* z_0.

Teorema 3.1 (Caracterización Topológica de Puntos Atractores.) *[Milnor, 2006] Un punto fijo para una función holomorfa es topológicamente atractor si, y sólo si, su multiplicador* λ, *satisface* $\mid \lambda \mid < 1$.

Definición 3.14 *Un punto fijo* z_0 *de una función* f *es repulsor, si existe una vecindad* V *de* z_0 *tal que para cada* $z \in U\backslash z_0$, *existe* $n \geq 1$ *que cumple que* $f^n(z) \in V$.

En otras palabras, la única órbita que está completamente contenida en V es la órbita del punto fijo z_0. Si es este el caso, V es llamada vecindad aislada bajo iteración.

Teorema 3.2 (Caracterización de Punto Repulsor.) *[Milnor, 2006] Un punto fijo para una función holomorfa es topológicamente repulsor si, y sólo si, su multiplicador* λ, *satisface* $\mid \lambda \mid > 1$.

Teorema 3.3 *Sea* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función analítica y supóngase que* z_0 *es un punto fijo repulsor para* f, *entonces la familia de iteradas* $\{f^n\}$ *de* f *no es normal en* z_0.

Demostración 3.1 *Supógase que la familia de funciones* $\{f^n\}$ *es normal en alguna vecindad* V *de* z_0. *Entonces* $f^n(z_0) = z_0$ *para toda* n, *se sigue que* f^n *no converge a* ∞ *en* V.

Por lo tanto existe alguna subsucesión de $\{f^n\}$, *digamos* $\{f^{n_i}\}$, *que converge uniformemente a una función* g *sobre* V, *así* $\mid (f^{n_i})'(z_0) \mid \rightarrow \mid g'(z_0) \mid$ *por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, pero* $\mid (f^{n_i})'(z_0) \mid = \mid f'(z_0) \mid \ldots^{n_i(veces)} \ldots \mid f'(z_0) \mid = \mid \lambda \mid^n \rightarrow \infty$ *ya que* $\mid \lambda \mid > 1$ *por ser* z_0 *un punto repulsor de* f, *pero esto es una contradicción por que* $\mid (f^{n_i})'(z_0) \mid \rightarrow \mid g'(z_0) \mid$.

Por lo tanto la familia de iteradas de f *no es normal en* z_0.

Corolario 3.1 *Sea* $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ *una función analítica y supóngase que* z_0 *es un punto periódico repulsor de* f, *entonces la familia de iteradas* $\{f^n\}$ *no es normal en* z_0.

Demostración 3.2 *Sea* z_0 *un punto periódico de período* m, *defínase* $g = f^m$ *entonces,* $g(z_0) = f^{mk}(z_0) = z_0$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$. *Por el Teorema 3.3 se tiene que la familia de iteradas de* g *no es normal en* z_0.

Así, la familia $\{f^{mk}\}$ *de* f *no es normal en* z_0, *es decir, existe una subsucesión* $\{f^{mk}\}$ *de funciones de la familia* $\{f^n\}$ *que no converge uniformemente en vecindades cerradas de* A. *Por lo tanto la familia de iteradas* $\{f^n\}$ *no es normal en* z_0.

Teorema 3.4 *[Hua, 1998] Sea* $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ *una función analítica en algún disco* $B(z_0, r)$ *y sea* z_0 *un punto fijo atractor, entonces la familia de iteradas* $\{f^n\}$ *es normal en alguna vecindad de* z_0.

Demostración 3.3 *Como* f *es analítica en algún disco* $B(z_0, r)$, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* $r = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $z \in \mid z - z_0 \mid < \delta$, *entonces*

$$\mid \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \mid < \epsilon$$
$$\Rightarrow \mid \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \mid < \epsilon + \mid f'(z_0) \mid < 1,$$

Por ser z_0 *un punto fijo atractor, es decir* $\mid f'(z_0) \mid < 1$. *Por otra parte, tenemos que,*

$$| f(z) - f(z_0) | < k | z - z_0 |, \text{ donde } k = \epsilon + | f'(z_0) |$$
$$| f(z) - f(z_0) | < k | z - z_0 | < 1 \cdot r = r,$$

Evaluando $f(z)$ en la última ecuación y teniendo en cuenta que z_0 es punto fijo tenemos que,

$$| f(f(z)) - f(f(z_0)) | < k | f(z) - f(z_0) |$$
$$\Rightarrow | f^2(z) - z_0 | < k | f(z) - f(z_0) | < kk | z - z_0 | < 1$$
$$\Rightarrow | f^2(z) - z_0 | < k^2 | z - z_0 |.$$

Así inductivamente,

$$| f^n(z) - z_0 | < k^n | z - z_0 |,$$

como se observa la expresión converge uniformemente, pues no depende de ϵ, y esto converge a 0 cuando $n \to \infty$ pues $k < 1$. Así puesto que la convergencia es uniforme en el disco $B(z_0, r)$, por la elección inicial $| z - z_0 | < r$. Por lo tanto $\{f^n\}$ es normal en $B(z_0, r)$.

3.2. Conjunto de Fatou y Julia

El plano complejo se divide en dos conjuntos uno estable y otro inestable, a la parte estable se le llama conjunto de Fatou y a la parte inestable se le llama conjunto de Julia. En está sección se hace uso de la teoría presentada en el capítulo 2 para definir los conjuntos de Fatou y Julia y se presentan algunas propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia de funciones enteras trascendentes.

Definición 3.15 *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente ($f \in \mathcal{E}$) el conjunto de Fatou de f, denotado por $F(f)$, o conjunto estable está formado por todos los puntos $z \in U$ tal que la sucesión de iteradas de f está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de z, es decir,*

$$F(f) = \{z \in U :$$
$$f^n(z) \text{está definida y la sucesión } \{f^n\} \text{es normal en una vecindad de } z\}.$$

Definición 3.16 *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente, $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Julia de f, denotado por $J(f)$, o conjunto inestable, es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,*

$$J(f) = (F(f))^c = U \backslash F(f).$$

Teorema 3.5 *Si $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente se tienen las siguientes propiedades básicas:*

(*a*) *$F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.*

(*b*) *[Chuang, 1990] $J(f)$ es perfecto.*

(*c*) *[Chuang, 1990] $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes, es decir, $z \in F(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in F(f)$ y $z \in J(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in J(f)$.*

(*d*) *[Hua, 1998] $F(f^n) = F(f)$ y $J(f^n) = J(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(*e*) *[Baker, 1968] $J(f) = \overline{\{\text{puntos fijos periódicos repulsores de } f\}}$.*

Las propiedades fueron demostradas para funciones racionales por Fatou y Julia aproximadamente entre 1918 y 1920. Para funciones enteras trascendentes las propiedades $(a) - (d)$ fueron demostradas por Fatou en 1926 y la propiedad (e) por Baker en 1946.

3.3. Componentes del conjunto de Fatou

Antes de definir las diferentes componentes que hay en el conjunto de Fatou, revisaremos las siguientes definiciones.

Definición 3.17 *Si X es un espacio topológico y A un subespacio de X, entonces A es una componente de X si, y sólo si,*

(*i*) *A es conexo y,*

(*ii*) *Si B es un subespacio conexo de X que contiene a A entonces, $B = A$, es decir, las componentes son subespacios conexos maximales.*

Definición 3.18 *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascedente, por una componente de Fatou de f entenderemos cualquier componente conexa del conjunto de Fatou $\mathbb{C} \backslash J(f)$.*

Definición 3.19 *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente y U una componente de Fatou. El comportamiento de la órbita de U bajo f tiene tres posibilidades:*

(*i*) *Si $f^n(U) \subset U$ para algún $n \geq 1$, U es llamado una componente periódica de $F(f)$. El mínimo n es el período de la componente U. En particular, si $n = 1$, se dice que la componente U es invariante.*

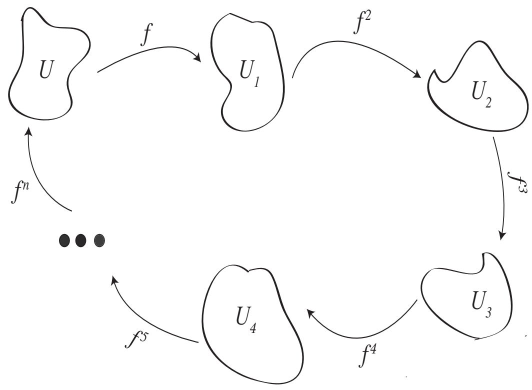

Figura 3.1: Componente periódica del conjunto de Fatou.

(ii) Si f^m es periódico para algún entero $m \geq 1$, llamamos a U una componente pre-periódica. En particular, si U es pre-periódica pero no periódica, entonces llamamos a U una componente pre-periódica propia.

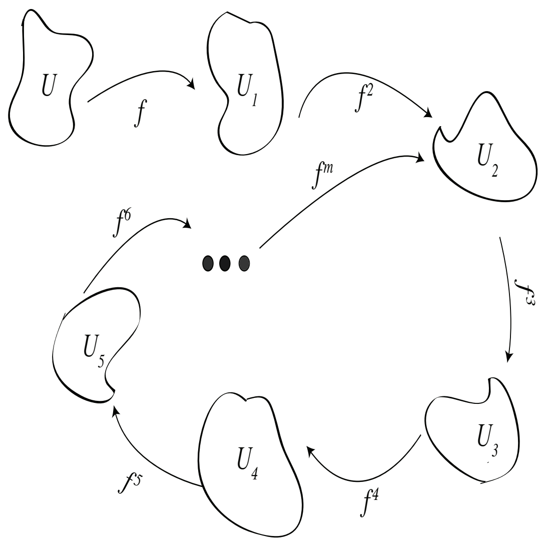

Figura 3.2: Componente pre-periódica del conjunto de Fatou.

(ii) Si U no es periódica o pre-periódica, llamamos a U una componente errante.

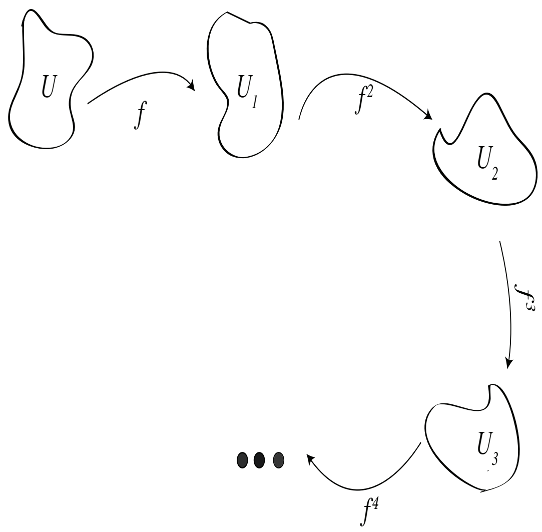

Figura 3.3: Componente errante.

3.4. Clasificación de componentes periódicas para funciones en la clase $\mathcal{E}$

Las componentes periódicas del conjunto de Fatou para $f \in \mathcal{E}$, fueron estudiadas por Fatou en 1926. Si desea tener una visión más amplia de está teoría, así como algunos resultados puede consultar [Barsegian y Begehr, 2005], [Bergweiler, 1995] y [Hua, 1998].

Teorema 3.6 *Sean f una función entera trascendente y U una componente periódica de Fatou de período p, entonces tenemos una de las siguientes posibilidades.*

(i) U contiene un punto periódico atractor z_0 de período p. Entonces $f^{np}(z) \to z_0$, para $z \in U$ cuando $n \to \infty$. U es llamado una componente atractora. Si z_0 es punto periódico superatractor, entonces U es llamado un

Dominio de Bötcher. En cualquier otro caso U es llamado un Dominio de Schröder.

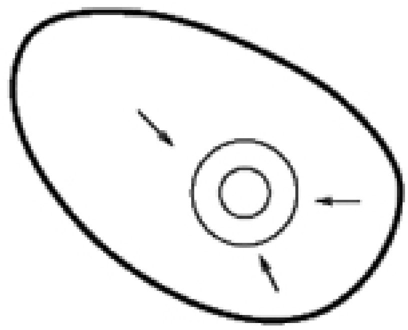

Figura 3.4: Dominio de Bötcher.

(ii) *∂U contiene un punto periódico z_0 de período m y $f^{nm}(z) \to z_0$, para $z \in U$ cuando $n \to \infty$. Entonces $(f^m)'(z_0) = 1$. En este caso, U es llamado una Componente Parabólica ó Dominio de Leau.*

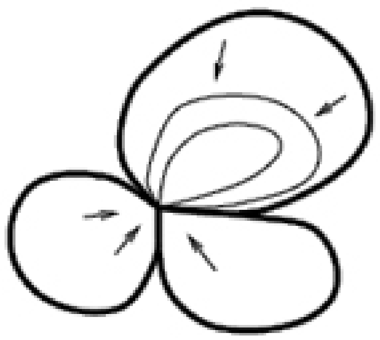

Figura 3.5: Dominio de Leau.

(iii) *Existe un homeomorfismo analítico $\phi : U \to D$, donde D es el disco unitario tal que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta} z$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. En este* *caso, U es llamado un disco de Siegel.*

Figura 3.6: Disco de Siegel.

(iv) $f^{np}(z) \to z_0 \in \partial U$ *para* $z \in U$ *cuando* $n \to \infty$, *pero* f^p *no es holomorfa en* z_0. *En este caso, U es llamado un dominio de Baker.*

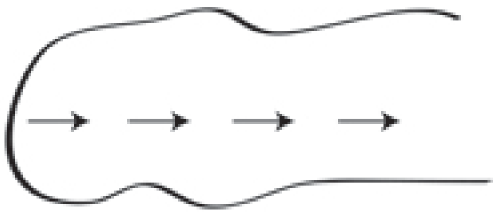

Figura 3.7: Dominio de Baker.

Capítulo 4

Teorema de I. N. Baker para componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou

En este capítulo se enuncia y demuestra el teorema de I. N. Baker para componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou para funciones enteras trascendentes. Para más detalles puede consultar [Baker, 1967].

Si $f(z)$ es una función meromorfa en el plano. Decimos que un dominio D es invariante (bajo f) si $f(D) \subset D$ y completamente invariante si, además, $f(z) = w \in D$ implica que $z \in D$. Tales dominios existen. Si d es cualquier número entero mayor que 1 la función z^d tiene dos componentes completamente invariantes disjuntas, $D_1 : \ \mid z \mid < 1$ y $D_2 : \ \mid z \mid > 1$. Fatou en [Fatou, 1919] demostró que $f = z + 1 + e^{-z}$ tiene una componente completamente invariante. Fatou en [Fatou, 1926] también demostró que si f es racional, esta tiene a lo más dos componentes de Fatou completamente invariantes disjuntas. Su prueba consiste esencialmente en mostrar que cualquier dominio debe contener al menos $(d-1)$ singularidades de la inversa de la función racional f de orden d y hay en total sólo $2(d-1)$ de tales singularidades. Este método no se puede aplicar cuando f es entera trascendente. En el Teorema 4.2, el principal de está tesis, muestra que para funciones en la clase $\mathcal{E}$, la afirmación hecha por Fatou en [Fatou, 1926] ya no es verdadera.

Pero antes, algunas definiciones y resultados de componentes invariantes de Fatou.

4.1. Definiciones y resultados

Definición 4.1 *Un arco de Jordan o arco simple en $\mathbb{C}$ se define como la imagen del intervalo real $[0,1]$ bajo un homeomorfismo φ.*

Definición 4.2 *[Forsyth, 1893] Si Ω es una región acotada simplemente conexa en $\mathbb{C}$. Un cross-cut (corte) $\mathcal{C}$ de Ω es un arco de Jordan en Ω con puntos finales distintos en $\partial\Omega$.*

Lema 4.1 (Teorema de Gross's Star) *[Nevanlinna, 1970] Si f es una función entera trascendente y F es una rama de f^{-1} definida en una vecindad de $p_0 \in \mathbb{C}$, entonces F se puede continuar analiticamente a lo largo de casi todos los rayos de p_0 en la dirección de θ.*

Teorema 4.1 *Sean f es una función entera trascendente y U una componente completamente invariante de $F(f)$, entonces*

(i) U es no acotada.

(ii) $\partial U = J(f)$.

Demostración 4.1 *Parte (i), por el Teorema 1.22 (Teorema de Picard) $f(z)$ tiene infinidad de soluciones para toda $a \in U$, excepto a lo más 2 puntos. Como U es completamente invariante, todas las soluciones deben estar en U. Así U debe ser no acotada.*

Parte (ii), debemos probar únicamente que $J(f) \subset \partial U$ ya que ∂U es un subconjunto completamente invariante de $J(F)$, por lo tanto tenemos que $\partial U \subset J(F)$.

Sea V un dominio en $\mathbb{C}$ tal que $V \cap \partial U = \emptyset$, entonces

(a) $V \subset U$ ó

(b) $V \subset \mathbb{C} \backslash U$.

De (a) $V \subset U$ tenemos que $V \subset F(f)$.

De (b) tenemos que $f^m(V) \cap U = \emptyset$, con $m \in \mathbb{N}$, así f^m es una familia normal en V, así $V \subset F(f)$.

De los casos (a) y (b)tenemos que $J(f) \subset \partial U$, y por lo tanto $\partial U = J(f)$.

4.2. Demostración del Teorema de I. N. Baker

Teorema 4.2 (I. N. Baker) *[Baker, 1967] Si f es una función entera trascendente, entonces $f(z)$ tiene a lo más una componente completamente invariante de $F(f)$.*

Demostración 4.2 *Supongamos que f es una función entera trascendente y que tiene dos componentes completamente invariantes de $F(f)$, digamos G_1 y G_2, las cuales son mutuamente disjuntas, es decir, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Por la parte 4.1 del Teorema 4.1 tenemos que cada componente G_i, $i = 1, 2$ es no acotada.*
Tomemos z_1 en G_1, el cual no es un valor de Picard de $f(z)$(esto es, no es un valor omitido de $f(z)$) ni uniformemente ramificado.

Tomemos dos ramas $p(z)$ y $q(z)$ de la función inversa de $f(z)$, las cuales son analíticas en z_1 y satisfacen que $p(z_1) \neq q(z_1)$. Por el Lema 4.1 podemos continuar $p(z)$ y $q(z)$ analíticamente a ∞ a lo largo de casi todos rayos que salen de z_1.

Por lo tanto, podemos tomar un rayo L el cual pase por G_2. Denotamos por γ el segmento de L que une z_1 con el punto z_2 en G_2 y dirigida desde z_1 a z_2. A continuación, a medida que z se mueve a lo largo de γ, las funciones $p(z)$ y $q(z)$ trazan las curvas $p(\gamma)$ y $q(\gamma)$, las cuales son disjuntas, ya que ni p ni q tienen una singularidad algebraica en γ.

Además $p(\gamma)$ une $p_1 = p(z_1)$ en G_1 con el punto $p_2 = p(z_2)$ en G_2 y de igual manera $q(\gamma)$ une $q_1 = q(z_1)$ en G_1 con el punto $q_2 = q(z_2)$ en G_2.
Como G_1 es un dominio podemos unir p_1 y p_2 mediante una arco β_1 en G_1 y de manera similar p_2 puede ser unido a q_2 mediante un arco β_2 en G_2, ver la Figura 4.1.

Si β_i está orientado de p_i a q_i, sea p_i' la última intersección con $p(\gamma)$ y q_i' la primera intersección con $q(\gamma)$.

Si β_i' denota el subarco de β_i cuyos puntos finales son p_i' y q_i', orientado de p_i' a q_i' y si π y k denotan los arcos $p_1'p_2'$ y $q_1'q_2'$ de $p(\gamma)$ y $q(\gamma)$, respectivamente, orientados de p_1' a p_2' y de q_1' a q_2'. Entonces,

$$\pi \beta_2' k^{-1} (\beta_1')^{-1},$$

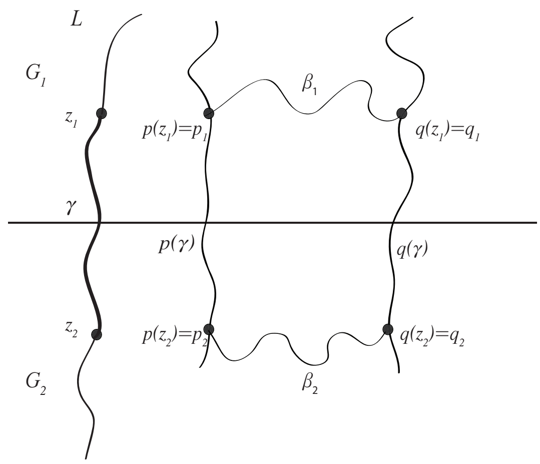

Figura 4.1:

es una curva cerrada simple (el índice -1 indica la orientación de la curva). Denotamos está curva por Γ *y a la región acotada por la curva* Γ *por* D. *Como* $f(z)$ *es entera por el Teorema 1.23 tenemos que* $f(D)$ *es un conjunto acotado. Además la frontera de el dominio* $f(D)$ *está contenida en* $f(\Gamma)$ *y entonces en* $\gamma \cup f(\beta_1) \cup f(\beta_2)$, *vea la Figura 4.2.*

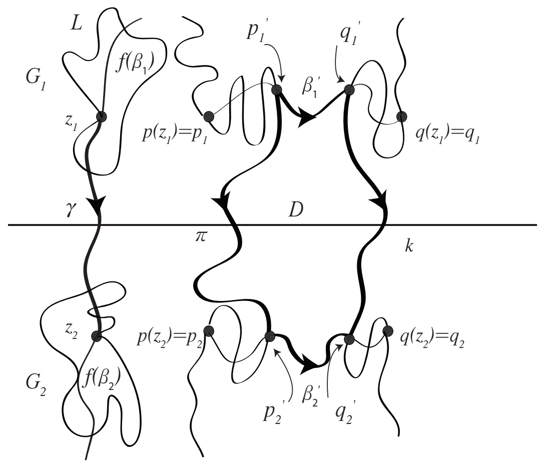

Figura 4.2:

La curva $f(\beta_i)$ *es una curva cerrada que se encuentra en* G_i *y que pasa a* *través de z_i. Entonces $f(\beta_1)$ y $f(\beta_2)$ son mutuamente disjuntos y exteriores entre sí.*

Consideremos la componente no acotada H del complemento de $f(\beta_1) \cup f(\beta_2)$. H toca a γ, de hecho si, r es el último punto de intersección de γ con $f(\beta_1)$ y s es el primer punto de intersección de γ con $f(\beta_1)$, el segmento rs es un cross cut de H cuyos puntos finales pertenecen a diferentes componentes de la frontera de H, de esto se deduce que rs no desconecta a H.

Ahora, de hecho, un punto w de rs ($w \neq r$ ó $w \neq s$) es la imagen $f(z)$ de un punto interior z en el arco π de Γ. En un vecindad de z en el interior de Γ la función $f(z)$ toma un conjunto abierto de valores cercanos de w, algunos de los cuales se encuentran fuera de γ en $H - \{rs\}$, ver la Figura 4.3.

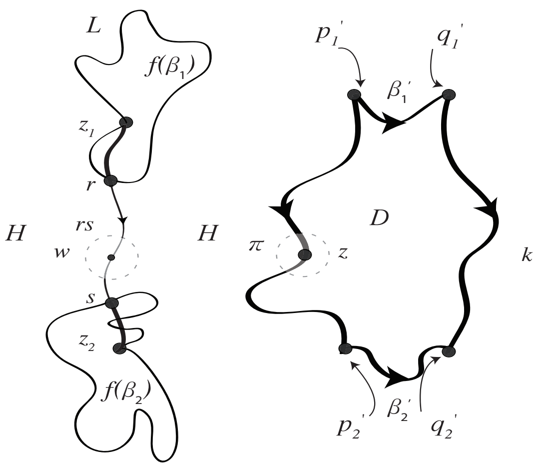

Figura 4.3:

Entonces, como la frontera de $f(D)$ esta contenida en $f(\beta_1) \cup f(\beta_2) \cup \gamma$, vemos que $f(D)$ debe contener la totalidad de $H - \{rs\}$, pero esto es una contradicción a la acotación de $f(D)$. Así no pueden existir 2 componentes de Fatou completamente invariantes disjuntas.

Bibliografía

Agarwal, R. P., Perea, K., y Pinelas, S. (2011). *An Introduction to Complex Analysis*. Springer.

Antimirov, M. Y., Kolyshkin, A. A., y Vaillancourt, R. (1998). *Complex Variables*. Academic Press.

Bak, J. y Newman, D. J. (2010). *Complex Analysis*. Springer,, third edition edition.

Baker, I. (1962). Permutable power series and regular iteration. *J. Austral. Math. Soc.*, **2**, 265–294.

Baker, I. (1963). Multiply-connected domains of normality in iteration theory. *Math. Z.*, **81**, 206–214.

Baker, I. (1964). Fixpoints of polynomials and rational functions. *J. London Math. Soc.*

Baker, I. (1967). Completely invariant domains of entire functions. *Department of Mathematics, Imperial College.*

Baker, I. (1968). Repulsive fixpoints of entire fuctions. *Math. Z.*, **104**.

Barsegian, G. A. y Begehr, H. G. W. (2005). *Topics in Analysis and its Applications*. Kluwer Academic Publishers.

Bergweiler, W. (1995). *An Introduction to Complex Dynamics*. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Textos de Matemática Série B.

Chuang, Chi-Tai y Yang, C.-C. (1990). *Fix-Points and Factorization of Meromorphic Functions*. World Scientific.

Conway, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag,, second edition edition.

De Amo, E. (2008-2009). *Introducción al curso de Análisis Complejo*. Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad de AlmerÃa.

Fatou, P. (1919). Sur les équations fonctionelles. *Bull. Soc. Math. France*, **47**, 161–271.

Fatou, P. (1926). Sur l´itération des fonctions trascendantes entières. *Acta Math.*, **47**, 337–370.

Fernández, J. L. y de la Torre, G. (1983). *Análisis Matemático*, volume III. Editorial Pueblo y Educación.

Forsyth, A. R. (1893). *Theory of a Complex Variable*. Cambridge at the University Press.

Gamelin, T. W. (2001). *Complex Analysis*. Springer.

Goluzin, G. M. (1969). *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. American Mathematical Society.

Greene, R. E. y Krantz, S. G. (2006). *Function Theory of One Complex Variable*, volume 40. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, third edition.

Hua, Xin-Hou y Yang, C.-C. (1998). *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers.

Iribarren, T. I. L. (2008). *Topología de Espacios Métricos*. Editorial Limusa.

Julia, G. (1918). Sur lítération des fonctions rationelles. *J. Math. Pures Appl.*, **4**, 47–245.

Krantz, S. G. (2007). *A Guide to Complex Variables*. Mathematical Association of America.

Milnor, J. (2006). *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton University Press, third edition.

Nevanlinna, R. (1970). *Analytic Functions*. Springer, Berlin.

Noguchi, J. (1998). *Introduction to Complex Analysis*, volume 168. American Mathematical Society.

Palka, B. P. (1990). *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer.

Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, third edition.

Shirali, S. y Vasudeva, H. L. (2006). *Metric Spaces*. Spriger.

Tamariz, M. A. (1982). *Curso de Topología General*. Publicaciones de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.