Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Hiperespacios de continuos anclados en un punto

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
José Luis Suárez López.

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Raúl Escobedo Conde.
Dr. Javier Sánchez Martínez.

PUEBLA, PUE. 17 DE ABRIL DEL 2015

A mi familia, por su apoyo,
comprensión y cariño.

Agradecimientos

Existen muchas personas a las cuales agradecer, pero lamentablemente no para todos hay espacio en esta tesis.

En primer lugar quiero agredecer a mis asesores el Dr. Raúl Escobedo Conde y el Dr. Javier Sánchez Martínez, por su apoyo tanto intelectual como económico para la realización de esta tesis, más aún, agradezco el hecho de que hayan aceptado dirigir este trabajo que me ha dado tantas satisfacciones.

A mis revisores, la Dra. María de Jesús López Toriz, el Dr. David Herrera Carrasco y el Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado, quienes con sus comentarios han enriquecido enormemente este trabajo, pero sobre todo por tomarse el tiempo para revisarlo.

A mi familia, a mis padres Luis Suárez Machorro y Emma López Ponce, quienes con su apoyo, cariño y ejemplo me han mostrado el camino para alcanzar mis metas, a mis abuelos, mis tíos y tías, hermanos y primos quienes me han demostrado que la familia siempre está para apoyarse, aún en las situaciones más difíciles.

A mis sobrinos, Kimberly e Ikér, los cuales han llegado para llenar mi vida de alegría, y por quienes he descubierto un lado de mí que desconocía completamente.

Finalmente, pero no por eso menos importantes, a mis amigos, Emanuel, Iván, Josúe, Juan, Julieta y Rafael, quienes a pesar de nuestras diferencias, siempre me han apoyado, aconsejado y sacado de muchas dudas no sólo respecto al estudio, si no también sobre la vida misma, pero sobre todo a Emanuel, por aguantarme tantos años, en mis altos y bajos (más bajos que altos).

Sé que habrá alguien a quien haya olvidado agradecer, pero si así fuera el caso, estas lineas son para aquellos y aquellas a los cuales no nombré en estos agradecimientos.

Introducción

Este trabajo se encuentra en el marco de la Topología General, para ser un poco más concretos en la rama de Topología de Continuos y sus Hiperespacios. Específicamente desarrollamos el material necesario para desmenuzar el artículo acerca de hiperespacios de continuos anclados en un punto de Patricia Pellicer-Covarrubias [17]. Recordemos que un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Para un continuo X se considera la colección:

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado, conexo y no vacío}\}.$$

Esta familia de subconjuntos de X, dotada de la métrica de Hausdorff o, equivalentemente, con la topología de Vietoris, se denomina el hiperespacio de subcontinuos del continuo X (veáse [15], pág. 1).

El hiperespacio $C(X)$ ha sido extensamente estudiado y ahora sabemos que es extremadamente útil en el estudio de la teoría de continuos; más aún, varias de las propiedades de un continuo X pueden ser determinadas en términos de las propiedades topológicas de $C(X)$ y viceversa.

Para $D \in C(X)$ definimos en forma general el hiperespacio $C(D, X) = \{A \in C(X) : D \subset A\}$. Por conveniencia nosotros denotamos simplemente por $C(p, X)$ a $C(\{p\}, X)$ para $p \in X$. En particular nos interesa conocer propiedades de $C(p, X)$ respecto del continuo X, y viceversa.

El trabajo se compone de cuatro capítulos. En el Capítulo 1, desarrollamos los conceptos necesarios de la topología de conjuntos útiles para entender los problemas que en este trabajo se atienden y a fin de que el contenido de este trabajo sea lo más autocontenido posible. Además, enunciamos propiedades de los continuos tales como puntos de corte, indescomponibilidad e irreducibilidad de continuos, y algunos ejemplos de continuos tipo Knaster. También, hablamos sobre hiperespacios de espacios topológicos, así como de algunas propiedades y funciones relacionadas con éstos.

En el Capítulo 2, introducimos el concepto de hiperespacio de continuos anclados en un punto, revisamos algunas propiedades generales de estos espacios e investigamos su comportamiento al considerar funciones inducidas como en [1]. Hablamos sobre arcos, celdas y triodos en $C(p, X)$, a fin de caracterizar ciertas clases de continuos en términos de estre tipo de estructuras topológicas en $C(p, X)$.

En el Capítulo 3, hablamos acerca de una clase especial de continuos, llamada la *clase* $\mathcal{P}$, la cual se define apartir de la definición de hiperespacio de continuos anclados en un punto y utilizamos algunos conceptos desarrollados en el Capítulo 2. Desarrollamos resultados sobre la irreducibilidad y mostramos caracterizaciones del arco y la curva cerrada simple como consecuencia de la estructura topológica de sus hiperespacios de continuos anclados en puntos. También se estudia la clase de continuos cuyos hiperespacios anclados en un punto son parecidos a los del arco y la curva cerrada simple, llamados *arco similares* y *círculo similares*, respectivamente.

En el Capítulo 4, hacemos referencia a la familia de los hiperespacios anclados en un punto de un continuo X, a la cual denotamos por $K(X)$, particularmente estudiamos la estructura de este hiperespacio para la clase de continuos: *localmente conexos, arco conexos* y *de Kelley*. Curiosamente el hiperespacio $K(X)$ no siempre es un continuo, en este capítulo se trabaja para buscar condiciones necesarias y suficientes para que un continuo X tenga esa propiedad.

José Luis Suárez López
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benémerita Universidad Autónoma de Puebla
Abril 2015

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo mostraremos algunos conceptos básicos de la topología general, la teoría de continuos y sus hiperespacios. En la primera sección daremos algunos resultados relacionados con la conexidad y compacidad en espacios métricos, en la segunda sección daremos resultados concernientes con la teoría de continuos que serán de gran utilidad para el desarrollo de nuestro trabajo, para finalmente en la tercera sección presentar la teoría básica de los hiperespacios de espacios topológicos.

Notación

Para un espacio topológico X y $A \subset B \subset X$. Denotamos por $\overline{A}^B$, $int_B(A)$ y $Fr_B(A)$ la clausura, el interior y la frontera de A en B. En caso de que $B = X$, simplemente omitiremos el subíndice. Además $dim(A)$ denota la dimensión del espacio A, todos los resultados correspondientes a la teoría de dimensión pueden ser consultados en [7]. Por otro lado, en espacios métricos, $diam(A)$ denota el diámetro de A.

§1 Conceptos de topología general

En esta sección recordaremos algunos resultados de la topología general relacionados con la conexidad y la compacidad en espacios métricos, así como la definición de *componente conexa* de un espacio topológico.

1.1.1 Compacidad

En esta sección hablaremos de la definición de compacidad de un espacio topológico, además de algunas equivalencias a este concepto.
Sea X un espacio topológico. Una colección de subconjuntos de X, $\mathcal{U}$, es una **cubierta** de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, diremos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta** de X. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una subcubierta de X si cumple con ser una cubierta de X.

Definición 1.1. *Un espacio topológico X es* **compacto***, si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Proposición 1.2. *Sean X un espacio topológico compacto y F un subconjunto no vacío de X. Si F es cerrado en X, entonces F es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de F. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea U_V un conjunto abierto de X tal que $V = U_V \cap F$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \cup (X \setminus F)$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. La colección $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$ para F. Por esto, F es compacto. □

Proposición 1.3. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, consideremos $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces la familia $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. Se sigue que Y es compacto. □

Teorema 1.4. *a) Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $F_1, F_2 \subset X$ subespacios compactos de X. Si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos, U y V, tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$.*

b) Sea X un espacio topológico regular. Si $F \subset X$ es cerrado, $E \subset X$ es compacto y $F \cap E = \emptyset$, entonces existen abiertos ajenos, U y V, en X, tales que $F \subset U$ y $E \subset V$.

Una prueba del teorema anterior puede ser consultada en [4] página 245.

Proposición 1.5. *a) Sean X un espacio topológico de Hausdorff y F un subespacio de X. Si F es compacto en X, entonces F es cerrado en X.*

b) Todo espacio topológico de Hausdorff compacto es normal.

c) Sean X un espacio topológico compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es una función cerrada.

DEMOSTRACIÓN.
a) Si $x \in X \setminus F$, entonces, por el *Teorema 1.4*, para los compactos $F_1 = \{x\}$ y $F_2 = F$, existen subconjuntos abiertos ajenos, U y V, en X, tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$. Entonces $x \in U \subset X \setminus F$. De tal manera que F es cerrado.

b) Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados ajenos en X. Como X es compacto, tanto F_1 como F_2 son subespacios compactos. Como F_1 es ajeno de F_2, por el *Teorema 1.4 inciso a*), existen U y V abiertos en X tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$. Con lo cual concluimos que X es normal.

c) Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto. La función $f|_F : F \to f[F]$ es continua y sobreyectiva. Siendo F compacto, tenemos que $f[F]$ es compacto. Pero, todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es un subconjunto cerrado. De aquí que f es cerrada. □

Corolario 1.6. *Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.
Como f es continua y biyectiva, bastará con probar que f es cerrada. Pero, por la *Proposición 1.5 inciso c)*, tenemos lo que se desea. Por esto, f es un homeomorfismo. □

1.1.2 Conexidad

Definición 1.7. *Dados X un espacio topológico y Y un subespacio de X, una* **separación** *de Y es un par A, B de conjuntos no vacíos y ajenos cuya unión es Y de modo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Si A y B forman una separación, diremos que están* **separados**.

Definición 1.8. *Un espacio topológico X es* **conexo***, si no puede expresarse como la unión de dos de sus subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos. En caso contrario, diremos que X es no conexo.*

Observación 1.9. *La definición de conexidad también puede ser dada en términos de subconjuntos cerrados, ya que si U y V son abiertos ajenos y no vacíos tales que $X = U \cup V$, entonces V es igual al complemento de U, es decir, V es cerrado. De forma análoga U es cerrado.*

Definición 1.10. *Dados X un espacio topológico, U y V subconjuntos de X, entonces U y V forman una* **separación** *de X si ambos son abiertos, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \neq \emptyset \neq V$.*

Definición 1.11. *Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es* **convexo***, si para cualesquiera dos puntos x y y de E se cumple que el conjunto:*

$$F(x, y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$$

está contenido en E.

Proposición 1.12. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Si X es conexo y $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es conexo.*

Demostración.
Supongamos que Y es no conexo. Entonces existen U y V subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos en Y tales que $Y = U \cup V$. Tenemos que $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ y $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Además, como f es continua y sobreyectiva, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$, son conjuntos cerrados y no vacíos. Por esto, X es no conexo. Lo cual es una contradicción ya que X es conexo. Se concluye que Y es conexo. $\square$

Teorema 1.13. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) El espacio X es conexo.

b) Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X son X y $\emptyset$.

c) Si A es un subconjunto propio X tal que $A \neq \emptyset$, entonces $Fr(A) \neq \emptyset$.

d) No existe función continua y sobreyectiva de X en el espacio discreto $\{0, 1\}$.

Demostración.
a) $\Rightarrow$ *b)* Supongamos que existe A subconjunto propio, no vacío, abierto y cerrado de X, entonces A y $X \setminus A$ forman una separación de X, es decir, X es no conexo.

b) $\Rightarrow$ *c)* Observemos que siempre se cumple que:

$$int(A) \subset A \subset \overline{A} = int(A) \cup Fr(A).$$

Si $Fr(A) = \emptyset$, entonces $A = int(A)$. De esto que, A es un subconjunto propio, no vacío, abierto y cerrado en X.

c) $\Rightarrow$ *d)* Si $f : X \to \{0, 1\}$ es una función continua y sobreyectiva, entonces $A = f^{-1}(\{0\})$ es un subconjunto propio, no vacío de X tal que $Fr(A) = \emptyset$.

d) $\Rightarrow$ *a)* Supongamos que X es no conexo. Si A y B forman una separación de X, entonces la relación que asocia a cada $x \in A$ con 0 y a cada $y \in B$ con 1, es una función continua y sobreyectiva de X en $\{0, 1\}$. Lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.14. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{B_j : j \in J\}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Si $\bigcap_{j \in J} B_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{j \in J} B_j$ es conexo.*

Una prueba de este teorema puede ser consultada en [4] página 297.

1.1.3 Límites de sucesiones de conjuntos

En este pequeño apartado daremos algunos resultados acerca de límites de sucesiones de conjuntos en espacios topológicos, los cuales usaremos más adelante.

Definición 1.15. *El* **límite inferior** *y el* **límite superior** *de una sucesión de conjuntos,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$*, de un espacio* X*, denotados por* $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ *y* $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$*, respectivamente, se definen de la siguiente manera:*

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ *para cada conjunto abierto* U *en* X *que contiene al punto* x*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $U \cap A_n \neq \emptyset$*, para cada* $n \geq N\}$.

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ *para cada conjunto abierto* U *en* X *que contiene al punto* x*, existe un conjunto infinito,* J*, de* $\mathbb{N}$*, tal que* $U \cap A_n \neq \emptyset$*, para cada* $n \in J\}$.

Definición 1.16. *El* **límite** *de una sucesión de conjuntos,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$*, en un espacio* X*, existe y es igual al conjunto* A *si* $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$*. Para indicar esto, escribimos* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Proposición 1.17. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos en un espacio* X*, tenemos que:*

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$*; y*

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ *y* $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ *son conjuntos cerrados en* X.

Demostración.
a) Sean $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Considerando $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ tenemos que $X \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

b) Veamos que $\overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Sea $x \in \overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Se sigue que $U \cap (\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \neq \emptyset$, de manera que podemos tomar un punto $z \in U \cap (\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$. Luego, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Por esto $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.
De manera análoga se demuestra que $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ es cerrado. $\square$

Lema 1.18. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en un espacio* X*. Si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es tal que* $A_n \subset A_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Demostración.
Por la *Proposición 1.17* parte *a*), basta con probar que:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Sea $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ y fijemos un conjunto abierto U en X que contiene a x. Existe un conjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Así, $x \in \overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Dados $x \in \overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x, tenemos que $U \cap (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_N \neq \emptyset$. Dado que $A_N \subset A_n$, para cada $n \geq N$, se sigue que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. De este modo, $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$.

Concluimos que $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}$. □

1.1.4 Teorema de Golpes en la Frontera

En esta sección daremos la definición de *componente conexa* además de la prueba del conocido *Teorema de Golpes en la frontera.*

Definición 1.19. *Una* **componente conexa** *de un espacio topológico X es un subconjunto conexo maximal de X.*

Observación 1.20. *Si $p \in X$ entonces la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p es la componente de X que contiene al punto p, lo cual denotamos por K_p, y referimos como la componente de p en X. En caso en que no haya mayor complejidad, haremos referencia a la componente de X sólo por K.*

Definición 1.21. *Dados X un espacio topológico y $p \in X$, la* **quasicomponente** *conexa de p en X es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a p y la denotamos por Q_p.*

Lema 1.22. *Sea X un espacio topológico. El conjunto de las componentes de X es una partición de X.*

Demostración.
Es fácil ver que $X = \bigcup\{K_p : p \in X\}$. Ahora, sean $p, q \in X$ puntos distintos. Si $K_p \cap K_q \neq \emptyset$, entonces $K_p \cup K_q$ es un conjunto conexo que contiene a p y a q. Se sigue que $K_p \cup K_q \subset K_p$ y $K_p \cup K_q \subset K_q$. Así, $K_p = K_q$. Con lo cual concluimos lo deseado. □

Lema 1.23. *Sea X un espacio topológico. Para cada $p \in X$ tenemos que $K_p \subset Q_p$.*

Demostración.
Fijemos un punto $p \in X$. Consideremos K_p y Q_p, la componente y la quasicomponente de p en X, respectivamente. Supongamos que existe $x \in K_p$ tal que $x \notin Q_p$. Entonces existe un conjunto abierto y cerrado en X, el cual denotamos por A, tal que $p \in A$ y $x \notin A$. Tenemos que $A \cap K_p$ es un subconjunto abierto y cerrado de K_p, no vacío. Notemos que $x \in K_p$ y $x \notin A \cap K_p$, de tal forma que $A \cap K_p$ está contenido propiamente en K_p. Lo cual, por el *Teorema 1.13*, es una contradicción ya que K_p es conexo. □

Observación 1.24. *La otra inclusión en el Lema 1.23 no se cumple en general, es decir, no siempre se cumple que, para* $p \in X$, $Q_p \subset K_p$.

Para ello veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.25. *Definamos el espacio* X *de la siguiente manera:*

$$X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n) \cup \{p, q\}.$$

Donde L_n *es el segmento en* $\mathbb{R}^2$ *con puntos extremos* $x_n = (0, \frac{1}{n})$, $y_n = (1, \frac{1}{n})$, $p = (0,0)$ *y* $q = (1,0)$.

Para demostrar que $Q_p = \{p, q\}$. *Probaremos lo siguiente:*

i) Todo conjunto abierto y cerrado en X *que contiene a* p *también contiene a* q.
Consideremos un conjunto abierto y cerrado, A, *en* X *tal que* $p \in A$. *Como* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$ *y* A *es un conjunto abierto, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para cada* $n \geq N$, *tenemos que* $x_n \in A$. *Así, para todo* $n \geq N$, $A \cap L_n \neq \emptyset$, *es abierto y cerrado en* L_n, *luego, como* L_n *es conexo, se sigue que* $A \cap L_n = L_n$, *es decir* $L_n \subset A$. *Se sigue que, para cada* $n \geq N$, $y_n \in A$. *Entonces, como* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = q$ *y* A *es cerrado, se obtiene que* $q \in A$. *De esta manera queda probado i).*

ii) Si $x \in X \setminus \{p, q\}$, *entonces* $x \notin Q_p$.
Sea x *como se indica, así que existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \in L_m$. *Consideremos* $r \in \mathbb{R}$ *con* $m < r < m + 1$, *y denotemos* $A = (\mathbb{R} \times (-\frac{1}{r}, \frac{1}{r})) \cap X$. *Observemos que* $A = [-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}] \cap X$. *De tal forma que,* A *es un conjunto abierto y cerrado en* X *que contiene a* p *y no a* x. *Se sigue que* $x \notin Q_p$. *Así concluimos ii).*

Por otro lado, como $K_p \subset Q_p$ *y* Q_p *es no conexo, tenemos que* $K_p = \{p\}$. *De tal manera que* $Q_p \not\subset K_p$

De esta forma resulta natural el preguntarnos ¿Bajo qué condiciones se cumple que $K_p = Q_p$? Lo cual nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 1.26. *Sea* X *un espacio topológico. Si* X *es un espacio de Hausdorff compacto, entonces para cada* $p \in X$, $K_p = Q_p$.

Demostración.

Por el *Lema 1.23* tenemos que $K_p \subset Q_p$. Así que, resta con probar que $Q_p \subset K_p$, para ello probaremos que Q_p es conexo.
Supongamos lo contrario, es decir, Q_p es no conexo. Entonces existen, A y B, subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de Q_p, más aún cerrados y ajenos en X, tales

que $Q_p = A \cup B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in A$. Como X es de Hausdorff compacto, por la *Proposición 1.5*, tenemos que X es normal. Entonces existen U y V, subconjuntos abiertos y ajenos en X, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Denotemos $L = X \setminus (U \cup V)$. Observemos que $L \cap Q_p = \emptyset$, además $L \neq \emptyset$, ya que de lo contrario $X = U \cup V$, por lo que U sería abierto y cerrado en X y $p \in U$, de tal forma que $Q_p \subset U$, lo que implica que $B \subset U$, lo cual es una contradicción ya que U y V son ajenos.

Ahora, para cada $y \in L$, tenemos que $y \notin Q_p$, de tal manera que existe un conjunto abierto U_y en X, tal que $p \in U_y$ y $y \in X \setminus U_y$. Luego, $L \subset \bigcup\{X \setminus U_y : y \in L\}$, donde U_y es como se indicó. Dado que L es compacto existen $n \in \mathbb{N}$ y puntos $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tales que $L \subset \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus U_{y_i})$.

Denotemos por $Y = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $B = X \setminus Y$. Como cada U_{y_i} es un conjunto abierto y cerrado en X, y contiene al punto p, tenemos que $Q_p \subset Y$. Observemos que Y es un conjunto abierto y cerrado en X.

Denotemos $C = U \cap Y$. Como Y y U son abiertos en X, tenemos que C es abierto en X. Veamos que C también es cerrado en X. Para esto, notemos que $L \subset B$ y $Y = X \setminus B \subset X \setminus L = U \cup V$, se sigue que $C = (X \setminus V) \cap Y$, en consecuencia, C es cerrado en X. Entonces C es un conjunto cerrado y abierto que contiene al punto p, por lo que $Q_p \subset C$, es decir, $A \cup B \subset U \cap Y \subset U$, lo cual contradice el hecho de que B es un conjunto no vacío contenido en V y $U \cap V = \emptyset$. Lo cual muestra que Q_p es conexo. □

Proposición 1.27. *Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X tiene al menos n componentes si, y sólo si, X posee n subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos dos a dos, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, tales que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Sean X y $E_1, E_2, \ldots, E_n$ como indican las hipótesis. Consideremos $x \in X$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in E_j$. Si K es una componente de x en X, entonces $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(E_i \cap K)$, y como K es cerrado, $E_i \cap K$ es cerrado para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además los $E_i \cap K$ son ajenos dos a dos, ya que los E_i lo son.

Por esto $K = (E_j \cap K) \cup (\bigcup\limits_{i=1;i\neq j}^{n} E_i \cap K)$, y estos dos conjuntos son cerrados y ajenos, luego, por la conexidad de K se sigue que $E_j \cap K = \emptyset$ o $\bigcup\limits_{i=1;i\neq j}^{n} E_i \cap K = \emptyset$, por esto $K = E_j \cap K$, lo cual indica que $K \subset E_j$.

Como $E_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y por lo hecho anteriormente, X contiene al menos n componentes, ya que E_i contiene al menos una componente de X para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\Rightarrow$] Sea X un espacio topológico con al menos n componentes. Mostraremos que X contiene n conjuntos cerrados y no vacíos, ajenos dos a dos, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

Veamos la prueba de esto por inducción.

Caso base ($n > 1$). Tenemos que X tiene por lo menos dos componentes, lo cual indica que X es no conexo. Entonces existe un subconjunto abierto y cerrado, propio no vacío, Y, de X. Por esto Y y $X \setminus Y$ son cerrados no vacíos y ajenos cuya unión es X. Por lo que para $n = 2$, se cumple lo deseado.

Caso general ($n = k + 1$). Supongamos que se cumple para $n = k$ y veamos que se cumple para $n = k + 1$.

Si X tiene al menos $k+1$ componentes, en particular tiene más de k componentes, y por las hipótesis de inducción, existen k cerrados no vacíos y ajenos dos a dos, $E_1, E_2, \ldots, E_k$, en X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$.

Por la demostración en el sentido inverso, sabemos que cada componente está contenida en un sólo E_i, y dado que X tiene al menos $k+1$ componentes, por el principio de las casillas existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que E_j contiene al menos dos componentes de X. Como todo conexo de X está contenido en alguna de sus componentes, se tiene que E_j es disconexo y tiene al menos dos componentes. Por el caso $n = 2$ aplicado a E_j, tenemos que $E_j = E_{j1} \cup E_{j2}$, E_{j1} y E_{j2} cerrados en X. Por esto, $X = (\bigcup_{i=1; i \neq j}^{n} E_i) \cup E_{j1} \cup E_{j2}$, estos son las $k + 1$ cerrados y no vacíos ajenos dos a dos. $\square$

Teorema 1.28. *Sean X un espacio de Hausdorff compacto, A y B subconjuntos cerrados de X. Si para cada subconjunto conexo C de X tenemos que $C \cap A = \emptyset$ o $C \cap B = \emptyset$, entonces existen conjuntos ajenos y cerrados en X, E y F, tales que $X = E \cup F$, $A \subset E$ y $B \subset F$.*

Demostración.
Probemos lo siguiente:

i) Para todo $x \in A$, existe un conjunto abierto y cerrado en X, H_x, tal que $x \in H_x$ y $H_x \cap B = \emptyset$.

Notemos que, dado $x \in A$ tenemos que $K_x \cap B = \emptyset$. Luego, por el *Teorema 1.26*, $Q_x \cap B = \emptyset$. De la definición de quasicomponente, se sigue que $B \subset X \setminus (\bigcap\{H \subset X : H$ es abierto y cerrado en X con $x \in H\})$. De tal forma que $B \subset \bigcup\{X \setminus H : H$ es abierto y cerrado en X con $x \in H\}$. Como B es cerrado en X, con X compacto, tenemos que B es compacto. Así, existen conjuntos abiertos y cerrados en X, $H_1, H_2, \ldots, H_k$ con $k \in \mathbb{N}$, tales que continen a x y $B \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus H_i)$.

Es decir, $B \subset X \setminus (\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} H_i)$. Denotemos $H_x = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} H_i$. Observemos que H_x es un conjunto abierto y cerrado en X tal que $x \in H_x$ y $H_x \cap B = \emptyset$. De esta manera queda probado *i*).

Notemos que $A \subset \bigcup\{H_x : x \in A\}$, donde cada H_x es como en *i*). Por la compacidad de A, exiten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ con $m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} H_{x_j}$. Denotemos $E = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} H_{x_j}$ y $F = X \setminus E$. Es fácil ver que E y F cumplen con lo deseado. □

Teorema 1.29. (Golpes en la frontera) *Sean X un espacio conexo, compacto, no vacío y de Hausdorff y U un subconjunto abierto, no vacío de X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN.

Observemos que si $U = X$, entonces el resultado se cumple de forma inmediata. Consideremos U un subconjunto propio de X. Supongamos que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Observemos que si C es un conjunto conexo en $\overline{U}$ tal que $C \cap K \neq \emptyset$, entonces $C \subset K$, en consecuencia, $C \cap Fr(U) = \emptyset$. Se sigue que, para cada conjunto conexo en $\overline{U}$, $C \cap Fr(U) = \emptyset$ o $C \cap K = \emptyset$. Luego, por el *Teorema 1.28*, existen conjuntos ajenos y cerrados en $\overline{U}$, E_1, E_2, tales que $\overline{U} = E_1 \cup E_2$, $K \subset E_1$ y $Fr(U) \subset E_2$.

Denotemos $E_3 = E_2 \cup (X \setminus U)$. Veamos que E_1 y E_3 forman una separación en X. Para ello, probaremos lo siguiente:

i) $X = E_1 \cup E_3$.
En efecto, $X = \overline{U} \cup (X \setminus \overline{U}) \subset \overline{U} \cup (X \setminus U) = E_1 \cup E_2 \cup (X \setminus U) = E_1 \cup E_3$. Con lo cual, $X = E_1 \cup E_3$.

ii) E_1 y E_3 son cerrados en X.
Observemos que, como E_1 y E_2 son cerrados en $\overline{U}$ y este a su vez es cerrado en X, se sigue que E_1 y E_2 son cerrados en X. Por otro lado, como U es abierto en X se

tiene que $X \setminus U$ es cerrado en X, de tal manera que E_3 es cerrado en X.

iii) E_1 y E_3 son no vacíos.
Como $K \subset E_1$ se sigue que $E_1 \neq \emptyset$. Por otro lado, como U es abierto propio de X y $X \setminus U \subset E_3$, tenemos que $E_3 \neq \emptyset$.

iv) $E_1 \cap E_3 = \emptyset$.
Notemos que $E_1 \cap E_3 = E_1 \cap [E_2 \cup (X \setminus U)] = (E_1 \cap E_2) \cup [E_1 \cap (X \setminus U)] = E_1 \cap (X \setminus U) \subset \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)} = Fr(U) \subset E_2$, es decir, $E_1 \cap E_3 \subset E_2$, de donde $E_1 \cap E_3 = \emptyset$, ya que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Por *i)*, *ii)*, *iii)* y *iv)*, tenemos que X es no conexo, lo cual es una contradicción. Por esto, $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.

$\square$

§2 Continuos

En esta sección hablaremos de un tipo especial de espacios, los llamados continuos, los cuáles son la piedra angular de nuestro estudio.

1.2.1 Algunos resultados básicos

En este breve espacio, damos algunos resultados que serán de utilidad para probar resultados con mayor fuerza y que nos servirán en las secciones siguientes. Comenzamos dando la definición de continuo.

Definición 1.30. *Un* **continuo** *es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío.*

Definición 1.31. *Dados X un continuo y A un subconjunto de X, A es un* **subcontinuo** *de X, si A es un continuo.*

Definición 1.32. *Un continuo es* **no degenerado** *si contiene más de un punto. En caso contrario, diremos que el continuo es* **degenerado***.*

Ejemplo 1.33. *Un ejemplo de continuo es el intervalo cerrado* $[0, 1]$*, el cuál es un conjunto conexo ya que los únicos conjuntos conexos en el conjunto de los números reales,* $\mathbb{R}$*, son los intervalos. Por el Teorema de* Heine - Borel *(Veáse Corolario 7.15, página 250 en [8]) es un conjunto compacto, además se sigue de la metrizabilidad de* $\mathbb{R}$ *que el intervalo es metrizable.*

Algunos continuos importantes son aquellos que son homeomorfos al intervalo cerrado $[0, 1]$, el cuál de ahora en adelante denotaremos sólo por I. Por lo que damos la siguiente definición.

Definición 1.34. *Un* **arco** *es cualquier espacio topológico X que es homeomorfo al intervalo $I = [0, 1]$.*

Definición 1.35. *Una* **curva cerrada simple** *es cualquier espacio topológico X que es homeomorfo a $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.*

Definición 1.36. *El continuo X es una* **n-celda** *si es homeomorfo a I^n, con $n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente teorema nos permite identificar $n-$celdas en $\mathbb{R}^n$ con cierta facilidad.

Teorema 1.37. *Todo subconjunto convexo, cerrado, acotado y con interior no vacío E de $\mathbb{R}^n$ es una $n-$celda.*

Demostración.
Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Veamos el caso en que $0 \in int(E)$. Sea $r > 0$, tal que $D_r^n \subset int(E)$, donde D_r^n es el disco de radio r y centro 0 de $\mathbb{R}^n$.

Como E es acotado, podemos definir la función $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(v) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon v \in E\}. \tag{1.1}$$

Observemos que, para cada $v \in S^{n-1}$ se satisface que $f(v) > r$ y, como E es cerrado en $\mathbb{R}^n$, $f(v)v \in E$. Probaremos que f es continua.

Sea $v \in S^{n-1}$ y $0 < \delta < f(v)$. Como E es convexo, $\{tv : 0 \leq t \leq f(v)\} \subset E$. Luego, $p = (f(v) - \frac{\delta}{2})v \in E$. Si $\lambda_1 = \frac{r\delta}{2f(v)}$, $u \in B(p, \lambda_1)$ y $w = f(v)v + \frac{2f(v)}{\delta}(u - f(v)v)$, entonces:

$$||w|| = \frac{2f(v)}{\delta}||\frac{\delta}{2}v + u - f(v)v|| = \frac{2f(v)}{\delta}||u - p|| < \frac{2f(v)}{\delta}\frac{r\delta}{2f(v)} = r. \tag{1.2}$$

Así, $w \in D_r^n$. Como $u = f(v)v + \frac{\delta}{2f(v)}(w - f(v)v)$ y $\delta < f(v) < 2f(v)$, se cumple que u es parte del segmento de línea que une a $f(v)v$ con w. Como E es convexo y tanto $f(v)v$ como w son elementos de E, tenemos que $u \in E$. Por esto, $B(p, \lambda_1) \subset E$.

Por otro lado, observemos que $q = (f(v) + \frac{\delta}{2})v \notin E$. Además, tenemos que $q \in B(f(v)v, \delta)$. Como E es cerrado, existe $\lambda_2 > 0$, tal que $B(q, \lambda_2) \subset B(f(v)v, \delta) \setminus E$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{\lambda_1}{f(v) - \frac{\delta}{2}}, \frac{\lambda_2}{f(v) + \frac{\delta}{2}}\}$. Luego, si $u \in B(v, \varepsilon) \cap S^{n-1}$, entonces:

$$\|(f(v) - \frac{\delta}{2})u - p\| = (f(v) - \frac{\delta}{2})\|u - v\| < (f(v) - \frac{\delta}{2})\frac{\lambda_1}{f(v) - \frac{\delta}{2}} = \lambda_1; \tag{1.3}$$

es decir, $(f(v) - \frac{\delta}{2})u \in B(p, \lambda_1)$. De forma análoga, podemos demostrar que $(f(v) + \frac{\delta}{2})u \in B(p, \lambda_2)$. Como $B(p, \lambda_1) \subset E$ y $B(p, \lambda_2) \cap E = \emptyset$, concluimos que $f(v) - \frac{\delta}{2} \leq f(v) \leq f(v) + \frac{\delta}{2}$, es decir, que $|f(u) - f(v)| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Esto prueba que f es continua.

Ahora definimos $g : E \to D^n$ por:

$$g(v) = \begin{cases} \frac{v}{f(\frac{v}{\|v\|})} & \text{si } v \neq 0; \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Es claro que f es continua en todo punto distinto de 0. Para mostrar que g es continua en 0, sea $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $E \setminus \{0\}$, tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Luego, $f(\frac{v}{\|v\|}) > r$ y $\|g(v_n)\| < r\|v_n\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, tenemos que $\lim_{n\to\infty} g(v_n) = 0$. Por esto, g es continua.

Ahora, veamos que g es inyectiva. Sean $u, v \in E$ con $g(v) = g(u)$. Si $u = 0$, entonces $g(v) = 0$ y, así $v = 0$. De tal forma que, supongamos que $u \neq 0 \neq v$. Luego, $u = \eta v$, donde $\eta = \frac{f(\frac{u}{\|u\|})}{f(\frac{v}{\|v\|})}$. Como $\eta > 0$, tenemos que $\frac{u}{\|u\|} = \frac{\eta v}{\|\eta v\|} = \frac{\eta v}{\eta\|v\|} = \frac{v}{\|v\|}$. Así, $f(\frac{u}{\|u\|}) = f(\frac{v}{\|v\|})$ y $u = v$. Por esto, g es inyectiva.

Por último, probemos que g es sobreyectiva. Consideremos $w \in D^n$. Si $w = 0$, entonces $g(0) = w$. Supongamos que $w \neq 0$. Luego, si $t = f(\frac{w}{\|w\|})$, entonces $\frac{tw}{\|tw\|} = \frac{tw}{t\|w\|} = \frac{w}{\|w\|}$ y $f(\frac{tw}{\|tw\|}) = t$. Además, como $\|w\| \leq 1$, tenemos que $t\|w\| \leq t$ y, como E es convexo, $tw = t\|w\|\frac{w}{\|w\|} \in E$. De tal forma que $g(tw) = \frac{tw}{t} = w$. Esto prueba que g es sobreyectiva.

De esta manera, tenemos que g es una biyección continua entre el compacto E y el espacio de Hausdorff S^n, concluimos que g es un homeomorfismo y que E es una $n-$celda.

Finalmente, mostraremos el caso general. Sea $x_0 \in int(E)$. Notemos que la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$h(v) = v - x_0, \tag{1.5}$$

es un homeomorfismo, tal que $h(x_0) = 0$. Más aún, $h(x_0) \in h(int(E)) \subset h(E)$ y $h(int(E))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir, $0 \in int(h(E))$. Además, dados cualesquiera $u, v \in E$ y $t \in [0, 1]$, se cumple que:

$$h(u)+t(h(v)-h(u)) = (u-x_0)+t((v-x_0)-(u-x_0)) = u-x_0+t(v-u) = h(u+t(v-u)). \tag{1.6}$$

Como E es convexo tenemos que $u+t(v-u) \in E$ y, en consecuencia, $h(u)+t(h(v)-h(u)) \in h(E)$. Esto implica que $h(E)$ es convexo. Aplicando el caso anterior a $h(E)$, obtenemos que $h(C)$ es una $n-$celda. Por lo tanto, E es una $n-$celda. $\square$

Lema 1.38. *Sea X un espacio conexo, compacto y de Hausdorff. Si A, B son subconjuntos de X no vacíos conexos y cerrados tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un subconjunto conexo y cerrado C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración.
Elegimos un punto $p \in B \setminus A$. Como X es un espacio normal, existe un subconjunto abierto U de B tal que $A \subset U \subset \overline{U}^B \subset B \setminus \{p\}$. Sea K la componente de $\overline{U}^B$ que contiene a A. Notemos que K es conexo y cerrado en X, consideremos $K = C$. Como $p \notin C$, tenemos que $C \subsetneq B$. Falta probar que $A \neq C$. Consideremos $Fr_B(U)$. Como U es abierto en B, tenemos que $U \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Ya que $A \subset U$, se sigue que $A \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Por el *Teorema 1.29* , tenemos que $C \cap Fr_B(U) \neq \emptyset$.

Con lo cual, se concluye que $C \neq A$. □

Corolario 1.39. *Sea X un continuo. Si A, B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración.
Es un caso particular del *Lema 1.38.* □

Proposición 1.40. *Sean X un espacio topológico conexo y $C \subset X$ conexo tal que $X \setminus C$ es no conexo. Si A y B forman una separación en $X \setminus C$, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos.*

Demostración.

Supongamos que $A \cup C$ es no conexo, es decir, existen E y F subconjuntos ajenos cerrados y no vacíos de X tales que $A \cup C = E \cup F$.

Entonces, como C es conexo, tenemos que $C \subset E$ o $C \subset F$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subset E$. Entonces, $F \subset A$. Así $\overline{F} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap F = \emptyset$. Luego, $X = F \cup (B \cup E)$, con $F \cap (B \cup E) = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que X sea conexo.

Por esto, $A \cup C$ es conexo.

De forma análoga se prueba que $B \cup C$ es conexo. □

Corolario 1.41. *Sean X un continuo y C subcontinuo de X tal que $X \setminus C$ es no conexo. Si A y B forman una separación en $X \setminus C$, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.*

Demostración.
Notemos que es un caso particular de la *Proposición 1.40.* □

1.2.2 Puntos de Corte

En esta sección daremos la definición de punto de corte y algunos resultados (sin pruebas, pero que pueden ser consultados en [6] páginas 54-57) que serán utilizados más adelante.

Definición 1.42. *Dados X un espacio topológico conexo y $p \in X$, si $X \setminus \{p\}$ es conexo, entonces p será llamado* **punto de no corte** *de X. En caso contrario diremos que p es un* **punto de corte** *de X.*

Teorema 1.43. *Sea X un continuo. Si X tiene exactamente dos puntos de no corte, entonces X es homeomorfo a I, es decir, X es un arco.*

Una prueba de este teorema puede ser consultada en [6], página 54.

Teorema 1.44. *Si X es un continuo y $X \setminus \{x, y\}$ es no conexo para cada par de puntos distintos x y y de X, entonces X es una curva cerrada simple.*

Una prueba de este teorema puede ser consultada en [6], página 55.

1.2.3 Continuos indescomponibles

En esta sección daremos la definición de continuo indescomponible, además de algunos resultados que serán utilizados más adelante.

Definición 1.45. *Un continuo X es* **descomponible** *si puede ser escrito como la unión de dos de sus subcontinuos propios. En caso contrario diremos que X es* **indescomponible***.*

Definición 1.46. *Un continuo X es hereditariamente descomponible (indescomponible, respectivamente) si cada uno de sus subcontinuos propios, no degenerados, es descomponible (indescomponible, respectivamente).*

Definición 1.47. *Dados X un continuo y $p \in X$, la* **composante** *de p en X, se define de la siguiente forma:*

$$\Sigma_p^X = \{\bigcup\{A \in C(X) \setminus \{X\} : p \in A\}.$$

En el caso en que no haya confunsión acerca del continuo que se está trabajando escribiremos simplemente Σ_p.

Observación 1.48. *Dados un continuo X y $p \in X$. Tenemos que $\Sigma_p^X = \{x \in X :$ existe $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $p, x \in A\}$.*

Demostración.

Para probar la observación, veamos las siguientes contenciones.

i) $\Sigma_p^X \subset \{x \in X : \text{existe } A \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$.
Sea x un punto en Σ_p^X. Entonces existe $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $p, x \in A$. Se sigue que $x \in \{x \in X : \text{existe } A \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$. De esta forma queda probado *i)*.

ii) $\{x \in X : \text{existe } A \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\} \subset \Sigma_p^X$.
Sea $x' \in \{x \in X : \text{existe } A \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$, entonces existe $A' \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $x', p \in A'$. Se sigue que $x' \in \bigcup\{A \in C(X) \setminus \{X\} : p \in A\}$, es decir, $x' \in \Sigma_p$. Así, concluimos *ii)*.

Por *i)* y *ii)*, concluimos que $\Sigma_p^X = \{x \in X : \text{existe } A \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$. □

Observación 1.49. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Si X es indescomponible, entonces $\Sigma_p^X \cap \Sigma_q^X = \emptyset$ o $\Sigma_p^X = \Sigma_q^X$.*

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que $\Sigma_p^X \cap \Sigma_q^X \neq \emptyset$, entonces existe $x \in \Sigma_p^X \cap \Sigma_q^X$, es decir, existen $A_p, A_q \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $p, x \in A_p$ y $q, x \in A_q$, entonces $A_p \cup A_q \in C(X) \setminus \{X\}$, dado que X es indescomponible. Probaremos lo siguiente:

i) $\Sigma_p^X \subset \Sigma_q^X$.
Sea $x' \in \Sigma_p^X$, entonces existe $B \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $x', p \in B$. Notemos que $B \cup A_p \in C(X) \setminus \{X\}$, ya que X es indescomponible, y $x' \in B \cup A_p$. Además, por la misma indescomponibilidad de X y dado que $A_q \in C(X) \setminus \{X\}$, entonces $(B \cup A_p) \cup A_q \in C(X) \setminus \{X\}$, puesto que, $A_p \cap A_q \neq \emptyset$. Observemos que $q, x' \in (B \cup A_p) \cup A_q$, es decir, $x' \in \Sigma_q^X$. De esta forma, queda demostrado *i)*.

ii) $\Sigma_q^X \subset \Sigma_p^X$
Se prueba de forma similiar a *i)*.

Por *i)* y *ii)* tenemos que $\Sigma_p^X = \Sigma_q^X$. □

Proposición 1.50. *Sea X un continuo. Entonces X es descomponible si, y sólo si, existe $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $int(A) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN.
$\Rightarrow$] Dado que X es descomponible, existen $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $X = A \cup B$, entonces $X \setminus B \neq \emptyset$ y es abierto en X, además está contenido en A. De tal forma que $int(A) \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$] Sea $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $int(A) \neq \emptyset$. Entonces tenemos los siguientes casos:

i) $X \setminus A$ es conexo.
Se sigue que $\overline{X \setminus A} \in C(X) \setminus \{X\}$, entonces, $X = A \cup \overline{X \setminus A}$, es decir, X es descomponible.

ii) $X \setminus A$ es no conexo.
Entonces existen D y C subconjuntos ajenos, cerrados y no vacíos tales que $X \setminus A = D \cup C$. Por el *Corolario 1.41*, $A \cup D, A \cup C \in C(X) \setminus \{X\}$ y $(A \cup D) \cup (A \cup C) = X$, es decir, X es descomponible. □

Corolario 1.51. *Sea X un continuo. Entonces X es indescomponible si, y sólo si, para cada $A \in C(X) \setminus \{X\}$, se cumple que int$(A) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN.
Este corolario es la forma contrapositiva de la *Proposición 1.50.* $\square$

Proposición 1.52. *Sea X un continuo. Si X es no degenerado, entonces la composante, Σ_p^X, de cualquier $p \in X$ es una unión numerable de subcontinuos propios de X los cuales contienen a p.*

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos una base numerable de abiertos en $X \setminus \{p\}$, digamos $\mathcal{B} = \{U_i : U_i$ es abierto en X y $U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}\}$. Consideremos K_i la componente de p en $X \setminus U_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $K_i \subset X \setminus U_i \subsetneq X$, se sigue que $K_i \subsetneq X$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, como U_i es abierto en X, se tiene que $K_i \in C(X) \setminus \{X\}$ y como $p \in K_i$ entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \Sigma_p^X$.

Por otro lado, sea $x \in \Sigma_p^X$. Entonces por la *Definición 1.47*, existe $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $p, x \in A$. Observemos que $X \setminus A$ es un conjunto abierto de X contenido en $X \setminus \{p\}$, dado que $\mathcal{B}$ es base de $X \setminus \{p\}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $U_j \subset X \setminus A$, es decir, $A \subset X \setminus U_j$. Como K_j es la componente de $X \setminus U_j$ que contiene a p, se sigue que $A \subset K_j$. Por esto, $x \in K_j$, se concluye que $\Sigma_p^X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Por lo tanto, $\Sigma_p = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. $\square$

Recordemos el siguiente resultado conocido como el *Teorema de Baire.*

Teorema 1.53. *Sea X un espacio de Hausdorff, compacto y sea $E = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$ donde int$(\overline{N_i}) = \emptyset$ en X para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $X \setminus E$ es denso en X.*

Una prueba de dicho teorema puede ser consultada en [10], página 9.

Teorema 1.54. *Sea X un continuo. Si X es indescomponible y no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las composantes de X. Supongamos que $\mathcal{A}$ es numerable. Así, podemos indexarla con $\mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{A} = \{\Sigma_{x_n} : x_n \in X$ y $n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que $X = \bigcup_{x_n \in X} \Sigma_{x_n}$.

Para cada $x_n \in X$ con $n \in \mathbb{N}$, existe una colección numerable de subcontinuos propios de X los cuales contienen a x_n, $\{E_{x_n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ tal que $\Sigma_{x_n} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{x_n,m}$ (ver *Proposición 1.52*). Se sigue que:

$$X = \bigcup_{x_n \in X} (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{x_n,m}) = \bigcup \{E_{x_n,m} : x_n \in X \text{ y } n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Por el *Corolario 1.51* ,$int(E_{x_n,m}) = \emptyset$ para $x_m \in X$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Luego por el *Teorema 1.53*, $X \setminus \bigcup \{E_{x_n,m} : x_n \in X \text{ y } n, m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ es denso en X, lo cual es una contradicción.

Por esto, X tiene una cantidad no numerable de composantes. □

1.2.4 Continuos irreducibles

En esta sección hablaremos de algunos resultados acerca de continuos irreducibles.

Definición 1.55. *Un espacio topológico conexo X es* **irreducible entre los puntos** *a* **y** *b, con $a, b \in X$, si para cualquier subespacio cerrado y conexo $A \subset X$, que contiene a los puntos a y b, se tiene que $A = X$.*

Definición 1.56. *Dados X un continuo, $A, B \subset X$ ajenos y $a, b \in X$. Entonces X es* **irreducible entre A y B***, si X es irreducible entre a y b si, y sólo si, $\{a, b\} \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap (B \setminus A) \neq \emptyset$.*

Lema 1.57. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si C es un subconjunto conexo de X tal que $\{a, b\} \subset C$, entonces C es irreducible entre a y b.*

Demostración.
Si $F \subset X$ es conexo tal que $a, b \in F$, entonces $\overline{F} = X$. Más aún, si F es cerrado en C, es decir, $F = \overline{F} \cap C$, se sigue que $F = C$. □

Lema 1.58. *Si X es un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$, entonces X no puede ser expresado como la unión de dos subcontinuos propios, A y B, tales que $a \in A \cap B$ o $b \in A \cap B$.*

Demostración.
Notemos que si $X = A \cup B$ con $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$, tales que $a \in A \cap B$, entonces $b \in A$ o $b \in B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b \in B$, entonces $a, b \in B$, se sigue, por la irreducibilidad de X, que $B = X$. Lo cual es una contradicción, ya que $B \subsetneq X$. □

Lema 1.59. *Sean X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$; y C un subcontinuo de X. Entonces se cumple lo siguiente:*

i) Si $X \setminus C$ es no conexo, entonces $X \setminus C$ es la unión de dos subconjuntos abiertos y conexos, U y V, tales que $\{a, b\} \cap (U \setminus V) \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$.

ii) Si $a \in C$, entonces $X \setminus C$ es conexo o si $b \in C$, entonces $X \setminus C$ es conexo.

Demostración.

Supongamos que $X \setminus C$ es no conexo, entonces existen U y V abiertos no vacíos en $X \setminus C$, tales que $X \setminus C = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Luego, por la *Proposición 1.40*, tenemos que $A = C \cup U$ y $B = C \cup V$ son conexos en X, se sigue que:

$$X = A \cup B, A \cap B = C \text{ con } A \text{ y } B \text{ subconjuntos propios de } X. \tag{1.7}$$

De aquí que, por el *Lema 1.58*, $a \notin C$ o $b \notin C$. Por lo que se prueba ii).

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \in A$. Así $b \in B$. Entonces $b \in V$. De manera análoga, $a \in U$.

Finalmente, veamos que U y V son conexos. En efecto, si suponemos que U es no conexo, entonces existen L y M abiertos ajenos no vacíos tales que $U = L \cup M$. Supongamos que $a \in L$. Entonces como $X \setminus C = M \cup (L \cup V)$, se sigue que $C \cup L \cup V \in C(X) \setminus \{X\}$ que contiene tanto a los puntos a y b. Lo cuál es una contradicción ya que X es irreducible entre a y b. Se sigue que U es conexo.

De manera similar se prueba que V es conexo. De donde obtenemos i) □

Lema 1.60. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si A y B son subcontinuos de X tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces el conjunto $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.*

Demostración.
Supongamos que $A \cap B = \emptyset$, ya que de lo contrario $A \cup B \in C(X)$ y así $X = A \cup B$, por lo que el lema se cumpliría trivialmente. Notemos que, por el *Lema 1.59*, $C = X \setminus A$ es conexo. Supongamos que $C \setminus B$ es no conexo, es decir, existen U y V abiertos ajenos no vacíos tales que $C \setminus B = U \cup V$.

Por la *Proposición 1.40*, tenemos que $B \cup U$ y $B \cup V$ son conexos, más aún, $B \cup \overline{U}$ y $B \cup \overline{V}$ son conexos. Luego:

$$X = A \cup B \cup \overline{[(X \setminus A) \setminus B]} \text{ y } A \cap B = \emptyset. \tag{1.8}$$

Se sigue que $A \cap \overline{[(X \setminus A) \setminus B]} \neq \emptyset$, de aquí que $A \cap \overline{(U \cup V)} \neq \emptyset$. Tenemos que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$ o $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Luego, $A \cup \overline{U} \cup B = X$, de aquí que, $(X \setminus A) \setminus B \subset \overline{U}$. De tal manera que $V \subset C \setminus B \subset (X \setminus A) \setminus B$, entonces $V \subset \overline{U}$. Dado que $U \cap V = \emptyset$ y V es abierto tenemos que $V = \emptyset$. Luego, $X \setminus (A \cup B) = C \setminus B$, es decir, es conexo. □

Teorema 1.61. *Sean X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si C es un subcontinuo de X, entonces $int(C)$ es conexo.*

Demostración.
Notemos que si $C = X$ entonces el resultado se obtiene inmediatamente. Consideremos $C \subsetneq X$, y por esto al menos uno de los puntos de irreducibilidad está en $X \setminus C$, digamos a. Entonces tenemos los siguientes casos:

i) $X \setminus C$ es conexo.

Se sigue que $\overline{X \setminus C}$ es conexo y $a \in \overline{X \setminus C}$. Luego, por el *Lema 1.59 ii)*, $int(C) = X \setminus \overline{(X \setminus C)}$ es conexo.

ii) $X \setminus C$ es no conexo.

Entonces existen K_1 y K_2 componentes conexas de $X \setminus C$ tales que $X \setminus C = K_1 \cup K_2$. Sean, $A = \overline{K_1}$ y $B = \overline{K_2}$ son subcontinuos de X tales que $a \in A$ o $a \in B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \in A$, entonces $b \in B$. Luego, por el *Lema 1.60*, $X \setminus (A \cup B)$ es conexo. Entonces $int(C) = X \setminus \overline{(X \setminus C)} = X \setminus \overline{K_1 \cup K_2} = X \setminus (\overline{K_1} \cup \overline{K_2}) = X \setminus (A \cup B)$. Se sigue que $int(C)$ es conexo. $\square$

Lema 1.62. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si C es un subconjunto cerrado conexo y $a \in Fr(C)$, entonces $int(C) = \emptyset$.*

Demostración.
Por el *Lema 1.59*, tenemos que $X \setminus C$ es conexo. Notemos que $a \in Fr(C) = C \cap \overline{(X \setminus C)}$, con C y $\overline{X \setminus C}$ subcontinuos de X. Además, $X = C \cup \overline{(X \setminus C)}$ y $C \in C(X) \setminus \{X\}$. Luego, por el *Lema 1.58*, tenemos que $X = \overline{X \setminus C}$. Es decir, $int(C) = X \setminus \overline{(X \setminus C)} = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.63. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si C es un conjunto cerrado conexo y $a \in C$, entonces el conjunto $\overline{X \setminus C}$ es irreducible entre b y x, con $x \in Fr(C)$.*

Demostración.
Por el *Lema 1.59*, tenemos que $X \setminus C$ es conexo, y así, $\overline{X \setminus C}$ también lo es.

Sea $F \subset \overline{X \setminus C}$ cerrado y conexo tal que $b, x \in F$, con $x \in Fr(C)$. Supongamos que $F \subsetneq \overline{X \setminus C}$, como $x \in Fr(C)$, entonces $C \cup F \in C(X)$ tal que $a, b \in C \cup F$, entonces $C \cup F = X$. Por otro lado, $C \cup F \subsetneq C \cup \overline{(X \setminus C)} = X$. Lo cual es una contradicción. Se sigue que $F = \overline{X \setminus C}$. $\square$

El siguiente lema es importante, pero lo daremos sin prueba, ésta puede ser consultada en [12] página 183.

Lema 1.64. *Sea X un continuo. Entonces X es irreducible entre dos puntos a y b con $a, b \in X$; y hereditarimente descomponible si, y sólo si, contiene exactamente dos subcontinuos separados A y B tales que $a \in A$ y $b \in B$.*

1.2.5 Algunos ejemplos de continuos tipo Knaster

Un cierto tipo de continuos que sobresalen de los demás son los llamados, *Continuos tipo Knaster*, ya que desde la aparición del primero, allá por 1910 y gracias a L. E. J. Brouwer, han mostrado tener propiedades interésantes y por tanto han servido de ejemplo y contraejemplo a muchos de los resultados importantes en la teoría de continuos. En esta sección hablaremos de ellos, aunque sin pruebas ya que nos alejariamos un poco del objetivo de nuestro trabajo.

Definición 1.65. *Una* **sucesión inversa** *es una "sucesión doble", $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios métricos compactos X_n y funciones continuas $f_n : X_{n+1} \to X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, en ocasiones escrito:*

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots X_n \xleftarrow{f_n} X_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Entonces el **límite inverso** *de $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el subespacio del producto cartesiano $\Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ definido por:*

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Pi_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 1.66. *Un continuo X es un* **continuo tipo Knaster***, si existe una función $f : [0,1] \to [0,1]$ abierta y sobreyectiva tal que f no es un homeomorfismo y $X = \varprojlim\{[0,1], f\}$.*

Un continuo tipo Knaster tiene las siguientes propiedades (véase [11]):

a) Es indescomponible y por tanto irreducible, es decir, no se puede escribir como la unión de dos de sus subcontinuos propios.

b) Es encadenable plano: se puede encajar en el plano y cubrir con cadenas de discos tan pequeños como se quiera.

c) Es hereditariamente unicoherente: cualquier subcontinuo es unicoherente, la intersección no vacía de dos subcontinuos es otro subcontinuo.

d) Tiene dimensión 1.

e) Es arco-continuo: todo subcontinuo propio y no degenerado es un arco.

Ejemplo 1.67. Arcoiris de Knaster. *Consideremos $\mathbb{R}^2$ y S_0 la unión de todos los semicírculos en el semiplano superior que unen a los puntos del conjunto de Cantor (construido en el segmento $[0,1] \times \{0\}$), que son simétricos respecto del punto $(\frac{1}{2}, 0)$.*

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea S_n la unión de todos los semicírculos en el semiplano inferior cerrado que unen a los puntos del conjunto de Cantor, que son simétricos respecto al punto $(\frac{5}{2\cdot 3^n}, 0)$.

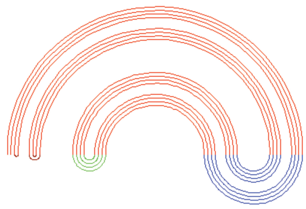

Figura 1.1: Arcoiris de Knaster.

Entonces el conjunto $\mathcal{K}_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ es el llamado **arcoiris de Knaster**, *una construcción formal de dicho continuo puede ser consultada en [10] página 204.*

Veamos el siguiente ejemplo, conocido como segundo ejemplo de Knaster de semicírculos.

Ejemplo 1.68. *Sea E el conjunto de todos los números del intervalo $[0, 1]$ que pueden ser escritos, en base cinco, sin utilizar los dígitos 1 ni 3. Dada $n \geq 0$, sea E_n el conjunto de puntos de E tales que $\frac{2}{5^{n+1}} \leq e \leq \frac{1}{5^n}$. Sea F_n el conjunto de puntos e tales que $1 - e$ pertenence a E_n.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ dada, consideremos S_n^- como la unión de todos los semicírculos en el semiplano inferior que son simétricos respecto del punto $(\frac{7}{10}5^{-n}, 0)$ y que pasan por los punto de E_n. De la misma manera, consideremos S_n^+ la unión de todos los semicírculos del plano superior que son simétricos con respecto del punto $(1 - \frac{7}{10}5^{-n}, 0)$ y que pasan por los puntos de F_n.

Entonces el conjunto $\mathcal{K}_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty}(S_n^- \cup S_n^+)$ es llamado el **continuo tipo Knaster con dos puntos extremos**, *una construcción de dicho continuo puede ser consultada en [10] página 205.*

Si se quiere saber un poco más sobre continuos tipo Knaster, puede consultar [3].

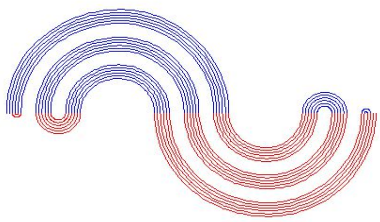

Figura 1.2: Knaster con dos puntos extremos.

§3 Hiperespacios

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\};$$
$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\} \text{ y para cada } n \in \mathbb{N},$$
$$F_n(X) = \{F \in 2^X : F \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\};$$
$$C_n(X) = \{F \in 2^X : F \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Observación 1.69. *Por la forma en que se definen $C(X)$, $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, además $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ y $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$.*

1.3.1 Métrica de Hausdorff

Por la *Observación 1.69* para dar una métrica a los espacios $C(X)$, $F_n(X)$ y $C_n(X)$, bastará con dar una métrica al conjunto 2^X. Pero antes veamos algunos conceptos.

Definición 1.70. *Dados X un espacio metrizable con métrica d, $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, se define:*

$$N_d(\varepsilon, F) = \{x \in X : d(x, F) < \varepsilon\}.$$

A $N_d(\varepsilon, F)$ se le conoce como la **nube** *de radio ε alrededor de F en X.*

Veamos ahora algunas propiedades importantes de las nubes de conjuntos cerrados, en espacios métricos compactos.

Proposición 1.71. *Sean X un espacio métrico compacto, con métrica d, $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que :*

a) $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{x \in F} B(\varepsilon, x)$;

b) $N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$ *para* $\delta \in (0, \varepsilon]$;

c) $N_d(\varepsilon, F) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$;

d) Si U es un conjunto abierto en X y $F \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N_d(\delta, F) \subset U$;

e) Si E es un conjunto cerrado, no vacío, en X y $F \cap E = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N_d(\delta, F) \cap N_d(\delta, E) = \emptyset$.

Demostración.
a) Consideremos $x \in N_d(\varepsilon, F)$, entonces existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, se tiene que $x \in B(\varepsilon, y) \subset \bigcup_{y \in F} B(\varepsilon, y)$, entonces $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{x \in F} B(\varepsilon, x)$.

b) Tomemos $\delta \in (0, \varepsilon]$, veremos que $N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$, para ello consideremos $x \in N_d(\delta, F)$, es decir, $d(x, F) < \delta$, entonces existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < \delta$, dado que $0 < \delta \leq \varepsilon$, se sique que $d(x, y) < \varepsilon$, entonces $d(x, F) < \varepsilon$, lo cual implica que $x \in N_d(\varepsilon, F)$.

c) Por lo realizado en *b)*, se sigue que $\bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$. Así, bastará con probar que $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$. Para ello, si $x \in N_d(\varepsilon, F)$ entonces existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, consideremos $\delta > 0$ fijo, tal que $d(x, y) < \delta < \varepsilon$, se sigue que $x \in N_d(\delta, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$, es decir, $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$.

d) Notemos que para cada $x \in F$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$, ya que $F \subset U$, como F es cerrado no vacío en un métrico compacto, se sique que F es compacto. Además $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) : x \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \dfrac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Consideremos $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2} : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Veamos ahora que $N_d(\delta, F) \subset U$. Para ello, sea $y \in N_d(\delta, F)$ entonces existe $x \in F$ tal que $d(x, y) < \delta$ y existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Luego, como:

$$d(x,y) \leq d(y,x) + d(x,x_i) < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = \varepsilon_{x_i}.$$

De aquí que $y \in B(x_i, \varepsilon_{x_i})$, y así $y \in U$.

e) Como F y E son compactos ajenos, se tiene que $d(F,E) > 0$. Consideremos $\delta = \frac{d(F,E)}{2} > 0$, se probará que $N_d(\delta, F) \cap N_d(\delta, E) = \emptyset$, para ello supongamos lo contrario, es decir, existe $z \in N_d(\delta, F) \cap N_d(\delta, E)$ entonces existen $x \in F$ y $y \in E$ tales que $d(z,x) < \delta$ y $d(z,y) < \delta$, entonces:

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) = \delta + \delta = d(F,E).$$

lo cual es una contradicción. $\square$

De ahora en adelante escribiremos $N(\varepsilon, F)$ para hacer referencia a $N_d(\varepsilon, F)$.

Notación 1.72. *Sean X un espacio métrico compacto. Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$ definamos el siguiente conjunto:*

$$E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Ya que hemos definido lo que es una nube, definamos ahora la métrica para 2^X conocida como *métrica de Hausdorff* de la forma siguiente:

Definición 1.73. *Dados X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$, se define:*

$$H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B).$$

H es llamada la **métrica de Hausdorff** *para 2^X.*

Algo que debemos veríficar es que realmente H es una métrica para 2^X. Así, consideremos el siguiente resultado.

Proposición 1.74. *Sean X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$, se cumple:*

a) *$H(A,B)$ está bien definida;*

b) *$H(A,B) \geq 0$;*

c) $H(A, B) = H(B, A)$;

d) $H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

e) $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$ *(desigualdad del triángulo).*

Demostración.
a) Veamos que $H(A, B)$ está bien definida, es decir, probaremos que $E(A, B) \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente. Primero veamos que es no vacío, para ello, notemos que $d(x, y) < diam(X) + 1$ para cualesquiera $x, y \in X$. De está manera $A \subset N(diam(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diam(X) + 1, A)$. De tal forma que el número $diam(X) + 1 \in E(A, B)$ lo cual muestra que le conjunto es no vacío, notemos que el conjunto es acotado inferiormente por el 0, se sigue que $H(A, B)$ está bien definida.

b) Como ínf $E(A, B) \geq 0$, se sigue que $H(A, B) \geq 0$.

c) Notemos que:

$$H(A, B) = \text{ínf } E(A, B) = \text{ínf } E(B, A) = H(B, A).$$

d) $\Leftarrow$] Si $A = B$, entonces $H(A, B) = H(A, A) = \text{ínf } E(A, A) = \text{ínf}(0, \varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, por esto $H(A, B) = 0$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $H(A, B) = 0$, probaremos que $A = B$, para ello consideremos $x \in A$ y $\varepsilon > 0$ fijos, notemos que $H(A, B) = 0 < \varepsilon$, por lo cual existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$, y así $A \subset N(\delta, B)$, se sigue que existe $y \in B$ tal que $d(x, y) \leq \delta < \varepsilon$, de aquí que $B(\varepsilon, x) \cap B \neq \emptyset$ y por la arbitrariedad de ε se sigue que $x \in \bar{B} = B$ es decir $x \in B$, se concluye que $A \subset B$.
De forma similar $B \subset A$. Por esto $A = B$.

e) Por la forma en que definimos H, tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A, C) \leq \text{ínf } E(A, B) + \text{ ínf } E(B, C).$$

Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A, C) \leq \text{ínf } \{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}.$$

Para hacer esto, tomemos dos elementos cualesquiera $\delta \in E(A, B)$ y $\eta \in E(B, C)$. Por definición , $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\eta, C)$. Dada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \delta$, además existe $z \in C$ tal que $d(y, c) < \eta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(x, z) < \delta + \eta$. Hemos probado que $A \subset N(\delta + \eta, C)$. De forma análoga se prueba que $C \subset N(\delta + \eta, A)$. De tal forma que $\delta + \eta \in E(A, C)$. Y entonces:

$$\text{ínf } E(A,C) \leq \delta + \eta.$$

Por esto tenemos que ínf $E(A,C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$ y, por tanto ínf $E(A,C) \leq$ ínf $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$. □

Lema 1.75. *Sean X un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si, y sólo si, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

DEMOSTRACIÓN.
$\Rightarrow]$ Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$.Por la *Proposición 1.71*, se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Se sigue que $\varepsilon \in E(A,B)$, de tal forma que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

$\Leftarrow]$ Recíprocamente, si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$ entonces tenemos que $A \subset \displaystyle\bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, B)$. Dado que A es compacto existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tales que $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \text{máx}\,\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Luego, $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De tal forma que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De forma análoga, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $\gamma < 0$ tal que $\gamma > \varepsilon$ y $B \subset N(\gamma, A)$.

Sea $\beta = \text{máx}\{\alpha, \gamma\}$. Tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así $\beta \in E(A,B)$, se sigue que $H(A,B) \leq \beta < \varepsilon$. Por esto $H(A,B) < \varepsilon$. □

Notación 1.76. *Sean X un espacio métrico compacto y $A \subset X$. Definimos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X:*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\};$$
$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$
$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Proposición 1.77. *Sean X un espacio métrico compacto y $A \subset X$. Entonces se tiene que:*

a) Si A es abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.

b) Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.

DEMOSTRACIÓN.
a) Sea $A \subset X$ abierto, veamos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Gamma(A)$. Entonces $B \in 2^X$ y $B \subset A$. Puesto que A es abierto en X, se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B \subset N(\varepsilon, B) \subset A$. Denotemos por $\mathbf{B}(B, \varepsilon) = \{C \in 2^X : H(C,B) < \varepsilon\}$.Veamos

que $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(B,\varepsilon)$. Entonces $H(C,B) < \varepsilon$. Luego por el *Lema 1.75*, $C \in N(\varepsilon, B)$ y como $N(\varepsilon, B) \subset A$, se sigue que $C \subset A$. Así $C \in \Gamma(A)$. Luego $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Gamma(A)$. Por esto, para cada $B \in \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora veamos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Lambda(A)$. Entonces $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$. Como A es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Veamos que $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(B,\varepsilon)$. Entonces $H(B,C) < \varepsilon$. Luego, por el *Lema 1.75*, $B \subset N(\varepsilon, C)$. Puesto que $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B(x,\varepsilon)$. Así $y \in A$. Luego $y \in C \cap A$ de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. De aquí, $C \in \Lambda(A)$. Así $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Lambda(A)$, es decir, $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X.

b) Sea $A \subset X$ cerrado. Para probar que $\Gamma(A)$ es cerrado basta con probar que $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$. Sea $B \in \overline{\Gamma(A)}$ y supongamos que $B \notin \Gamma(A)$. Tomemos $y \in B \setminus A$. Como A es compacto en X y $y \notin A$, se tiene que $d(A,y) > 0$. Sea $\varepsilon = d(A,y)$. Puesto que $B \in \overline{\Gamma(A)}$, se sigue que $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \cap \Gamma(A) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in (B,\varepsilon) \cap \Gamma(A)$, de tal forma que $H(B,E) < \varepsilon$ y $E \subset A$. Luego, por el *Lema 1.75*, $B \subset N(\varepsilon, E)$ y $E \subset A$ como $y \in B$, existe $z \in E$ tal que $d(y,z) < \varepsilon$. Puesto que $E \subset A$, $z \in A$.
Así, $d(y,A) \leq d(y,z)$. De tal forma que $d(y,A) < \varepsilon$ lo cual es una contradicción. Se sigue que $B \in \Gamma(A)$. Concluimos que $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$. Por esto $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.

Por otro lado, si A es cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es abierto en X. Por la primera parte de este lema, se tiene que $\Gamma(X \setminus A)$ es abierto en 2^X. Dado que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X \setminus A) = \emptyset$. Se sigue que $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.

Ahora veamos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$. Entonces $A \not\subset B$. Sea $x \in A \setminus B$. Notemos que $d(B,x) > 0$. Sea $\varepsilon = d(B,x)$. Puesto que $B \in \overline{\Phi(A)}$, se tiene que $\Phi(A) \cap \mathbf{B}(B,\varepsilon) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \Phi(A)$ tal que $H(B,E) < \varepsilon$. Como $x \in A$ y $E \in \Phi(A)$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$. Puesto que $d(x,B) \leq d(x,y)$ se sigue $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es una contradicción, por esto $B \in \Phi(A)$. Así $\overline{\Phi(A)} \subset \Phi(A)$. Con lo cual concluimos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. $\square$

1.3.2 Topología de Vietoris

En esta sección exponemos el concepto de topología de Vietoris para la familia de subconjuntos cerrados, no vacíos, de un espacio topológico. Pero antes demos un poco de notación.

Notación 1.78. *Sean X un espacio métrico compacto no vacío, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Definimos la siguiente colección de subconjuntos de 2^X:*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Lema 1.79. *Sean X un espacio métrico compacto, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$;

b) Para cada subconjunto A de X, $\Gamma(A) = \langle A\rangle$;

c) Para cada subconjunto A de X, $\Lambda(A) = \langle X, A\rangle$.

Demostración.
a) Notemos que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\} \bigcap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$. Se conluye lo deseado.

b) Sea $A \subset X$. Observemos que, por la *Notación 1.78*, $\langle A\rangle = \{B \in 2^X : B \subset A\} = \Gamma(A)$.

c) De forma similar a *b*). Sea $A \subset X$, por la *Notación 1.78*, tenemos que $\langle X, A\rangle = \{B \in 2^X : B \subset X$ y $B \cap A \neq \emptyset\} = \Lambda(A)$. □

Lema 1.80. *Sean X un espacio métrico compacto, $m, n \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ subconjuntos de X. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle = \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle$.*

Demostración.
$\subset$] Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$, por el *Lema 1.79* tenemos que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle = \Gamma(U) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)) \cap \Gamma(V) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} \Lambda(V_j))$. Así, $A \subset U \cap V$. Además:

$$U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U) = (U \cap \bigcup_{j=1}^{m} V_j) \bigcap (V \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup_{j=1}^{m} (U \cap V_j) \bigcup \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i).$$

Por otro lado, como $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, observamos que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De forma similar, $A \cap (U \cap V_j) \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. De manera que $A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle$.

$\supset$] Sea $A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle$. Entonces $A \subset U \cap V$. Es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$. Así $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_j) = A \cap V_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que $A \in$

$\bigcap_{j=1}^{m} \Lambda(V_j)$. De forma análoga, $A \in \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)$. Concluimos que, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$. $\square$

Teorema 1.81. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : n \in \mathbb{N}$ y U_i es abierto para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Demostración.
Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Notemos que $\langle X\rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así $2^X \in \mathcal{B}$. De tal forma que, $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Luego, $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

Falta probar que para cada par de elementos, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$, de $\mathcal{B}$ tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$ existe $\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$. Pero por el *Lema 1.80* basta con considerar $\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$.

Por esto, $\mathcal{B}$ es base. $\square$

Nota 1.82. *La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V, es conocida como* **topología de Vietoris**.

Teorema 1.83. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces el conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(A) : A$ es abierto en $X\} \cup \{\Lambda(A) : A$ es abierto en $X\}$ es una subbase para la topología de Vietoris.*

Demostración.
Denotemos por $\mathcal{S}' = \{\cap W : W$ es un subconjunto finito de $\mathcal{S}\}$. Para ver que $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de Vietoris, basta con probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. Para ello:

$\subset$] Sea $V \in \mathcal{S}'$, entonces $V = \Gamma(A)$ o $V = \Lambda(A)$ para algún A subconjunto abierto de X, es decir, $V = \langle A\rangle$ o $V = \langle X, A\rangle$, de cualquier forma $V \in \mathcal{B}$. Además por el *Lema 1.80*, sabemos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, de manera que $V \in \mathcal{B}$ y así $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}$.

$\supset$] Sea $A \in \mathcal{B}$. Luego, sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de X tales que $A = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y pongamos $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Notemos que, por el *Lema 1.79*, $A = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma(W) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(A_i))$. Es decir, A es la intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Así, $A \in \mathcal{S}'$. Se sigue que, $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}'$.

Concluimos que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. $\square$

Teorema 1.84. *Sea X un espacio métrico compacto. En el hiperespacio 2^X la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden.*

Demostración.
Denotamos por τ_H a la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Probaremos que $\tau_V = \tau_H$. Para ello, hagamos lo siguiente:

$\tau_V \subset \tau_H$]. Bastará con demostrar que la subbase de la topología τ_V está contenida en τ_H. Para esto consideramos $A \subset X$ abierto fijo. Demostraremos que $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son elementos de τ_H.

Si $A = X$, entonces $\Gamma(A) = \Lambda(A) = 2^X$ y, si $A = \emptyset$, entonces $\Gamma(A) = \Lambda(A) = \emptyset$. De tal forma que $\Gamma(A), \Lambda(A) \in \tau_H$ si $A = X$ o $A = \emptyset$. En lo que sigue, suponemos que $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$. Fijemos $B \in \Gamma(A)$ y denotemos $\varepsilon = d(B, X \setminus A)$. Dado que B y $X \setminus A$ son compactos ajenos se tiene que $\varepsilon > 0$. Veremos que:

i) $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \subset \Gamma(A)$. En consecuencia, $\Gamma(A) \in \tau_H$.
Sea $C \in \mathbf{B}(B, \varepsilon)$ y supongamos que existe $z \in C \cap (X \setminus A)$. Por el *Teorema 1.75* se tiene que $C \subset N(\varepsilon, B)$, lo que implica que existe $y \in B$ tal que $d(y, z) < \varepsilon$. Se sigue que $d(B, X \setminus A) \leq d(y, z) < \varepsilon = d(B, X \setminus A)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $C \cap (X \setminus A) = \emptyset$, es decir, $C \subset A$. Por lo tanto $C \in \Gamma(A)$. Lo cual prueba lo deseado en *i)*.

Ahora fijemos $B \in \Lambda(A)$ y un punto $p \in A \cap B$. Pongamos $\varepsilon = d(p, X \setminus A)$. Es claro que $\varepsilon > 0$. Probaremos que:

ii) $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \subset \Lambda(A)$. En consecuencia, $\Lambda(A) \in \tau_H$.
En efecto, sea $C \in \mathbf{B}(B, \varepsilon)$ y supongamos que $C \subset (X \setminus A)$. Por el *Teorema 1.75* se tiene que $B \subset N(\varepsilon, C)$. En consecuencia existe $z \in C$ tal que $d(p, z) < \varepsilon$. Se sigue que $d(p, X \setminus A) \leq d(p, z) < \varepsilon = d(p, X \setminus A)$, es decir, $C \cap A \neq \emptyset$. De esta manera se demuestra lo indicado en *ii)*.

De *i)* y *ii)* se obtiene que $\tau_V \subset \tau_H$.

$\tau_H \subset \tau V$] Para probar esto, fijamos $D \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que:

iii) $\mathbf{B}(D, \varepsilon) \in \tau_V$. En consecuencia, $\tau_H \subset \tau_V$.
Como D es compacto y $D \subset \displaystyle\bigcup_{y \in D} B(y, \frac{\varepsilon}{2})$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n \in D$ tales que $D \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Denotemos por $U_i = B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Observemos que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ es un elemento de la topología τ_V y $D \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Veamos que:

iv) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathbf{B}(D, \varepsilon)$.

Tomemos $C \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Se tiene que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, D) \subset N(\varepsilon, D)$.

Por otra parte, si $y \in D$ existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $y \in U_i$. Como $C \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, se tiene que $C \cap U_i \neq \emptyset$. Fijemos $z \in C \cap U_i$. Así, $y, z \in U_i$. Luego, $d(y, z) \leq d(y, y_i) + d(y_i, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto, $D \subset N(\varepsilon, C)$.

Hemos demostrado que $D \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\varepsilon, D)$. Del *Teorema 1.75*, se obtiene que $H(C, D) < \varepsilon$, es decir, $C \in \mathbf{B}(D, \varepsilon)$. Esto demuestra lo que se indica en *iv)*, lo cual a su vez demuestra lo que se afirma en *iii)*.

Con todo esto, la prueba de que $\tau_V = \tau_H$ está completa. □

1.3.3 Convergencia de sucesiones en hiperespacios

Dado que los hiperespacios son espacios métricos, la definición de sucesión y el criterio de convergencia de sucesiones, es el mismo que conocemos en cualquier espacio métrico.

Lema 1.85. *Sea X un continuo. Consideramos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;

b) $\lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B$;

c) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$;

d) No siempre se cumple que $\lim_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B$.

Demostración.
a) Sea $x \in A$. Demostraremos que $x \in B$. Dado que B es cerrado, bastará con probar que $x \in \overline{B}$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De forma análoga, como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \geq N$, $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, por el *Lema 1.75*, para cada $n \geq N$, $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $B \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$.

Ahora, fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Puesto que $x \in A$, existe $y \in A_m$ tal que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis se tiene que $A_m \subset B_m$, así $y \in B_m$. Luego, existe $z \in B$

tal que $d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De tal forma que $z \in B(x,\varepsilon) \cap B$. En consecuencia $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Se sigue que $x \in \overline{B}$, de tal forma que $A \subset B$.

b) Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(A \cup B, \varepsilon)$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \varepsilon$. De forma similar, dado que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cda $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se sigue que, para cada $n \geq N$, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$. Luego, por el *Lema 1.75*, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $B \subset N(\varepsilon, B_n)$. De manera que , para cada $n \geq N$, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Luego, por la *Proposición 1.71*, para cada $N \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Se sigue que, para cada $n \geq N$, $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$. Por esto, para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(A \cup B, \varepsilon)$. De aquí, $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

c) Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Por la *Proposición 1.71*, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset$.

Por otro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se sigue que, para cada $n \geq N$, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$. De tal forma que, por el *Lema 1.75*, para cada $n \geq N$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$ Por hipótesis, tenemos que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$. Sea $x_m \in A_m \cap B_m$, entonces $x_m \in N(\varepsilon, A)$ y $x_m \in N(\varepsilon, B)$, de manera que $x_m \in N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B)$, es decir, $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Esta contradicción muestra que $A \cap B \neq \emptyset$.

d) Consideramos el espacio $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$ y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n.

Observemos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, donde $A = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, $B = [0,1] \times \{0\}$. Luego $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n = \{p_n\}$. Así, $\lim(A_n \cap B_n) = \{p_0\}$, donde p_0 es el punto $(1, 0)$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \neq A \cap B$. $\square$

Lema 1.86. *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de 2^X tales que $A_{n+1} \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración.
Sea $A = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $A \in 2^X$. En efecto, A es cerrado por ser intersección de cerrados. Si $A = \emptyset$, entonces $X = \bigcup\{X \setminus A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup\{X \setminus A_{n_i} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\} = X \setminus \bigcap\{A_{n_i} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$. Observemos que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$. Así, $X = X \setminus A_{n_m}$ Entonces $A_{n_m} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por esto, $A \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = A_n \setminus N(\varepsilon, A)$. Recordemos que $N(\varepsilon, A)$ es abierto en X (por el *Lema 1.71*) y, como $B_n = A_n \cap (X \setminus A)$, se tiene que cada B_n es cerrado en X. Además, puesto que $A_{n+1} \subset A_n$, se sigue que $A_{n+1} \cap (X \setminus A) \subset A_n \cap (X \setminus A)$. Así, $B_{n+1} \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos una sucesión de compactos, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $B_{n+1} \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, si $B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Pero $\bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{A_n \setminus N(\varepsilon, A) : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus N(\varepsilon, A) = A \setminus N(\varepsilon, A) = \emptyset$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_N = \emptyset$. Es decir, $A_N \setminus N(\varepsilon, A) = \emptyset$, así, $A_N \subset N(\varepsilon, A)$. Puesto que $A_{n+1} \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que, para cada $n \geq N$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$. Además, $A \subset A_n \subset N(\varepsilon, A_n)$, para cada $n \geq N$. Luego, por el *Lema 1.75*, se sigue que $H(A_n, A) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$. De manera que, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. $\square$

1.3.4 Funciones de Whitney

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de los hiperespacios es el que, dado un continuo X, garantiza la existencia de funciones de Whitney en 2^X. En esta sección daremos una prueba de la existencia de dichas funciones.

Definición 1.87. *Una* **función de Whitney** *es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

a) $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$;

b) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$.

Nota 1.88. *Cuando se hable de una función de Whitney para $C(X)$, sólo haremos referencia a una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que satisface las condiciones a) y b). Entonces la restricción de cada función de Whitney a $C(X)$ es una función de Whitney para $C(X)$.*

Lema 1.89. *Si X es un continuo, entonces la función $diam : 2^X \to [0, \infty)$ definida por $diam(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$, para cada $A \in 2^X$, es continua.*

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$. Denotemos por $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Si $H(A, B) < \delta$, entonces por el *Lema 1.75* se tiene que $A \subset N(\delta, B)$. Como A es compacto, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $diam(A) = d(x_1, x_2)$. Luego existen $y_1, y_2 \in B$ tal que $d(x_1, y_1) < \delta$ y $d(x_2, y_2) < \delta$. Por la desigualdad triangular tenemos que:

$$diam(A) = d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y_1) + d(y_1, x_2) < \delta + d(y_1, x_2) \leq$$
$$\delta + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) < d(y_1, y_2) + \delta + \delta = d(y_1, y_2) + \varepsilon$$

Así, $diam(A) < diam(B) + \varepsilon$. En consecuencia, $diam(A) - diam(B) < \varepsilon$. De forma análoga , se tiene que $-\varepsilon < diam(A) - diam(B)$. Por esto, $|diam(A) - diam(B)| < \varepsilon$. De aquí que la función *diam* es uniformemente continua. De tal manera que *diam* es continua. $\square$

Teorema 1.90. *Para cualquier continuo, X, existe una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0, \infty)$.*

Demostración.
Sea X un continuo y $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $f_n : X \to [0, 1]$ definida por $f_n(x) = \frac{1}{1+d(z_n, x)}$, para cada $x \in X$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua.

Más adelante, en el *Teorema 1.96*, probaremos que, si $f : X \to Y$ es continua, entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ definida por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$, es continua. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $2^{f_n} : 2^X \to 2^{[0,1]}$ es continua. Por otro lado, por el *Lema 1.89*, la función $diam : 2^{[0,1]} \to [0, 1]$ es continua.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mu_n = diam \circ 2^{f_n} : 2^X \to [0, 1]$. Se sique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, μ_n es continua por ser composición de funciones continuas.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $A \in 2^X$, $\frac{\mu_n(A)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, por el criterio M de Weierstrass ([13], página 153), la función $\mu : 2^X \to [0, 1]$ definida como $\mu(A) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$, para cada $A \in 2^X$, es continua.

Veamos que $\mu : 2^X \to [0, 1]$ es de Whitney. Por lo tanto, probaremos que:

i) Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.
Como $\mu(\{x\}) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{diam(\{f_n(x)\})}{2^n} = 0$, con lo cual se concluye *i*).

ii) Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.
Como $A \subset B$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(A) \subset f_n(B)$, de manera que $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

Por lo tanto, para probar que $\mu(A) < \mu(B)$, bastará con probar:

iii) Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_i(A) < \mu_i(B)$.

Sea $y \in B \setminus A$. Notemos que $d(A, y) > 0$. Sea $r = \frac{d(A,y)}{2} > 0$. Como Z es denso en X, sea $z_i \in Z$ tal que $d(y, z_i) < r$. Entonces $d(y, z_i) + 1 < r + 1$, luego $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{1+d(y,z_i)} = f_i(y)$. Como $d(A, y) > r$, $f_i(x) = \frac{1}{1+d(z_i,x)} < \frac{1}{1+r}$, para cada $x \in A$. Así, $\sup f_i(A) \leq \frac{1}{1+r}$, luego $\sup f_i(A) < f_i(y)$. Puesto que $y \in B$, se sigue que $\sup f_i(A) < \sup f_i(B)$. Dado que $A \subset B$, $diam(f_i(A)) < diam(f_i(B)$, es decir, $\mu_i(A) < \mu_i(B)$, para algún $i \in \mathbb{N}$.
Esto prueba *iii*). por lo tanto, $\mu(A) < \mu(B)$.

De *i*) y *ii*), se sigue que μ es una función de Whitney en 2^X. □

Lema 1.91. *Si X es un continuo, A, B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Demostración.
Sea $\mathcal{U} = \mu^{-1}([t, 1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$. Notemos que, por la *Proposición 1.77*, $\mathcal{U}$ es cerrado por ser intersección de cerrados, y por esto, compacto, además es diferente del vacío ya que $B \in \mathcal{U}$. De manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{U}$, es decir, existe $E \in \mathcal{U}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para toda $D \in \mathcal{U}$.

Ahora, pongamos $\mathcal{V} = \mu^{-1}([0, t]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}$. Por la *Proposición 1.77*, tenemos que $\mathcal{V}$ es compacto y como $A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \neq \emptyset$, de tal forma que μ alcanza su máximo en $\mathcal{V}$, es decir, existe $F \in \mathcal{V}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para cada $D \in \mathcal{V}$.

Si ocurriera que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$, ya podríamos proponer el conjunto C. Por esto, supongamos que $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como $F \subset E$, tenemos que $F \subsetneq E$. Luego, por el *Corolario 1.39*, existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subseteq E \subset B$. Entonces $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $t \leq \mu(G)$, entonces $G \in \mathcal{U}$ y su valor bajo μ es menor que el de E, lo cual contradice la elección de E. Si por el contrario $\mu(G) \leq t$, entonces $G \in \mathcal{V}$ y su valor bajo μ es mayor que el de F, lo cual contradice la elección de F. De aquí que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$. Con lo cual se concluye lo deseado. □

1.3.5 Arcos ordenados

Una herramienta extremadamente útil en el estudio de la estructura topológica de los hiperespacios es el concepto de arco ordenado. Dado un continuo X, es de nuestro interés garantizar la existencia de los arcos ordenados en $C(X)$. En esta sección daremos una prueba de la existencia de dichos arcos.

Definición 1.92. *Dados X un continuo, $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un* **arco ordenado** *de A a B en $C(X)$, si* *a)* $\alpha(0) = A$;

b) $\alpha(1) = B$;

c) $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ *cuando* $0 \leq s < t \leq 1$.

Teorema 1.93. *Sea X un continuo. Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración.
Fijemos una función de Whitney, $\mu : C(X) \to [0,1]$. Sea $\{r_1, r_2, \ldots\}$ una numeración del conjunto $\{\mu(A), \mu(B)\} \cup ((\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q})$, donde $r_1 = \mu(A)$ y $r_2 = \mu(B)$.

Construiremos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, con la propiedad de que si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subset A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

(Caso base) Consideremos $A_1 = A$ y $A_2 = B$. Por el *Lema 1.91*, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_3 \subset A_2$ y $\mu(A_3) = r_3$.

(Caso hipotético) Supongamos que se han construido continuos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de $C(X)$, tales que si $n, m \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y $r_n < r_m$ entonces $A_n \subset A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$.

Denotemos $r_i = \text{máx}\{r_n \in \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} : r_n < r_{k+1}\}$ y $r_j = \text{mín}\{r_n \in \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} : r_{k+1} < r_n\}$. Observemos que $r_i < r_{k+1} < r_j$. Por el *Lema 1.91*, existe $A_{k+1} \in C(X)$, tal que $A_i \subset A_{k+1} \subset A_j$ y $\mu(A_{k+1}) = r_{k+1}$.

Notemos que $\mu(A_m) = r_m$, para cada $m \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$. Por otra parte, si $n, m \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ y $r_n < r_m$, consideremos los siguientes casos:

i) Si $n \neq k+1 \neq m$, en este caso, por hipótesis de inducción, tenemos que $A_n \subset A_m$.

ii) Si $n = k+1$, tenemos que $r_n < r_j \leq r_m$, por lo cual $A_n \subset A_j \subseteq A_m$. Así, $A_n \subset A_m$.

iii) Si $m = k+1$, tenemos que $r_n \leq r_i < r_m$ por lo cual $A_n \subseteq A_i \subset A_m$. De aquí que $A_n \subset A_m$.

Con esto terminamos la construcción inductiva de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, con la propiedad de que si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subset A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, sea $\mathcal{A} = \overline{\{A_1, A_2, \ldots\}}$. Probaremos que la función $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [r_1, r_2]$ es un homeomorfismo.

Notemos que $\mathcal{A}$ es compacto y que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es continua. Veamos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es sobreyectiva, para ello, probaremos que $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$.

Es claro que $\mu(\mathcal{A}) \subset [r_1, r_2]$, de tal forma que bastará con probar que $[r_1, r_2] \subset \mu(\mathcal{A})$, notemos que $\overline{((\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q})} = [r_1, r_2]$ y que $\overline{((\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q})} \subset \overline{\mu(\mathcal{A})} = \mu(\mathcal{A})$, se sigue que $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$, es decir, $\mu|_{\mathcal{A}}$ es sobreyectiva.

Ahora, probaremos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva.
Para ello, sean $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$. Entonces existen dos sucesiones $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números naturales tales que $\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = C$ y $\lim\limits_{k\to\infty} A_{m_k} = D$. Veamos que:

iv) Para cualesquiera $C, D \in \mathcal{A}$, $C \subset D$ o $D \subset C$.

Consideremos las sucesiones de números reales $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Notemos que el conjunto $\{k : A_{n_k} = A_{m_k}\}$ es finito. Podemos suponer que $A_{n_k} \neq A_{m_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, $r_{n_k} < r_{m_k}$ o $r_{m_k} < r_{n_k}$.

Entonces alguno de los siguientes conjuntos es infinito, $\mathcal{U} = \{k : r_{n_k} < r_{m_k}\}$ y $\mathcal{V} = \{k : r_{m_k} < r_{n_k}\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{U}$ es infinito, de esta forma podemos asumir $r_{n_k} < r_{m_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces por la propiedad de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, se sigue que $A_{n_k} \subset A_{m_k}$, por el *Lema 1.85* se sigue que $C \subset D$. Lo cual prueba *iv*).

Dado que $C \neq D$, tenemos que $C \subsetneq D$. De tal manera que $\mu(C) < \mu(D)$ por esto $\mu(C) \neq \mu(D)$, es decir, μ es inyectiva en $\mathcal{A}$.

Luego, como $\mu|_{\mathcal{A}}$ es una biyección continua entre el compacto $\mathcal{A}$ y el espacio de Hausdorff, $[r_1, r_2]$, se sigue que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo.

Consideremos $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} : [r_1, r_2] \to \mathcal{A}$. Observemos que $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}$ es un arco, con extremos $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_1)) = A$ y $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_2)) = B$. Para concluir la prueba, bastará con ver que dados $s, t \in [r_1, r_2]$, tales que $s < t$ se tiene que $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(s) \subsetneq (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(t)$.

Sean $A_s, A_t \in \mathcal{A}$ tales que $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(s) = A_s$ y $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(t) = A_t$. Por *iv*), se sigue que $A_s \subsetneq A_t$ o $A_t \subsetneq A_s$. Sean $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones en $[r_1, r_2]$ tales que $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k} = s$, $\lim\limits_{k\to\infty} r_{m_k} = t$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A_s$ y $\lim\limits_{k\to\infty} A_{m_k} = A_t$.

Dado que $s < t$, supongamos que $r_{n_k} < r_{m_k}$, se sigue qie $A_s \subset A_t$, por esto $A_s \subsetneq A_t$.

Por lo tanto $(\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}$ es un arco ordenado de A a B. $\square$

Definición 1.94. *Un arco ordenado* $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ *con extremos* A *y* B*, es llamado único si para cualquier otro arco ordenado* β *en* $C(X)$ *con extremos* A *y* B *se cumple que* $\alpha([0, 1]) = \beta([0, 1])$.

1.3.6 Funciones inducidas entre hiperespacios

Dada una función continua entre continuos $f : X \to Y$, denotamos por $2^f : 2^X \to 2^Y$ y por $C(f) : C(X) \to C(Y)$ a las *funciones inducidas* definidas, respectivamente, de la siguiente forma:

$2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$;

$C(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$.

En esta sección probaremos que si f es una función continua entre continuos, entonces las funciones inducidas $C(f)$ y 2^f son continuas.

Lema 1.95. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos, $A \in 2^Y$ y $B \in C(Y)$. Consideramos las funciones inducidas $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$ y $C(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$. Se tiene que:*

a) $(2^f)^{-1}(\Gamma(A)) = \Gamma(f^{-1}(A))$;

b) $(2^f)^{-1}(\Lambda(A)) = \Lambda(f^{-1}(A))$;

c) $(C(f))^{-1}(\Gamma(B) \cap C(Y)) = \Gamma(f^{-1}(B)) \cap C(X)$;

d) $(C(f))^{-1}(\Lambda(B) \cap C(Y)) = \Lambda(f^{-1}(B)) \cap C(X)$;

Demostración.
Dado que para nuestro estudio es importante conocer las propiedades de $C(X)$ daremos las pruebas de los incisos *c)* y *d)*, ya que las demostraciones de *a)* y *b)* son análogas a lo que probaremos.

c) $\subset]$ Sea $V \in (C(f))^{-1}(\Gamma(B)\cap C(Y))$. Entonces $C(f)(V) = f(V) \in (\Gamma(B)\cap C(Y))$. Luego $f(V) \subset B$ y $f(V) \in C(Y)$, de esta forma $f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(f(V)) \in C(X)$. Así $V \subset f^{-1}(B)$ y $V \in C(X)$, es decir, $V \in \Gamma(f^{-1}(B)) \cap C(X)$.

$\supset]$ Sea $U \in \Gamma(f^{-1}(B)) \cap C(X)$, se sigue que $U \in f^{-1}(B)$ y $U \in C(X)$. De tal forma que $f(U) \subset f(f^{-1}(B)) = B$ y $f(U) \in C(Y)$, es decir, $f(U) = C(f)(U) \in \Gamma(B) \cap C(Y)$, entonces $B \in (C(f))^{-1}(\Gamma(B) \cap C(Y))$.

De tal forma que $(C(f))^{-1}(\Gamma(B) \cap C(Y)) = \Gamma(f^{-1}(B)) \cap C(X)$.

d) $\subset]$ Sea $V \in (C(f))^{-1}(\Lambda(B) \cap C(Y))$. Entonces $C(f)(V) = f(V) \in \Lambda(B) \cap C(Y)$, así $f(V) \cap B \neq \emptyset$ y $f(V) \in C(Y)$.

Sea $y \in f(V) \cap B$. Entonces existe $x \in V \cap f^{-1}(B)$ tal que $f(x) = y$, así $x \in f^{-1}(y) \subset V \cap f^{-1}(B)$. Luego $x \in V \cap f^{-1}(B)$, por tanto, $V \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Por otro lado $V \in C(X)$. Luego $V \in \Lambda(f^{-1}(B)) \cap C(X)$.

$\supset$] Sea $U \in (\Lambda(f^{-1}(B)) \cap C(X))$, entonces $U \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ y $U \in C(X)$. Así, $f(U) \cap B \neq \emptyset$ y $f(U) \in C(Y)$. Luego, $C(f)(U) = f(B) \in \Lambda(B)$ y $f(U) \in C(Y)$. De esto que $U \in (C(f))^{-1}(\Lambda(B) \cap C(Y))$.

Concluimos que $(C(f))^{-1}(\Lambda(B) \cap C(Y)) = \Lambda(f^{-1}(B)) \cap C(X)$. □

Teorema 1.96. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ es continua.*

Demostración.
Por el *Teorema 1.83*, $\mathcal{S} = \{\Gamma(A) : A$ es abierto en $Y\} \cup \{\Lambda(A) : A$ es abierto en $Y\}$ es subbase para lo topología de Vietoris, τ_V, del hiperespacio 2^Y. Para probar que 2^f es continua, basta con probar que, para cada abierto A de Y, se tiene que $(2^f)^{-1}(\Gamma(A))$ y $(2^f)^{-1}(\Lambda(A))$ son abiertos en 2^X.

Sea A un abierto en Y. Como f es continua, se sigue que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X. Luego, por el *Lema 1.77*, se tiene que $\Gamma(f^{-1}(A))$ y $\Lambda(f^{-1}(A))$ son abiertos en 2^X. Por el *Lema 1.95*, se tiene que $(2^f)^{-1}(\Gamma(A)) = \Gamma(f^{-1}(A))$ y$(2^f)^{-1}(\Lambda(A)) = \Lambda(f^{-1}(A))$. De tal forma que $(2^f)^{-1}(\Gamma(A))$ y $(2^f)^{-1}(\Lambda(A))$ son abiertos en 2^X. □

Nota 1.97. *Considerando la función restringida de 2^f a $C(X)$, $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$, y la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$, se tiene que $2^f|_{C(X)} = C(f)$. De lo cual obtenemos el siguiente corolario:*

Corolario 1.98. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es continua.*

Demostración.
La prueba de este corolario es análoga a la del *Teorema 1.96*, basta con tomar la restricción de la función 2^f señalada en la *Nota 1.97*. □

1.3.7 Sobre el hiperespacio $C(X)$

En esta sección daremos argumentos para demostrar que el hiperespacio de continuos $C(X)$, de un continuo X, es un continuo. Además de dar algunos resultados que serán de gran utilidad para nuestro estudio.

Observación 1.99. *Dado que $C(X)$ es un subconjunto de 2^X (Observación 1.69) y por la metrizabilidad de 2^X (Proposición 1.74), se sigue que $C(X)$ es metrizable.*

Recordemos que un espacio topológico, X, es *conexo por arcos* si para cualesquiera dos elementos diferentes $x, y \in X$ existe un arco (espacio homeomorfo a $[0, 1]$) α en X cuyos extremos son x y y. Por otro lado, el espacio X es *conexo por trayectorias* si para cada par de elementos $x, y \in X$, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$

tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Es fácil ver que los espacios conexos por arcos también son conexos por trayectorias. Por esto, para ver que $C(X)$ es conexo, basta con probar que es conexo por arcos.
Además de la *Definición 1.11*, se sigue que cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por trayectorias.

Teorema 1.100. *Sea X un continuo. El hiperespacio $C(X)$ es conexo por arcos.*

Demostración.
Sea $A \in C(X) \setminus \{X\}$, por el *Teorema 1.93*, existe un arco que conecta a A con X. Como todos los elementos se pueden conectar por arcos con X, se sigue que $C(X)$ es conexo por arcos. $\square$

Veamos ahora que $C(X)$ es compacto, para ello, antes demos el siguiente resultado.

Teorema 1.101. *Sea X un continuo. El hiperespacio 2^X es compacto.*

La prueba de dicho teorema puede ser consultada en [8] página 66.

Corolario 1.102. *Sea X un continuo. El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Demostración.
Dado que $C(X) \subset 2^X$ y 2^X es compacto, bastará con probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Para ello consideremos una sucesión, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, de elementos de $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con $A \in 2^X$. Probaremos que A es conexo.

Para ello, supongamos lo contrario, es decir, que A es no conexo. Entonces existen E y F subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X, tales que $A = E \cup F$. Sea $\varepsilon = \inf\{d(x, y) : x \in E \text{ y } y \in F\}$. Dado que E y F son compactos, tenemos que $\varepsilon > 0$. Además, por la convergencia de la sucesión, para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De tal forma que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Notemos que, por la *Proposición 1.71*, $N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = N(\frac{\varepsilon}{2}, E) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, F)$. Luego, por la elección de ε, los conjuntos $N(\frac{\varepsilon}{2}, E)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, F)$ son ajenos y abiertos.

Ya que A_n es conexo, no puede intersectar a esos dos conjuntos, por lo que se sigue que $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, E)$ o $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, F)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, E)$. Entonces $F \subset A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subset N(\varepsilon, E)$, pero por la elección de ε, F es ajeno a $N(\varepsilon, E)$, así que $F = \emptyset$, lo cual es una contradice la elección de F. Por esto, A es conexo.

Con lo cual concluimos que $C(X)$ es cerrado en 2^X, y así, compacto. $\square$

Por la *Observación 1.99*, el *Teorema 1.100* y el *Corolario 1.102* tenemos que, para un continuo X, $C(X)$ es un continuo. Veamos ahora algunos resultados más.

Corolario 1.103. *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C(X)$ tales que $A_{n+1} \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un elemento de $C(X)$.*

Demostración.
Se sigue de el *Lema 1.86* y el *Corolario 1.102.* □

Teorema 1.104. *Sea X un continuo. Supongamos que existen dos subcontinuos, A y B, de X tales que $A \subsetneq B$ y $B \setminus A$ tiene por lo menos n componentes, entonces $C(X)$ contiene una n-celda.*

Demostración.
Sean $K_1, K_2, \ldots, K_n$ componentes de $B \setminus A$. Luego por el *Corolario 5.9 de [16]*, cada conjunto $A \cup K_i$ es un subcontinuo de X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por el *Teorema 1.93*, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ que une a A con $A \cup K_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definimos $\gamma : [0, 1]^n \to C(X)$ una función dada por:

$$\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n).$$

Como $\alpha_i(t_i) \in C(X)$ y $A \subset \alpha_i(t_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un subcontinuo de X. De tal forma que γ está bien definida. Veremos que γ es un homeomorfismo en su imagen en $C(X)$.

i) γ es continua.

Consideremos la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ de puntos de $[0, 1]^n$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$, donde $x \in [0, 1]^n$. Ahora, escribimos $x_m = (t_1^{(m)}, t_2^{(m)}, \ldots, t_n^{(m)})$ y $x = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} t_i^{(m)} = t_i$. Como cada α_i es continua, se sigue que $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_i(t_i^{(m)}) = \alpha_i(t_i)$. Luego, por el *Lema 1.85*, se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} (\alpha_1(t_1^{(m)}) \cup \alpha_2(t_2^{(m)}) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n^{(m)}) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n)$, es decir, $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma(x_m) = \gamma(x_m)$.

Por esto, γ es continua.

ii) γ es inyectiva.

Consideremos dos puntos diferentes de $[0, 1]^n$, digamos $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Entonces existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $s_l < t_l$ o $t_l < s_l$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_l < s_l$. Como α_l es un arco ordenado tenemos que $\alpha_l(t_l) \subsetneq \alpha_l(s_l)$. De tal forma que consideramos $x \in \alpha_l(s_l) \setminus \alpha_l(t_l)$. Entonces $x \in (A \cup K_l) \setminus \alpha_l(t_l) \subset (A \cup K_l) \setminus A = K_l$.

Si $i \neq l$, $K_i \cap K_l = \emptyset$, de manera que $x \in K_l \setminus (A \cup K_i) \subset K_l \setminus \alpha_i(t_i)$. Por esto, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(t_i)$.

Por otro lado, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(s_i)$. Se sigue que:

$$\gamma((t_1, t_2, \ldots, t_n)) \neq \gamma((s_1, s_2, \ldots, s_n)).$$

Así, γ es inyectiva.

Ahora, como $\gamma : [0,1]^n \to \gamma([0,1]^n)$ es una biyección continua entre un compacto y un espacio de Hausdorff, se sigue que γ es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y $\gamma([0,1]^n) \subset B \subset X$. De tal forma que $\gamma([0,1]^n)$ es una n-celda contenida en $C(X)$. $\square$

El siguiente teorema lo daremos sin demostración, pero no por falta de importancia, lo hacemos así porque el estudio de este teorema nos alejaría de nuestro objetivo principal, pero puede ser consultada en [2] *Teorema 5, página 500.*

Teorema 1.105. (Bing, 1948) *Sea X un continuo. Para cada A subcontinuo de X, existe un punto $p \in X \setminus A$ tal que:*

$$\mathcal{K}_{X\setminus\{p\}}(A) = \bigcup\{E \in C(X) : E \cap A \neq \emptyset \text{ y } E \subset X \setminus \{p\}\}.$$

Es denso en X.

Corolario 1.106. *Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X, entonces existen $p \in X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tales que $A \subset A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} A_n = X$ y $p \in X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

Demostración.
Sea $p \in X$ como en el *Teorema 1.105*. Es decir, $\bigcup\{E \in C(X) : E \cap A \neq \emptyset$ y $E \subset X \setminus \{p\}\}$ es denso en X.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X, elijamos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_m}$ puntos en X tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_m} B_{\frac{1}{m}}(x_i). \tag{1.9}$$

Así, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n_m\}$ existe $E_i \in C(X)$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(x_i) \cap E_i \neq \emptyset$, $E_i \cap A \neq \emptyset$ y $E_i \subset X \setminus \{p\}$. Sea $B_m = \bigcup_{i=1}^{n_m} E_i \cup A \in C(X)$. Observemos que $B_m \subset X \setminus \{p\}$. Tenemos la siguiente afirmación:
Afirmación: $H(B_m, X) < \frac{1}{m}$.

Sea $x \in X$. Entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n_m\}$ tal que $x \in B_{\frac{1}{2m}}(x_i)$, así $d(x, x_i) < \frac{1}{2m}$. Luego, si $q \in B_{\frac{1}{m}}(x_i) \cap E_i$ entonces $d(q, x_i) < \frac{1}{2m}$ y $q \in E_i \subset B_m$. Se sigue que

$d(x,q) < \frac{1}{m}$ y por tanto $x \in N(\frac{1}{m}, B_m)$. Concluimos que $H(B_m, X) < \frac{1}{m}$. Así queda demostrada la afirmación.

Notemos que $A \subset B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Definamos $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in C(X)$. Observemos que:

i) $A \subset A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) $p \in X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.

iii) $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = X$.

Por lo que queda demostrado el corolario. $\square$

La prueba del siguiente corolario es similar a la del *Corolario 1.106*, así que no daremos su demostración.

Corolario 1.107. *Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X, entonces existen $p \in X \setminus A$ y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a A con X tal que $p \notin \alpha(t)$, para cada $t \in [0,1)$.*

Capítulo 2

El hiperespacio $C(p, X)$

Para un continuo X, como ya se dijo anteriormente, $C(X)$ denota el hiperespacio de todos los subcontinuos de X, equipado con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. El hiperespacio de los subcontinuos de X anclados en un continuo $A \in C(X)$ es el subespacio de $C(X)$ dado por $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. En particular nos interesa este tipo de espacios cuando $A = \{p\}$, es decir, estudiaremos los hiperespacios de continuos anclados en un punto denotados de la siguiente manera $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$. En este capítulo daremos algunos resultados que nos ayudarán a conocer la estructura de dichos hiperespacios.

§1 Sobre funciones confluentes y homeomorfismos

En esta sección hablaremos sobre funciones de tipo confluente y cómo afecta a nuetros hiperespacios $C(p, X)$. Además de cómo afecta el tomar espacios homeomorfos a los hiperespacios que estudiamos.

Definición 2.1. *Dados X, Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función continua, f es* **confluente** *si para cualquier $B \in C(X)$ y cualquier componente K de $f^{-1}(B)$ se tiene que $f(K) = B$.*

Lema 2.2. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Se dice que f es una función confluente si, y sólo si, para cualquier $p \in X$, $C(f)(C(p, X)) = C(f(p), Y)$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Veamos que $C(f)(C(p, X)) \subset C(f(p), Y)$, para ello, sea $A \in C(p, X)$. Tenemos que $A \in C(X)$ y $p \in A$. Luego $f(A) \in C(Y)$ y $f(p) \in f(A)$. Se sigue que $C(f)(A) = f(A) \in C(f(p), Y)$. De tal forma que, $C(f)(C(p, X)) \subset C(f(p), Y)$.

Ahora, probaremos que $C(f(p), Y) \subset C(f)(C(p, X))$. Sea $B \in C(f(p), Y)$, observemos que $B \in C(Y)$ y $f(p) \in B$. Luego, $p \in f^{-1}(B)$. Consideremos K la componente de $f^{-1}(B)$ tal que $p \in K$. Sabemos que K es cerrado en X. Se sigue que K es compacto en X, entonces $K \in C(X)$ tal que $p \in K$. Por otro lado, ya que f es confluente, tenemos que $f(K) = B$ y así $B \in C(f)(C(p,X))$. Con lo cual, concluimos que, $C(f(p),Y) \subset C(f)(C(p,X))$.

$\Leftarrow$] Sea $B \in C(Y)$ y una componente K de $f^{-1}(B)$. Veamos que $f(K) = B$. Consideremos $p \in K$. Notemos que $f(p) \in f(K) \subset B$, de tal manera que $B \in C(f(p),Y)$. Luego por hipótesis tenemos que $B \in C(f)(C(p,X))$, es decir, existe $D \in C(p,X)$ tal que $f(D) = B$. Observemos que D es un subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$ tal que $p \in D$. Se sigue que $D \subset K$, por ser K componente de $f^{-1}(B)$. Entonces $B = f(D) \subset f(K) \subset B$, de tal forma que, $f(K) = B$.

Por esto, f es confluente. $\square$

Lema 2.3. *Sean X y Y continuos. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(h(p),Y)$.*

Demostración.
Es necesario probar que $C(h) : C(X) \to C(Y)$ definida como $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$ es un homeomorfismo.

Notemos que, por el *Corolario 1.98*, tenemos que $C(h)$ y $C(h)^{-1}$ son continuas ya que h y h^{-1} lo son.

Veamos que $C(h)$ es inyectiva y sobreyectiva, para finalmente asegurar que es un homeomorfismo. Para ello, veamos lo siguiente:

i) Si h es inyectiva, entonces $C(h)$ también lo es.

Para esto, sean $A, B \in C(X)$ tales que $C(h)(A) = C(h)(B)$. Entonces $h(A) = h(B)$. Como h es inyectiva, tenemos que $A = B$. Por esto, $C(h)$ es inyectiva.

ii) $C(h)$ es sobreyectiva.

Sea $B \in C(Y)$. Deseamos encontrar A en $C(X)$ tal que $h(A) = B$. Notemos que para cada $y \in B$, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$, ya que h es sobreyectiva. Consideremos $C = \{x \in X : h(x) \in B\}$. Como $C = h^{-1}(B)$ y h^{-1} es un homeomorfismo, tenemos que C es un subcontinuo de X. Luego, $C(h)(C) = h(C) = h(h^{-1}(B)) = B$, se sigue que $C(h)$ es sobreyectiva.

Por *i*), *ii*) y el *Corolario 1.98* tenemos que $C(h)$ es un homeomorfismo. Luego, considerando $C(h)|_{C(p,X)} : C(p,X) \to C(h)(C(p,X))$ y dado que por el *Lema 2.2* tenemos que $C(h)(C(p,X)) = C(h(p),Y)$, se sigue que $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(h(p),Y)$. $\square$

§2 Arcos y Celdas en $C(p, X)$

En esta sección analizaremos los casos en que nuestros continuos de estudio son arcos o celdas. Además de cuando al observar en los $C(p, X)$ obtenemos arcos o celdas. Antes de comenzar dicho análisis, veamos el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sean X un continuo y $p \in X$. El hiperespacio $C(p, X)$ es un continuo.*

DEMOSTRACIÓN.
Ya que $C(p, X) \subset C(X)$, por la *Observación 1.99*, se sigue que $C(p, X)$ es metrizable. Además es no vacío ya que $X \in C(p, X)$, para cada $p \in X$.

Por el *Corolario 1.102*. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $p \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces si el límite de esta sucesión existe también contiene al punto p, de tal manera que $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$. Y así $C(p, X)$ es compacto en $C(X)$.

De manera similar al *Teorema 1.100*, se prueba que $C(p, X)$ es conexo. De tal manera que concluimos que $C(p, X)$ es un continuo. $\square$

Lema 2.5. *Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X, entonces ni A ni X son puntos de corte de $C(A, X)$.*

DEMOSTRACIÓN.
Necesitamos probar que $C(A, X) \setminus \{X\}$ y $C(A, X) \setminus \{A\}$ son conjunto conexos.

Primero veamos que $C(A, X)\setminus\{X\}$ es conexo, para ello, sean $B, B^{'} \in C(A, X)\setminus\{A\}$, probaremos que existe un subconjunto conexo de $C(A, X)$ que contiene a B y $B^{'}$.

Tenemos que, por el *Teorema 1.93*, existen, α y β, arcos ordenados de A a B y de A a $B^{'}$. Notemos que:

i) *Im*(α), *Im*$(\beta)$$\subset C(A, X) \setminus \{X\}$.

ii) *Im*(α) e *Im*(β) son conexos y $A \in$*Im*$(\alpha)\cap$*Im*(β).

iii) $B, B^{'} \in$ *Im*$(\alpha)\cup$*Im*(β).

Por esto, $C =$*Im*$(\alpha)\cup$*Im*(β) es un conjunto conexo en $C(A, X) \setminus \{X\}$ tal que $B, B^{'} \in C$. De tal forma que $C(A, X) \setminus \{X\}$ es un conexo.

De forma análoga se prueba que $C(A, X) \setminus \{A\}$ es conexo, ya que si $B, B^{'} \in C(A, X) \setminus \{A\}$, los arcos ordenados, α y β, se consideran como los que unen a B con X y $B^{'}$ con X, respectivamente. $\square$

Definición 2.6. *Dados X un continuo, $A \in C(X)$ y $B \in C(A,X)$, entonces B es* **terminal** *en A, si para cada $D \in C(A,X)$ tenemos que $D \subset B$ o $B \subset D$.*

Lema 2.7. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si $B \in C(A,X)$ tal que $A \subsetneq B \subsetneq X$, entonces B es terminal en A si, y sólo si, B es un punto de corte de $C(A,X)$.*

DEMOSTRACIÓN.
$\Rightarrow]$ Sea B terminal en A, probaremos que $C(A,X) \setminus \{B\}$ es no conexo.

Para ello, consideremos $\mathcal{U} = \{D \in C(A,X) : B \subset D\}$ y $\mathcal{V} = \{D \in C(A,X) : D \subset B\}$, dado que $A \subsetneq B \subsetneq X$ tenemos que $A \in \mathcal{V}$ y $X \in \mathcal{U}$. Observemos que $\mathcal{U} = \Gamma(B) \cap C(A,X)$ y $\mathcal{V} = \Phi(B) \cap C(A,X)$, como B es cerrado, por el *Lema 1.77*, tenemos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cerrados en $C(A,X)$. Por otro lado:

i) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{B\}$;

ii) $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = C(A,X)$. En efecto, ya que, para cada $D \in C(A,X)$, se tiene que $B \subset D$ o $D \subset B$.

Luego, $C(A,X) \setminus \{B\} = (\mathcal{U} \setminus \{B\}) \cup (\mathcal{V} \setminus \{B\})$, donde $\mathcal{U} \setminus \{B\} \neq \emptyset$, $\mathcal{V} \setminus \{B\} \neq \emptyset$ y $(\mathcal{U} \setminus \{B\}) \cap (\mathcal{V} \setminus \{B\} = \emptyset$. Además, $\mathcal{U} \setminus \{B\}$ y $\mathcal{V} \setminus \{B\}$ son cerrados en $C(A,X) \setminus \{B\}$, es decir, $C(A,X) \setminus \{B\}$ es no conexo.

$\Leftarrow]$ Supongamos que B es un punto de corte de $C(A,X)$. Veamos que B es terminal en A. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que B no es terminal en A, entonces existe $M \in C(A,X)$ tal que $B \not\subset M$ y $M \not\subset B$.

Consideremos $\mathcal{U} = \{D \in C(A,X) : B \not\subset D\}$. Observemos que $A \in \mathcal{U}$. Además $\mathcal{U}$ es conexo por arcos, ya que $A \subsetneq D$ para todo $D \in \mathcal{U}$ distinto de A, entonces existe un arco de A a D, para cada $D \in \mathcal{U}$. Sea $N \in C(A,X) \setminus \{B\}$, probaremos lo siguiente:

$i)$ Existe un conjunto conexo $\mathcal{V} \subset C(A,X) \setminus \{B\}$ tal que $M, N \in \mathcal{V}$.

Observemos que si $N \in \mathcal{U}$, bastará con considerar a $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Así que, supongamos que $N \notin \mathcal{U}$, entonces $B \subsetneq N$. Consideremos, $\alpha : [0,1] \to C(X)$, un arco ordenado de N a X, donde $\alpha(t) \neq B$, para todo $t \in [0,1]$.

Sea $\beta : [0,1] \to C(X)$, un arco ordenado de M a X. Así $M \subset \beta(t)$, para todo $t \in [0,1]$, con lo cual $\beta(t) \neq B$, para todo $t \in [0,1]$. Luego, $\mathcal{V} =$*Im*$(\alpha) \cup$*Im*(β) es el conexo que deseamos puesto que $X \in$*Im*$(\alpha) \cap$*Im*(β). Con lo cual queda demostrado $i)$.

De tal forma que, por $i)$ se tiene que $C(A,X) \setminus \{B\}$ es conexo. Así B no es punto de corte de $C(A,X)$. □

Lema 2.8. *Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Si $\alpha_1 : [0,1] \to C(X)$ y $\alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ son dos arcos ordenados de A a X tales que $\alpha_1(I) \neq \alpha_2(I)$, entonces existen $s, t \in I$ tales que $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$.*

Demostración.
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Consideramos $s \in [0,1]$ tal que $\alpha_1(s) \notin \alpha_2([0,1])$ y $\mu(\alpha_1(s)) = r$. Sea $t \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_2(t)) = r$.

Veamos ahora que $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) = \emptyset$, entonces $\alpha_1(s) \subset \alpha_2(t)$. Como $\mu(\alpha_1(s)) = r = \mu(\alpha_2(t))$, se sigue que $\alpha_1(s) = \alpha_2(t)$, por lo cual $\alpha_1(s) \in \alpha_2([0,1])$, lo cual es una contradicción. Por esto, $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset$.

De forma análoga se prueba que $\alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$. □

Lema 2.9. *Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Entonces $C(A, X)$ es una arco con extremos A y X, si y sólo si, cualesquiera par de elementos de $C(A, X)$ se pueden comparar, es decir, si $B, B' \in C(A, X)$ se tiene que $B \subset B'$ o $B' \subset B$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que $C(A, X)$ es un arco con extremos A y X. Probaremos que para cualesquiera $B, B' \in C(A, X)$, $B \subset B'$ o $B' \subset B$.

Notemos que si $B \in \{A, X\}$ o $B' \in \{A, X\}$ obtenemos lo deseado. Supongamos que $B, B' \in C(A, X) \setminus \{A, X\}$. Observemos que B es un punto de corte. Luego, por el *Lema 2.7*, tenemos que B es terminal en A, es decir. $B \subset B'$ o $B' \subset B$.

$\Leftarrow$] Sea $\alpha_1 : [0,1] \to C(A, X)$. Supongamos que $C(A, X)$ no es un arco, entonces existe $B \in C(A, X) \setminus \alpha_1([0,1])$. Consideremos ahora un arco ordenado α_2 de A a X que contenga a B (esto es posible tomando un arco de A a B y luego otro de B a X). Así pues, en estas condiciones tenemos dos arcos ordenados $\alpha_1 : [0,1] \to C(A, X)$ y $\alpha_2 : [0,1] \to C(A, X)$, de A a X, tales que $\alpha_1([0,1]) \neq \alpha_2([0,1])$. De acuerdo con esto y por el *Lema 2.8*, existen $s, t \in [0,1]$ tales que $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$. De esta manera hemos encontrado dos elementos de $C(A, X)$, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$, que no son comparables. Con lo cual concluimos lo deseado. □

Lema 2.10. *Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $C(A, X)$ es un arco. Si $B, B' \in C(A, X)$, entonces $B \setminus B'$ es conexo.*

Demostración.
Supongamos que $B \setminus B'$ es no conexo.

Consideremos K y K' componentes conexas de $B \setminus B'$ tales que $K \cap K' = \emptyset$. Notemos que K y K' son cerrados en $B \setminus B'$. Por otro lado, por el *Corolario 5.9 de [16]*, se sigue que $K \cup B'$ y $K' \cup B'$ son continuos, además $A \subset K \cup B'$ y $A \subset K' \cup B'$, por lo que tenemos que son elementos de $C(A, X)$. Como $K \cap K' = \emptyset$, se sigue que $K \cup B' \not\subset K' \cup B'$ y $K' \cup B' \not\subset K \cup B'$, es decir, $K \cup B'$ y $K' \cup B'$ no son comparables en $C(A, X)$, por el *Lema 2.9* es una contradicción.

Concluimos que $B \setminus B'$ es un conjunto conexo. □

Lema 2.11. *Sean X un continuo no degenerado, $n \in \mathbb{N}$. Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ son dos familias en $C(X)$, tales que:*

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$;

b) $A_i \subsetneq B_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; y

c) $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ es un arco que une a A_i con B_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada s con $0 \leq s < \delta$ y $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

DEMOSTRACIÓN.
Observemos que X es normal por ser metrizable, entonces existe U_i abierto en X tal que $A_i \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Por otro lado, como α_i es continua, existe $\delta_i > 0$ tal que $\alpha_i([0, \delta_i)) \subset \langle U_i \rangle$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideramos $\delta = \text{mín}\{\delta_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Si $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $|s| \leq \delta$, entonces $\alpha_i(s) \in \langle U_i \rangle$ y $\alpha_j(s) \in \langle U_j \rangle$, se sigue que $\alpha_i(s) \subset U_i \setminus U_j$ y $\alpha_j(s) \subset U_j \setminus U_i$, de tal manera que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$.

Con lo cual concluimos lo deseado. □

Lema 2.12. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$ propio tal que $C(A, X)$ es un arco. Si $B \in C(A, X)$, entonces $Fr(B) \in C(X)$.*

DEMOSTRACIÓN.
Sabemos que la frontera de B es un cerrado en X. Bastará con probar que $Fr(B)$ es conexo.

Para ello, supongamos que $Fr(B)$ es no conexo, entonces existen K_1 y K_2 componentes conexas de $Fr(B)$ tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Luego, por el *Lema 2.10*, $X \setminus B$ es conexo y así $\overline{X \setminus B} \in C(X)$. Consideramos $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a K_i con $\overline{X \setminus B}$, $i \in \{1, 2\}$.

Observemos que, para cada $s \in (0, 1]$, tenemos que $B \cup \alpha_i(s) \in C(X)$, ya que $K_i \subset B \cap \alpha_i(s)$ con $i \in \{1, 2\}$ y $\alpha_i(s) \setminus B \neq \emptyset$, porque de lo contrario, si $s \in (0, 1]$ tal que $\alpha_i(s) \setminus B = \emptyset$ se sigue que $\alpha_i(s) \subset B$, es decir, $K_i \subset \alpha_i(s) \subset B$ y $K_i \subset \alpha_i(s) \subset \overline{X \setminus B}$ para $i \in \{1, 2\}$, de tal forma que $\alpha_i(s) \subset Fr(B)$, pero esto sucede siempre y cuando $K_i = \alpha_i(s)$, o equivalentemente, si $s = 0$, lo cual contradice la elección de s. De tal manera que $\alpha_i(s) \setminus B \neq \emptyset$.

Más aún, por el *Lema 2.11*, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset$. Se sigue que $B \cup \alpha_1(\delta)$ y $B \cup \alpha_2(\delta)$ son elementos de $C(A, X)$ que no son comparables, lo cual, por el *Lema 2.9*, es una contradicción ya que $C(A, X)$ es un arco.

Finalmente tenemos que $Fr(B)$ es conexo, y así $Fr(B) \in C(X)$. $\square$

Definición 2.13. *Dados X un continuo, B un subcontinuo de X y $n \in \mathbb{N}$, B es un* **n-odo** *en X si existe $A \in C(B)$ tal que $B \setminus A$ tiene por lo menos n componentes. Más aún, decimos que A es un núcleo del n-odo B.*

Recordando la definición de *n-celda* (*Definición 1.36*) y usando la *Definición 2.13*, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.14. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si p pertenece a algún núcleo de un n-odo en X, entonces $C(p, X)$ contiene una n-celda.*

Demostración.
Sea A un núcleo de B un n-odo en X, tal que $p \in A$. Sean $K_1, K_2, \ldots, K_n$ componentes de $B \setminus A$. Luego por el *Corolario 5.9 de [16]*, cada conjunto $A \cup K_i$ es un subcontinuo de X tal que $p \in A \cup K_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por el *Teorema 1.93*, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ que une a A con $A \cup K_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definimos $\gamma : [0, 1]^n \to C(X)$ una función dada por:

$$\gamma((t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n). \tag{2.1}$$

Como $\alpha_i(t_i) \in C(X)$ y $A \subset \alpha_i(t_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $\gamma((t_1, t_2, \ldots, t_n))$ es un subcontinuo de X. De tal forma que γ está bien definida. Veremos que γ es un homeomorfismo en su imagen en $C(X)$.

i) γ es continua.

Consideremos la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ de puntos de $[0, 1]^n$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$, donde $x \in [0, 1]^n$. Ahora, escribimos $x_m = (t_1^{(m)}, t_2^{(m)}, \ldots, t_n^{(m)})$ y $x = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} t_i^{(m)} = t_i$. Como cada α_i es continua, se sigue que $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_i(t_i^{(m)}) = \alpha_i(t_i)$. Luego, por el *Lema 1.85*, se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} (\alpha_1(t_1^{(m)}) \cup \alpha_2(t_2^{(m)}) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n^{(m)}) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n)$, es decir, $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma(x_m) = \gamma(x_m)$.

Por esto, γ es continua.

ii) γ es inyectiva.

Consideremos dos puntos diferentes de $[0,1]^n$, digamos $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Entonces existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $s_l < t_l$ o $t_l < s_l$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_l < s_l$. Como α_l es un arco ordenado tenemos que $\alpha_l(t_l) \subsetneq \alpha_l(s_l)$. De tal forma que consideramos $x \in \alpha_l(s_l) \setminus \alpha_l(t_l)$. Entonces $x \in (A \cup K_l) \setminus \alpha_l(t_l) \subset (A \cup K_l) \setminus A = K_l$.

Si $i \neq l$, $K_i \cap K_l = \emptyset$, de manera que $x \in K_l \setminus (A \cup K_i) \subset K_l \setminus \alpha_i(t_i)$. Por esto, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(t_i)$.

Por otro lado, $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(s_i)$. Se sigue que:

$$\gamma((t_1, t_2, \ldots, t_n)) \neq \gamma(s_1, s_2, \ldots, s_n)). \tag{2.2}$$

Así, γ es inyectiva.

Ahora, como $\gamma : [0,1]^n \to (\gamma([0,1]^n))$ es una biyección continua entre un compacto y un espacio de Hausdorff, se sigue que γ es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y $\gamma([0,1]^n) \subset C(p,X)$. De tal forma que $\gamma([0,1]^n)$ es una n-celda contenida en $C(p,X)$. $\square$

Teorema 2.15. *Sean X un continuo y $N \in \mathbb{N}$ tal que conjunto $\mathcal{PC} = \{p \in X : C(p,X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable y para cada $p \in X$, $\dim(C(p,X)) < N$. Entonces todo subcontinuo propio y no degenerado de X es descomponible.*

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que X tiene un subcontinuo propio, no degenerado e indescomponible A. Entonces, por la *Proposición 1.54*, A tiene una cantidad no numerable de composantes.

Notemos que, por la *Observación 1.49*, existe $B \subset A$ tal que B es no numerable; $A = \displaystyle\bigcup_{p \in B} \Sigma_p^A$ y $\Sigma_p^A \cap \Sigma_q^A = \emptyset$ si $p, q \in B$ y $p \neq q$.

Ahora, sean $x_1, x_2, \ldots, x_N$ puntos diferentes en X los cuales se encuentran en diferentes composantes de A y tales que $C(x_i, X)$ no tiene puntos de corte para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Observemos que $A \in C(x_i, X)$ y A no es punto de corte de $C(x_i, X)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Sea $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, veamos que lo siguiente se cumple:

i) Por el *Lema 2.7*, existe $B_i \in C(x_i, X)$ tal que $B_i \not\subset A$ y $A \not\subset B_i$, dado que $x_i \in A \cap B_i$, sea K_i la componente de $A \cap B_i$ tal que contiene a x_i.

$ii)$ $K_i \subsetneq A$ y $K_i \subsetneq B_i$, en efecto, $K_i \subset A \cap B_i \subset A$, si $K_i = A$, entonces $A \cap B_i = B_i$, es decir, $A \subset B_i$, lo cual contradice $i)$. De forma análoga, $K_i \subsetneq B_i$.

$iii)$ Por definición de composantes, $K_i \subset \Sigma^A_{x_i}$.

$iv)$ Si $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e $i \neq j$, tenemos que $K_i \cap K_j = \emptyset$, ya que $\Sigma_{x_i} \cap \Sigma_{x_j} = \emptyset$.

$v)$ Por $ii)$, consideremos $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a K_i con B_i.

Luego, por el *Lema 2.11*, existe $\delta > 0$ tal que si $|s| \leq \delta$, $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$ con $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e $i \neq j$. Sea $Y = A \cup (\bigcup_{i=1}^{N} \alpha_i(\delta))$. Notemos que $Y \in C(X)$, ya que $A \cap \alpha_i(\delta) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

Por otro lado, veamos que $\alpha_i(\delta) \setminus A \neq \emptyset$, en efecto, si $\alpha_i(\delta) \setminus A = \emptyset$, entonces $\alpha_i(\delta) \subset A$. También $K_i \subset \alpha_i(\delta) \subset B_i$. Se sigue que $K_i \subset \alpha_i(\delta) \subset A \cap B_i$, es decir, $\alpha_i(\delta)$ es un conjunto conexo que contiene a x_i se sigue que $\alpha_i(\delta) = K_i$, de aquí que $\delta = 0$, lo cual es una contradicción.

Veamos que $\overline{(\alpha_i(\delta) \setminus A)} \cap (\alpha_j(\delta) \setminus A) = \emptyset$ y $(\alpha_i(\delta) \setminus A) \cap \overline{(\alpha_j(\delta) \setminus A)} = \emptyset$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e $i \neq j$. Notemos que $\overline{(\alpha_i(\delta) \setminus A)} \cap (\alpha_j(\delta) \setminus A) \subset \alpha_i(\delta) \cap \alpha_j(\delta) = \emptyset$, se sigue que $\overline{(\alpha_i(\delta) \setminus A)} \cap (\alpha_j(\delta) \setminus A) = \emptyset$. De forma análoga se prueba que $(\alpha_i(\delta) \setminus A) \cap \overline{(\alpha_j(\delta) \setminus A)} = \emptyset$.

Observemos que $Y \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N} (\alpha_i(\delta) \setminus A)$, entonces $Y \setminus A$ tiene por lo menos N componentes, es decir, Y es un $N-$odo con A un núcleo de él. Entonces para cada $p \in A$, se tiene que $C(p, X)$ contiene una $N-$celda. Lo cual es una contradicción, ya que $\dim(C(x, X)) < N$ para cada $x \in X$. Concluimos que A no puede existir. $\square$

Teorema 2.16. *Sean X un arco con extremos x y y. Consideremos $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

a) Si $p \in \{x, y\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco.

b) Si $p \notin \{x, y\}$, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

Demostración.
$a)$ Consideremos X y $p \in X$ con las hipótesis dadas. Probaremos que $C(p, X)$ es un arco.

Por el *Lema 2.3*, bastará con probar para $X = I$ y $p = 0$. Mostraremos que $C(0, I)$ es un arco. Sean $A, B \in C(0, I)$, se sigue que existen $a, b \in I$ tales que $A = [0, a]$ y $B = [0, b]$, de tal forma que si $a \leq b$, entonces $A \subseteq B$, de forma similar si $b \leq a$ entonces $B \subseteq A$. Por el *Lema 2.9*, concluimos que $C(0, I)$ es un arco.

b) Veamos que $C(p, X)$ es una 2-celda.

De forma análoga a a), bastará con mostrar el caso en que $X = I$ y $p \in (0, 1)$. Sea $f : [0, p] \times [p, 1] \to C(p, I)$ la función, definida de la siguiente forma:

$$f((x, y)) = [x, y]. \tag{2.3}$$

Veamos que f es un homeomorfismo, para ello, probaremos que f es una biyección continua entre el espacio compacto $[0, p] \times [p, 1]$ y el espacio de Hausdorff $C(p, I)$. Demostremos lo siguiente:

i) f es inyectiva.
Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, p] \times [p, 1]$ con $f((x_1, y_1)) = f((x_2, y_2))$, entonces $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$, es decir, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, se sigue que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. De esta manera f es inyectiva.

ii) f es sobreyectiva.
Sea $A \in C(p, I)$ entonces existen $x, y \in I$ tales que $A = [x, y]$. Como $p \in A$ se tiene que $0 \leq x \leq p \leq y \leq 1$, entonces $(x, y) \in [0, p] \times [p, 1]$ y $f((x, y)) = A$. Entonces f es sobreyectiva.

iii) f es continua.
Sean $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, p] \times [p, 1]$ y $(x, y) \in [0, p] \times [p, 1]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} ((x_n, y_n)) = ((x, y))$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = f((x, y))$.

Observemos que $f((x_n, y_n)) = [x_n, y_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f((x, y)) = [x, y]$.

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geq N_x$, $|x_n - x| < \varepsilon$ y para $m \geq N_y$, $|y_n, -y| < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_x, N_y\}$. Se sigue que, para $\varepsilon > 0$, si $n \geq N$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$ y $|y_n - y| < \varepsilon$. Probemos lo siguiente:

iv) $H([x_n, y_n], [x, y]) < \varepsilon$, si $n \geq N$ y H es la métrica de Hausdorff.

Por la *Proposición 1.75*, bastará con probar que $[x, y] \subset N([x_n, y_n], \varepsilon)$ y $[x_n, y_n] \subset N([x, y], \varepsilon)$. Veamos que $[x, y] \subset N([x_n, y_n], \varepsilon)$. Sea $q \in [x, y]$.

Caso I. Si $q \in [x_n, y_n]$, concluimos lo deseado.

Caso II. $q \notin [x_n, y_n]$.

Se sigue que $q < x_n$ o $y_n < q$. Entonces tenemos los siguientes subcasos.

II,1) Si $q < x_n$, entonces $x \leq q < x_n$. Como $|x_n - x| < \varepsilon$, se sigue que $|x_n - q| < \varepsilon$, es decir, $q \in N([x_n, y_n], \varepsilon)$.

II,2) Si $y_n < q$, entonces $y_n \leq q < x$. Como $|y_n - y| < \varepsilon$, se sigue que $|y_n - q| < \varepsilon$, es decir, $q \in N([x_n, y_n], \varepsilon)$.

De forma análoga, $[x_n, y_n] \subset N([x, y], \varepsilon)$. De está forma queda demostrado iv).

Se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} [x_n, y_n] = [x, y] = f(x, y)$ en $C(p, I)$. Por eso f es continua.

De i), ii) y iii), tenemos que f es una biyección continua, y así, un homeomorfismo. Concluimos que $C(p, I)$ es una 2-celda. $\square$

Teorema 2.17. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.*

Demostración.
Primero, probaremos que para $X = S^1$, $C(S^1)$ es homeomorfo a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para ello, sea $h : C(S^1) \to D$ la función definida de la siguiente forma:

$$h(A) = \begin{cases} (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A) & \text{si } A \in C(S^1) \setminus \{S^1\}; \\ (0, 0) & \text{si } A = S^1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Donde $l(A)$ es la longitud de A y $m(A)$ es el punto medio de A. Observemos que:

i) Si A es degenerado, es decir, si $A = \{(x, y)\}$ con $(x, y) \in S^1$, entonces $l(A) = 0$, y así $h(A) = (x, y)$.

ii) Si A es un arco, entonces $h(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$.

iii) Si $A = S^1$, entonces $h(A) = (0, 0)$.

iv) h está bien definida, ya que cada arco en S^1 tiene un único punto medio y longitud.

Veamos que h es una biyección continua entre en el espacio compacto $C(S^1)$ y el de Hausdorff D, de tal manera que h es un homeomorfismo. Para ello probemos lo siguiente:

v) h es inyectiva.
Observemos que, si $A, B \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$, entonces se tienen los siguientes subcasos:

v,1) Si A y B son arcos con $A \neq B$, entonces tenemos que $l(A) \neq l(B)$ o $m(A) \neq m(B)$.

Notemos que, si $l(A) \neq l(B)$, entonces $l(A) < l(B)$ o $l(B) < l(A)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l(A) < l(B)$, se sigue que $1 - \frac{l(B)}{2\pi} < 1 - \frac{l(A)}{2\pi}$, de tal manera que $(1 - \frac{l(B)}{2\pi})m(B) \neq (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$, es decir, $h(A) \neq h(B)$.

Por otro lado, si $m(A) \neq m(B)$. Denotemos $m(A) = (a_1, a_2)$ y $m(B) = (b_1, b_2)$, con $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S^1$, se sigue que $a_1 \neq b_1$ o $a_2 \neq b_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 \neq b_1$ y $l(A) = l(B)$, tenemos que:

$$(1 - \frac{l(A)}{2\pi})a_1 \neq (1 - \frac{l(B)}{2\pi})b_1 \tag{2.5}$$

es decir, $(1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A) \neq (1 - \frac{l(B)}{2\pi})m(B)$, así $h(A) \neq h(B)$.

v,2) Si $A = \{(x, y)\}$ y B es un arco en S^1, con $A \neq B$.

Observemos que $||h(A)|| = ||(x, y)|| = 1$, ya que $(x, y) \in S^1$. Por otra parte, como B es un arco,

$$||h(B)|| = ||(1 - \frac{l(B)}{2\pi})m(B)|| = (1 - \frac{l(B)}{2\pi})||m(B)||. \tag{2.6}$$

Pero, $||m(B)|| = 1$, se sigue que $||h(B)|| = (1 - \frac{l(B)}{2\pi}) < 1$. Concluimos que $h(A) \neq h(B)$.

v,3) Sean $A \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$ y $B = S^1$.

Notemos que $||h(A)|| = (1 - \frac{l(A)}{2\pi}) > 0$, ya que $l(A) < 2\pi$. Ya que $||h(B)|| = 0$, se concluye que $h(A) \neq h(B)$.

Concluimos que h es inyectiva.

vi) h es sobreyectiva.

Veamos que, para cada punto (x, y) en D, existe un $A \in C(S^1)$, tal que $h(A) = (x, y)$. Sea $(x, y) \in D$. Entonces tenemos que $0 \leq ||(x, y)|| \leq 1$. Observemos que $||(x, y)|| = 1 - \frac{l(A)}{2\pi}$. De tal manera que tenemos los siguientes subcasos:

vi,1) Si $||(x, y)|| = 0$, entonces $1 - \frac{l(A)}{2\pi} = 0$, pero esto es si, y sólo si, $l(A) = 2\pi$ de tal forma que considerando $A = S^1$, se sigue que $h(A) = (0, 0)$.

vi,2) Si $||(x, y)|| = 1$, entonces $1 - \frac{l(A)}{2\pi} = 1$, esto se cumple siempre y cuando, $l(A) = 0$, así consideramos $A = \{(x, y)\} \in C(S^1)$, de tal forma que $h(A) = (x, y)$.

vi,3) Ahora consideremos $(x, y) \in D$, tal que $0 < ||(x, y)|| < 1$. Se sigue que $0 < 1 - \frac{l(A)}{2\pi} < 1$, de tal manera que $0 < l(A) < 2\pi$. Se sigue que $A \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$ y es no degenerado. Sea M el rayo con punto inicial en $(0, 0)$ tal que $(x, y) \in M$. Definamos x' y y' tales que $M \cap S^1 = \{(x', y')\}$ con $||(x', y')|| = 1$. Consideremos A de tal forma que $0 < l(A) < 2\pi$ y $m(A) = (x', y')$. Obtenemos que $h(A) = (x, y)$. Concluimos que h es sobreyectiva.

vii) h es continua.

Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(S^1)\setminus\{S^1\}$ y $A \in C(S^1)\setminus\{S^1\}$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Supongamos que x_n y y_n son los puntos de extremos de A_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, si A_n es degenerado, entonces $x_n = y_n$. De igual manera denotemos por x y y a los puntos extremos de A, de tal forma que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, lo cual se prueba de forma análoga a lo hecho en *Teorema 2.16* para probar la continuidad de la función f. De esto, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} l(A_n) = l(A)$. Es decir, l y m son funciones continuas en $C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Se sigue que h es continua en $C(S^1) \setminus \{S^1\}$.

Falta ver que h es continua en S^1. Mostraremos que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(S^1) \setminus \{S^1\}$ que converge a S^1. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} l(A_n) = l(S^1) = 2\pi$. De tal manera que $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n) = h(S^1) = (0, 0)$. De tal manera que h es continua en $C(S^1)$.

Por lo hecho en *iv)*, *v)* y *vi)*, tenemos que h es una biyección continua entre el compacto $C(S^1)$ y el espacio de Hausdorff D. Por lo que $C(S^1)$ es homeomorfo a D.

Probaremos que $C(p, X)$ es una $2-$celda.

Por el *Lema 2.3*, bastará con probar el resultado para $X = S^1$ y $p = (0, 1)$. Notemos que $h|_{C(p,S^1)}$ es un homeomorfismo entre $C(p, S^1)$ y $h(C(p, S^1))$. Notemos que $h(C(p, S^1))$ es la región limitada por $S = B_1 \cup B_2 \cup \{h(\{p\})\} \cup \{h(S^1)\}$, donde $B_1 = H(\{A \in C(X) : A$ es un arco, p es extremo de A y si $q = (cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es el punto extremo de A distinto de p, entonces $A = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi) : \phi \in [0, \theta]\})$ y $B_2 = H(\{A \in C(X) : A$ es un arco y p es punto extremo izquierdo de A y si $q = (cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es el punto extremo de A distinto de p, entonces $A = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi) : \phi \in [\theta, 1]\})$. Luego, S es una curva cerrada simple. Y por tanto, por el *Teorema 1.37*, $h(C(p, S^1))$ es una $2-$ celda. $\square$

Lema 2.18. *Sea X un continuo. Entonces X es hereditariamente indescomponible si, y sólo si, $C(p, X)$ es un arco, para cada $p \in X$.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Supongamos que existe $p \in X$ tal que $C(p, X)$ no es un arco, entonces por el

Lema 2.9, existen $B_1, B_2 \in C(p, X)$ tales que $B_1 \not\subset B_2$ y $B_2 \not\subset B_1$. Notemos que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, ya que $p \in B_1 \cap B_2$, se sigue que $B_1 \cup B_2 \in C(X)$, es decir, $B_1 \cup B_2$ es descomponible, de tal forma que X no es hereditariamente indescomponible.

$\Leftarrow$] Supongamos que $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$. Sea $Y = A \cup B$ con $Y \in C(X)$ y $A, B \in C(Y)$. Observemos que $A \cap B \neq \emptyset$, ya que de lo contrario Y sería no conexo. Consideremos $p \in A \cap B$, por el *Lema 2.9*, tenemos que A y B son comparables, se sigue que Y es indescomponible. Concluimos que X es hereditariamente indescomponible. $\square$

Una pregunta que surge naturalmente es si la estructura de los hiperespacios de tipo $C(p, X)$ caracteriza al continuo X. En respuesta a esta cuestión, introducimos el concepto de continuo *arco-similar*.

Definición 2.19. *Dados X un continuo y $a, b \in X$ distintos. La terna (X, a, b) es* **arco similar** *si $C(p, X)$ es un arco para $p \in \{a, b\}$ y $C(p, X)$ es una $2-$celda siempre que $p \notin \{a, b\}$. Cuando no haya confunsión sobre el espacio y los puntos con los que se trabaja sólo diremos que X es arco similar.*

Observación 2.20. *Por lo hecho en el Teorema 2.16, tenemos que los arcos son arco-similares, pero el inverso no se cumple en general, para demostrar esto primero veamos los siguientes resultados.*

Definición 2.21. *Dados X un continuo y $p \in X$, p es un* **punto extremo** *del continuo X, si para cualesquiera $A, B \in C(p, X)$, tenemos que A y B son comparables.*

Observación 2.22. *Dados X un continuo y $p \in X$. Entonces p es un punto extremo de X si, y sólo si, $C(p, X)$ es un arco.*

La prueba de dicha observación es una consecuencia inmediata del *Lema 2.9.*

Teorema 2.23. *Sean X un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios no degenerados son arcos y $p \in X$. Tenemos que las siguientes condiciones se cumplen:*

a) Si p es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es un arco;

b) Si p no es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es una $2-$celda.

Demostración.
a) Es una consecuencia inmediata de la *Observación 2.22.*

b) Dado que p no es punto extremo de X, consideremos $B, B' \in C(p, X)$ los cuales no son comparables. Probemos lo siguiente:

$i)$ Existen $A, A^{'} \in C(p, X) \setminus \{p\}$ tales que $A \cap A^{'} = \{p\}$.

Notemos que $B, B^{'} \in C(p, X) \setminus \{X, p\}$. Consideremos $B \cup B^{'}$, observemos que, por la indescomponibilidad de X, $B \cup B^{'} \in C(p, X) \setminus \{X\}$, se sigue que $B \cup B^{'}$ es un arco. Sean a y a' los puntos extremos de $B \cup B^{'}$. Consideremos $h : [0, 1] \to B \cup B^{'}$ un homeomorfismo tal que $h(0) = a$ y $h(1) = a'$. Notemos que existe un único $t_p \in (0, 1)$ tal que $h(t_p) = p$. Denotemos $A = h([0, t_p])$ y $A^{'} = h([t_p, 1])$. Se tiene que A y $A^{'}$ son arcos en X. Por otro lado:

$$A \cap A^{'} = h([0, t_p]) \cap h([t_p, 1]) = h([0, t_p] \cap [t_p, 1]) = \{h(t_p)\} = \{p\}. \tag{2.7}$$

De esta forma queda demostrado $i)$.

$ii)$ Para cada $C \in C(p, X) \setminus \{X\}$ construiremos subcontinuos M_C y N_C de X, tales que $C = N_C \cup M_C$, $M_C \cap N_C = \{p\}$ y $M_C \cap A^{'} = \{p\} = N_C \cap A$.

En efecto, sea $C \in C(p, X)$. Notemos que $A \cup A^{'} \cup C$ es un arco en X cuyos extremos denotamos por b y b'. Se sigue que una y sólo una de las condiciones siguientes se cumple:

ii,1) $A \subset A^{'} \cup C$;

ii,2) $A^{'} \subset A \cup C$;

ii,3) $C \subset A \cup A^{'}$.

Supongamos que $A \subset A^{'} \cup C$. Denotemos por c y c' los extremos del arco C. Notemos que $A \cup A^{'} \cup C = A^{'} \cup C$, sean b y b' los extremos de $A^{'} \cup C$, entonces $b, b' \in \{a', c, c'\}$ y $\{b, b'\} \cap \{c, c'\} \neq \emptyset$ con a' un extremo de $A^{'}$. Sea $h : [0, 1] \to A^{'} \cup C$ tal que $h(0) = b$ y $h(1) = b'$. Observemos que existen $t_p \in (0, 1)$ tal que $h(t_p) = p$ y $x \in (0, t_p]$ tal que $h(x) = c$ o $h(x) = c'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h(x) = c$. Se sigue que $h(1) = b' = c'$. Denotemos por $N_C = h([x, t_p])$ y $M_C = h([t_p, 1])$. Tenemos que $N_C, M_C \in C(p, X) \setminus \{X\}$. Luego:

$$C = h([x, 1]) = h([x, t_p] \cup [t_p, 1]) = h([x, t_p]) \cup h([t_p, 1]) = N_C \cup M_C, \text{ y;} \tag{2.8}$$

$$N_C \cap M_C = h([x, t_p]) \cap h([t_p, 1]) = \{h(t_p)\} = \{p\}. \tag{2.9}$$

Notemos que $A^{'} = h([0, t_p])$ y $A = h([t_p, y])$ con $y \in [t_p, 1]$ y $h(y) = a$. Luego:

$$M_C \cap A^{'} = h([t_p, 1]) \cap h([0, t_p]) = \{h(t_p)\} = \{p\}. \tag{2.10}$$

$$N_C \cap A = h([t_p, y]) \cap h([x, t_p]) = \{h(t_p)\} = \{p\}. \tag{2.11}$$

De forma análoga se prueba que existen M_C y N_C si $A^{'} \subset A \cup C$.

Ahora, si $C \subset A \cup A^{'}$. Sean c y c' los puntos extremos de C. Consideremos $h : [0,1] \to A \cup A^{'}$ un homeomorfismo tal que $h(0) = a$ y $h(1) = a'$, con a y a' extremos de $A \cup A^{'}$. Notemos que existen $t_c, t_{c'} \in [0,1]$ distintos y $t_p \in (0,1)$ tales que $h(t_c) = c$, $h(t_{c'}) = c'$ y $h(t_p) = p$.

Denotemos $M_C = h([t_c, t_p])$, $N_C = h([t_p, t_{c'}])$, $A = h([0, t_p])$ y $A^{'} = h([t_p, 1])$. De manera similar a las *Ecuaciones* (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), se prueba que, $C = M_C \cup N_C$, $M_C \cap N_C = \{p\}$, $M \cap A^{'} = \{p\}$ y $N \cap A = \{p\}$.
Concluimos que se cumple *ii*).

iii) Si $C, C^{'} \in C(p, X) \setminus \{X\}$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

iii,1) M_C y $M_{C'}$ son comparables;

iii,2) N_C y $N_{C'}$ son comparables;

iii,3) Si $C \subset C^{'}$, entonces $M_C \subset M_{C'}$ y $N_C \subset N_{C'}$;

iii,4) $M_C \cap N_{C'} = \{p\} = M_{C'} \cap N_C$.

Veamos que se cumple *iii*,1), es decir, que M_C y $M_{C'}$ son comparables. Para ello, notemos que $M_C \cup M_{C'}$ es un arco que continen a p. Además, por la construcción de M_C y $M_{C'}$, tenemos que $(M_C \cup M_{C'}) \cap A^{'} = \{p\}$. Por otro lado, $(M_C \cup M_{C'}) \cap A^{'} \in C(p, X) \setminus \{X\}$ tal que es un arco, se sigue que p es un punto extremo de los arcos $M_C \cup M_{C'}$ y $A^{'}$. Luego, por el *Teorema 2.16* y como $M_C, M_{C'} \in C(p, M_C \cup M_{C'})$, concluimos que M_C y $M_{C'}$ son comparables.

De forma análoga se prueba que *iii*,2) se cumple, es decir, que N_C y $N_{C'}$ son comparables.

Ahora, mostremos que se cumple *iii*,3). Supongamos que $C \subset C^{'}$. Como $C^{'}$ es un arco, existe $h : [0,1] \to C^{'}$ un homeomorfismo tal que $h(0) = b$ y $h(1) = b^{'}$, con b y $b^{'}$ puntos extremos de $C^{'}$. Además, existe $t_p \in [0,1]$ tal que $h(t_p) = p$. Denotemos $M_{C'} = h([0, t_p])$ y $N_{C'} = h([t_p, 1])$. Luego, como $C \subset C^{'}$, existen $t_c \in [0, t_p]$ y $t_{c'} \in [t_p, 1]$ tales que $h(t_c) = c$ y $h(t_{c'}) = c'$, con c y c' puntos extremos de C. Notemos que $M_C = h([t_c, t_p])$ y $N_C = h([t_p, t_{c'}])$. Veamos que $M_C \subset M_{C'}$ y $N_C \subset N_{C'}$. Observemos que $[t_{c'}, t_p] \subset [0, t_p]$, entonces, $h([t_{c'}, t_p]) \subset h([0, t_p])$, es decir, $M_C \subset M_{C'}$. De forma similar se prueba que $N_C \subset N_{C'}$.

Finalmente, probemos que se cumple iii,4), es decir, $M_C \cap N_{C'} = \{p\} = M_{C'} \cap N_C$.

Para ver que $M_C \cap N_{C'} = \{p\}$. Denotemos por $C'' = C \cap C'$. Observemos que $C'' \in C(p,X)\setminus\{X\}$, además, $C \subset C''$ y $C' \subset C''$, se sigue que, por iii,3), $M_C \subset M_{C''}$ y $N_{C'} \subset N''$. Luego:

$$\{p\} \subset M_C \cap N_{C'} \subset M_{C''} \cap N_{C''} = \{p\}. \tag{2.12}$$

Concluimos que $M_C \cap N_{C'} = \{p\}$.

De forma similar podemos ver que $M_{C'} \cap N_C = \{p\}$.

Por esto, se cumple iii).

iv) Si $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $C(p,X) \setminus \{X\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$, con $C \in C(p,X) \setminus \{X\}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} M_{C_n} = M_C$ y $\lim\limits_{n\to\infty} N_{C_n} = N_C$.

Notemos que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} (M_{C_n} \cup N_{C_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} M_{C_n} \cup \lim\limits_{n\to\infty} N_{C_n}$, se sigue que, $\lim\limits_{n\to\infty} M_{C_n} \cup \lim\limits_{n\to\infty} N_{C_n} = M_C \cup N_C$.

Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

iv,1) $W = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n) \cup C \in C(p,X) \setminus \{X\}$.

Veamos que $W \in C(p,X)$. Notemos que, como $p \in C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $p \in C$, se sigue que W es conexo. Veamos que W es compacto, para ello bastará con probar que es cerrado en X.

Sea $\{x_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de W. Supongamos que $\lim\limits_{s\to\infty} x_s = x$, probaremos que $x \in W$. Tenemos los siguientes subcasos:

iv,1,1) Si $x_s \in C_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y para casi todos los s, $x \notin C_n$, por ser C_n cerrado tenemos que $x \in W$.

iv,1,2) Si $x_s \in C_s$ para cada $s \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{s\to\infty} x_s \subset \lim\limits_{s\to\infty} C_s$ implica que $\{x\} \subset C$, es decir, $x \in C$ y por ello $x \in W$.

Como $p \in W$, tenemos que $W \in C(p,X)$. Falta probar que $W \in C(p,X) \setminus \{X\}$.

Observemos que, existe U un abierto en X tal que $C \subset U \subsetneq \overline{U} \subset X$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $C_n \in \langle U \rangle$. De tal manera que $Z = (\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_n) \cup C \in$

$C(p,X)\setminus\{X\}$. Denotemos por $Z' = \bigcup_{n=1}^{N-1} C_n$. Observemos que $Z' \in C(p,X)\setminus\{X\}$. Se sigue que $W = Z \cup Z' \in C(p,X)\setminus\{X\}$ ya que X es indescomponible.

iv,2) Si $W = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup C$, entonces, por la afirmación *iii*,3) $M_{C_n} \subset M_W$ y $N_{C_n} \subset M_W$. En consecuencia:

iv,2,1) $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \subset M_W$ y $\lim_{n\to\infty} N_{C_n} \subset N_W$.

iv,2,2) Como $M_W \cap N_W = \{p\}$ y $p \in M_{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \cap N_C = \{p\}$ y $\lim_{n\to\infty} N_{C_n} \cap M_C = \{p\}$.

iv,3) $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} = M_C$ y $\lim_{n\to\infty} N_{C_n} = N_C$.

Veamos primero que $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} = M_C$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \cup \lim_{n\to\infty} N_{C_n} = M_C \cup N_C$. Se sigue que:

$$M_C = (\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \cup \lim_{n\to\infty} N_{C_n}) \cap M_C = \lim_{n\to\infty} M_{C_n} \cap M_C. \tag{2.13}$$

De esto, tenemos que $M_C \subset \lim_{n\to\infty} M_{C_n}$.

Ahora, veamos que $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \subset M_C$. Para ello, supongamos que existe $x \neq p$ tal que $x \in (\lim_{n\to\infty} M_{C_n}) \setminus M_C$. Se sigue que $x \in N_C \cap \lim_{n\to\infty} M_{C_n} = \{p\}$, lo cual contradice la elección de p. Por esto, $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} \subset M_C$.

De forma similar se prueba que $\lim_{n\to\infty} N_{C_n} = N_C$.

De esta forma queda demostrado *iv*).

Sea μ una función de Whitney para $C(X)$ y definamos $f : C(p,X)\setminus\{X\} \to I^2$ de la siguiente manera:

$$f(C) = (\mu(M_C), \mu(N_C)). \tag{2.14}$$

Veamos que la función f, cumple lo siguiente:

v) f es inyectiva.

Sean $C, C' \in C(p,X)\setminus\{X\}$. Supongamos que $f(C) = f(C')$, es decir, $(\mu(M_C), \mu(N_C)) = (\mu(M_{C'}), \mu(N_{C'}))$, se sigue que $\mu(M_C) = \mu(M_{C'})$ y $\mu(N_C) = \mu(N_{C'})$. Luego, por la afirmación *iii*), $M_C = M_{C'}$ y $N_C = N_{C'}$, tenemos que $C = C'$. Concluimos que

f es inyectiva.

vi) f es continua.

Sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(p,X)\setminus\{X\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ con $C \in C(p,X)\setminus\{X\}$. Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(C_n) = f(C)$.

Notemos que por la continuidad de μ, $\lim\limits_{n\to\infty} f(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mu(M_{C_n}),\mu(N_{C_n})) = (\mu(\lim\limits_{n\to\infty} M_{C_n}),\mu(\lim\limits_{n\to\infty} N_{C_n})) = f(C)$. Concluimos que f es continua.

vii) $f^{-1} : f(C(p,X)\setminus\{X\}) \to C(p,X)\setminus\{X\}$ es continua.

Sea $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $f(C(p,X)\setminus\{X\})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$ con $(x,y) \in (C(p,X)\setminus\{X\})$.

Supongamos que $f(C_n) = (x_n,y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f(C) = (x,y)$. Bastará con demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$.

Para ello, supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = J$ con $J \in C(p,X)$. Se sigue que, $\lim\limits_{n\to\infty} f(C_n)$ $= f(J)$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$. Por esto, $f(J) = f(C)$. Luego, como f es inyectiva, $J = C$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$.

De esta forma queda demostrado *vii*).

viii) Si $(x,y) \in Im(f)$, entonces $[0,x]\times[0,y] \subset Im(f)$.

Para probar *viii*), notemos que, como $(x,y) \in Im(f)$, existe $C \in C(p,X)\setminus\{X\}$ tal que $f(C) = (\mu(M_C),\mu(N_C)) = (x,y)$.

Sea $(x',y') \in [0,x]\times[0,y]$, se sigue que $0 \le x' \le x$ o $0 \le y' \le y$. Así:

$$\mu(\{p\}) \le x' \le \mu(M_C) \text{ y;} \tag{2.15}$$

$$\mu(\{p\}) \le y' \le \mu(N_C). \tag{2.16}$$

Como $\mu|_{C(p,M_C)} : C(p,M_C) \to [0,x]$ es una función continua y $C(p,X)$ es conexo, por el teorema del valor intermedio, existe un elemento $M_{C'} \in C(p,M_C)$ tal que $\mu(M_{C'}) = x'$. De forma similar, existe un elemento $N_{C'} \in C(p,N_C)$ tal que $\mu(N_{C'}) = y'$.

Denotemos $C' = M_{C'} \cup N_{C'}$. Se sigue que $C' \in C(p,X)\setminus\{X\}$ y $f(C') = (\mu(M_{C'}),$ $\mu(N_{C'})) = (x',y')$. Por esto $(x',y') \in Im(f)$. Es decir, $[0,x]\times[0,y] \subset Im(f)$.

Así *viii*) queda demostrado.

Denotemos:

$$t = \sup\{\mu(M_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\} \text{ y;} \tag{2.17}$$

$$s = \sup\{\mu(N_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}. \tag{2.18}$$

ix) $t \notin \{\mu(M_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$ o $s \notin \{\mu(N_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$.

Supongamos que $t \in \{\mu(M_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$ y que $s \in \{\mu(N_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$, tenemos que existen $C_1, C_2 \in C(p,X) \setminus \{X\}$ tales que $\mu(M_{C_1}) = t$ y $\mu(N_{C_2}) = s$.

Denotemos por $C = M_{C_1} \cup N_{C_2}$. Tenemos que $C \in C(p,X) \setminus \{X\}$. Además $M_C = M_{C_1}$ y $N_C = N_{C_2}$. Por el *Corolario 1.39*, existe $C' \in C(p,X)$ tal que $C \subsetneq C' \subsetneq X$. Notemos que $C' \in C(p,X) \setminus \{X\}$.

Por otro lado, por la afirmación *iii*,3) de este teorema, tenemos que $M_C \subsetneq M_{C'}$ y $N_C \subsetneq N_{C'}$. Se sigue que $\mu(M_C) < \mu(M_{C'})$ o $\mu(N_C) < \mu(N_{C'})$, es decir, $t < \mu(M_{C'})$ o $s < \mu(N_{C'})$. Lo cual contradice la elección de t y s. Así queda demostrado *ix*).

x) Alguna de las siguientes afirmaciones se cumple:

x,1) $Im(f) = [0,t) \times [0,s)$ si $s, t \notin Im(f)$;

x,2) $Im(f) = [0,t] \times [0,s)$ si $t \in Im(f)$;

x,2) $Im(f) = [0,t) \times [0,s]$ si $s \in Im(f)$.

Veamos que, si $s, t \notin Im(f)$, entonces $Im(f) = [0,t) \times [0,s)$. Notemos que, como $s, t \notin Im(f)$, entonces $t \notin \{\mu(M_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$ y $s \notin \{\mu(N_C) : C \in C(p,X) \setminus \{X\}\}$. Probemos lo siguiente:

x,1,1) $Im(f) \subset [0,t) \times [0,s)$.
Sea $(x,y) \in Im(f)$, entonces existe $C \in C(p,X) \setminus \{X\}$, tal que $f(C) = (\mu(M_C), \mu(N_C)) = (x,y)$. Luego, $0 \leq x < t$ y $0 \leq y < s$, tenemos que $(x,y) \in [0,t) \times [0,s)$. Notemos que esta contención se cumple en general.

x,1,2) $[0,t) \times [0,s) \subset Im(f)$.
Sea $(x,y) \in [0,t) \times [0,s)$, se sigue que $0 \leq x < t$ y $0 \leq y < s$, es decir, como $x < t$, existe $C_1 \in C(p,X) \setminus \{X\}$ tal que $x \leq \mu(M_{C_1}) = x'$. De manera análoga, existe $K_2 \in C(p,X) \setminus \{X\}$ tal que $y \leq \mu(N_{K_2}) = y'$.

Sea $C = M_{C_1} \cup N_{C_2}$. Observemos que $f(C) = (x', y')$. Luego, por la afirmación *viii)* de este teorema, $[0, x'] \times [0, y'] \in Im(f)$. Por esto, $(x, y) \in Im(f)$. Concluimos que $Im(f) = [0, t) \times [0, s)$, es decir que se cumple x,1).

Por otro lado, si $t \in Im(f)$, entonces $t \in \{\mu(M_C : C \in C(p, X) \setminus \{X\}\}$, es decir, existe $C_t \in C(p, X) \setminus \{X\}$ tal que $\mu(M_{C_t}) = t$. Mostremos lo siguiente:

x,2,1) $Im(f) \subset [0, t] \times [0, s)$.
Por lo hecho en x,1,1) tenemos que $Im(f) \subset [0, t) \times [0, s) \subset [0, t] \times [0, s)$. Se concluye lo deseado.

x,2,2) $[0, t] \times [0, s) \subset Im(f)$.
Por lo hecho en x,1,2), bastará con probar que $\{(t, r) : r \in [0, s)\} \subset Im(f)$. Sea $(t, y) \in \{(t, r) : r \in [0, s)\} \subset Im(f)$, se sigue que $0 \leq y < s$. Entonces existe, $K_2 \in C(p, X) \setminus \{X\}$ tal que $y \leq \mu(N_{K_2}) = y'$.

Sea $C = M_{C_t} \cup N_{C_2}$. Notemos que $C \in C(p, X) \setminus \{X\}$ y que $f(C) = (t, y')$. Por la afirmación *viii)* de este teorema, $[0, t] \times [0, y'] \in IM(f)$ y así, $(x, y) \in Im(f)$. Concluimos que $Im(f) = [0, t] \times [0, s)$, es decir se cumple x,2).

De forma análoga se prueba x,3).

De esta manera, x) queda demostrada.

xi) Finalmente, veamos que $C(p, X)$ es una $2-$celda.

Es fácil probar que $[0, t) \times [0, s)$, $[0, t] \times [0, s)$ y $[0, t) \times [0, s]$ son espacios homeomorfos. Consideremos $Im(f) = [0, t] \times [0, s)$. Veamos que existe un homeomorfismo entre $C(p, X)$ y alguna $2-$celda. Para ello, sea $h_1 : [0, t] \times [0, s) \to [0, 1] \times [0, 1)$ una función dada por $h_1((x, y)) = (\frac{x}{t}, \frac{y}{s})$, notemos que h_1 es continua ya que cada una de sus entradas lo es. Es inyectiva, puesto que si consideramos $(x, y), (x', y') \in [0, t] \times [0, s)$, entonces si $h_1((x, y)) = h_1((x', y'))$, tenemos que, $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) = (\frac{x'}{t}, \frac{y'}{t}) \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$. Es sobreyectiva, ya que si $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1)$, entonces tomando $(tx, sy) \in [0, t] \times [0, s)$, tenemos que $h_1(tx, sy) = (x, y)$. Se sigue que h_1 es biyectiva.

Por otro lado, consideramos $h_2 : [0, 1] \times [0, 1) \to T$, donde T es la región delimitada por $\{\{(x, 2x) : x \in [0, \frac{1}{2}]\} \cup \{(x, 2-2x) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}\} \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ y dada por $h_2((x, y)) = (\frac{y}{2}(1-x) + (1-\frac{y}{2})x, y)$. Veamos que h_2 es continua y biyectiva.

Notemos que h_2 es continua ya que cada una de sus entradas lo es. Probemos que h_2 es inyectiva. Sean $(x, y), (x', y') \in [0, 1] \times [0, 1)$, tales que $h_2((x, y)) \neq h_2((x', y'))$, eso es si, y sólo si, $(\frac{y}{2}(1 - x) + (1 - \frac{y}{2})x, y) \neq (\frac{y'}{2}(1 - x') + (1 - \frac{y'}{2})x', y')$, notemos que $y \neq y'$, luego $(x, y) \neq (x', y')$. Se sigue que h_2 es inyectiva.

Ahora veamos que h_2 es sobreyectiva. Sea $y \in [0,1)$ fijo. Consideremos $(x,y) \in [0,1] \times \{y\}$. Luego $h_2((x,y)) = (\frac{y}{2}(1-x) + (1-\frac{y}{2})x, y)$. Denotemos $z = \frac{y}{2}(1-x) + (1-\frac{y}{2})x$, observemos que $z \in [\frac{y}{2}, \frac{2-y}{2}]$. Además, $[\frac{y}{2}, \frac{2-y}{2}] \times \{y\} \subset T$. Luego, como $y \in [0,1)$, se sigue que $h_2([0,1] \times [0,1)) = T$. Concluimos que h_2 es sobreyectiva.

Sea $T^* = T \cup \{q\}$ la compactación a un punto de T (véase *Teorema 3.5.12* en [5] página 170). Consideremos $h : T^* \to T \cup \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ definida de la siguiente manera:

$$h((x,y)) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in T; \\ (\frac{1}{2}, 1) & \text{si } (x,y) = q. \end{cases} \tag{2.19}$$

Observemos que h es una biyección continua entre el compacto T^* y el espacio de Hausdorff $T \cup \{(\frac{1}{2}, 1)\}$. Luego, h es un homeomorfismo.
Sea $\mathcal{C} = ([0,t] \times [0,s)) \cup \{r\}$ la compactación por un punto de $[0,t] \times [0,s)$ y consideremos la función $h' : \mathcal{C} \to T^*$ definidad de la siguiente manera:

$$h'((x,y)) = \begin{cases} (h_2 \circ h_1)(x,y) & \text{si } (x,y) \in [0,t] \times [0,s); \\ q & \text{si } (x,y) = r. \end{cases} \tag{2.20}$$

Se sigue que h' es una biyección continua entre el compacto $\mathcal{C}$ y el espacio de Hausdorff T^*. Tenemos que h' es un homeomorfismo.

Luego, $h \circ h'$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{C}$ y $T \cup \{(\frac{1}{2}, 1)\}$. Observemos que $T \cup \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ es una $2-$celda.

Por último consideremos $f' : C(p, X) \to \mathcal{C}$, definida por:

$$f'(A) = \begin{cases} f(A) & \text{si } A \in C(p,X) \setminus \{A\}; \\ r & \text{si } A = X. \end{cases} \tag{2.21}$$

Observemos que f' es un homeomorfismo entre $C(p, X)$ y $\mathcal{C}$.

Por esto $h \circ h' \circ f'$ es un homeomorfismo entre $C(p, X)$ y $T \cup \{(\frac{1}{2}, 1)\}$. Concluimos que $C(p, X)$ es una $2-$celda. □

Corolario 2.24. *Sea X un continuo. Si X tiene exactamente dos puntos extremos, digamos a y b, y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, entonces X es arco similar.*

Demostración.
Entonces tenemos los siguientes casos:

i) X es descomponible.

Notemos que X es un arco o una curva cerrada simple. Dado que la curva cerrada simple no contiene puntos extremos, descartamos el hecho de que pueda ser una curva cerrada simple. Luego, por el *Lema 2.16*, tenemos que X es arco-similar.

ii) X es indescomponible.

Como X tiene dos puntos extremos, por la *Observación 2.21*, tenemos que $C(a, X)$ y $C(b, X)$ son arcos. Luego, por el *Teorema 2.23*, tenemos que para cada punto $p \in X$ distinto de los extremos $C(p, X)$ es una $2-$celda. De tal manera que X es arco-similar.

Por *i*) y *ii*) concluimos lo deseado. □

Nota 2.25. *Notemos que el continuo tipo Knaster con dos puntos extremos, dado en Ejemplo 1.68, es un continuo que cumple con las hipótesis del Corolario 2.24. Además este continuo no es un arco, por esto tenemos que no todo arco-similar es un arco.*

§3 Triodos en $C(p, X)$

En esta sección hablaremos de triodos y triodos débiles, dando sus definiciones y algunos resultados con respecto a los hiperespacios de tipo $C(p, X)$.

Lema 2.26. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que* $\dim(C(p, X)) < n$ *para cada $p \in X$. Si A y B son subcontinuos de X, entonces $B \setminus A$ y $A \cap B$ tienen a lo más $n - 1$ componentes.*

Demostración.
Veamos primero que $B \setminus A$ tiene a lo más $n - 1$ componentes.

Supongamos lo contrario, es decir, que $B \setminus A$ tiene n componentes. Entonces $A \cup B$ es un $n-$odo con un núcleo en A. Así, por el *Lema 2.14*, $C(p, X)$ contiene una $n-$celda para cada $p \in A$. Lo cual es una contradicción, ya que $\dim(C(p, X)) < n$, para cada $p \in X$.

Ahora, probemos que $A \cap B$ tiene a lo más $n - 1$ componentes.

Denotemos por $Y = A \cup B$. Supongamos que $A \cap B$ tiene n componentes, digamos $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Como Y es Hausdorff compacto, existen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en Y disjuntos, tales que $K_i \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos E_i componente de $\overline{A \cap U_i}$ tal que $K_i \subset E_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Observemos que, por 10.1 de [19], $K_i \subsetneq E_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Denotemos por $Z = B \cup (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$. Observemos que Z es un subcontinuo de X. En efecto, es cerrado en X por que es unión finita de cerrados en X, además es conexo ya que es la unión de conexos que se intersectan.

Notemos que $Z \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n}(E_i \setminus (B \cap E_i))$, es decir, $Z \setminus B$ es la unión de n conjuntos no vacíos ajenos dos a dos. Luego, por la *Proposición 1.27*, $Z \setminus B$ tiene por lo menos n componentes, de tal forma que Z es un $r-$odo con $r \geq n$ y un núcleo en B. Así, por el *Lema 2.14*, $C(p, X)$ contiene una $r-$celda con $r \geq n$, para cada $p \in B$, lo cual es una contradicción. Por esto, $A \cap B$ contiene a lo más $n - 1$ componentes. □

Lema 2.27. *Sea X un continuo descomponible, es decir, existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Si K es una componente de $A \cap B$, entonces $K \cap Fr(A) \neq \emptyset$ y $K \cap Fr(B) \neq \emptyset$.*

Demostración.
Como K es componente de $A \cap B$, se sigue que $K \in C(A)$ y $K \in C(B)$. Más aún $K \in C(X)$. Consideremos $\alpha_1 : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a K con A. De igual manera, $\alpha_2 : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que une a K con B.

Observemos que para cada $t > 0$, $\alpha_1(t) \setminus B \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) \setminus A \neq \emptyset$. En efecto, si $\alpha_1(t) \setminus B = \emptyset$, se sigue que $\alpha_1 \subset B$, luego, $\alpha_1 \subset A \cap B$. De tal forma que $K \subset \alpha_1(t) \subset A \cap B$, lo cual es una contradicción, ya que K es componente de $A \cap B$.

Veamos que $K \cap Fr(B) \neq \emptyset$.

Consideremos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, 1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Luego por la continuidad de α_1 se sigue que $\lim_{n\to\infty} \alpha_1(x_n) = \alpha_1(0) = K$ en A. Sea $y_n \in x_n$ entonces existe $y \in K$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Veamos que se cumple lo siguiente:

i) $y \in Fr(B)$.

Sea U un abierto en X tal que $y \in U$. Notemos que $A \cap U \neq \emptyset$, ya que por la convergencia de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, se tiene que $y_n \in U$. Además $B \cap U \neq \emptyset$, ya que $y \in K \subset A \cap B \subset B$. Luego, $y \in Fr(B)$.

De igual manera, $K \cap Fr(A) \neq \emptyset$. □

Lema 2.28. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X tal que $A = \overline{U}$, para algún $U \subset X$ abierto. Entonces $A = \overline{int(A)}$.*

Demostración.
Notemos que $int(A) \subset A$, entonces $\overline{int(A)} \subset \overline{A} = A$. Veamos que $A \subset \overline{int(A)}$.

Observemos que $U \subset A$, entonces, $U \subset int(A)$, luego, $\overline{U} \subset \overline{int(A)}$. Así, $A = \overline{int(A)}$.
$\square$

Definición 2.29. *Un continuo X es* **unicoherente**, *si para cualesquiera subcontinuos A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo.*

Ejemplo 2.30. *El arco es un continuo unicoherente. Ya que cada vez que lo descomponemos en dos subcontinuos propios, la intersección de éstos es conexo.*

Ejemplo 2.31. *Un continuo no unicoherente es la curva cerrada simple. Esto podemos verlo con S^1, ya que si consideramos la parametrización $r : [0,1] \to S^1$ dada por $r(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$, la podemos descomponer en dos arcos $A = r([0,\pi])$ y $B = r([\pi, 2\pi])$, los cuales se intersectan sólo en sus puntos extremos lo cual hace a la intersección un conjunto no conexo.*

Lema 2.32. *Sea X un continuo no unicoherente tal que* $\dim(C(p,X)) < 3$ *para cada $p \in X$. Entonces existen dos subcontinuos propios, A y B, de X, tales que:*

a) $X = A \cup B$*;*

b) $A \cap B$ *es no conexo;*

c) $A = \overline{int(A)}$ *y* $B = \overline{int(B)}$*;*

d) $int(A) = A \setminus B$ *e* $int(B) = B \setminus A$.

Demostración.
a) Como X es no unicoherente, existen A' y B' subcontinuos propios de X tales que $X = A' \cup B'$ y $A' \cap B'$ es no conexo.

Denotemos por $B = \overline{X \setminus A'}$ y $A = \overline{X \setminus B} = A'$. Observemos que $X = A' \cup \overline{X \setminus A'} = A \cup B$. Más aún, por el *Lema 2.26*, tenemos que $A' \cap B'$ tiene exactamente dos componentes, digamos, K_1 y K_2. Veamos que se cumplen lo siguiente:

i) A y B son subcontinuos de X.

Notemos que $A = A' \in C(X)$. Así, falta probar que $B \in C(X)$, para ello probaremos que $X \setminus A'$ es conexo. Supongamos lo contrario, es decir que $X \setminus A'$ es no conexo. Entonces, por el *Lema 2.26*, $X \setminus A'$ tiene exactamente dos componentes, una de las cuales, digamos W, intersecta a K_1 y a K_2 (11.52 en [16]).

Sean H_1 y H_2 componentes de $\overline{W} \cap K_1$ y $\overline{W} \cap K_2$, respectivamente. Notemos que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Consideremos, $\alpha_i : [0,1] \to C(X)$, un arco ordenado que une a H_i con $\overline{W}$, para cada $i \in \{1,2\}$, y $\delta > 0$ tal que $\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset$. Sea Z la componente de $X \setminus A'$ tal que $W \neq Z$. Notemos que $Z \not\subset \alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta)$.

Consideremos $T = A^{'} \cup (\alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta)) \cup Z$. Entonces T es un $3-$odo con un núcleo en $A^{'}$. Luego, por el *Lema 2.14*, $C(p,X)$ contiene una $3-$celda para cada $p \in A^{'}$. Lo cual contradice el hecho de que $\dim(C(p,X)) < 3$. Se sigue que $X \setminus A^{'}$ es conexo. Así, $B = \overline{X \setminus A^{'}}$ es conexo. De tal manera que queda probado a).

b) Probemos que $A \cap B$ es no conexo.

Sea $i \in \{1,2\}$. Por el *Lema 2.27*, tenemos que $\emptyset \neq K_i \cap Fr(A^{'}) \subset K_i \cap B$ y que $K_i \cap B^{'} \neq \emptyset$. Veamos que $B \subset B^{'}$. Observemos que $(X \setminus A^{'}) \subset B^{'}$, entonces $B = \overline{X \setminus A^{'}} \subset \overline{B^{'}} = B^{'}$, se sigue que $B \subset B^{'}$. Entonces $K_i \cap Fr(B^{'}) \neq \emptyset$, de tal forma que $K_i \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Dado que $A \cap B \subset K_1 \cup K_2$. Tenemos que $A \cap B$ es no conexo. Así queda demostrado b).

c) $A = \overline{int(A)}$ y $B = \overline{int(B)}$.

Notemos que $A = \overline{X \setminus \overline{(X \setminus A^{'})}} = \overline{int(A^{'})}$, como $A = A^{'}$, se sigue que $A = \overline{int(A)}$. Tenemos que $B = \overline{X \setminus A^{'}}$, notemos que $X \setminus A^{'}$ es abierto en X, así por el *Lema 2.28*, tenemos que $B = \overline{int(\overline{X \setminus A^{'}})} = \overline{int(B)}$.

d) $int(A) = A \setminus B$ e $int(B) = B \setminus A$.

Notemos que $Fr(A) = A \cap \overline{(X \setminus A^{'})}$. Así, $Fr(B) = B \cap \overline{(X \setminus B)} = B \cap A = Fr(A)$. Se sigue que $B \setminus A = B \setminus (B \cap A) = B \setminus Fr(B) = int(B)$. De manera similar se prueba que $A \setminus B = int(A)$.

De esta manera queda probado el lema. □

Definición 2.33. *Un continuo X es un triodo débil si existen $A_1, A_2, A_3 \in C(X)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ y $A_i \not\subset A_j \cup A_k$, con $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.*

Definición 2.34. *Un continuo X es un triodo si existe $A \in C(X)$ tal que $X \setminus A$ es la unión de tres conjuntos cerrados no vacíos los cuales están separados dos a dos.*

Observación 2.35. *Sea X un continuo. Entonces X es un triodo si, y sólo si, X es un $3-$odo.*

Demostración.
Observemos que de la *Definición 2.13* tenemos que un $3-$odo es un continuo, X, tal que existe un subcontinuo A de X tal que $X \setminus A$ tiene por lo menos tres componentes. Así, por la *Proposición 1.27*, se da la equivalencia deseada. □

Notemos que no todo triodo débil es un triodo. Para ello demos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.36. *Un nudo es la unión de una curva cerrada simple y un arco, tales que se intersectan en un sólo punto, a saber, en uno de los extremos del arco. Veamos que un nudo es un triodo débil que no es un triodo (Véase Figura 2.1).*

Sea $X = A \cup B$ donde A es una curva cerrada simple y B un arco con extremos b y b'. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \cap B = \{b\}$. Veamos que X es un triodo débil, consideremos $A_1 \in C(A) \setminus \{A\}$, tal que A_1 es un arco, con extremos a y b, respectivamente, consideremos $A_2 = \overline{A \setminus A_1}$, es fácil ver que A_2 es un subcontinuo de A tal que es un arco con extremos a y b. Más aún, $A = A_1 \cup A_2$. Observemos que $X = (A_1 \cup A_2) \cup B$. Además:

i) $A_1 \cap A_2 \cap B = \{b\}$, es decir, $A_1 \cap A_2 \cap B \neq \emptyset$.

ii) $A_1 \not\subset A_2 \cup B$, ya que de lo contrario, se tiene que $A_1 = A_2$ o $A_1 \subset B$, lo cual es una contradicción, en efecto, si $A_1 = A_2$, se sigue que $A = A_1$, lo cual contradice la elección de A_1, por otro lado si $A_1 \subset B$, tenemos que $A \cap B$ es no degenerado, lo cual indica que X no es un nudo.

iii) $A_2 \not\subset A_1 \cup B$, se prueba de forma análoga a *ii*).

iv) $B \not\subset A_1 \cup A_2$, notemos que si $B \subset A_1 \cup A_2$, se sigue que $A \cap B$ es no degenerado lo cual contradice la elección de B.

Concluimos que X es un triodo débil.

Veamos ahora que X no es un triodo. Notemos que los únicos subcontinuos propios de X, son degenerados, arcos o triodos. Sea $E \in C(X) \setminus \{X\}$, tenemos los siguientes casos:

v) E es degenerado.

Si E es degenerado, tenemos que $E = \{p\}$ tal que $p \in X$, entonces tenemos que $p \in A \setminus \{b\}$ o $p \in B \setminus \{b\}$ o $p = b$.

v,1) Si $p \in A \setminus \{b\}$, entonces $X \setminus \{p\}$ es conexo, ya que $X \setminus \{p\} = (A \cup B) \setminus \{p\} = A \setminus \{p\} \cup B$ y como $p \neq b$, se sigue que $A \setminus \{p\} \cup B$ es conexo. Por esto, $X \setminus \{p\}$ no es un triodo. De manera similar se prueba que, si $p \in B \setminus \{b\}$, entonces $X \setminus \{p\}$ es conexo y así $X \setminus \{p\}$ no es un triodo.

v,2) Si $p = b$, entonces tenemos que $X \setminus \{p\} = (A \setminus \{p\}) \cup (B \setminus \{p\})$, notemos que $(A \setminus \{p\}) \cap (B \setminus \{p\}) = \emptyset$, ya que $p = b$, luego como p es punto extremo de B se sigue que $B \setminus \{p\}$ es conexo, además se sabe que al quitar sólo un punto a una curva cerrada se tiene que el complemento del punto es conexo, es decir, $A \setminus \{p\}$ es conexo. Luego $X \setminus \{p\}$, tiene al menos dos componentes, es decir, no es un triodo.

vi) E es un arco.

Notemos que si E es un arco, entonces $b \in E$ o $b \notin E$. Entonces:

vi,1) Si $b \in E$, entonces $X \setminus E = A \setminus E \cup B \setminus E$. Observemos que $A \cap E \neq \emptyset \neq B \cap E$. Luego tenemos que $E \subset A$ o $E \subset B$ o $E \cap A \neq \emptyset \neq E \cap B$. Observemos que si $E \subset A$, entonces, $\overline{A \setminus E}$, es un arco con extremos los extremos de E, más aún $A \setminus E$ es conexo, ya que los único puntos de no corte son los extremos del arco. Luego, como $b \in E$ y $E \subset A$, se sigue que $E \cap B = \{b\}$, es decir, $B \setminus E = B \setminus \{b\}$. Así, $B \setminus E$ es conexo. Con lo cual tenemos que $X \setminus E$ se puede expresar como la unión de dos conjuntos conexos, es decir, $X \setminus E$ tiene por lo menos dos componentes conexas, es decir X no es un triodo. De manera análoga se prueba que si $E \subset B$, entonces X no es un triodo.

Veamos que si $E \cap A \neq \emptyset \neq E \cap B$ con $E \cap A$ y $E \cap B$ no degenerados, entonces X no contiene un triodo.
Sean e y e', los extremos de E, notemos que $b \notin \{e, e'\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $e \in A$ y $e' \in B$, entonces podemos construir un arco, E_1, con extremos e y b tal que $E_1 \subset A$; y un arco E_2 con extremos b y e' tal que $E_2 \subset B$. Luego, $E = E_1 \cup E_2$. De tal manera que $X \setminus E = (A \setminus E_1) \cup (B \setminus E_2)$. Así por lo hecho para arcos incluidos en A o en B tenemos que $A \setminus E_1$ y $B \setminus E_2$ son conexos, se sigue que $X \setminus E$ tiene por lo menos 2 componentes conexas, es decir, $X \setminus E$ es un $2-$odo.

v,2) $b \notin E$
Se sigue $E \subset A$ o $E \subset B$, se sigue por lo hecho en v,1), que $X \setminus E = (A \setminus E) \cup (B \setminus E)$. Si $E \subset A$, entonces $(A \setminus E) \cup B$ es conexo. Por otro lado si $E \subset B$, entonces $A \cup (B \setminus E)$ se puede ver, ya sea como la unión de dos conjuntos conexos, o como un conjunto conexo. Lo cual indica que $X \setminus E$ es un $1-$odo o $2-odo$.
vi) E es un triodo.

Observemos que, si E es un triodo, entonces $b \in E$. Se sigue que existe $D \in C(E)$ tal que $E \setminus D$ se puede ver como la unión de 3 subconjuntos cerrados no vacíos y separados dos a dos, F_1, F_2, F_3, tales que $E \setminus D = \bigcup_{i=1}^{3} F_i$. Notemos que al menos uno de los F_i , digamos F_1, queda contenido en $B \setminus (E \setminus D)$, mientras que los dos restantes, F_2 y F_3, quedan contenidos en $A \setminus (E \setminus D)$. Luego, estos conjuntos son con conexos y no se intersectan, entonces, $X \setminus E$ tiene por lo menos dos componentes conexas, es decir es un $2-$odo.
De este ejemplo, podemos notar que a pesar de que un triodo débil no es un triodo, podemos ver que contiene uno. Veamos los siguientes resultados que relacionan los conceptos de triodo y triodo débil.

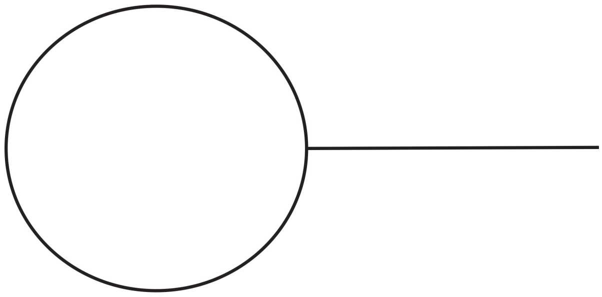

Figura 2.1: Nudo

Lema 2.37. *Todo triodo es un triodo débil.*

Demostración.
Sea X un triodo. Entonces existe $A \in C(X)$ tal que $X \setminus A$ lo podemos expresar como la unión de tres conjuntos cerrados no vacíos y separados dos a dos en $X \setminus A$. Digamos E_1, E_2, E_3. Por el *Corolario 1.41*, tenemos que $A_i = E_i \cup A$ es un continuo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Además se cumple lo siguiente:

i) $X = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$.

ii) $\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A \neq \emptyset$.

iii) Para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $A_i \setminus (A_j \cup A_k) = E_i \neq \emptyset$.

Por *i)*, *ii)*, *iii)*, concluimos que X es un triodo débil. □

Lema 2.38. *Sea X un continuo. Si existen dos subcontinuos, A y B, de X tales que $A \cap B$ tiene por lo menos tres componentes, entonces X contiene un triodo.*

Demostración.
Por la *Proposición 1.27*, existen E_1, E_2, E_3 cerrados no vacíos y ajenos dos a dos en $A \cap B$, tales que $A \cap B = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$. Luego, como $A \cap B$ es cerrado en X se sigue que E_1, E_2 y E_3 son cerrados en X. Por otro lado, como X es normal, podemos considerar U_i abierto tal que $E_i \subset U_i$ y $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, consideremos lo siguiente:

Elijamos $e_i \in E_i$ y sea K_i la componente de $\overline{U_i \cap A}^A$ que contiene a e_i. Como $E_i \subset U_i \cap A$ y dado la elección de U_i tenemos que $U_i \cap A$ es un abierto propio y no vacío de A. Entonces, por el *Teorema 1.29* aplicado a A, tenemos que $K_i \cap Fr_A(U_i \cap A) \neq \emptyset$. Por otro lado, $U_i \cap A$ es un abierto en A y contiene a

E_i, por esto, $E_i \cap Fr_A(U_i \cap A) \neq \emptyset$, es decir $Fr_A(U_i \cap A) \subset A \setminus E_i$. Además $Fr_A(U_i \cap A) \subset \overline{U_i \cap A}^A \subset \overline{U_i \cap A} \subset \overline{U_i}$ y este último conjunto es ajeno de $\overline{U_j}$ para cada $i \neq j$. Por esto, $E_j \subset \overline{U_j}$, tenemos que $Fr_A(U_i \cap A) \subset A \setminus E_j$ para $i \neq j$.

De lo anterior, tenemos que $K_i \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Denotemos por $H = B \cup (\bigcup_{i=1}^{3} K_i)$.

Como K_i y B son subcontinuos de X y $e_i \in B \cap K_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tenemos que $B \cup K_i$ es un subcontinuo de X. Además $B \subset \bigcap_{i=1}^{3}(B \cup K_i)$ por lo que $H = B \cup (\bigcup_{i=1}^{3} K_i)$ es un subcontinuo de X.

Veamos que H es un triodo.

Como B es un subcontinuo de X y $B \subset H$, es claro que $B \in C(H)$. Además, $H \setminus B = (\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \setminus B = \bigcup_{i=1}^{3}(K_i \setminus B)$ y por la definición de los K_i tenemos que $\overline{(K_i \setminus B)} \subset \overline{K_i} = K_i \subset \overline{U_i \cap A}^A \subset \overline{U_i}$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado que $\overline{U_i}$ son mutuamente ajenos, las contenciones anteriores implican que los conjuntos $K_i \setminus B$ son mutuamente separados para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Finalmente, ya vimos que $K_i \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$, lo que implica que $K_i \setminus B$ es no vacío para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Es decir, $H \setminus B$ es la unión de tres conjuntos no vacíos y separados mutuamente lo cual quiere decir que H es un triodo. $\square$

Teorema 2.39. *Sea X un continuo. Si X es un triodo débil, entonces X contiene un triodo.*

Demostración.

Dado que X es un triodo, existen $A_1, A_2, A_3 \in C(X)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{3} A_i \neq \emptyset$ y $A_i \not\subset (A_j \cup A_k)$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Consideramos $N = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_1)$. Veremos que, por el número de componentes que puede tener N encontraremos que X contiene un triodo.

i) N es conexo.

Supongamos que N es conexo, se sigue que $N \in C(X)$. Veamos que en este caso X es un triodo.

En efecto, $X\setminus N = (\bigcup_{i=1}^{3} A_i)\setminus N = \bigcup_{i=1}^{3}(A_i\setminus N)$. Probaremos que $(A_i\setminus N)\cap(A_j\setminus N) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $i \neq j$.

Notemos que $X \setminus (A_1 \setminus N) = X \setminus (A_1 \cap (X \setminus N)) = (X \setminus A_1) \cup N = (A_1 \cup A_2) \cup N \subset A_2 \cup A_3$, ya que $N \subset A_2 \cup A_3$. Por otro lado, $A \cup A_3 = [A_1 \cap (A_2 \cup A_3] \cup [(X \setminus A_1) \cap (A_2 \cup A_3)] = [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)] \cup [(X \setminus A_1) \cap (A_2 \cup A_3] \subset N \cup (X \setminus A_1) = X \setminus (A_1 \cap (X \setminus N)) = X \setminus (A_1 \setminus N)$. Luego, $X \setminus (A_1 \setminus N) = A_2 \cup A_3$. Por esto $A_1 \setminus N$ es abierto. Además $(A_2 \setminus N) \cup (A_3 \setminus N) \subset A_2 \cup A_3 = X \setminus (A_1 \setminus N)$, es decir, $A_1 \setminus N$ es disjunto a $A_2 \setminus N$ y $A_3 \setminus N$.

De manera similar se prueba que $A_2 \setminus N$ y $A_3 \setminus N$ tienen las mismas propiedades correspondientes. Así los $A_i \setminus N$ son abiertos y ajenos dos a dos, es decir, son separados. Por esto X es un triodo.

ii) N tiene exactamente dos componentes.

Sean K_1, K_2 componentes distintas de N. Ya que $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{3} A_i \subset N = K_1 \cup K_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $K_1 \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por otro lado, como K_1 y K_2 son cerrados en X normal, existe un abierto U en X tal que $K_1 \subset U$ y $K_2 \cap \overline{U} = \emptyset$. Sea H la componente de $\overline{U}$ tal que $K_1 \subset H$. Como H es componente de un cerrado, se tiene que $H \in C(X)$. Además, $K_1 \in C(H)$. Probaremos que H es un triodo. En efecto:

$$H\setminus K_1 = X\cap(H\setminus K_1) = (\bigcup_{i=1}^{3} A_i)\cap(H\setminus K_1) = \bigcup_{i=1}^{3}(A_i\cap(H\setminus K_1)) = \bigcup_{i=1}^{3}(H\cap(A_i\setminus K_1)). \tag{2.22}$$

De aquí que, $H \setminus K_1$ es la unión de tres subconjuntos. Veamos que dichos subconjuntos son no vacíos y separados dos a dos.

ii,1) $H \cap (A_i \setminus K_1)$ es no vacío para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, consideremos $D_i = K_1 \cap A_i$. Entonces $U \cap D_i$ es un abierto en D_i que contiene a K_1. Sea H_i la componente de $\overline{U \cap D_i}^{D_i}$ que contiene a K_1. Tenemos que $\overline{U \cap D_i}^{D_i} = \overline{U \cap D_i} \cap D_i \subset \overline{U \cap D_i} \subset \overline{U}$ y por la definición de H, se sigue que $H_i \subset H$.

Por otro lado, K_1 y A_i son subcontinuos de X tales que $K_1 \cap A_i \neq \emptyset$, por lo que $D_i \in C(X)$. Veamos que $H_i \setminus K_1 \neq \emptyset$; para esto suponemos que $H_i \setminus K_1 = \emptyset$, se sigue que $H_i \subset K_1$. Luego, $H_i = K_1$. Ahora, consideremos los siguientes casos:

ii,1,1) $U \cap D_i = D_i$.

En este caso $H_i = D_i$, se sigue que $K_1 = D_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Luego, $A_i \subset K_1$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces $X = K_1$. Así, $K_2 \subset K_1$, lo cual es una contradicción.

ii,1,2) $U \cap D_i \neq D_i$.

En este caso $U \cap D_i$ es un abierto propio de D_i para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Además, por el *Teorema 1.29*, $H_i \cap Fr_{D_i}(U \cap D_i) \neq \emptyset$; $K_1 \subset U \cap D_i$ y $(U \cap D_i) \cap Fr_{D_i}(U \cap D_i) = \emptyset$. Se sigue que $K_1 \neq H_i$. Como $K_1 \subseteq H_i \subset D_i = K_1 \cup A_i$, se sigue que $H_i \cap (A_i \setminus K_1) \neq \emptyset$. Con lo cual queda demostrado *ii*,1).

ii,2). $\overline{H \cap (A_i \setminus K_1)} \cap H \cap (A_j \setminus K_1) = \emptyset$, si $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$.

Si suponemos que existe un punto $x \in \overline{H \cap (A_i \setminus K_1)} \cap H \cap (A_j \setminus K_1)$, se tiene que $x \in H$, $x \in A_i \cap A_j$ y $x \notin K_1$. Como $A_i \cap A_j \subset N$, se sigue que $x \in K_2$. Luego, $x \in H \cap K_2$. Como $H \subset \overline{U}$, se obtiene que $x \in \overline{U} \cap K_2$. Lo cual es una contradicción, ya que $\overline{U} \cap K_2 = \emptyset$. De esta forma queda demostrado *ii*,2).
Por lo hecho anteriormente, se sigue que H es un triodo contenido en X.

Finalmente, veamos el siguiente caso:

iii) N tiene tres o más componentes.

Por la *Proposición 1.27*, existen E_1, E_2 y E_3 subconjuntos cerrados no vacíos de N, tales que $N = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$. Se sigue que estos conjuntos son cerrados en X. Veamos que $A_i \cap K_j \neq \emptyset$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Notemos que $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{3} A_i \subset N = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$, esto implica que existe algún E_i con $i \in \{1, 2, 3\}$, digamos E_1, que intersecta a $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$. Además, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, como $E_i \neq \emptyset$, de la definición de N tenemos que E_2 y E_3 intersectan, cada uno, al menos dos subcontinuos A_i. Entonces al menos uno de los tres subcontinuos, digamos A_1, intersecta a E_2 y a E_3. Por lo que habíamos dicho de E_1, tenemos que $A_1 \cap E_1 \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Como $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{3} A_i \subset A_2 \cap A_3$ y dado que A_2 y A_3 son subcontinuos de X, tenemos que $A_2 \cup A_3 \in C(X)$. Sea $F = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$. Entonces F es la intersección de dos subcontinuos de X, además $F = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \subset N$.

Ahora, para cada $i \in \{1,2,3\}$, tenemos que $F \cap E_i = (A_1 \cap A_2 \cap E_i) \cup (A_1 \cap A_3 \cap E_i)$, ya que $E_i \cap A_1 \neq \emptyset$ y E_i intersecta al menos uno de A_2 y A_3, se sigue que $F \cap E_i \neq \emptyset$.

Por otro lado, como F es cerrado y E_1, E_2, E_3 son cerrados ajenos dos a dos, tenemos que $F \cap E_1, F \cap E_2, F \cap E_3$ son cerrados y ajenos dos a dos.

Finalmente, dado que $F \subset N = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$, se sigue que $F = \bigcup_{i=1}^{3} (F \cap E_i)$. Es decir, F es la unión de tres cerrados no vacíos ajenos dos a dos, así por la *Proposición 1.27*, tenemos que F tiene por lo menos 3 componentes. Luego, como F es la intersección de dos subcontinuos de X, por el *Lema 2.38*, tenemos que F contiene un triodo y $F \subset X$.

De $i)$, $ii)$ y $iii)$, concluimos que X contiene un triodo. $\square$

Teorema 2.40. *Si X es un continuo tal que $dim(C(p, X)) < 3$ para cada $p \in X$, entonces X no contiene ni triodos ni triodos débiles.*

Demostración.
Supongamos que X contiene un triodo débil, se sigue que en X hay un triodo, digamos Y, así por el *Lema 2.14*, $C(p, X)$ contiene una $3-$celda, para cada $p \in Y$. Lo cuál es una contradicción ya que $dim(C(p, X)) < 3$, para cada $p \in X$. De forma análoga se prueba en el caso que X no contiene un triodo. $\square$

Lema 2.41. *Sea X un continuo. Si A_1, A_2 y A_3 son subcontinuos de X tales que $A_2 \cap A_3$ es no conexo, $A_1 \subsetneq A_2$ y $A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3$, entonces X contiene un triodo.*

Demostración.
Como $A_2 \cap A_3$ es no conexo, podemos considerar K_1 y K_2 componentes distintas de $A_2 \cap A_3$. Consideremos $\alpha_i : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a K_i con A_3, para cada $i \in \{1,2\}$ y $\delta > 0$ tal que $\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset$. Notemos $A_2 \not\subset \alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta)$. Denotemos por $T = A_2 \cup (\alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta))$. Veamos que T es un triodo con un núcleo A_1.

Observemos que:

$$T \setminus A_1 = (A_2 \setminus A_1) \cup (\alpha_1(\delta) \setminus A_1) \cup (\alpha_2(\delta) \setminus A_1). \tag{2.23}$$

Como $\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset$, se sigue que $\overline{(\alpha_i(\delta) \setminus A_1)} \cap (\alpha_j(\delta) \setminus A_1) = \emptyset$ con $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Veamos que $\overline{A_2 \setminus A_1} \cap (\alpha_i(\delta) \setminus A_1) = \emptyset$ con $i \in \{1,2\}$.

Supongamos que $x \in \overline{A_2 \setminus A_1}$, se sigue que $x \in \overline{A_2} \cap \alpha_i(\delta) = A_2 \cap \alpha_i(\delta)$. Es decir, $x \in A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3$ Lo cual es una contradicción.

De esto, tenemos que T es un triodo en X con A_1 como núcleo. □

Lema 2.42. *Sean X un continuo tal que $dim(C(p,X)) < 3$, para cada $p \in X$ y $\mathcal{CP} = \{p \in X : C(p,X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable. Si Y es un subcontinuo propio de X, entonces Y es unicoherente.*

Demostración.
Supongamos lo contrario, es decir, que Y es no unicoherente, se sigue, por el *Lema 2.32*, que existen $A, B \in C(X)$ tales que:

i) $Y = A \cup B$;

ii) $A \cap B$ es no conexo;

iii) $A = \overline{int(A)}$ y $B = \overline{int(B)}$;

iv) $int(A) = A \setminus B$ e $int(B) = B \setminus A$.

Sea $p \in Y$ tal que $C(p,X)$ no tiene puntos de corte. Entonces, por el *Lema 2.7*, existe $D \in C(p,X)$ tal que $Y \setminus D \neq \emptyset$ y $D \setminus Y \neq \emptyset$. Supongamos que $B \setminus D \neq \emptyset$ y definamos $C = A \cup D$. Notemos que, por *iii)* y *iv)*, $B \setminus C \neq \emptyset$. Veamos que se cumple lo siguiente:

v) $A \cap D \neq \emptyset$. En particular, $C \in C(X)$.

Supongamos que $A \cap D = \emptyset$. Dado que $p \in Y \cap D$, se sigue que $p \in B \cap D$. De aquí que $B \cup D \in C(X)$. Notemos que $(B \cup D) \cap A = A \cap B$ lo cual es no conexo. Así, por el *Lema 2.41*, X contiene un triodo, lo cual es una contradicción.

vi) $A \cap B$ no está contenido en una componente de $B \cap C$.

Supongamos lo contrario. Sea K la componente de $B \cap C$ tal que $A \cap B \subset K$. Dado que $B \setminus C \neq \emptyset$, tenemos que $K \subset B$. Por otro lado, $K \cap A = B \cap A$. Luego, por el *Lema 2.41* se sigue que Y contiene un triodo, lo cual es una contradicción.

Por *vi)* existen K_1 y K_2 componentes de $B \cap C$ tales que $(A \cap B) \cap K_1 \neq \emptyset$ y $(A \cap B) \cap K_2 \neq \emptyset$. Notemos que $A \cup K_1 \cup K_2 \in C(X)$ y $\emptyset \neq D \setminus Y \subset D \setminus (A \cup K_1 \cup K_2)$, se sigue que $A \cup K_1 \cup K_2 \subsetneq A \cup D$. Luego, $(A \cup K_1 \cup K_2) \cap B = B \cap C$. De aquí, por el *Lema 2.41*, X contiene un triodo lo cual es una contradicción. □

El siguiente teorema es importante en el estudio de los continuos irreducibles, lo daremos sin prueba, pero ésta puede ser consultada en [16] 11. 34, página 216.

Teorema 2.43. (de Sorgenfrey.) *Todo continuo no degenerado unicoherente que no es un triodo es irreducible.*

Lema 2.44. *Sean X un continuo tal que $dim(C(p,X)) < 3$ para cada $p \in X$, $\mathcal{CP} = \{p \in X : C(p,X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable y Y un subcontinuo propio de X. Si A_1 y A_2 son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A_1 \cup A_2$, entonces $A_1 \cap A_2$ es un subcontinuo de Y y existe un único arco ordenado que une $A_1 \cap A_2$ con A_i para cada $i \in \{1,2\}$.*

Demostración.
Por el *Lema 2.42*, tenemos que $A_1 \cap A_2 \in C(Y)$, por lo que podemos considerar un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(Y)$ que une a $A_1 \cap A_2$ con A_1.

Supongamos que existe $\beta : [0,1] \to C(Y)$ tal que une a $A_1 \cap A_2$ con A_1 y $\alpha([0,1]) \neq \beta([0,1])$. Entonces por el *Lema 2.8*, podemos elegir $s, t \in [0,1]$ tales que $\alpha(s) \setminus \beta(t) \neq \emptyset$ y $\beta(t) \setminus \alpha(s) \neq \emptyset$.

Denotemos por $T = A_2 \cup \alpha(s) \cup \beta(t)$. Veamos que T es un triodo débil:

i) $A_2 \cap \alpha(s) \cap \beta(t) = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$;

ii) $A_2 \setminus (\alpha(s) \cup \beta(t)) = A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$;

iii) $\alpha(s) \setminus (A_2 \cup \beta(t)) = (\alpha(s) \setminus A_2) \cap (\alpha(s) \setminus \beta(t)) = (\alpha(s) \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap (\alpha(s) \setminus \beta(t)) = \alpha(s) \setminus \beta(t) \neq \emptyset$;

iv) De forma similar a *iii)*, $\beta(t) \setminus (A_2 \cup \alpha(s) = \beta(s) \setminus \alpha(t) \neq \emptyset$.

Así, T es un triodo débil, pero esto es una contradicción por el *Lema 2.40*. Se sigue que α es único.

De manera análoga se prueba que existe un arco único que une a $A_1 \cap A_2$ con A_2.
□

Lema 2.45. *Sea X un continuo irreducible entre A' y B' subcontinuos de X. Si A es un subcontinuo de X tal que $A \cap A' \neq \emptyset$ y $A \setminus A' \neq \emptyset$, entonces $A' \subset int(A)$.*

Demostración.
Sea $p \in A \setminus A'$. Consideramos $q \in B' \setminus A'$. Notemos que X es no irreducible entre p y q. Entonces existe $B \in C(p,X) \setminus \{X\}$ tal que $\{p,q\} \subset B$, se sigue que $B \cap B' \neq \emptyset$. Como X es irreducible entre A' y B', tenemos que $B \cap A' = \emptyset$.

Observemos que $A \cup B \in C(X)$, ya que $p \in A \cap B$. Además, $\emptyset \neq A \cap A' \subset (A \cup B) \cap A'$ y $(A \cup B) \cap B' \neq \emptyset$. Se sigue que $X = A \cup B$. Luego, $A' \subset X \setminus B \subset A$. Tenemos que A' está contenido en el abierto $X \setminus B$ de A, así $A' \subset int(A)$. □

Definición 2.46. *Dado un continuo X irreducible entre dos puntos a y b, con $a, b \in X$. Definimos:*

$$\mathbb{D}_{(X,a)} = \{A \in C(a,X) : A = \overline{int(A)}\}.$$

Lema 2.47. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si $A \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, con A no vacío, entonces A es irreducible entre a y cualquier punto de $Fr(A)$.*

Demostración.
Supongamos que $A \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces por el *Lema 1.59*, $X \setminus A$ es conexo, luego, $\overline{X \setminus A}$ es conexo y supongamos que $b \in \overline{X \setminus A}$. Por el *Lema 1.63*, $A = \overline{X \setminus \overline{(X \setminus A)}}$ es un continuo irreducible entre a y x, con $x \in Fr(\overline{X \setminus A}) = Fr(A)$. □

Teorema 2.48. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$. Si $A_1, A_2 \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces $A_1 \subset int(A_2)$ o $A_2 \subset int(A_1)$.*

Demostración.
Supongamos que $A_2 \not\subset int(A_1)$, es decir, $A_2 \cap \overline{(X \setminus A_1)} \neq \emptyset$. Entonces, $A_2 \cup \overline{X \setminus A_1} = X$, ya que $A_1 \subsetneq X$, entonces $b \in \overline{X \setminus A_1} \in C(X)$. Se sigue que, $X \setminus \overline{(X \setminus A_1)} \subset A_2$ y así, $A_1 \subset A_2$.

Por el *Lema 2.47*, dado que A_2 es irreducible entre a y x con $x \in Fr(A_2)$ y $A_1 \subsetneq A_2$, entonces $A_1 \cap Fr(A_2) = \emptyset$. Se sigue que $A_1 \subset int(A_2)$. □

El siguiente lema, es con respecto a espacios topológicos, pero dada la importancia que tiene con respecto a la familia $\mathbb{D}_{(Y,a)}$, lo enunciamos a continuación.

Lema 2.49. *Sea X un espacio topológico. Si A y B son subconjuntos de X tales que $A \subset B \subset X$ y $B = \overline{int(B)}$, entonces $B = \overline{int(A)} \cup \overline{(B \setminus A)}$.*

Demostración.
Notemos que $\overline{int(A)} \cup \overline{(B \setminus A)} \subset B$. Entonces bastará con probar que $B \subset \overline{int(A)} \cup \overline{(B \setminus A)}$. Para ello, consideremos $x \in B$ y $x \notin \overline{B \setminus A}$. Probaremos que $x \in \overline{int(A)}$. Sea V un abierto en X tal que $x \in V$. Como $x \notin \overline{B \setminus A}$, existe U un abierto en X tal que $x \in U$ y $U \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Denotemos por $W = U \cap V$. Notemos que W es abierto en X y $x \in W$.

Como $B = \overline{int(B)}$. Se tiene que $W \cap int(B) \neq \emptyset$. Observemos que $W \cap int(B)$ es un abierto en X, además $W \cap int(B) \subset B = A \cup (B \setminus A)$; puesto que $W \subset U$ y $U \cap (B \setminus A) = \emptyset$, se sigue que $W \cap int(B) \subset A$. Más aún, $W \cap int(B) \subset in(A)$. Finalmente, observemos que $\emptyset \neq W \cap int(B) \subset V \cap int(A)$, así, $V \cap int(A) \neq \emptyset$.

Por esto, $x \in \overline{int(A)}$.

Con lo cual concluimos que $B \subset \overline{int(A)} \cup \overline{(B \setminus A)}$. Es decir, $B = \overline{int(A)} \cup \overline{(B \setminus A)}$. □

La siguiente definición está relacionada con conjuntos, pero dado que no la emplearemos mucho y puesto que se usará para dar un teorema importante, la enunciamos a continuación.

Definición 2.50. *Dada $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos linealmente ordenada por la contención, $A, B \in \mathcal{F}$ forman un* **salto**, *si $A \subsetneq B$ y no existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

El siguiente teorema lo damos sin demostración, a pesar de su gran utilidad. Puede ser consultado en [10] página 215.

Teorema 2.51. *Sea X un continuo irreducible entre dos puntos a y b, con $a, b \in X$. Si $D_1, D_2 \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ forman un salto en $\mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces $\overline{D_2 \setminus D_1}$ es indescomponible.*

Lema 2.52. *Sean X un continuo tal que $dim(C(p, X)) < 3$, para cada $p \in X$, $\mathcal{CP} = \{p \in X : C(p, X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable, Y un subcontinuo propio de X irreducible entre A' y B', con $A', B' \in C(Y)$. Si A_1 y A_2 son subcontinuos de Y tales que $A' \subset A_1 \cap A_2$, entonces $A_1 \subset A_2$ o $A_2 \subset A_1$.*

Demostración.
Por el *Lema 2.28* y el *Teorema 1.61*, tenemos que $\overline{int_Y(A_1)}, \overline{int_Y(A_2)} \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$. Así, por el *Teorema 2.48*, $\overline{int_Y(A_1)} \subset \overline{int_Y(A_2)}$ o $\overline{int_Y(A_2)} \subset \overline{int_Y(A_1)}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overline{int_Y(A_1)} \subset \overline{int_Y(A_2)}$. Denotemos por $D = \overline{int_Y(A_1)}$. Observemos que, si A_1 y A_2 son comparables entonces $D \subsetneq A_1$ y $D \subsetneq A_2$. Por el *Lema 2.45*, elijamos $w \in D \setminus A'$; y $b \in B'$. Dado que Y es irreducible entre A' y B', existe $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $w, b \in B$. De aquí que, $A' \subset Y \setminus B$. Luego, por el *Teorema 2.48*, tenemos que $A_i \cap B \in C(Y)$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Además, por la irreducibilidad de Y, tenemos que $A_i \cup B = Y$ y $D \cup B = Y$. En particular, $Y \setminus A_i \subset B$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Observemos que $A' \subset D \setminus ((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))$ y $w \in (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) \cap D$.

Por otro lado, tenemos que:

i) Para cada $\{i, j\} = \{1, 2\}$; $(A_i \cap B) \setminus ((A_j \cap B) \cup D) = A_i \setminus A_j \neq \emptyset$;

ii) $D \setminus ((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) \neq \emptyset$.

Luego, $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$ y D forman un triodo débil. Lo cual es una contradicción por el *Lema 2.40*. □

Lema 2.53. *Sean X un continuo tal que $dim(C(p,X)) < 3$, para cada $p \in X$, $\mathcal{CP} = \{p \in X : C(p,X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable, Y un subcontinuo propio de X irreducible entre A' y B', con $A', B' \in C(Y)$. Sean $w \in Y \setminus (A' \cup B')$ y $W \in C(w,X)$ tal que $W \setminus Y \neq \emptyset$. Si K_w es la componente de $W \cap Y$ tal que $w \in K_w$, entonces $A' \subset K_w$ o $B' \subset K_w$.*

Demostración.
Veamos que se cumple lo siguiente:

i) $A' \cap W \neq \emptyset$ o $B' \cap W \neq \emptyset$.

Sea $a \in A'$. Observemos que existe $A \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $a, w \in A$. Además $A \cap B' = \emptyset$, ya que de lo contrario $A = Y$. De forma análoga, sea $b \in B'$ y $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $b, w \in B$ y $B \cap A' = \emptyset$. Se sigue que $Y = A \cup B$, y así $W \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$.

Luego, si $W \cap A' = \emptyset$ y $W \cap B' = \emptyset$, entonces $a \in A' \cap A \subset A \setminus (W \cup B)$. De forma similar, $b \in B \setminus (W \cup A)$. Se sigue que A, B y W forman un triodo débil en X, lo cual es una contradicción por el *Lema 2.40*.

ii) $A' \subset K_w$ o $B' \subset K_w$.

Como $K_w \subset W \cap Y$, se sigue que $K_w \in C(W) \setminus \{Y\}$. De esta manera, podemos considerar $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado que une a K_w con W. Por el *Lema 2.26*, tenemos que qu $W \cap Y$ tiene a lo más dos componentes. Probaremos la siguiente afirmación:

Afirmación. Existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \cap Y = K_w$.

Para probar esta afirmación, veamos los siguientes casos:

1) $W \cap Y$ tiene sólo una componente.

En este caso, sea $t = \frac{1}{2}$; se sigue que $K_w \subset \alpha(t) \cap Y \subset W \cap Y = K_w$. Así, $\alpha(t) \cap Y = K_w$.

2) $W \cap Y$ tiene exactamente dos componentes.

Denotemos por E a la componente de $W \cap Y$ distinta de K_w. Tenemos que $W \cap Y = K_w \cup E$. Observamos que K_w y E son cerrados ajenos. Se sigue que $\langle X \setminus E \rangle$ es un conjunto abierto en $C(X)$ y $K_w \in \langle X \setminus E \rangle$. Por la continuidad de α, existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \in \langle X \setminus E \rangle$. Notemos que $K_w \subset \alpha(t) \cap Y \subset (W \cap Y) \setminus E = K_w$.

Así, de 1) y 2), tenemos que $\alpha(t) \cap Y = K_w$. Lo cual prueba la afirmación.

Se sigue que $\alpha(t) \not\subset Y$, pues $\alpha(t) \neq K_w$ ya que $t > 0$. Como $w \in \alpha(t)$, por argumentos similares a i), tenemos que $\alpha(t) \cap A^{'} \neq \emptyset$ o $\alpha(t) \cap B^{'} \neq \emptyset$. Por el *Lema 2.45*, se concluye que $A^{'} \subset \alpha(t)$ o $B^{'} \subset \alpha(t)$. Como $A^{'} \subset Y$ y $B^{'} \subset Y$. Se tiene que $A^{'} \subset K_w$ o $B^{'} \subset K_w$. $\square$

Capítulo 3

Sobre la clase $\mathcal{P}$

En los capítulos anteriores, hemos visto algunas propiedades topológicas sobre los hiperespacios de tipo $C(p, X)$, de un continuo X y $p \in X$. Ha sido de nuestro interés ver cuándo este tipo de hiperespacios son arcos o $2-$celdas. En este capítulo, siguiendo la línea conceptual que hemos marcado, definiremos una clase que es de peculiar interés para nosotros, la cual llamaremos la **Clase** $\mathcal{P}$.

Definición 3.1. *Sea $\mathcal{P}$ la clase de continuos, X, tal que $C(p, X)$ es un arco o una $2-$celda para cada $p \in X$, y el conjunto $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ es a lo más numerable.*

Ejemplo 3.2. *Notemos que los arcos, las curvas cerradas simples y el Knaster con dos puntos extremos son elementos de la clase $\mathcal{P}$. Veáse Teorema 2.16, Teorema 2.17 y Nota 2.25, respectivamente.*

Observación 3.3. *Los continuos arco similares, pertenecen a la clase $\mathcal{P}$.*

§1 Sobre irreducibilidad en la clase $\mathcal{P}$

Teorema 3.4. *Sean $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio de X irreducible entre A' y B' con $A', B' \in C(Y)$. Si $w \in Y \setminus (A' \cup B')$, entonces $C(w, Y)$ no tiene puntos de corte.*

Demostración.
Notemos que, por el *Lema 2.5*, se sigue que $\{w\}$ y Y no son puntos de corte de $C(w, Y)$. Sea $W \in C(w, Y)$ tal que $\{w\} \subsetneq W \subsetneq Y$. Veamos que W es no terminal en w. Para ello, veamos los siguientes casos.

i) $A' \cap W \neq \emptyset$ o $B' \cap W \neq \emptyset$.

Supongamos que existe $a \in A' \cap W$. Observemos que $B' \cap W = \emptyset$, ya que de lo contrario $W = Y$. Dado que $w \in Y \setminus (A' \cup B')$, entonces para $b \in B'$ existe

$B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $w, b \in B$.

Luego, $a \in W \setminus B$ y $b \in B \setminus W$, se sigue que B y W no son comparables, es decir, W no es terminal en w respecto de Y.

ii) $A^{'} \cap W = \emptyset$ y $B^{'} \cap W = \emptyset$.
Dado que $w \in Y \setminus (A^{'} \cup B^{'})$, para cada $a \in A^{'}$ y $b \in B^{'}$, existen $A, B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tales que $w, a \in A$ y $w, b \in B$.

Observemos que $A, B \in C(w, X)$ que no son comparables, por el *Lema 2.9*, $C(w, X)$ no es un arco. Dado que $X \in \mathcal{P}$ se sigue que $C(w, X)$ es una $2-$celda. Se sigue que $W \in C(w, X)$ que no es un punto de corte, luego, por el *Lema 2.7*, $W \in C(X)$ que no es terminal en w, respecto de X.

Sea $Z \in C(w, X)$ tal que $Z \setminus W \neq \emptyset$. Si $Z \subset Y$ se sigue que W no es terminal en w respecto de Y. Supongamos que $Z \setminus Y \neq \emptyset$. Observemos que $Z \cup Y \subsetneq X$ y $Z \cap Y \neq \emptyset$, se sigue que $Z \cup Y \in C(X) \setminus \{X\}$, luego por el *Lema 2.42*, se sigue que $Z_0 = Z \cap Y \in C(w, Y)$. Por el *Lema 2.53*, $A^{'} \subset Z_0$ o $B^{'} \subset Z_0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A^{'} \subset Z_0$. Luego, $A^{'} \subset Z_0 \setminus W$. Sea $x \in W \setminus Z$, entonces $x \in W$ y $x \in Z_0$, se sigue que $W \setminus Z_0 \neq \emptyset$. Por esto, W y Z_0 no son comparables en Y, es decir, $W \in C(w, Y)$ no es terminal en w, respecto a Y.

Finalmente, por el *Lema 2.7*, se sigue que W no es un punto de corte de $C(w, Y)$.
$\square$

Teorema 3.5. *Sea $X \in \mathcal{P}$ y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$ no degenerado. Si Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$, para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$, entonces $C(A^{'}, Y)$ y $C(B^{'}, Y)$ son arcos.*

Demostración.
Veamos que $C(A^{'}, Y)$ es un arco.

Sean $A_1, A_2 \in C(A^{'}, Y)$, observemos que $A^{'} \subset A_1 \cap A_2$, así por el *Lema 2.52*, se sigue que $A_1 \subset A_2$ o $A_2 \subset A_1$, luego por el *Lema 2.9*, tenemos que $C(A^{'}, Y)$ es un arco.

De manera análoga, se prueba que $C(B^{'}, Y)$. $\square$

Teorema 3.6. *Sea $X \in \mathcal{P}$ y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$ no degenerado irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$, para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$. Si $a \in A^{'}$ y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado que une a $A^{'}$ con Y, entonces el conjunto $T = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}\}$ es denso en $[0,1]$.*

Demostración.
Supongamos que T no es denso en $[0,1]$. Consideremos $r \in (0,1)$ y $\varepsilon \in (0,r)$ tal que $0 < r - \varepsilon < r + \varepsilon < 1$ y $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap T = \emptyset$.

Definamos $s = \text{ínf}([r+\varepsilon, 1] \cap T)$ y $Z = [0, r-\varepsilon] \cap T$. Además, sea $t_0 = supZ$ si $Z \neq \emptyset$, en otro caso $t_0 = 0$.

Por el *Corolario 1.107*, existe $y \in \alpha(s)$ y un arco ordenado $\beta : [0,1] \to C(\alpha(s))$ tal que $\beta(0) = A^{'}$, $\beta(1) = \alpha(s)$ y $y \notin \beta(u)$ para cada $u \in [0,1)$. Tenemos la siguiente afirmación:

Afirmación: $\bigcup\{\beta(u) : 0 \leq u < 1\} = \bigcup\{\alpha(t) : 0 \leq t < s\}$.

Observemos que $\alpha([0,1])$ es un arco con extremos $A^{'}$ y $\alpha(s)$, contenido en $C(A^{'}, Y)$. De forma análoga, $\beta([0,1])$ es un arco con extremos $\beta(0) = A^{'}$ y $\beta(1) = \alpha(s)$ contenido en $C(A^{'}, Y)$. Como $C(A^{'}, Y)$ es un arco con extremos $A^{'}$ y Y, tenemos que $\alpha([0,s]) = \beta([0,1])$. Luego:

$$\alpha([0,s]) = \bigcup\{\alpha(t) : 0 \leq t < s\} \cup \{\alpha(s)\} = \bigcup\{\beta(u) : 0 \leq u < 1\} \cup \{\beta(1)\} = \beta([0,1]). \tag{3.1}$$

Como $\beta(1) = \alpha(s)$, $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ para cada $t \in (0,s)$ y $\beta(1) \neq \beta(u)$, para cada $u \in [0,1)$. Se sigue que $\bigcup\{\beta(u) : 0 \leq u < 1\} = \bigcup\{\alpha(t) : 0 \leq t < s\}$. Con lo cual probamos la afirmación.

Ahora probemos nuestro teorema, siguiendo una serie de pasos.

Paso 1. $t_0 > 0$, $t_0 \in T$ y $\overline{int_Y(\alpha(s))} = \overline{int_Y(\alpha(t_0))} = \alpha(t_0)$.

Por el *Lema 2.45* tenemos que $A^{'} \subseteq int_Y(\alpha(s))$. Por el *Teorema 1.61*, $int_Y(\alpha(s))$ es conexo y así $\overline{int_Y(\alpha(s))} \in C(Y)$. Por el *Lema 2.28*, tenemos que $\overline{int_Y(\alpha(s))} \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$. Por el *Teorema 3.5* y el *Lema 2.9*, tenemos que $\overline{int_Y(\alpha(s))} = \alpha(s_0)$ con $s_0 \in [0,s]$, puesto que $C(A^{'}, Y) = \alpha([0,1])$ y $\overline{int_Y(\alpha(s))} \subset \alpha(s)$. Observemos que $s_0 \in T$. Además, $A^{'} \subset \alpha(s_0) \subset \alpha(s)$, así $s_0 > 0$. Se sigue que $0 < s_0 \leq t_0$, se concluye que $t_0 > 0$.

Consideramos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en T tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Notemos que $\mathbb{D}_{(Y,a)} = \{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\} \cup \{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : \alpha(t_0) \subset E\}$. Entonces $\overline{\bigcup\{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\}} \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$.

Afirmación: $\overline{\bigcup\{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\}} = \overline{\bigcup\{\alpha(t_n); n \in \mathbb{N}\}}$.

$\supset]$ Se sigue dado que $\{\alpha(t_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\}$, entonces $\overline{\bigcup\{\alpha(t_n) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\bigcup\{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\}}$.

$\subset]$ Como $\bigcup\{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\} \subset \alpha(t_0)$, entonces $\overline{\bigcup\{E \in \mathbb{D}_{(Y,a)} : E \subset \alpha(t_0)\}} \subset \alpha(t_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(t_n) = \overline{\bigcup\{\alpha(t_n) : n \in \mathbb{N}\}}$. Con lo cual queda demostrada la afirmación.

Luego, $\alpha(t_0) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$. Es decir, $t_0 \in T$.

Finalmente:

$$\overline{int_Y(\alpha(s))} = \alpha(s_0) \subset \alpha(t_0) = \overline{int_Y(\alpha(t_0))}. \tag{3.2}$$

Por otro lado, $t_0 \leq s$, entonces:

$$\overline{int_Y(\alpha(t_0))} \subset \overline{int_Y(\alpha(s))}. \tag{3.3}$$

Concluimos que $\overline{int_Y(\alpha(s))} = \overline{int_Y(\alpha(t_0))} = \alpha(t_0)$.

Paso 2. $s \in T$. En particular, $s < 1$.

Supongamos que $s \in T$. Observemos que $\{\alpha(t) \in C(A', Y) : \alpha(t_0) \subsetneq \alpha(t) \subsetneq \alpha(s)\} \cap \mathbb{D}_{(Y,a)} = \emptyset$. Se sigue que $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ forman un salto en $\mathbb{D}_{(Y,a)}$, entonces por el *Teorema 2.51*, tenemos que $\overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \in C(Y)$ es indescomponible y dado que, $X \in \mathcal{P}$, por el *Lema 2.15*, se sigue que $\{p \in X : C(p, X)$ tiene puntos de corte$\}$ es no numerable. Entonces $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ es no numerable, lo cual es una contradicción ya que $X \in \mathcal{P}$. Por esto, $s \notin T$.

Paso 3. Si $K' = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)}$, entonces $K' \in C(y, Y)$ y $\{y\} \subsetneq K' \subsetneq Y$.

Por el *Lema 3.5*, $C(A', Y)$ es un arco. Más aún $\alpha(t_0), \alpha(s) \in C(A', \alpha(s))$, entonces por el *Lema 2.10*, se sigue que $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)$ es conexo y así, $K' \in C(Y)$. Notemos que $y \in K'$, ya que $y \in \alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K'$. Por esto $K' \in C(y, Y)$.

Consideramos, $t_0 < t < s$, entonces $\alpha(t_0) \subsetneq \alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$. Sea $x \in \alpha(t) \setminus \alpha(t_0)$, notemos que $x \neq y$, entonces, $x \in \alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K'$. Por esto, $x \in K' \setminus \{y\}$. Luego, $\{y\} \subsetneq K'$. Por otro lado, como $s < 1$, entonces $K' \subset \alpha(s) \subsetneq Y$, se sigue que $K' \subsetneq Y$. Con lo cual queda probado el paso 3.

Paso 4. Si $K \in C(y, Y)$ tal que $(K \setminus K') \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$, entonces $K' \subset K$.

Bastará con demostrar que $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K$.

Si $\alpha(s) \subset K$, concluimos lo deseado. Supongamos lo contrario, es decir, $\alpha(s) \cap [(Y \setminus \alpha(t_0)) \cap (Y \setminus K)] \neq \emptyset$. Por la continuidad de α, y puesto que $(Y \setminus \alpha(t_0)) \cap (Y \setminus K)$ es un conjunto abierto en Y, existe $r' \in (t_0, s)$ tal que $\alpha(r') \cap [(Y \setminus \alpha(t_0)) \cap (Y \setminus K)] \neq \emptyset$. Fijemos un punto $w \in (\alpha(r') \setminus \alpha(t_0)) \setminus K$.

Consideremos $\alpha(t_0) \cup K \in C(A', Y)$ y observemos que $y \in (\alpha(t_0) \cup K) \setminus \alpha(r')$ y $w \in \alpha(r') \setminus (\alpha(t_0) \cup K)$. Luego, $\alpha(t_0) \cup K$ y $\alpha(r')$ no son comparables en $C(A', Y)$. Lo cual es una contradicción por el *Teorema 3.5* y el *Lema 2.9*. Así, $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K$. Se sigue que $K^{'} = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \subset K$.

Paso 5. Si $K \in C(y, Y)$ tal que:

i) $(K \setminus K^{'}) \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$.

ii) $\alpha(s) \not\subset \alpha(t_0) \cup K$.

Entonces $\alpha(t_0) \cap K = \emptyset$.

Supongamos que $\alpha(t_0) \cap K \neq \emptyset$, se sigue que $\alpha(t_0) \cup K \in C(A^{'}, Y)$. Dado que $(K \setminus K^{'}) \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$, existe $x \in (K \cap Y) \setminus K^{'} = (K \cap Y) \setminus (\overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)}) \subset (K \cap Y) \setminus \alpha(s) \subset K \setminus \alpha(s) \subset (K \cup \alpha(t_0)) \setminus \alpha(s)$. Tenemos que $K \cup \alpha(t_0) \not\subset \alpha(s)$. Entonces, $\alpha(s)$ y $\alpha(t_0) \cup K$ son elementos de $C(A^{'}, Y)$ que no son comparables. Lo cual es una contradicción por el *Teorema 3.5* y el *Lema 2.9*. Se sigue que $\alpha(t_0) \cap K = \emptyset$.

Paso 6. Si $K \in C(y, Y)$ tal que $(K \setminus K^{'}) \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t_0) \cup K$.

Observemos que $\alpha(s) \cup K \in C(A^{'}, Y)$ y $\alpha(s) \subset \alpha(s) \cup K \subset Y$. Además $C(A^{'}, Y) = \alpha([0,1])$, entonces existe $s_1 \in [s, 1]$ tal que $\alpha(s_1) = \alpha(s) \cup K$. Dado que $(K \setminus K^{'}) \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$, existe $x \in (K \setminus K^{'}) \setminus \alpha(t_0)$. Luego, $x \in K \setminus \alpha(s)$. Se sigue que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(s) \cup K \subset Y$. Entonces $s_1 > s$. Sea $s_2 \in [s, s_1) \cap T$.

Supongamos que $\alpha(s) \not\subset \alpha(t_0) \cup K$, entonces por el Paso 5, $\alpha(t_0) \cap K = \emptyset$, se sigue que $\alpha(t_0) \subset Y \setminus K$, es decir, $\alpha(t_0) \in \Gamma(Y \setminus K)$ abierto en $C(Y)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(t_0 + \delta) \in \Gamma(Y \setminus K)$, por esto $\alpha(t_0 + \delta) \cap K = \emptyset$. Dado que $y \in \alpha(s) \cap K$, tenemos que $t_0 + \delta < s$.

Sea $z \in \alpha(t_0 + \delta) \setminus \alpha(t_0)$. Por el paso 1, $z \notin \overline{int_Y(\alpha(s))}$. Observemos que $z \notin K$.

Dado que $s_2 < s_1$, tenemos que $\alpha(s_2) \subset \alpha(s_1) = \alpha(s) \cup K$, se sigue que $\alpha(s_2) \setminus \alpha(s) \cup K$ y así $\overline{\alpha(s_2) \setminus \alpha(s)} \cup K$. Tenemos que , $z \notin \overline{int_Y(\alpha(s))} \cup \overline{\alpha(s_2) \setminus \alpha(s)}$. Entonces, por el *Lema 2.49*, tenemos que $z \in X \setminus \overline{int_Y(\alpha(s_2))} = X \setminus \alpha(s_2) \subset X \setminus \alpha(t_0 + \delta)$. Lo cual es una contradicción. Por lo que la prueba del paso 6 está completa.

Paso 7. Si $K^{'} = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)}$, entonces $A^{'} \cap K^{'} = \emptyset$ y $B^{'} \cap K^{'} = \emptyset$. En particular, $\{a, b\} \cap K^{'} = \emptyset$ para cada $a \in A^{'}$ y $b \in B^{'}$, además $y \notin A^{'} \cup B^{'}$.

Dado que $s < 1$, tenemos que $\alpha(s) \subset Y \setminus B^{'}$. Por esto $K^{'} = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \subset Y \setminus B^{'}$, es decir, $b \notin K^{'}$ para cada $b \in B^{'}$.

Además, $int_Y(\alpha(t_0)) \cap \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} = \emptyset$. Por el paso 1, $A^{'} \subset int(\alpha(t_0))$. Se sigue que

$A^{'} \cap K^{'} = \emptyset$, es decir, $a \notin A^{'}$ para cada $a \in A^{'}$.

Finalmente, por el paso 3, tenemos que $K^{'} \in C(y, Y)$. Se sigue que $y \notin A^{'} \cup B^{'}$.

Paso 8. $K^{'}$ es un subcontinuo terminal en y respecto de Y.

Consideremos $K \in C(y, Y)$, si $K \subset K^{'}$ tenemos lo deseado. Supongamos que $K \setminus K^{'} \neq \emptyset$. Si $(K \setminus K^{'}) \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$, por el paso 4, $K^{'} \subset K$. Supongamos que $(K \setminus K^{'}) \cap \alpha(t_0) = \emptyset$. Entonces, por el paso 6, tenemos que $\alpha(S) \subset \alpha(t_0) \cup K$. Más aún, $K^{'} = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \subset K$. Se sigue que $K^{'}$ es terminal en y, respecto a Y.

Por el *Lema 3.4* y por el paso 7, $C(y, Y)$ no tiene puntos de corte. En particular $K^{'}$ no es punto de corte de $C(y, Y)$ y por esto, $K^{'}$ no es terminal en y, respecto a Y, por el *Lema 2.7*. Lo cual contradice el paso 8. Con lo cual concluimos que T es denso en $[0, 1]$. □

Proposición 3.7. *Sean $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio no degenerado de X. Si Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$ para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$, entonces $C(A^{'}, Y) \setminus \{A^{'}\} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}$.*

Demostración.
Por el *Teorema 3.5*, sabemos que $C(A^{'}, Y)$ es un arco. Por el *Lema 2.9*, tenemos que cualesquiera dos elementos son comparables. Luego por estos dos hechos, existe un único arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to C(A^{'}, Y)$ tal que une a $A^{'}$ con Y. Sea $D \in C(A^{'}, Y) \setminus \{A^{'}\}$. Entonces existe $s \in (0, 1]$ tal que $D = \alpha(s)$.

Por el *Teorema 3.6*, podemos considerar una sucesión creciente, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, en $[0, 1]$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ y $\{\alpha(s_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}$. Además, $\alpha(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha(s_n)}$. Por el paso 1, de la demostración del *Teorema 3.6*, tenemos que $D = \alpha(s) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$. Se concluye que $C(A^{'}, Y) \setminus \{A^{'}\} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}$. □

Lema 3.8. *Sean X un continuo y $L, K \subset X$ cerrados. Si $w \in Fr(L) \setminus K$, entonces $w \in Fr(L \cup K)$.*

Demostración.
Dado que $w \in Fr(L) \setminus K$. Para U abierto en X que contiene a w, tenemos que $U \cap L \neq \emptyset$, entonces $U \cap (L \cup K) \neq \emptyset$.

Dado que $w \in U \setminus K$ y $U \setminus K$ es abierto, tenemos que $(U \setminus K) \cap (X \setminus L) \neq \emptyset$. Observemos que $(U \setminus K) \cap (X \setminus L) \neq \emptyset = (U \setminus K) \setminus L = U \setminus (L \cup K)$. Así $U \cap (X \setminus (L \cup K)) \neq \emptyset$. Se sigue que $w \in Fr(L \cup K)$. □

Proposición 3.9. *Sean $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio no degenerado de X. Si Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$ para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$, entonces $Fr_Y(D)$ es un conjunto degenerado para cada $D \in C(A^{'}, Y) \setminus \{A^{'}, Y\}$.*

Demostración.
Sea $D \in C(A', Y) \setminus \{A', Y\}$. Por el *Teorema 3.5*, tenemos que $C(A', Y)$ es un arco y por el *Lema 2.9* cualesquiera dos elementos de $C(A', Y)$ son comparables. Se sigue que existe un único arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(A', Y)$ que une a A' con Y. Tomemos $s \in (0,1)$ tal que $\alpha(s) = D$.

Supongamos que $Fr_Y(\alpha(s))$ tiene más de un punto. Sea $x \in Fr_Y(\alpha(s))$. Por el *Lema 2.45*, tenemos que $A' \subset int(\alpha(s))$, por esto $x \notin A'$. Además $B' \cap \alpha(s) = \emptyset$, entonces $x \notin B'$. Es decir, $x \in Y \setminus (A' \cup B')$, se sigue, por el *Teorema 3.4*, que $C(x, Y)$ no tiene puntos de corte. Por el *Lema 2.12*, tenemos que para cada $A \in C(A', Y) \setminus \{Y\}$, $Fr_Y(A) \in C(Y)$. Se sigue que $Fr_Y(\alpha(s)) \in C(Y)$, más aún, $Fr_Y(\alpha(s))$ no es un punto de corte de $C(x, Y)$.

Como $Fr_Y(\alpha(s))$ tiene más de un punto, $Fr_Y(\alpha(s)) \neq \{x\}$; y como $Fr_Y(\alpha(s)) \subset \alpha(s) \neq Y$, tenemos que $Fr_Y(\alpha(s)) \neq Y$. Luego, por el *Lema 2.7*, tenemos que $Fr_Y(\alpha(s))$ no es terminal en x respecto de Y, es decir, existe $B \in C(x, Y)$ tal que $B \setminus Fr_Y(\alpha(s)) \neq \emptyset$ y $Fr_Y(\alpha(s)) \setminus B \neq \emptyset$. Entonces tenemos dos casos:

Caso 1. $B \setminus \alpha(s) \neq \emptyset$.

Sea $a \in A'$ y $w \in Fr_Y(\alpha(s)) \setminus B$. Se tiene que $B \cup \alpha(s) \in C(A', Y)$ y no es irreducible entre a y w. Además, por la *Proposición 3.7*, sabemos que $\alpha(S) \cup B \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$, y por el *Lema 3.8*, $w \in Fr_Y(\alpha(s) \cup B)$. Pero esto es una contradicción por el *Lema 2.47*.

Caso 2. $B \setminus \alpha(s) = \emptyset$.

En este caso tenemos que $B \subset \alpha(s)$, notemos que $B \setminus (\overline{Y \setminus \alpha(s)}) \neq \emptyset$ ya que de lo contrario $B \subset Fr_Y(\alpha(s))$ lo cual no puede ser. Por el *Lema 2.10*, tenemos que $Y \setminus \alpha(s)$ es conexo, y así, $\overline{Y \setminus \alpha(s)}$ es conexo. Más aún, dado que Y es irreducible y $s \in (0,1)$, $B' \subset Y \setminus \alpha(s)$. Entonces $B \cup (\overline{Y \setminus \alpha(s)}) \in C(B', Y) \setminus \{B'\}$. Luego, por la *Proposición 3.7*, $B \cup (\overline{Y \setminus \alpha(s)}) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$ y $\alpha(s) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$.

Notemos que $Fr_Y(\overline{Y \setminus \alpha(s)}) = \overline{Y \setminus \alpha(s)} \cap (Y \setminus (\overline{Y \setminus \alpha(s)})) = \overline{Y \setminus \alpha(s)} \cap \overline{\alpha(s)} = Fr_Y(\overline{\alpha(s)}) = Fr_Y(\alpha(s))$. Consideremos $w \in Fr(\alpha(s)) \setminus B = Fr_Y(\overline{Y \setminus \alpha(s)}) \setminus B$. Luego, por el *Lema 3.8*, $w \in Fr_Y(\overline{Y \setminus \alpha(s)} \cup B)$.

Finalmente, $b, w \in \overline{Y \setminus \alpha(s)} \subsetneq B \cup (\overline{Y \setminus \alpha(s)})$, es decir, $B \cup (\overline{Y \setminus \alpha(s)})$ no es irreducible lo cual es una contradicción por el *Lema 2.47*. $\square$

Lema 3.10. *Sea X un continuo irreducible entre los puntos a y b, con $a, b \in X$. Si A y B son subcontinuos de X tales que $a \in A \subsetneq B$ y $B \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$, entonces $\overline{X \setminus B} \subsetneq \overline{X \setminus A}$.*

Demostración.
Notemos que $X \setminus B \subset X \setminus A$ y así $\overline{X \setminus B} \subset \overline{X \setminus A}$. Sea $x \in Fr(B)$. Veamos que

$x \notin Fr(B)$. Como $B \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$, entonces B es irreducible entre a y x. Supongamos que $x \in Fr(A) \subset A$. Entonces A es un continuo que contiene a los puntos a y x. Entonces $A = B$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset$.

Notemos que $\emptyset \neq Fr(A) \subset \overline{X \setminus A}$.

Por otra parte, si $z \in Fr(A) \cap \overline{X \setminus B}$ entonces $z \in A \cap \overline{X \setminus B}$, así $z \in B \cap \overline{X \setminus B}$, ya que $a \subset B$. Luego $z \in Fr(B)$. Por esto, $Fr(A) \cap Fr(B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción por lo hecho anteriormente.

Se sigue que $Fr(A) \cap \overline{X \setminus B} = \emptyset$. En resumen, $\emptyset \neq Fr(A) \subset (\overline{X \setminus A}) \setminus (\overline{X \setminus B})$. Concluimos que $\overline{X \setminus B} \subsetneq \overline{X \setminus A}$. □

Proposición 3.11. *Sea $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio no degenerado de X irreducible entre A' y B', para algunos $A', B' \in C(Y)$. Si $\alpha(s) : [0,1] \to C(A', Y)$ es un arco ordenado que une a A' con Y, entonces para cada $x \in Y \setminus (A' \cup B')$ existe $t \in (0,1)$ tal que $x \in Fr_Y(\alpha(t))$.*

Demostración.
Sea $x \in Y \setminus (A' \cup B')$, $t = \min\{s \in [0,1] : x \in \alpha(s)\}$, $a \in A'$ y $b \in B'$. Observemos que $t \neq 0$, ya que si $t = 0$, entonces $x \in \alpha(0) = A'$. Lo cual no es posible. Además, ya que Y es irreducible entre a y x, existe $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $a, x \in B$. Entonces existe $s' \in (0,1)$ tal que $B = \alpha(s')$. Luego $t \leq s' < 1$, por esto $t \in (0,1)$.

Por el *Lema 2.10*, tenemos que $Y \setminus \alpha(t)$ es conexo y así $\overline{Y \setminus \alpha(t)} \in C(B', Y)$. Además por el *Teorema 3.5*, y por el *Lema 2.9*, existe un único arco ordenado $\beta : [0,1] \to C(B', Y)$ que une a B' con Y, de aquí que $\overline{Y \setminus \alpha(t)} = \beta(s)$ para algún $s \in [0,1]$.

Dado que $x \in \alpha(t)$, bastará con probar que $x \in \overline{Y \setminus \alpha(t)}$. Supongamos lo contrario, es decir, $x \notin \overline{Y \setminus \alpha(t)} = \beta(s)$.

Sea $c = \min\{r \in [0,1] : x \in \beta(r)\}$.

Afirmación: $c > s$.

Notemos que $s \leq c$. Si $s = c$, por la continuidad de β, $x \in \beta(s)$, lo cual es una contradicción. Por esto, $s < c$. Con lo cual queda mostrada la afirmación.

Sea $s_2 \in (s, 1)$ tal que $x \notin \beta(s_2)$. Nuevamente por el *Lema 2.10*, $Y \setminus \beta(s_2)$ es conexo y así $\overline{Y \setminus \beta(s_2)} \in C(A', Y)$. De aquí que, $\overline{Y \setminus \beta(s_2)} = \alpha(r')$, para algún $r' \in [0,1]$ y $x \in \alpha(r')$. Se sigue que $t \leq r'$.

Por la *Proposición 3.7*, $\beta(s_2) \in \mathbb{D}_{(Y,b)}$. Dado que $\beta(s) \subsetneq \beta(s_2)$, por el *Lema 3.10*, $\alpha(r') = \overline{Y \setminus \beta(s_2)} \subsetneq \overline{Y \setminus \beta(s)}$. Por otro lado, como $\overline{Y \setminus \alpha(t)} = \beta(s)$, entonces

$Y \setminus (\overline{Y \setminus \alpha(t)}) = Y \setminus \beta(s)$, se sigue que $\overline{int_Y(\alpha(t))} = \overline{Y \setminus \beta(s)}$. Por la *Proposición 3.7*, tenemos que $\overline{Y \setminus \beta(s)} = \alpha(t)$. Por esto, $\alpha(r') \subsetneq \alpha(t)$. Así que $r' < t$, lo cual es una contradicción a la elección de t.

Se sigue que $x \in \overline{Y \setminus \alpha(t)}$ y por esto $x \in Fr_Y(\alpha(t))$. $\square$

Teorema 3.12. *Sea $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio de X. Si Y es no degenerado, entonces Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$ para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$.*

Demostración.
Por el *Teorema 2.42*, dado que $X \in \mathcal{P}$ y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$, entonces Y es unicoherente. Por el *Teorema 2.40*, Y es no contiene triodos ni triodos débiles. Luego por el *Teorema 2.43*, Y es irreducible entre dos de sus puntos. Más aún, por el *Teorema 2.15*, dado que $X \in \mathcal{P}$ tenemos que Y es hereditariamente descomponible.

Por el *Lema 1.64*, tenemos que existen únicos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$ tales que Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$. $\square$

Teorema 3.13. *Sean $X \in \mathcal{P}$ y Y un subcontinuo propio no degenerado de X. Si Y es irreducible entre $A^{'}$ y $B^{'}$, para algunos $A^{'}, B^{'} \in C(Y)$, entonces $|A^{'}| = 1 = |B^{'}|$.*

Demostración.
Supongamos que $|A^{'}| > 1$. Sea $a \in A^{'}$ tal que $C(a, X)$ no tiene puntos de corte. Por el *Lema 2.7*, existe $K^{'} \in C(a, X)$ tal que $K^{'} \setminus A^{'} \neq \emptyset$ y $A^{'} \setminus K^{'} \neq \emptyset$, pues $A^{'}$ no es punto de corte en $C(a, X)$. Por el *Lema 2.45*, $K^{'} \setminus Y \neq \emptyset$. Sea L la componente de $A^{'} \cap K^{'}$ tal que $a \in L$. Consideremos α el arco ordenado que une a L con $K^{'}$. Por el *Lema 2.26*, $A^{'} \cap K^{'}$ tiene a lo más dos componentes, podemos elegir $\delta \in (0, 1)$ tal que:

i) $\alpha(\delta) \cap Y = L \subset A^{'}$.

Esto es fácil de ver, puesto que si consideramos $L^{'}$ la componente de $A^{'} \cap K^{'}$ tal que $L^{'} \neq L$. Consideramos $\delta \in (0, 1)$ tal que $\alpha(\delta) \cap L^{'} = \emptyset$.

Afirmación: $\alpha(\delta) \subset A^{'}$.

Notemos que $\alpha(\delta)$ es un conexo contenido en $A^{'} \cap K^{'}$ tal que $\alpha(\delta) \cap L^{'} = \emptyset$ y $L \subset \alpha(\delta)$, se sigue que $\alpha(\delta) \cap Y = L$.

ii) $Y \cup \alpha(\delta) \neq X$.

Esto se sigue puesto que Y y $\alpha(\delta) \subset K^{'}$ son subcontinuos propios de X que contienen a a.

iii) $\alpha(\delta) \setminus Y$ es conexo.

Se sigue del *Lema 2.10*.

Sea $K = \alpha(\delta)$. Observemos que $K \in C(a, X)$, $K \setminus A' \neq \emptyset$, $A' \setminus K \neq \emptyset$ y $Y \subsetneq Y \cup K \subsetneq X$. Definamos $Y' = Y \cup K$. Por el *Teorema 3.12*, Y' es irreducible entre dos subcontinuos C' y D' de Y'. Podemos asumir que $C' \subset K \setminus Y$ y $D' \subset Y \setminus K$. Más aún, $D' \subset B'$. Para probar esto, supongamos que existe $d \in D' \setminus B'$. Entonces existe H un subcontinuo propio de Y tal que $d \in H$ y $H \cap A' \neq \emptyset$. Notemos que $H \cup A' \cup K \in C(Y) \setminus \{Y\}$, el cual contiene a d y C'. Por esto, $H \cup A' \cup K = Y$. Por otra parte, $\emptyset \neq B' \subset Y$ y $B' \cap (H \cup A' \cup K) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $D' \subset B'$.

Ahora, consideremos γ un arco ordenado que une a C' con Y'. Dado que $\overline{K \setminus Y}$ y $K \cup A'$ son elementos de $C(C', Y)$, por el *Teorema 3.5* y el *Lema 2.9*, existen $s_1, s_2 \in [0, 1]$ tales que $\gamma(s_1) = \overline{K \setminus Y}$ y $\gamma(s_2) = K \cup A'$. Más aún, $\gamma(s_1) \subset K \subsetneq K \cup A' = \gamma(s_2)$ y así $s_1 < s_2$.

Sea $z \in Fr_{Y'}(\gamma(s_1))$. Veamos que $z \in Fr_{Y'}(\gamma(s_2))$.

Sea U un abierto de Y' tal que $z \in U$. Sabemos que $K \cap Y = K \cap A'$ y que $Y' = K \cup Y = (K \setminus Y) \cup (K \cap Y) \cup (Y \setminus K)$. Por otro lado, $\emptyset \neq U \setminus \gamma(s_1) \subset U \setminus (K \setminus Y)$. Además, $\emptyset \neq U \cap [(K \cap Y) \cup (Y \setminus K)] \subset U \cap [A' \cup (Y \setminus K)] = U \cap Y$. Ahora, por el *Teorema 5 de §48 en [10]*, tenemos que $int(A') = \emptyset$. Así, $U \cap Y \not\subset A'$. Más aún, $\emptyset \neq (U \cap Y) \setminus (K \cup A') \subset U \setminus \gamma(s_2)$. Se sigue que $z \in Fr_{Y'}(\gamma(s_2))$.

Se sigue que $Fr_{Y'}(\gamma(s_1)) \cap Fr_{Y'}(\gamma(s_2)) \neq \emptyset$.

Si $c \in C'$, por la *Proposición 3.7*, tenemos que $\gamma(s_1), \gamma(s_2) \in \mathbb{D}_{(Y', c)}$. Por el *Teorema 2.48* y dado que $\gamma(s_1) \subset \gamma(s_2)$, se sigue $Fr_{Y'}(\gamma(s_1)) \subset \gamma(s_1) \subset int_{Y'}(\gamma(s_2)) \subset \gamma(s_2) \setminus Fr_{Y'}(\gamma(s_2))$, lo cual es una contradicción. Por esto $|A'| = 1$.

De forma análoga se muestra que $|B'| = 1$. $\square$

Teorema 3.14. *Sea $X \in \mathcal{P}$. Si Y es un subcontinuo propio no degenerado de X, entonces Y es un arco.*

Demostración.
Por el *Teorema 3.12* y el *Teorema 3.13*, tenemos que Y es irreducible entre los puntos a y b para algunos $a, b \in Y$. Sea α un arco ordenado de $\{a\}$ a Y. Sea $x \in Y \setminus \{a, b\}$, por el *Teorema 3.11*, existe $t \in [0, 1]$ tal que $x \in Fr_Y(\alpha(t))$. Más aún, por el *Teorema 3.9*, $x = Fr_Y(\alpha(t))$.

Notemos que $Y = int_Y(\alpha(t)) \cup \{x\} \cup (Y \setminus \alpha(t))$. Se sigue que $Y \setminus \{x\} = int_Y(\alpha(t)) \cup (Y \setminus \alpha(t))$. Observemos que $A \in int_Y(\alpha(t))$ y $b \in (Y \setminus \alpha(t))$. Luego, $Y \setminus \{x\}$ es no conexo. Se sigue que x es un punto de corte de Y. Se concluye que a y b son los únicos puntos de no corte en Y. Así, por el *Teorema 1.43*, tenemos que Y es un arco. $\square$

Teorema 3.15. *Si $X \in \mathcal{P}$ es descomponible, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración.
Observemos que $X = A \cup B$ con $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$. Por el *Teorema 3.14*, A y B son arcos. Por otro lado, ya que $X \in \mathcal{P}$, por el *Lema 2.40*, X no contiene triodos ni triodos débiles. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $A \cap B$ es conexo.

Se sigue que $A \cap B \in C(X) \setminus \{X\}$, de tal forma que $A \cap B$ es un arco o un punto. Luego, $A \cup B = X$ es un arco.

Caso 2. $A \cap B$ es no conexo.

Por el *Lema 2.26*, $A \cap B$ tiene exactamente dos componentes, definamos K_1 y K_2. Por el mismo argumento que en el *Caso 1*, K_1 y K_2 son arcos o puntos. Luego, $X = A \cup B$ es una curva cerrada simple. $\square$

Definición 3.16. *Un continuo X es* **círculo similar**, *si para cada $p \in X$, $C(p, X)$ es una $2-$celda.*

Observación 3.17. *Toda curva cerrada simple es círculo similar.*

Observación 3.18. *Si X es círculo similar, entonces $X \in \mathcal{P}$.*

§2 Arcos y curvas cerradas simples en la clase $\mathcal{P}$

Teorema 3.19. *Sea X un continuo. Entonces X es un arco si, y sólo si, X es arco similar y descomponible.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Por el *Lema 2.16*, es arco similar. Además todo arco es descomponible.

$\Leftarrow]$ Como X es arco similar, entonces $X \in \mathcal{P}$. Luego, como X es descomponible, por el *Teorema 3.15*, X es un arco o una curva cerrada simple. Como las curvas cerradas simples no son arco similares, se sigue que X es un arco. $\square$

Teorema 3.20. *Sea X un continuo. Entonces X es una curva cerrada simple si, y sólo si, X es círculo similar y descomponible.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Por el *Lema 2.17*, es círculo similar. Además toda curva cerrada simple es descomponible.

$\Leftarrow$] Como X es círculo similar, entonces $X \in \mathcal{P}$. Luego, como X es descomponible, por el *Teorema 3.15*, X es un arco o una curva cerrada simple. Como los arcos no son círculo similares, se sigue que X es una curva cerrada simple. □

Teorema 3.21. *Sea X un continuo. Entonces X es arco similar si, y sólo si, X tiene exactamente dos puntos extremos, digamos a y b, y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Es la prueba del *Corolario 2.24*.

$\Rightarrow$] Dado que X es arco similar tiene exactamente dos puntos extremos. Además, ya que $X \in \mathcal{P}$, entonces, por el *Teorema 3.14*, para cada Y subcontinuo propio no degenerado de X tenemos que Y es un arco. □

Teorema 3.22. *Sea X un continuo. Entonces X es círculo similar si, y sólo si, X no tiene puntos extremos y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Tenemos dos casos:

Caso 1. X es indescomponible.

Por el *Teorema 2.23*, se tiene que X es círculo similar.

Caso 2. X es descomponible.

Ya que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, se sigue que X es un arco o una curva cerrada simple. Como X no tiene puntos extremos, tenemos que X es una curva cerrada simple. Por esto, X es círculo similar.

$\Rightarrow$] Dado que X es círculo similar no tiene puntos extremos. Además, ya que $X \in \mathcal{P}$, entonces, por el *Teorema 3.14*, para cada Y subcontinuo propio no degenerado de X tenemos que Y es un arco. □

Definición 3.23. *Dados $X \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, X es de* **tamaño n**, *si la cardinalidad del conjunto $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ es n.*

Diremos que X es de **tamaño** *ω, si el conjunto $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ es infinito numerable.*

Teorema 3.24. *Sea $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\omega\}$. Entonces $X \in \mathcal{P}$ y su tamaño es n si, y sólo si, X tiene exactamente n puntos extremos y todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Ya que $X \in \mathcal{P}$, por definición, $C(p, X)$ es un arco o una $2-$celda para cada $p \in X$. Luego, como X es de tamaño n, entonces $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ tiene n elementos. Se sigue de estos dos hechos que X tiene exactamente n puntos extremos. Por el *Teorema 3.14*, todos los subcontinuos propios no degenerados de X son arcos.

$\Leftarrow]$ Ya que X tiene exactamente n puntos extremos, se sigue que $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ tiene n elementos. Entonces tenemos dos casos:

Caso 1. X es descomponible.

Ya que todos los subcontinuos propios no degenerados de X son arcos. Se sigue que X es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso $X \in \mathcal{P}$.

Caso 2. X es indescomponible.

Por el *Teorema 2.23*, $C(p, X)$ es una $2-$celda o un arco para cada $p \in X$. Como $\{p \in X : C(p, X)$ es un arco$\}$ tiene n elementos, se sigue que $X \in \mathcal{P}$. $\square$

Capítulo 4

El hiperespacio $K(X)$

En este capítulo hablaremos brevemente sobre el hiperespacio $K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}$, como un subespacio de $C(C(X))$, donde X es un continuo, lo consideremos con con la métrica de Hausdorff respectiva, denotada por H^2, y hablaremos de algunas propiedades de los continuos que influyen en las propiedades topológicas de $K(X)$.

4.1 Continuos de Kelley

En esta sección hablaremos de un tipo de continuos especiales. Además de una propiedad importante en el hiperespacio de continuos $K(X)$.

Definición 4.1. *Sean X un continuo con métrica d y $p \in X$, X es* **de Kelley en el punto p**, *si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ y cada $A \in C(p, X)$, existe $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$.*

Diremos que X **es de Kelley** *si es de Kelley en cada uno de sus puntos.*

Proposición 4.2. *Dados X un continuo y $p \in X$. Entonces X es de Kelley en $p \in X$ si, y sólo si, para cada $A \in C(p, X)$ y para toda $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X con $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.*

Demostración.
$\Leftarrow]$ Supongamos que X no es de Kelley en p. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para $n > 0$, existen $q_n \in X$ con $d(p, q_n) < \frac{1}{n}$ y $A_n \in C(p, X)$ tal que para todo $B \in C(q_n, X)$ se tiene que $H(A_n, B) \geq \varepsilon$, con $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$ para cada $p \in X$. Luego, como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(p, X)$, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, para algún A en $C(p, X)$. Además, $H(A_{n_k}, B) \geq \varepsilon$ para todo $B \in C(q_{n_k}, X)$ y $d(p, q_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$. Por hipótesis, para $k \in \mathbb{N}$, existe $B_{n_k} \in C(q_{n_k}, X)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k} = A$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_{n_k}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $k > N_1$.

De forma análoga, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_{n_k}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $k > N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces, para $k > N$:

$$H(A_{n_k}, B_{n_k}) \leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.1}$$

Lo cual es una contradicción. Por esto, X es de Kelley en p.

$\Rightarrow$] Sea $A \in C(p, X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una suceción en X tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Probaremos que existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Definamos, para $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in C(p_n, X)$ tal que $H(A, A_n) = \min\{H(A, B) : B \in C(p_n, X)\}$. Observemos que A_n existe, ya que la dístancia a un punto fijo es una función continua y $C(p_n, X)$ es un compacto.

Veamos que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Sea $\varepsilon > 0$, como X es de Kelley en p, existen $\delta > 0$ tal que para cada $q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ y $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, para $\delta > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \delta$, para cada $n \geq N_1$. Luego, para cada $n \geq N_1$, existe $B_n \in C(p_n, X)$ tal que $H(A, B_n) < \varepsilon$. Se sigue que $H(A, A_n) \leq H(A, B_n) < \varepsilon$, para cada $n \geq N_1$. Concluimos que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. $\square$

Proposición 4.3. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es de Kelley en p si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera par de puntos $p, q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ y para cada $A \in C(p, X)$, existe $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $p_n, q_n \in X$ tales que $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$ y para cada $A_n \in C(p_n, X)$, $H(A_n, B) \geq \varepsilon$ para cada $B \in C(q_n, X)$.

Sea $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$ con $p \in X$. Del mismo modo, existe $\{q_{n_{k_s}}\}_{s=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente digamos a $q \in X$. Notemos que $p = q$.

Como X es de Kelley en p, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, y) < \delta$ para $y \in X$, y para cada $D \in C(y, X)$, existe $A \in C(p, X)$ tal que $H(D, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $s \geq N_1$, $d(p_{n_{k_s}}, p) < \delta$ y $D(q_{n_{k_s}}, p) < \delta$. Se sigue que, para $s \geq N_1$, $A_{n_{k_s}} \in C(p_{n_{k_s}}, X)$ existe $A \in C(p, X)$ tal que $H(A_{n_{k_s}}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De manera análoga, para $A \in C(p, X)$, existe $B_{n_{k_s}} \in C(q_{n_{k_s}}, X)$ tal que $H(A, B_{n_{k_s}}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que:

$$H(A_{n_{k_s}}, B_{n_{k_s}}) \leq H(A_{n_{k_s}}, A) + H(A, B_{n_{k_s}}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.2}$$

Lo cual contradice la elección de $A_{n_{k_s}}$.

$\Leftarrow$] Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ y para cada $A \in C(p,X)$, existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$. Se sigue que X es de Kelley en el punto p. $\square$

Lema 4.4. *Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
a) $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$.

b) Para cada $A \in C(p,X)$ existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$, y viceversa.

Demostración.
Observemos que $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$, donde H^2 es la métrica de Hausdorff en $C(C(X))$.

Para cada $A \in C(p,X)$ existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$, si, y sólo si, $C(p,X) \subset N(\varepsilon, C(q,X))$ y $C(q,X) \subset N(\varepsilon, C(p,X))$. Este par de hechos es equivalente a $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$. $\square$

Definición 4.5. *Para un continuo X, definimos la función $\alpha_X : X \to K(X)$ dada por $\alpha_X(p) = C(p,X)$, para cada $p \in X$.*

Lema 4.6. *Para cualquier continuo X, α_X es una función biyectiva.*

Demostración.
i) α_X es inyectiva.

Sean $p, q \in X$, con $p \neq q$. Observemos que $\{p\} \in C(p,X) \setminus C(q,X)$. Se sigue que $C(p,X) \neq C(q,X)$. Por esto α_X es inyectiva.

ii) α_X es sobreyectiva.

Sea $C(p,X) \in K(X)$. Notemos que $p \in X$ y $\alpha_X(p) = C(p,X)$. Se sigue que α_X es sobreyectiva.

Por *i*) y *ii*), tenemos que α_X es biyectiva. $\square$

Definición 4.7. *Para un continuo X, definimos la función $\omega_X : K(X) \to X$ dada por $\omega_X(C(p,X)) = p$, para todo $C(p,X) \in K(X)$.*

Lema 4.8. *Para cualquier continuo X, ω_X es una función continua.*

Demostración.
Dado $\varepsilon > 0$, si $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$, para $p, q \in X$, entonces, existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(\{p\}, B) < \varepsilon$, entonces $B \subset N(\varepsilon, \{p\})$, es decir, $d(p,q) < \varepsilon$. Considerando $\delta = \varepsilon$, concluimos que ω_X es continua. $\square$

Observación 4.9. *Notemos que ω_X es la función inversa de α_X.*

Teorema 4.10. *Sea X un continuo. Entonces X es de Kelley si, y sólo si, α_X es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN.
$\Rightarrow$] Como X es de Kelley, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ entonces ,por el *Lema 4.4*, $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$, es decir, $H^2(\alpha_X(p), \alpha_X(q)) < \varepsilon$. Se sigue que α_X es uniformemente continua.

$\Leftarrow$] De forma análoga a la necesidad, dado que α_X es uniformemente continua tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $p, q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ entonces $H^2(\alpha_X(p), \alpha_X(q)) < \varepsilon$, es decir, $H^2(C(p,X), C(q,X)) < \varepsilon$. Tenemos que X es de Kelley, por el *Lema 4.4*. □

Teorema 4.11. *Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) X es de Kelley.

b) La función α_X es continua.

c) El hiperespacio $K(X)$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN.
a) $\Rightarrow$ *b)* Dado que X es de Kelley, por el *Teorema 4.10* se sigue que α_X es uniformemente continua y por tratarse de un espacio métrico compacto, tenemos que esto es equivalente a que α_X sea continua.

b) $\Rightarrow$ *c)* Por la forma en que se define la función α_X y dado que la compacidad es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, tenemos que $K(X)$ es compacto.

c) $\Rightarrow$ *a)* Como $K(X)$ es compacto y ω_X es una biyección continua, por los *Lemas 4.8 y 4.6*, tenemos que ω_X es un homeomorfismo entre $K(X)$ y X. Luego, α_X es uniformemente continua, se sigue que X es de Kelley por el *Teorema 4.10.* □

4.2 Continuos localmente conexos

En esta sección hablaremos acerca de continuos localmente conexos y como esta propiedad influye en el hiperespacio $K(X)$.

Definición 4.12. *Un espacio topológico X es* **localmente conexo***, si para cada $p \in X$ y para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe V un abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$.*

Definición 4.13. *Para un continuo X y $B \subset X$, definimos $K(B,X) = \{C(p,X) : p \in B\}$.*

Lema 4.14. *Sea X un continuo. Si B es un subespacio localmente conexo de X, entonces $\alpha_B : B \to K(B, X)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN.
Sean $p \in B$ y $\varepsilon > 0$. Dado que B es localmente conexo, podemos encontrar un abierto y conexo U en B tal que $p \in U$ y $diam(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $q \in U$ y $A \in C(p, X)$. Definimos $D = A \cup \overline{U}$. Entonces $D \subset N(\varepsilon, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, D)$, es decir, $H(A, D) < \varepsilon$. Notemos que $A \cap U \neq \emptyset$, así $D \in C(X)$, más aún $D \in C(q, X)$. De tal manera que $C(p, X) \subset N(\varepsilon, C(q, X))$. De forma análoga se prueba que $C(q, X) \subset N(\varepsilon, C(p, X))$. De aquí que $H(\alpha_B(p), \alpha_B(q)) < \varepsilon$. Es decir, α_B es continua. $\square$

Corolario 4.15. *Sea X un continuo. Si B es un subespacio localmente conexo de X, entonces B es homeomorfo a $K(B, X)$. En particular, $K(B, X)$ es localmente conexo.*

DEMOSTRACIÓN.
Por el *Lema 4.14*, el *Lema 4.6* y el *Lema 4.8*, tenemos que α_B es un homeomorfismo entre B y $K(B, X)$.

Finalmente, como la conexidad local es una propiedad que se preserva entre funciones continuas y abiertas tenemos que $K(B, X)$ es localmente conexo. $\square$
En general no se cumple que si $K(X)$ es localmente conexo para algún continuo X, necesariamente X sea localmente conexo. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.16. *Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 2]\}$ y $B = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Definimos $X = A \cup B$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo.*

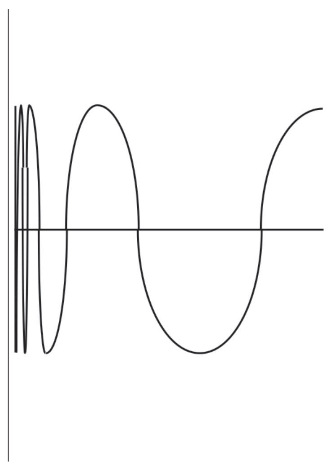

Figura 4.1: $X = A \cup B$.

Primero, notemos que $X = A \cup \overline{B}$ y que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Por esto, X es un continuo. Observemos que X no es localmente conexo en todos los puntos de $A \cap \overline{B}$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo.

Observemos que A y B son subespacios localmente conexos de X, entonces por el *Corolario 4.15* tenemos que $K(A,X)$ es un arco y $K(B,X)$ es un rayo.

Afirmación. $K(A,X)$ y $K(B,X)$ son cerrados en $K(X)$.

Notemos que $K(A,X)$ es cerrado en $K(X)$, ya que $K(A,X)$ es homeomorfo a A.

Veamos que $K(B,X)$ es cerrado en $K(X)$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $K(B,X)$ no es cerrado en $K(X)$, entonces existe $\{C(b_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $K(B,X)$ que converge a algún $C(x,X) \in K(X) \backslash K(B,X)$. De esta manera, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en B. Como $\lim\limits_{n\to\infty} C(b_n,X) = C(x,X)$ ya que ω_X es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$. Como $C(x,X) \in K(X) \setminus K(B,X)$, entonces $x \in A$.

Sea $M = \{0\} \times [-1,1]$. Ya que $M \in C(x,A)$ y x no es punto extremo de A, por el *Lema 2.9*, existe $K \in C(x,A)$ tal que $K \not\subset M$ y $M \not\subset K$. Notemos que $K \in C(x,X)$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} C(b_n,X) = C(x,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in C(b_n,X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = K$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Existe $\{n_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de tal manera que $B_{n_s} \subset B$ para cada $s \in \mathbb{N}$.

En este caso, $\lim\limits_{s\to\infty} B_{n_s} = K \subset \overline{B}$ y dado que $K \subset A$, entonces $K \subset M$, lo cual es una contradicción ya que $K \not\subset M$.

Caso 2. Existe $\{n_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de tal manera que $B_{n_s} \not\subset B$ para cada $s \in \mathbb{N}$. En este caso, $M \subset B_{n_s}$, para cada $s \in \mathbb{N}$, así que $M \subset \lim\limits_{s\to\infty} B_{n_s} = K$, lo cual es una contradicción ya que $M \not\subset K$.

Se sigue que $K \notin \lim\limits_{n\to\infty} C(b_n,X)$, es una contradicción al supuesto de que $K(B,X)$ no es cerrado en $K(X)$.

Finalmente, $K(X) = K(A,X) \cup K(B,X)$, donde $\overline{K(A,X)}^{K(X)} \cap \overline{K(B,X)}^{K(X)} = \emptyset$. Por esto, $K(X)$ es localmente conexo.

4.3 Continuos arco conexos

En esta sección hablamos sobre la propiedad de ser *arco conexo* y la influencia que tiene en $K(X)$ para un continuo X.

Definición 4.17. *Un espacio topológico X es* **arco conexo** *o* **conexo por arcos**, *si para cualesquiera $p, q \in X$ exite un arco A en X cuyo extremos son los puntos p y q.*

Teorema 4.18. *Sea X un continuo. Entonces $B \subset X$ es arco conexo si, y sólo si, $K(B, X)$ es arco conexo.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Supongamos que $K(B, X)$ es arco conexo. Entonces, dado que ω_B es continua y $\omega_B(K(B, X)) = B$ se sigue que B es arco conexo.

$\Rightarrow$] Supongamos que B es arco conexo en X. Consideremos $C(p, X), C(q, X) \in K(B, X)$ y un arco, A, en B que contiene a los puntos p y q como extremos. Dado que A es localmente conexo como subespacio de X, por el *Lema 4.14*, $\alpha_X|_A$ es un homeomorfismo entre A y $\alpha_X(A)$. Como A es localmente conexo se sigue que A es arco conexo, más aún, $\alpha_X(A) \subset K(B, X)$ es un espacio arco conexo que contiene a $C(p, X)$ y a $C(q, X)$. Por esto, $K(B, X)$ es arco conexo. $\square$

Los resultados sobre hiperespacios de continuos anclados en un punto son más variados que los que en este trabajo se presentan, sin embargo, los conocimientos requeridos para entender estos son lo suficientemente especializados que harían extender de gran manera el trabajo al pensar en agregarlos. No obstante, para todo aquel interesado en el tema, el trabajo aquí desarrollado tiene todos los cimientos sobre los cuales esta sostenido el estudio de los hiperespacios de continuos anclados en un punto. En la parte de la bibliografía se muestran la mayor parte de trabajos relacionados con el tema que a la fecha se encuentran publicados.

Bibliografía

[1] F. Barragán, *Funciones inducidas entre hiperespacios de continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2007.

[2] R. H. Bing, Some characterizations of arcs and simple closed curves, Amer. J. of Math., 70 (3) (1948) pág. 497-506.

[3] J. Camargo, R. Isaacs, *Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos*, Revista Integración Colombiana de Matemáticas, 47 (2013) pág. 67-81, .

[4] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de la topología de conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2011.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series, 6, Heldermann Verlang, 1989.

[6] J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., London, 1961.

[7] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1969.

[8] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[9] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[10] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[11] F. Leon-Jones, *Historia y desarrollo de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas, 27, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[12] H. C. Miller, *On unicoherent continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pág 179-194.

[13] J. R. Munkres, *Topología*, Prentice-Hall, Madrid, 2002.

[14] S. B. Nadler Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math. 79 (1973), pág. 233-250.

[15] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Mongraphs and Textbooks in Pure an Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, New York, 1978.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[17] P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces* $C(p, X)$, Top. Proc., 27 (1) (2003), pág. 259-285.

[18] P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces* $K(X)$, Rocky Mountain, Journal of math., 35 (2) (2005), pág. 655-674.

[19] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.