



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL FENÓMENO DE GIBBS Y EL σ - FACTOR LANZOS.

**TESIS PROFESIONAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA.
JOSÉ MIGUEL URIBE HERNÁNDEZ

ASESORES DE TESIS.

Dr. J. Jacobo Oliveros Oliveros.
Dr. J. Alberto Escamilla Reyna.

PUEBLA PUE. 16 DE DICIEMBRE 2011.

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Funciones pares e impares. Series de senos y de cosenos	8
1.2. Sistemas ortogonales de funciones	10
1.2.1. Aproximación óptima	12
1.3. Funciones Monótonas	14
1.3.1. Funciones de Variación Acotada	17
1.4. Convergencia	18
2. Fenómeno de Gibbs	27
2.1. Función Sinc	30
3. σ - Factor Lanczos. Filtros	41
3.1. Filtro	44
3.1.1. Suma parcial de Fourier modificada por el Filtro.	45
Bibliografía	57

Introducción

Una parte del desarrollo del análisis matemático se debe en gran medida a la teoría matemática conocida como *Análisis de Fourier* o *Análisis Armónico*, desde los orígenes de esta teoría se ha permitido profundizar algunos conceptos matemáticos tales como: función, límite, integral, continuidad, entre otros. Un fenómeno interesante que surgió en este estudio es el caso del Fenómeno de Gibbs, este se presenta al graficar las sumas parciales de Fourier en los puntos cercanos a un punto de discontinuidad; actualmente se tienen aplicaciones las cuales por ejemplo: el caso de circuitos eléctricos en los que, por medio de un conmutador, se pueden crear saltos de voltaje, dado que este puede sobrepasar lo inicialmente previsto, resulta importante conocer esta desviación en relación con la respuesta de los componentes del circuito (véase [10]), en el procesamiento de señales digitales éste método equivale a filtrar la señal con un filtro de primer orden, es decir, se presenta una especie de ruido en la emisión de la señal.

Además, se realizó una recopilación histórica sobre las series de Fourier, el Fenómeno de Gibbs y su relación con el σ -Factor de Lanczos. Así mismo se da lugar al concepto de Filtro que se usa regularmente para eliminar altas frecuencias, en particular la *función sinc* (también conocida como *seno cardinal*, véase [2]). Se agregan ejemplos que proporcionan una mejor idea sobre los conceptos mencionados.

Antecedentes Históricos

En los cursos introductorios de Ecuaciones Diferenciales nos encontramos con el estudio de dos importantes ejemplos: la *ecuación*

de ondas y la ecuación del calor. En el primer caso, su versión más elemental, describe las vibraciones de una cuerda fija en sus extremos, mientras que el segundo caso describe cómo se conduce el calor a lo largo de un sólido a través del tiempo. No siempre se exponen las importancias e influencias reales que estos problemas han tenido en el desarrollo tanto de técnicas y de teorías a la Matemática y sus aplicaciones.

Las series trigonométricas y el Análisis de Fourier son metodologías para resolver los problemas antes mencionados. La relación existente entre estas dos áreas matemáticas se expresan de la siguiente manera:

El hecho de representar una función f definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ como una *serie trigonométrica* de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)], \quad (I)$$

donde a_n y b_n con $n = 0, 1, 2, \dots$, son constantes.



Figura 1: Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonard Euler (1707-1783). Fuente: Instituto Balseiro.

Lleva a la pregunta natural: ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir la función f (con $x \in [-\pi, \pi]$), para que existan las sucesiones $\{a_n\}_0^\infty$ y $\{b_n\}_1^\infty$ como coeficientes y que puedan expresar la expansión del tipo (I)? Otra pregunta es ¿Cómo hallar $\{a_n\}_0^\infty$ y $\{b_n\}_1^\infty$?

Estas cuestiones aparecieron a mediados del siglo XVIII asociadas a los estudios de Leonard Euler (1701-1783) y de Daniel Bernoulli (1700-1782) sobre el problema de la *cuerda vibrante*.

Bernoulli llega al punto de plantearse la solución del problema de la cuerda vibrante en forma de serie trigonométrica a partir de consideraciones de tipo físico, que le llevan a pensar que la cuerda oscila involucrando varias frecuencias al mismo tiempo, cuyas amplitudes respectivas dependen de la forma inicial de la vibración, es decir, el modo en que se haya empezado a mover la cuerda. Esta posibilidad, descubierta por Bernoulli, es lo que hoy llamamos *principio de superposición* y ha resultado ser un principio de gran importancia en muchas ramas de la Física Matemática.

Sin embargo, Euler entiende que esta idea de Bernoulli lleva a un resultado aparentemente paradójico, al preguntarse si una función “arbitraria” podría ser expresada como en (I). Hay que tener en cuenta, que para los matemáticos contemporáneos de Euler, las curvas se dividían en dos clases: curvas “continuas” y curvas “geométricas”. En contraste con la terminología adoptada hoy en día, una curva se decía “continua” si sus ordenadas y sus abscisas podían conectarse mediante alguna fórmula $y = f(x)$. Por otra parte, una curva se denominaba “geométrica” si podía dibujarse de alguna forma con trazos continuos o discontinuos. Pensaban por tanto, que la segunda categoría de curvas era más amplia que la primera, ya que lo que nosotros denominamos como una función continua a trozos, puede dibujarse, pero no puede expresarse si no es con varias fórmulas. Así, sí una función “arbitraria” podría expresarse, por ejemplo, como una serie de *senos* (es decir, como (I), pero con $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$), esto significaría que cualquier curva “geométrica” sería también una curva “continua”, lo cual, para Euler y sus contemporáneos, era simplemente increíble.

Por otro lado, para contribuir más aún a este debate, la solución al problema de la cuerda vibrante de Bernoulli compite con otra aportada por Jean le Rond D’Alembert (o Jean Le Rond d’Alembert, 1717-1783) en forma de una onda que avanza y otra que retrocede, que se determinan a partir de la posición y velocidad

iniciales de la cuerda. En particular, D'Alembert consideraba que la manera más natural de hacer que una cuerda empiece a vibrar era desplazarla de su posición de equilibrio tirando de algún punto de ella. Esto hace que su posición inicial se pueda representar mediante dos rectas que forman un determinado ángulo. Para D'Alembert la naturaleza de esta curva hacía imposible pensar en que pudiese expresarse como una serie trigonométrica, ya que se trata, como se ha comentado más arriba, de una curva "geométrica", mientras que la serie trigonométrica sería una curva "continua".



Figura 2: Joseph Fourier (1768-1830). Fuente: Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de St. Andrews, Escocia.

Un método de solución al problema planteado por Euler reapareció en una memorable sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, el día 21 de diciembre de 1807, donde el matemático francés J. Fourier (1768-1830) presentó un trabajo que posteriormente abriría un nuevo capítulo en la historia de las matemáticas: la creación del *Análisis Armónico* o también conocido como el *Análisis de Fourier*.

Fourier dedujo una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos llamada *la ecuación del calor*. Pero no sólo la había deducido sino que también desarrolló un método para resolverla, el *método de separación de variables*, que en cierto modo había sido utilizado ya por Bernoulli para su solución, aunque es Fourier quien lo empezó a usar de manera sistemática en la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

La aplicación de la técnica de separación de variables a la ecuación del calor, lo llevó a escribir la solución en la forma de serie trigonométrica e incluso llegó a afirmar que cualquier función periódica, de período 2π , se puede poner como una serie de la forma (I). Y para ello incluso encontró las *fórmulas (de Fourier)* que permiten calcular los coeficientes de la serie.

Aunque la representación de una función en serie trigonométrica se había considerado antes de Fourier, nadie antes que Fourier puso de manifiesto la correspondencia entre función y coeficientes.

Sin embargo, el trabajo de Fourier no fue aceptado en su primera exposición, máxime teniendo como parte del auditorio a matemáticos como J. L. Lagrange (1736-1813), P. S. Laplace (1749-1827) y A.M. Legendre (1752-1833), que criticaron abiertamente la falta de rigor del tratamiento de Fourier. De hecho, Fourier tuvo que rehacer su trabajo ya que su memoria no fue aceptada en un primer momento. No obstante, finalmente sus ideas fueron aceptadas y fueron expuestas, años después, en su obra de 1822, "*Théorie Analytique de la Chaleur*" [10].

Hay que añadir que el estudio de las series de Fourier contribuyó de manera decisiva a clarificar la idea de función hasta el concepto moderno de nuestros días. Todo este tratamiento posterior está asociado a nombres tales como P.G.L. Dirichlet (1805-1859), B. Riemann (1826-1866), G. Cantor (1845-1918) y H. Lebesgue (1875-1941).

Una de las muchas derivaciones interesantes, es el llamado Fenómeno de Gibbs, que surge a mediados del siglo XIX.

H. Wilbraham observó en 1848 que, en puntos cercanos a una discontinuidad de una función f , las sumas parciales excedían en aproximadamente el 9% del valor de salto de la discontinuidad. Este trabajo de Wilbraham estuvo en el olvido, hasta que hacia 1898 volvió a reaparecer en un contexto distinto. Y fue a cargo del premio Nobel en Física (1907) A. Michelson, científico norteamericano, inventor y constructor de numerosos instrumentos físicos de gran precisión. Michelson construyó un aparato llamado *analizador armónico* que permitía, mecánicamente, determinar hasta los 80

primeros componentes de la serie de Fourier, a partir de la gráfica de una función $y = f(x)$. Michelson observó que en una función de tipo salto, en las cercanías del punto de discontinuidad, aparecía una extraña prominencia que no aparecía en la función original. En un principio creyó que podía deberse a un defecto mecánico del aparato. Una vez verificado que podía no ser así, escribe al físico matemático J. W. Gibbs, que investigó y explicó el fenómeno basándose en la no convergencia uniforme de la serie de Fourier en las cercanías de un punto de discontinuidad. En honor a J. W. Gibbs por su análisis y comprensión del problema, éste fenómeno se conoce como *Fenómeno de Gibbs* o también en honor a Wilbraham se le llama *Fenómeno de Gibbs-Wilbraham*.

El objetivo general es estudiar el Fenómeno de Gibbs y su atenuación mediante el método llamado σ -Factor Lanczos. Del cual se tienen como objetivos específicos:

1. Presentar una revisión histórica del Fenómeno de Gibbs, desde su origen hasta su explicación.
2. Ilustrar mediante ejemplos el mencionado fenómeno para coadyuvar a su comprensión.
3. Presentar como Lanczos definió al llamado σ factor con el objetivo de atenuar al Fenómeno de Gibbs.
4. Introducir el concepto de *Filtro* notando que el σ factor es un caso particular del mismo.

La contribución de la tesis es el estudio del Fenómeno de Gibbs, para lo cual se da un ejemplo donde se observa el error en la n -ésima suma parcial de Fourier, además se utiliza el llamado σ -factor Lanczos para atenuar dicho suceso considerándolo como un caso particular del concepto de Filtro. Es importante mencionar que se demuestran a detalle algunas propiedades de Filtro, observadas

en el artículo *On the Gibbs Phenomenon and its Resolution*, de Gottlieb D., Shu C. [7].

A continuación se describe de manera breve el contenido de la tesis.

En el primer capítulo, se hace una recopilación de los conceptos básicos necesarios para la comprensión del trabajo. Algunos de estos son: las series de Fourier, funciones monótonas, funciones de variación acotada, criterios de convergencia puntual, entre otros. Se incluyen ejemplos que ilustran lo expuesto y que pueden coadyuvar a la rápida comprensión del tema de tesis.

En el segundo capítulo, se presenta y analiza el concepto conocido como Fenómeno de Gibbs el cual es otra derivación importante del *Análisis Armónico*. Con la ayuda de resultados y ejemplos, que nos sirven en la comprensión y sobretodo a aclarar lo mejor posible la presencia de dicho fenómeno en las series de Fourier. El estudio de este fenómeno, tiene importantes aportaciones en la investigación tanto práctica, como matemática; este trabajo no se enfocará en los resultados prácticos.

El tercer capítulo está dedicado a mostrar el método de filtrado que lleva el nombre de σ -Factor de Lanczos, el cual es un método de solución al llamado Fenómeno de Gibbs, que se estudió en el capítulo dos, igualmente se muestran resultados y ejemplos que nos ayudan a estudiar bien el fenómeno. En este mismo capítulo se incluye el teorema que garantiza la atenuación del Fenómeno de Gibbs aplicando el σ -Factor de Lanczos.

Finalmente se incluyen las conclusiones y perspectivas. Así como la bibliografía.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos necesarios para el análisis del trabajo que se realiza. Son conceptos conocidos y se menciona la bibliografía correspondiente para que pueda ser consultada.

En el estudio de muchos problemas físicos que conducen a ecuaciones en derivadas parciales se necesitan series trigonométricas de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (1.1)$$

esta representación en serie trigonométrica tiene como ventaja que son capaces de representar funciones muy generales, con muchas discontinuidades, mientras que las series de potencias sólo pueden representar funciones continuas con derivadas de todo orden.

En la búsqueda de los coeficientes, es necesario suponer que la serie es convergente “en algún sentido” ya sea de manera uniforme, puntual, en media, lo cual dependerá del problema que estemos considerando, en este caso supondremos que converge de manera uniforme, para así poder integrar término a término desde $-\pi$ hasta π .

Recordemos que el problema que nos interesa es poder expresar a una función f periódica de período 2π en la forma (1.1).

Integrando a ambos lados de (1.1) y suponiendo que se puede integrar término a término se halla que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, la integración término a término da $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$, es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \quad (1.2)$$

En este caso la fórmula muestra que el término constante $\frac{1}{2}a_0$ en (1.1) no es sino el valor medio de f sobre el intervalo. De forma análoga se calcula el coeficiente a_n . Así pues multiplicamos (1.1) por $\cos(kx)$ resulta

$$f(x)\cos(kx) = \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(kx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\cos(kx). \quad (1.3)$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen}(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(n+k)x + \operatorname{sen}(n-k)x], \quad (i)$$

$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x], \quad (ii)$$

$$\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(kx) = \frac{1}{2}[\cos(n-k)x - \cos(n+k)x], \quad (iii)$$

demostramos que para los valores enteros de n y $k \geq 1$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(kx)dx = 0 \quad (1.4)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = 0, \quad n \neq k. \quad (1.5)$$

Integrando la expresión (1.1) término a término se obtiene,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n\pi,$$

y por tanto

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx. \quad (1.6)$$

Por (1.3), la fórmula (1.6) es válida para $n = 0$. Esta es la razón de que se escriba el término constante en (1.1) como $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0 . Se llega a la fórmula correspondiente para b_n por un procedimiento similar, es decir, multiplicando (1.1) por $\text{sen}(nx)$, e integrando término a término utilizando el hecho conocido,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(kx) dx = 0, \quad \text{para } n \neq k, \quad (1.7)$$

de ahí que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = b_n \pi,$$

o sea,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx. \quad (1.8)$$

Estos cálculos muestran que si la serie (1.1) es uniformemente convergente los coeficientes a_n y b_n se pueden obtener a partir de f mediante las fórmulas anteriores. Sin embargo necesitamos saber, si dada una función periódica ésta admite un desarrollo mediante una serie trigonométrica que converge de manera uniforme, esto no se sabe, por eso es necesario definir ciertos números a_n y b_n que se usarán para construir la serie trigonométrica (1.1).

Cuando se procede de esta manera, a los coeficientes a_n y b_n se les llama coeficientes de Fourier de la función f , y a la serie (1.1) se le llama serie de Fourier de f .

Una serie de Fourier es un tipo especial de serie trigonométrica, cuyos coeficientes se calculan aplicando (1.6) y (1.8) a cierta función f . Para formar esta serie no es preciso suponer que f sea continua; basta que las integrales (1.6) y (1.8) existan, y para ello es suficiente que f sea integrable sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Además de esto, es necesario saber que, una función f se dice que es periódica si para cada punto x se tiene que: $f(x) = f(x+T)$

donde T indica el período. Así pues, la función que consideremos es la llamada extensión periódica de la porción originalmente dada a los sucesivos intervalos de longitud $T = 2\pi$ a derecha e izquierda del intervalo básico.

A partir de ahora entenderemos que f está definida sólo en el intervalo que especifiquemos y la serie de Fourier se extiende periódicamente, con período 2π igualmente al mencionar el intervalo en alguna definición.

Sin embargo, esto no implica que la serie de Fourier sea convergente a f , asimismo la convergencia de una serie trigonométrica no quiere decir que ésta sea una serie de Fourier de alguna función f . El problema fundamental en esta cuestión es el de descubrir propiedades de una función integrable que garanticen que su serie de Fourier no sólo es convergente sino que tiende a f [9].

Definición 1.0.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π . Definimos la serie de Fourier de f como sigue

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)], \quad (1.9)$$

con coeficientes a_n y b_n dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx. \quad (1.10)$$

Usando las siguientes fórmulas expresamos de forma diferente la serie de Fourier

$$2\cos(nx) = e^{inx} + e^{-inx} \text{ y } 2i\operatorname{sen}(nx) = e^{inx} - e^{-inx},$$

esta serie generada por f se puede expresar en términos de exponenciales complejas de la siguiente manera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}), \quad (1.11)$$

en donde $\alpha_n = (a_n - ib_n)/2$ y $\beta_n = (a_n + ib_n)/2$. Si hacemos $\alpha_0 = a_0/2$ y $\alpha_{-n} = \beta_n$, podemos escribir la forma exponencial más brevemente como sigue:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}, \quad (1.12)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Para hacer notar la dependencia de α_n de la función f denotaremos $\hat{f}_n = \alpha_n$ del cual queda expresado,

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.13)$$

Si f tiene período 2π , el intervalo de integración se puede sustituir por cualquier otro intervalo de longitud 2π .

El uso que le daremos a cada uno de los términos anteriores se hará a nuestra conveniencia en los siguientes temas, sin dejar de lado que estamos tratando la misma serie de Fourier.

A continuación se darán ejemplos de funciones de las cuales buscaremos sus respectivas series de Fourier.

Ejemplo 1: Se considera como primer ejemplo a la *Función Cuadrada* que se define:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Haciendo uso de los siguientes argumentos, se identificarán los coeficientes a_n y b_n .

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx,$$

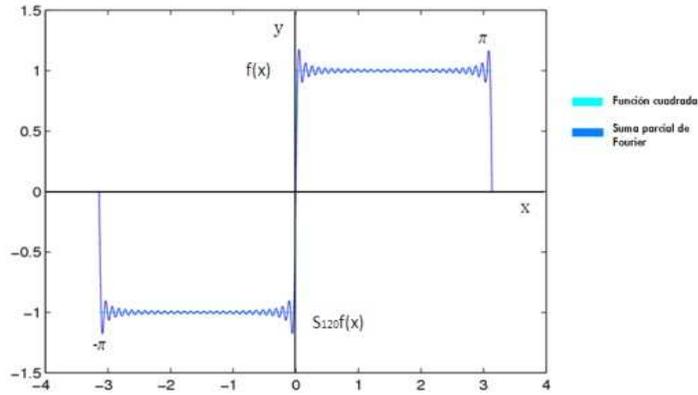


Figura 1.1: Función cuadrada y su suma parcial de Fourier, con $N = 120$.

En este caso, para a_n se tiene que,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi n} \text{sen}(nx) \Big|_0^\pi = 0,$$

y para b_n ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi n} (-\cos(nx)) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi n} (-\cos(\pi n) - (-\cos(0))) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)). \end{aligned}$$

Habiendo encontrado el coeficiente b_n , para nuestra función f , sustituimos en

$$\sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx),$$

y como nos interesa determinar b_n , este se puede expresar sólo para los n impares. Así:

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\text{sen}(2n+1)x}{(2n+1)}. \quad (1.14)$$

Ésta última expresión se conoce como la N -ésima suma parcial de Fourier para f [2]:

Ejemplo 2: Otro ejemplo de serie de Fourier la función conocida como "Diente de Sierra"

$$f(x) = \begin{cases} -x/2 - \pi/2, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ -x/2 + \pi/2, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

de manera similar al ejemplo anterior, obtenemos su N -ésima suma parcial de Fourier la cual se expresa como,

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \text{sen}(nx).$$

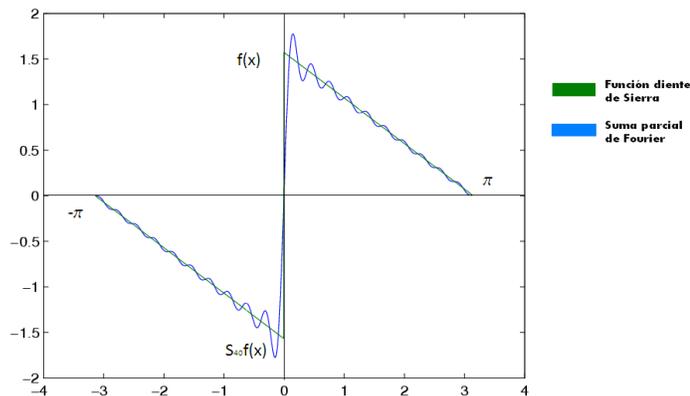


Figura 1.2: Función Diente de Sierra y su suma parcial de Fourier, para $N = 40$.

Tanto la función cuadrada como la de diente de sierra tienen importantes usos prácticos, esencialmente en aplicaciones de la ingeniería.

1.1. Funciones pares e impares. Series de senos y de cosenos

Enunciaremos que es una función par e impar, concepto necesario para resultados posteriores.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es par, si para todo punto $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(-x) = f(x). \quad (1.15)$$

Se dice que f es impar, si para todo punto $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(-x) = -f(x). \quad (1.16)$$

Así, $f(x) = x^2$ (Fig. 1.3) y $h(x) = \cos(x)$ son pares, mientras que $g(x) = x^3$ (Fig. 1.4) y $q(x) = \sin(x)$ son impares, la gráfica de la función par es simétrica respecto al eje y , la de una impar es antisimétrica.

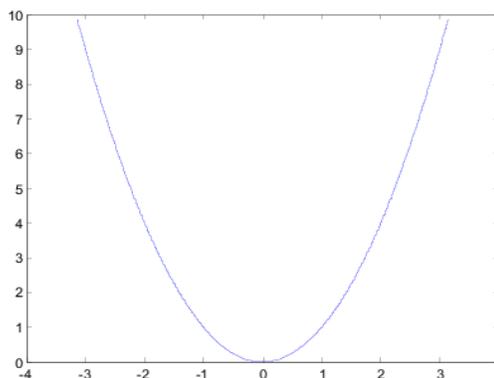


Figura 1.3: Gráfica de la función par $f(x) = x^2$.

Además se observa en las gráficas de funciones par e impar, que:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ si } f(x) \text{ es par} \quad (1.17)$$

e

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ si } f(x) \text{ es impar} \quad (1.18)$$

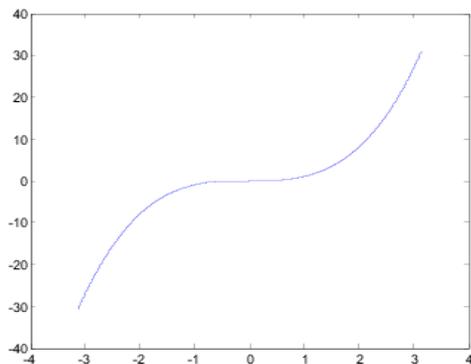


Figura 1.4: Gráfica de la función impar $g(x) = x^3$.

Puesto que las integrales representan las áreas (con signo) bajo las curvas. Estos hechos pueden demostrarse también por razonamientos analíticos basados en las definiciones (1.15) y (1.16).

Bajo producto las funciones pares e impares se comportan así:

$$\begin{aligned}(\text{par})(\text{par}) &= \text{par}, \\(\text{par})(\text{impar}) &= \text{impar}, \\(\text{impar})(\text{impar}) &= \text{par}.\end{aligned}$$

Por ejemplo para demostrar la segunda de ellas, consideremos la función $F(x) = f(x)g(x)$, con f par y g impar. Entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -F(x),$$

lo que demuestra que el producto $f(x)g(x)$, es impar. Las otras se demuestran de manera similar.

Haciendo un pequeño análisis, se deduce que $x^3 \cos(nx)$ es impar, puesto que x^3 es impar y $\cos(nx)$ es par, de tal modo que (1.18) nos dice que

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(nx) dx = 0.$$

Sin necesidad de hacer la integración por partes.

El siguiente teorema utiliza estos conceptos en el estudio de las series de Fourier.

Teorema 1.1.1. *Sea f una función integrable definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Si f es par, su serie de Fourier tiene sólo términos de tipo coseno y sus coeficientes vienen dados por*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0. \quad (1.19)$$

Si f es impar, su serie de Fourier sólo tiene términos de tipo seno, con coeficiente dados por

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (1.20)$$

Para demostrarlo, se toma una $f(x)$ que sea par. Por tanto, $f(x)\cos(nx)$ es par (par por par) y según (1.17) tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Por otro lado, $f(x)\sin(nx)$ es impar (par por impar), luego con (1.18) se tiene que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0,$$

lo que completa el argumento (1.19). Es fácil probar (1.20) de forma similar [9].

1.2. Sistemas ortogonales de funciones

Sean I intervalo en \mathbb{R} y $L^2(I)$ el espacio de las funciones tales que $|f|^2 \in L(I)$. El producto interior (f, g) de dos de tales funciones definido por medio de $(f, g) = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$, existe siempre (por la desigualdad de Hölder [3]). El número no negativo $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ es

la L^2 norma de f . $L^2(I)$ con esta norma engendrada por el producto interior definido antes, constituye un espacio de Hilbert.

Definición 1.2.1. Sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ una colección de funciones de $L^2(I)$. Si

$$(\varphi_n, \varphi_k) = 0, \quad \text{siempre que} \quad n \neq k.$$

a la colección S se le llama sistema ortogonal en I . Si, además cada φ_n tiene norma 1, entonces S se llama sistema ortonormal en I .

Nota: Todo sistema ortogonal para el que cada $\|\varphi_n\| \neq 0$ se puede convertir en un sistema ortonormal dividiendo cada φ_n por su norma.

Nos interesa particularmente el sistema trigonométrico especial $S = \{\varphi_0, \varphi_n^1, \varphi_n^2\}_{n=1}^\infty$, en donde

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^1 = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^2 = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

para $n = 1, 2, \dots$. La norma de las funciones φ_n^1 y φ_n^2 puede calcularse de la siguiente forma para el caso donde φ sea la función $\cos(nx)$

$$I_{nk} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = 0, \quad n \neq k.$$

Se observa que usando las identidades trigonométricas siguientes:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y), \quad (iv)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y), \quad (v)$$

se obtiene

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{[\cos(x + y) + \cos(x - y)]}{2}.$$

De aquí

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n + m)x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n - m)x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} [\text{sen}((n + m)x)|_{-\pi}^{\pi}] = 0. \end{aligned}$$

1.2.1. Aproximación óptima

Uno de tantos problemas básicos en la teoría de las funciones ortogonales consiste en aproximar tanto como sea posible, a una función dada f de $L^2(I)$ por medio de una combinación lineal de elementos de un sistema ortonormal. Precisando, sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ un sistema ortonormal en I y sea $t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x)$, en donde b_0, b_1, \dots, b_n son números complejos arbitrarios. Usemos la norma $\|f - t_n\|$ para medir el error cometido al aproximar f por medio de t_n . La primera labor consiste en elegir las constantes b_0, \dots, b_n de tal forma que el error sea lo menor posible. El próximo teorema prueba que existe una única elección posible de las constantes que minimice este error. Para motivar los resultados del teorema consideremos el caso más favorable. Si f es realmente una combinación lineal de $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, esto es

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k,$$

entonces la elección $t_n = f$ proporciona $\|f - t_n\| = 0$. Podemos determinar las constantes c_0, c_1, \dots, c_n como sigue. Utilizando las propiedades del producto interior tenemos

$$(f, \varphi_m) = \left(\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, \varphi_m \right) = \sum_{k=0}^n c_k (\varphi_k, \varphi_m) = c_m,$$

ya que $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ si $k \neq m$ y $(\varphi_m, \varphi_m) = 1$. En otras palabras, en el mejor de los casos, se tiene $c_m = (f, \varphi_m)$ para $m = 0, 1, \dots, n$. El próximo teorema prueba que la elección de las constantes es óptima para todas las funciones de $L^2(I)$ [1].

Teorema 1.2.1. *Sea $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ una colección de funciones ortonormales entre sí en I , supongamos que $f \in L^2(I)$. Definimos dos sucesiones de funciones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en I :*

$$s_n = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x)$$

en donde

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

y b_0, b_1, \dots, b_n son números complejos arbitrarios. Entonces para cada n se tiene

$$\|f - s_n\| \leq \|f - t_n\|. \quad (1.21)$$

Además, en (1.21) se verifica la igualdad si, y sólo si, $b_k = c_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$.

Demostración: Obtendremos (1.21) de la ecuación

$$\|f - t_n\|^2 = \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |b_k - c_k|^2. \quad (1.22)$$

Se observa que (1.22) implica (1.21), pues siendo $b_k = c_k$ obtiene su mínimo para cada k . Para probar (1.22), notemos que

$$\|f - t_n\|^2 = (f - t_n, f - t_n) = (f, f) - (f, t_n) - (t_n, f) + (t_n, t_n).$$

Utilizando propiedades de producto interior obtenemos

$$\begin{aligned} (t_n, t_n) &= \left(\sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, \sum_{m=0}^n b_m \varphi_m \right), \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n b_k \bar{b}_m (\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{k=0}^n |b_k|^2 \end{aligned}$$

y

$$(f, t_n) = \left(f, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right) = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k c_k.$$

Además, $(t_n, f) = \overline{(f, t_n)} = \sum_{k=0}^n b_k \bar{c}_k$, y entonces

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^n b_k \bar{c}_k + \sum_{k=0}^n |b_k|^2,$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k), \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |b_k - c_k|^2.
\end{aligned}$$

1.3. Funciones Monótonas

Para el desarrollo de este trabajo, son necesarios los conceptos de funciones monótonas, variación acotada; la importancia de estos conceptos se verá reflejada en el desarrollo de esta tesis.

Ejemplo 1: La función exponencial $f(x) = \exp(x)$ es monótona.

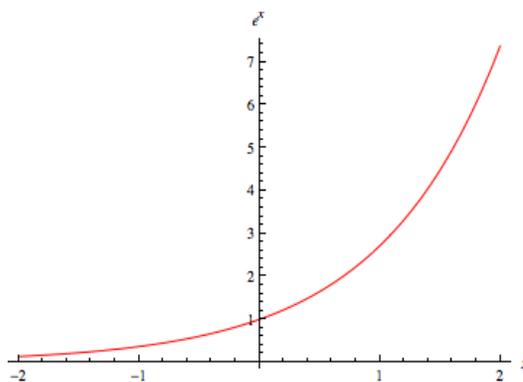


Figura 1.5: Gráfica de la función monótona: función Exponencial

Definición 1.3.1. Sea f una función real definida en un subconjunto S de \mathbb{R} . Entonces f es creciente (o no decreciente) en S si para todo par x e y de S ,

$$x < y, \quad f(x) \leq f(y).$$

Si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$, entonces f se llama estrictamente creciente sobre S . (las funciones decrecientes se definen análogamente.) Una función se llama monótona en S si es creciente o decreciente en S .

Ejemplo 2: La función logaritmo $f(x) = \log(x)$ es monótona.

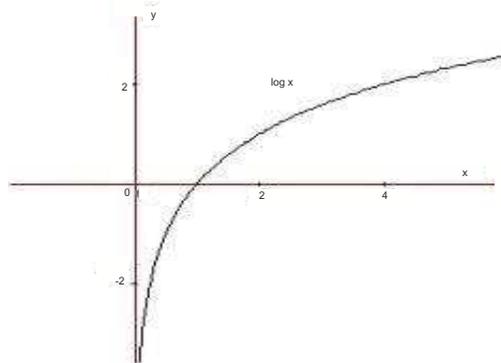


Figura 1.6: Gráfica de la función monótona: función Logaritmo

Si f es una función creciente, entonces $-f$ es una función decreciente. Gracias a este resultado tan simple, resulta que en muchas de las situaciones que involucren funciones monótonas bastará considerar sólo el caso de las funciones crecientes.

Las funciones monótonas en intervalos cualesquiera poseen siempre límite lateral por la derecha y límite lateral por la izquierda. Por lo tanto sus discontinuidades (si tiene) deben ser discontinuidades de salto. A continuación se agregan teoremas importantes para la comprensión de función monótona.

Teorema 1.3.1. *Si f es creciente en $[a, b]$, entonces $f(c+)$ y $f(c-)$ existen las dos para cada c de (a, b) y se tiene*

$$f(c-) \leq f(c) \leq f(c+).$$

En los puntos extremos se tiene $f(a) \leq f(a+)$ y $f(b-) \leq f(b)$.

Demostración: Sea $A = \{f(x) : a < x < c\}$. Como f es creciente, este conjunto está acotado superiormente por $f(c)$. Sea $\alpha = \sup A$. Entonces $\alpha \leq f(c)$ y probaremos que $f(c-)$ existe y es igual a α . Para ello se prueba primero que cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c \text{ implica } |f(x) - \alpha| < \epsilon.$$

Como $\alpha = \sup A$, existe un elemento $f(x_1)$ de A tal que $\alpha - \epsilon < f(x_1) \leq \alpha$. Como f es creciente, para cada x de (x_1, c) tenemos también que $\alpha - \epsilon < f(x_1) \leq \alpha$, por lo tanto $|f(x) - \alpha| < \epsilon$. Por consiguiente, el número $\delta = c - x_1$ tiene la propiedad que se necesita.

Existe un teorema análogo para funciones decrecientes. Para los Teoremas (1.3.2) y (1.3.3) se observa la demostración en la referencia [1].

Teorema 1.3.2. *Sea f estrictamente creciente en un conjunto S de \mathbb{R} . Entonces f^{-1} existe y estrictamente creciente en $f(S)$.*

Teorema 1.3.3. *Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo compacto $[a, b]$. Entonces f^{-1} es estrictamente creciente y continua en el intervalo $[f(a), f(b)]$.*

Propiedades de las Funciones Monótonas

En esta sección se dan a conocer propiedades para funciones monótonas.

Teorema 1.3.4. *Sea f una función creciente definida en $[a, b]$ y sea x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 1$ puntos tales que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Se tiene entonces la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_{k+}) - f(x_{k-})] \leq f(b) - f(a).$$

Demostración: Supongamos que $y_k \in (x_k, x_{k+1})$. Para $1 \leq k \leq n - 1$ tenemos que $f(x_{k+}) \leq f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \leq f(x_{k-})$, luego $f(x_{k+}) - f(x_{k-}) \leq f(y_k) - f(y_{k-1})$. Si sumamos estas desigualdades, la suma de la derecha nos da $f(y_{n-1}) - f(y_0)$. Puesto que $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$, con lo que obtenemos la demostración.

La demostración del siguiente teorema se puede observar en la fuente [1].

Teorema 1.3.5. *Si f es monótona en $[a, b]$, entonces el conjunto de discontinuidades de f es numerable.*

1.3.1. Funciones de Variación Acotada

C. Jordan, en 1881, introduce la noción de variación acotada para funciones definidas en un intervalo de \mathbb{R} a valores en \mathbb{R} . Demostrando que toda función de variación acotada puede descomponerse como diferencia de funciones monótonas; así la función de variación acotada tiene serie de Fourier puntualmente convergente [5].

Las funciones de variación acotada tienen una estrecha relación con las curvas que poseen longitud finita. Estas juegan un papel importante en la teoría de integración de Riemann - Stieljes. Se agregan definiciones necesarias para conocer las funciones de variación acotada.

Definición 1.3.2. *(partición de un intervalo). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una tupla (sucesión finita) $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_n)$ se llama partición del intervalo $[a, b]$, si $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$. El conjunto de todas las particiones en $[a, b]$ lo denotemos por $\mathcal{P}[a, b]$.*

Definición 1.3.3. *(variación de una función). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para toda partición $\tau \in \mathcal{P}[a, b]$, sea $S(f, \tau) := \sum_{k=1}^n |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|$. La variación total de f en $[a, b]$ se define mediante la siguiente fórmula:*

$$\text{Var}_a^b f := \sup_{\tau \in \mathcal{P}[a, b]} S(f, \tau).$$

Definición 1.3.4. *(funciones de variación acotada). Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a, b]$, si $\text{Var}_a^b f < +\infty$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ se denota por $\text{BV}[a, b]$.*

1.4. Convergencia

Breve reseña histórica

Muchos matemáticos han colaborado en el desarrollo del Análisis Armónico; dentro de los conceptos de gran importancia, nos encontramos con los de continuidad, los tipos de convergencia de funciones y así mismo la divergencia. Esta parte de la tesis se enfocará en dar una breve historia acerca del origen y progreso de estos importantes conceptos. Se pretende tener el conocimiento histórico y su influencia en la actualidad.

En cuanto a la convergencia, Fourier afirmaba [5]:

“Esto no resulta solamente de que los valores de los términos disminuyen continuamente; pues esta condición por sí sola no basta para establecer la convergencia de una serie. Es necesario que los valores a los que se llega aumentando continuamente del número de términos se acerquen cada vez más a un límite fijo y no se separen de éste más que en una cantidad que puede hacerse menor que toda magnitud dada: este límite es el valor de la serie. Pues bien, se demuestra rigurosamente que las sucesiones de las que se trata satisfacen esta última condición.”

A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y posteriormente, el tipo de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del análisis matemático fue considerable.

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas. Fue Dirichlet quién en 1829 inició una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia [5]:

“Si la función $\varphi(x)$, cuyos valores se suponen finitos y determinados, no presenta más que un número finito de soluciones de continuidad entre los límites $-\pi$ y π , y si además no tiene más que un número determinado de máximos y mínimos entre esos mismos límites, la serie de Fourier cuyos coeficientes son integrables definidas dependientes de la función $\varphi(x)$ es convergente a un valor expresado generalmente por $\frac{1}{2}[\varphi(x + \epsilon) + \varphi(x - \epsilon)]$, donde ϵ designa un número infinitamente pequeño.”

Es decir, si una función acotada es continua a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto de la semisuma de los límites laterales de la función. La definición era apta para la integral, que data de 1823. Además por el interés de su resultado, el trabajo de Dirichlet vino a clarificar los términos en que se planteaba el problema. Por una parte, sólo podemos hablar de coeficientes de Fourier más que para las funciones para las cuales las integrales que aparecen en las fórmulas tienen sentido. Por otra, Dirichlet comprendió que no había que buscar un resultado tan general como Fourier sugería, sino condiciones suficientes que asegurasen la convergencia de la serie. Inauguró así los *criterios de convergencia*.

En 1881 Camille Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada. Probó que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, por lo que se limitó a señalar que *la demostración de Dirichlet es aplicable, sin modificación*. El concepto de función de variación acotada nació precisamente en ese trabajo de Jordan. Indicó que *las funciones de oscilación limitada forman una clase bien definida, cuyo estudio podría presentar algún interés* y mostró algunas de sus propiedades. En particular, la posibilidad de que una función de variación acotada tenga una cantidad infinita de discontinuidades en cualquier intervalo, le sirvió para mostrar que una posible condición necesaria y suficiente de integrabilidad que Dirichlet sugería al final de su artículo no era necesaria.

Como es bien sabido, las funciones de variación acotada han tenido muchas otras aplicaciones en análisis matemático. Un criterio

de convergencia sencillo de aplicar se debe a Rudolph Lipschitz. Éste mostró en su tesis que si la función f satisface

$$|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^\alpha$$

para algún $\alpha > 0$ y todo t suficientemente pequeño, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en el punto x . Se reconoce inmediatamente que la condición sobre la función es lo que llamamos una condición de Lipschitz (aunque a veces este nombre se reserva para el caso $\alpha = 1$ y se llama condición de Hölder al caso general).

Una prueba del resultado de Lipschitz se da utilizando la representación de Dirichlet y el lema de Riemann-Lebesgue (que mencionaremos en la siguiente sección). Pero la prueba original de Lipschitz no es tan sencilla; él no disponía del lema, debido al retraso en la publicación del trabajo de Riemann y, a cambio, su prueba pasaba por el criterio de Dirichlet. Exactamente con los mismos medios -núcleo de Dirichlet y lema de Riemann Lebesgue- se puede probar el criterio de Dini, que engloba al de Lipschitz. Los criterios de Dirichlet-Jordan y de Lipschitz-Dini son los habituales en los libros [5].

Es importante reconocer los múltiples intentos, de distintos y reconocidos matemáticos, para que actualmente se tengan conceptos concretos y que aún seguirán en desarrollo y ajuste, de acuerdo al mismo crecimiento de conceptos matemáticos, a continuación, las definiciones vigentes de diferentes tipos de convergencia que se estudian.

De los conceptos que a continuación se presentan, sólo se considerarán los referentes a convergencia puntual serán de utilidad para el estudio en los capítulos siguientes.

Definición 1.4.1. *(Convergencia puntual)* Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , se dice que converge puntualmente a f si para cada $x \in A$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $N(x, \epsilon) = N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N(x, \epsilon)$ entonces $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

Definición 1.4.2. *(Convergencia Uniforme)* Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en un conjunto A , se dice que converge

uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) = N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N(\epsilon)$ y para todo $x \in A$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Ejemplo 1 (convergencia uniforme:)

Una sucesión de funciones para las que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Sea

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n, \tag{1.23}$$

si $x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ Si $0 \leq x \leq 1$ el límite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe y es igual a 0. Por lo tanto, $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Pero

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx, \\ &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dt = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

luego $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$. En otras palabras, el límite de las integrales no es igual a la integral de la función límite. Luego, las operaciones de *límites* y de *integración* no pueden ser, en general, intercambiadas.

La condición de Cauchy para la convergencia uniforme

Teorema 1.4.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A . Existe una función f tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A si, y sólo si, se satisface la siguiente condición (condición de Cauchy): Para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que $m > N$ y $n > N$ implican $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para cada x de A .*

Convergencia Uniforme de Series Infinitas de funciones

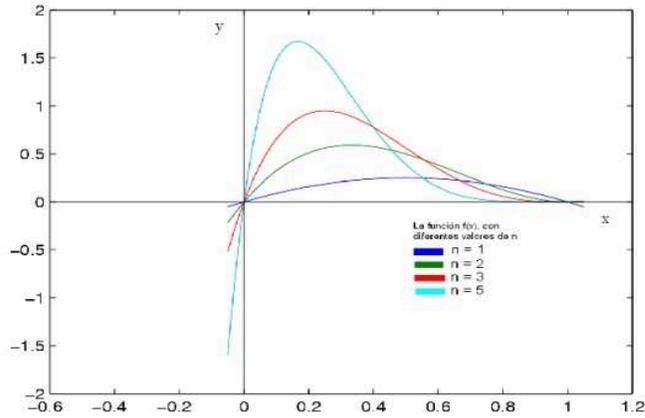


Figura 1.7: Gráfica de la función (1.23), para $n = 1, 2, 3$ y 5 .

Definición 1.4.3. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto A , para cada x de A se considera

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Si existe una función f tal que $S_n \rightarrow f$ uniformemente en A , se dice que la serie $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x), \quad (\text{uniformemente en } A)$$

Teorema 1.4.2. (La condición de Cauchy para la convergencia uniforme de las series). La serie infinita $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implica

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon,$$

para $p = 1, 2, \dots$ cada $x \in A$.

Convergencia uniforme e integración de Riemann- Stieltjes

Teorema 1.4.3. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que cada término de la sucesión f_n es una función real tal que $f_n \in \mathbf{R}(\alpha)$ Riemann - Stieltjes en $[a, b]$, para cada $n = 1, 2, \dots$. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$ y definamos $g_n(x) = \int_a^x f_n(x) d\alpha(x)$ si $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces tenemos:*

- a) $f \in \mathbf{R}(\alpha)$ en $[a, b]$.
- b) $g_n \rightarrow g$ uniformemente en $[a, b]$ donde $g(x) = \int_a^x f(x) d\alpha(x)$.

Nota: La conclusión implica que, para cada x de $[a, b]$, podemos escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(x) d\alpha(x) = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\alpha(x).$$

Esta propiedad se enuncia a menudo diciendo que una sucesión uniformemente convergente se puede integrar término a término.

Teorema 1.4.4. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en $[a, b]$), donde cada f_n es una función real tal que $f_n \in \mathbf{R}(\alpha)$ en $[a, b]$. Entonces tenemos:*

1. $f \in \mathbf{R}(\alpha)$ en $[a, b]$
2. $\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(x) d\alpha(x)$ uniformemente en $[a, b]$

La demostración de los Teoremas (1.4.3) y (1.4.4) se observa en la referencia [1].

Definición 1.4.4. *(Convergencia en Media) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones periódicas de período 2π , converge a f . Si para cada $\epsilon > 0$ existe una $N(\epsilon) = N \in \mathbf{N}$ tal que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \epsilon,$$

para $n \geq N(\epsilon)$.

Definimos la sucesión $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, para el caso de Series de Fourier, con esto la Convergencia en Media se expresa como sigue [4]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)|^2 dx < \epsilon,$$

para $n \geq N(\epsilon)$.

Criterios de Convergencia Puntual

Un tipo de convergencia que nos interesa es la puntual, puesto que será de suma importancia los criterios que se observarán y sus aplicaciones en el fenómeno que estudiaremos posteriormente. Para ello consideremos el espacio $L^1(I)$ de funciones Lebesgue integrable y sea S_n la n -ésima suma parcial de Fourier para la función f .

Teorema 1.4.5. (*Criterio de Dini*) Sea $f \in L^1(I)$, f Lebesgue integrable, donde $I = [-\pi, \pi]$. Supongamos que existe un $\delta > 0$ y $x \in I$ tal que $\int_{|t|<\delta} |\frac{f(x+t)-f(x)}{t}| dt < +\infty$, entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$.

En particular en (1.1) se requiere que f sea par.

La expresión discontinuidades simples o discontinuidades con salto se utilizan para describir una situación en que una función tiene salto finito en un punto $x = x_0$.

Ello significa que f tiende hacia límites finitos pero diferentes cuando nos acercamos a x_0 por la derecha y por la izquierda. Podemos formular este comportamiento escribiendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon), \quad \epsilon > 0$$

donde se sobreentiende que ambos límites existen y son finitos.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es acotada si es válida una desigualdad del tipo

$$|f(x)| \leq M$$

para cierta constante $M > 0$ y para todo x .

En 1829 Dirichlet demostró el criterio de convergencia siguiente [6]:

Teorema 1.4.6. (*Criterio de Dirichlet*) Si f es acotada y monótona a trozos en $I = [-\pi, \pi]$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

En particular, hay convergencia a $f(x)$ en los puntos $x \in I$ donde f es continua.

Al transcurrir el tiempo y haberse desarrollado ampliamente el Análisis Matemático el criterio de Dirichlet también tuvo un progreso, y este se le debe a Jordan, quien fue el que generalizó dicho criterio, que a continuación se enuncia.

Teorema 1.4.7. (*Criterio de Jordan*) Si $f \in L^1(I)$, donde $I = [-\pi, \pi]$, es de variación acotada en una vecindad de x , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Igualmente la convergencia a $f(x)$ se da en los puntos $x \in I$ donde f es continua.

Analicemos lo siguiente: La continuidad de una función no es una condición suficiente para la convergencia de su serie de Fourier, y tampoco es necesaria. O sea, es perfectamente posible que una función discontinua sea representable por su serie de Fourier en todo punto, siempre que sus discontinuidades sean lo bastante débiles y que se comporte relativamente bien entre sus puntos de discontinuidad. En el teorema de Dirichlet, las discontinuidades son simples y la gráfica consiste en un número finito de trozos continuos crecientes o decrecientes.

Capítulo 2

Fenómeno de Gibbs



Figura 2.1: Albert Michelson (1852-1931).

Reseña histórica

En 1898, el físico Albert Michelson y su colega S. Stratton construyeron un sintetizador armónico: un dispositivo que reconstruye una señal periódica $\tilde{f}_N(x)$ de período T_0 y hasta 80 de sus componentes armónicas.

Michelson probó su dispositivo calculando los coeficientes de Fourier de distintas señales periódicas $\tilde{f}(x)$ y comparando la señal

reconstruida $\tilde{f}_N(x)$ con la original: en líneas generales $\tilde{f}_N(x)$ resultaba muy similar a $\tilde{f}(x)$. Sin embargo, cuando utilizó como señal de prueba una onda cuadrada la aproximación no fue tan buena. Según Lanczos (1966), Michelson no podía comprender las causas del problema, y pensaba que su aparato podría estar funcionando incorrectamente. Confió sus dudas al matemático Josiah Gibbs, quien investigó el fenómeno y publicó sus resultados en 1899. Este comportamiento ya había sido observado y explicado por el matemático inglés Henry Wilbraham 50 años antes, en la corrección de un trabajo de Fourier que trataba sobre la convergencia de las series. Este resultado pasó desapercibido, posiblemente porque fue publicado en una pequeña revista no muy difundida, y fue redescubierto por Carslaw en 1925.

En cambio, según Gottlieb y Shu (1997), Michelson y Stratton (1898) publicaron un trabajo en *Nature* donde describían la construcción y el funcionamiento del analizador armónico, junto con algunos gráficos cuyo propósito era demostrar que la máquina calculaba correctamente los coeficientes de la serie de Fourier. Una de las curvas era una onda cuadrada que exhibía las oscilaciones de Gibbs, pero los autores no comentaban nada al respecto en ese trabajo. Sin embargo, parece que Michelson había notado algo particular, pues al poco tiempo (6 de Octubre de 1898) envía una carta a la revista donde comenta la dificultad de construir la función $f(x) = x$ a partir de sus coeficientes de Fourier. En particular, argüía que la expresión 1.11 evaluada en $x = T_0(1/2 + k/N)$, donde k es pequeño, converge a distintos límites para diferentes valores de k . También observó que el mismo fenómeno ocurría para la derivada de la función (una onda cuadrada).

El matemático A. E. H. Love atacó a Michelson en la siguiente edición de *Nature* (13 de Octubre de 1898). Comenzó sugiriendo que Michelson debía leer el texto de Hobson *Trigonometría*. Aclaraba correctamente que “el proceso utilizado por Michelson es inválido.” Es interesante destacar que Love remarcaba los errores en el argumento matemático de Michelson, pero no se preocupó por entender la dificultad que éste había observado. Parece que Love no conocía el analizador armónico, ni que el problema era el de sintetizar una

función a partir de sus coeficientes de Fourier.

El próximo capítulo en la historia ocurre el 29 de Diciembre de 1898, cuando en *Nature* se publican tres cartas. La primera fue remitida por Michelson, con fecha 1 de Diciembre, remarcando que desde su punto de vista la convergencia debía ser uniforme en cualquier entorno de la discontinuidad.

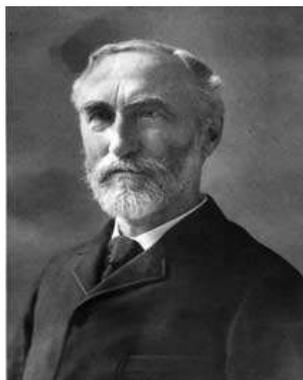


Figura 2.2: Josiah Gibbs (1839-1903). Fuente: La Universidad de Yale, New Haven, CT

Gibbs era el autor de la carta siguiente, fechada el 29 de Noviembre, en donde explicaba las dudas de Michelson, destacando que Love las había ignorado, y describía las oscilaciones. Sin embargo, su nota parece implicar que la amplitud de estas oscilaciones decrecían con N .

Esta nota estaba seguida por una carta de Love, exponiendo la noción de convergencia no uniforme y admitiendo que no había comprendido los problemas indicados por Michelson en su primera carta.

Recién el 27 de Abril de 1899 Gibbs publica el resultado correcto, pidiendo disculpas, “I should like to correct a careless error” y mostrando que las oscilaciones no decaen, sino que el sobrepico tiende a un número constante.

Las últimas comunicaciones aparecieron nuevamente en *Nature*. En Mayo de 1899 Michelson comunicaba una carta de Poincaré y en Junio de 1899 Love básicamente repetía sus puntos de vista.

Nuevamente, no parecía notar que el comportamiento de las sumas finitas era crucial para reconstruir una función a partir de su serie de Fourier.

El nombre “fenómeno de Gibbs” fue utilizado por vez primera por Böcher en 1906, en un artículo donde extendía el resultado de Gibbs. El matemático húngaro Fejér hizo el primer intento para resolver el fenómeno de Gibbs. En 1900 descubrió que las medias de Cesàro de las sumas parciales convergen uniformemente. Este método equivale a filtrar la señal con un filtro de primer orden [7].

2.1. Función Sinc

Antes de proseguir con el fenómeno de Gibbs, es importante definir la llamada *función sinc o seno cardinal*. La *función sinc* se denota como $\text{sinc}(x)$ y posee dos formas de definición. La primera es la llamada definición *sinc normalizada*. Generalmente se define de la siguiente forma:

$$\text{sinc}_N(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}. \quad (2.1)$$

Esta se relaciona con el análisis de sistemas y señales en ingeniería lo cual es importante para el procesamiento de señales digitales (audio, voz, imágenes, video). También se relaciona con la teoría de la información, es una rama de la teoría matemática y de las ciencias de la computación que estudia la información y todo lo relacionado con ella: canales de información, compresión de datos, criptografía y temas relacionados.

La otra manera de definirla se conoce como *sinc desnormalizada* y es utilizada en matemática (funciones de Bessel) y proyecciones cartográficas (Proyección de Winkel-Tripel). Se expresa de la siguiente forma:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (2.2)$$

En los dos casos vistos de *funciones sinc*, los valores de las funciones poseen una singularidad previsible en cero, lo cual habitual-

mente se determina como una igualdad a 1. La *función sinc* es diferenciable en todo \mathbb{R} .

La función desnormalizada es idéntica a la normalizada excepto por el factor de escala faltante en el argumento [11].

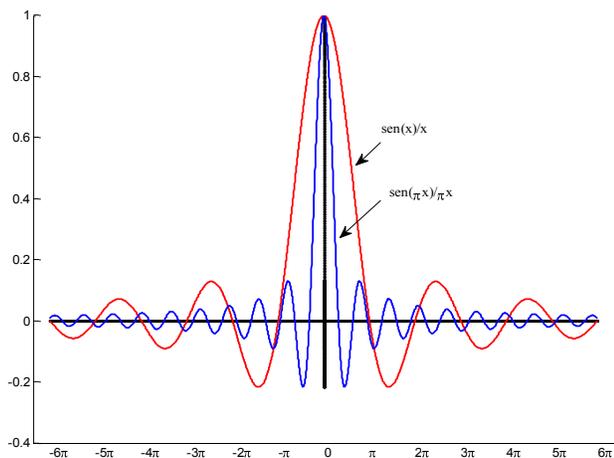


Figura 2.3: *Función sinc normalizada y sinc desnormalizada.*

Definición 2.1.1.

$$sinc(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se enuncian las propiedades de la *integral de sinc*, como complemento a este concepto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc_N(x) dx = 1 \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(x) dx = \pi. \tag{2.4}$$

Demostración: Calcular

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \quad (2.5)$$

Se conoce el siguiente resultado: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ y se define a $g(x)$ como sigue

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

donde g es continua.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

Usando

$$\frac{e^{ix}}{x} = \frac{\cos(x) + i\text{sen}(x)}{x},$$

se tiene

$$\text{Re} \left(\frac{e^{ix}}{x} \right) = \frac{\cos(x)}{x}$$

y la parte imaginaria

$$\text{Im} \left(\frac{e^{ix}}{x} \right) = \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Entonces,

$$\text{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = I. \quad (2.6)$$

Sea, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Sí

$$z = \varepsilon e^{i\theta},$$

se tiene que

$$dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta,$$

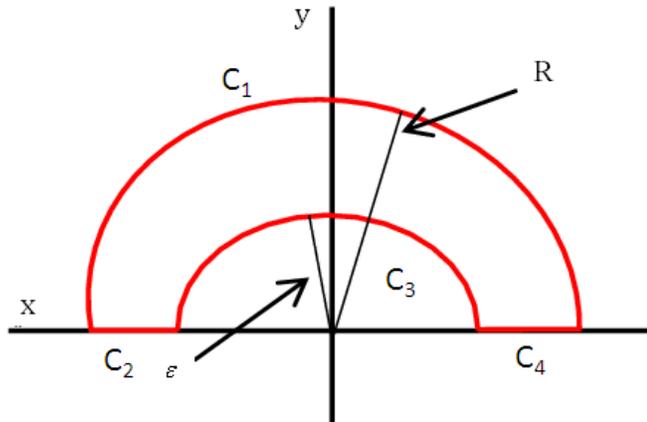


Figura 2.4: La función $\frac{e^{iz}}{z}$.

es decir,

$$dz = izd\theta$$

Ya que $\frac{e^{iz}}{z}$ es analítica sobre C y la región encerrada por ella, se tiene que

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

donde C es la curva.

Observe que

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0 \text{ y } R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2+C_4} f(z) dz + \int_{-C_3} f(z) dz \right],$$

entonces

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0 \text{ y } R \rightarrow \infty} \int_{C_2+C_4} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-C_3} f(z) dz$$

luego,

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0 \text{ y } R \rightarrow \infty} \int_{C_2+C_4} \frac{e^{ix}}{x} dx - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{ie^{i\epsilon e^{i\theta}}}{z} dz.$$

Como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^\pi e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta = i\pi,$$

se tiene que

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{C_2+C_4} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi. \quad (2.7)$$

Véase que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

Se tiene

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|,$$

entonces

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{C_1} |f(z)| |dz|.$$

Se tiene $z = x + iy$, de donde $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}e^{ix}$, con esto se llega a

$$\int_{C_1} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| |dz| = \int_{C_1} \left| \frac{e^{-y}e^{ix}}{z} \right| |dz| = \int_{C_1} \frac{|e^{-y}e^{ix}|}{|z|} |dz|,$$

ahora, si $z = Re^{i\theta}$, entonces $dz = izd\theta$ y $|dz| = |z|d\theta$, luego

$$\int_{C_1} \frac{|e^{-y}e^{ix}|}{|z|} |z| d\theta,$$

y como $|e^{-y}e^{ix}| = e^{-y}$, pues sólo interesa la parte real, entonces,

$$\int_{C_1} |e^{-y}e^{ix}| d\theta = \int_0^\pi e^{-y} d\theta.$$

De este modo, se tiene que, $z = x + iy = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, entonces $y = \operatorname{Im} z(\theta)$, de esta manera, $e^{-y} = e^{-\operatorname{Im} z(\theta)}$

Cuando $0 < \theta < \pi$, entonces, $0 < \sin(\theta) < 1$.

Nota:

$$\mathcal{M}(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}^* \mid f \text{ es medible}\}.$$

Teorema 2.1.1. *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Sean $f : E \rightarrow \mathbb{R}^*$ y f_n una sucesión en $\mathcal{M}(E)$ tal que $f_n \rightarrow f$ excepto en un conjunto de medida cero, si existe $g \in \zeta(E)$ tal que $|f_n| \leq g$ excepto en un conjunto de medida cero, $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \zeta(E)$, $\{f_n\} \subset \zeta(E)$ y*

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Ahora se observa que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} = \begin{cases} 1 & \theta = 0, \pi \\ 0 & 0 < \theta < \pi \end{cases} = f(\theta)$$

Demostración: Si $\theta = 0, \pi$, entonces $e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} = e^{-R(\theta)} = e^{-0} = 1$. Para el caso en que $0 < \theta < \pi$, se véase que $0 < \operatorname{sen} < 1$, por lo tanto, $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} = 0$, para cada $\theta \in (0, \pi)$, por lo cual $f_R(\theta) = e^{-R \operatorname{sen}(\theta)}$, entonces

$$\int_0^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$$

Así, por el Teorema (2.1.1),

$$\int_0^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = \int_0^\pi f(\theta) d\theta = 0.$$

con $g(\theta) = 1$ si $\theta \in [0, \pi]$.

Observando lo anterior, tenemos que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-y} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = 0$$

cuando $0 < \theta < \pi$.

Luego, se sustituye lo anterior en (2.5) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dx = i\pi \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.4), se tiene que

$$I = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2}(i\pi) \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{i\pi}{2} \right)$$

entonces

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Se ha dado una breve reseña histórica acerca del *fenómeno de Gibbs* y se ha dado a conocer la *función Sinc*, ahora se demostrará y se garantizará la existencia de este fenómeno con el Lema y Teorema siguientes.

Lema 2.1.1. *Sea f la función cuadrada (del ejemplo 1), con*

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1},$$

como su N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f , entonces sus puntos máximo y mínimo local en $[-\pi, \pi]$ los alcanza en $\frac{\pm\pi}{2(N+1)}$.

Demostración: Como la N -ésima suma parcial de Fourier de f es

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1},$$

podemos escribirla en la forma

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \int_0^x \cos((2k+1)u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^N \cos((2k+1)u) \right\} du.$$

Puesto que

$$\int_0^t \cos((2k+1)u) du = \left(\frac{1}{2k+1} \right) \int_0^x \cos((2k+1)u)(2k+1) du,$$

si se hace $v = (2k + 1)u$ y $dv = (2k + 1)du$,

$$\frac{1}{2k + 1} \int_0^{(2k+1)x} \cos(v)dv = \frac{1}{2k + 1} \text{sen}(v) = \frac{1}{2k + 1} \text{sen}(2k + 1)x.$$

Ahora, podemos calcular la suma $\sum_{k=0}^N \cos((2k + 1)u)$ y usando la identidad trigonométrica siguiente

$$\frac{\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b)}{2} = \cos(a)\text{sen}(b),$$

se obtiene,

$$\cos(2k + 1)u \text{sen}(u) = \frac{\text{sen}(2(k + 1)u) \text{sen}(2ku)}{2},$$

lo que nos lleva a expresar la identidad

$$\sum_{k=0}^N \cos((2k + 1)u) \text{sen}(u) = \sum_{k=0}^N \frac{\text{sen}((2k + 2)u) - \text{sen}(2ku)}{2},$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \text{sen}((2k + 2)u) - \text{sen}(2ku) = \frac{1}{2} \text{sen}(2(N + 1)u).$$

Así

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^N \cos((2k + 1)u) \right\} du = \frac{2}{\pi} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^N \cos((2k + 1)u) \cdot \frac{\text{sen}(u)}{\text{sen}(u)} \right\} du,$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^N \cos((2n + 1)u) \text{sen}(u) \cdot \frac{1}{\text{sen}(u)} \right\} du, \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\text{sen}(2(N + 1)u)}{\text{sen}(u)} du. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En el ejemplo se puede ver que al aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en (2.7), se obtiene:

$$S'_N(x) = \frac{2 \text{sen}((2N + 1)x)}{\pi \text{sen}(x)}.$$

El primer máximo de la suma S_N en el intervalo $(0, \pi]$ ocurre para $x = \frac{\pi}{2(N+1)}$, la suma S_N toma el valor

$$S_N\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\text{sen}(2(N+1)u)}{\text{sen}(u)} du. \quad (2.10)$$

El siguiente resultado, garantiza lo que Wilbraham había demostrado en su trabajo, es decir la existencia del 9% de diferencia de salto entre la función y su N -ésima suma parcial de Fourier [2].

Teorema 2.1.2. *Sea f definida como en el Lema (2.1), entonces:*

$$\begin{aligned} \lim_n S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) &= f(0^+) + [f(0^+) - f(0^-)] \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(x)}{x} dx\right) \\ &\approx (1 + [1 - (-1)](0.089)), \end{aligned}$$

p y se tiene

$$\lim_n S_n\left(\frac{-\pi}{2(n+1)}\right) = (-1) - (1 - (-1)) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(x)}{x} dx\right).$$

Es decir, aproximadamente es el 9% para este caso de una longitud de valor 2.

Demostración: Se hace un cambio de variable en la ecuación (2.10) de tal manera que $v = 2(N+1)u$

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{\text{sen}(v/(2(N+1)))} \frac{dv}{2(N+1)} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} \frac{v/(2(N+1))}{\text{sen}(v/(2(N+1)))} dv. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función $\frac{\text{sen}(v)}{v}$ estudiada en la sección 2.0.6 es una función acotada en $[0, \pi]$ y

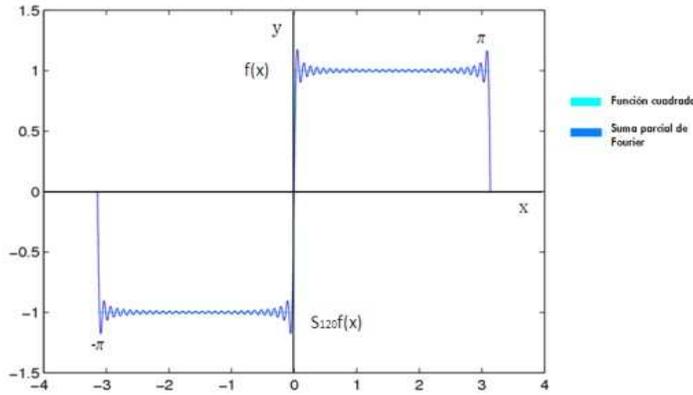


Figura 2.5: Función cuadrada y su suma parcial de Fourier. $N = 120$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{v \in (0, \pi)} \left| 1 - \frac{v/(2(N+1))}{\text{sen}(v/(2(N+1)))} \right| \right\} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} dv - (S_N x) \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} dv - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} \frac{v/(2(N+1))}{\text{sen}(v/(2(N+1)))} dv \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} \left\{ 1 - \frac{v/(2(N+1))}{\text{sen}(v/(2(N+1)))} \right\} dv \right) = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} dv,$$

donde a la expresión $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} dv$ es conocida como la constante de Gibbs, así el límite que se busca se expresa de la siguiente manera

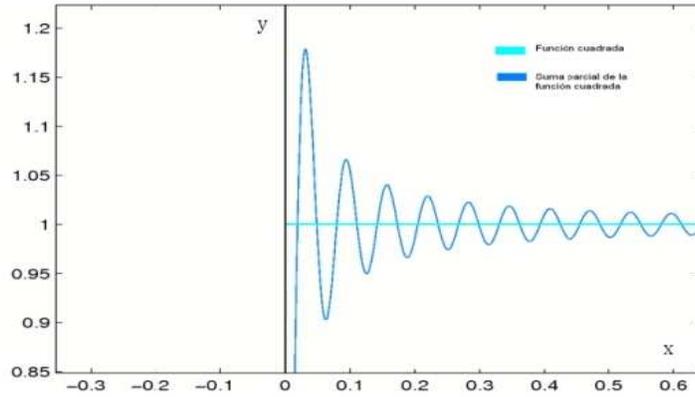


Figura 2.6: Fenómeno de Gibbs, presente en la función cuadrada su punto de discontinuidad es 0. $N = 120$.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) &= f(0^+) + [f(0^+) - f(0^-)] \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(v)}{v} dv \right) \\ &= 1 + \frac{0.179}{2} = f(0^+) + \frac{0.179}{2} [f(0^+) - f(0^-)], \end{aligned}$$

es lo que se quería probar. El argumento para $\frac{-\pi}{2(N+1)}$ es el mismo.

Cabe resaltar que los puntos evaluados en la n -ésima suma parcial S_N definidos en el intervalo $[-\pi, \pi]$, pero estos no se encuentren en una vedindad cercana al punto de discontinuidad mantienen una cercanía con la función cuadrada.

Capítulo 3

σ - Factor Lanczos. Filtros

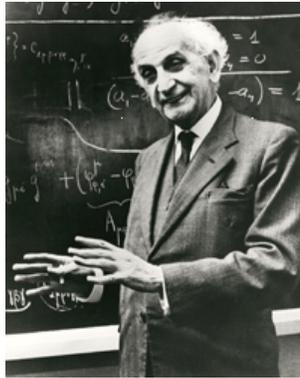


Figura 3.1: Cornelius Lanczos (1893 - 1974). Fuente: Publicado por North Carolina State University.

Antecedentes históricos

Cornelius Lanczos (1893-1974) fue un reconocido físico matemático que tuvo un profundo impacto sobre los cimientos de la ciencia del siglo XX. Uno de los resultados que destaca es la llamada *aproximación de Lanczos*; el cual es un método que nos sirve para calcular numéricamente la función Gamma; además el σ -factor o también llamado *Factor Lanczos*, es utilizado para reducir el fenómeno de Gibbs.

La aplicación del σ -Factor Lanczos no sólo puede servir para transformar una serie de Fourier divergente en una serie convergente, sino también para aumentar la convergencia de una serie de Fourier. Bajo el supuesto de que cualquier función puede considerarse como la derivada de su integral, la reducción del error en la derivada debida al factor m debe mostrar un efecto benéfico en la convergencia de cualquier serie de Fourier. La lentitud de la convergencia de la serie de Fourier es particularmente indeseable si un punto de discontinuidad está involucrado. El efecto de esta discontinuidad es que la serie oscila alrededor de la función original con amplitudes que decrecen muy lentamente al incrementar el número de términos. Las oscilaciones de las series truncadas alrededor de la función original están siempre presentes. Por lo general, las amplitudes de estas oscilaciones son suficientemente pequeñas. En el caso de la discontinuidad, sin embargo, son muy visibles e interfieren con la síntesis eficaz de armónicos.

Se sabe que la llamada *media aritmética de Fejér*, es el método que elimina el fenómeno de Gibbs [8]; con este método la aproximación de la función cuadrada mostrada en el ejemplo 1 de series de Fourier, ahora ocurre por funciones monótonas completamente suaves que se mantienen constantemente debajo de la curva. El método del σ -Factor no elimina las oscilaciones de la serie de Fourier, pero atenúa las amplitudes [8].

El teorema siguiente será de gran utilidad para la identificación del σ -Factor.

Teorema 3.0.3. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrable, continua en x y sea $\bar{S}(x, h) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x)dx$, donde $t \in (a, b)$. Entonces*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{S}(x, h) = f(x).$$

Demostración: A la suma $\bar{S}(x, h)$ se le conoce como el promedio de f en $[x - h, x + h]$. Considerando el mismo caso de la función cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante S_n por su promedio \bar{S}_n alrededor del punto x .

$$\begin{aligned}
S_n(x) &\rightarrow \bar{S}_n(x) = \frac{n}{\pi} \int_{t-\frac{\pi}{2n+1}}^{t+\frac{\pi}{2n+1}} S_n dx \\
&= \frac{n}{\pi} \int_{t-\frac{\pi}{2n}}^{t+\frac{\pi}{2n}} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \text{sen}((2k+1)x) \right] dx,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{S}_n(x) &= \frac{n}{\pi} \int_{t-\frac{\pi}{2n}}^{t+\frac{\pi}{2n}} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \text{sen}((2k+1)x) \right] dx, \\
&= \frac{n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \Big|_{t-\frac{\pi}{2n}}^{t+\frac{\pi}{2n}} \right],
\end{aligned}$$

así nos queda

$$\frac{n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\cos(2k+1) \left[\frac{2nx+\pi}{2n} \right] - \cos(2k+1) \left[\frac{2nx-\pi}{2n} \right] \right) \right]. \quad (3.1)$$

Utilizando las identidades trigonométricas (iv) y (v) vistas en la sección 1.0.2, se obtiene $\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ despejando queda

$$\text{sen}(x)\text{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2},$$

sustituyendo esta última expresión en (3.1) se tiene:

$$\bar{S}_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \underbrace{\left[\frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2n}(2k+1))}{\frac{\pi}{2n}(2k+1)} \right]}_{\sigma} \text{sen}((2k+1)x).$$

Así queda identificado el término σ conocido como σ -Factor Lanczos. Siguiendo el mismo proceso para cualquier función obtenemos que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un σ -Factor Lanczos de la forma

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\left(\frac{\pi k}{n}\right)} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx))$$

$$\equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)).$$

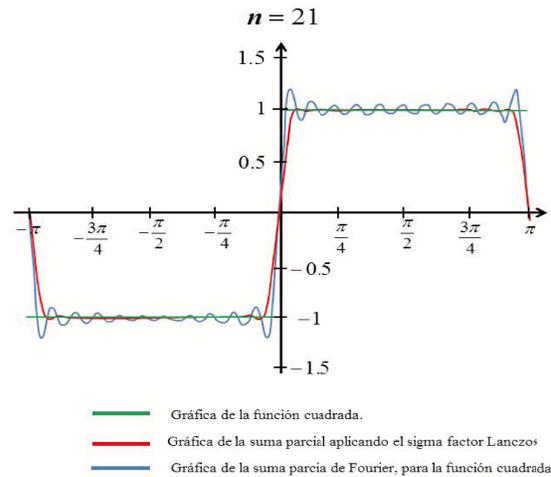


Figura 3.2: La atenuación mediante σ - Factor Lanczos.

Se observa en la Figura 3.2, que los puntos evaluados por la n -ésima suma parcial S_N en $[-\pi, \pi]$ y que no pertenecen a una vedindad de los puntos de discontinuidad están aún más cerca a la función cuadrada.

3.1. Filtro

Enunciaremos la definición de *filtro* y su aplicación a algunos resultados que se tienen con la suma parcial modificada de Fourier.

Definición 3.1.1. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función par y sea $p \in \mathbb{N}$, se le llama Filtro de orden p si:

1. $\sigma(0), \sigma^l(0) = 0, \quad 1 \leq l \leq p - 1.$
2. $\sigma(x) = 0, \quad |x| > 1.$
3. $\sigma(x) \in C^{p-1}(\mathbb{R}), \quad x \in (-\infty, \infty).$

Ejemplo 1: El Filtro de Fejér. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función par definida como sigue:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1, \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -(x - 1) & \text{si } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2: La Función sinc. Sea $\sigma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\frac{x\pi}{N})}{(\frac{x\pi}{N})} & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } |x| > \pi. \end{cases}$$

3.1.1. Suma parcial de Fourier modificada por el Filtro.

Considerese la suma parcial de Fourier de una función f suave a trozos, donde $x \in [0, 2\pi]$,

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx}, \quad (3.2)$$

donde los coeficientes de Fourier están dados como en la ecuación (1.13), en su forma compleja,

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.3)$$

Ahora, supóngase que se tienen los primeros $2N + 1$ coeficientes de Fourier de la función f , se estudiará el caso donde sólo se tiene un punto de discontinuidad en y . Se quiere recuperar el valor de $f(y)$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Al multiplicar los coeficientes de Fourier por el filtro $\sigma\left(\frac{k}{N}\right)$, la suma parcial de Fourier queda

$$S_N^\sigma(y) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{iky}, \quad (3.4)$$

donde (3.4) se identifica como la N -ésima suma parcial de Fourier modificada.

Se determinan las condiciones para que ésta serie modificada con el *Filtro* converja más rápido que la suma original,

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad (3.5)$$

donde la función filtro $S(x)$ (que depende de N), esto es:

$$S(x) = \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx}, \quad \text{donde } 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (3.6)$$

Lema 3.1.1. *Sea σ un filtro de orden p . La suma parcial de Fourier para la función $f \in C^q(\mathbb{R})$ toma la siguiente expresión:*

$$S_N^\sigma(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) S_N(y-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_N(t) S(y-t) dt, \quad (3.7)$$

donde $S(y)$ se expresa como en la ecuación (3.6).

Demostración: Se tiene que,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) S_N(y-t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-N-1}^{N-1} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \right) \left(\sum_{m=-N}^N \widehat{f}_m e^{im(y-t)} \right) dt \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-N-1}^{N-1} \sum_{m=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \widehat{f}_m e^{imy} e^{-imt} \right) dt \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N-1}^{N-1} \sum_{m=-N}^N \left(\int_0^{2\pi} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \widehat{f}_m e^{imy} e^{i(k-m)t} dt \right) \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N-1}^{N-1} \sum_{m=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \widehat{f}_m e^{imy} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt \quad (3.11)$$

se observa que para cada $-N-1 \leq k \leq N-1$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k, \\ 2\pi & \text{si } m = k. \end{cases} \quad (3.12)$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) S_N(y-t) dt = \sum_{k=-N-1}^{N-1} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \widehat{f}_k e^{iky} = S_N^\sigma(y), \quad (3.13)$$

esto es la suma parcial de Fourier modificada (3.4). La expresión derecha en (3.7) se desarrolla de manera análoga.

Se definen algunas propiedades para las integrales de la función filtro $S(x)$ determinado en (3.7).

Definición 3.1.2. *Sea $S(x)$ como en (3.7), sus integrales $S_l(x)$ están definidas por*

$$S_0(x) = S(x), \quad (3.14)$$

$$S'_l(x) = S_{l-1}(x), \quad l \geq 1, \quad (3.15)$$

$$\int_0^{2\pi} S_l(t) dt = 0, \quad l \leq 1, \quad (3.16)$$

se extiende periódicamente fuera de $(0, 2\pi)$.

Las funciones $S_l(x)$ tienen varias representaciones alternativas. Sólo algunas se consideran en el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Supóngase que σ es un filtro de orden p . Las funciones $S_l(x)$, definidas en (3.6), (3.14) - (3.16), para $0 \leq x \leq 2\pi$, se tienen las siguientes representaciones equivalentes.*

$$S_l(x) = N^{-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_l\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{i^l} e^{ikx}, \quad 1 \leq l \leq p, \quad (3.17)$$

donde,

$$G_l(\eta) = \frac{\sigma(\eta) - 1}{\eta^l}. \quad (3.18)$$

$$S_l(x) = N^{1-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iN(x+2k\pi)\eta} G_l(\eta) i^{-l} d\eta, \quad 1 \leq l \leq p. \quad (3.19)$$

El valor de las integrales S_l para la función filtro $S(x)$ se hace evidente, si se integra por partes el lado derecho de la ecuación (3.7), teniendo cuidado de no pasar por un punto de discontinuidad ξ .

Se enuncia el siguiente teorema pues identifica el error entre la suma parcial modificada y la suma parcial de Fourier, .

Teorema 3.1.1. *Sea $f(x)$ una función a trozos $C^p(\mathbb{R})$ y periódica de periodo 2π , con un punto de discontinuidad ξ . Entonces*

$$S_N^\sigma(y) = S(y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{p-1} S_{l+1}(c) (f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-)) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p(y-t) f^p(t) dt, \quad (3.20)$$

donde c o es $y - \xi$ (si $y > \xi$) o $2\pi + y - \xi$ (si $y < \xi$). Aquí y bajo la integración $\int_0^{2\pi}$ entendiéndose como la suma $\int_0^\xi + \int_\xi^{2\pi}$; es decir, la singularidad de $f^{(p)}(t)$ con $t = \xi$ no es considerada en la integración.

Demostración: Se hace el caso cuando $\xi < y$ y para $p = 1$, esto es:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) f(y-t) dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{y-\xi} S(t) f(y-t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{y-\xi}^{2\pi} S(t) f(y-t) dt \quad (3.21)$$

se tiene que

$$S_1(t) = \int_0^t s(u) du,$$

por la Definición en (3.13).

Además siendo ξ el punto de discontinuidad, se tiene la siguiente integral impropia,

$$\int_0^{y-\xi} S(t) f(y-t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{y-\xi-\varepsilon} S(t) f(y-t) dt \right], \quad (3.22)$$

donde $g(t) = f(y-t)$ y con esto $g'(t) = -f'(y-t)$, usando el método de integración por partes,

$$\int_0^{y-\xi-\varepsilon} S(t) f(y-t) dt$$

$$= S_1(t)f(y-t) \Big|_0^{y-\xi-\varepsilon} + \int_0^{y-\xi-\varepsilon} S_1(t)f'(y-t)dt \quad (3.23)$$

como S_1 es continua en $y - \xi$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{y-\xi} S(t)f(y-t)dt \\ &= S_1(y-\xi)f(\xi+) + \int_0^{y-\xi} S_1(t)f'(y-t)dt, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ahora se integra el término de la derecha de la ecuación (3.21) y se tiene:

$$\int_{y-\xi}^{2\pi} S(t)f(y-t)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{y-\xi-\varepsilon}^{2\pi} S(t)f(y-t)dt \right], \quad (3.25)$$

de la cual

$$\begin{aligned} & \int_{y-\xi-\varepsilon}^{2\pi} S(t)f(y-t)dt \\ &= S_1(t)f(y-t) \Big|_{y-\xi-\varepsilon}^{2\pi} + \int_{y-\xi-\varepsilon}^{2\pi} S_1(t)f'(y-t)dt, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{y-\xi}^{2\pi} S(t)f(y-t)dt = -S_1(y-\xi)f(\xi-) \\ & + S_1(2\pi)f(y-2\pi) + \int_{y-\xi}^{2\pi} S_1(t)f'(y-t)dt, \end{aligned} \quad (3.27)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t)f(y-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[S_1(y-\xi)f(\xi+) - S_1(y-\xi)f(\xi-) + S_1(2\pi)f(y-2\pi) + \int_0^{2\pi} S_1(t)f'(y-t)dt \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como $S_1(2\pi) = 2\pi$, ésta se extiende en todo \mathbb{R} ,

$$\frac{1}{2\pi} S_1(y)[f(\xi+) - f(\xi-)] + f(y - 2\pi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1(t) f'(y - t) dt \quad (3.29)$$

haciendo un cambio de variable $u = y - t$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} S_1(t) f'(y - t) dt &= - \int_y^{y-2\pi} S_1(y - u) f'(u) du \\ &= \int_{y-2\pi}^y S_1(y - u) f'(u) du = \int_0^{2\pi} S_1(y - u) f'(u) du \end{aligned} \quad (3.30)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} S_N^\sigma(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) f(y - t) dt \\ &= f(y) + \frac{1}{2\pi} S_1(y)[f(\xi+) - f(\xi-)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1(y - t) f'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Observe que,

$$\int_{y-2\pi}^y S(y - u) f'(u) du = \int_0^{2\pi} S(y - u) f'(u) du. \quad (3.32)$$

Esto se debe a que la función $S_1(y - u) f'(u)$ es periódica de periodo 2π .

La demostración se hizo para el caso $p = 1$, para el caso donde $p > 1$ usando integración por partes y la periodicidad de S y f nos queda,

$$\begin{aligned} S_N^\sigma(y) &= S(y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{p-1} S_{l+1}(c) (f^l(\xi+) - f^l(\xi-)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p(y - t) f^p(t) dt, \end{aligned}$$

que es a donde se quería llegar.

El Teorema (3.1.1) determina el error entre la función cuadrada denotada por $S(y)$ y la n -ésima suma parcial modificada $S_N^\sigma(y)$. Los dos últimos términos en el lado derecho de la ecuación (3.19) puede estimarse a partir de las propiedades del filtro.

Lema 3.1.3. *Sea $S_l(x)$ definida por (3.14) - (3.16); entonces*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_p(y-t) f^{(p)}(t) dt \right| \\ & \leq CN^{\frac{1}{2}-p} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde C es una constante independiente de N .

Demostración: Nuevamente se toma en cuenta la demostración para $p = 1$.

Note que una aplicación estandar del la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la periodicidad de $S_1(t)$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} S_1(y-t) f(t) dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^{2\pi} S_1^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando la representación de $S_l(x)$ como la expresión (3.17) dada en el Lema (3.1.2) se obtiene,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma(\frac{k}{N}) - 1}{k} \right)^2 \\ & = N^{-1} \sum_{k=-N}^N \left(\frac{\sigma(\frac{k}{N}) - 1}{(\frac{k}{N})} \right)^2 \frac{1}{N} + \sum_{|k|>N} \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

El primer término de la ecuación (3.35) es N^{-1} la suma de Riemann de la integral,

$$\int_{-1}^1 G_1^2(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 \left(\frac{\sigma(\eta) - 1}{\eta} \right)^2 d\eta, \quad (3.36)$$

la cual existe por la condición 1 de la Definición (3.1.1) de Filtro. El segundo término del lado derecho de (3.35) está acotado por el mismo N .

Así,

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\sigma(\eta) - 1}{\eta} \right)^2 d\eta \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\sigma(\eta_k) - 1}{\eta_k} \right)^2 \frac{1}{N} \quad (3.37)$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{\sigma(\frac{k}{N}) - 1}{(\frac{k}{N})} \right)^2 \frac{1}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N-1}^{N-1} \left(\frac{\sigma(\frac{k}{N}) - 1}{(\frac{k}{N})} \right)^2 \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Además con el resultado conocido, si

$$f_{(1)}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (3.39)$$

entonces,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=N}^{\infty} \int_k^{k+1} f_1(x) dx. \quad (3.40)$$

Ahora véase la ecuación (3.20) y trate los términos de $S_l(c)$. Se va a demostrar que la condición (b) y (c) del filtro implica que estos términos son pequeños. Para que se utiliza la representación (3.19) transportada entre el espacio físico y el espacio de Fourier.

Teorema 3.1.2. *Sea $S_l(x)$, con $l \geq 1$, dados como en (3.14)-(3.16); para $x \in (0, 2\pi)$,*

$$|S_l(x)| \leq A \frac{1}{N^{p-1}} \left(\frac{1}{|x|}^{p-l} + \frac{1}{|2\pi - x|^{p-l}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |G_l^{p-l}(\eta)| d\eta, \quad (3.41)$$

para $1 \leq l \leq p$.

Demostración: Se comienza con (3.19) y se integra por partes $(p-l)$ veces. Dado que la función de $G_l(\eta)$ es una función de C^{p-1} de la definición del filtro (de hecho, esta es exactamente la razón por la $\sigma(1)$ tiene que desaparecer con sus derivados), se tiene

$$|S_l(x)| = N^{1-l} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iN(x+2m\pi)\eta}}{N^{p-l}(x+2m\pi)^{p-l}} G_l^{p-l}(\eta) d\eta \right|. \quad (3.42)$$

Los términos importantes, son $m = 0, -1$ que nos da (3.41). Ahora se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3. *Sea $f(x)$ una función suave a trozos en $C^p(\mathbb{R})$ con un punto de discontinuidad ξ . Sea $\sigma(\frac{k}{N})$ sea un filtro de orden p que satisface la Definición (3.1.1). Ahora sea y un punto en $[0, 2\pi]$ y se denota por $d(y) = \min_{k=-1,0,1} |y - \xi + 2k\pi|$. Sea*

$$f_N^\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{iky}. \quad (3.43)$$

Entonces

$$|f(y) - f_N^\sigma(y)| \leq CN^{1-p} d(y)^{1-p} K(f) + CN^{\frac{1}{2}-p} \|f^{(p)}\|_{L^2}, \quad (3.44)$$

donde

$$K(f) = \sum_{l=0}^{p-1} d(y)^l (f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-)) \int_{-\infty}^{\infty} |G_l^{p-l}(\eta)| d\eta. \quad (3.45)$$

Demostración: Desde el Teorema (3.2) se tiene

$$f_N^\sigma(y) - f(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{p-1} S_{l+1}(c) (f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-))$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_p(y-t)f^p(t)dt. \quad (3.46)$$

El último término en (3.46) está acotado por la expresión (3.33) dada en el Lema (3.1.3):

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} S_p(y-t)f^p(t)dt\right| \leq CN^{\frac{1}{2}-p}\left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.47)$$

El primer término en (3.46) esta acotado por la expresión (3.41) dada en el Teorema (3.1.2). Nótese que $c = y - \xi$ si $y > \xi$ y $c = 2\pi + y - \xi$ si $y < \xi$ y por consiguiente,

$$\frac{1}{c^{p-l}} + \frac{1}{|2\pi - c|^{p-l}} \leq \frac{2}{d^{p-l}}. \quad (3.48)$$

La sustitución de (3.41), (3.47) y (3.48) demuestra el teorema.

El término que está a la derecha de (3.43) es el error que existe entre la función original y la suma parcial modificada por el Filtro, y este error debe ser menor al 9%, además el teorema demuestra que el proceso de filtrado trabaja fuera de la discontinuidad, ya que todos los términos en el lado derecho de (3.20) pueden ser $O(N^{1-p})$. Por lo tanto el p -ésimo orden de exactitud se puede lograr sin problemas para las funciones a trozos.

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones:

1. El Fenómeno de Gibbs es importante pues se presenta de manera inherente en algunas aplicaciones en la electrónica, computación entre otras.
2. Un método de atenuación de Gibbs es el llamado σ - Factor Lanczos, el cual es un caso particular del concepto de Filtro.
3. El método σ -Factor Lanczos se estudió en el artículo [7] y en esta tesis se presentan de forma detallada las demostraciones se espera que el lector logre una mejor comprensión de ello.

Perspectivas:

1. Estudiar el estimado de reducción del error existente del 9% generado por el Fenómeno de Gibbs con respecto a la función original aplicando el *Filtro Lanczos*.
2. Comparación de resultados, utilizando diferentes métodos de atenuación del Fenómeno de Gibbs dado en algún problema de aplicación.

Bibliografía

- [1] Apostol T. M., 2002. *Análisis Matemático*, Segunda Edición. Editorial Reverté, S.A.
- [2] Bachman G., Narici L., Beckenstein E., 2000. *Fourier and Wavelets Analysis*. Springer-Verlag N. Y., Inc.
- [3] Bartle R. G., 1966. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*.
- [4] Duoandikoetxea F. J., 1995. *Análisis de Fourier*. Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.
- [5] Duoandikoetxea F. J., 2007. *200 años de convergencia de las series de Fourier*. La Gaceta de la RSME, Vol. 10.3, Págs. 651-688.
- [6] Duoandikoetxea F. J., 2003. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAN Managua.
- [7] Gottlieb D., Shu C., 1997. *On the Gibbs Phenomenon and its Resolution*, SIAM Rev. Vol. 39, No. 4, ppp. 644-688.
- [8] Lanczos C., 1956. *Applied Analysis*, Prentice Hall.
- [9] Simmons G. F., 1990. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Macgraw Hill.
- [10] Rodríguez Del Río R., Zuazua E., 2003. *Series de Fourier y Fenómeno de Gibbs*.

- [11] Weisstein E., 2011. *Fourier Transform*, Enciclopedia Matemática. Wolfram Research.