



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

POLINOMIOS DE ZERNIKE PARA EL ESTUDIO DE LA ABERRACIÓN DE
SUPERFICIES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
JESÚS TOMÁS BELLO GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
WUIYEVALDO FERMÍN GUERRERO SÁNCHEZ

PUEBLA, PUE.

Febrero de 2017

A todos aquellos que perseveraron y alcanzaron.

Agradecimientos

A Dios por haberme guiado para llegar a esta facultad, a mis padres por siempre estar conmigo, a mi asesor de tesis por ser tan comprensivo, a todos aquellos profesores que me guiaron y apoyaron en esta épica travesía llamada “Licenciatura en Matemáticas Aplicadas”, a mis sinodales por haber aceptado calificar este trabajo de tesis y a mis compañeros de generación y otros más con los que formé equipo de trabajo académico.

Presentación

En este trabajo se investigó cómo usar polinomios de Zernike en el área de modelación óptica, estableciéndose su empleo en óptica oftálmica como el estándar desde el año 2000.

Como objetivos generales, están el obtener y establecer información clara sobre el frente de onda y la forma de representarlo matemáticamente, así como modelar el frente de onda usando polinomios de Zernike. Los objetivos particulares fueron conocer la importancia de los coeficientes de Zernike y saber sobre el uso y aplicaciones de los coeficientes de Zernike.

Para empezar, en el capítulo 1 se revisó el concepto de frente de onda a partir del principio de Fermat.

En el capítulo 2 se representó matemáticamente al frente de onda y su aberración empleando el sistema de coordenadas cartesiano.

En el capítulo 3 se discutió el significado de las aberraciones primarias y se pasó a la representación con coordenadas polares.

En el capítulo 4 se vió que agregando algunos términos de compensación a las expresiones en la representación polar para minimizar el efecto de las aberraciones es como se obtienen los polinomios de Zernike.

En el capítulo 5 se explicó el uso de los coeficientes de Zernike y se presentó un ejemplo de ajuste de datos al conjunto de polinomios de Zernike de un frente de onda obtenido con un aberrómetro experimental tipo Hartmann-shack.

En el capítulo 6 se concluyó que es necesario manejar definiciones básicas de modelación en óptica para usar polinomios de Zernike, los cuales constituyen una base matemática adecuada y recomendable para representar aberraciones de frente de onda. Además es esencial encontrar los centroides del hartmanngrama para realizar el ajuste ya mencionado.

Por último, en los anexos A y B se presentan los programas empleados en el capítulo 5 desarrollados por cuenta propia.

Las contribuciones de esta tesis fueron: dar a conocer el concepto de frente de onda y de aberración de frente de onda, analizar cómo se mejora su representación matemática hasta llegar a los polinomios de Zernike y saber emplear dichos polinomios para representar al frente de onda a partir de los datos obtenidos de un hartmanngrama.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Resumen | I |
| 1. Introducción. | 1 |
| 1.1. El frente de onda | 3 |
| 1.1.1. El frente de onda visto a partir de la óptica física. | 3 |
| 1.1.2. El frente de onda visto a partir de la óptica geométrica. | 4 |
| 2. Representación matemática del Frente de Onda y su aberración. | 5 |
| 2.1. Conceptos previos | 5 |
| 2.2. Representación matemática del frente de onda. | 8 |
| 2.3. Representación de la aberración del frente de onda | 9 |
| 2.3.1. Desarrollo en serie de potencias. | 13 |
| 3. Aberraciones primarias y coordenadas polares. | 15 |
| 3.1. Aberraciones primarias. | 15 |
| 3.1.1. Distorsión | 15 |
| 3.1.2. Defoco | 16 |
| 3.1.3. Astigmatismo | 17 |
| 3.1.4. Coma | 19 |
| 3.1.5. Aberración esférica | 19 |
| 3.2. Ventajas de la representación de las aberraciones por medio de coordenadas polares. | 20 |
| 4. Presentación de los polinomios de Zernike | 23 |
| 4.1. Estado del arte de los Polinomios de Zernike. | 23 |
| 4.2. Introducción a los polinomios de Zernike. | 24 |
| 4.3. Expansión en polinomios circulares de Zernike. | 28 |
| 5. Empleo de los coeficientes de Zernike | 33 |
| 5.1. Obtención de los coeficientes de Zernike a partir de desviaciones puntuales. . . | 34 |
| 5.2. Procedimiento para obtener los coeficientes de Zernike y ejemplo de aplicación. | 38 |
| 6. Conclusiones | 41 |

| | |
|---|----|
| A. Programa para obtener los centroides de un hartmanngrama. | 43 |
| B. Programa para el ajuste de datos al conjunto de coeficientes de Zernike. | 47 |

Polinomios de Zernike para el estudio de la aberración de superficies

Jesús Tomás Bello González

1 de febrero de 2017

Capítulo 1

Introducción.

El sensor de frente de onda Shack-Hartmann es una tecnología evolutiva que surgió a partir de la prueba de la pantalla de Hartmann. Johannes Hartmann (1865-1936) fue un astrofísico alemán cuya carrera lo llevó por toda Alemania y Austria.



Figura 1.0.1: Johannes Hartmann.

Fue durante su mandato como Catedrático en Potsdam a principios del siglo XX cuando Hartmann desarrolló su famosa prueba de pantalla. Hartmann trabajó en el “Gran Refractor” en Potsdam. Este telescopio refractor de 80 centímetros estaba destinado a mantener el liderazgo de Potsdam en el campo de la espectroscopía astronómica. Sin embargo, la calidad óptica del telescopio fue inadecuada para capturar imágenes fotográficas. Hartmann se propuso identificar la fuente del problema con el telescopio rectificando la situación. Para probar la óptica del telescopio, Hartmann construyó una pantalla con una serie de agujeros en ella y colocó esta “máscara” sobre la abertura del telescopio. A continuación, insertó placas y las colocó a ambos lados del foco. La máscara en el telescopio crea un conjunto discreto de haces de luz que pasan a través de diferentes lugares de entrada por la pupila. Las placas expuestas representaron entonces un “diagrama de puntos” del telescopio a ambos lados de las posiciones de enfoque. Al juntar los puntos correspondientes de las dos placas y sabiendo la distancia entre los lugares en los que las placas fueron colocadas a la exposición, la concentración de rayos en una zona alrededor del foco puede ser determinada. Así se obtendría

una óptica de alta calidad, porque se conseguiría localizar a todos los rayos que pasan por el eje óptico. Mientras que con la óptica convencional se daría lugar a una variación de la ubicación del lugar donde estos rayos cruzan el eje. Usando esta técnica, Hartmann fue capaz de determinar que el problema del “Gran Refractor” residía en la lente principal. Después de este descubrimiento fue reconfigurado dicho telescopio, por lo que los 80 centímetros de la lente fueron ahora útiles y Hartmann llegó a identificar espectrofotométricamente las nubes de calcio del sistema.

La Pantalla de Hartmann todavía se utiliza hoy en día, una clara muestra de su sencillez y valor. La tecnología se mantuvo sin cambios durante casi 70 años. Sin embargo, la necesidad de realizar medidas del frente de onda con una iluminación muy baja forzó a la tecnología a evolucionar hacia lo que ahora es conocido como el sensor de Shack-Hartmann. Este proceso evolutivo requiere nuevos y sofisticados elementos ópticos. Sin embargo, la simplicidad de la aplicación se mantuvo. [30]

Volviendo al tema de la modelación del frente de onda, poco tiempo después surgió otro gigante de la óptica, Philipp Ludwig Ritter von Seidel, astrónomo, óptico y matemático alemán quien en 1855 concibió la teoría de las aberraciones ópticas que lleva su nombre, es en esta obra donde presenta por primera vez los famosos “polinomios de Seidel”. En 1857 publicó su libro sobre el tema, que en ese tiempo fue considerado como una buena referencia, el cual, durante mucho tiempo, fue la obra de referencia del campo. En dicha obra, von Seidel descompuso la aberración monocromática de primer orden en cinco aberraciones constituyentes, las cuales son comúnmente llamadas “Las cinco aberraciones de Seidel”, o bien, “las funciones primarias o de Seidel”.



Figura 1.0.2: Ludwig von Seidel.

Con su trabajo de 1856, estableció los fundamentos teóricos de un proceso simplificado de fabricación de vidrio óptico para la empresa Steinheil. Junto con Steinheil, Seidel llevó a cabo las primeras mediciones fotométricas de estrellas [2].

Pues bien, dichos polinomios de Seidel tomaron gran importancia en el campo de la modelación óptica por un largo tiempo, hasta que en el Siglo XX surgieron los polinomios de Zernike los cuales podían modelar los perfiles de los frentes de onda circulares asociados a aberraciones.

Creados por Frintz Zernike en los años 1930's, estos polinomios eran ortogonales en un círculo de radio uno. Un perfil del frente de onda aberrado y complejo podía ser modelado por medio de *ajuste de curvas* con polinomios de Zernike para obtener un conjunto de coeficientes de ajuste que, de manera individual, representan diferentes tipos de aberraciones. Dichos coeficientes son linealmente independientes, de esa forma, cada aberración individual que permite modelar el frente de onda original puede ser aislada y calculada por separado.



Figura 1.0.3: Frintz Zernike.

Por lo anterior, dichos polinomios representaban una forma más sencilla y práctica de modelar frentes de ondas a comparación de los polinomios de Seidel, lo cual hizo que en poco tiempo otros investigadores de diferentes partes del mundo se pusieran a investigar más cosas sobre ellos. Poco tiempo después se desarrollaron los polinomios anulares de Zernike, pero sobre ellos hablaremos más adelante.

1.1. El frente de onda

Ahora, para entrar en materia, se empezará definiendo lo que es un frente de onda. Es importante mencionar que el concepto de frente de onda se puede definir a partir de la óptica geométrica o a partir de la óptica física. Las siguientes definiciones fueron obtenidas de [24].

1.1.1. El frente de onda visto a partir de la óptica física.

Antes que nada, mencionaremos un principio fundamental:

Definición 1.1. *Principio de Fermat:* la luz, al viajar de un punto a otro, sigue la ruta con la longitud de camino óptico menor.

La longitud de camino óptico o distancia óptica se define como:

$$nd = (\text{índice de refracción}) \times (\text{distancia física}).$$

Para los fines prácticos manejados en este trabajo, solo se considerarán medios isotrópicos, es decir, aquellos en los cuales el índice de refracción puede llegar a variar de un punto a otro, pero se mantiene constante en cualquier dirección y estado de polarización de la luz. Es decir, a partir de este momento, se considerará a la distancia óptica equivalente a la distancia física, esta última entendida como la longitud de la trayectoria que sigue la luz de un punto a otro, en línea recta.

Ahora partiendo del hecho de saber que, en óptica, la trayectoria que sigue la luz de un punto a otro se denomina rayo de luz, procederemos a dar la definición de frente de onda para la óptica física usando el principio de Fermat:

Definición 1.2. *El **frente de onda** es una superficie que es ortogonal a los rayos de luz emitidos por una fuente luminosa S , cada uno de los cuales cumple que su intersección con dicha superficie (un punto) está separado de S a una distancia óptica constante, a decir, nd .*

1.1.2. El frente de onda visto a partir de la óptica geométrica.

A continuación daremos una definición geométrica del frente de onda usando coordenadas cartesianas:

Definición 1.3. *El conjunto de puntos (x_0, y_0, z_0) , en \mathbb{R}^3 , tal que para cada x_0 y y_0 (en el plano xy), $z_0 = f(x_0, y_0)$, con $-\infty < x_0 < \infty$, $-\infty < y_0 < \infty$ y f función arbitraria, forma una superficie a la cual se le llamará **frente de onda**.*

Ahora, una definición alternativa para coordenadas polares:

Definición 1.4. *El conjunto de puntos (r_0, θ_0, z_0) , en \mathbb{R}^3 , tal que para cada r_0 y θ_0 , $z_0 = f(r_0, \theta_0)$, con r la distancia de la proyección del punto sobre la superficie del plano xy al origen de coordenadas O , y θ es el ángulo formado por la línea que une a O con la proyección del punto sobre la superficie del plano xy con respecto a la horizontal (eje x), forma una superficie a la cual se le llamará **frente de onda**.*

Capítulo 2

Representación matemática del Frente de Onda y su aberración.

Ahora, se procederá a dar una introducción a ciertos conceptos necesarios para poder entender la representación matemática del frente de onda y, como consecuencia, de la aberración de dicho frente de onda. Las definiciones y conceptos mostrados en este capítulo fueron obtenidos de [24].

Esta parte es esencial, ya que permite desarrollar un modelo matemático para estudiar la aberración de superficies con herramientas conocidas.

2.1. Conceptos previos

Para empezar, es oportuno conocer primero lo que es un sistema óptico:

Definición 2.1. *Al conjunto de superficies ópticas que separan medios con distintos índices de refracción se le llama **sistema óptico**.*

Un sistema óptico puede estar conformado por lentes, espejos, etc. En un sistema óptico ideal, el frente de onda esférico divergente del objeto puntual es transformado en un frente de onda esférico convergente, de modo que la imagen de un punto es otro punto y la imagen de un objeto extendido es una réplica del objeto (salvo un cambio de escala). Lo anterior también implica que los medios donde se encuentran el objeto (espacio objeto) y la imagen (espacio imagen) son homogéneos.

Definición 2.2. *Al orificio circular que controla la cantidad de luz se le denomina **diafragma de apertura**.*

Definición 2.3. *Una pupila es una imagen del diafragma de apertura del sistema óptico.*

Definición 2.4. *La ubicación de la imagen inicial de un punto a proyectar se llamará **punto objeto**.*

Definición 2.5. *La ubicación de la imagen final de un punto a proyectar se llamará **punto imagen**.*

Una manera práctica de modelar matemáticamente un sistema óptico es mediante sus pupilas de entrada y de salida. A continuación se muestra un sistema óptico formado por dos lentes simples y un diafragma de apertura (DA) en medio de las dos lentes, en el cual se denota al punto objeto como O y al punto imagen como I. Suponiendo que se forma una imagen ideal, la imagen del punto objeto O será el punto imagen I.

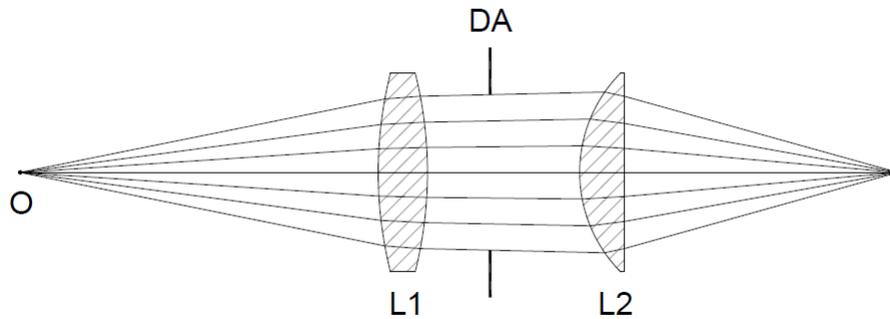


Figura 2.1.1: Sistema de dos lentes que forma una imagen perfecta.

Definición 2.6. *La imagen del diafragma de apertura vista desde el punto objeto a través de los elementos ópticos que están antes del diafragma se denomina **pupila de entrada**.*

Definición 2.7. *La imagen del diafragma de apertura vista desde el punto imagen a través de los elementos ópticos que están después del diafragma se denomina **pupila de salida**.*

En nuestro caso, la pupila de entrada es la generada por la lente L1 y la pupila de salida es la generada por la lente L2. Entonces, en la práctica, desde el punto objeto el tamaño del cono de luz que entra al sistema óptico está determinado por el diámetro de la pupila de entrada, y el tamaño del cono de luz que sale del sistema óptico para formar la imagen está determinado por el diámetro de la pupila de salida, como se muestra en la figura 2.1.2.

Las pupilas nos permiten modelar cualquier sistema óptico formador de imagen, tal como se ve en la figura 2.1.3.

Este modelo generalizado supone que: 1) entre las pupilas de entrada y de salida, el paso de la luz ocurre de acuerdo con las leyes de la óptica geométrica; 2) la pupila de entrada no distorsiona al frente de onda esférico a su paso; y 3) la distorsión del frente de onda, en el espacio imagen, se genera en la pupila de salida. En otras palabras, con este modelo, el estudio de la calidad de imagen generada por un sistema óptico se limita a medir el frente de onda en la pupila de salida.

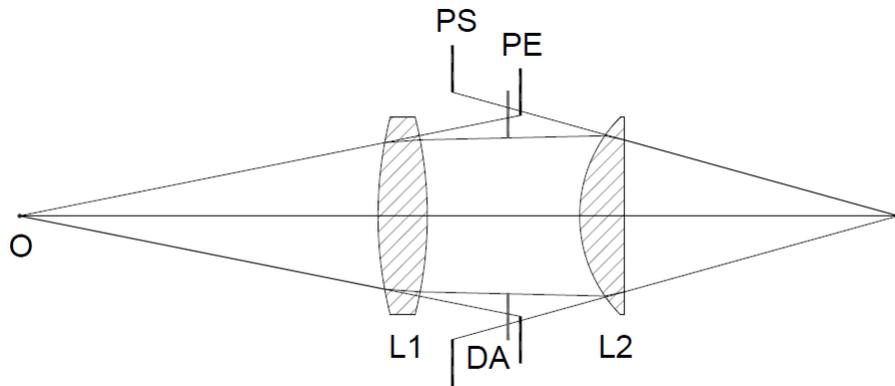


Figura 2.1.2: Pupilas de entrada (PE) y salida (PS) y conos de luz en el sistema de la figura anterior.

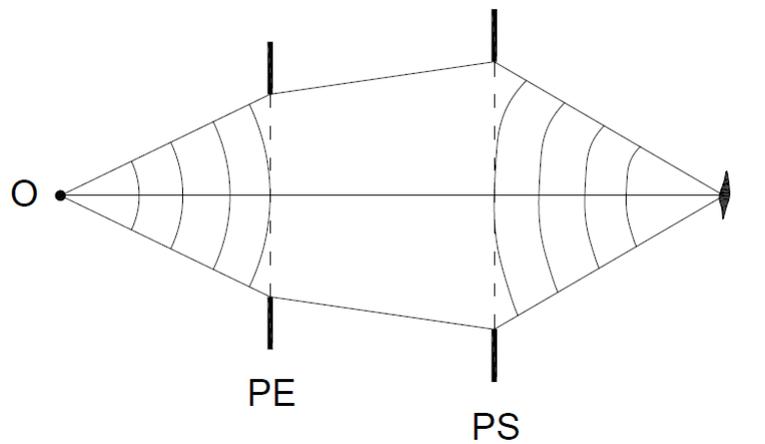


Figura 2.1.3: Modelo generalizado de un sistema óptico a partir de las pupilas de entrada y de salida.

En la práctica, aunque los espacios objeto e imagen sean homogéneos, la imagen de un punto objeto no es un punto sino más bien algo como una pequeña mancha, conocida como **función de punto extendido** o PSF (del inglés Point Spread Function), la cual también se conoce en óptica como **punto gaussiano**, dado que al graficarla en 3 dimensiones, tomando en cuenta la intensidad luminosa, se obtiene como resultado la famosa “campana de Gauss”. El efecto sobre la imagen de un objeto extendido será un deterioro en la calidad de la imagen (ver figura 2.1.4.).

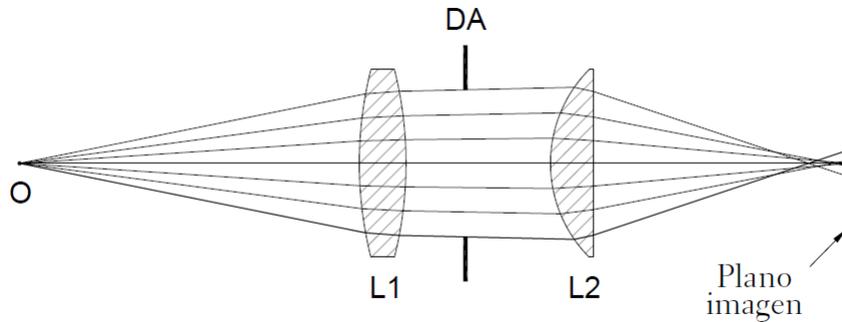


Figura 2.1.4: Formación real de la imagen del punto objeto (aberración esférica).

2.2. Representación matemática del frente de onda.

Como vimos anteriormente, para caracterizar al sistema óptico (en cuanto a calidad de imagen) **se requiere conocer el frente de onda en la pupila de salida**. El radio del frente de onda esférico en la pupila lo denotaremos por R . Para poder describir de forma matemática al frente de onda, empezaremos introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) con el origen ubicado sobre el plano de la pupila de salida y cuyo eje z es el mismo que el eje óptico del sistema, tal y como se ilustra a continuación:

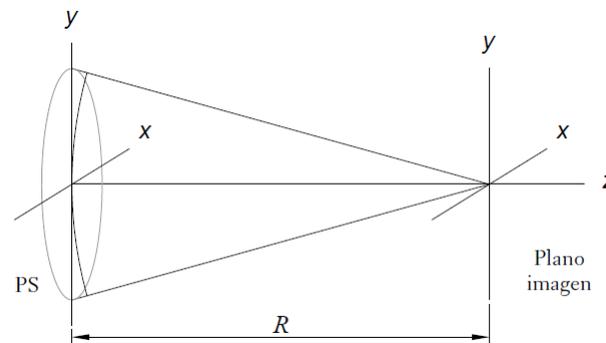


Figura 2.2.1: Coordenadas de la pupila de salida (PS) y del plano imagen gaussiano.

La siguiente ecuación representa la porción de esfera de radio R con centro en $(0, 0, R)$, que describe al frente de onda **ideal** en la pupila de salida:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad (2.1)$$

donde $x \leq r_0$ y $y \leq r_0$, con r_0 el radio de la pupila de salida. Las coordenadas del punto imagen serán las mismas que las del centro de la esfera.

Definición 2.8. *La esfera que representa al frente de onda en la pupila de salida cuando la formación de la imagen es perfecta se denominará **esfera de referencia***

Ahora, tomando en cuenta un sistema óptico con formación de imagen real, no todos los rayos en el espacio imagen se intersectan en el mismo punto, por lo que la imagen será una mancha extendida, como se muestra en la figura 2.1.4.

Como consecuencia, el frente de onda en la pupila de salida no resulta ser esférico. La forma del frente de onda, en este caso, será una superficie más compleja que la esférica y su forma explícita dependerá del sistema óptico que se halla diseñado.

Denotando a la esfera de referencia como $z = S(x, y)$, y al frente de onda real como $z' = S'(x, y)$. Decimos que $z = S(x, y)$ es la ecuación implícita de la esfera de referencia, mientras que la ecuación 2.1 es la ecuación explícita de la esfera de referencia. Análogamente, $z' = S'(x, y)$ es la ecuación implícita del frente de onda real, pero por el momento no tenemos una ecuación explícita para esta superficie como en el caso de la esfera de referencia.

Definición 2.9. *Sea $z = S(x, y)$ la esfera de referencia y $z' = S'(x, y)$ el frente de onda real. La diferencia $W(x, y) = S'(x, y) - S(x, y)$ es la **aberración de frente de onda**.*

En general, la aberración de frente de onda es pequeña en comparación con el radio de la esfera de referencia, por lo que la forma del frente de onda real se puede calcular como:

$$S'(x, y) = S(x, y) + W(x, y). \quad (2.2)$$

Nota.- la expresión 2.2 **no depende** del tamaño de la aberración del frente de onda.

2.3. Representación de la aberración del frente de onda

En la siguiente figura se representa el corte transversal del frente de onda real junto con el corte transversal de la esfera de referencia. Aquí, el rayo 1 es el rayo correspondiente a la esfera de referencia en el punto P, el cual cruza al frente de onda real en el punto Q; el rayo 2 es el rayo correspondiente al frente de onda real en el punto Q. A partir de lo anterior, tenemos que:

Definición 2.10. *La **aberración de frente de onda**, que denotamos por W , se define como la distancia óptica entre P y Q, a lo largo del rayo 1.*

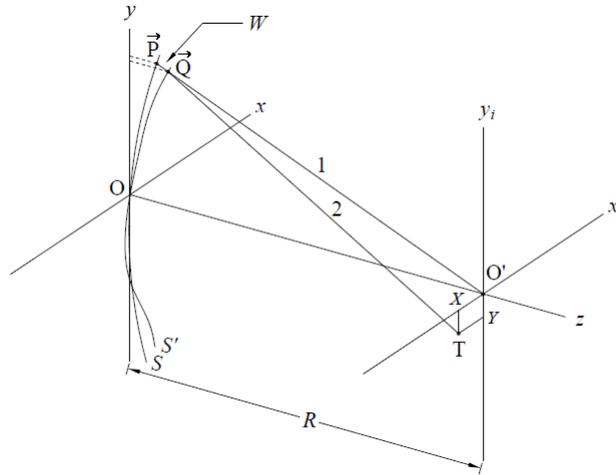


Figura 2.3.1: La longitud entre los puntos Q y P a lo largo del rayo 1 es la distorsión del frente de onda S' en comparación con la esfera de referencia S .

Nota.- la definición 2.8 es en general, la definición 2.9 es solamente para un punto sobre el corte transversal del frente de onda real y un punto sobre el corte transversal del frente de onda ideal.

Dado que en la práctica se usa el aire como medio de difusión de los rayos, la distancia óptica coincide con la distancia física.

Otros autores definen la aberración de frente de onda como la distancia óptica entre los frentes de onda a lo largo del rayo 2.

Definición 2.11. Las **aberraciones de rayo** son las desviaciones Δx_j y Δy_j , definidas como la diferencia entre las coordenadas x_j y y_j de la intersección del rayo 1 con el plano imagen (punto imagen ideal) y de la intersección del rayo 2 con el plano imagen.

En otras palabras, Δx_j y Δy_j son las desviaciones de los rayos reales con respecto a los rayos ideales medidas en el plano imagen.

Para poder conocer los valores de Δx_j y Δy_j , en la figura 2.3.2 se muestra un análisis del frente de onda usando geometría analítica, para el cual es necesario hacer un corte transversal del frente de onda con fines prácticos.

Aquí, $\vec{P} = (x, y, z)$ representa al vector que apunta a un punto sobre el corte transversal del frente de onda real desde el origen del plano xy , $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ representa al vector que apunta a la proyección del punto ya mencionado sobre el plano imagen desde el origen del plano xy y ∇f es el gradiente (vector normal a la superficie), con f definida como

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - R)^2 - (R - W)^2, \quad (2.3)$$

A partir de ahí, tenemos que

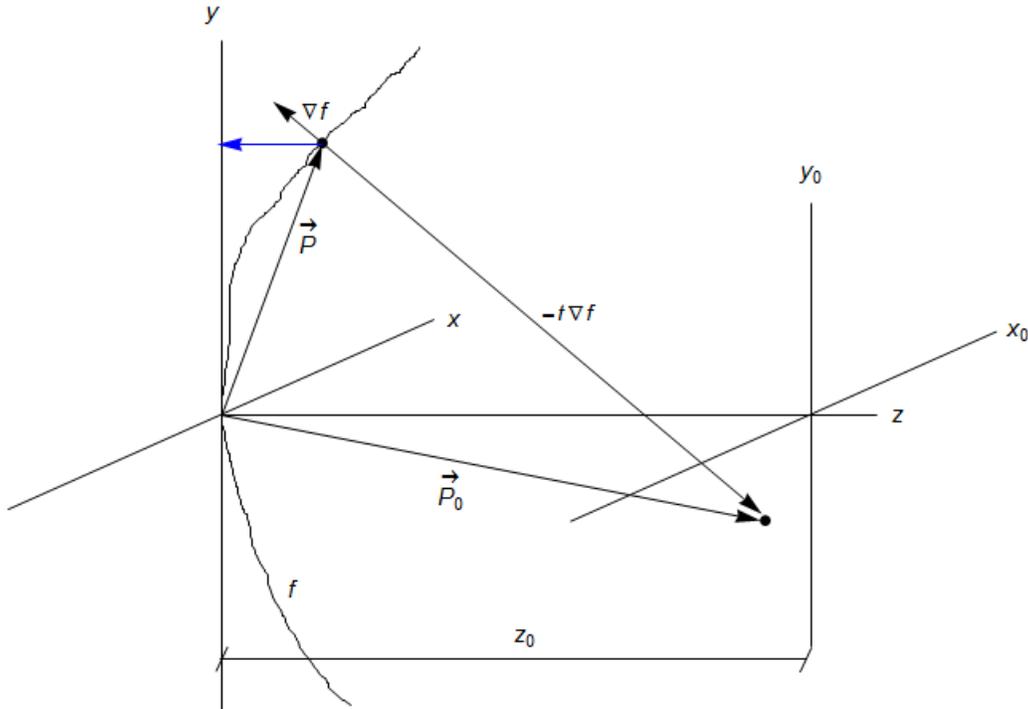


Figura 2.3.2: Análisis geométrico del frente de onda.

$$\vec{P}_0 = \vec{P} - t\nabla f, \quad (2.4)$$

que representa al frente de onda real dado que a la esfera de referencia se le agrega el efecto de la aberración.

Ahora, de 2.3 tenemos que

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2(R - W) \frac{\partial W}{\partial x} \\ 2y + 2(R - W) \frac{\partial W}{\partial y} \\ 2(z - R) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

y de 2.4 tenemos que

$$\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - t \frac{\partial f}{\partial x} \\ y - t \frac{\partial f}{\partial y} \\ z - t \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

En la igualdad de z_0 en 2.6, podemos despejar a t , lo cual nos lleva a que

$$t = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Sustituyendo a t en las igualdades de x_0 y y_0 de 2.6, se sigue que:

$$x_0 = x - (z - z_0) \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \right), \quad (2.7a)$$

$$y_0 = y - (z - z_0) \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \right). \quad (2.7b)$$

Sustituyendo las igualdades de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y de $\frac{\partial f}{\partial y}$, vistas en 2.5, en 2.7, llegamos a que:

$$x_0 = x - (z - z_0) \left[\frac{x + (R - W) \frac{\partial W}{\partial x}}{(z - R)} \right], \quad (2.8a)$$

$$y_0 = y - (z - z_0) \left[\frac{y + (R - W) \frac{\partial W}{\partial y}}{(z - R)} \right]. \quad (2.8b)$$

Ahora, de las imágenes 2.3.1 y 2.3.2, que sabe que $z_0 = R$, con lo cual tenemos que:

$$x_0 = -(R - W) \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2.9a)$$

$$y_0 = -(R - W) \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (2.9b)$$

Además, teniendo en cuenta que, en la práctica, son pequeños tanto W como $\frac{\partial W}{\partial x}$ junto con $\frac{\partial W}{\partial y}$, se llega a que:

$$x_0 \approx -R \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2.10a)$$

$$y_0 \approx -R \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (2.10b)$$

donde $\frac{\partial W}{\partial x}$ y $\frac{\partial W}{\partial y}$ representan las derivadas de la aberración de frente de onda en las direcciones x y y .

2.3.1. Desarrollo en serie de potencias.

Teorema 2.3.1. *Sea $f(x, y)$ una función continua e infinitamente derivable en una región en \mathbb{R}^2 cuyas derivadas converjan en el punto (x_0, y_0) . Demostrar que:*

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f(x_0, y_0)}{\partial^n x \partial^m y} (x - x_0)^n (y - y_0)^m. \quad (2.11)$$

Dem.- Se sabe que si $f(x, y)$ es una función continua e infinitamente derivable en una región en \mathbb{R}^2 , se puede aproximar por medio de una serie de potencias, es decir:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (x - x_0)^n (y - y_0)^m. \quad (2.12)$$

Por otra parte, dado que $f(x, y)$ es una función cuyas derivadas convergen en una región en \mathbb{R}^2 , podemos hacer lo siguiente: derivando a $f(x, y)$ con respecto de x , se tiene que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} n a_{nm} (x - x_0)^{n-1} (y - y_0)^m \quad (2.13)$$

y luego, evaluando en el punto (x_0, y_0) , se tiene que

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 + a_{10} + \cdots + 0 + \cdots. \quad (2.14)$$

Derivando a $f(x, y)$ con respecto de x y evaluando en el punto (x_0, y_0) , se llega similarmente a que

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 + a_{01} + \cdots + 0 + \cdots. \quad (2.15)$$

En general, la derivada parcial de orden $k + l$, k veces con respecto a x y l veces con respecto a y , equivale a

$$\frac{\partial^{k+l} f(x, y)}{\partial^k x \partial^l y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} m(m-1) \cdots (m-l+1) (y - y_0)^{m-l} \quad (2.16)$$

y al evaluar en (x_0, y_0) resulta que

$$\frac{\partial^{k+l} f(x_0, y_0)}{\partial^k x \partial^l y} = 0 + \cdots + 0 + k(k-1) \cdots (k-k+1) l(l-1) \cdots (l-l+1) a_{kl} + \cdots + 0 + \cdots. \quad (2.17)$$

Despejando a a_{kl} en la ecuación anterior, se obtiene que

$$a_{kl} = \frac{\frac{\partial^{k+l} f(x_0, y_0)}{\partial^k x \partial^l y}}{k!l!}. \quad (2.18)$$

Así, sustituyendo los diferentes a_{kl} en 2.3, se llega a que

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f(x_0, y_0)}{\partial^n x \partial^m y} (x - x_0)^n (y - y_0)^m. \quad (2.19)$$

Desde el punto de vista del análisis matemático, la aberración de frente de onda se puede representar por medio de una función cuyo dominio es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , la cual, en la práctica, resulta ser convergente en la región en la cual está definida. Por lo tanto, se puede representar por medio de una serie de potencias de la siguiente forma:

$$W(x, y) \approx \sum_{n=0}^k \sum_{m \leq n} \frac{\partial^{n+m} W(0, 0)}{\partial^n x \partial^m y} x^n y^m = \quad (2.20)$$

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + \cdots + a_{nm}x^n y^m + \cdots + a_{kk}x^k y^k, \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{a} = (0, 0)$, $a_{00} = W(\mathbf{a})$ y $a_{nm} = \frac{\partial^{n+m} W(\mathbf{a})}{\partial^n x \partial^m y}$.

Capítulo 3

Aberraciones primarias y coordenadas polares.

Ha llegado el momento de hablar de las aberraciones primarias o de Seidel, esenciales para modelar un frente de onda por medio de una combinación de ellas y dando, como resultado, una primera aproximación. Después, se pasará a la descripción del sistema de coordenadas polares, ideal para modelar una superficie circular. En dicha representación, los términos de aberración tienen una forma matemática más simple que en la representación cartesiana, resultando ideal para describir al frente de onda de una manera práctica. Los planteamientos teóricos para cada aberración y sus ecuaciones iniciales fueron obtenidos de [24]

3.1. Aberraciones primarias.

3.1.1. Distorsión

Se llama distorsión (o desviación del frente de onda) a la inclinación de la dirección en la cual se propaga el haz de luz. Sirve para calcular la pendiente promedio en la dirección x y y de un frente de onda.



Figura 3.1.1: Distorsión.

3.1.2. Defoco

Defoco es el nombre con el cual se conoce a la incapacidad del sistema óptico de enfocar la imagen en el plano imagen gaussiano. Este tipo de aberración es conocida por todo aquel que ha usado una cámara, videocámara, microscopio, telescopio, o binoculares. En general, el defoco reduce la agudeza y contraste de la imagen. El detalle fino en la escena se pone borroso o incluso invisible. Casi todos los dispositivos ópticos para formar imágenes incorporan alguna forma de ajustar el enfoque para minimizar el defoco y aumentar al máximo la calidad de la imagen.

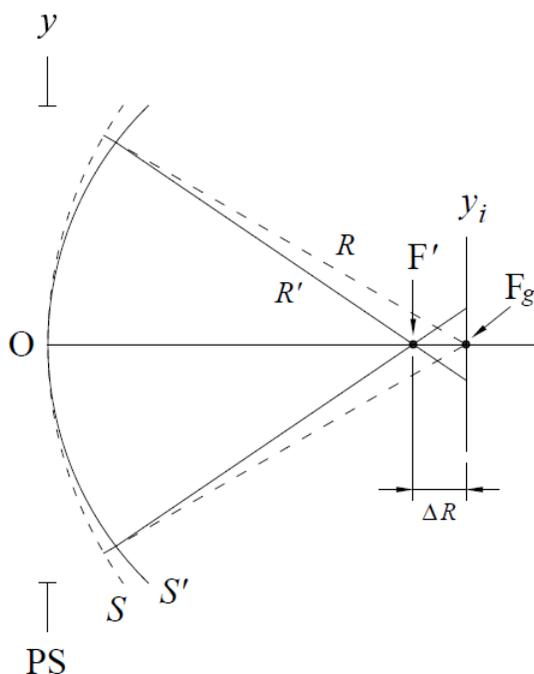


Figura 3.1.2: Frente de onda esférico desenfocado de radio R' y frente de onda de referencia R

En la figura 3.1.2 se ilustra una configuración posible. Supongamos que el sistema óptico es capaz de formar una imagen ideal, pero el punto imagen no se localiza en el plano imagen gaussiano correspondiente a la esfera de referencia, sino en un plano anterior. Esto puede ocurrir debido a un desplazamiento axial de alguna de las lentes del sistema o simplemente porque el plano imagen se ha colocado en una posición diferente. En cualquier caso, el radio de la esfera de referencia será igual a la distancia que separa al plano de la pupila de salida del plano imagen. El frente de onda de referencia se enfocará en el punto F_g . Por otro lado, como el sistema es capaz de formar una imagen ideal, el frente de onda real será una esfera de radio igual a R' , y se enfocará en el punto F' . Decimos entonces que la imagen está desenfocada y la longitud axial de desenfoque es igual a $\Delta R = R' - R$. En consecuencia, en el plano imagen gaussiano se observará una mancha circular cuyo diámetro es proporcional a la longitud de

desenfoque.

Ahora bien, para calcular la aberración de frente de onda con desenfoque se debe hacer la diferencia entre las esferas, de radios R' y R . De acuerdo con la definición de la aberración de frente de onda, esta se evalúa a lo largo del rayo 1, lo cual puede resultar muy complejo aunque las superficies sean relativamente simples. En lugar de hacer la resta a lo largo del rayo 1, esta se hace a lo largo de una línea paralela al eje z (eje óptico) que pase por el punto P. Esta aproximación en general se satisface muy bien ya que el cociente entre el radio de la esfera de referencia y el diámetro de la pupila de salida es mucho mayor que 1.

A continuación se presenta la expresión, en forma cartesiana, para el defoco:

$$W(x, y) = a_d(x^2 + y^2), \quad (3.1)$$

donde $a_d = -\Delta R/RR' = a_{20}$, siendo, para este caso, $a_{20} = a_{02}$ el correspondiente coeficiente de la expansión en series de Taylor.

3.1.3. Astigmatismo

El astigmatismo es aquella aberración cuyo frente de onda posee la forma de un segmento de toro. Se origina a partir de una lente convergente cuya superficie tiene esta forma. Si colocamos un plano que parta horizontalmente al sistema óptico (plano tangencial) y otro plano perpendicular que lo parta verticalmente (plano sagital), ambos con intersección en el eje z , se puede observar que los rayos sobre el plano tangencial mandan al punto objeto a un punto distinto al cual es enviado por los rayos que están sobre el plano sagital. Si se coloca el plano gaussiano en cada uno de esos puntos de enfoque, la imagen resultante será una línea horizontal o vertical.

En una superficie tórica los meridianos principales son círculos. Supongamos que el meridiano S_1 en la dirección y ($90^\circ - 270^\circ$), que de ahora en adelante será denominado meridiano tangencial, tiene un radio de curvatura igual a R_1 , y que el meridiano S_2 en la dirección x ($0^\circ - 180^\circ$), de ahora en adelante denominado meridiano sagital, tiene un radio de curvatura R_2 . Los rayos correspondientes a estos dos meridianos se denominan rayos tangenciales y rayos sagitales, y los planos que contienen estos rayos se denominan planos tangencial y sagital, respectivamente. Los rayos tangenciales se enfocan en el punto FT (centro de curvatura de S_1), y los rayos sagitales se enfocan en el punto FS (centro de curvatura de S_2), como se muestra en la figura 3.1.3.

Para esta aberración, su expresión en forma cartesiana es:

$$W(x, y) = a_a(x^2 - y^2). \quad (3.2)$$

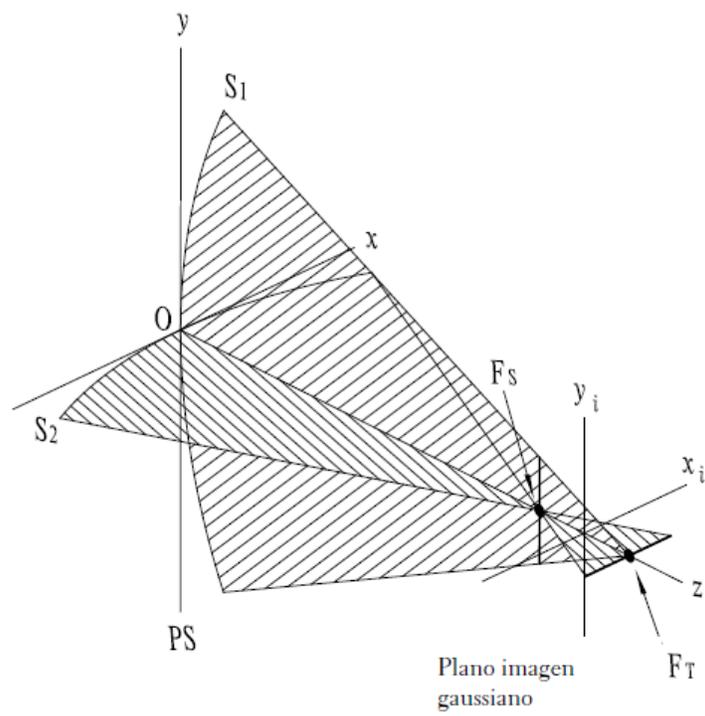


Figura 3.1.3: Astigmatismo.

3.1.4. Coma

La aberración coma es aquella en la cual el rayo que parte del centro de la pupila enfoca al punto objeto en un punto imagen alejado del origen del plano gaussiano, pero los demás rayos cuyo punto de partida se ubica alrededor del centro de la pupila convergen a un punto más cercano al origen del plano gaussiano conforme parten de un lugar cada vez más alejado de dicho centro.

Dicho de una manera más específica, en esta aberración, el rayo proveniente del centro de la pupila enfoca al punto objeto en un punto imagen alejado del origen del plano gaussiano. Sin embargo, los otros rayos cuyo punto de partida se ubica alrededor del centro de la pupila convergen a un punto ubicado en un área circular que se aleja de dicho punto imagen, se acerca al origen y cuyo radio aumenta conforme parten de un lugar cada vez más alejado del eje óptico.

Este tipo de aberración se puede observar sobre todo en telescopios.

La expresión para esta aberración en forma cartesiana es:

$$W(x, y) = a_c x(x^2 + y^2). \quad (3.3)$$

Se presenta este tipo de aberración de forma esquemática en la figura 3.1.4:

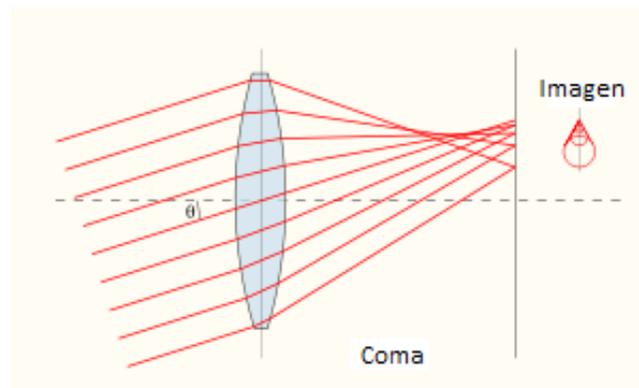


Figura 3.1.4: Coma.

3.1.5. Aberración esférica

La aberración esférica es aquella en la cual los rayos que parten de una zona cada vez más alejada del centro de la pupila convergen a un punto cada vez más cercano a la pupila y más alejado del punto imagen gaussiano sobre el eje z . El resultado es una pupila de salida con forma circular.

La ecuación cartesiana para esta aberración es:

$$W(x, y) = a_s(x^2 + y^2)^2. \quad (3.4)$$

Se presenta este tipo de aberración de forma esquemática en la figura 3.1.5:

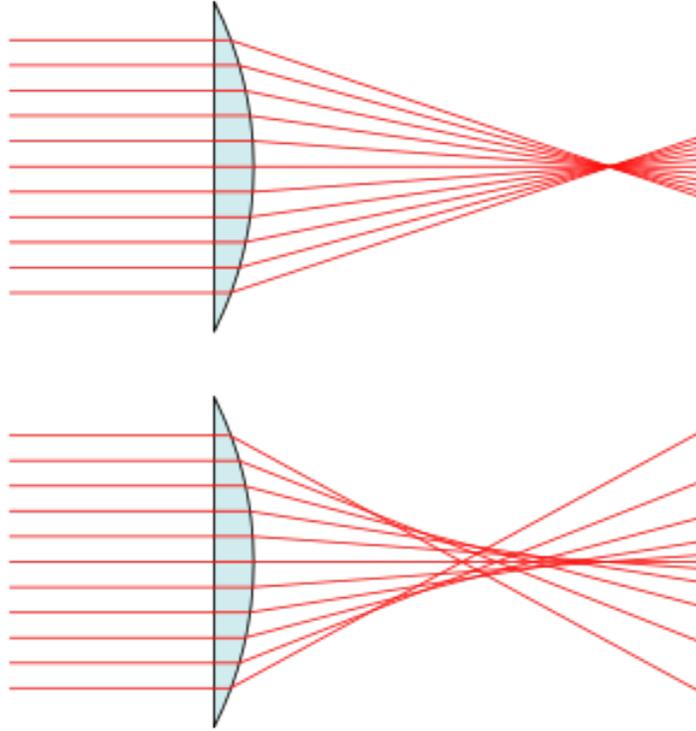


Figura 3.1.5: Arriba, sistema formador de una imagen ideal; abajo, sistema con aberración esférica.

3.2. Ventajas de la representación de las aberraciones por medio de coordenadas polares.

Una primera aproximación para modelar la aberración de frente de onda fue dada por Kingslake (1925-1926) por medio de la siguiente expresión:

$$W(x, y) = A(x^2 + y^2)^2 + By(x^2 + y^2) + C(x^2 - y^2) + D(x^2 + y^2) + Ex + Fy + G. \quad (3.5)$$

Donde cada coeficiente determina los siguientes tipos de aberraciones primarias:

- $A \rightarrow$ aberración esférica,
- $B \rightarrow$ coma,

- $C \rightarrow$ astigmatismo,
- $D \rightarrow$ defoco,
- $E \rightarrow$ distorción con respecto al eje x ,
- $F \rightarrow$ distorción con respecto al eje y ,
- $G \rightarrow$ pistón.

Para pasar del sistema coordenado cartesiano al sistema coordenado polar empleamos las siguientes relaciones:

$$x = r \cos \theta, \tag{3.6}$$

$$y = r \sin \theta. \tag{3.7}$$

Así, si la expresión 3.5 es reescrita en coordenadas polares, se convierte en

$$W(r, \theta) = Ar^4 + Br^3 \cos \theta + Cr^2 \cos 2\theta + Dr^2 + Er \cos \theta + Fr \sin \theta + G. \tag{3.8}$$

Comparando esta expresión con la original, se nota que la representación polar es más simple. De hecho, esto se nota más en aberraciones de mayor orden. Además, recordemos que, para el caso de coordenadas cartesianas, $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$, mientras que para el caso de coordenadas polares, $0 < r < \infty$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Inclusive, dado que las pupilas de los sistemas ópticos por lo regular son circulares, es más conveniente describir las aberraciones en la pupila de salida mediante coordenadas polares en vez de emplear coordenadas cartesianas. Por tanto, las expresiones para las aberraciones en coordenadas polares resultan más simples de entender y utilizar.

Capítulo 4

Presentación de los polinomios de Zernike

4.1. Estado del arte de los Polinomios de Zernike.

En matemáticas, los polinomios de Zernike son una secuencia de polinomios que son ortogonales con respecto al producto escalar de funciones en el disco unitario.

Fritz Zernike aportó una descripción eficiente de los defectos de imagen o “aberraciones de los sistemas de imágenes ópticas” como microscopios y telescopios. La representación de las aberraciones se basó originalmente en la teoría desarrollada por Ludwig Seidel en la mitad del siglo XIX. La “representación de Seidel” se basaba en la expansión de series de potencias, lo cual no permitía una clara separación entre los distintos tipos y órdenes de aberraciones. Los “polinomios circulares ortogonales de Zernike” daban, siempre, una solución al problema del “amplio error en los datos”, del “balance” óptimo de las diferentes aberraciones de un instrumento óptico. Desde los años 1960, los polinomios circulares ortogonales de Zernike son ampliamente utilizados en diseño óptico, óptica de metrología y análisis de imagen [33].

En lo que respecta a su aparición en trabajos científicos, los polinomios de Zernike fueron introducidos inicialmente por Zernike (1934) [37] [38] en su artículo clásico de contraste de fase y la prueba de la navaja (Foucault). Como consecuencia, Zernike y Brinkman (1935) [39] mostraron la relación entre los polinomios y los armónicos esféricos generales que ocurren en la solución del problema de potenciales de Laplace en los espacios multidimensionales.

Los polinomios de Zernike también jugaron un papel fundamental en la teoría de aberraciones de Nijboer (1943,1947) [26] [27]. En el curso de ese trabajo se desarrollaron diversas metodologías empleadas comúnmente en el campo de la difracción, y de hecho la tesis de Nijboer sigue siendo una referencia muy útil sobre teoría de difracción de aberraciones ópticas.

Zernike [37] [38] definió originalmente sus polinomios como invariantes con respecto a la rotación del sistema coordinado sobre el eje z , ocasionada como resultado de las eigenfunciones

de una ecuación del diferencial de segundo orden; su importancia no fue apreciada inmediatamente. Veinte años después, Bhatia y Wolf (1954) [6] mostraron que las funciones pueden derivarse por métodos algebraicos. Mientras su aproximación ha dado ventajas heurísticas, se sabe actualmente que muchas de sus propiedades se encuentran más fácilmente utilizando la teoría de grupos. Kintner [13], en su tesis doctoral y en una serie de artículos, enfatizó la teoría y la aplicación computacional de los polinomios en la óptica aplicada. La generalización de los polinomios de Zernike fue presentada por Myrick (1966) [25] y actualmente se sigue trabajando en su desarrollo en óptica cuántica. Ejemplo de dicho desarrollo es el trabajo de Wünsche (2005) [35].

Actualmente, dichos polinomios desempeñan un papel importante en la viga óptica. Tan solo la palabra “óptica” ya implica un campo amplio de teoría y aplicaciones. Además, podemos recordar varios logros de la humanidad en los cuales la óptica ha desempeñado un papel fundamental: el descubrimiento de astros a lejanas distancias, el rayo láser, los rayos X, el microscopio, y hasta los lentes para corregir la visión humana. En todos ellos tuvo un papel fundamental el saber modelar lentes generadoras de frentes de onda, las cuales pasaron, previamente, por pruebas ópticas. Lo anterior permitió obtener los resultados esperados que, al final, se tradujeron en avances en la ciencia y en la vida diaria de las personas. Incluso actualmente, las aportaciones en esta área continúan sorprendiéndonos y ayudando a mejorar nuestro entorno.

En varios textos desarrollan ampliamente la deducción, propiedades y aplicaciones de los polinomios de Zernike, entre ellos podemos citar a Malacara y DeVore (1992) [18], Kim y Shannon (1987) [12], Mahajan (1994, 1998, 2001) [14] [15] [16], Prata y Rusch (1989) [28], Wyant y Creath (1992) [36], Zhang y Shannon(1992) [40], Malacara y Malacara (2004) [20], Malacara et al. (2005) [21], Bezdid’ko (1974, 1975) [3] [4], Wang y Silva (1980) [34], Tango (1977) [31], Born y Wolf (1999) [7], Buchdahl (1970) [8], entre otros [10].

4.2. Introducción a los polinomios de Zernike.

Antes de presentar a los polinomios de Zernike, es necesario tener claras ciertas ideas y conceptos, que es lo que vamos a hacer a continuación.

Ya hemos visto que la aberración de frente de onda se puede representar matemáticamente como una suma de monomios de Taylor (coordenadas cartesianas). La combinación apropiada de monomios permite obtener las diferentes aberraciones ópticas. Ahora, como se había mencionado anteriormente, otra opción más eficiente para representar a las aberraciones ópticas es usar polinomios en coordenadas polares.

Para sistemas ópticos con pupilas circulares de radio r_0 es conveniente normalizar la coordenada radial en la pupila de salida con respecto al radio r_0 . Por tanto, se tiene que:

$$\rho = \frac{r}{r_0} \quad (4.1)$$

y la ecuación 3.8 se puede reescribir como:

$$W(r, \theta) = b_s \rho^4 + b_c \rho^3 \cos \theta + b_a \rho^2 \cos 2\theta + b_d \rho^2 + b_x \rho \cos \theta + b_y \rho \sin \theta + b_0. \quad (4.2)$$

donde $b_s = Ar_0^4$, $b_c = Br_0^3$, $b_a = Cr_0^2$, $b_d = Dr_0^2$, $b_x = Er_0$, $b_y = Fr_0$ y $b_0 = G$. Con ρ sin unidades y $0 \leq \rho \leq 1$. Las unidades (en milímetros, micrómetros, longitudes de onda, etc.) están contenidas en los coeficientes; entonces, cuando $r = 1$ el valor real en la pupila de salida será r_0 .

Conocidas las expresiones matemáticas para cada uno de los términos de aberración, ahora la pregunta es: ¿de qué manera podemos reducir el efecto de las aberraciones? Pues por medio de un procedimiento conocido como compensación de las aberraciones.

Definición 4.1. *Al procedimiento que se aplica a una ecuación de aberración para reducir el efecto de dicha aberración sobre la imagen se le denomina **compensación de las aberraciones**.*

Por ejemplo, si observamos la aberración esférica mostrada en la figura 2.1.4, se observa que, si el plano imagen es desplazado un poco hacia la izquierda, se puede obtener como imagen una mancha circular de menor tamaño (denominada más comúnmente como círculo de menor confusión) en comparación con el tamaño de la mancha que se tiene en el plano imagen gaussiano. Lo cual equivale a mantener el plano imagen en su posición original e introducir un término de defoco en el frente de onda en la pupila de salida, de tal forma que el círculo de menor confusión quede en el plano imagen. Lo anterior implica agregar un término de defoco a la ecuación de la aberración esférica, así la nueva expresión para la aberración esférica optimizada será $W(r, \theta) = b_s r^4 + b_d r^2$ [24].

El tipo de compensación descrito anteriormente se basa en el criterio de minimizar el tamaño del punto gaussiano (PSF). Sin embargo, dicha compensación también se puede realizar si se toma como criterio disminuir la distorsión del frente de onda con respecto a la esfera (o plano) de referencia. Cabe señalar que estos dos tipos de compensación no necesariamente dan el mismo resultado.

Antes de ver el resultado con el segundo criterio de compensación es necesario hacer algunos comentarios sobre la superficie de referencia. Se ha visto que para sistemas formadores de imagen, la superficie de referencia es una esfera cuyo radio es la distancia entre la pupila de salida y el punto imagen gaussiano, pero en un sistema como el aberrómetro ocular la superficie de referencia es un plano. Dicha superficie de referencia ha sido introducida con el fin de comparar las distorsiones del frente de onda real con un frente de onda ideal; pero ahora, como nos interesa minimizar las distorsiones del frente de onda, conviene definir una nueva superficie de referencia para los sistemas formadores de imagen [24]:

Definición 4.2. *Se define a la esfera media como la esfera tal que el promedio de las desviaciones del frente de onda con respecto a ella sea igual a cero.*

Por lo tanto, con respecto a la esfera media, el promedio de la aberración de frente de onda es cero (sin incluir el término de pistón). En el caso del aberrómetro ocular el frente de onda de referencia sigue siendo el plano, ya que en estos sistemas se incluye un par de lentes o un conjunto de espejos o prismas (sistema Badal) que introducen un defoco al frente de onda incidente en el ojo para compensar la miopía (o hipermetropía) y así tener en la salida un frente de onda casi plano (Liang et ál., 1994).

Una vez visto el concepto de esfera media [24]:

Definición 4.3. *Se define la varianza de la aberración de frente de onda con respecto a su valor promedio como:*

$$\sigma_W^2 = V[W(\rho, \theta)] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [W_n^m(\rho, \theta)]^2 \rho d\rho d\theta, \quad (4.3)$$

dado que el promedio es cero y la función de aberración es continua.

Dicha varianza también es conocida como la desviación cuadrática media de la aberración de frente de onda, la cual está medida ahora con respecto a la esfera media. Si dos superficies de aberración tienen la misma esfera media, la superficie que tiene la menor distorsión será la que tenga la menor varianza.

Volviendo a la aberración esférica, se nota que, para que esta aberración de frente de onda tenga un valor medio de cero y una varianza mínima, se debe sumar un término de pistón y uno de defoco, dando como resultado que se represente de la siguiente forma [19]:

$$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1.$$

Ahora, vamos a mostrar cómo se obtuvo.

Si se desea que la media de la aberración esférica sea igual a cero sin tener que recurrir a la solución trivial, lo más recomendable es agregar un término de pistón y uno de defoco. Así, el problema es el siguiente:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (a\rho^4 + b\rho^2 + c)\rho d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{a}{6} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} \right] = 0.$$

Dicha ecuación se cumple para una infinidad de valores de a , b y c . Una solución que viene a la mente es $a = 6$, $b = -6$ y $c = 1$.

Suponiendo que la media es cero, la varianza equivale al segundo momento, el cual es:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (a\rho^4 + b\rho^2 + c)^2 \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{a^2}{10} + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{6} + \frac{ac}{3} + \frac{bc}{2} + \frac{c^2}{2} \right].$$

En el caso cuando $a = 6$, $b = -6$ y $c = 1$, la varianza es igual a $\frac{\pi}{5}$, aunque si se disminuyeran estos valores manteniendo su proporción, se sigue cumpliendo que la media es cero y se reduce aún más la varianza. Sin embargo, para fines prácticos, lo más conveniente es trabajar con enteros.

Un análisis similar se realiza sobre los otros términos de aberración.

Por tanto, las expresiones para las aberraciones esférica, coma y astigmatismo, de acuerdo con el segundo criterio de compensación y siguiendo la notación recomendada por la Sociedad Americana de Óptica (OSA) [32], tienen la forma:

$$W(\rho, \theta) = C_4^0 \sqrt{5} (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1), \quad (4.4a)$$

$$W(\rho, \theta) = C_3^1 \sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta, \quad (4.4b)$$

$$W(\rho, \theta) = C_2^2 2\rho^2 \cos 2\theta. \quad (4.4c)$$

En estas expresiones se tienen nuevos coeficientes identificados con dos subíndices y un término de normalización, el cual es $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ y 2 respectivamente [24].

Los polinomios de aberración compensados con base en la minimización de la varianza de la aberración de frente de onda dados por las ecuaciones 4.4 son ejemplos de polinomios de Zernike.

Resumiendo lo expuesto en este capítulo hasta ahora: por un lado, hemos visto que una función que es analítica en una región o en el plano se puede aproximar por medio de una serie de potencias finita. Luego, como la función de aberración (de frente de onda) es analítica en una región, se puede aproximar por medio de series de potencias finita. Después, se reescribió dicha función de aberración cambiando las coordenadas cartesianas por coordenadas polares, se normalizó su coordenada radial y se le aplicó el segundo criterio de compensación de aberraciones, llegando a un conjunto de expresiones optimizadas.

Por otro lado, los expertos han visto que la aberración de frente de onda se puede representar por medio de polinomios de Zernike [22].

Finalmente, han llegado a la conclusión de que las expresiones optimizadas obtenidas anteriormente equivalen a los polinomios de Zernike, revisando los trabajos de Zernike [22].

Visto esto, se procede a presentar oficialmente a los polinomios de Zernike.

Cada polinomio de Zernike consiste en tres términos: un factor de normalización, un polinomio radial y un término angular (seno o coseno). Por ejemplo, en las ecuaciones 4.4a, 4.4b y 4.4c los términos de normalización son $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ y 2; los polinomios radiales son $6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$, $3\rho^3 - 2\rho$ y ρ^2 y los términos angulares son $\cos \theta$ para la coma, $\cos 2\theta$ para el astigmatismo y para la esférica no se tiene ningún término angular.

La forma general de los polinomios de Zernike es:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^m(\rho) \cos(m\theta) & \text{para } m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^m(\rho) \sin(m\theta) & \text{para } m < 0 \end{cases}$$

donde el subíndice n denota el grado del polinomio radial y el superíndice m denota la frecuencia angular. El factor de normalización queda definido por [22]:

$$N_n^m = [2(n+1)/(1+\delta_{m0})]^{1/2},$$

con δ_{ij} es una delta de Kronecker.

La forma explícita del polinomio radial $R_n^m(\rho)$ es [22]:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \binom{n+m}{2-s}! \binom{n-m}{2-s}!} \rho^{n-2s}, \quad (4.5)$$

el cual es un polinomio de grado n de ρ conteniendo los términos $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^m$.

Las propiedades matemáticas de los polinomios de Zernike se puede consultar en Mahajan (1998) [15], Thibos et ál. (2000) [32], Malacara y DeVore (1992) [18]. [24]

4.3. Expansión en polinomios circulares de Zernike.

La función de aberración de un sistema con un patrón emergente de la lente circular se puede expandir en términos de un conjunto completo de polinomios circulares de Zernike $R_n^m \rho \cos m\theta$ que son ortogonales en un círculo unitario de la siguiente forma [7]:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=-n}^n C_n^m Z_n^m(\rho, \theta) \quad (4.6)$$

donde C_n^m son los coeficientes de expansión que dependen de la ubicación del punto objeto, n y m son enteros positivos incluyendo el cero, $n-m \geq 0$ y par, y $Z_n^m(\rho, \theta)$ es como se definió antes.

Los polinomios radiales circulares $R_n^m(\rho)$ son pares o impares en ρ , dependiendo de si n (o m) es par o impar. También, $R_n^n(1) = 1$, $R_n^n(\rho) = \rho^n$ y $R_n^m(0) = \delta_{m0}$ para $n/2$ par y a $-\delta^{m0}$ para $n/2$ impar.

Ahora se introduce la siguiente definición [5]:

Definición 4.4. Sea ρ una función peso en el intervalo $[a, b] \times [c, d]$ y sea \langle, \rangle el producto escalar inducido por ρ . Se dice que dos funciones no nulas $f, g \in \mathcal{C}[[a, b] \times [c, d]]$ son ortogonales con respecto a ρ si $\langle f, g \rangle = 0$, es decir, si

$$\int_a^b \int_c^d \rho(x) f(x) g(x) dx = 0. \quad (4.7)$$

Entonces, de acuerdo con esta definición, los polinomios de Zernike son ortogonales de acuerdo con [22]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho, \theta) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (4.8a)$$

el siguiente grupo de equivalencias:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(m'\theta) d\theta = \pi(1 + \delta_{m0}) \delta_{mm'} \quad (4.8b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = \pi \delta_{mm'} \quad (4.8c)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = 0, \quad \text{ya que } m \neq m' \quad (4.8d)$$

y

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (4.8e)$$

Los polinomios circulares de Zernike son especiales en tanto que son los únicos polinomios de dos variables ρ y θ , los cuales *a)* son ortogonales en el círculo unitario, *b)* son invariantes en forma con respecto a rotaciones de los ejes coordenados con respecto al origen, y *c)* incluyen un polinomio para cada par permitido de valores n y m [6] [7].

Nota.- Las palabras “ortogonales de Zernike” suelen ser asociadas a estos nombres, por ejemplo, *Astigmatismo primario ortogonal de Zernike*.

Los polinomios ortonormales de Zernike y los nombres asociados con alguno de ellos cuando se identifican con aberraciones conocidas se enlistan en la tabla 4.3.1 para $n \leq 8$. El número de los términos de aberración de Zernike (u ortogonales) para la expansión de una función de aberración para un orden dado n es dado por:

$$N_n = \begin{cases} \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 & \text{para } n \text{ par,} \\ \frac{(n+1)(n+3)}{4} & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Considere un término común de aberración de la ecuación 4.6

$$W_n^m(\rho, \theta) = C_n^m Z_n^m(\rho, \theta). \quad (4.10)$$

| Polinomio ortonormal de Zernike | | | |
|---------------------------------|----|--|--------------------------------------|
| n | m | $Z_n^m(\rho, \theta)$ | |
| 0 | 0 | 1 | Pistón |
| 1 | -1 | $2\rho \sin \theta$ | Distorción en x |
| 1 | 1 | $2\rho \cos \theta$ | Distorción en y |
| 2 | -2 | $\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$ | Astigmatismo primario a 45° |
| 2 | 0 | $\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$ | Curvatura de campo (defoco) |
| 2 | 2 | $\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$ | Astigmatismo primario a 0° |
| 3 | -3 | $\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$ | |
| 3 | -1 | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$ | Coma primario en x |
| 3 | 1 | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$ | Coma primario en y |
| 3 | 3 | $\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$ | |
| 4 | -4 | $\sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$ | |
| 4 | -2 | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ | Astigmatismo secundario a 45° |
| 4 | 0 | $\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ | Esférica primaria |
| 4 | 2 | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ | Astigmatismo secundario a 0° |
| 4 | 4 | $\sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$ | |
| 5 | -5 | $\sqrt{12}\rho^5 \sin 5\theta$ | |
| 5 | -3 | $\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \sin 3\theta$ | |
| 5 | -1 | $\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$ | Coma secundario en x |
| 5 | 1 | $\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$ | Coma secundario en y |
| 5 | 3 | $\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos 3\theta$ | |
| 5 | 5 | $\sqrt{12}\rho^5 \cos 5\theta$ | |

Tabla 4.3.1: Polinomios *circulares* ortogonales de Zernike y aberraciones balanceadas.

A menos que $n = m = 0$, su media es cero, i.e.

$$\begin{aligned} E[W_n^m(\rho, \theta)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W_n^m(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= 0, \quad n \neq 0, m \neq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para $m = 0$, este hecho puede ser visto con ayuda de la ecuaciones 4.8b, 4.8b y 4.8b, además del hecho de que $R_0^0(\rho) = 1$ es una parte del polinomio (conjunto polinomial). La ortogonalidad de la ecuación 4.8e lleva a que el valor de la media de $R_n^0(\rho)$ es cero. La presencia del término constante en $R_n^0(\rho)$ hace que el valor de la media sea cero. Cuando $m \neq 0$, el valor promedio de $\cos m\theta$ es cero. De la misma forma, el valor de la media cuadrática (segundo momento) de la aberración esta dado por

$$E[W_n^m(\rho, \theta)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [W_n^m(\rho, \theta)]^2 \rho d\rho d\theta = (C_n^m)^2. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, su varianza se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}^2 &= E[(W_n^m)^2] - E[W_n^m]^2 \\ &= (C_n^m)^2, \quad n \neq 0, m \neq 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Así, cada coeficiente de expansión, excepto C_0^0 , representa la desviación estándar del correspondiente término de aberración. La varianza de la función de aberración se obtiene de acuerdo con

$$\sigma_W^2 = E[W^2(\rho, \theta)] - E[W(\rho, \theta)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m)^2. \quad (4.14)$$

A menos que el valor de la media de aberración cumpla que $E[W] = C_0^0 = 0$, $\sigma_W \neq W_{RMS} = V[W^2(\rho, \theta)]^{1/2}$, donde W_{RMS} es el valor de la **raíz media cuadrada** (rmc) de la aberración.

La utilidad de los polinomios de Zernike se fundamenta en el hecho de que son ortogonales en una pupila circular y representan aberraciones balanceadas (equilibradas) que generan varianza mínima [7]. La ventaja de usar polinomios ortogonales es que la desviación estándar de un término de aberración $C_n^m Z_n^m(\rho, \theta)$ es igual al coeficiente de Zernike C_n^m . Es más, debido a la ortogonalidad, el valor de un coeficiente C_n^m es independiente del número de términos empleados para expandir una función de aberración.

Así, los coeficientes no se ven afectados si uno o más términos ortogonales son agregados o quitados de la función de aberración. Por consiguiente, la adición de inclinación o aberración de defoco a la función de aberración de un sistema, como se hace a menudo en pruebas ópticas, no cambia los otros coeficientes de aberración. Como consecuencia de lo anterior, desde el año 2000 se adoptó su uso en óptica oftálmica como el estándar [23].

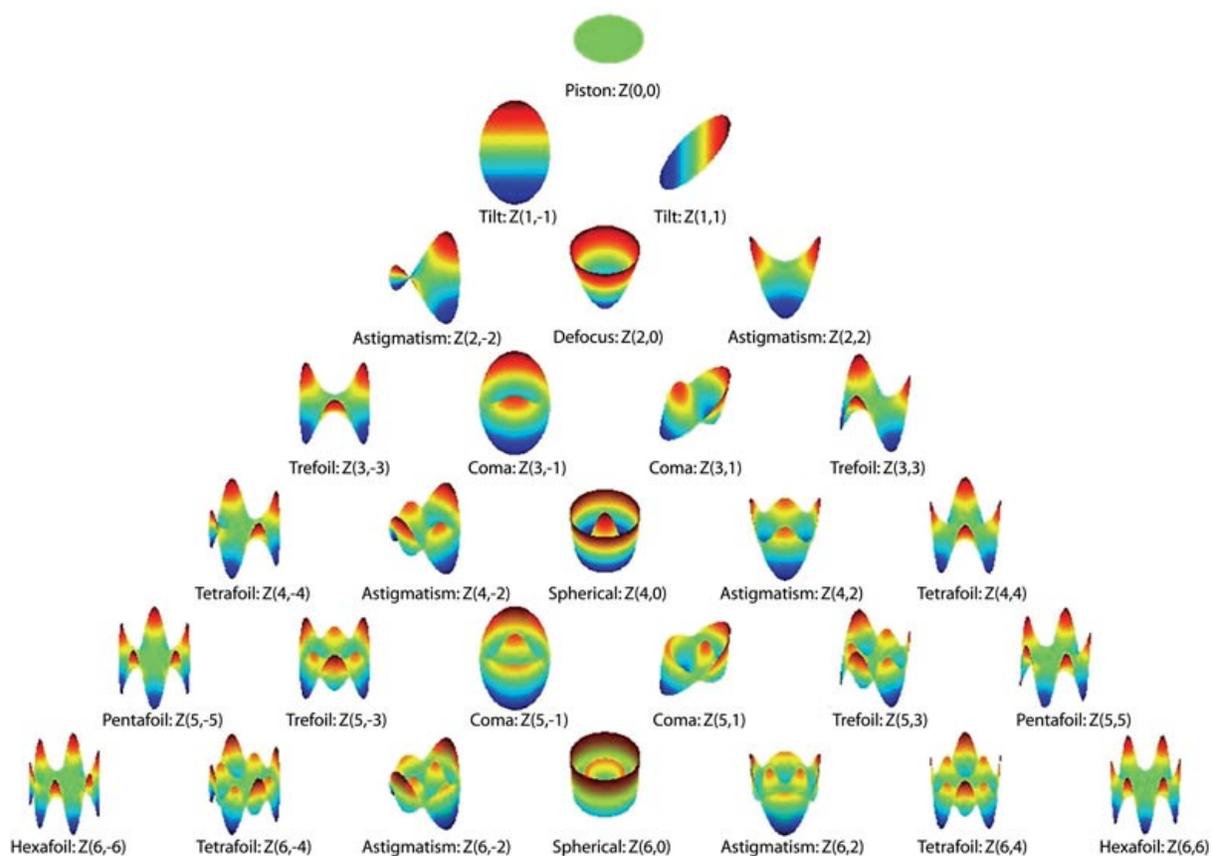


Figura 4.3.1: Gráfica de los primeros 28 polinomios de Zernike [9].

Capítulo 5

Empleo de los coeficientes de Zernike

Antes de empezar, es conveniente hacer mención de que en este capítulo se mencionará el tema de la prueba de Hartmann en cuando al manejo del resultado obtenido por medio de este: el hartmanngrama, que es la imagen del frente de onda resultante de la prueba. Para mayor información sobre la prueba de Hartmann y sus aplicaciones, véase [21] y [29].

Tradicionalmente, para modelar a la aberración de frente de onda, primero se obtenía el patrón de Hartmann producido por una lente bajo prueba a partir de un aberrómetro tipo Hartmann-Shack. Luego, las posiciones de los puntos de este patrón de Hartmann se comparaban con las correspondientes posiciones de los puntos en el patrón de Hartmann de referencia, el cual se obtiene cuando sobre el arreglo de microlentes Hartmann-Shack incide un frente de onda plano. Las diferencias en las posiciones están representadas como Δx_i y Δy_i (siendo i el número del punto en el patrón).

Con base en las ecuaciones 4a y 4b se obtenían las pendientes de la aberración de frente de onda, pero en forma discreta, ya que con estas ecuaciones solo podemos tener las pendientes en las posiciones de los puntos del patrón de Hartmann. Por lo tanto, se requería de un proceso de interpolación (para mayor información sobre este tema, véase [1]), de manera que se tuviera un mapa continuo de las pendientes en cada dirección; una vez hecho esto, se integraban las pendientes para obtener la superficie que describe la aberración de frente de onda. Hasta aquí, lo que se tenía era un conjunto de datos que graficados mostraban una superficie.

Actualmente, para obtener una ecuación que represente esta superficie se debe realizar un procedimiento de ajuste de los datos al conjunto de polinomios de Zernike escogido (para $k=7$, por ejemplo). El resultado del ajuste son los coeficientes de Zernike (los cuales son las variables desconocidas en el proceso). El procedimiento expuesto a continuación fue obtenido de [17].

5.1. Obtención de los coeficientes de Zernike a partir de desviaciones puntuales.

A continuación se presentará un procedimiento de ajuste de datos que genera y emplea un conjunto de polinomios que son ortogonales en el conjunto finito y discreto de los datos puntuales distribuidos.

Para empezar, escríbase la ecuación para el frente de onda con solamente un índice j en lugar de los índices n y m , definidos por

$$j = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1. \quad (5.1)$$

El máximo valor de j es el número total de polinomios de Zernike empleados para el ajuste y dado por $L = (K+1)(K+2)/2$, donde K es el grado del polinomio. Así, los polinomios de Zernike $U_n^m(\rho, \theta)$ se pueden representar usando solamente un índice entero y positivo j de la siguiente forma:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^L A_j U_j(\rho, \theta), \quad (5.2)$$

Como ya se había mencionado, los polinomios de Zernike $U_j(\rho, \theta)$ son ortogonales en el círculo unitario continuo, pero no en un conjunto discreto de datos puntuales. Ahora, se va a encontrar un conjunto de polinomios ortogonales definidos en un conjunto discreto de datos contenidos en el círculo, representados por $V_j(\rho, \theta)$. Podemos suponer que esos polinomios se aproximen a los polinomios de Zernike cuando los puntos estén uniformemente esparcidos y su número tienda a infinito. Así, el frente de onda puede ser representado por

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^L B_j V_j(\rho, \theta), \quad (5.3)$$

donde esos polinomios $V_j(\rho, \theta)$ satisfacen las condiciones de ortogonalidad discreta en el conjunto de N datos puntuales con coordenadas (ρ_i, θ_i)

$$\sum_{i=1}^N V_j(\rho_i, \theta_i) V_p(\rho_i, \theta_i) = F \delta_{jp}, \quad (5.4)$$

donde F es un factor cuyo valor depende de los datos puntuales.

Como es costumbre, se lleva a cabo un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para encontrar esos polinomios. Empieza con:

5.1 Obtención de los coeficientes de Zernike a partir de desviaciones puntuales 35

$$\begin{aligned}
 V_1 &= U_1, \\
 V_2 &= U_2 + D_{21}V_1, \\
 &\dots \\
 V_j &= U_j + D_{j1}V_1 + D_{j2}V_2 + \dots + D_{j,j-1}V_{j-1},
 \end{aligned}$$

o, en forma general:

$$V_j = U_j + \sum_{s=1}^{j-1} D_{j,s}V_s; \quad (5.5)$$

donde $j = 1, 2, \dots, L$. Ya que $V_j(\rho, \theta)$ debe de ser ortogonal con respecto a $V_p(\rho, \theta)$ se multiplica esta expresión por V_p y luego se hace la suma para todos los datos puntuales, desde $i = 1$ hasta N . Ahora, si se emplean las condiciones de ortogonalidad de la ecuación (5.4), para valores de j diferentes de p , se obtiene que

$$\sum_{i=1}^N V_j V_p = \sum_{i=1}^N U_j V_p + D_{jp} \sum_{i=1}^N V_p^2 = 0. \quad (5.6)$$

Entonces D_{jp} queda definido como

$$D_{j,p} = \frac{\sum_{i=1}^N U_j V_p}{\sum_{i=1}^N V_p^2}, \quad (5.7)$$

con $j = 2, 3, \dots, L$ y $p = 1, 2, \dots, j - 1$.

Ahora que se ha definido el método para encontrar a los polinomios ortogonales en el conjunto de datos puntuales, se puede considerar el procedimiento para hacer un ajuste por mínimos cuadrados. Se inicia definiendo una cantidad S (estadístico de orden), el cual es directamente proporcional a la varianza, de la siguiente manera:

$$S = \sum_{i=1}^N \left[W'_i - W(\rho_i, \theta_i) \right]^2, \quad (5.8)$$

donde W'_i es la desviación del frente de onda medida para cada dato puntual i y $W(\rho_i, \theta_i)$ es la desviación del frente de onda calculada después del ajuste de polinomios anterior. Si se representa al frente de onda como una combinación lineal de los polinomios $V(\rho, \theta)$ podemos representar al frente de onda como

$$W(\rho_i, \theta_i) = \sum_{j=1}^L B_j V_j(\rho_i, \theta_i). \quad (5.9)$$

Luego, se impone las siguientes condiciones con el fin de hacer a S lo más pequeña posible:

$$\frac{\partial S}{\partial B_p} = 0, \quad (5.10)$$

para $p = 1, 2, \dots, L$. Así, se obtiene el siguiente sistema de L ecuaciones con L incógnitas:

$$\sum_{j=1}^L B_j \sum_{i=1}^N V_j V_p - \sum_{i=1}^N W'_i V_p = 0, \quad (5.11)$$

donde $p = 1, 2, \dots, L$. Después, empleando las condiciones de ortogonalidad, se tiene que

$$B_p = \frac{\sum_{i=1}^N W'_i V_p}{\sum_{i=1}^N V_p^2}. \quad (5.12)$$

Así, ya se conocen los valores de los coeficientes que definen la combinación lineal de los polinomios $V_j(\rho, \theta)$.

El siguiente paso consiste en determinar los valores de los coeficientes C_{j_s} que definen a los polinomios ortogonales sobre el conjunto discreto de datos puntuales V_j como una combinación lineal de los polinomios de Zernike U_j . Se empezará escribiendo:

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1, \\ V_2 &= U_2 + C_{21}U_1, \\ &\dots \\ V_j &= U_j + C_{j1}U_1 + C_{j2}U_2 + \dots + C_{j,j-1}U_{j-1}, \end{aligned}$$

o en general

$$V_j = U_j + \sum_{i=1}^{j-1} C_{j,i}U_i, \quad (5.13)$$

donde $j = 2, 3, \dots, L$, $C_{jj} = 1$, y $V_1 = U_1$. Ahora se pueden encontrar a los coeficientes C_{ji} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{21} &= D_{21}, \\ C_{31} &= D_{32}C_{21} + D_{3,1}, \\ C_{32} &= D_{32}, \\ C_{41} &= D_{43}C_{31} + D_{42}C_{21} + D_{4,1}, \\ C_{42} &= D_{43}C_{32} + D_{42}, \\ C_{43} &= D_{43} \\ &\dots \end{aligned}$$

5.1 Obtención de los coeficientes de Zernike a partir de desviaciones puntuales 37

Estos resultados pueden ser escritos en forma general como

$$C_{j,i} = \sum_{s=1}^{j-i} D_{j,j-s} C_{j-s,i}, \quad (5.14)$$

donde $i = 1, 2, \dots, j - 1$ y $C_{jj} = 1$.

Ya que ahora conocemos los coeficientes B_j y C_{ji} , los coeficientes A_j , necesarios para encontrar al frente de onda $W(\rho, \theta)$ en la ecuación (5.2), pueden ser encontrados al sustituir la ecuación (5.13) en la ecuación (5.9), obteniéndose que

$$W(\rho, \theta) = B_1 U_1 + \sum_{j=2}^L B_j \left(U_j + \sum_{i=1}^{j-1} C_{ji} U_i \right), \quad (5.15)$$

donde los coeficientes C_{ji} están dados en la ecuación (5.14). Luego, reordenando los términos en las sumatorias, se encuentra que

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{L-1} \left(B_j + \sum_{i=j+1}^L B_i C_{ji} \right) U_j + B_L U_L. \quad (5.16)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (5.2), se puede notar que los coeficientes A_j están dados por

$$A_j = B_j + \sum_{i=j+1}^L B_i C_{i,j}, \quad (5.17)$$

con $j = 1, 2, \dots, (L - 1)$ y $A_L = B_L$.

Para concluir, se expone el procedimiento para obtener los coeficientes de Zernike a partir de las desviaciones puntuales empleando las expresiones de arriba:

1. Elija el grado y ordene los primeros L polinomios de Zernike, asignándoles el índice $j = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1$.
2. Calcule los polinomios de Zernike U_j para cada uno de los N datos puntuales medidos del frente de onda.
3. Con $j = 2, 3, \dots, l$ y $P = 1, 2, \dots, (j - 1)$, use las ecuaciones (5.7) y (5.5) para calcular todos los coeficientes D_{jp} y los polinomios V_j .
4. Por medio de la ecuación (5.12), con $p = 1, 2, \dots, L$ y los valores W'_i obtenidos de la desviación del frente de onda, calcule todos los coeficientes B_p .
5. Aplique la ecuación (5.15), con $i = 1, 2, \dots, (j - 1)$ y $C_{jj} = 1$ para obtener los coeficientes C_{ji} .

6. Use la ecuación (5.17) con $j = 1, 2, \dots, (L - 1)$ y $A_L = B_L$ para calcular todos los coeficientes de aberración A_j .
7. Para concluir, emplee la ecuación (5.2) para obtener el polinomio ajustado por medio de la desviación de frente de onda.

5.2. Procedimiento para obtener los coeficientes de Zernike y ejemplo de aplicación.

Conocido el algoritmo para obtener los coeficientes de Zernike, ahora lo que nos interesa es obtener las coordenadas polares de los centroides del patrón de Hartmann de referencia y sus respectivas desviaciones [21] [29]; lo anterior a partir de un procesamiento de la imagen de ambos hartmanngramas.

Para ello, lo primero que se necesita hacer es calcular las ubicaciones de los pixeles que representan a los centroides tanto de los puntos de referencia como los del frente de onda real usando el hartmanngrama correspondiente. Un programa para tal propósito fue elaborado y se muestra en el anexo A. Después se deben obtener las coordenadas cartesianas (x_i, y_i) y (X_i, Y_i) . Por ejemplo, para obtener a la coordenada x_i , se debe aplicar la siguiente fórmula:

$$x_i = \frac{2x_{pix}}{total\ pix. x} - 1, \quad (5.18)$$

donde x_{pix} representa a la ubicación horizontal del centroide y *total pix. x* es el total de pixeles horizontales en la imagen. De una forma semejante, se obtienen las coordenadas y_i , X_i y Y_i .

Ahora es necesario obtener las desviaciones del frente de onda medidas para cada dato puntual con la siguiente fórmula:

$$W_i = \sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}. \quad (5.19)$$

Para concluir, se convierten las coordenadas cartesianas (x_i, y_i) a las coordenadas polares (ρ_i, θ_i) , es decir los datos puntuales necesarios para el ajuste mencionado en el capítulo anterior.

Para ver cómo funciona todo el procedimiento antes descrito, se desarrollaron un par de programas en Wolfram Mathematica 10.4, el primero sirve para obtener los centroides de un hartmanngrama y se expone en el anexo A. Con él, se procesaron los hartmanngramas mostrados en la figura 5.2.1, los cuales fueron obtenidos de [11].

Después, se procesaron los datos resultantes para obtener los datos puntuales y las desviaciones puntuales, los cuales se introdujeron en el programa del anexo B elaborado para obtener la representación de la aberración de frente de onda de la figura 5.2.2.

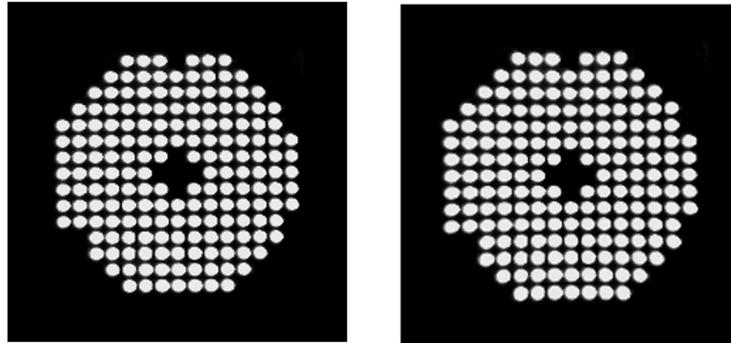


Figura 5.2.1: Hartmanngrama de referencia (izquierda) y obtenido por la lente bajo prueba (derecha).

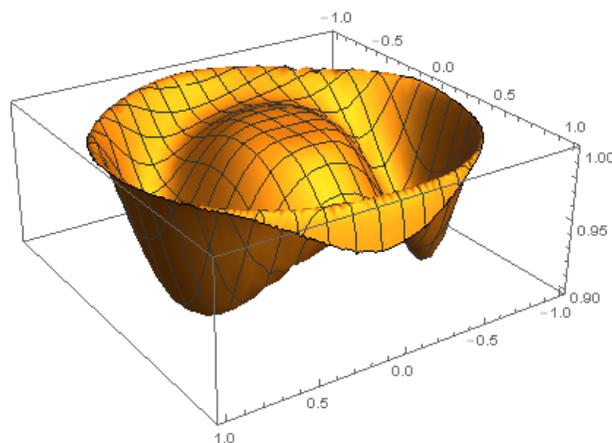


Figura 5.2.2: Aberración de frente de onda obtenida con coeficientes de Zernike.

Haciendo un análisis de sus coeficientes de Zernike, se concluye que está conformada sobre todo por pistón ($A_1 = 0.0217389$) y aberración esférica primaria ($A_{13} = 0.0123044$).

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo fue indispensable entender y manejar definiciones sobre temas como frente de onda y aberraciones, necesarios para adentrarnos en el tema de los polinomios de Zernike. Sobre estos últimos, descubrimos que poseen ciertas ventajas en cuanto a su uso, siendo las más importantes: su ortogonalidad en el círculo unitario, su invarianza en forma con respecto a rotaciones de los ejes coordenados con respecto al origen, y, lo más importante, que contienen algunos términos de compensación a las expresiones matemáticas en la representación polar con el fin de minimizar el efecto de las aberraciones en la imagen final. Además, incluyen un polinomio para cada par permitido de valores n y m , el cual está asociado a un coeficiente que es el que, al final, permite modelar al frente de onda. Todo esto hace que constituyan una base matemática adecuada y recomendable para representar las aberraciones de frente de onda.

Además, para poder hacer el ajuste de datos al conjunto de polinomios de Zernike, es esencial encontrar los centroides del hartmanngrama obtenido por medio de la prueba de Hartmann, la cual es útil al momento de modelar a la aberración de frente de onda, dado que en un aberrómetro tipo Hartmann-Shack esta última corresponde al frente de onda real.

Sin embargo, dado que hay una preferencia tradicional por trabajar con polinomios de Seidel y sobre todo pensando en aquellos que hayan modelado una aberración con polinomios de Seidel pero que tengan problemas a la hora de manipular las fórmulas o encontrar el modelo adecuado, se sugiere el uso de fórmulas de conversión de polinomios de Seidel a polinomios de Zernike y viceversa. Una referencia útil sobre este tema es [22].

Este trabajo en sí no tiene la intención de dar un nuevo aporte en cuanto se refiere a polinomios de Zernike; mas sí espera ser una motivación para el lector que tenga interés en modelar un frente de onda determinado. Y, siguiendo la idea de que “un pequeño paso para un estudiante se puede traducir en un gran salto para la comunidad científica”, si en el camino se llegara a descubrir algo que aporte mayor conocimiento sobre los ya mencionados polinomios, mejor. Es un hecho que todos podemos aportar algo, solo es cuestión de voluntad, valor y fe en el trabajo que uno desarrolla.

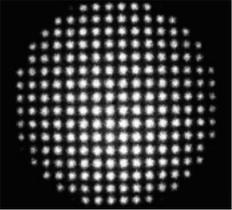
Apéndice A

Programa para obtener los centroides de un hartmanngrama.

(*Instrucción para borrar datos en el kernel. Esto se realiza con la intención de evitar confusiones al correr el programa varias veces*)

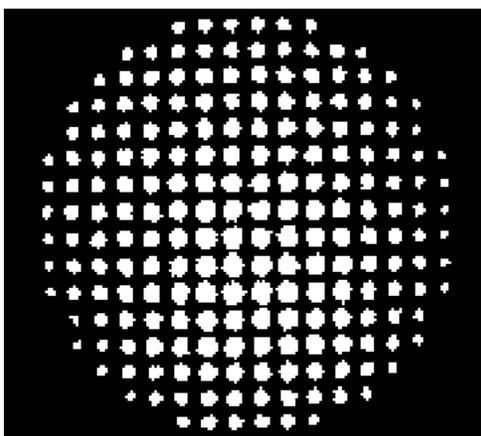
```
ClearAll["Global*"]
```

(*Aquí se agrega la imagen del hartmanngrama*)

```
iz = ;
```

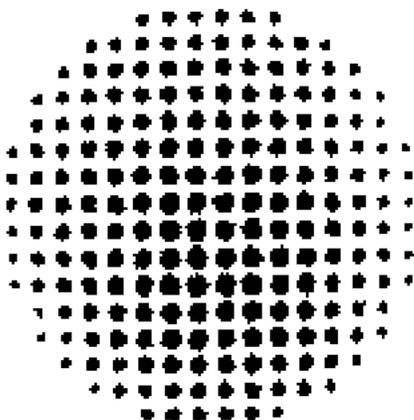
(*Primero se realiza una binarización de la imagen*)

```
Z = FillingTransform@Binarize[iz]
```



(*Luego la imagen binarizada se convierte en negativo*)

```
z = ColorNegate@Z
```



(*Después, se identifican las distintas manchas en la imagen en negativo*)

```
WatershedComponents[z, Method -> {"MinimumSaliency", 4}]/Colorize
```



```
s = SelectComponents[WatershedComponents[z, Method -> {"MinimumSaliency", 3}],  
"Area", ,01 < # < 2000&z];
```

Colorize[s]

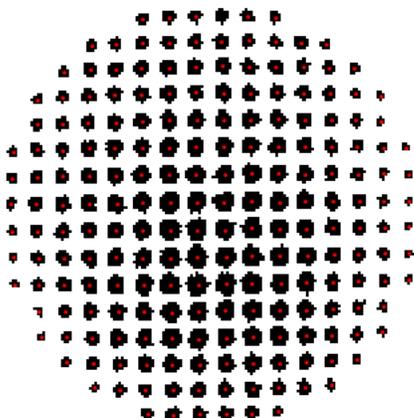


(*Ahora, en cada mancha se calcula el centroide*)

```
circles = ComponentMeasurements[s, {"Centroid"}];
```

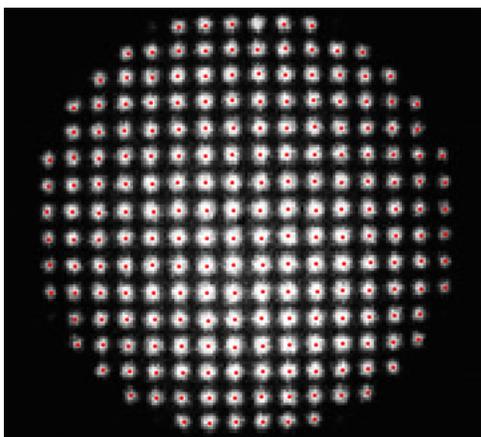
(*Como resultado, se compara a la imagen en negativo con sus respectivos centroides*)

```
Show[z, Graphics[{Red, Thick, Point@@#&/@circles[[All, 2]]}]]
```



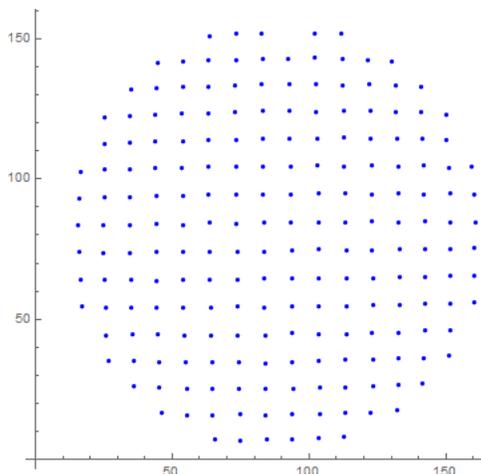
(*Y esta es la imagen original del hartmanngrama con sus respectivos centroides*)

```
Show[iz, Graphics[{Red, Thick, Point@@#&/@circles[[All, 2]]}]]
```



(*Gráfica de los centroides*)

```
ListPlot[circles[[All, 2]], AspectRatio -> 1, PlotStyle -> Blue]
```



Apéndice B

Programa para el ajuste de datos al conjunto de coeficientes de Zernike.

(*Datos puntuales*)

$p = \{ \{ "0.576675", -"1.76065" \}, \{ "0.506628", -"2.03374" \},$
 $\{ "0.804763", -"1.7036" \}, \{ "0.610592", -"1.95511" \},$
 $\{ "0.578423", -"1.35303" \}, \{ "0.736884", -"2.47652" \},$
 $\{ "0.690703", -"1.72876" \}, \{ "0.682142", -"1.55803" \},$
 $\{ "0.718334", -"1.88874" \}, \{ "0.806341", -"1.41213" \},$
 $\{ "0.318767", -"2.36738" \}, \{ "0.631402", "2.75819" \},$
 $\{ "0.592343", -"2.9564" \}, \{ "0.465268", -"1.81159" \},$
 $\{ "0.479197", -"2.91268" \}, \{ "0.510522", -"1.0785" \},$
 $\{ "0.733605", -"2.25504" \}, \{ "0.56482", -"1.56314" \},$
 $\{ "0.69989", "3.13425" \}, \{ "0.613478", -"1.16493" \},$
 $\{ "0.722934", -"1.22648" \}, \{ "0.796464", -"1.55887" \},$
 $\{ "0.583268", "3.13033" \}, \{ "0.354592", -"1.88814" \},$
 $\{ "0.869969", -"1.974" \}, \{ "0.684407", "2.60364" \},$
 $\{ "0.832064", -"1.2722" \}, \{ "0.572882", -"2.50969" \},$
 $\{ "0.767894", -"1.08549" \}, \{ "0.451972", -"1.56384" \},$

{“0.587265”, “2.50132”}, {“0.467173”, “3.1265”},
{“0.254932”, –“2.70568”}, {“0.248705”, –“2.04456”},
{“0.672191”, –“2.61261”}, {“0.650599”, –“2.36861”},
{“0.692974”, –“1.38793”}, {“0.73908”, “2.82087”},
{“0.706273”, –“2.98376”}, {“0.665467”, –“1.00503”},
{“0.526512”, “2.67564”}, {“0.816046”, “3.13572”},
{“0.349428”, “3.12102”}, {“0.414384”, –“2.56898”},
{“0.677355”, –“0.510733”}, {“0.364903”, –“2.84168”},
{“0.622931”, –“2.77118”}, {“0.483296”, –“2.36792”},
{“0.810543”, –“2.36165”}, {“0.484436”, “2.88907”},
{“0.231855”, “3.11249”}, {“0.408657”, –“2.16702”},
{“0.571163”, –“2.22537”}, {“0.710126”, –“0.143781”},
{“0.258819”, –“0.422229”}, {“0.517106”, –“2.68994”},
{“0.467708”, –“1.30206”}, {“0.33296”, “2.35007”},
{“0.740858”, –“0.645914”}, {“0.829151”, –“1.8472”},
{“0.59744”, –“0.172326”}, {“0.336251”, –“1.5577”},
{“0.59585”, “1.77768”}, {“0.486297”, –“0.755224”},
{“0.836474”, –“0.562198”}, {“0.665769”, –“2.11941”},
{“0.814565”, –“0.758395”}, {“0.824799”, –“2.16634”},
{“0.266346”, “2.03722”}, {“0.264782”, “1.1216”},
{“0.596798”, “2.94078”}, {“0.321695”, –“0.74543”},
{“0.573961”, –“0.901417”}, {“0.785217”, “2.68083”},
{“0.423123”, “2.15775”}, {“0.70095”, “0.0216776”},
{“0.735977”, –“0.867266”}, {“0.826896”, “2.99928”},
{“0.350978”, “0.0350484”}, {“0.159575”, –“2.40245”},
{“0.367173”, –“0.287998”}, {“0.736267”, “1.90385”},

{“0.627882”, -“0.351856”}, {“0.732434”, -“2.82647”},
{“0.358136”, -“1.21944”}, {“0.872444”, -“1.14665”},
{“0.748127”, “2.47413”}, {“0.424408”, “2.54864”},
{“0.824322”, -“3.00459”}, {“0.827958”, -“0.958166”},
{“0.586561”, “0.022268”}, {“0.784042”, “0.474463”},
{“0.370824”, “1.90068”}, {“0.749811”, “2.25458”},
{“0.598432”, “0.217851”}, {“0.780991”, -“0.437585”},
{“0.774638”, -“2.68819”}, {“0.764644”, -“2.03723”},
{“0.818124”, “1.72513”}, {“0.498134”, “2.35857”},
{“0.265795”, “0.499785”}, {“0.263984”, “2.6574”},
{“0.411097”, -“0.950848”}, {“0.424241”, “0.992284”},
{“0.22083”, -“1.55977”}, {“0.653216”, -“0.757482”},
{“0.627195”, “1.20108”}, {“0.841892”, “2.55976”},
{“0.661717”, “2.36514”}, {“0.352769”, “1.58207”},
{“0.422276”, “0.604282”}, {“0.710164”, “2.9739”},
{“0.234811”, “0.0466926”}, {“0.629565”, “1.95817”},
{“0.525391”, “0.478355”}, {“0.335084”, “0.803566”},
{“0.160949”, -“0.719229”}, {“0.482175”, -“0.217712”},
{“0.70762”, “1.74865”}, {“0.583606”, “1.57964”},
{“0.595096”, “1.38117”}, {“0.497484”, “0.803592”},
{“0.237524”, “1.57563”}, {“0.84577”, -“2.8695”},
{“0.578232”, -“0.61144”}, {“0.521366”, “1.11984”},
{“0.681153”, “0.552266”}, {“0.3717”, “1.2578”},
{“0.4165”, -“0.551107”}, {“0.518319”, -“0.430119”},
{“0.73601”, -“0.297696”}, {“0.843461”, “1.86176”},
{“0.521373”, “2.03819”}, {“0.469577”, “0.0291512”},

{"0.251187", -"1.06437"}, {"0.848415", -"0.254601"},
 {"0.706828", "1.41335"}, {"0.85195", "2.86626"},
 {"0.747247", "0.683761"}, {"0.370839", "0.351381"},
 {"0.586347", "0.653683"}, {"0.48192", "1.3356"},
 {"0.739552", "0.33452"}, {"0.712663", "0.181798"},
 {"0.680073", "1.03974"}, {"0.583604", "0.939715"},
 {"0.371674", "2.81134"}, {"0.733812", "1.25855"},
 {"0.485026", "0.268502"}, {"0.818155", "0.0198793"},
 {"0.88141", -"2.74296"}, {"0.817568", "1.43795"},
 {"0.840595", "2.17089"}, {"0.825582", "2.36415"},
 {"0.482401", "1.82598"}, {"0.824926", -"0.119841"},
 {"0.69759", "1.58331"}, {"0.583729", "2.22233"},
 {"0.631134", "0.392845"}, {"0.8277", "0.158574"},
 {"0.824592", "0.792544"}, {"0.891566", "2.74128"},
 {"0.852573", "0.291137"}, {"0.171768", "2.3344"},
 {"0.838759", "0.597732"}, {"0.778651", "1.1156"},
 {"0.681784", "2.12014"}, {"0.466483", "1.58151"},
 {"0.171104", "0.815664"}, {"0.88348", "1.98635"},
 {"0.660741", "0.793543"}, {"0.746511", "0.902251"},
 {"0.78123", "2.0459"}, {"0.879874", "1.17306"},
 {"0.838093", "0.989172"};

$$U_1[r, t] := 1$$

(*Z₀⁰ Pistón*)

$$U_2[r, t] := 2r * \text{Sin}[t]$$

(*Z₁⁻¹ Inclinación en x*)

$$U_3[r, t] := 2r * \text{Cos}[t]$$

(*Z₁¹ Inclinación en y*)

$$U_4[r-, t.] := \sqrt{6} * r^2 * \text{Sin}[2t]$$

(*Z₂⁻² Astigmatismo primario a 45°*)

$$U_5[r-, t.] := \sqrt{3} * (2r^2 - 1)$$

(*Z₂⁰ Defoco*)

$$U_6[r-, t.] := \sqrt{6} * r^2 * \text{Cos}[2t]$$

(*Z₂² Astigmatismo primario a 0°*)

$$U_7[r-, t.] := \sqrt{8} * r^3 * \text{Sin}[3t]$$

(*Z₃⁻³*)

$$U_8[r-, t.] := \sqrt{8} * (3r^3 - 2r) * \text{Sin}[t]$$

(*Z₃⁻¹ Coma primario en y*)

$$U_9[r-, t.] := \sqrt{8} * (3r^3 - 2r) * \text{Cos}[t]$$

(*Z₃¹ Coma primario en x*)

$$U_{10}[r-, t.] := \sqrt{8} * r^3 * \text{Cos}[3t]$$

(*Z₃³*)

$$U_{11}[r-, t.] := \sqrt{10} * r^4 * \text{Sin}[4t]$$

(*Z₄⁻⁴*)

$$U_{12}[r-, t.] := \sqrt{10} * (4r^4 - 3r^2) * \text{Sin}[2t]$$

(*Z₄⁻² Astigmatismo secundario a 45°*)

$$U_{13}[r-, t.] := \sqrt{5} * (6r^4 - 6r^2 + 1)$$

(*Z₄⁰ Aberración esférica primaria*)

$$U_{14}[r-, t.] := \sqrt{10} * (4r^4 - 3r^2) * \text{Cos}[2t]$$

(*Z₄² Astigmatismo secundario a 0°*)

$$U_{15}[r-, t.] := \sqrt{10} * r^4 * \text{Cos}[4t]$$

(*Z₄⁴*)

$$U_{16}[r-, t.] := \sqrt{12} * r^5 * \text{Sin}[5t]$$

(*Z₅⁻⁵*)

$$U_{17}[r-, t-] := \sqrt{12} * (5r^5 - 4r^3) * \text{Sin}[3t]$$

(*Z₅⁻³*)

$$U_{18}[r-, t-] := \sqrt{12} * (10r^5 - 12r^3 + 3r) * \text{Sin}[t]$$

(*Z₅⁻¹ Coma secundario en y*)

$$U_{19}[r-, t-] := \sqrt{12} * (10r^5 - 12r^3 + 3r) * \text{Cos}[t]$$

(*Z₅¹ Coma secundario en x*)

$$U_{20}[r-, t-] := \sqrt{12} * (5r^5 - 4r^3) * \text{Cos}[3t]$$

(*Z₅³*)

$$U_{21}[r-, t-] := \sqrt{12} * r^5 * \text{Cos}[5t]$$

(*Z₅⁵*)

$$\text{Do} [\{A_{i,j} = U_i[p[[j, 1]], p[[j, 2]]]\}, \{i, 1, 21\}, \{j, 1, 175\}]$$

$$\text{Do} [\{V_{1,j} = A_{1,j}\}, \{j, 1, 175\}]$$

$$\text{For} [k = 1, k < 21, k++, \{ \text{Do} [\{ \{ D_{j,k+1,s} = \frac{\sum_{i=1}^{175} A_{k+1,i} V_{s,i}}{\sum_{i=1}^{175} (V_{s,i})^2}, V_{k+1,j} = A_{k+1,j} + \sum_{s=1}^k D_{j,k+1,s} A_{s,j} \} \}, \{j, 1, 176\}, \{s, 1, k\} \}]]$$

(*Desviaciones puntuales*)

$$\begin{aligned} W_p = \{ & \text{"0.000834912"}, \text{"0.00330446"}, \text{"0.0174338"}, \text{"0.00396504"}, \\ & \text{"0.0039495"}, \text{"0.0181868"}, \text{"0.0082856"}, \text{"0.00883073"}, \\ & \text{"0.0107289"}, \text{"0.0192173"}, \text{"0.00676154"}, \text{"0.014732"}, \\ & \text{"0.0111865"}, \text{"0.00441979"}, \text{"0.0072175"}, \text{"0.00635446"}, \\ & \text{"0.0146943"}, \text{"0.00221767"}, \text{"0.0199656"}, \text{"0.0080375"}, \\ & \text{"0.012938"}, \text{"0.0177804"}, \text{"0.0112769"}, \text{"0.00637324"}, \\ & \text{"0.0276321"}, \text{"0.019094"}, \text{"0.0223923"}, \text{"0.00841014"}, \\ & \text{"0.0184304"}, \text{"0.00568702"}, \text{"0.0123119"}, \text{"0.00729009"}, \end{aligned}$$

“0.00741377”, “0.00671579”, “0.0141889”, “0.00902459”,
“0.0101689”, “0.0242522”, “0.020313”, “0.0136128”,
“0.010122”, “0.0313022”, “0.00619957”, “0.00645244”,
“0.0183854”, “0.00687458”, “0.0116331”, “0.00415961”,
“0.0238145”, “0.0090268”, “0.00642663”, “0.00525467”,
“0.00553637”, “0.0242265”, “0.00868293”, “0.00812957”,
“0.00623919”, “0.0055586”, “0.021069”, “0.0212075”,
“0.0154515”, “0.00652422”, “0.0128001”, “0.00882992”,
“0.0342404”, “0.00843924”, “0.0277831”, “0.0242262”,
“0.00587631”, “0.00623154”, “0.0131445”, “0.00756745”,
“0.0104165”, “0.0276982”, “0.00681664”, “0.0246832”,
“0.0201672”, “0.0335039”, “0.00845876”, “0.00783763”,
“0.00883011”, “0.0214119”, “0.0153058”, “0.0208638”,
“0.00683468”, “0.0316854”, “0.0250051”, “0.00702032”,
“0.0318623”, “0.0285968”, “0.0153586”, “0.0307631”,
“0.00614251”, “0.0244577”, “0.0160028”, “0.0289061”,
“0.0229017”, “0.0152576”, “0.0312627”, “0.00835003”,
“0.00726743”, “0.00645825”, “0.00725663”, “0.00791614”,
“0.00740149”, “0.0145481”, “0.0163376”, “0.0368452”,
“0.016768”, “0.00581592”, “0.00992721”, “0.0221035”,
“0.00742142”, “0.0142703”, “0.0126915”, “0.0075611”,
“0.00789561”, “0.0112879”, “0.0205328”, “0.0122643”,
“0.0129764”, “0.0106789”, “0.00597462”, “0.0328162”,
“0.0113725”, “0.0117736”, “0.0231179”, “0.00681419”,
“0.00861373”, “0.0102879”, “0.0254705”, “0.0331111”,
“0.0101469”, “0.0100721”, “0.00703728”, “0.0386104”,

"0.0206348", "0.0363666", "0.027718", "0.00858858",
 "0.0148746", "0.00966442", "0.0277668", "0.0255283",
 "0.0207558", "0.0151364", "0.00726422", "0.0228973",
 "0.0108102", "0.0348681", "0.0381587", "0.0313918",
 "0.0348089", "0.0313533", "0.00859824", "0.0355837",
 "0.0196043", "0.0131901", "0.0188225", "0.0357246",
 "0.033836", "0.041774", "0.0400193", "0.00607364",
 "0.0391197", "0.0271237", "0.0178277", "0.00957775",
 "0.00622867", "0.0404006", "0.0195481", "0.0267054",
 "0.0257278", "0.0405132", "0.035122" };

Do [$\{w_i = \text{Wp}[[i]]\}, \{i, 1, 175\}$]

Do [$\left\{B_j = \frac{\sum_{i=1}^{175} w_i V_{j,i}}{\sum_{i=1}^{175} (V_{j,i})^2}\right\}, \{j, 1, 21\}$]

Do [$C_{j,j} = 1, \{j, 1, 21\}$]

For [$k = 2, k < 22, k++$, $\left\{\text{Do} \left[\left\{C_{k,i} = \sum_{s=1}^{k-i} D_{1,k,k-s} C_{k-s,i}\right\}, \{i, 1, k-1\}\right]\right\}$]

Do [$\left\{A_j = B_j + \sum_{i=j+1}^{21} B_i C_{i,j}\right\}, \{j, 1, 21\}$]

r2c[e.] := Simplify[TrigExpand[e]/.{Sin[t] :-> y/r, Cos[t] :-> x/r}/.r^n_ :-> (x^2 + y^2)^(n/2)]

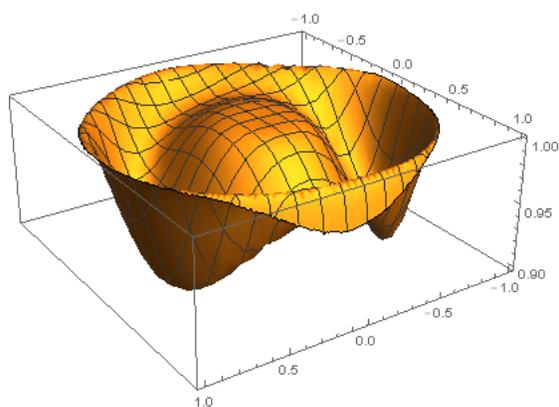
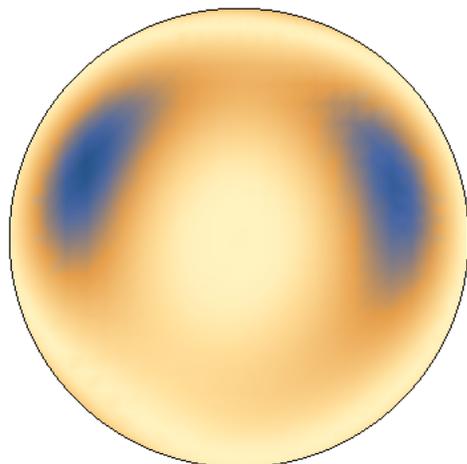
zPlot[e.] :=

With[{f = r2c[e]}, DensityPlot[Cos[2Pi f]^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, RegionFunction :-> (#1^2 + #2^2 <= 1 &), PlotPoints -> 25, BoundaryStyle -> Black, Frame -> False]]

yPlot[e.] :=

With[{f = r2c[e]}, Plot3D[Cos[2Pi f]^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, RegionFunction :-> (#1^2 + #2^2 <= 1 &), PlotPoints -> 25, BoundaryStyle -> Black]]

zPlot $\left[\sum_{j=1}^{21} A_j U_j[r, t] \right]$
yPlot $\left[\sum_{j=1}^{21} A_j U_j[r, t] \right]$



Do [Print $[A_j]$, {j, 1, 21}]

0.0217389

0,000790526

0,00492114

-0,00240053

-0,00219945

0,00607606

0,00357525

-0,00134343

-0,000977844

-0,000508696

0,000128763
0,000457136
-0.0123044
-0,00178359
0,000680477
-0,000535083
-0,000539766
-0,00170719
-0,0000728703
0,0000925113
-0,000328583

(*En conclusión, esta aberración está conformada mayoritariamente por pistón y aberración esférica primaria.*)

Bibliografía

- [1] Alonso M.E., Guerrero W.F. & Alexandrov V.W. (2013). *Reconstrucción de información usando Métodos de Integración Numérica* (Tesis de maestría). FCFM BUAP, Puebla.
- [2] Astrogeology Science Center (2009). *Seidel*. Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). Obtenido de <http://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/5410>
- [3] Bezdid'ko, S. N. (1974). The use of Zernike polynomials in optics. *Sov. J. Opt. Technol.*, 41, 425-429.
- [4] Bezdid'ko S. N. (1975). Determination of the Zernike polynomial expansion coefficients of the wave aberration. *Sov.J. Opt. Technol.* 43, 222-225.
- [5] Bellido, J.C., et. al. (2014). *Ecuaciones derivadas parciales*. Madrid: Ediciones Paraninfo.
- [6] Bhatia A.B. & Wolf. E. (1954). *On the Circle Polynomials of Zernike and Related Orthogonal Sets*. Cambridge, Reino Unido: Proc. Cambridge Philos. Soc. Publication.
- [7] Born M. & Wolf. E. (1999). *Principles of Optics*. Nueva York: Oxford Publication.
- [8] Buchdahl, H. A. (1970). Non-linear Lagrangians and cosmological theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 150, 1-8.
- [9] Costa, D. M., & Ferrer-Blasco, T. (2010). Adaptive optics, wavefront aberrations and visual simulation. *J EMMETROPIA*, 2(2).
- [10] Gómez A. & Malacara D. (2006). *Reconstrucción de Frentes de Onda con Datos Interferométricos Utilizando Polinomios de Cuasi-Zernike* (Tesis de maestría). Centro de Investigaciones en Óptica A.C., León, Guanajuato.
- [11] Guerrero W.F., Bermúdez B., Cleaver L.T. & Robledo C. (octubre de 2014). *Determinación de centroides de un patrón de Hartmann y la aplicación en la reconstrucción del frente de onda de sistemas ópticos..* En J.X. Velasco-Hernández (Presidencia), XLVII Congreso Nacional de la SMM. Congreso llevado a cabo Durango, Durango.
- [12] Kim, C.J. & Shannon, R. (1987). Catalog of Zernike polynomials. In Shannon, R. y Wyant, J.C. (Eds.) *Applied Optics and Optical Engineering*. New York: Academic Press.
- [13] Kintner E.C. (1976). On the Mathematical Properties of the Zernike Polynomials. *Optica Acta*, 1(23), 499-679.
- [14] Mahajan, V. N. (1994). *Zernike Annular Polynomials for Imaging Systems with Annular Pupils*, Appl. Opt. Estados Unidos de América.
- [15] Mahajan, V. N. (1998) *Optical Imaging and Aberrations: Part I. Ray Geometrical Optics*. Bellingham, WA: SPIE Press.

- [16] Mahajan, V. N. (2001) *Optical Imaging and Aberrations, Part I: Ray Geometrical Optics*, SPIE Press. Washington, Estados Unidos de América.
- [17] Malacara, D. (1990). *Wavefront fitting with discrete orthogonal polynomials in a unit radius circle..* New York: Optical Engineering.
- [18] Malacara, D. & DeVore, S. L. (1992). *Interferogram Evaluation and Wavefront Fitting*. In Optical Shop Testing. (2nd ed.). New York: John Wiley and Sons.
- [19] Malacara, D. & Malacara, Z. (1994). *Handbook of Lens Design*. New York: Marcel Dekker.
- [20] Malacara, D. & Malacara, Z. (2004). *Handbook of Optical Design*. New York: Marcel Dekker.
- [21] Malacara, D., et. al. (2005). *Interferogram Analysis for Optical Testing*. Taylor & Francis Group.
- [22] Malacara, D. (2007). *Optical Shop Testing* . Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- [23] Malacara, D. (2015). *Polinomios de Zernike para representar la Aberración de un Frente de Onda..* Obtenido de <http://paginas.matem.unam.mx/eibpoa2015/images/Malacara.pdf>.
- [24] Mejía Y., Lopez E. & Diaz A. (2011). *El frente de onda y su representación con polinomios de Zernike* . Bogotá: Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.
- [25] Myrick D. (1966). *A Generalization of the Radial Polynomials of F. Zernike*. SIAM J. Appl. Math.
- [26] Nijboer, B. (1943). *The Diffraction Theory of Optical Aberrations. Part I: General Discussion of the Geometrical Aberrations*, Physica, 10, 679-692.
- [27] Nijboer, B. (1947). *The Diffraction Theory of Optical Aberrations. Part II: Diffraction Pattern in the Presence of Small Aberrations*, Physica, 13, 605-620.
- [28] Prata A. & Rusch W. (1989). *Algorithm for Computation of Zernike Polynomials Expansion Coefficients* . Appl. Opt. Publication.
- [29] Salas D. P. & Malacara D. (2006). *Estudios y Aplicaciones sobre la Prueba de Hartmann* (Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones en Óptica A.C., León, Guanajuato.
- [30] Schwiegerling J. T. & Neal R. (2005). *Historical Development of the Shack-Hartmann Wavefront Sensor*. The International Society for Optical Engineering.
- [31] Tango W. (1977). *The circle polynomials of Zernike and their application in optics*. Appl. Phys.
- [32] Thibos, L. N., Applegate, R. A., Schwiegerling, J. T., & Webb, R. (2002). Standards for reporting the optical aberrations of eyes. *Journal of refractive surgery*, 18(5), S652-S660.
- [33] Tolansky, S. (1967). Frits Zernike 1888-1966. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*. 13: 392-326. doi: 10.1098/rsbm.1967.0021
- [34] Wang J.Y. & Silva D.E. (1980). *Wave-front Interpretation With Zernike Polynomials*, Appl. Opt. Publication, Estados Unidos de América.
- [35] Wünsche A. (2005). *Generalized Zernike or disc polynomials*. Journal of Computational and Applied Mathematics.
- [36] Wyant J.C. & Creath K. (1992). *Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology*, Appl. Opt. Optical Eng.

-
- [37] Zernike, F. (1934). *Diffraction Theory of Knife-edge Test and its Improved Form, the Phase Contrast Method*, Mon. Not. R. Astron. Soc., Reino Unido.
- [38] Zernike, F. (1934). *Beugungstheorie Des Schneidverfahrens und Seiner Verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode*, Physica 1, Alemania.
- [39] Zernike, F. & Brinkman H. C. (1935). *Hypersphärische Funktionen und die in sphärische Bereichen orthogonalen Polynome*. Amsterdam: Proc. Akad. Wet.
- [40] Zhang S. & Shannon R. R., (1992) Catalog of spot diagrams. En R. R. Shannon & J. Wyant (Eds.) *Applied Optics and Optical Engineering*, (pp. 201-238), New York: Academic Press.