Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A ESPACIOS CUBRIENTES, FIBRACIONES Y CORREFLEXIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
JESÚS GONZÁLEZ SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS
Dr. JUAN ANGOA AMADOR

PUEBLA, PUE. 23-10-2014

Dedicado a
mis padres Jesús y Sosipater,
mi hermana Sosi
y mis abuelos.

Introducción

Esta tesis presenta la teoría general de los espacios cubrientes y una introducción a las fibraciones, temáticas perteneciente al área de la Topología algebraica, presentando los resultados que conducen a la demostración de uno de los teoremas fundamentales de Topología algebraica, el Teorema de levantamiento, que resuelve el problema de la existencia de una factorización de una función continua mediante una función cubriente. Además se presenta el Teorema de levantamiento para fibraciones de Hurewicz, que es una generalización del Teorema de levantamiento para espacios cubrientes.

En el Capítulo 1, el Capítulo Introducción, como su nombre lo indica, presenta nociones que se utilizarán en el trabajo y algunos conceptos generales de Topología y Topología algebraica, se presentan la estructura del Grupo fundamental de un espacio topológico, algunas topologías generadas a partir de familias de funciones y la topología compacto abierta sobre el conjunto de funciones continuas entre dos espacios topológicos.

En el Capítulo 2 se introduce el concepto de función cubriente y, entre otros resultados, se presentan el comportamiento de las funciones cubrientes respecto a la restricción de dominios y productos topológicos, y las características topológicas que hereda un espacio cubriente del espacio base. Se presentan los Teoremas de levantamiento con los cuales factorizamos una función por medio de una función cubriente y no sólo se genera el levantamiento de una función sino que se genera un levantamiento de Homotopías, y mediante esto, se generan los resultados que relacionan los espacios cubrientes con el comportamiento de su Grupo fundamental y el homomorfismo inducido por la función cubriente; acto seguido, se analizará la existencia del espacio cubriente universal de un espacio topológico. Las secciones de transformaciones cubrientes y espacio de órbitas, están enfocadas al estudio de las estructuras algebraicas de dos conjuntos de funciones continuas especiales entre los espacios cubrientes.

En el Capítulo 3 se introducen los conceptos de homeomorfismo local y fibración, este último mediante la propiedad de levantamiento de homotopía así como con las funciónes cubrientes; se desarrollan los resultados de relación entre las fibraciones y el Grupo fundamental, hasta la demostración de un teorema de levantamiento de fibraciones. Después de introducir el concepto de cuadrado cartesiano, se demuestra que las fibraciones son una clase de funciones que es cerrada bajo la formación de cuadrados cartesianos.

En el Capítulo 4, se introduce el concepto de subcategoría correflexiva, en el cual se puede ver la característica de levantamiento que proveen las fibraciones. A una clase de funciones continuas y sobreyectivas le asignamos una subcategoría de la categoría de espacios topológicos, la cual se mostrará que es una subcategoría correflexiva, a partir del hecho de ser una subcategoría cerrada bajo la formación de identificaciones y coproductos.

Esperamos haber desarollado una panorámica de los espacios cubrientes, fibraciones y correflexiones, resumiendo de varias fuentes los resultados que aquí presentamos.

Índice general

Introducción a espacios cubrientes, fibraciones y correflexiones

Jesús González Sandoval

23-10-2014

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios topológicos y funciones continuas

Daremos inicio a esta sección introduciendo algunos conceptos básicos de la topología.

Definición 1.1. *Una* ***topología*** *en un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface:*

I $\emptyset \in \tau$ *y* $X \in \tau$;

II *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, *entonces* $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i \in \tau$;

III *Si* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in \tau$.

Si τ es una topología en X, a la pareja (X, τ) le llamamos ***espacio topológico****, a los elementos que pertenecen a τ,* ***conjuntos abiertos*** *en X y al complemento de un conjunto abierto en X le llamamos* ***conjunto cerrado*** *en X.*

Definición 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces para cada $x \in X$ llamaremos* ***vecindad de*** *x a $U \subseteq X$ si existe $V \in \tau$, tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definición 1.3. *Una función $f : X \to Y$ de un espacio topológico X en un espacio topológico Y es una* ***función continua*** *si, para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Dado un conjunto X denotaremos por I_X a la función identidad en X. Si (X, τ) es un espacio topológico tomaremos a τ como la topología del dominio y codominio de la función I_X, a menos que se indique lo contrario. Bajo estas condiciones I_X es continua.

Teorema 1.4. *Sea $f : X \to Y$ una función de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I *f es continua.*

II *Para cualquier cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

III *Para cada $x_0 \in X$, para cada vecindad abierta U de $f(x)$, existe una vecindad abierta de x_0 tal que $f(V) \subseteq U$.*

Véase demostración en [3].

Denotaremos por I al espacio topológico $([0, 1], \tau)$ donde τ es la topología inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una* ***trayectoria*** *o* ***camino*** *en X es una función continua $f : I \to X$. Se dice que un espacio X es* ***conexo por trayectorias o por caminos*** *si para cada par de puntos, x, y, en él, existe una trayectoria f en X tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Definición 1.6. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función biyectiva $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, si f y f^{-1} son continuas. Si $f : X \to Y$ es un* ***homeomorfismo****, entonces diremos que X y Y son dos* ***espacios homeomorfos****.*

Definición 1.7. *Una función $f : X \to Y$, donde X y Y son espacios topológicos, es una* ***función abierta*** *si la imagen bajo f de cualquier conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y. Si la imagen bajo f de cualquier conjunto cerrado en X es un conjunto cerrado en Y, llamaremos a f una* ***función cerrada****.*

Es claro que si X y Y son dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ es una función continua, abierta y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo. Sean (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Si $\tau_f = \{A \subseteq Y | f^{-1}(A) \in \tau\}$, τ_f es una topología para Y y es la más grande topología que hace continua a f.

Definición 1.8. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* Y *un conjunto y* $f : X \to Y$ *una función suprayectiva. La pareja* (Y, τ_f) *es llamada* ***espacio cociente*** *y a* τ_f *le llamaremos la* ***topología cociente*** *en* Y *inducida por* f *y* (X, τ)*.*

Definición 1.9. *Sea* ϑ *una partición de un espacio* X*. A la aplicación* $\varphi : X \to \vartheta$ *que manda a cada elemento* $x \in X$ *al único elemento de la partición que lo contiene, le llamaremos* ***proyección natural*** *(determinada por* ϑ*).*

Definición 1.10. *Sea* ϑ *una partición de un espacio topológico* (X, τ)*. Consideremos en el conjunto* ϑ *la siguiente topología* τ_ϑ*:*

$$\textit{Para cada } \Im \subseteq \vartheta,\ \Im \in \tau_\vartheta \textit{ si y sólo si } \bigcup\{A | A \in \Im\} \textit{es abierto en } X.$$

A la pareja $(\vartheta, \tau_\vartheta)$ *le llamaremos* ***espacio partición*** *de* X*.*

Teorema 1.11. *Si* ϑ *es una partición de un espacio topológico* (X, τ)*,* τ_ϑ *es la topología cociente inducida por la proyeción natural* $\varphi : X \to \vartheta$*, determinada por* ϑ*.*

1.2. Grupo fundamental y homomorfismo inducido

Definición 1.12. *Sean* $f, g : I \to X$ *caminos con* $f(1) = g(0)$*. Definimos el camino* $f * g : I \to X$*, como*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) \textit{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) \textit{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lema 1.13 **(de pegado).** *Sea* J *un conjunto de índices. Supongamos que un espacio topológico* X *es tal que* $X = \bigcup_{j \in J} X_j$*, con* X_j *abierto en* X *para cada* $j \in J$*. Sea* Y *un espacio topológico y sea* $\{f_j : X_j \to Y\}_{j \in J}$ *una familia de funciones continuas tales que* $f_j(x) = f_k(x)$ *para cada* $j, k \in J$ *y para cada* $x \in X_j \cap X_k$*. Entonces la función* $f : X \to Y$ *definida por* $f(x) = f_j(x)$*, donde* $j \in J$ *y* $x \in X_j$*, es la única función continua de* X *a* Y *tal que* $f|_{X_j} = f_j$*.*

El siguiente lema es una versión del lema anterior usando X_j conjuntos cerrados en vez de conjuntos abiertos, pero con la condición de que el conjunto de índices J sea un conjunto finito.

Lema 1.14. *Sea J un conjunto finito de índices. Supongamos que un espacio topológico X es tal que $X = \bigcup_{j\in J} X_j$ con X_j cerrado en X, para cada $j \in J$. Sea Y un espacio topológico y sea $\{f_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ una familia de funciones continuas tales que $f_j(x) = f_k(x)$ para cada $j, k \in J$ y para cada $x \in X_j \cap X_k$, entonces la función $f : X \to Y$ definida por $f(x) = f_j(x)$, donde $j \in J$ y $x \in X_j$ es la única función continua de X a Y tal que $f|_{X_j} = f_j$.*

Las pruebas de los dos lemas anteriores, se pueden encontrar en [2], nos referiremos a estos dos lemas como lemas de pegado. Gracias al lema anterior tenemos que la función $f * g$ en la Definición 1.12 es continua.

Definición 1.15. *Si X y Y son espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ son funciones continuas, entonces diremos que **f es homotópica a g**, lo denotaremos por $f \simeq g$, si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ con*

$$F(x, 0) = f(x) \text{ y } F(x, 1) = g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

*A tal función F le llamaremos **homotopía de f a g** y la denotaremos por $F : f \simeq g$.*

Definición 1.16. *Sea $A \subseteq X$ y sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas tales que $f|_A = g|_A$. Si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F : f \simeq g$ y*

$$F(a, t) = f(a) = g(a) \text{ para cada } (a, t) \in A \times I.$$

*Entonces llamaremos a F **homotopía relativa a A** y se denotará por $F : f \simeq g \; relA$.*

Si X y Y son espacios topológicos y $A \subseteq X$. Entonces tenemos que la relación de homotopía relativa a A en el conjunto de las funciones continuas de X a Y es una relación de equivalencia.

Definición 1.17. *Sea $\dot{I} = \{0, 1\} \subseteq I$. A la clase de equivalencia asociada a un camino $f : I \to X$, mediante la relación de equivalencia de homotopía relativa a $\dot{I}$, le llamaremos la **clase de caminos de f** y la denotaremos por $[f]$.*

Teorema 1.18. *Sean $f_0,\ f_1,\ g_0,\ g_1$ caminos en X con*

$$f_0 \simeq f_1 \; rel\dot{I} \text{ y } g_0 \simeq g_1 \; rel\dot{I}.$$

Si $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$, entonces $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \; rel\dot{I}$.

Demostración. Si $F : f_0 \simeq f_1 \; rel\dot{I}$ y $G : g_0 \simeq g_1 \; rel\dot{I}$, entonces $H : I \times I \to X$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & si \; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s) & si \; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una función continua con $H : f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \; rel\dot{I}$.

□

Definición 1.19. *Si $f : I \to X$ es un camino de x_0 a x_1, llamaremos a x_0 el **origen de f** y lo denotaremos por $\alpha(f) = x_0$; llamaremos a x_1 el **final de f** y lo denotaremos por $\omega(f)$. Un camino f en X es un **camino cerrado** en x_0 si $\alpha(f) = x_0 = \omega(f)$.*

Observación 1.20. *Si f y g son caminos con $F : f \simeq g \; rel\dot{I}$, entonces $\alpha(f) = \alpha(g)$ y $\omega(f) = \omega(g)$; Debido a esto podemos definir el origen y el final de una clase de caminos de la siguiente forma $\alpha[f] = \alpha(f)$ y $\omega[f] = \omega(f)$.*

Definición 1.21. *Sean X, Y espacios topológicos e $y \in Y$. A la función $C_y : X \to Y$ definida por $C_y(x) = y$ para toda $x \in X$ le llamaremos **función constante en y**. En particular si $X = I$, $C_y : I \to Y$ es el **camino constante en y**.*

Definición 1.22. *Sean X un espacio topólogico y $x_0 \in X$. El **grupo fundamental** de X con base en x_0 es*

$$\Pi_1(X, x_0) = \{[f] | [f] \text{ es una clase de caminos en } X \text{ con } \alpha[f] = x_0 = \omega[g]\}$$

con la operación binaria

$$[f][g] = [f * g].$$

Teorema 1.23. *Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es un grupo, donde $[C_{x_0}]$ es el elemento neutro y el inverso de una clase de caminos $[f]$ es la clase de caminos $[f^{-1}]$, con $f^{-1} : I \to X$ el camino definido por $f^{-1}(t) = f(1-t)$ para toda $t \in X$.*

Véase demostración en [2].

Definición 1.24. *Sean X, Y espacios topológicos, $p : X \to Y$ una función continua, $x_0 \in X$. Al homomorfismo de grupos $\Pi_1(p) = p_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, p(x_0))$ definido por*

$$p_*[f] = [p \circ f] \text{ para cada } [f] \in \Pi_1(X, x_0).$$

le llamaremos la ***homomorfismo inducido por p****.*

En la Definición 1.24 tenemos que p_* está bien definida pues si $[\alpha] = [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$ tenemos que existe H homotopía relativa a $\dot{I}$ tal que $H : \alpha \simeq \beta \; rel \dot{I}$, así $p \circ H$ es una homotopía relativa a $\dot{I}$ tal que $p \circ H : p \circ \alpha \simeq p \circ \beta \; rel \dot{I}$.

Lema 1.25. *Sean X un espacio topológico, $x_0,\ x_1 \in X$ y λ un camino en X con $\alpha(\lambda) = x_0$ y $\omega(\lambda) = x_1$. La función $\Gamma_\lambda : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$ definida por*

$$\Gamma_\lambda[f] = [\lambda^{-1} * f * \lambda] \text{ para cada } [f] \in \Pi_1(X, x_0)$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Por el Teorema 1.18 tenemos que Γ_λ está bien definida. Sean $[f],\ [g] \in \Pi_1(X, x_0)$; tenemos que:

$$\Gamma_\lambda([f] * [g]) = \Gamma_\lambda([f * g]) = [\lambda^{-1} * f * g * \lambda] =$$
$$[\lambda^{-1} * f * \lambda * \lambda^{-1} * g * \lambda] = \Gamma_\lambda[f] * \Gamma_\lambda[g].$$

Si $\Gamma_\lambda[f] = [C_{x_1}]$, tenemos que $\lambda^{-1} * f * \lambda \simeq C_{x_1} \; rel \dot{I}$, de donde $f \simeq \lambda * C_{x_1} * \lambda^{-1} \; rel \dot{I} \simeq C_{x_0} \; rel \dot{I}$, por tanto $[f] = [C_{x_0}]$.

Sean $[h] \in \Pi_1(X, x_1)$; tenemos que $[\lambda * h * \lambda^{-1}] \in \Pi_1(X, x_0)$ y $\Gamma_\lambda[\lambda * h * \lambda^{-1}] = [h]$. De donde Γ_λ es isomorfismo de grupos. □

En este trabajo habremos de hacer uso de la composición de funciones, para esto si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones, denotaremos a la función composición de f con g por gf ó bien $g \circ f$; la notación $\circ$ será utilizada cuando la notación de las funciones a componer comprometa la comprensión de dicha composición.

Definición 1.26. *Sean (X, τ) un espacio topológico, (A, τ_A) un subespacio de (X, τ), $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ la función inclusión. Se dice que (A, τ_A) es:*

1. ***Retracto*** *de (X, τ) si existe $r : (X, \tau) \to (A, \tau_A)$ función continua tal que $ri = I_A$.*

2. ***Retracto débil*** *de* (X,τ) *si existe* $r:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ *función continua tal que* $ri\simeq I_A$.

3. ***Retracto por deformación*** *de* (X,τ) *si existe* $r:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ *función continua tal que* $ri=I_A$ *e* $ir\simeq I_X$.

4. ***Retracto débil por deformación*** *de* (X,τ) *si existe* $r:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ *función continua tal que* $ri\simeq I_A$ *e* $ir\simeq I_X$.

5. ***Retracto fuerte por deformación*** *de* (X,τ) *si existe* $r:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ *función continua tal que* $ri=I_A$, $H:ir\simeq I_X$ *rel* A.

1.3. Familias de funciones y topologías especiales

Definición 1.27. *Un* ***pozo de funciones*** *es una clase de funciones* $\mathfrak{L}=\{f_j:Y_j\to X\}_{j\in A}$. *Si* $\mathfrak{L}=\{f_j:(Y_j,\sigma_j)\to(X,\sigma)\}_{j\in A}$ *es un pozo de funciones entre espacios topológicos, la topología final de* X *respecto a* $\mathfrak{L}$ *está dada por*

$$\tau=\left\{W\subseteq X|\forall j\in A,\ f_j^{-1}(W)\in\sigma_j\right\}$$

.

Teorema 1.28. *Si* $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ *es una función entre espacios topológicos entonces son equivalentes:*

a) σ *es final respecto a* $\{f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)\}$.

b) $\sigma=Sup\{\varsigma|\varsigma$ *es topología en* Y *y* $f:(X,\tau)\to(Y,\varsigma)$ *es continua*$\}$.

c) $C\subseteq Y$ *es cerrado en* (Y,σ) *sii* $f^{-1}(C)$ *es cerrado en* (X,τ).

d) f *es continua y, si* $g:(Y,\sigma)\to(Z,\varsigma)$ *es tal que* gf *es continua, entonces* g *es continua.*

e) f *es continua y, si conmuta el siguiente diagrama de funciones continuas con* h *biyectiva, entonces* h *es homeomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (Y,\sigma) \\
& (Z,\varsigma) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

La demostración puede verse en [2].

Definición 1.29. *Un pozo de funciones $\mathfrak{L} = \{f_j : Y_j \to X\}_{i\in A}$ es un **epipozo** si, para cualesquiera dos funciones $g, h : X \to Z$ tales que:*

$$\forall j \in A, \; h \circ f_j = g \circ f_j$$

se tiene que $g = h$.

Definición 1.30. *a) Sea $\{X_j\}_{j\in A}$ una familia de conjuntos, la **unión ajena** de $\{X_j\}_{j\in A}$ está dado por*

$$\coprod X_j = \bigcup_{j\in A} (X_j \times \{j\}).$$

Para cada $j \in A$ la función $i_j : X_j \to \coprod X_j$, definida por $i_j(x) = (x, j)$ para cada $x \in X_j$, se llama inclusión de X_j en $\coprod X_j$.

*b) Si $\{X_j, \tau_j\}_{j\in A}$ es una familia de espacios topológicos, $(\coprod X_j, \tau)$ es el **coproducto** de $\{X_j\}_{j\in A}$ donde τ es la topología final de $\coprod X_j$ respecto a $\mathfrak{L} = \{i_j : (X_j, \tau_j) \to \coprod X_j\}_{j\in A}$.*

Es claro que para cada $j \in A$, i_j es una función inyectiva.

Teorema 1.31. *Si $(\coprod X_j, \tau)$ es el coproducto de $\{(X_j, \sigma_j)\}_{j\in A}$ con inclusiones $i_j : (X_j, \sigma_j) \to (\coprod X_j, \tau)$, entonces se satisfacen:*

I. $\{i_j\}_{j\in A}$ es epipozo.

II. Para toda $j \in A$, i_j es encaje abierto y cerrado.

III. si $\{f_j : (X_j, \sigma_j) \to (Y, \sigma)\}$ es un pozo de funciones continuas entonces existe una única función continua $f : (\coprod X_j, \tau) \to (Y, \sigma)$ tal que, para toda $j \in A$, el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
(X_j,\sigma_j) \arrow[rr, "f_j"'] \arrow[dr, "i_j"'] & & (Y,\sigma) \\
& (\coprod X_j,\tau) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Además se tiene que $f(x, j) = f_j(x)$ para cada $x \in \coprod X_j$

La demostración puede verse en [2].

Definición 1.32. *Si $\{f_j : (X_j, \tau_j) \to (Y_j, \sigma_j)\}_{j\in A}$ es una familia de funciones continuas, la **función coproducto** de $\{f_j\}_{j\in A}$, que denotaremos por $\coprod_{j\in A} f_j$, es la única función continua que hace conmutativo el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(X_j,\tau_j) \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "i_j"'] & (Y_j,\sigma_j) \arrow[d, "k_j"] \\
(\coprod X_j,\tau) \arrow[r, "\coprod_{j\in A} f_j"'] & (\coprod Y_j,\sigma)
\end{tikzcd}
$$

donde k_j es la inclusión de Y_j en $\coprod Y_j$.

Definición 1.33. *Una clase de funciones $\{f_j : (X, \tau_X) \to (Y_j, \tau_{Y_i})\}_{j\in A}$ es una **fuente de funciones** si τ_X es la mínima topología en X que hace para cada $j \in A$, la función $f_j : (X, \tau_X) \to (Y_j, \tau_{Y_i})$ continua.*

Definición 1.34. *Una fuente de funciones $\{f_j : (X_j, \tau_j) \to (Y_j, \sigma_j)\}_{j\in A}$ es **monofuente** si para cualesquiera dos funciones $\sigma_1, \sigma_2 : Z \to X$ tales que $f_j\sigma_1 = f_j\sigma_2$ para cada $j \in A$ se tiene que $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Definición 1.35. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Definimos $C(X, Y)$ como el conjunto de funciones continuas de (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ definimos $(A, B) \subseteq C(X, Y)$ de la siguiente forma*

$$(A, B) = \{f \in C(X, Y) | f(A) \subseteq B\}$$

A la topología en $C(X,Y)$ que tiene por sub-base a

$$\{(A,B)|A \subseteq X \text{ es compacto y } B \subseteq Y \text{ es abierto }\}.$$

le llamaremos ***topología compacto abierta****.*

Definición 1.36. *Sean Y un espacio topológico e $y_0 \in Y$. Definimos el espacio topológico $P(Y, y_0)$ por*

$$P(Y,y_0) = (C((I,0),(Y,y_0)),\mathfrak{K}) \subseteq (C(I,Y),\mathfrak{K})$$

donde $C((I,0),(Y,y_0)) = \{f \in C(I,Y)|\ f(0) = y_0\}$ y $\mathfrak{K}$ es la topología compacto abierta. Definimos la función $\varepsilon : P(Y,y_0) \to Y$ de forma que $\varepsilon(f) = f(1)$ para cada $f \in P(Y,y_0)$.

Observación 1.37. *La función ε es continua pues; para cada $U \subseteq Y$, abierto, tenemos que $\varepsilon^{-1}(U) = (\{1\},U)$ es un abierto en $P(Y,y_0)$.*

Definición 1.38. *Si X y Y son espacios topológicos, la* ***función evaluación*** *es la función $\varrho : C(X,Y) \times X \to Y$ tal que $\varrho(f,x) = f(x)$ para cada $(f,x) \in C(X,Y) \times X$*

Lema 1.39. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y regular entonces $\varrho : C(X,Y) \times X \to Y$ es continua*

Demostración. Demostración en [2].

□

Definición 1.40. *Sean X y Y conjuntos, $F(X,Y)$ denotará el conjunto de funciones de X a Y.*

Para X, Y, Z conjuntos, definiremos la función $\Theta : F(X \times Z, Y) \to F(Z, F(X,Y))$ de forma que para cada $f \in F(X \times Z, Y)$:

$$\begin{aligned}\Theta(f) : Z &\to F(X,Y)\\ z &\mapsto \Theta(f)(z) : X \to Y\\ &\qquad\qquad x \mapsto f(x,z)\end{aligned}$$

Lema 1.41. *Si X, Y, Z son espacios topológicos y Z es Hausdorff o regular, entonces*

$$\Theta : (C(X \times Z, Y), \mathfrak{K}) \to (C(Z, C(X,Y)), \mathfrak{K})$$

es continua.

Demostración. Demostración en [2]. □

Definición 1.42. *Sea* $\{X_j\}_{j\in J}$ *una familia de conjuntos. El conjunto*

$$\prod_{j\in J} X_j = \left\{ x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j | x(j) \in X_j \text{ para cada } j \in J \right\}$$

se llama el ***producto cartesiano*** *de* $\{X_j\}_{j\in J}$*. Si* $x \in \prod_{j\in J} X_j$ *entonces para toda* $j \in J$*,* $x(j)$ *se llama la* j*-ésima coordenada de* x*. Para toda* $j \in J$*, la función* $\Pi_{X_j} : \prod X_j \to X_j$ *tal que* $\Pi_{X_j}(x) = x(j)$ *para toda* $x \in \prod X_j$*, se llama la* ***j-ésima proyección del producto*** $\prod_{j\in J} X_j$*.*

Definición 1.43. *Sea* $\mathfrak{L} = \{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ *es una familia de espacios topológicos. consideremos la fuente de funciones* $\{\Pi_{X_j} : \prod_{j\in J} X_j \to (X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ *y sea* τ *la topología inicial de* $\prod_{j\in J} X_j$ *respecto a* $\left\{(\Pi_{X_j}, \tau_j)\right\}$*. Designamos el espacio topológico* $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ *como el* ***producto topológico de*** $\mathfrak{L}$*.*

Capítulo 2

Espacios cubrientes

2.1. Funciones cubrientes

Iniciaremos este capítulo con las definiciones de función cubriente y espacio cubriente, en seguida veremos que una función cubriente es sobreyectiva y abierta, que hereda las propiedades locales de su espacio codominio, que la restricción a abiertos en el dominio resulta ser una función cubriente y que el producto de espacios cubrientes resulta ser un espacio cubriente. Tomaremos los subconjuntos de un espacio, salvo que se diga lo contrario, con la topología de subespacio.

Definición 2.1. *Sean X, $\tilde{X}$ espacios topológicos, $p : \tilde{X} \to X$ función continua. Entonces un subconjunto abierto U de X es un* ***abierto cubierto uniformemente*** *por p si: $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de conjuntos S_i abiertos de $\tilde{X}$, llamados* ***hojas o p-hojas sobre U****, con $p|_{S_i} : S_i \to U$ un homeomorfismo para cada i.*

Definición 2.2. *Si X es un espacio topológico, entonces un par ordenado $(\tilde{X}, p)$ es un* ***espacio cubriente*** *de X si:*

i) *$\tilde{X}$ es un espacio topológico conexo por caminos;*

ii) *$p : \tilde{X} \to X$ es una función continua;*

iii) *Para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x de x que es cubierta uniformemente por p.*

La función p de la Definición 2.2 es llamada proyección cubriente y un conjunto abierto cubierto uniformemente por p es llamado p-admisible o admisible.

Definición 2.3. *Una función continua y sobreyectiva $f : X \to Y$ es una **identificación** si un subconjunto U de Y es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Es decir, la topología de Y es la topología final del pozo $\{f : X \to Y\}$.*

Observación 2.4. *Es conocido el resultado: Si $f : X \to Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta o cerrada, entonces f es una identificación.*

La demostración de este resultado se encuentra en [5].

Lema 2.5. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Entonces p es una función sobreyectiva y abierta. Así p, es una identificación y además, X es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $x \in X$. Existe una vecindad abierta U_x cubierta uniformemente por p, tal que $x \in U_x = p(p^{-1}(U_x))$ ya que $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in J} S_i$, donde $\{S_i\}_{i \in J}$ es la familia de hojas sobre U_x, así $p(p^{-1}(U_x)) = p(\bigcup_{i \in J} S_i) = \bigcup_{i \in J} p(S_i) = U_x$. De donde $x \in Im\ p$, así p es sobreyectiva. Sea V un conjunto abierto en $\tilde{X}$ y sea $x \in p(V)$, existe U vecindad abierta de x admisible, sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ y $\tilde{U}$ la única hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$. Entonces $\tilde{U} \cap V$ es un abierto en $\tilde{U}$ que contiene a $\tilde{x}$, como $p|_{\tilde{U}}$ es un homeomorfismo, $p(\tilde{U} \cap V)$ es un abierto en U y por tanto abierto en X, además $x \in p(\tilde{U} \cap V) \subseteq p(V)$, de donde $p(V)$ es abierto en X. Además, X es conexo por caminos, ya que es la imagen continua de $\tilde{X}$, que es conexo por caminos. □

Ejemplo 2.6. Sea X un espacio conexo por caminos. Entonces (X, I_X) es un espacio cubriente de X.

Ejemplo 2.7. La función $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por:

$$exp(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x)), \forall x \in \mathbb{R}$$

es una proyección cubriente, es decir $(\mathbb{R}, exp)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$.

Observación 2.8. *Una proyección cubriente no necesariamente es una función cerrada. El conjunto $A = \{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n > 2\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ pero la imagen de este conjunto bajo la proyección cubriente exp no es un conjunto cerrado en $\mathbb{S}^1$ ya que el punto $(1, 0)$ es un punto de acumulación de la imagen de A que no pertenece a A.*

Definición 2.9. *Sea $f : X \to Y$ una función y sea $y \in Y$. Entonces llamaremos a $f^{-1}(y)$ la **fibra** de f sobre y.*

Lema 2.10. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y $x_0 \in X$. Entonces $p^{-1}(x_0)$ es un subespacio discreto de $\tilde{X}$.*

Demostración. Sean $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, U una vecindad abierta de x_0 admisible y $\tilde{U}$ la única hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$, se tiene que $p^{-1}(x_0) \cap \tilde{U} = \{\tilde{x}\}$, con $\tilde{U}$ abierto en $\tilde{X}$, por tanto $p^{-1}(x_0)$ es un subespacio discreto de $\tilde{X}$. □

Lema 2.11. *Sean X un espacio Hausdorff y $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Entonces $\tilde{X}$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $\tilde{x}, \tilde{y}$ dos puntos distintos en $\tilde{X}$, denotemos $x = p(\tilde{x})$ y $y = p(\tilde{y})$, sean U una vecindad abierta de x admisible y supongamos que $x = y$. Si $\tilde{U}_1$ y $\tilde{U}_2$ son las hojas sobre U que contienen a $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ respectivamente, se tiene que $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$ ya que de lo contrario $p|_{\tilde{U}_1}$ no sería inyectiva, así $\tilde{U}_1$ no intersecta a $\tilde{U}_2$. Por otro lado, si $x \neq y$, sean A_x, A_y abiertos disjuntos en X que contienen a x y y respectivamente, W una vecindad abierta de y admisible y $\tilde{W}$ la hoja sobre W que contiene a $\tilde{y}$; tenemos que $p|_{\tilde{U}}^{-1}(U \cap A_x)$ y $p|_{\tilde{W}}^{-1}(W \cap A_y)$ son abiertos ajenos en $\tilde{X}$ que contienen a $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ respectivamente, donde U es la hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$.

□

Observación 2.12. *Con la misma estrategia usada en la demostración del Lema 2.11 podemos demostrar que si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y si X es un espacio localmente compacto o localmente conexo por caminos o el espacio X es una n-variedad [1], entonces $\tilde{X}$ es un espacio localmente compacto o localmente conexo por caminos o una n-variedad, de hecho cualquier propiedad local de X es heredada a $\tilde{X}$.*

Lema 2.13. *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una función continua y sea U un conjunto abierto en X cubierto uniformemente por p. Si V es un subconjunto abierto de U, entonces V es cubierto uniformemente por p.*

Demostración. Sea $\{S_i\}_{i \in J}$ la familia de hojas sobre U, tomemos la familia $\{W_i = p|_{S_i}^{-1}(V)\}_{i \in J}$, cada W_i es un abierto en $\tilde{X}$ pues es abierto en la respectiva hoja S_i, es claro que para cualesquiera dos elementos distintos de la familia $\{W_i = p|_{S_i}^{-1}(V)\}_{i \in J}$ son ajenos. Además se tiene que:

[1] Un espacio topológico Hausdorff X es una n-variedad si cada punto en X tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} p^{-1}(V) &= p^{-1}(V \cap U) = p^{-1}(V) \cap \bigcup_{i \in J} S_i \\ &= \bigcup_{i \in J} p^{-1}(V) \cap S_i = \bigcup_{i \in J} p|_{S_i}^{-1}(V) = \bigcup_{i \in J} W_i \end{aligned}$$

Es claro que $p|_{W_i}$ es continua y biyectiva, veamos que es también abierta. Sea A un abierto en W_i, ya que W_i es abierto en S_i tenemos que A es abierto en S_i, por tanto $p|_{W_i}(A) = p|_{S_i}(A)$ es un abierto en U, además $p|_{W_i}(A) = p|_{W_i}(A) \cap V$, de donde $p|_{W_i}$ es abierta.

□

Lema 2.14. *Si $(\tilde{X}_i, p_i)$ es un espacio cubriente de X_i para i=1,2. Entonces $(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, p_1 \times p_2)$ es un espacio cubriente de $X_1 \times X_2$.*

Demostración. Como X_1 y X_2 son conexos por caminos tenemos que $X_1 \times X_2$ es conexo por caminos, es claro que $p_1 \times p_2$ es una función continua donde $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ está definida por $p_1 \times p_2(x_1, x_2) = (p_1(x_1), p_2(x_2))$ para cada $(x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2)$. Sean $(x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2)$, U_i una vecindad abierta p_i-admisible de x_i para $i = 1, 2$; $\{S_j^1\}_{j \in J}$ las P_1 hojas sobre U_1, $\{S_k^2\}_{k \in M}$ las P_2 hojas sobre U_2. Entonces tenemos que:

i. $(p_1 \times p_2)^{-1}(U_1 \times U_2) = \bigcup_{(j,k) \in J \times M} S_j^1 \times S_k^2$;

ii. Los elementos de la familia $\{S_j^1 \times S_k^2\}_{(j,k) \in J \times M}$ son disjuntos dos a dos;

iii. $p_1 \times p_2|_{S_j^1 \times S_k^2}$ es homeomorfismo para cada par $(j, k) \in J \times M$.

Así $U_1 \times U_2$ es cubierto uniformemente por $p_1 \times p_2$.

□

Ejemplo 2.15. Por el Lema 2.14 y el Ejemplo 2.6 tenemos que $(\mathbb{R} \times S^1, exp \times I_{\mathbb{S}^1})$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Lema 2.16. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

en el cual β y α son homeomorfismos y $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X. Entonces $(\tilde{Y}, q)$ es un espacio cubriente de Y.

Demostración. $\tilde{Y}$ es conexo por trayectorias por ser imagen continua de $\tilde{X}$, y q es continua, pues $q = \alpha \circ p \circ \beta^{-1}$. Resta ver que para cada punto de Y existe una vecindad abierta q-admisible de él. Sean $y \in Y$, U una vecindad abierta p-admisible de $x = \alpha^{-1}(y)$, V_i las p-hojas sobre U, tomemos $S_i = \beta(V_i)$, así pues tenemos que:

i. $q^{-1}(\alpha(U)) = (\alpha p \beta^{-1})^{-1}(\alpha(U)) = \beta(p^{-1}(U)) = \bigcup_i S_i$, ya que

$$\alpha p \beta^{-1} = q \beta \beta^{-1} = q, \ (\alpha p \beta^{-1})^{-1} = q^{-1} \text{ y } (\alpha p \beta^{-1})^{-1} = \beta p^{-1} \alpha^{-1}.$$

ii. Si $i \neq j$, entonces $S_i \cap S_j = \emptyset$;

iii. $q|_{S_i} = \alpha p \beta^{-1}|_{S_j} = \alpha|_U \circ p|_{V_i} \circ \beta^{-1}|_{S_i}$ es homeomorfismo.

De donde $\alpha(U)$ es un abierto que contiene a y y es cubierto uniformemente por q.

$\square$

Lema 2.17. *Sean G un grupo topológico y sea H un subgrupo normal de G. Supongamos además que $\varphi : G \to G/H$ es la proyección natural en G y su grupo cociente G/H. Si G/H tiene la topología final de $\{\varphi : G \to G/H\}$ entonces G/H es grupo topológico y φ es abierta.*

Demostración. Sea G/H el grupo cociente y $\varphi : G \to G/H$ la proyección natural. Sea A un abierto en G, entonces $\varphi(A) = \{Ha | a \in A\}$, así:

$$\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \bigcup_{a \in A} Ha = \bigcup_{h \in H} hA$$

Tenemos que para cada h, el conjunto hA es abierto en G pues para cada h la función $f_h : G \to G$ definida por $f(g) = hg$ para cada $g \in G$ es un homeomorfismo de G en G, así tenemos que $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ es un abierto en G y por tanto, $\varphi(A)$ es abierto en el espacio cociente G/H de donde φ es abierta. Sean (aH, bH) un elemento de $G/H \times G/H$ y U un abierto en G/H que contiene a abH, entonces como $ab \in \varphi^{-1}(U)$ existen abiertos A_1 y A_2 en G que contienen a a y b respectivamente tales que $A_1 A_2$ [2] $\subseteq \varphi^{-1}(U)$, así $\varphi(A_1 A_2) =$

[2] Si $A_1,\ A_2 \subseteq G$, $A_1 A_2 := \{ab|\ a \in A_1,\ b \in A_2\}$

$\varphi(A_1)\varphi(A_2) \subseteq U$. Además como φ es abierta y A_1, A_2 son abiertos tenemos que $\varphi(A_1) \times \varphi(A_2)$ es un abierto en $G/H \times G/H$ que contiene a (aH, bH), de donde la función producto de G/H es contina. Sean $aH \in G/H$ y W un abierto en G/H que contiene a $a^{-1}H$, existe un abierto A en G que contiene a a tal que $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\} \subseteq \varphi^{-1}(W)$, como $\varphi(A)$ y $\varphi(A^{-1})$ son abiertos en G/H, $aH \in \varphi(A)$ y $\varphi(A^{-1}) = (\varphi(A))^{-1} = \{Ha^{-1} | a \in A\} \subseteq W$ tenemos que la función de tomar inversos en G/H es continua, así G/H es un grupo topológico.

$\square$

Teorema 2.18. *Sean G un grupo topológico conexo por caminos, H un subgrupo normal discreto de G y $\varphi : G \to G/H$ la proyección natural. Entonces (G, φ) es un espacio cubriente de G/H.*

Demostración. Denotemos por e al elemento neutro de G, como H es subespacio discreto de G existe un abierto W en G tal que $\{e\} = W \cap H$, notar que la función $\alpha : G \times G \to G$ definida por $\alpha(a, b) = ab^{-1}$ para cada $(a, b) \in G \times G$ es continua, de donde existe una vecindad abierta V de e tal que $\alpha(V \times V) \subseteq W$, tomemos $U = \varphi(V)$, U es abierto ya que por el lema 2.17 tenemos que φ es una función abierta, $H = \varphi(e) \in U$ y U es cubierto uniformemente por φ pues tenemos que:

$$\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(\varphi(V)) = \bigcup_{h \in H} hV$$

ya que

$$w \in \varphi^{-1}(U) \Leftrightarrow Hw \in U \Leftrightarrow Hw = Hv \text{ para algún } v \in V \Leftrightarrow$$

$$w = hv \text{ para algunos } v \in V, h \in H \Leftrightarrow w \in \bigcup_{h \in H} hV$$

con cada hV abierto en G. Sean h y k dos elementos distintos de H, supongamos que $hV \cap kV \neq \emptyset$, así existen $u, w \in V$ tales que $hu = kw$ de donde $h^{-1}k = uw^{-1} \in \alpha(V \times V) \subseteq W$, por otro lado como H es subgrupo $h^{-1}k \in H$, por lo tanto $h^{-1}k = e$, pues $W \cap H = \{e\}$, lo cual es una contradicción. Por ultimo veamos que para cada $h \in H$, $\varphi|_{hV}$ es un homeomorfismo, es claro que $\varphi|_{hV}$ es continua y abierta por ser la restricción de φ a un abierto, además es sobreyectiva, ya que h está en el núcleo de φ se tiene que

$$\varphi(hV) = \varphi(h)\varphi(V) = \varphi(V) = U.$$

$\varphi|_{hV}$ es inyectiva pues para $u, w \in V$, si $\varphi(hw) = \varphi(hu)$, entonces $Hv = Hw$ de donde $vw^{-1} \in H \cap W$, así $vw^{-1} = e$ y $v = w$. Por tanto tenemos que U es cubierto uniformemente por φ. De esta forma $\tilde{x} \in G/H$ tenemos que para cada $\tilde{x}U$ es una vecindad abierta admisible de $\tilde{x}$.

□

Observación 2.19. *Similarmente: Si tenemos un grupo topológico conexo por caminos G, H un subgrupo normal de G y (G, p) un espacio cubriente de G/H. Entonces tenemos que H es la fibra de p sobre el elemento neutro en G/H y, por el Lema 2.10, H es discreto.*

2.2. Teoremas de levantamientos

Con los resultados de la sección 2.1 podremos demostrar el Teorema de levantamiento de caminos y el Teorema de levantamiento de homotopías, gracias a estos dos teoremas será sencillo ver la relación de las funciones cubrientes con el grupo fundamental mediante las clases de los levantamientos de caminos, definiremos lo que es una actuación de un grupo sobre un conjunto y veremos que el grupo fundamental del espacio codominio de una funcion cubriente, actúa sobre las fibras (preimágenes de un elemento del dominio) de la función cubriente, con el uso de órbitas, estabilizadores y grupos cociente podremos definir la multiplicidad de una función cubriente y hacer una caracterización de una clase de conjugación especial en el grupo fundamental.

Para los siguientes resultados necesitamos trabajar con espacios topológicos punteados, es decir, espacios topológicos que tienen un punto base distinguido, esto es, un espacio topológico punteado es un par (X, x_0) con X espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $f : Y \to X$ una función, $y_0 \in Y$. Entonces la notación $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ indicará que $f(y_0) = x_0$.

Lema 2.20. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, Y un espacio conexo y $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una función continua. Dado $\tilde{x}_0$ en la fibra de p sobre x_0, existe a lo más una función continua $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ con $p \circ \tilde{f} = f$.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{f}, \tilde{g} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ son funciones continuas tales que $p \circ \tilde{f} = f$ y $p \circ \tilde{g} = f$, sean $A = \{y \in Y | \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}$ y $B = Y \backslash A$, veamos que tanto A como B son conjuntos abiertos. Si $a \in A$, existe U vecindad abierta p-admisible de $f(a)$, sea S la hoja de U que contiene a $\tilde{f}(a)$, es claro que $W = \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{g}^{-1}(S)$ es un abierto en Y que contiene a a. De hecho $W \subseteq A$, en efecto, sea $w \in W$ tenemos que tanto $\tilde{f}(w)$ como $\tilde{g}(w)$ son elementos de S, además $p \circ \tilde{f}(w) = p \circ \tilde{g}(w)$ y ya que $p|_S$ es biyectiva se tiene que $\tilde{f}(w) = \tilde{g}(w)$, de donde $w \in A$, así A es abierto.

Sea $b \in B$, existe V vecindad abierta p-admisible de $f(b)$, si $\tilde{f}(b)$ y $\tilde{g}(b)$ pertenecen a una misma hoja sobre V tenemos que $\tilde{f}(b) = \tilde{g}(b)$ por la inyectividad de $p|_V$. Así que $\tilde{f}(b)$ y $\tilde{g}(b)$ pertenecen a hojas ajenas S y S' sobre V, sea $W = \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{g}^{-1}(S')$, tenemos que W es un abierto en Y que contiene a b, además $W \subseteq B$, pues para cada $w \in W$ se tiene que $\tilde{f}(w) \in S$ y $\tilde{g}(w) \in S'$, así que son elementos de hojas ajenas sobre V,por tanto $\tilde{f}(w) \neq \tilde{g}(w)$, es decir $w \in B$, de donde B es abierto. Así, por la conexidad de Y, tenemos que $B = \emptyset$ pues $y_0 \in A$, con lo cual $\tilde{f} = \tilde{g}$. □

Definición 2.21. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una función continua. Un* ***levantamiento*** *de f es una función continua $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

Teorema 2.22. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y sea $f : (I, 0) \to (X, x_0)$ un camino. Si $\tilde{x}_0$ es un elemento de la fibra de p sobre x_0, entonces existe una única función continua $\tilde{f} : (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ con $p \circ \tilde{f} = f$.*

Demostración. Para cada $a \in I$, denotemos $x = f(a)$, existe U_x vecindad abierta p-admisible de x. Por la continuidad de f existe $[a, b] \subseteq I$ tal que $f([a.b]) \subseteq U_x$, si $\tilde{x}_0 \in P^{-1}(x)$ tomemos S la hoja sobre U_x que contiene a $\tilde{x}_0$ y sea

$$\tilde{g}_a = p|_S^{-1} \circ f|_{[a,b]}$$

tenemos que $\tilde{g}_a : ([a, b], a) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ es una función tal que:

i $\tilde{g}_a(a) = \tilde{x}_0$;

ii $\tilde{g}_a$ es continua;

iii $p \circ \tilde{g}_a = f|_{[a,b]}$.

Sean $t \in I$ y U_t una vecindad abierta p-admisible de $f(t)$, ya que I es un espacio métrico completo compacto existe $\lambda > 0$ número de Lebesgue [3] del recubrimiento $\{f^{-1}(U_t) | t \in I\}$. Sea $\{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq I$ con $m \in \mathbb{N}$ una partición

[3] Todo espacio métrico compacto X tiene la propiedad del número de Lebesgue, esto es: para toda cubierta abierta $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de X existe $\lambda > 0$, llamado número de Lebesgue del recubrimiento $\mathfrak{U}$, tal que para cada $x \in X$, la bola abierta de centro x y radio λ está contenida en alguno de los abiertos de la cubierta $\mathfrak{U}$.

de I tal que $t_{i+1}-t_i<\lambda$ y $t_1=0$. Sea $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ por la primera parte de la demostración existe $\tilde{g}_{t_1}:([t_1=0,t_2],t_1)\to(\tilde{X},\tilde{x_0})$ función continua tal que $p\circ\tilde{g}_{t_1}=f|_{[t_1,t_2]}$. Similarmente existe una función continua $\tilde{g}_{t_2}:([t_2,t_3],t_2)\to(\tilde{X},\tilde{g}_1(t_2))$ tal que $p\circ\tilde{g}_{t_2}=f|_{[t_2,t_3]}$ pues $\tilde{g}_{t_1}(t_2)\in p^{-1}(f(t_2))$. En general existen funciones continuas

$$\tilde{g}_{t_{i+1}}:([t_{i+1},t_{i+2}],t_{i+1})\to(\tilde{X},\tilde{g}_{t_i}(t_{i+1}))$$

tales que $p\circ\tilde{g}_{i+1}=f|_{[t_{i+1},t_{i+2}]}$. Así por el Lema 1.13 (de pegado) existe una única función continua $\tilde{f}:I\to\tilde{X}$ tal que $\tilde{f}|_{[t_i,t_{i+1}]}=\tilde{g}_{i+1}$. Además $p\circ\tilde{f}=f$ y $\tilde{f}(0)=\tilde{g}_{t_1}(0)=\tilde{x}_0$ de donde $\tilde{f}:(I,0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ es una función continua con $p\circ\tilde{f}=f$. La únicidad de la función $\tilde{f}$ se sigue del Lema 2.20.

$\square$

Recordar que si X e Y son espacios topológicos y $x_0\in X$, entonces $C_{x_0}:Y\to X$ es la función constante en x_0, esto es $C_{x_0}(y)=x_0$ para cada $y\in Y$.

Teorema 2.23. *Sean $(\tilde{X},p)$ un espacio cubriente de X y Y un espacio topológico. Consideremos el diagrama conmutativo de funciones continuas*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y\times I \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

donde $h_0(y)=(y,0)$ para cada $y\in Y$, entonces existe una función continua $\tilde{F}:Y\times I\to X$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y\times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd}$$

Más aún si Y es conexo, entonces $\tilde{F}$ es única.

Demostración. Veamos que es suficiente trabajar localmente. Supongamos que para cada $y \in Y$ existe N_y vecindad abierta de y tal que existe $\tilde{F}_y : N_y \times I :\to \tilde{X}$ función continua que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} N_y \arrow[r, "f|_{N_y}"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ N_y \times I \arrow[ur, "\tilde{F}_y"] \arrow[r, "F|_{N_y \times I}"'] & X \end{tikzcd}$$

Sea $y' \in N_y \cap N_z$ tenemos que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \{y'\} \times I \arrow[ur, "\tilde{F}_y|_{\{y'\}\times I}"] \arrow[r, "F|_{\{y'\}\times I}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \{y'\} \times I \arrow[ur, "\tilde{F}_z|_{\{y'\}\times I}"] \arrow[r, "F|_{\{y'\}\times I}"'] & X \end{tikzcd}$$

pues para cada $t \in I$, $p \circ \tilde{F}_y(y', t) = F|_{N_y \times I}(y', t) = F|_{N_z \times I}(y', t) = p \circ \tilde{F}_z(y', t)$. Además $\tilde{F}_y(y', 0) = f|_{N_y}(y') = f|_{N_z}(y') = \tilde{F}_z(y', 0)$, por el lema 2.20 tenemos que $\tilde{F}_y|_{\{y'\}\times I} = \tilde{F}_z|_{\{y'\}\times I}$, de donde $\tilde{F}_y(y', t) = \tilde{F}_z(y', t)$ para cada $t \in I$. Esto es

$$\forall (y', t) \in (N_y \times I) \cap (N_z \times I),\ \tilde{F}_y(y', t) = \tilde{F}_z(y', t). \qquad (*)$$

Si tomamos $\{N_y \times I | y \in Y\}$, que es cubierta abierta de $Y \times I$, por $(*)$ y usando el Lema 1.13 (de pegado) tenemos que existe $\tilde{F} : Y \times I \to X$ función continua tal que $\tilde{F}|N_y \times I = \tilde{F}_y$. Por las propiedades de $\tilde{F}$ en cada N_y se tiene que $p \circ \tilde{F} = F$ y $\tilde{F} \circ h_0 = f$.

Construiremos las vecindades N_y y las funciónes $\tilde{F}_y$.

Sea $y \in Y$ para cada $t \in I$, tomemos U_t vecindad abierta admisible de $f(y, t)$, como F es continua, existen I_t y M_t vecindades abiertas de t y y respectivamente tales que $F(M_t \times I_t) \subseteq U_t$. Tenemos que $\{I_t | t \in I\}$ es una cubierta abierta de I, como I es compacto existen $t_1, \ldots, t_n \in I$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \subseteq \bigcup_i I_{t_i}$. Sea $N_y = \bigcap_i M_{t_i}$, N_y es vecindad abierta de y, tenemos que existe $\{l_0, \ldots ..., l_m\}$ partición de I tal que para cada $j = 1, \cdots m$ se tiene que $[l_{j-1}, l_j] \subseteq I_{t_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, de donde

$$F(N_y \times [l_{j-1}, l_j]) \subseteq F(M_{t_j} \times I_{t_j} \subseteq U_{t_j}) \quad (**)$$

Para la construcción de las funciones $\tilde{F}_y$ basta con construir para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ una función continua $G_j : N_y \times [l_{j-1}, l_j] \to \tilde{X}$ tal que:

i. $p \circ G_j = F|_{N_y \times [l_{j-1}, l_j]}$;

ii. $G_j(y', 0) = f(y')$;

iii. $G_{j-1}(y', l_{j-1}) = G_j(y', l_{j-1})$ para cada $y' \in N_y$.

Sea $\{V_k\}_{k \in A}$ una familia de p-hojas sobre un abierto p admisible U tal que $F(N_y \times [l_{j-1}, l_j]) \subseteq U$, (siempre existe una por $(**)$). Tenemos que la familia $\{W_k = f^{-1}(V_k) | k \in A\}$ es una cubierta abierta de N_y pues para cada $x \in N_y$, $p \circ f(x) = F(x, 0) \in U$, esto es, $f(x) \in p^{-1}(U)$, con lo cual existe $j \in A$ tal que $f(x) \in V_j$ y así $x \in f^{-1}(V_j)$, además cada dos elementos distintos de la cubierta son ajenos. Definamos a G_j en cada elemento de la cubierta $\{W_k \times [l_{j-1}, l_j]\}_{k \in A}$ por

$$G_j|_{W_k \times [l_{j-1}, l_j]} = p^{-1}|_{V_k} \circ F|_{W_k \times [l_{j-1}, l_j]}$$

así se tiene que $G_j : N_y \times [l_{j-1}, l_j] \to \tilde{X}$ es una función continua que cumple *i.* por las propiedades de G_J en cada abierto de la forma $W_k \times [l_{j-1}, l_j]$, cumple *ii.* pues para $y' \in N_y$ se tiene que

$$G_j(y', 0) = p^{-1}|_{V_k}(F(y', 0)) = p^{-1}(pf(y')) = f(y')$$

y tiene la propiedad *iii.* pues para cada $y' \in N_y$ se tiene que

$$G_{j-1}(y', l_{j-1}) = p^{-1}|_{V_k} \circ F|_{W_k \times [l_{j-2}, l_{j-1}]}(y', l_{j-1}) =$$
$$p^{-1}|_{V_k} \circ F|_{W_k \times [l_{j-1}, l_j]}(y', l_{j-1}) = G_{j-1}(y', l_{j-1}).$$

Con lo que hemos obtenido las vecindades N_y y funciones $\tilde{F}_y$ deseadas.

Si Y es conexo se tiene que $Y \times I$ es conexo y la unicidad de $\tilde{F}$ se sigue del Lema 2.20.

$\square$

Corolario 2.24. *Sean* $(\tilde{X}, p)$ *un espacio cubriente de* X, $x_0, x_1 \in X$, $f, g : I \to X$ *caminos de* x_0 *a* x_1 *y* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. *Si* $F : I \times I \to X$ *es una homotopía relativa* $F : f \simeq g$ *rel* $\dot{I}$, *entonces existe una única función continua* $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ *tal que* $p \circ \tilde{F} = F$ *y* $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. *Aún más, si* $\tilde{f}$ *y* $\tilde{g}$ *son los levantamientos de* f *y* g *respectivamente, con* $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{g}(0)$, *entonces* $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ *y* $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ *rel* $\dot{I}$.

Demostración. Sea $\tilde{f}$ el único levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, que existe por el Teorema 2.22. Por el Teorema 2.23 existe una única función continua $\tilde{F} : Y \times I \to X$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
I \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X
\end{tikzcd}$$

de donde $\tilde{F}(0,0) = \tilde{F}(h_0(0)) = \tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. En particular, $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}(t)$.

Como $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}$ es un camino en $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{F}(0,1)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[ur, "\tilde{F}|_{\{0\}\times I}"] \arrow[r, "C_{x_0}"'] & X
\end{tikzcd}$$

donde C_{x_0} es el camino constante en x_0, tenemos que $\tilde{F}|_{\{0\}\times I} = C_{\tilde{x}_0}$ pues $C_{\tilde{x}_0}$ es el único levantamiento de C_{x_0}, de donde $\tilde{F}(0,t) = \tilde{x}_0$ para cada $t \in I$, (ver Definición 1.21).

Similarmente definamos $\tilde{F}_1 : I \to \tilde{X}$ por $\tilde{F}_1(t) = \tilde{F}(t,1)$ para cada $t \in I$, tenemos que $p\tilde{F}_1(t) = p\tilde{F}(t,1) = F(t,1) = g(t)$ y $\tilde{F}_1(0) = \tilde{F}_1(0,1) = \tilde{x}_0$ de donde por el Teorema 2.22, $\tilde{F}_1 = \tilde{g}$. Además tenemos que $\tilde{F}|_{\{1\}\times I} = C_{\tilde{f}(1)}$ pues $C_{\tilde{f}(1)}$ es el único levantamiento de C_{x_1}, así $\tilde{F}(1,t) = \tilde{f}(1)$ para cada $t \in I$, por tanto $\tilde{g}(1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{f}(1)$. De donde $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ *rel* $\dot{I}$.

□

Teorema 2.25. *Si* $(\tilde{X}, p)$ *es un espacio cubriente de* X*, entonces para todo* $x \in X$ *y para todo* $\tilde{x}$ *elemento de la fibra de* p *sobre* x

$$p_* : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \Pi_1(X, x)$$

es una función inyectiva. Esto es, p_* *es un monomorfismo de grupos.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ un camino cerrado en $\tilde{X}$ con inicio en $\tilde{x}$. Supongamos que $p_*[\tilde{f}] = [C_x]$, tenemos que existe $F : I \times I \to X$ función continua tal que $F : p \circ \tilde{f} \simeq C_x \ rel \ \dot{I}$ y por el Corolario 2.24 tenemos que existe una única funcion continua $\tilde{F} : I \times I \to X$ tal que $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq C_{\tilde{x}} \ rel \ \dot{I}$, así $[\tilde{f}] = [C_{\tilde{x}}]$ y ya que p_* es un homomorfismo de grupos tenemos que p_* es inyectiva.

□

Definición 2.26 (**Actuación**, **actuación transitiva**). *Si* G *es un grupo con elemento neutro* e*, y* Y *un conjunto. Entonces* G *actúa sobre* Y *si existe una función de* $G \times Y$ *a* G *denotada por* $(g, y) \mapsto gy$*, tal que:*

1. $\forall y \in Y, \forall g, g' \in G, (gg')\, y = g\,(g'y)$.
2. $\forall y \in Y, ey = y$.

Si G *actúa sobre* Y *llamaremos a* Y *un* ***G-conjunto****. Si* G *actúa sobre* Y *diremos que* G *actúa transitivamente sobre* Y *si dados* $y, y' \in Y$ *existe* $g \in G$ *tal que* $gy = y'$ *y diremos que* Y *es un* ***G-conjunto transitivo****.*

Observación 2.27. *Sea* G *un grupo que actúa sobre* Y*, para cada* $g \in G$ *la función* $g : Y \to Y$ *definida por* $g(y) = gy$ *para cada* $y \in Y$ *es una permutación con inversa* $g^{-1} : Y \to Y$*, definida por* $g^{-1}(y) = g^{-1}y$ *para cada* $y \in Y$*.*

Definición 2.28. *Sea* G *un grupo,* Y *un* G*-conjunto e* $y \in Y$*. La* ***órbita*** *de* y *se define por*

$$o(y) = \{gy \in Y | g \in G\}.$$

El ***estabilizador o grupo de isotropía*** *de* y *se define por*

$$G_y = \{g \in G | gy = y\}.$$

El ***conjunto de las clases laterales izquierdas*** *de* G_y *es el conjunto* $\{gG_y | g \in G\}$*, el cual denotaremos por* G/G_y*.*

Observación 2.29. *Para cada $y \in Y$ con Y un G-conjunto, tenemos que G_y es subgrupo de G, además G actúa transitivamente sobre Y si y sólo si $o(y) = Y$ para algún $y \in Y$.*

Lema 2.30. *Si G es un grupo que actúa sobre Y entonces $|o(y)| = [G : G_y]$ para cada $y \in Y$.*

Demostración. Sea $y \in Y$ la función $\varphi : o(y) \to G/G_y$ definida por $\varphi(gy) = gG_y$ para cada $gy \in o(y)$ es una función biyectiva entre la orbita de y y las clases izquierdas de G_y.

$\square$

Teorema 2.31. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $x_0 \in X$ e Y la fibra de p sobre x_0. Entonces la función de $\Pi_1(X, x_0) \times Y$ a Y definida por $[f]\tilde{x} = \tilde{f}(1)$, donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$, es una actuacuón con la cual:*

(a) $\Pi_1(X, x_0)$ *actúa transitivamente sobre Y.*

(b) Si $\tilde{x}_0 \in Y$, entonces el estabilizador de $\tilde{x}_0$ es $P_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

(c) $|Y| = [\Pi_1(X, x_0) : p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]$.

Demostración. Sea $\tilde{x} \in Y$ y $[f] \in \Pi_1(X, x_0)$, por el Corolario 2.24 la definición de $[f]\tilde{x}$ no depende del representante de $[f]$, además $p[f]\tilde{x} = p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = x_0$, esto es $[f]\tilde{x} \in Y$. Veamos que con esta función Y es un $\Pi_1(X, x_0)$-conjunto. Para todo $\tilde{x} \in Y$ se tiene que $[C_{x_0}]\tilde{x} = \tilde{x}$ pues $C_{\tilde{x}}$ es un levantamiento de C_{x_0} con $C_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$. Sean $[g], [f] \in \Pi_1(X, x_0)$, tomemos $\tilde{f}$ el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ y $\tilde{g}$ el levantamiento de g con $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1)$, tenemos que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(I,0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{f}(1)) \arrow[d, "p"] \\
(I,0) \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, "\tilde{f}*\tilde{g}"] \arrow[r, "f*g"'] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

son conmutativos, de donde $[g]([f]\tilde{x}) = [g]\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) = \tilde{f} * \tilde{g}(1) = [f * g]\tilde{x}$. Por tanto Y es un $\Pi_1(X, x_0)$-conjunto.

(a): Sea $\tilde{x}_0 \in Y$, para cada $\tilde{x} \in Y$ existe λ camino en $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$, pues $\tilde{X}$ es conexo por caminos, tenemos que $p \circ \lambda$ es un camino en X de x_0 a x_0, notar que λ es el levantamiento de $p \circ \lambda$ con $\lambda(0) = \tilde{x}_0$, así $[p \circ \lambda] = \lambda(1) = \tilde{x}$. Esto es $\Pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente sobre Y.

(b): Sean $\tilde{x}_0 \in Y$, f un camino cerrado en X con base en x_0 y $\tilde{f}$ el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Si $[f] \in \Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$, tenemos que $\tilde{x}_0 = [f]\tilde{x}_0 = \tilde{f}(1)$ de donde $[\tilde{f}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, así $[f] = [p \circ \tilde{f}] \in p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, por tanto $\Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} \subseteq p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Sea $[p \circ \tilde{g}]_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, tenemos que $[p \circ \tilde{g}]\tilde{x}_0 = \tilde{g}(1) = \tilde{x}_0$, de donde $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq \Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$.

(c): Se sigue de (a), (b) y el Lema 2.30.

□

Teorema 2.32. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, sean x_0, $x_1 \in X$. Si Y_0 y Y_1 son las fibras sobre x_0 y x_1 respectivamente, entonces $|Y_0| = |Y_1|$.*

Demostración. Sean $\tilde{x}_0 \in Y_0$ y $\tilde{x}_1 \in Y_1$, existe $\tilde{\lambda}$ camino en $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$, sea $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$, es un camino de x_0 a x_1. Tenemos que el diagrama (ver Definición 1.24 y Lema 1.25)

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[r, "\Gamma_{\tilde{\lambda}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) \arrow[d, "p_*"] \\ \Pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\Gamma_\lambda"'] & \Pi_1(X,x_1) \end{tikzcd}$$

es conmutativo pues para cada $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tenemos que:

$$p_*\Gamma_{\tilde{\lambda}}([\tilde{\alpha}]) = p_*([\tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\alpha} * \tilde{\lambda}]) = [p(\tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\alpha} * \tilde{\lambda})] =$$

$$[\lambda^{-1} * \alpha * \lambda] = \Gamma_\lambda([p_*(\tilde{\alpha})]) = \Gamma_\lambda p_*([\tilde{\alpha}]).$$

Así por el Lema 1.25 tenemos que tanto $\Gamma_{\tilde{\lambda}}$ como Γ_λ son isomorfismos, además p_* es inyectiva, de esto se sigue que Γ_λ induce una biyección entre $[\Pi_1(X, x_0) : p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]$ y $[\Pi_1(X, x_1) : p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)]$, por (c) del Teorema 2.31 tenemos que

$$|Y_0| = [\Pi_1(X, x_0) : p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)] = [\Pi_1(X, x_0) : p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)] = |Y_1|$$

. □

Definición 2.33. *La **multiplicidad** de un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ es la cardinalidad de una fibra. Si la multiplicidad de un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ es m diremos que $(\tilde{X}, p)$ es un **espacio cubriente m-hojeado**.*

Corolario 2.34. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Si $x_0 \in X$ y Y es la fibra de p sobre x_0, entonces*

a) si $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in Y$, entonces $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ son subgrupos conjugados de $\Pi_1(X, x_0)$.

b) Si H es un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$ tal que para algún $\tilde{x}_0 \in Y$, H y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son conjugados, entonces existe $\tilde{x}_1 \in Y$ tal que $H = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$

Demostración. $a)$: Sean $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in Y$, como $\tilde{X}$ es conexo por caminos existe $\tilde{\lambda}$ camino de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$. Si $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$ tenemos que (ver Definición 1.25 y Lema 1.25)

$$p_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{X}_1)) = p_*(\Gamma_{\tilde{\lambda}}\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \Gamma_\lambda(p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = [\lambda^{-1}]p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[\lambda]$$

con $[\lambda] \in \Pi_1(X, x_0)$.

$b)$: Sea $H = [\lambda^{-1}]p_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\lambda]$ para algún $[\lambda] \in \Pi_1(X, x_0)$, sea $\tilde{\lambda}$ un levantamiento de λ tal que $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_0$, tenemos que $\tilde{x}_1 = \omega(\tilde{\lambda}) \in Y$ y que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\Gamma_{\tilde{\lambda}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \Pi_1(\tilde{X}, \omega(\tilde{\lambda})) \arrow[d, "p_*"] \\
\Pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\Gamma_\lambda"'] & \Pi_1(X, \omega(\lambda))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, de donde

$$S = \Gamma_\lambda(p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\Gamma_{\tilde{\lambda}}\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

□

Definición 2.35. *Un espacio cubriente* $(\tilde{X}, p)$ *de* X *es un* ***espacio cubriente regular*** *si para todo* $x_0 \in X$ *se tiene que* $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *es un subgrupo normal de* $\Pi_1(X, x_0)$ *para todo* $\tilde{x}_0$ *elemento de la fibra de* p *sobre* x_0

Definición 2.36. *Un espacio topológico* X *es un* ***espacio simplemente conexo*** *si es conexo por caminos y* $\Pi_1(X, x_0) = [C_{x_0}]$ *para todo* $x_0 \in X$.

Observación 2.37. *Si* $(\tilde{X}, p)$ *es un espacio cubriente regular de* X *y* $x_0 \in X$. *Entonces* $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ *para cualesquiera* $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$ *elementos de la fibra de* p *sobre* x_0. *Si* X *es un espacio simplemente conexo entonces cada espacio cubriente,* $(\tilde{X}, p)$, *de él es regular pues* $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [C_{x_0}]$.

2.3. Transformaciones cubrientes

En esta sección dado un espacio cubriente estudiaremos el grupo de transformaciones cubrientes, el cual es el grupo de homeomorfismos tales que la composición del homeomorfismo con la función cubriente resulta ser la función cubriente. Analizaremos la relación entre el grupo de transformaciones cubrientes con las fibras. Con la misma idea de factorizar una función cubriente mediante un homeomorfismo daremos la definición de espacios cubrientes equivalentes, y veremos que los espacios cubrientes equivalentes de un espacio localmente conexo por caminos guardan una relación con el comportamiento de sus grupos fundamentales bajo el homomorfismo inducido.

Para un espacio localmente conexo por caminos, suponiendo la existencia de un espacio cubriente universal de dicho espacio, con el uso del grupo de automormismos veremos que el grupo fundamental puede expresarse sin la necesidad de un punto base. Por lo anterior la última sección de este capítulo esta dedicada a resultados acerca de la existencia del espacio cubriente universal de un espacio conexo y localmente conexo por caminos.

Teorema 2.38. *Sean* Y *un espacio conexo y localmente conexo por caminos y* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *una función continua. Si* $(\tilde{X}, p)$ *es un espacio cubriente de* X, *entonces existe una única función continua* $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *tal que* $p \circ \tilde{f} = f$ *si y sólo si*

$$f_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Demostración. Supongamos que existe una única función continua $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, tenemos que $f_* = (p \circ \tilde{f})_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ y $\tilde{f}_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, por lo tanto $f_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Supongamos que $f_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ya que Y es conexo y localmente conexo por caminos tenemos que Y es conexo por caminos[4], sea $y \in Y$ y h un camino en Y de y_0 a y, como $f \circ h$ es un camino de $x_0 = f(y_0)$ a $f(y)$, por el Teorema 2.22 tenemos que existe $\tilde{\lambda}$, levantamiento de $f \circ h$ con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_0$, definamos $\tilde{f}(y) = \tilde{\lambda}(1)$. Sea h_1 un camino de y_0 a y y sea $\tilde{\lambda}_1$ el levantamiento de $f \circ h_1$ tal que $\tilde{\lambda}_1(0) = \tilde{x}_0$, tenemos que $h * h_1^{-1}$ es un camino cerrado en Y, así $f(h * h_1^{-1})$ es un camino cerrado en X, como

$$[(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1})] = f_*[h * h_1^{-1}] \in p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

tenemos que existe $[\tilde{g}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1}) \simeq p \circ \tilde{g} \ rel \ \dot{I}$, de donde

$$f \circ h \simeq (f \circ h) * (f \circ h_1^{-1}) * (f \circ h_1) \simeq (p \circ \tilde{g}) * (p \circ \tilde{\lambda}_1) \simeq p \circ (\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1) \ rel \dot{I}$$

y así por el Corolario 2.24 tenemos que $\lambda(1) = \tilde{g} * \tilde{\lambda}_1(1) = \tilde{\lambda}_1(1)$. Así tenemos que $\tilde{f}(y)$ no depende de la elección del camino de y_0 a y.

Veamos que $\tilde{f}$ es continua, sea $y \in Y$, $\tilde{x} = \tilde{f}(y)$ y $\tilde{U}_1$ una vecindad abierta de $\tilde{x}$ construyamos V vecindad de y con $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}_1$. Sea $x = p(\tilde{x})$, U una vecindad abierta de x admisible y S la hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$, podemos asumir que $\tilde{U}_1 \subseteq S$. Como p es abierta el conjunto $U_1 = p(\tilde{U}_1)$ es una vecindad abierta en X de x con $U_1 \subseteq p(S) = U$, como f es continua $f^{-1}(U_1)$ es abierto en Y, además $y \in f^{-1}(U_1)$. Como Y es localmente conexo por trayectorias existe V, vecindad abierta conexa por caminos tal que $y \in V \subseteq f^{-1}(U_1)$. Veremos que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}_1$. Sea h un camino en Y de y_0 a y, $\tilde{\lambda}$ levantamiento de $f \circ h$ con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_0$; si $v \in V$ existe h_2 camino en V de y a v, así tenemos que $f \circ h_2(I) \subseteq U_1$, sea $\tilde{\mu}$ el levantamiento de $f \circ h_2$ con $\tilde{\mu}(0) = \tilde{x}$. Como $U_1 \subseteq U$ y U es admisible tenemos que $\tilde{\mu}(t) = (p|_S)^{-1}(f \circ h_2)(t)$ de donde $\tilde{\mu}(1) \in \tilde{U}_1$. Ahora $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x} = \tilde{\mu}(0)$ de donde $\tilde{\lambda} * \tilde{\mu}$ está definido. Como

$$p(\tilde{\lambda} * \tilde{\mu}) = p \circ \tilde{\lambda} * p \circ \tilde{\mu} = f \circ h * f \circ h_2 = f(h * h_2)$$

[4]Si Y es un espacio conexo y localmente conexo por caminos, entonces Y es conexo por caminos, este resultado puede verse en [2].

donde $h * h_2$ es un camino de y_0 a v y $\tilde{\lambda} * \tilde{\mu}(0) = \tilde{x}_0$ tenemos que $\tilde{f}(v) = \tilde{\lambda} * \tilde{\mu}(1) = \tilde{\mu}(1) \in \tilde{U}_1$. □

Teorema 2.39. *Sean X un espacio conexo y localmente conexo por caminos, $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ tales que $p(\tilde{x}_0) = x_0 = q(\tilde{y}_0)$. Si $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ entonces existe una único homeomorfismo $h : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con $p \circ h = q$.*

Demostración. Como X es localmente conexo por caminos, $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ también son localmente conexos por caminos (y conexos por definición de espacio cubriente), así por el Teorema 3.38 tenemos que existe una única función $h : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con $p \circ h = q$, así mismo existe una única función continua $k : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ con $q \circ k = p$. Tenemos que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[ur, "h \circ k"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[ur, "I_{\tilde{X}}"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

son conmutativos, de donde por el Lema 2.20 $h \circ k = I_{\tilde{X}}$. De igual forma se demuestra que $k \circ h = I_{\tilde{Y}}$ por tanto tenemos que h es un homeomorfismo con inversa k.

□

Teorema 2.40. *Sean X conexo y localmente conexo por caminos, $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ y $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ con $q(\tilde{y}_0) = x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Si $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \subseteq p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, entonces existe una única función continua $h : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con $p \circ h = q$. Más aún, $(\tilde{Y}, h)$ es espacio cubriente de $\tilde{X}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.38 existe una única función continua $h : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con $p \circ h = q$, basta probar que $(\tilde{Y}, h)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}$.

Sean $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $x = p(\tilde{x})$, U_1 una vecindad abierta $p-$admisible de x, U_2 una vecindad abierta $q-$admisible de x. Tenemos que $U_1 \cap U_2$ es una vecindad abierta de x, como X es localmente conexo por caminos existe U vecindad conexa por caminos y abierta de x tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$, por el Lema 2.13 tenemos que U es cubierto uniformemente por p y q. Sean $\{S_j\}_{j \in A}$ la familia de p-hojas sobre U y S la hoja sobre U con $\tilde{x} \in S$. Es suficiente probar que S es cubierto uniformemente por h.

Sea $\{T_k | k \in B\}$ la familia de $q-$ hojas sobre U tenemos que cada T_k es conexo, pues cada T_k es homeomorfo a U que es conexo por caminos, así tenemos que $h(T_k)$ es conexo, además para cada $k \in B$ se tiene que

$$p \circ h(T_k) = q(T_k) = U$$

de donde $h(T_k) \subseteq p^{-1}(U) = \cup_{j \in A} S_j$, con lo cual tenemos que para cada $k \in B$, $h(T_k)$ está contenido en S o bien no intersecta a S, de donde

$$h^{-1}(S) = \bigcup_{h(T_k) \subseteq S} T_k.$$

Finalmente tenemos que si $h(T_k) \subseteq S$, entonces el sigiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} T_k \arrow[d, "q|_{T_k}"'] \arrow[dr, "h|_{T_k}"] & \\ U \arrow[r, "p^{-1}|_S"'] & S \end{tikzcd}$$

por tanto $h|_{T_k} = p^{-1}|_S \circ q|_{T_k}$ es homeomorfismo pues tanto $p^{-1}|_S$ como $q|_{T_k}$ son homeomorfismos. Así S es cubierto uniformemente por h.

□

Definición 2.41. *Sea X un espacio topológico. Un* ***espacio cubriente universal*** *de X es un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X tal que $\tilde{X}$ es un espacio simplemente conexo.*

Teorema 2.42. *Sean X un espacio conexo y localmente conexo por caminos, $(\tilde{Y}, q)$ un espacio cubriente de X. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente universal de X, entonces existe una función continua $h : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Demostración. $\tilde{X}$ es conexo por ser espacio cubriente de X, además por la Observación 2.12 tenemos que $\tilde{X}$ es localmente conexo por caminos pues X es localmente conexo por caminos. Usando el Teorema 2.38 tenemos que para cada $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ y $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(p(\tilde{x}_0))$, existe una función continua $h : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ tal que $p \circ h = q$.

$\square$

Observación 2.43. *Un argumento estándar demuestra que sí existe un espacio cubriente universal de X, éste es único salvo isomorfismo, esto es si $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son espacios cubrientes universales de X, entonces existe un homeomorfismo $h : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ tal que $p = qh$; el argumento es la aplicación del Teorema 2.43 tanto al espacio cubriente universal $(\tilde{X}, p)$ como a $(\tilde{Y}, q)$ y verificar que las funciones continuas obtenidas de dicho teorema son inversa una de la otra.*

Definición 2.44. *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente. Una **transformación cubriente** es un homeomorfismo $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $p \circ h = p$, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} .$$

Denotaremos por $Cov(\tilde{X}/X)$ al conjunto de todas las transformaciónes cubrientes de $\tilde{X}$.

Observación 2.45. *Para cada $(\tilde{X}, p)$, espacio cubriente de X, tenemos que $Cov(\tilde{X}/X)$ es un grupo bajo la composición de funciones.*

Teorema 2.46. *Sean X conexo y localmente conexo por caminos y $x_0 \in X$. Un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X es regular si y sólo si $Cov(\tilde{X}/X)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$ mediante la función que asocia a cada $(h, \tilde{x}) \in Cov(\tilde{X}/X) \times p^{-1}(x_0)$ con $h(\tilde{x})$.*

Demostración. Supongamos que el espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ es regular, es sencillo ver que la fibra sobre x_0 es un $Cov(\tilde{X}/X)$-conjunto con la actuación $(h, \tilde{x}) \to h(\tilde{x})$. Sean $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$ elementos de la fibra sobre x_0. Por la Observación 2.37 $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ y así por el Teorema 2.39 existe un homeomorfismo $h : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ con $ph = p$, de donde $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ y $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x_1}$.

Supongamos que $Cov(\tilde{X}/X)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$. Sean $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, ya que h es homeomorfismo $h_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Además como $p = ph$ tenemos que $p_* = p_*h_*$ de donde

$$p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*h_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

Sea $[g] \in \Pi_1(X, x_0)$. Por la parte (b) el Corolario 2.34 tenemos que existe $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ tal que $[g]p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g^{-1}] = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Así, $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ es subgrupo normal de $\Pi_1(X, x_0)$.

□

Teorema 2.47. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X*

a) Si $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ y h no es la función identidad en X, entonces h no tiene puntos fijos.

b) Si h_1, $h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$ son tales que existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$, entonces $h_1 = h_2$.

Demostración. (a): Supongamos que existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $h(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Sea $x = p(\tilde{x})$. Por el Lema 2.20 tenemos que existe a lo más una función f que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x) &
\end{tikzcd}$$

Ya que tanto h como $I_{\tilde{X}}$ hacen conmutar dicho diagrama tenemos que $h = I_{\tilde{X}}$ lo cual es una contradicción.

(b): Como h_1, $h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$ tenemos que $h_1^{-1}h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$, además $h_1^{-1}h_2(\tilde{x}) = \tilde{x}$, por la parte anterior tenemos que $h_1^{-1}h_2 = I_{\tilde{X}}$, por tanto $h_1 = h_2$.

□

Definición 2.48. *Dos espacios cubrientes $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ de X son **espacios cubrientes equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ tal que $p \circ h = q$.*

Teorema 2.49. *Sean X un espacio localmente conexo por caminos, $x_0 \in X$, $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0)$. $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son equivalentes si y sólo si $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Supongamos que $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son equivalentes. Existe un homeomorfismo $h : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ tal que $p \circ h = q$, de donde $h(\tilde{y}_0) \in p^{-1}(\tilde{x}_0)$ y

$$q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) = p_*h_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, h(\tilde{y}_0))$$

Por la parte (a) del Corolario 2.34 tenemos que $p_*\Pi_1(\tilde{X}, h(\tilde{y}_0))$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son conjugados de donde $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$.

Supongamos que $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$. Por la parte (b) del Corolario 2.34 tenemos que existe $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\tilde{x}_0)$ tal que $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ y usando el Teorema 2.39 existe un homeomorfismo $h : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ con $p \circ h = q$.

□

Definición 2.50. *Sea G un grupo. Diremos que una función $\theta : Y \to Z$, donde Y y Z son $G-$conjuntos, es una **G-aplicación** o que es una **función G-equivariante** si*

$$\forall g \in G, \forall y \in Y,\ \theta(gy) = g\theta(y).$$

*Además si una $G-$aplicación es biyectiva, diremos que θ es un **G- isomorfismo**. Sea Y un $G-$conjunto denotaremos por $Aut(Y)$ al conjunto de todos los $G-$isomorfismos con dominio y codominio Y.*

Observación 2.51. *Es sencillo demostrar que si θ es una $G-$aplicación biyectiva entonces la función θ^{-1} es $G-$equivariante, de donde, la función θ es llamada $G-$isomorfismo. También es sencillo demostrar que para cualquier $G-$conjunto Y se tiene que $(Aut(Y), \circ)$ es un grupo.*

Sea G un grupo y H subgrupo de G, denotemos por G/H a la familia de todas las clases izquierdas de H en G. Tenemos que G actúa sobre G/H mediante la actuación traslación que asigna a cada $(a, gH) \in G \times G/H$ la clase izquierda agH. Al referirnos a G/H como $G-$conjunto nos estaremos refiriendo a la actuación de G mediante la actuación traslación. Es sencillo demostrar que bajo la función actuación G/H es un $G-$conjunto transitivo y que además H es el estabilizador de la clase H.

Lema 2.52.

a) Si X es un $G-$ conjunto transitivo y H es el estabilizador de un punto, entonces X es $G-$isomorfo al $G-$conjunto G/H.

b) Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G. G/H y G/K son $G-$isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G.

Demostración. (a): Sea $x_0 \in X$ y sea $H = G_{x_0}$. Para cada $x \in X$ existe $g_x \in G$ tal que $g_x x_0 = x$ pues X es $G-$conjunto transitivo, sea $g'_x \in G$ tal que $g'_x x_0 = x$ tenemos que $g_x^{-1} g'_x x_0 = g_x^{-1} g_x x_0 = x_0$ de donde $g_x^{-1} g'_x \in H$ y así $g_x H = g'_x H$. Por lo anterior $\theta : X \to G/H$ definida por $\theta(x) = g_x H$ es una función. Sean $x,\ y \in H$ supongamos que $\theta(x) = \theta(y)$ así existen $g_x,\ g_y \in G$ tales que $g_x x_0 = x$, $g_y x_0 = y$ y $g_x^{-1} g_y \in H = G_{x_0}$ de donde $g_x^{-1} g_y x_0 = x_0$ así $y = g_y x_0 = g_x x_0 = x$, por tanto θ es inyectiva. Sea $gH \in G/H$ tenemos que $gx_0 \in X$, de donde $\theta(gx_0) = gH = G_{x_0}$, por tanto θ es sobreyectiva. Veamos que θ es una $G-$aplicación, sean $a \in G$, $x \in X$, $g_x,\ g_{ax} \in G$ tales que $x = g_x x_0$ y $ax = g_{ax} x_0$ tenemos que

$$g_{ax}^{-1} a g_x x_0 = g_{ax}^{-1} ax = g_{ax}^{-1} g_{ax} x_0 = x_0$$

de donde $g_{ax}^{-1} a g_x \in H$ y así $\theta(ax) = g_{ax} H = g_{ax} g_{ax}^{-1} a g_x H = a g_x H = a\theta(x)$

(b): Supongamos que $\theta : G/H \to G/K$ es un $G-$isomorfismo. Sea $g \in G$ tal que $\theta(H) = gK$, para cada $h \in H$ tenemos que

$$gK = \theta(H) = \theta(hH) = h\theta(H) = hgK$$

de donde $g^{-1} hg \in K$, así $g^{-1} Hg \subseteq K$. Además $\theta^{-1}(K) = g^{-1} H$ pues $\theta(g^{-1} H) = g^{-1} \theta(H) = g^{-1} gK = K$ así para cada $k \in K$

$$g^{-1} H = \theta^{-1}(K) = \theta^{-1}(kK) = k\theta^{-1}(K) = kg^{-1} H$$

de donde $K \subseteq g^{-1} Hg$. por tanto $K = g^{-1} Hg$.

Ahora, supongamos que $K = g^{-1}Hg$ para algún $g \in G$. Sean $a,\ b \in G$ notar que son equivalentes: $aH = bH$; $a^{-1}b \in H$; $g^{-1}a^{-1}bg \in g^{-1}Hg = K$; $agK = bgK$. Sea $\theta : G/H \to G/K$ dada por $\theta(aH) = agK$, θ está bien definida pues sea $aH = bH$ entonces $b^{-1}a \in H$ de donde $\theta(aH) = agK = bgK = \theta(bH)$. Veamos que θ es inyectiva; si $\theta(aH) = \theta(bH)$ entonces $agK = bgK$ y así $aH = bH$. Tenemos que θ es sobreyectiva pues sea $aK \in G//K$ tenemos que $\theta(ag^{-1}H) = aK$. Finalmente θ es una $G-$aplicación ya que $\theta(abH) = abgK = a\theta(bH)$.

□

Corolario 2.53. *Sea X localmente conexo por caminos y $x_0 \in X$. Dos espacios cubrientes de X, $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$, son equivalentes si y sólo si las fibras $p^{-1}(x_0)$ y $q^{-1}(x_0)$ son $\Pi_1(X, x_0)-$isomorfos.*

Demostración. Sean $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$. Por el Teorema 2.31 $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ son los estabilizadores de $\tilde{x}_0$ y $\tilde{y}_0$ respectivamente. Por la parte (a) de Lema 2.53 se cumple que:

1 $p^{-1}(x_0)$ y $\Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ son $\Pi_1(X, x_0)-$ isomorfos.

2 $q^{-1}(x_0)$ y $\Pi_1(X, x_0)/q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ son $\Pi_1(X, x_0)-$isomorfos.

$\Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $\Pi_1(X, x_0)/q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ son $\Pi_1(X, x_0)-$ isomorfos si y sólo si $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ son conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$, esto por la parte (b) del Lema 2.52. Por el Teorema 2.49 $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $q_*\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ son conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$ si y sólo si $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son equivalentes. □

Lema 2.54. *Sea G un grupo que actúa transitivamente sobre un conjunto Y, x, $y \in Y$. Entonces*

$$G_x = G_y \text{ si sólo si existe } \theta \in Aut(Y) \text{ con } \theta(x) = y.$$

Demostración. Supongamos que existe $\theta \in Aut(Y)$ con $\theta(x) = y$. Sea $h \in G_x$ tenemos que $hx = x$ de donde $hy = h\theta(x) = \theta(hx) = \theta(x) = y$, por tanto $G_x \subseteq G_y$. Sea $h \in G_y$ tenemos que $h(y) = y$ de donde $hx = h\theta^{-1}(y) = \theta^{-1}(hy) = \theta^{-1}(y) = x$, por tanto $G_y \subseteq G_x$. Así $G_x = G_Y$.

Supongamos que $G_x = G_y$. Sea $z \in Y$ existe $g_z \in G$ tal que $z = g_z x$. Definimos $\theta : Y \to Y$ por $\theta(z) = g_z y$, veamos que θ está bien definida. Si $z = g_z x = g'_z x$ entonces $g_z^{-1} g'_z x = x$ y así $g_z^{-1} g'_z \in G_x = G_y$ por tanto $g_z y = g'_z y$. Veamos que $\theta \in Aut(Y)$, sean $h \in G$ y $z \in Y$, tenemos que

$$\theta(hz) = \theta(hg_z x) = hg_z y = h\theta(z).$$

de donde θ es una $G-$aplicación. Afirmamos que θ es inyectiva, pues sean $z,\ w \in Y$ supongamos que $\theta(z) = \theta(w)$, tenemos que $g_z y = g_w y$, de donde $g_w^{-1} g_z \in G_y = G_x$ y así $z = g_z x = g_w x = w$. Finalmente θ es sobreyectiva, pues sea $z \in Y$, existe $g \in G$ tal que $z = gy$, y por la definición de θ, $\theta(gx) = gy = z$. □

Lema 2.55. *Sean X un espacio localmente conexo por trayectorias, $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $x_0 \in X$. Si $\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, entonces*

$$\text{existe } h \in Cov(\tilde{X}/X) \text{ con } h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1 \text{ si y sólo si existe } \theta \in Aut(p^{-1}(x_0)) \\ \text{con } \theta(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1.$$

Demostración. Supongamos que existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ con $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, esto es el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por el Teorema 2.38 tenemos que $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, y así por el Lema 2.54 tenemos que existe $\theta \in Aut(p^{-1}(x_0))$ con $\theta(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, pues $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ son los estabilizadores de $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$ respectivamente.

Supongamos que existe $\theta \in Aut(p^{-1}(x_0))$ con $\theta(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Tenemos que por el Lema 2.54 $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ y así por el Teorema 2.39 existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ con $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.

□

Lema 2.56. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, donde X es un espacio localmente conexo por caminos. Si $x_0 \in X$ y $p^{-1}(x_0)$ es visto como $\Pi_1(X, x_0)-$conjunto, entonces*

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong Aut(p^{-1}(x_0))$$

mediante la función que asigna a cada $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ la función $h|_{p^{-1}(x_0)}$.

Demostración. Denotemos por Y a la fibra de p sobre x_0. Sea $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tenemos que $h(Y) = Y$ pues para cada $\tilde{x} \in Y$ tenemos que $h(\tilde{x}) \in Y$ pues $ph(\tilde{x}) = p(\tilde{x}) = x_0$, además para cada $\tilde{x} \in Y$ tenemos que $h^{-1}(\tilde{x}) \in Y$. Así $h|_Y$ tiene dominio y codomino Y, además $h|_Y$ es biyectiva por ser la restricción del homeomorfismo h a Y. Veamos que $h|_Y$ es un $\Pi_1(X, x_0)-$isomorfismo. Sea $[f] \in \Pi_1(X, x_0)$ y $\tilde{x} \in Y$ tenemos que $h([f]\tilde{x}) = h(\tilde{f}(1))$ con $\tilde{f}$ el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ y $[f]h(\tilde{x}) = \tilde{f}_1(1)$ donde $\tilde{f}_1$ es el levantamiento de f con $\tilde{f}_1(0) = h(\tilde{x})$. Tenemos que $\tilde{f}_1 = h\tilde{f}$ pues $ph\tilde{f} = p\tilde{f} = f$ y $h\tilde{f}(0) = h(\tilde{x})$ de donde $h([f]\tilde{x}) = h(\tilde{f}(1)) = \tilde{f}_1(1) = [f]h(\tilde{x})$. Esto es con la asignación de $h|_Y$ a cada $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ es una función.

Veamos que la función $h \mapsto h|_Y$ es un isomorfismo de grupos. Sean $h, g \in Cov(\tilde{X}/X)$ supongamos que $h|_Y = g|_y$ tenemos que hy g coinciden en un punto y así por la parte (b) del Teorema 2.47 $h = g$, esto es tenemos una asignación inyectiva, además la asignación es sobreyectiva, pues sea $\theta \in Aut(Y)$ y $\tilde{x} \in Y$ tenemos que $\theta(\tilde{x}) \in Y$, por el Lema 2.55 tenemos que existe $h \in Cov(\tilde{X}/x)$ con $h(\tilde{x}) = \theta(\tilde{x})$, además para cada $\tilde{x}_1 \in Y$ existe $[f] \in \Pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_1 = [f]\tilde{x}$, así para cada $\tilde{x}_1 \in Y$

$$h(\tilde{x}_1) = h([f]\tilde{x}) = [f]h(\tilde{x}) = [f]\theta(\tilde{x}) = \theta([f]\tilde{x}) = \theta(\tilde{x}_1).$$

por tanto $h|_Y = \theta$.

Finalmente la función biyectiva $h \mapsto h|_Y$ es morfismo de grupos pues sean $h,\ g \in Cov(\tilde{X}/x)$, $h|_Y \circ g|_y = (h \circ g)|_Y$.

□

Definición 2.57. *Sea G un grupo y H subgrupo de G. El* ***normalizador*** *de H en G es el subgrupo*

$$N_G(H) = \left\{g \in G | gHg^{-1} = H\right\}$$

Notar que si G es un grupo y H es subgrupo de G tenemos que H es un subgrupo normal de $N_G(H)$ y que si H es subgrupo normal de G, entonces $N_G(H) = G$.

Lema 2.58. *Sea G un grupo que actúa transitivamente sobre un conjunto Y. Si $y_0 \in Y$ entonces*

$$Aut(Y) \cong N_G(G_0)/G_0$$

donde G_0 es el estabilizador de y_0.

Demostración. Si $\theta \in Aut(Y)$, existe $g_\theta \in G$ tal que $\theta(y_0) = g_\theta y_0$, pues G actúa transitivamente sobre Y; tenemos que $g_\theta \in N_G(G_0)$, ya que para $h \in G_0$ tenemos que:

$$g_\theta y_0 = \theta(y_0) = \theta(hy_0) = h\theta(y_0) = hg_\theta y_0$$

y así $g_\theta^{-1} h g_\theta \in G_0$, por tanto $G_0 \supseteq g_\theta G_0 g_\theta^{-1}$, por otro lado para $h \in G_0$ tenemos que:

$$g_\theta^{-1} h g_\theta y_0 = g_\theta^{-1} h\theta(y_0) = g_\theta^{-1}\theta(hy_0) = g_\theta^{-1}\theta(y_0) = g_\theta^{-1} g_\theta y_0 = y_0$$

de forma que $g_\theta^{-1} G_0 g \subseteq G_0$, así que $h_1 = g_\theta^{-1} h g_\theta \in G_0$, por tanto $h = g_\theta h_1 g_\theta^{-1} \in g_\theta G_0 g_\theta^{-1}$. Si $g'_\theta \in G$ es tal que $\theta(y_0) = g_\theta y_0 = g'_\theta y_0$ tenemos que $g_\theta^{-1} g'_\theta \in G_0$, así $g_\theta G_0 = g'_\theta G_0$, así que $g_\theta^{-1} G_0 = (g'_\theta)^{-1} G_0$. Por lo anterior tenemos que $\Gamma : Aut(Y) \to N_G(G_0)/G_0$ definida por $\Gamma(\theta) = g_\theta^{-1} G_0$ es una función. Veamos que es homeomorfismo de grupos.

Si $\theta, \phi \in Aut(Y)$, tenemos que

$$\Gamma(\theta\phi) = (g_\phi g_\theta)^{-1} G_0 = g_\theta^{-1} g_\phi^{-1} G_0 = \Gamma(\theta)\Gamma(\phi).$$

Veamos que Γ es inyectiva. Sean $\theta \in Aut(Y)$ con $\Gamma(\theta) = G_0$, tenemos que $\theta(y_0) = y_0$, además para cada $y \in Y$ existe $h \in G$ tal que $y = hy_0$ de donde

$$\theta(y) = \theta(hy_0) = h\theta(y_0) = hy_0 = y$$

por tanto $\theta = I_Y$.

Veamos que Γ es sobreyectiva. Si $g_0 \in N_G(G_0)$, tenemos que $\theta : Y \to Y$ definida por $\theta(y) = hg_0 y_0$, donde $h \in G$ es tal que $y = hy_0$, es una función; veamos que θ es un $G-$isomorfismo.

Sean $f \in G$, $z \in Y$ con $fz = hy_0$ y $z = h'y_0$ tenemos que $h^{-1} f h' \in G_0$ y así $g_0^{-1} h^{-1} f h' g_0 \in G_0$ de donde

$$\theta(fz) = hg_0 y_0 = hg_0(g_0^{-1} h^{-1} f h' g_0) y_0 = fh' g_0 y_0 = f\theta(z).$$

θ es inyectiva pues sean $z,\ y \in Y$ con $z = hy_0$ y $y = h'y_0$ supongamos que $\theta(y) = \theta(z)$, así $g_0^{-1} h^{-1} h' g_0 \in G_0 = g_0^{-1} G_0 g_0$, de donde $h^{-1} h' \in G_0$ y $y = h'y_0 = hy_0 = z$.

Si $y \in Y$ existe $h \in G$ tal que $y = hg_0 y_0$ de donde $hy_0 \in Y$ es tal que $\theta(hy_0) = hg_0 y_0 = y$, por tanto θ es sobreyectiva.

Finalmente tenemos que $\Gamma(\theta) = g_0 G_0$ y así Γ es un isomorfismo de grupos

□

Corolario 2.59. *Sea* $(\tilde{X}, p)$ *un espacio cubriente de* X *con* X *localmente conexo por caminos. Si* $x_0 \in X$ *y* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ *entonces*

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong N_{\Pi_1(X,x_0)}(p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

Demostración. Por el Lema 2.56 tenemos que $Cov(\tilde{X}/X) \cong Aut(p^{-1}(x_0))$, además tenemos que $p^{-1}(x_0)$ es un $\Pi_1(X, x_0)-$conjunto transitivo donde $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ es el estabilizador de $\tilde{x}_0$ así por el Lema 2.58

$$Aut(p^{-1}(x_0)) \cong N_{\Pi_1(X,x_0)}(p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

□

Teorema 2.60. *Sea* $(\tilde{X}, p)$ *un espacio cubriente regular de* X*, con* X *localmente conexo por caminos. Si* $x_0 \in X$ *y* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$*, entonces*

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong \Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $N_{\Pi_1(X,x_0)}(p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \Pi(X, x_0)$, pues $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ es subgrupo normal de $\Pi(X, x_0)$, y el Corolario 2.59, el resultado es inmediato.

□

Corolario 2.61. *Si* $(\tilde{X}, p)$ *es un espacio cubriente universal de* X*, con* X *localmente conexo por caminos, entonces para todo* $x_0 \in X$

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong \Pi_1(X, x_0).$$

Demostración. Por el Teorema 2.60 tenemos que

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong \Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

y como $\tilde{X}$ es simplemente conexo

$$\Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \Pi_1(X, x_0)/[C_{x_0}] \cong \Pi_1(X, x_0).$$

□

Notemos que mediante el Corolario 2.61 podemos expresar el grupo fundamental de un espacio localmente conexo por caminos con espacio cubriente universal mediante el grupo de transformaciones cubrientes el espacio cubriente, y es la misma para cualquier punto base.

2.4. Existencia del espacio cubriente universal

Dado un espacio topológico y un subgrupo de su grupo fundamental generaremos un espacio topológico, el conjunto será generado mediante una relación de equivalencia en los caminos respecto al subgrupo y la topología será generada por las clases de equivalencia de las continuaciones de los caminos. Veremos que ciertos caminos en el espacio topológico pueden ser levantados al espacio generado; con este espacio generado y el concepto de espacio localmente 1-conexo veremos que un espacio conexo y localmente conexo por caminos tiene un espacio cubriente universal si y sólo si es semilocalmente 1-conexo.

Definición 2.62. *Sea G un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. Denotaremos por $P(X, x_0)$ a la familia de caminos en X con inicio en x_0, y definiremos la **relación de caminos módulo G**, $f_1 \sim f_2 \bmod G$, en $P(X, x_0)$ por:*

i. $f_1(1) = f_2(1)$;

ii. $[f_1 * f_2^{-1}] \in G$.

Lema 2.63. *Sea G un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, la relación $f_1 \sim f_2 \bmod G$ es una relación de equivalencia sobre $P(X, x_0)$.*

Demostración. Sean $f_1,\ f_2,\ f_3 \in p(X, x_0)$ tenemos que

i. $f_1 \sim f_1 \bmod G$ pues $f_1(1) = f_1(1)$ y $[f_1 * f_1^{-1}] = [C_{x_0}] \in G$.

ii. Si $f_1 \sim f_2 \bmod G$, entonces $f_2(1) = f_1(1)$ y $[f_2 * f_1^{-1}] = [f_1 * f_2^{-1}]^{-1} \in G$.

iii. Si $f_1 \sim f_2 \bmod G$ y $f_2 \sim f_3 \bmod G$, entonces $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1)$ y $[f_1 * f_3^{-1}] = [f_1 * f_2^{-1} * f_2 * f_3] = [f_1 * f_2^{-1}][f_2 * f_3] \in G$.

□

Notación 2.64. *Sean (X, x_0) un espacio punteado y G subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Denotaremos la clase de equivalencia de $f \in P(X, x_0)$ por $\langle f \rangle_G$, esto es*

$$\langle f \rangle_G = \{g \in p(X, x_0) |\ g \sim f \bmod G\}.$$

Además denotaremos por $\tilde{X}_G$ a $\{\langle f \rangle_G \mid f \in p(X, x_0)\}$ y a la clase del camino constante C_{x_0} en X la denotaremos por $\tilde{x}_0$. Finalmente denotaremos por ψ a la función de $\tilde{X}_G$ a X que asigna a cada $\langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$ el elemento $f(1)$ en X.

Definición 2.65. *Sean (X, x_0) un espacio topológico punteado, $f \in P(X, x_0)$ y U una vecindad abierta de $f(1)$. Una* ***continuación de f*** *en U es un camino $F \in p(X, x_0)$ de la forma $F = f * \lambda$ donde λ es un camino tal que $\lambda(0) = f(1)$ y $\lambda(I) \subseteq U$.*

Notación 2.66. *Para (X, x_0) un espacio punteado, $f \in P(X, x_0)$, $\tilde{x} = \langle f \rangle_G$ y U una vecindad abierta de $f(1)$ se define el siguiente conjunto:*

$$(U, \tilde{x}) = \left\{ \langle F \rangle_G \in \tilde{X}_G | \ F \text{ es una continuación de } f \text{ en } U \right\}$$

.

Observación 2.67. *Si $f \sim g$ mod G y $\lambda(0) = f(1) = g(1)$, entonces*

i. $f * \lambda(1) = g * \lambda(1)$;

ii. $[f * \lambda * (g * \lambda)^{-1}] = [f * \lambda * \lambda^{-1} * g^{-1}] = [f * g^{-1}] \in G$.

Esto es $f * \lambda \sim g * \lambda$ mod G.

Lema 2.68. *Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado y sea G un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Entonces los conjuntos de la forma $(U, \tilde{x})$ forman una base para una topología en $\tilde{X}_G$ para la cual la función ψ es continua. Más aún si X es conexo por caminos, ψ es sobreyectiva.*

Demostración. Denotemos por β el conjunto

$$\left\{ (U, \tilde{x}) \mid U \text{ es vecindad abierta de } f(1) \text{ y } \tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G \right\}.$$

Si $\tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$ tenemos que para cada U vecindad abierta de $f(1)$

$$\tilde{x} = \langle f \rangle_G = \left\langle f * C_{f(1)} \right\rangle_G \in (U, \tilde{x}).$$

De donde para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}_G$ existe $(U, \tilde{x}) \in \beta$ tal que $\tilde{x} \in (U, \tilde{x})$.

Veamos que si $\tilde{y} \in (U, \tilde{x} = \langle f \rangle_g)$, entonces $(U, \tilde{x}) = (U, \tilde{y})$. Si $\tilde{y} \in (U, \tilde{x} = \langle f \rangle_g)$ tenemos que $\tilde{y} = \langle f * \lambda \rangle_G$ con camino tal que $f(1) = \lambda(0)$ y $\lambda(I) \subseteq U$. Si $\tilde{z} \in (U, \tilde{y})$ tenemos que $\tilde{z} = \langle f * \lambda * \mu \rangle_G$ con μ camino tal que $f * \lambda(1) = \mu(0)$ y $\mu(I) \subseteq U$, así $\lambda * \mu$ es camino con $f(1) = \lambda * \mu(0)$ y $\lambda * \mu(I) \subseteq U$, de donde $\tilde{z} \in (U, \tilde{x})$. Para $\tilde{z} \in (U, \tilde{x})$ tenemos que $\tilde{z} = \langle f * \mu \rangle_G$ con μ camino tal que $f(1) = \mu(0)$ y $\mu(I) \subseteq U$ y así $\tilde{z} = \langle f * \mu \rangle_G = \langle f * \lambda * \lambda^{-1} * \mu \rangle$ con $f * \lambda(1) = \lambda^{-1} * \mu(0)$ y $\lambda^{-1} * \mu(I) \subseteq U$ de donde $\tilde{z} \in (U, \tilde{y})$.

Sean $(U,\tilde{x})$, $(V,\tilde{y}) \in \beta$, si $\tilde{z} \in (U,\tilde{x}) \cap (V,\tilde{y})$ entonces $(U,\tilde{x}) = (U,\tilde{z})$ y $(V,\tilde{y}) = (V,\tilde{z})$ de donde

$$(U,\tilde{x}) \cap (V,\tilde{y}) = (U,\tilde{z}) \cap (V,\tilde{z})$$

y por tanto

i. $(U \cap V, \tilde{z}) \in \beta$;

ii. $\tilde{z} \in (U \cap V, \tilde{z})$;

iii. $(U \cap V, \tilde{z}) \subseteq (U,\tilde{z}) \cap (V,\tilde{z}) = (U,\tilde{x}) \cap (V,\tilde{y})$.

De donde β es una base para una topología en $\tilde{X}_G$.

Veamos que ψ es continua. Sea $\tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$ y sea U una vecindad abierta de $\psi(\tilde{x}) = f(1)$, entonces $\psi(U,\tilde{x}) \subseteq U$, ya que si $\tilde{y} \in (U,\tilde{x})$, tenemos que $\tilde{y} = \langle f * \lambda \rangle_G$ con camino tal que $f(1) = \lambda(0)$ y $\lambda(I) \subseteq U$ y así

$$\psi(\tilde{y}) = f * \lambda(1) = \lambda(1) \in U.$$

Supongamos que X es conexo por caminos. Para $x \in X$ existe un camino f en X de x_0 a x y así $\tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}$ es tal que $\psi(\tilde{x}) = x$.

□

Al referirnos a $\tilde{X}_G$ como un espacio topológico tomaremos la topología sobre $\tilde{X}_G$ que lleva por base los conjuntos de la forma $(U,\tilde{x})$ del Lema 2.69.

Lema 2.69. *Sean* (X, x_0) *un espacio punteado,* G *un subgrupo de* $\Pi_1(X, x_0)$. *Todo camino* f *en* X *con* $f(0) = x_0$ *puede ser levantado a un camino* $\tilde{f}$ *en* $\tilde{X}_G$ *que comienza en* $\tilde{x}_0 = \langle C_{x_0} \rangle_G$ *y termina en* $\langle f \rangle_G$*, es decir* $\psi \circ \tilde{f} = f$.

Demostración. Sea $t \in I$, Definiremos $f_t : I \to X$ por $f_t(s) = f(ts)$ para cada $s \in I$. Sea $\tilde{f} : I \to \tilde{X}_G$ definida por $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$ notar que

i $\tilde{f}(0) = \langle f_0 \rangle_G = \langle C_{x_0} \rangle_G = \tilde{x}_0$

ii $\tilde{f}(1) = \langle f_1 \rangle_G = \langle f \rangle_G$

iii $\psi(\tilde{f}(t)) = \psi \langle f_t \rangle_G = f_t(1) = f(t)$ para cada $t \in I$, esto es $\psi \circ \tilde{f} = f$.

Veamos que $\tilde{f}$ es continua. Sea $t_0 \in I$ y sea $(U, \tilde{f}(t_0))$ un básico, como f es continua y existe un intervalo abierto $V \subseteq I$ con $t_0 \in V$ y $f(V) \subseteq U$, veamos que $\tilde{f}(V) \subseteq (U, \tilde{f}(t_0))$. Sea $t \in V$, afirmamos que $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle \in (U, \tilde{f}(t_0))$. En efecto, si $t > t_0$ tomemos $\lambda = f|_{[t_0,t]} \circ r_I^{[t_0,t]}$, donde $r_I^{[t_0,t]}$ es la parametrización de I en $[t_0, t]$, así λ es camino de $f(t_0) = f_{t_0}(1)$ a $f(t)$ con $\lambda(I) \subseteq f(V) \subseteq U$, de donde $f_{t_0} * \lambda$ es continuación de f_{t_0} en U, además $f_{t_0} * \lambda(1) = f(t) = f_t(1)$ y $[f_{t_0} * \lambda * f_t^{-1}] = [C_{x_0}] \in G$, de donde $\langle f_t \rangle = \langle f_{t_0} * \lambda \rangle \in (U, \tilde{f}(t_0))$. Similarmente si $t < t_0$ tomemos $\lambda = f|_{[t,t_0]} \circ r_I^{[t,t_0]}$, donde $r_I^{[t,t_0]}$ es la parametrización de I en $[t, t_0]$, así λ^{-1} es camino de $f(t_0) = f_{t_0}(1)$ a $f(t)$ con $\lambda^{-1}(I) \subseteq f(V) \subseteq U$, de donde $f_{t_0} * \lambda^{-1}$ es continuación de f_{t_0} en U, además $f_{t_0} * \lambda^{-1}(1) = f(t) = f_t(1)$ y $[f_{t_0} * \lambda^{-1} * f_t^{-1}] = [C_{x_0}] \in G$, de donde $\langle f_t \rangle = \langle f_{t_0} * \lambda^{-1} \rangle \in (U, \tilde{f}(t_0))$.

□

Corolario 2.70. *Si (X, x_0) es un espacio punteado y G es subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$, entonces $\tilde{X}_G$ es conexo por caminos.*

Demostración. Si $\tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$, existe un camino de $\tilde{x}$ a $\tilde{x}_0$ pues f es un camino en X con $f(0) = x_0$ y así el levantamiento de f en $\tilde{X}_G$ es un camino de $\tilde{x}$ a $\tilde{x}_0$, con lo cual $\tilde{X}_G$ es conexo por caminos

□

Definición 2.71. *Un espacio X es un* ***espacio semilocalmente 1-conexo*** *si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $i_* : \Pi_1(U, x) \to \Pi_1(x, x)$, donde $i : U \to X$ es la inclusión, es trivial. Esto es: si $i_*([f]_U) = [i \circ f]_X = [C_x]_X$ para cada $[f]_U \in \Pi_1(U, x)$.*

Definición 2.72. *Sea X un espacio topológico. X es un* ***espacio triplemente conexo*** *si X es conexo, locamente conexo por caminos y semilocalmente 1-conexo.*

Teorema 2.73. *Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado, G un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Si X es un espacio triplemente conexo, entonces $(\tilde{X}_G, \psi)$ es un espacio cubriente de X y $\psi_* \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) = G$.*

Demostración. Notar que por el Corolario 2.70 $\tilde{X}_G$ es conexo por caminos y que, por el Lema 2.68 ψ es continua. X es conexo por caminos pues es conexo y localmente conexo por caminos y así por el Lema 2.68 ψ es sobreyectiva. Resta demostrar que para cada $x \in X$ existe U vecindad abierta de x ψ-admisible.

Sea $x \in X$, existe W vecindad abierta de x tal que todo camino en W con inicio y final en x es nulotópico[5] en X, como X es localmente conexo por caminos existe U vecindad abierta conexa por caminos de x con $U \subseteq W$, veamos que U es cubierto uniformemente por ψ.

Para $\tilde{x} = \langle g \rangle_G \in \psi^{-1}(x)$ veamos que $\psi|_{(U,\tilde{x})} : (U, \tilde{x}) \to U$ es homeomorfismo. Si $y \in U$, existe un camino λ de x a y en U pues U es conexo por caminos, así $g * \lambda$ es una continuación de g en U con $g * \lambda(1) = y$, de donde $\langle g * \lambda \rangle_G \in (U, \tilde{x})$ y $\psi(\langle g * \lambda \rangle_G) = y$; así $\psi|_{(U,\tilde{x})}$ es sobreyectiva. Supongamos que $\tilde{y} = \langle g * \lambda \rangle_G$, $\tilde{z} = \langle g * \mu \rangle_G \in (U, \tilde{x})$ y $\psi(\tilde{y}) = \psi(\tilde{z})$, tenemos que $\lambda * \mu^{-1}$ es un camino cerrado en U basado en x, como $U \subseteq W$ tenemos que $\lambda * \mu^{-1}$ es nulotópico en X y así

$$\left[g * \lambda * \mu^{-1} * g^{-1}\right] = \left[g * C_x * g^{-1}\right] = [C_{x_0}] \in G$$

de donde $\tilde{y} = \langle g * \lambda \rangle_G = \langle g * \mu \rangle_G = \tilde{z}$.

Cada vecindad abierta $\tilde{W}$ de $\tilde{x}$ en $\tilde{X}_G$ contiene un conjunto abierto de la forma $(V, \tilde{x})$ con $\psi(V, \tilde{x}) = V$ pues $\psi_{(U,\tilde{x})}$ es biyectiva, así $\psi_{(U,\tilde{x})}$ es abierta. Por tanto $\psi_{(U,\tilde{x})}$ es un homeomorfismo.

Para cada $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tenemos que $(U, \tilde{x}) \subseteq \psi^{-1}(U)$ de donde $\bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}_G} (U, \tilde{x}) \subseteq \psi^{-1}(U)$, además sea $\tilde{y} = \langle g_1 \rangle_G \in \tilde{X}_G$ tal que $\psi(y) \in U$, tenemos que existe un camino λ de $g_1(1)$ a x en U, con lo cual

$$\tilde{y} = \langle g_1 \rangle_G = \left\langle g_1 * \lambda * \lambda^{-1} \right\rangle_G \in (U, \langle g_1 * \lambda \rangle_G)$$

con $\langle g_1 * \lambda \rangle_G \in \psi{-}1(x)$; de esto tenemos que

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{y} \in \psi^{-1}(x)} (U, \tilde{x}).$$

La familia $\{(U, \tilde{y}) | \tilde{y} \in \psi^{-1}(x)\}$ es tal que para cualesquiera dos elementos distintos de tal familia, estos son ajenos pues dados $(U, \tilde{y})$ y $(U, \tilde{z})$ con $\tilde{y}, \ \tilde{z} \in \psi^{-1}(x)$, supongamos que $(U, \tilde{y}) \cap (U, \tilde{z}) \neq \emptyset$, entonces $(U, \tilde{y}) = (U, \tilde{z})$, esto se demostró en el Lema 2.68.

Finalmente veamos que $\psi_* \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) = G$. Ya hemos demostrado que $(\tilde{X}_G, \psi)$ es espacio cubriente de X. Si $[f] \in G$ existe un único levantamiento $\tilde{f}$

[5]Sean X e Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ es nulotópica si existe $y \in Y$ tal que la función constante $C_y : X \to Y$ es homotópica a f, esto es, si $f \simeq C_y$.

de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, definido como $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$ con $f_t(s) = f(ts)$ (Lema 2.69). Tenemos que $[f * C_{x_0}] = [f] \in G$ con lo que $\tilde{f}(0) = \langle C_{x_0} \rangle = \langle f \rangle_G = \tilde{f}(1)$, así

$$\left[\tilde{f}\right] \in \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \text{ con } \psi_* \left[\tilde{f}\right] = [f] \, .$$

De donde $\psi_* \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \supseteq G$.

Por otro lado, sea $[\tilde{f}] \in \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ tenemos que $\tilde{f}$ es el levantamiento de $\psi \circ \tilde{f}$ (ver Lema 2.69) y $\langle C_{x_0} \rangle_G = \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \left\langle \psi \circ \tilde{f} \right\rangle_G$, por tanto, tenemos que $\psi \circ \tilde{f} \sim C_{x_0}$ *mod* G de donde

$$\psi_* \left[\tilde{f}\right] = \left[\psi \circ \tilde{f}\right] = \left[\psi \circ \tilde{f} * C_{x_0}^{-1}\right] \in G.$$

Por tanto $\psi_* \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \subseteq G$.

□

Corolario 2.74. *Si X es triplemente conexo, entonces todo espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X es equivalente a un espacio de la forma $(\tilde{X}_G, \psi)$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$, tomemos $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ y $G = p_* \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Por el Teorema 2.73 tenemos que $(\tilde{X}_G, \psi)$ es un espacio cubriente de X con $\psi_* \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0 = G = p_* \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, así por el Teorema 2.39 existe un homeomorfismo $h : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\tilde{X}_G, \tilde{X}_0)$ tal que $\psi \circ h = p$, de donde $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{X}_G, \psi)$ son equivalentes.

□

Corolario 2.75. *Sea X triplemente conexo. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces todo abierto contractible en X es $p-$admisible.*

Demostración. Sea U un abierto contractible en X y sea $(\tilde{X}_G, \psi)$ un espacio cubriente de X equivalente a $(\tilde{X}, p)$. En el Teorema 2.73 hemos demostrado que todo abierto conexo por caminos para el cual todo camino cerrado en él es nulotópico en X es $\psi-$admisible. Como U es abierto contractible tenemos que es conexo, pues si $u_0 \in U$ tal que $H : I_U \simeq C_{u_0}$ tenemos que para cada $u \in U$ la función $\alpha : I \to U$ definida por $\alpha(t) = H(u, t)$ para cada $t \in I$ es un camino de u a u_0 y así U es conexo por caminos y por tanto conexo, además sea λ un camino en U tenemos que la función $F : I \times I \to U$ definida por $F(t, s) = H(\lambda(t), s)$ para cada $(t, s) \in I \times I$ es tal que $F : \lambda \simeq C_{u_0}$ de donde todo camino cerrado en U es nulotópico en U y así nulotópico en X, ya que U es abierto en X basta con ampliar el codominio de F a X, por tanto U es $\psi-$admisible y así $p-$admisible.

□

Corolario 2.76. *Sea X un espacio conexo y localmente conexo por caminos. X tiene un espacio cubriente universal si y sólo si X es semilocalmente 1-conexo.*

Demostración. Supongamos que existe $(\tilde{X}, p)$ espacio cubriente universal de X, para cada $x \in X$ existe U vecindad abierta $p-$admisible de x, sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y S la hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$, tenemos que el siguiente diagrama, donde $i : S \to \tilde{X}$ y $j : U \to X$ son inclusiones, es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(S, \tilde{x}) \arrow[r, "i_*"'] \arrow[d, "p|_{S*}"'] & \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = [C_{\tilde{x}}] \arrow[d, "p_*"'] \\
\Pi_1(U, x) \arrow[r, "j_*"'] & \Pi_1(X, x)
\end{tikzcd}$$

Pues $j = p|_S \circ i \circ p|_s^{-1}$ y así j_* es trivial.

Supongamos que X es semilocalmente 1-conexo tomemos $x_0 \in X$ y sea $G = \{[C_{x_0}]\}$, tenemos que $(\tilde{X}_G, \psi)$ es un espacio cubriente de X con $\tilde{X}_G$ conexo por caminos y $\psi_*(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) = G$. Si $\left[\tilde{f}\right]$, $[\tilde{g}] \in \Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ entonces $\left[p \circ \tilde{f}\right] = [C_{x_0}] = [p \circ \tilde{g}]$, por el Corolario 2.24 tenemos que $\left[\tilde{f}\right] = [\tilde{g}]$, así $\Pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) = \{[C_{\tilde{x}_0}]\}$. Por tanto $(\tilde{X}_G, \psi)$ es un espacio cubriente universal de X. □

Lema 2.77. *Un espacio localmente contractible X es localmente conexo por caminos y semilocalmente 1-conexo.*

Demostración. Si $x \in X$ y U una vecindad de x, existe V vecindad abierta de x contractible a x tal que $V \subseteq U$, esto es, existe $F : V \times I \to V$ función continua tal que

$$F(y, 0) = y \text{ y } F(y, 1) = x, \text{ para cada } \; y \in V.$$

Así tenemos que para cada $y \in V$, $f : I \to V$ definida por $f(t) = F(y, t)$ para cada $t \in I$, es camino en V de y a x, por tanto V es conexo por caminos.

Sea $[f] \in \Pi_1(V, x)$, como V es contractible tenemos que $\Pi_1(V, x) = [C_x]$ de donde $j_* : \Pi_1(V, x) \to \Pi_1(X, x)$ es trivial.

□

Corolario 2.78. *Si X es conexo y localmente contractible, entonces X tiene un espacio cubriente universal.*

Demostración. Consecuencia del Corolario 2.76 y del Lema 2.77. □

2.5. Espacio de órbitas

Dado un espacio X conexo, localmente conexo y semilocalmente 1-conexo mostraremos, mediante el uso del espacio de órbitas y un espacio cubriente universal, una relación biyectiva entre los espacios cubrientes de X y los subgrupos de su grupo fundamental.

Definición 2.79. *Sea G es un grupo que actúa sobre un espacio topológico Y. El* ***espacio de órbitas*** *de Y con respecto a G es el espacio topológico $(Y/G, \tau_\mu)$, donde Y/G, es el conjunto de todas las órbitas de G, esto es;*

$$Y/G := \{o(y)|y \in Y\}.$$

$\mu : Y \to Y/G$ es la función definida por $\mu(y) = o(y)$ y τ_μ en la topología final de $\{\mu\}$.

Lema 2.80. *Sea $(\tilde{X}, p)$ espacio cubriente regular de X, con X conexo y localmente conexo por caminos, y sea $G = Cov(\tilde{X}/X)$. Existe un homeomorfismo $h_\mu : X \to \tilde{X}/G$ tal que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
X \arrow[r, "h_\mu"'] & \tilde{X}/G
\end{tikzcd}$$

Además, $(\tilde{X}, \mu)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}/G$

Demostración. Por el Teorema 2.46 tenemos que G actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$ mediante la función evaluación.

Sean $x \in X$ y $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x)$, existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{x}) = \tilde{y}$ de donde $o(\tilde{x}) \cap o(\tilde{y}) \neq \emptyset$ y así $o(\tilde{x}) = o(\tilde{y})$. Por lo anterior $h_\mu : X \to \tilde{X}/G$ definida por

$h_\mu(x) = o(\tilde{x})$, donde $\tilde{x}$ es un elemento de $p^{-1}(x)$, es una función. Además es claro que $h_\mu \circ p = \mu$.

Veamos que h_μ es biyectiva, sea $o(\tilde{x}) \in \tilde{X}/G$, tenemos que $p(\tilde{x}) \in X$ y $h_\mu(p(\tilde{x})) = o(\tilde{x})$, esto es h_μ es sobreyectiva. Sean $x,\ y \in X$, $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ elementos de las fibras de p sobre x y y respectivamente. Supongamos que $h_\mu(x) = h_\mu(y)$, tenemos que existe $g \in G$ tal que $\tilde{x} = g(\tilde{y})$ y así

$$x = p(\tilde{x}) = p(g(\tilde{y})) = p(\tilde{y}) = y$$

pues $g(\tilde{y}) \in p^{-1}(y)$, de donde h_μ es inyectiva.

Tenemos que h_μ es continua pues para U un abierto en $\tilde{X}/G$, tenemos que $\mu^{-1}(U) = p^{-1}h_\mu^{-1}(U)$ es un abierto en $\tilde{X}$ por la continuidad de μ; como p es abierta tenemos que $h_\mu^{-1}(U) = p(p^{-1}h_\mu^{-1}(U))$ es abierto en X. Veamos que h_μ es abierta; sea V un abierto en X, tenemos que $\mu^{-1}h_\mu(V) = p^{-1}(V)$ es un abierto en $\tilde{X}$, como μ es una identificación tenemos que $h_\mu(V)$ es abierto en $\tilde{X}/G$, de donde h_μ es abierta.

Tenemos que h_μ es continua biyectiva y abierta, de donde h_μ es un homeomorfismo, además tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "I_{\tilde{X}}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[r, "h_\mu"'] & \tilde{X}/G \end{tikzcd}$$

es conmutativo, así por el Lema 2.16 $(\tilde{X}, \mu)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}/G$.

$\square$

Definición 2.81. *Sean $(\tilde{X}, p)$, $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X y Y respectivamente. Estos espacios cubrientes se dicen* ***espacios cubrientes equivalenes*** *si existen homeomorfismos h y k tales que hacen el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "k"'] & X
\end{tikzcd}$$

Lema 2.82. *Sea X un espacio conexo y localmente conexo por caminos, consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios cubrientes*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

donde $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{X}, r)$ son regulares. Sean $G = Cov(\tilde{X}/X)$ y $H = Cov(\tilde{X}/\tilde{Y})$. Entonces existe un diagrama conmutativo de espacios cubrientes de la forma

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "r'"] \arrow[dr, "p'"'] & & \tilde{X}/H \arrow[dl, "q'"] \\
& \tilde{X}/G &
\end{tikzcd}$$

donde cada uno de los espacios cubrientes es equivalente al correspondiente espacio cubriente del diagrama original.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
&&& \tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dlll, "I_{\tilde{X}}"'] \arrow[ddr, "p"] && \tilde{Y} \textit{ donde} \arrow[dlll, "h_{\mu_H}"'] \arrow[ddl, "q"] \\
\tilde{X} \arrow[rr, "\mu_H"] \arrow[ddr, "\mu_G"'] && \tilde{X}/H \arrow[ddl, "q'"] &&& \\
&&&& X \arrow[dlll, "h_{\mu_G}"'] & \\
& \tilde{X}/G &&&&
\end{tikzcd}
$$

μ_H, μ_G, h_{μ_G}, h_{μ_H} son tales que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\mu_G"] & \\
X \arrow[r, "h_{\mu_G}"'] & \tilde{X}/G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "\mu_H"] & \\
\tilde{Y} \arrow[r, "h_{\mu_H}"'] & \tilde{X}/H
\end{tikzcd}
$$

generados apartir del Lema 2.80, son conmutativos y $q' : \tilde{X}/H \to \tilde{X}/G$ es definida por $q'(o_H(\tilde{x})) = o_G(\tilde{x})$ para cada $o_H(\tilde{x}) \in \tilde{X}/H$, consideremos $r' = \mu_H$ y $p' = \mu_G$.

Tenemos que $\mu_G = q' \circ \mu_H$ pues para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$$q' \circ \mu_H(\tilde{x}) = q'(o_H(\tilde{x})) = o_G(\tilde{x}) = \mu_G(\tilde{x}).$$

Veamos que q' es continua. Sea U un abierto en $\tilde{X}/G$, entonces $\mu_H^{-1} \circ q'^{-1}(U) = \mu_G^{-1}(U)$ que es abierto en $\tilde{X}$, pues μ_G es continua, además como μ_H es abierta y sobreyectiva tenemos que $q'^{-1}(U) = \mu_H(\mu_H^{-1} \circ q'^{-1}(U))$ es abierto en $\tilde{X}/H$.

Sea $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ tenemos que

$$q'(h_{\mu_H}(\tilde{y})) = q'(o_H(\tilde{x})) = o_G(\tilde{x})$$

donde $\tilde{x} \in r^{-1}(\tilde{y})$, además $\tilde{x} \in p^{-1}(q(\tilde{y}))$ pues

$$p(\tilde{x}) = q(r(\tilde{x})) = q(\tilde{y})$$

de donde $h_{\mu_G}(q(\tilde{y})) = o_G(\tilde{x})$ y así $q'(h_{\mu_H}(\tilde{y})) = h_{\mu_G}(q(\tilde{y}))$. Por tanto $q' \circ h_{\mu_H} = h_{\mu_G} \circ q$. Finalmente por el Lema 2.16 tenemos que $(\tilde{X}/H, q')$ es espacio cubriente de $\tilde{X}/G$. $\square$

Corolario 2.83. *Sea X triplemente conexo y $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente universal de X. Entonces, cada espacio cubriente $(\tilde{Y}, q)$ de X es equivalente a un espacio de la forma $(\tilde{X}/H, q')$ para algún H subgrupo de $Cov(\tilde{X}/X)$.*

Demostración. Sea $(\tilde{Y}, q)$ un espacio cubriente de X, por el Teorema 2.42 existe $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ función continua tal que $p = q \circ r$, tenemos que $p_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{[C_{x_0}]\} \subseteq q_*\Pi_1(\tilde{Y}, r(\tilde{x}_0))$, así por el Teorema 2.40 tenemos que $(\tilde{X}, r)$ es espacio cubriente de $\tilde{Y}$, como $r_*\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \left\{\left[C_{r(\tilde{x}_0)}\right]\right\}$ tenemos que $(\tilde{X}, r)$ es regular, y por el Lema 2.82 tenemos que $(\tilde{Y}, q)$ es equivalente a $(\tilde{X}/H, q')$ con $H = Cov(\tilde{X}/\tilde{Y})$. Tomemos $g \in H$, g es homeomorfismo de $\tilde{X}$ a $\tilde{X}$ tal que

$$p \circ g = q \circ r \circ g = q \circ r = p$$

de donde $g \in Cov(\tilde{X}/X)$, con lo que H es subgrupo de $Cov(\tilde{X}/X)$. $\square$

Sean X triplemente conexo $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente universal de X, $G = Cov_p(\tilde{X}/X)$. Denotemos a la familia de todos los espacios cubrientes de $\tilde{X}/G$ de la forma $(\tilde{X}/H, q')$, donde H es un subgrupo de $Cov(\tilde{X}/X)$, por Ω, y denotemos a la familia de todos los subgrupos de $Cov(\tilde{X}/X)$ por Λ. Definiremos $\phi : \Omega \to \Lambda$ de la siguiente forma

Sea $(\tilde{X}/H, q') \in \Omega$ tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}/H \arrow[r, "I_{\tilde{X}/H}"] \arrow[d, "q'"'] & \tilde{X}/H \arrow[d, "h_{\mu_G}^{-1}q'"] \\
\tilde{X}/G \arrow[r, "h_{\mu_G}^{-1}"'] & X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, por el Lema 2.16, tenemos que $(\tilde{X}/H, h_{\mu_G}^{-1}q')$ es espacio cubriente de X, por el Teorema 2.40 existe una única función continua tal que $h_{\mu_G}^{-1}q' \circ r = p$, notar que el diagrama de funciónes continuas

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\mu_H"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X}/H \arrow[dl, "h_{\mu_G}^{-1}q'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, así tenemos que $\mu_H = r$, además por el Teorema 2.40, $(\tilde{X}, \mu_H)$ es espacio cubriente de $\tilde{X}/H$. Defimanos

$$\phi(\tilde{X}/H, q') = Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H).$$

Tenemos que para cada $g \in Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H)$, $p \circ g = h_{\mu_G}^{-1}q' \circ \mu_H \circ g = h_{\mu_G}^{-1}q' \circ \mu_H = p$, de donde $g \in G$, y así $\phi(\tilde{X}/H, q')$ es subrgupo de G. Definimos $\pi : \Lambda \to \Omega$ por $\pi(H) = (\tilde{X}/H, q')$.

Definición 2.84. *Sea X triplemente conexo y $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente universal de X. las funciónes $\phi : \Omega \to \Lambda$ y $\pi : \Lambda \to \Omega$ por $\pi(H) = (\tilde{X}/H, q')$ son llamadas* ***correspondencias de Galois.***

Teorema 2.85. *Sea X triplemente conexo y $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente universal de X. Las correspondencias de Galois π y ϕ son biyecciones inversas una de la otra.*

Demostración. Veamos que $\phi \circ \pi = I_\Lambda$ y $\pi \circ \phi = I_\Omega$.

Sea $H \in \Lambda$ tenemos que:

$$\phi \circ \pi(H) = \phi((\tilde{X}/H, q')) = Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H))$$

sea $H^* = Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H))$. Sea $g \in H$, para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tenemos que $\mu_H(g(\tilde{x})) = o(g(\tilde{x}) = o(\tilde{x}) = \mu_H(\tilde{x})$ de donde $\mu_H \circ g = \mu_H$, por tanto $g \in H^*$ y así $H \subseteq H^*$. Por otro lado, sea $g \in H^*$ tomemos $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, tenemos que $\mu_H(\tilde{x}_0) = \mu_H(g(\tilde{x})_0)$ de donde existe $f \in H \subseteq H^*$ tal que $f \circ g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, por el Teorema 2.47 $f \circ g = I_{\tilde{X}}$, de donde $g = f^{-1} \in H$. Así $H^* \subseteq H$. Por tanto $\phi \circ \pi(H) = H$ y así $\phi \circ \pi = I_\Lambda$.

Sea $(\tilde{X}/H, q') \in \Omega$ tenemos que:

$$\pi \circ \phi((\tilde{X}/H, q')) = \pi(Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H))) = \pi(H) = (\tilde{X}/H, q')$$

□

Observación 2.86. *En el Teorema 2.85 tenemos que por el Corolario 2.61 $Cov(\tilde{X}/X) \cong \Pi_1(X, x)$, así tenemos que existe una relación biyectiva entre los espacios cubrientes de X y los subgrupos de $\Pi_1(X, x)$, pues por el Corolario 2.83 todo espacio cubriente de X es de la forma $(\tilde{X}/H, q')$.*

Corolario 2.87. *Sea X triplemente conexo y sea $(\tilde{X}, p)$ espacio cubriente universal de X. Si H es subgrupo de $Cov(\tilde{X}/X)$ entonces $\Pi_1(\tilde{X}/H, *)$ es isomorfo a H.*

Demostración. Tenemos que $(\tilde{X}, \mu_h)$ es espacio cubriente universal de $\tilde{X}/H$, además $\tilde{X}/H$ es localmente conexo por caminos, pues tanto p como μ_h son homeomorfismos locales y X es localmente conexo por caminos, así por el Corolario 2.61 tenemos que para todo $o(\tilde{x}) \in \tilde{X}/H$

$$Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H)) \cong \Pi_1(\tilde{X}/H, o(\tilde{x}))$$

y en el Teorema 2.85 demostramos que $Cov_{\mu_H}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H)) = H$. $\square$

Definición 2.88. *Sea G un grupo, con elemento neutro e, que actúa sobre un espacio topológico X. Un conjunto abierto V en X es un* ***abierto propio en X*** *si $gV \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{e\}$. Decimos que la actuación de G sobre X es una* ***actuación propiamente discontinua*** *sobre X si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta de x propia en X.*

Observación 2.89. *Si $(\tilde{X}, p)$ es espacio cubriente de X tenemos que la actuación del grupo $Cov(\tilde{X}/X)$ sobre $\tilde{X}$ es una actuación propiamente discontinua, pues para $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, y U una vecindad abierta p-admisible de $p(\tilde{x})$, tomemos S la hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}_0$ y supongamos que $hS \cap S \neq \emptyset$ para algún $h \in Cov(\tilde{X}/X)$, tomemos $\tilde{x} \in hS \cap S$, tenemos que existe $\tilde{y} \in S$ con $h(\tilde{y}) = \tilde{x}$ de donde $p(\tilde{y}) = p(h^{-1}(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$ y como $p|_S$ es inyectiva tenemos que $\tilde{x} = \tilde{y}$, así $\tilde{x}$ es un punto fijo de h, por tanto $h = I_{\tilde{X}}$.*

Teorema 2.90. *Sea X conexo y localmente conexo por caminos. Sea G un grupo que actúa sobre X mediante una actuación propiamente discontinua, y sea $p : X \to X/G$ la inclusión natural. Se cumple lo siguiente:*

i. *(X, p) es espacio cubriente regular de X/G.*

ii. *Si X es semilocalmente 1-conexo, entonces $Cov(X/(X/G)) \cong G$.*

iii. *Si X es simplemente conexo, entonces $\Pi_1(X/G, *) \cong G$.*

Demostración. i) Tenemos que $p : (X, \tau_X) \to (X/G, \tau_p)$ es una función continua y sobreyectiva, veamos que p es abierta. Si U es un abierto en X, se tiene que $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$, con gU abierto para todo $g \in G$ pues la función definida por $x \mapsto gx$ es continua para cada $g \in G$ con inversa continua $x \mapsto g^{-1}x$, de donde p es abierta y por tanto p es una identificación.

Sea $o(x) \in X/G$, y U una vecindad abierta propia de x, veamos que $p(U)$ es p-admisible. Tenemos que $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$, además para $g, f \in G$ con $f \neq g$ tenemos que $gU \cap fU = \emptyset$, en efecto, tenemos que $g^{-1}f \neq e$ y $g^{-1}fU \cap U = \emptyset$; supongamos que $x \in gU \cap fU$, $x = gu = fv$ con $u, v \in U$, así $g^{-1}fv = u$ y $g^{-1}fU \cap U \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Veamos que para cada $g \in G$, $p|_{gU} : gU \to p(U)$ es biyectiva. Sea $y \in p(U)$, tenemos que $y = o(u)$ para algún $u \in U$, tenemos que $gu \in gU$ y $p(gu) = o(gu) = o(u) = y$, de donde p es sobreyectiva, supongamos que $p(gu) = p(gv)$ para algúnos $u,\ v \in U$, tenemos que $o(gu) = o(gv)$, así existe $f \in G$ tal que $gu = fgu$, por tanto $u = g^{-1}hgv$ y $g^{-1}fgU \cap U \neq \emptyset$, de donde $f = e$, así $gu = fgv = gv$ y por tanto $u = v$, así $p|_{gU}$ es inyectiva. Como $p|_{gU}$ es continua, abierta y biyectiva tenemos que $p|_{gU}$ es homeomorfismo y así (X, p) es espacio cubriente de X/G.

Para $g \in G$ tenemos que la función $g : X \to X$ definida por $x \mapsto gx$ es un homeomorfismo, además

$$p(g(x)) = o(g(x)) = o(x) = p(x)$$

así $p \circ g = p$ de donde G visto como grupo de funciones está contenido en $Cov(X/(X/G))$.

Sea $o(x) \in X/G$ tenemos que

$$p^{-1}(o(x)) = \{y \in X | o(y) = o(x)\} = \{y \in X | \exists g \in G : gx = y\}.$$

Sean $y,\ z \in p^{-1}(o(x))$ tenemos que $y = gx$ y $z = fx$ para algunos $g, f \in G$ de donde $z = fg^{-1}y$ con $fg^{-1} \in G \subseteq Cov(X/(x/G))$, con esto hemos probado que $Cov(X/(X/G))$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(o(x))$. Por el Teorema 2.46 tenemos que (X, p) es regular.

ii) En el Teorema 2.85 demostramos que $Cov(X/(X/G)) \cong G$.

iii) Como X es simplemente conexo, (X, p) es espacio cubriente universal de X/G de donde por el Teorema 2.61 tenemos que para todo $o(x) \in X/G$

$$\Pi_1(X/G, o(x)) \cong Cov(X/(X/G)) \cong G.$$

$\square$

Ejemplo 2.91. Consideremos la actuación propiamente discontinua de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ dada por $(n, t) \mapsto t + n$ para cada $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, por el Teorema 2.89. (iii) tenemos que:

$$\Pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, *) \cong \mathbb{Z}.$$

Además consideremos la función $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, tenemos que exp es un morfismo de grupos tal que $Ker(exp) = \mathbb{Z}$, por el teorema fundamental de homomorfismos existe único homomorfismo de grupos $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ \mu = exp$, donde μ es la inclusión natural. El teorema fundamental de homomorfismos nos dice que $h(o(t)) = exp(t)$ para cada $o(t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con esto sencillo demostrar que h es un isomorfismo de grupos y siguiendo la demostración del Lema 2.80 se demuestra que h es un homeomorfismo (pues h^{-1} está definida por $h^{-1}(s) = exp(\tilde{s})$ donde $\tilde{s} \in exp^{-1}(s)$ y la actuación $(n, t) \mapsto t + n$ actúa transitivamente sobre los espacios fibra). Por tanto tenemos que:

$$\Pi_1(\mathbb{S}^1, *) \cong \Pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, *) \cong \mathbb{Z}.$$

Por el Corolario 2.61 tenemos que $Cov(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, así por el Teorema 2.85 tenemos que

$$\{[(\mathbb{R}/H, q')] | H \text{ es subgrupo de Z}\}$$

es la familia de clases de espacios cubrientes de $\mathbb{S}^1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $p_n(z) = z^n$, es una función cubriente, siguiendo la costrucción de las corresponcencias de Galois del Teorema 2.85, tenemos que la familia de clases de espacios cubrientes de $\mathbb{S}^1$ es

$$\left\{[(\mathbb{S}^1, p_n)] | n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{[(\mathbb{R}, exp)]\}.$$

Notar que el espacio cubriente asociado al subgrupo trivial $\{0\}$ es el espacio cubriente universal $(\mathbb{R}, exp)$, mientras que el espacio cubriente asociado a $\mathbb{Z}$ es el espacio cubriente trivial $(\mathbb{S}^1, I_{\mathbb{S}^1})$.

Ejemplo 2.92. Sea Y el subespacio cerrado de $\mathbb{R}^2$ que consiste por una parte del conjutno de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = sen(1/x)$ y $x \in (0, 1/\pi)$, el segmento $[-1, 1]$ del eje y, y el arco que conecta a estos dos subespacios (Circulo de Varsovia ,Figura 2.1). Cocientando el segmento $[-1, 1]$ del eje y a un punto optenemos una proyección natural $f : Y \to \mathbb{S}^1$. Mostraremos que f no tiene levantamiento respecto al espacio cubriente $(\mathbb{R}, exp)$ de $\mathbb{S}^1$.

Sea $L = \{0\} \times [-1, 1] \subset Y$. Supongamos que $f(L) = \{(1, 0)\}$ y que $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de f respecto al espacio cubriente $(\mathbb{R}, exp)$. Como $Y \backslash L$ es conexo tenemos que $\tilde{f}(Y \backslash L)$ es conexo, por tanto $\tilde{f}(Y \backslash L)$ está contenido en una componente conexa de $exp^{-1}(f(Y \backslash L)) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, digamos

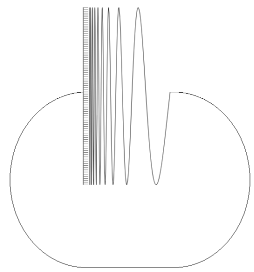

Figura 2.1: Espacio Y

$\tilde{f}(Y \backslash L) \subseteq (0,1)$, como $exp : (0,1) \to S^1$ es un homeomorfismo y f es sobreyectiva tenemos que $\tilde{f}(Y \backslash L) = (0,1)$, además

$$\tilde{f}(Y) = \tilde{f}(\overline{Y \backslash L}) \subseteq \overline{\tilde{f}(Y \backslash L)} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

.

Por otro lado como Y es compacto tenemos que $\tilde{f}(Y)$ es compacto y así $[0,1] \subseteq \tilde{f}(Y)$, pues $(0,1) = \tilde{f}(Y \backslash L) \subseteq \tilde{f}(Y)$, de está forma $\tilde{f}(Y) = [0,1]$.

Por lo anterior tenemos que $\tilde{f}(L) = \{0,1\}$ que es un espacio disconexo. Esto último es una contradicción pues ya que L es conexo y $\tilde{f}$ es continua tenemos que $\tilde{f}(L)$ es conexo. Este ejemplo muestra la necesidad de pedir la condición de conexidad local por caminos en el Teorema 2.38 pues Y no es un espacio localmente conexo por caminos y, se sabe que $\Pi_1(Y, y_0) = \{[C_{y_0}]\}$ de donde

$$f_* \Pi_1(Y, y_0) = \left\{[C_{f(y_0)}]\right\} \subseteq exp_* \Pi_1(\mathbb{R}, \tilde{y}_0).$$

Capítulo 3

Fibraciones

En este capítulo comenzaremos por introducir el concepto de homeomorfimo local y veremos que los homeomorfismos locales se comportan de manera similar a las funciones cubrientes con respecto a las restricciones a subespacios y la propiedad de ser funciones abiertas; acto seguido veremos que las funciones cubrientes tienen la propiedad de que la familia de hojas sobre un abierto admisible es la familia de componentes conexas de la preimagen del abierto admisibe, y que el coproducto de funciones cubrientes es también una función cubriente.

En la sección 3.2 introduciremos la definición de una función continua con la propiedad de levantamiento único de homotopía respecto a un espacio topológico. Si una función continua tiena la propiedad de levantamiento de homotopía respecto a cualquier espacio topológico entonces llamaremos a dicha fución fibración; gracias a los teoremas de levantamiento del capítulo 1 veremos que toda función cubriente es una fibración, también veremos que la propiedad de levantamiento único de homotopía de una fibración es equivalente a que la fibración tenga la propiedad de levantamiento único de trayectoras.

En la sección 3.3 presentaremos cómo es el comportamiento del homomorfismo inducido por una fibración con la propiedad de levantamiento único de trayectorias con respecto al grupo fundamental, las clases de conjugación y a las fibras, veremos que es similar al del homomorfismo inducido por una función cubriente.

En la sección 3.4 presentaremos el Teorema de levantamiento para fibraciones mediante la introducción de cuadrados cartesianos; veremos que las fibraciones no solo levantan caminos, sino que también existen funciones continuas, con restricciones sobre el dominio, que pueden ser levantadas mediante una fibración. Trabajaremos con el espacio de caminos que inician en un punto base para demostrar que, como las funciones cubrientes, la existencia de un levantamiento mediante una fibración está asociada a la contención de los grupos fundamentales bajo las respectivas funciones inducidas.

3.1. Homeomorfismos locales

Definición 3.1. *Una función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ se llama encaje si f es inyectiva y la topología τ es la topología inicial respecto a (f, σ). Se dice que un espacio topológico (A, τ_A) es un subespacio de (X, τ) si $A \subseteq X$ y τ_A es la topología inicial de A respecto a (i, τ).*

Proposición 3.2. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua e inyectiva. Entonces, si f es abierta o cerrada, f es encaje.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sea $g : (Z, \xi) \to (X, \tau)$ una función tal que $f \circ g$ es continua. Sea $U \in \tau$, como f es abierta, $f(U) \in \sigma$. Como $f \circ g$ es continua, $(f \circ g)^{-1}(f(U)) = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f(U) \in \xi$, además como f es inyectiva, $f^{-1} \circ f(U) = U$, así $g^{-1}(U) = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f(U) \in \xi$, de donde g es continua, por tanto τ es inicial respecto a (f, σ) y f es encaje. Si f es cerrada la demostación es análoga.

□

Definición 3.3. *Una función continua $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo local** si para toda $x \in X$ existe V vecindad abierta de x tal que $f(V)$ es un abierto y $f|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.4. Tenemos que:

a) Todo homeomorfismo es un homeomorfismo local.

b) Si $A \subseteq X$ es un abierto, entonces la inclusión $i : A \to X$ es un homeomorfismo local.

c) Si X es un espacio topológico y D es un espacio topológico discreto, entonces la proyección $\pi_X : X \times D \to X$ es un homeomorfismo local.

Notar que en el Ejemplo 3.4 (b), la inclusión no es una función sobreyectiva, así tampoco es una función cubriente.

Proposición 3.5. *Si $f : X \to Y$ es continua, entonces son equivalentes:*

I *f es homeomorfismo local.*

II *Para cada $x \in X$ existe V vecindad abierta de x tal que $f|_V : V \to Y$ es encaje abierto.*

III *Para cada $x \in X$ existe V vecindad de x tal que $f(V)$ es vecindad de $f(x)$ y $f|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. $I) \Rightarrow II)$: Sea $x \in X$, existe V vecindad abierta de x tal que $f(V)$ es abierto y $f|_V^{f(V)} : V \to f(V)$ es un homeomorfismo, por tanto $f|_V : V \to f(V)$ es continua y sobreyectiva. Sea U un abierto en V, $f(U)$ es abierto en $f(V)$, y ya que $f(V)$ es abierto en Y, tenemos que $f(U)$ es abierto en Y, así $f|_V : V \to Y$ es abierta y por la Proposición 3.2 es un encaje.

$II) \Rightarrow III)$: Sea $x \in X$, existe V vecindad abierta de x tal que $f|_V : V \to Y$ es encaje abierto, de donde $f|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo pues es continua, biyectiva y abierta.

$III) \Rightarrow I)$: Sea $x \in X$, existe V vecindad de x tal que $f(V)$ es vecindad de $f(x)$ y $f|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo. Sea $W = int(V) \cap f^{-1}(intf(V))$, tenemos que W es vecindad abierta de x y $f(W) \subseteq intf(V)$. Como $f|_V$ es homeomorfismo, $f|_W^{f(W)} : W \to f(W)$ es homeomorfismo y, como $f(W)$ es abierto en $intf(V)$, $f(W)$ es abierto en Y.

□

Proposición 3.6. *Todo homeomorfismo local es una función abierta*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo local y A un abierto en X. Sea $x \in A$ y V vecindad abierta de x tal que $f(V)$ es un abierto y $f|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo, tenemos que $f(A \cap V)$ es una vecindad abierta de $f(x)$ con $f(A \cap V) \subseteq f(A)$.

□

Proposición 3.7. *Si $p : \tilde{X} \to X$ es continua y $V \subseteq X$ es un abierto cubierto uniformemente por p, entonces:*

a) Si $A \subseteq X$, entonces $V \cap A$ es cubierto uniformemente por $p|_{p^{-1}(A)}^{A} : p^{-1}(A) \to A$.

b) Si $W \subseteq V$ es abierto en X, entonces W es cubierto uniformemente por p.

Demostración. (a): Sea $A \subseteq X$, Entonces:

I $V \cap A$ es abierto en A.

II Sea $\{S_i\}$ la familia de hojas sobre V tenemos que:

$$p^{-1}(V \cap A) = p^{-1}(V) \cap p^{-1}(A) = \bigcup_i S_i \cap p^{-1}(A)$$

donde cada $S_i \cap p^{-1}(A)$ es abierto en $p^{-1}(A)$ y para cualesquiera dos elementos distintos de la familia $\{S_i \cap p^{-1}(A)\}$ son ajenos.

III $\left(p|_{p^{-1}(A)}^{A}\right)|_{S_i \cap p^{-1}(A)}^{V \cap A}$ es homeomorfismo para cada i.

(b): Lema 2.13 □

Proposición 3.8. *Sean $p : \tilde{X} \to X$ continua, $V \subseteq X$ conexo y p-admisible. Si $\{S_i\}$ es la familia de hojas sobre V, entonces $\{S_i\}$ es la familia de componentes conexas de $p^{-1}(V)$.*

Demostración. Tenemos que $S_i \cong V$, así S_i es conexo para cada i, además $p^{-1}(V) = \coprod_i S_i$, de donde S_i es abierto y cerrado en $p^{-1}(V)$, por tanto S_i es componente conexa de $p^{-1}(V)$.

□

Proposición 3.9. *Toda función cubriente es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $p : \tilde{X} \to X$ una función cubriente. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y V una vecindad abierta y admisible de $p(\tilde{x})$, sea S la hoja sobre V tal que $\tilde{x} \in S$, tenemos que S es un abierto que contiene a $\tilde{x}$ con $p(S)$ abierto y $p|_S^{p(S)}$ homeomorfismo. Por tanto p es homeomorfismo local.

□

Proposición 3.10. *Toda función cubriente es una identificación abierta.*

Demostración. Toda función cubriente es un homeomorfismo local de donde es abierta, además sobreyectiva y así es una identificación abierta.

□

Proposición 3.11. *Si $p : \tilde{X} \to X$ es una función cubriente y $A \subseteq X$, entonces $p|_{p^{-1}(A)}^{A}$ es función cubriente.*

Demostración. Sea $x \in A$, existe V vecindad abierta de x admisible, así $V \cap A$ es un abierto en A que contiene a x, además por la Proposición 3.7.a tenemos que $V \cap A$ es cubierto uniformemente por $p|^{A}_{p^{-1}(A)}$.

□

Proposición 3.12. *Se satisfacen:*

a) La composición de homeomorfismos locales es homeomorfismo local.

b) La restricción de un homeomorfismo local a un abierto del dominio es homeomorfismo local.

Demostración. (a): Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ homeomorfismos locales. Sean $x \in X$ y V una vecindad abierta de x es tal que $f(V)$ es abierto y $f|^{f(V)}_{V}$ es homeomorfismo, U una vecindad abierta de $f(x)$ tal que $g(U)$ es abierto y $g|^{g(U)}_{U}$ es homeomorfismo; tomemos $W = V \cap f^{-1}(U)$, es claro que $x \in W$ y que W es abierto en X, además $f(W)$ es un abierto en U y así $g \circ f(W)$ es un abierto en Z con $g \circ f|^{g\circ f(W)}_{W} = g|^{g\circ f(W)}_{f(W)} \circ f|^{f(W)}_{W}$ homeomorfismo.

(b): Sean $f : X \to Y$ homeomorfismo local y $A \subseteq X$ un abierto, la función inclusión $i : A \to X$ es homeomorfismo local y así $f \circ i = f|_A$ es homeomorfismo local.

□

Lema 3.13. *si* $\left\{p_i : \tilde{X}_i \to X_i\right\}_i \in A$ *es un conjunto de funciones continuas, son equivalentes:*

I $\coprod p_i : \coprod \tilde{X}_i \to \coprod X_i$ *es una función cubriente.*

II p_i *es función cubriente para cada* $i \in A$.

Demostración. Tenemos que para cada $j \in A$, las inclusiones $i_j : \tilde{X}_j \to \coprod \tilde{X}_i$ y $k_j : X_j \to \coprod X_i$ son funciones inyectivas, continuas y abiertas.

$I \Rightarrow II$): Sea $j \in A$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "p_j"'] & \coprod \tilde{X}_j \arrow[d, "\coprod p_j"] \\ X_j \arrow[r, "k_j"'] & \coprod X_j \end{tikzcd}$$

es conmutativo, ya que $i_j|^{i_j(\tilde{X}_j)}$ y $k_j|^{k_j(X_j)}$ son funciones biyectivas, continuas y abiertas; son homeomorfismos, además por la Proposición 3.13 $\coprod p_j|_{i_j(\tilde{X}_j}^{k_j(X_j)}$ es función cubriente, así por el Lema 2.16 tenemos que p_j es función cubriente.

$II \Rightarrow I$): Sea $(\tilde{x}, j) \in \coprod \tilde{X}_i$, existe $V \subseteq X_j$ vecindad de $\tilde{x}$ abierta y p_j admisible. Tomemos$\{U_s\}_{s\in B}$ la familia de p_j hojas sobre V, para cada $s \in B$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_s \arrow[r, "p_j|_{U_s}"] \arrow[d, "i_j"'] & V \arrow[d, "k_j"] \\
\coprod \tilde{X}_j \arrow[r, "(\coprod p_j)|_{i_j(U_s)}^{k_j(V)}"'] & \coprod X_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, además tenemos que i_j, k_j y $p_j|_U^V$ son homeomorfismos, de donde $(\coprod p_j)|_{i_j(U_s)}^{k_j(V)}$ es homeomorfismo. $k_j(V)$ es abierto en $\coprod X_j$ pues k_j es abierta, además $(\coprod p_j)^{-1}(k_j(V)) = \bigcup_{s\in B} i_j(U_s)$ con $i_j(U_s)$ abierto para cada $s \in B$. Por tanto $k_j(V)$ es una vecindad de $(\tilde{x}, j)$ abierta y p_j admisible.

$\square$

3.2. Fibraciones

Definición 3.14. *Diremos que una función continua $f : X \to Y$ tiene la* ***propiedad de levantamiento (único) de homotopía respecto a un espacio topológico*** *Z, si dado un diagrama conmutativo de funciones continuas, donde $h_0(z) = (z, 0)$ para todo $z \in Z$:*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \times I \arrow[r, "H"'] & Y
\end{tikzcd}$$

existe una (única) $\tilde{H} : Z \times I :\to X$ función continua que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

A $\tilde{H}$ le llamaremos ***levantamiento de H que empieza con g****.*

Definición 3.15. *Una función continua $f : X \to Y$ es una* ***fibración (de Hurewicz)*** *si f tiene la propiedad de levantamiento de homotopía respecto a cualquier espacio Y.*

Definición 3.16. *Si X es un espacio topológico entonces para toda $x \in X$, la* ***componente por trayectorias*** *de x en X que denotaremos por $c(x)$ es la unión de todos los subespacios conexos por caminos de X que contengan a x.*

Definición 3.17. *Un espacio topológico X es un* ***espacio totalmente inconexo por trayectorias*** *si, para toda $x \in X$, $c(x) = \{x\}$.*

Proposición 3.18. *Si X es un espacio topológico, son equivalentes:*

a) X es totalmente inconexo por trayectorias.

b) Si $f : I \to X$ es continua, entonces f es constante.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$, para esto veamos que $\neg b) \Rightarrow \neg a)$. Si existe $f : I \to X$ continua no constante entonces existe t en I tal que $f(t) \neq f(0)$, tenemos que $f(t) \in f(I) \subseteq c(x)$ pues $f(I)$ es conexo por trayectorias y así $c(f(0)) \neq \{f(0)\}$.

$b) \Rightarrow a)$, para esto veamos que $\neg a) \Rightarrow \neg b)$. Si X no es totalmente inconexo por trayectorias entonces existen $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$ y $x' \in c(x)$, por tanto existe $f : I \to X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = x'$, ya que $c(x)$ es conexo por caminos, y así f no es constante. $\square$

Ejemplo 3.19.

1. Toda función cubriente es fibración (Teorema 2.23).
2. Si B es totalmente inconexo por trayectorias y $b \in B$ entonces la inclusión $i : \{b\} \to B$ es fibración

   Pues, si conmuta el diagrama de funciones continuas,

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \{b\} \arrow[d, "i"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

Para cada $y \in Y$, tenemos que $H_y : I \to B$ definida por $H_y(t) = H(y,t)$ para cada $t \in I$, es continua, como B es totalmente inconexo por trayectorias tenemos que H_y es constante por la Proposición 3.19, pero

$$H(y,0) = H(h_0(y)) = i(g(y)) = b$$

por tanto $H(y,t) = b$ para todo $t \in I$, así la función constante $\tilde{H} : Y \times I \to \{b\}$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \{b\} \arrow[d, "i"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

3. Si B y F son espacios topológicos, la proyección $p_B : B \times F \to B$ es una fibración, la cual llamaremos fibración trivial. En efecto, si conmuta el diagrama de funciones continuas

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & B \times F \arrow[d, "p_B"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

Sea $\tilde{H} : Y \times I \to B \times F$ la única función continua que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} Y \times I \arrow[rr, "\tilde{H}"] \arrow[dr, "H"'] & & B \times F \arrow[dl, "p_B"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times I \arrow[rr, "\tilde{H}"] \arrow[dr, "p_F \circ g \circ p_Y"'] & & B \times F \arrow[dl, "p_F"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

donde $p_Y : Y \times I \to Y$ y $p_F : B \times F \to F$ son proyecciones. Tenemos que

$$p_B \circ \tilde{H} \circ h_0 = H \circ h_0 = p_B \ \text{ y } \ p_F \circ \tilde{H} \circ h_0 = p_F \circ g \circ P_Y \circ h_0 = P_F \circ g$$

de donde $\tilde{H} h_0 = g$.

Observación 3.20. *Sea $p_B : B \times F \to B$ una fibración trivial. Las fibras de p_B son homeomorfas a F pues*

$$p_B^{-1}(b) = \{(b, x) \in B \times F | x \in F\} = \{b\} \times F \cong F.$$

De esta forma si F no es un espacio discreto, p_B no es una función cubriente.

Definición 3.21. *Se dice que una fibración $p : E \to B$ tiene la* ***propiedad de levantamiento único de trayectorias (ludt)*** *si, el que $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to E$ sean caminos tales que $p\tilde{f} = p\tilde{g}$ y $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, implica que $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

Teorema 3.22. *Si $p : E \to B$ es una fibración, entonces son equivalentes*

a) p tiene la propiedad ludt.

b) Si Y es conexo por caminos y $f, g : Y \to E$ funciones continuas tales que existe $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0) = g(y_0)$ y $pf = pg$, entonces $f = g$.

c) p tiene la propiedad de levantamiento único de homotopía (Definición 3.14).

d) Para todo $b \in B$, $p^{-1}(b)$ es totalmente inconexo por trayectorias.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea $y \in Y$, sea $\lambda : I \to Y$ un camino de y_0 a y tenemos que $f\lambda$ y $g\lambda$ son caminos tales que $f\lambda(0) = f(y_0) = g(y_0) = g\lambda(0)$ y $pf\lambda = pg\lambda$, pues $pf = pg$. Así $f\lambda = g\lambda$, por tanto $f(y) = f\lambda(1) = g\lambda(1) = g(y)$, de donde $f = g$.

$b) \Rightarrow c)$ Consideremos el diagrama de funciónes conmutativas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Supongamos que $\tilde{H}$ y $\tilde{G}$ son levantamientos de H que empiezan con $g : Y \to E$ y sea $(y, t) \in Y \times I$, tenemos que $(y, t) \in \{y\} \times I$, donde $\{y\} \times I$ es conexo por caminos y

i) $p\tilde{H}|_{\{y\}\times I} = H|_{\{y\}\times I} = p\tilde{G}|_{\{y\}\times I}$.

ii) $\tilde{H}|_{\{y\}\times I}(0) = \tilde{H}(y, 0) = \tilde{H}h_0(y) = g(y) = \tilde{G}h_0(y) = \tilde{G}(y, 0) = \tilde{G}|_{\{y\}\times I}(0)$.

De donde $\tilde{H}|_{\{y\}\times I} = \tilde{G}|_{\{y\}\times I}$ y así $\tilde{G}(y, t) = \tilde{H}(y, t)$ para todo $y \in Y$ y para todo $t \in I$, por tanto $\tilde{G} = \tilde{H}$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Sea $b \in B$ y $f : I \to p^{-1}(b) \subseteq E$ función continua tomemos $e = f(0)$, notar que $p(e) = b$, consideremos la homotopía $H : \{e\} \times I \to B$ tal que $H(e, t) = b$ para todo $t \in I$ y la inclusión $i : \{e\} \to E$, tenemos en siguiente diagrama conmutativo de funciones continuas

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \{e\} \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Sean $\tilde{H} : \{e\} \times I \to E$ definida por $\tilde{H}(e, t) = f(t)$ y $\tilde{G} : \{e\} \times I \to E$ definida por $\tilde{G}(e, t) = e$, tenemos que tanto $\tilde{G}$ como $\tilde{H}$ son levantamientos de H que empiezan con i, de donde $\tilde{H} = \tilde{G}$ y así $f(t) = \tilde{H}(e, t) = \tilde{G}(e, t) = e$ para todo $t \in I$, esto es, f es constante y por tanto $p^{-1}(b)$ es totalmente inconexo por caminos.

d) $\Rightarrow$ *a*) para esto veamos que $\neg a) \Rightarrow \neg d)$. Sean $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to E$ caminos tales que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, $p\tilde{f} = p\tilde{g}$ y existe $t_0 \in I$ tal que $\tilde{f}(t_0) \neq \tilde{g}(t_0)$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_0 = 1$, como $p\tilde{f} = p\tilde{g}$, sean $H : p\tilde{f}^{-1} * p\tilde{g} \simeq C_b\ \dot{I}$ y $b = p\tilde{f}(1)$ tenemos el siguiente diagrama de funciones continuas

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\tilde{f}^{-1}\tilde{g}"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

para el cual existe $\tilde{H}$ levantamiento de H que empieza con $\tilde{f}^{-1}\tilde{g}$, como $H((\dot{I}\times I)\cup(I\times\{1\}) = \{b\}$ tenemos que $\lambda : I \to p^{-1}(b)$ definida por:

$$\lambda(s) = \begin{cases} \tilde{H}(0,3s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \tilde{H}(3s-1,1) & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \tilde{H}(1,3-3s) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es camino en $p^{-1}(b)$ tal que $\lambda(0) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{f}^{-1}\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1) \neq \tilde{g}(1) = \tilde{f}^{-1}\tilde{g}(1) = \tilde{H}(1,0) = \lambda(1)$, esto es, λ es un camino que une dos puntos distintos de $p^{-1}(b)$ con lo que $p^{-1}(b)$ no es totalmente inconexo por caminos. $\square$

Observación 3.23. *Cada función cubriente $p : \tilde{X} \to X$ es una fibración con ludt. Cada fibra $p^{-1}(x)$ es un espacio totalmente inconexo por trayectorias, pues es discreto (Lema 2.10), por lo tanto todos los teoremas sobre fibraciones con ludt son válidos también para funciones cubrientes y, desde luego, tienen la propiedad de levantamiento único de homotopía respecto a cualquier espacio topológico (lo que es consecuencia del Teorema 3.22).*

La afirmación recíproca en la observación 3.23 no es válida. El siguiente ejemplo muestra una fibración con ludt que no es función cubriente.

Ejemplo 3.24. Sea E el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de dos circunferencias concentricas con ecuaciones en cordenadas polares $r = 1$ y $r = 2$ y una espiral infinita T que tiende a cada una de las dos circunferencias (con equaciones en coordenadas polares del tipo $r(\theta) = (3 + \frac{\theta}{|\theta|+1})/2$, siendo $\theta \in \mathbb{R}$ un ángulo), la cual contiene a los puntos de la forma $(1+\frac{1}{n},0)$ y $(2-\frac{1}{n},0)$ para cada $n = 2,3,...$ (Figura 3.1), y consideremos la función $p : E \to S^1$ dada por $p(x) = \frac{x}{|x|}$ donde $|x|$ representa la norma de x en $\mathbb{R}^2$. Es relevante notar que la restricción de p en la espiral T es una función cubriente equivalente a la función *exp*. Es fácil ver que p es una fibración localmente

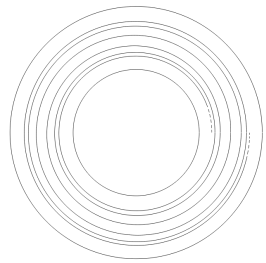

Figura 3.1: Espacio E

tribial, esto es, para cada $x \in \mathbb{S}^1$ existe una vecindad abierta U de x en $\mathbb{S}^1$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p|_{p-1(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd} .$$

donde F es homeomorfo al subespacio del intervalo $[0,1]$ formado por los puntos $\frac{1}{n}$ y $1-\frac{1}{n}$ para cada $n = 1, 2, ...,$. Es claro que F es totalmente inconexo, pero no discreto, pues $\{0\}$ y $\{1\}$ no son abiertos en F

Por consiguiente, es una fibración [6, chapter II, Theorem 13, Corollary 14]. Además p tiene la propiedad ludt ya que cada fibra $p^{-1}(x)$ (homeomorfa a F) es totalmente inconexa por trayectorias (ver teorema 3.23 d)), pero p no es una función cubriente pues $p^{-1}(x)$ no es un espacio discreto. Se puede notar que E, en este ejemplo, es conexo y compacto.

Cabe mencionar que el conjunto de las funciónes cubrientes coincide con el de las fibraciones localmente triviales con fibra discreta.

Corolario 3.25. *Si $p : E \to B$ es una fibración con levantamiento único de trayectorias y $f, g : I \to E$ son trayectorias con $f(0) = g(0)$ y $H : pf \simeq pg$ rel $\dot{I}$ entonces $\tilde{H} : f \simeq g$ rel $\dot{I}$.*

Demostración. Tenemos que $H : I \times I \to B$ es función continua tal que para todo $t \in I$:

i. $H(t, 0) = pf(t)$ y $H(t, 1) = pg(t)$

ii. $H(0, t) = pf(0) = pg(0)$ y $H(1, t) = pf(1) = pg(1)$

Sea $\tilde{H}$ función continua tal que hace conmutativo el diagrama de funciones continuas

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos que $H(\{0\} \times I) = \{pf(0)\}$, así $\tilde{H}(\{0\} \times I) \subseteq p^{-1}(pf(0))$, como $p^{-1}(pf(0))$ es totalmente inconexo por trayectorias tenemos que $\tilde{H}(0,t) = f(0) = g(0)$ para todo $t \in I$, pues $\tilde{H}(0,0) = \tilde{H}h_0(0) = f(0)$. Analogamente, ya que $H(\{1\} \times I) = \{pf(1)\}$, $\tilde{H}(\{1\} \times I) \subseteq H^{-1}(pf(1))$ y como en el caso anterior, tenemos que $\tilde{H}(1,t) = f(1)$ para todo $t \in I$.

Sea $h_1 : I \to I \times I$ definida por $h_1(t) = (t,1)$ para todo $t \in I$, tenemos que $p\tilde{H}h_1 = Hh_1 = pg$, así por la propiedad ludt de p tenemos que $\tilde{H}h_1 = g$ de donde $\tilde{H}(t,1) = g(t)$. Como $p(\tilde{H}(t,0)) = H(t,0) = pf(t)$, $\tilde{H}(t,0) = f(t)$ para todo $t \in I$, además $\tilde{H}(1,t) = f(1) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{H}h_1(1) = g(1)$. Por tanto $\tilde{H} : f \simeq g \ rel \ \dot{I}$.

□

Lema 3.26. *La composición de fibraciones (con propiedad ludt) es fibración (con propiedad ludt).*

Demostración. Supongamos que $p : E \to B$ y $p' : B \to B'$ son fibraciones, y que el siguiente diagrama de funciones continuas es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \arrow[d, "p'"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] & B' \end{tikzcd}$$

Por ser p' fibración existe $\tilde{H}' : Y \times I \to B$ tal que: $\tilde{H}'h_0 = pg$ y $p'\tilde{H}' = H$. Así por ser p una fibración existe $\tilde{H} : Y \times I \to E$ tal que $\tilde{H}h_0 = g$ y $p\tilde{H} = \tilde{H}'$, así $\tilde{H}$ es tal que $\tilde{H}h_0 = g$ y $p'p\tilde{H} = H$. Por tanto $p' \circ p$ es fibración. Si además p y p' tienen la propiedad de levantamiento único de trayectorias y $\tilde{G} : Y \times I \to E$ es función continua tal que $p'p\tilde{G} = H$ y $\tilde{G}h_0 = g$ entonces como p' tiene la propiedad ludt $p\tilde{G} = \tilde{H}'$ y así $\tilde{G} = \tilde{H}$ pues p tiene la propiedad ludt. □

Lema 3.27. *Si $p : E \to B$ es una fibración (con propidedad ludt) y C es una componente por trayectorias de E. Entonces $p|_C^{p(C)}$ es fibración (con propiedad ludt) y $p(C)$ es componente por trayectorias de B*

Demostración. Sea C' la componente por trayectorias de B que contiene a $p(C)$ tenemos que; sean $b \in p(C)$, $b' \in C'$ y $f : I \to C'$ camino de b a b' entonces si $x \in p^{-1}(b) \cap C$, existe $\tilde{f} : \{x\} \times I \to E$ función continua que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\{x\} \times I \arrow[r, "f\pi_I"'] \arrow[ur, "\tilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

Donde $i : \{x\} \to E$ es inclusión y $\pi_I : \{x\} \times I \to I$ es definida por $\pi_I(x,t) = t$ para cada $t \in I$. Como $\tilde{f}(x,0) = i(x) = x \in C$ y $\{x\} \times I$ es conexo por caminos, tenemos que $\tilde{f}(\{x\} \times I) \subseteq C$; pero $p\tilde{f}(x,1) = f\pi_I(x,1) = f(1) = b'$ de donde $b' \in p(C)$ y por tanto $p(C) = C'$.

Supongamos que el siguiente diagrama de funciones continuas es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[d, "p|_C^{p(C)}"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & p(C)
\end{tikzcd}$$

entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p|_C^{p(C)}"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & p(C) \arrow[r, "j"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde i y j son inclusiones. Así existe $\tilde{H}$ función continua tal que $p\tilde{H} = jH$ y $\tilde{H}h_0 = ig$, de donde para todo $y \in Y$, $\tilde{H}(y,0) = g(y) \in C$, pero C es componente por trayectorias de E y así $\tilde{H}(\{y\} \times I) \subseteq C$ para todo $y \in Y$, por tanto $\tilde{H}(Y \times I) \subseteq C$, esto es, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[d, "p|_C^{p(C)}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}|_{Y\times I}^C"] & p(C) \end{tikzcd}$$

Si además p tiene la propiedad ludt y $\tilde{G} : Y \times I \to C$ es levantamiento de H que empieza con g entonces $i\tilde{G}h_0 = ig$ y $pi\tilde{G} = jH$ de donde $i\tilde{H}|_{Y\times I}^C = \tilde{H} = i\tilde{G}$ y así $\tilde{G} = \tilde{H}|_{Y\times I}^C$.

□

Teorema 3.28. *Si $p : E \to B$ es continua y E es localmente conexo por caminos, entonces son equivalentes*

a) p es fibración (con la propiedad ludt).

b) Para cada componente por trayectorias C de E, $p|_C^{p(C)}$ es fibración (con la propiedad ludt) y $p(C)$ es componente de B.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Lema 3.27.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que el siguiente diagrama de funciones continuas es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Puesto que $E = \bigcup_{j\in J} C_j$, unión disjunta, con $\{C_j | j \in J\}$ la familia de componentes por trayectorias de E, entonces $Y = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(C_j)$ y $Y \times I = \bigcup_{j\in J}(g^{-1}(C_j) \times I)$. Si $y \in g^{-1}C_j$, entonces $H(y,0) = Hh_0(y) = pg(y)$ pero $g(y) \in C_j$ y $p(C_j)$ componente conexa por trayectorias de B, por tanto

$H(\{y\} \times I) \subseteq pC_j$ y así para cada $j \in J$ existe $\tilde{H}_j$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(C_j) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C_j \arrow[d, "p"] \\ g^{-1}(C_j) \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}_j"'] & p(C_j) \end{tikzcd}$$

Sea $\tilde{H} : Y \times I \to E$ la función definida por $\tilde{H}(y,t) = \tilde{H}_j(y,t)$ con $y \in g^{-1}(C_j)$, entonces $\tilde{H}$ es un levantamiento de H que empieza con g. Ahora si para toda $j \in J$, $p|_{C_j}^{p(C_j)}$ tiene la propiedad ludt y $\tilde{G}$ es un levantamiento de H que empieza con g entonces para todo $j \in J$ tenemos que $\tilde{G}_j = \tilde{G}|_{g^{-1}(C_j)\times I}^{C_j}$ es tal que $\tilde{G}_j = \tilde{H}_j$. De donde $\tilde{G} = \tilde{H}$.

$\square$

3.3. Fibraciones y grupo fundamental

Lema 3.29. *Si $p : E \to B$ es una fibración con la propiedad ludt, $b \in B$ y $x \in p^{-1}(b)$. Entonces $p_* : \Pi_1(E,x) \to \Pi_1(B,b)$ es monomorfismo.*

Demostración. Si $[f] \in \Pi_1(E,x)$ es tal que $p_*[f] = [pf] = [C_b] = [pC_x]$, entonces $pf \simeq pC_x$ *rel* $\dot{I}$ y $f(0) = x = C_x(0)$, por el Corolario 3.25 tenemos que $f \simeq C_x$ *rel* $\dot{I}$, de donde $[f] = [C_x]$ y así p_* es monomorfismo.

$\square$

Lema 3.30. *Si $f : X \to Y$ es una función continua y $\sigma : I \to X$ es una trayectoria con $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1$, entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "{[\sigma]^*}"'] & \Pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "{[f\sigma]^*}"] \\ \Pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*"'] & \Pi_1(Y,f(x_1)) \end{tikzcd}$$

Donde $[\sigma]^*[\lambda] = [\sigma^{-1} * \lambda * \sigma]$ *y* $[f\sigma]^*\left[\tilde{\lambda}\right] = \left[f\sigma^{-1} * \tilde{\lambda} * f\sigma\right]$

Demostración. Sea $[\lambda] \in \Pi_1(X, x_0)$ tenemos que $[f\sigma]^* f_* [\lambda] = [f\sigma]^* [f\lambda] = [f\sigma^{-1} * f\lambda * f\sigma] = f_* [\sigma]^* [\lambda]$

□

Lema 3.31. *Si $f : X \to Y$ es una función continua, X es conexo por caminos, $y \in Y$ y $\{x_0, x_1\} \subseteq f^{-1}(y)$, entonces $f_*\Pi_1(X, x_0)$ y $f_*\Pi_1(X, x_1)$ son subgrupos conjugados de $\Pi_1(Y, y)$*

Demostración. Sea $\sigma : I \to X$ un camino de x_0 a x_1, tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "{[\sigma]^*}"'] & \Pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "{[f\sigma]^*}"] \\ \Pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*"'] & \Pi_1(Y, f(x_1)) \end{tikzcd}$$

Así $[f\sigma]^* f_*\Pi_1(X, x_0) = f_* [\sigma]^* \Pi_1(X, x_0) = f_*\Pi_1(X, x_1)$, (ya que $[\sigma]^* = \Gamma_\sigma$ que, por el Lema 1.25, es isomorfismo de grupos), de donde

$$f_*\Pi_1(X, x_1) = \left[f\sigma^{-1}\right] f_*\Pi(X, x_0) [f\sigma]$$

□

Teorema 3.32. *Si $p : E \to B$ es una fibración con propiedad ludt y E es conexo por caminos, entonces para todo $b \in B$, $\{p_*\Pi_1(E, x) | x \in E\}$ es una clase de conjugación de subgrupos de $\Pi_1(B, b)$.*

Demostración. Sean $b \in B$, $\tilde{b}_0 \in p^{-1}(b)$ y C la clase de conjugación de $p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$ en $\Pi_1(B, b)$ por el Lema 3.31 tenemos que

$$\left\{p_*\Pi_1(E, \tilde{b}) | \tilde{b} \in p^{-1}(b)\right\} \subseteq C$$

Sea $[\sigma] \in \Pi_1(B, b)$ consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\left\{\tilde{b}_0\right\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\left\{\tilde{b}_0\right\} \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

donde $H(\tilde{b}_0, t) = \sigma(t)$ para cada $t \in I$ y definamos $\tilde{\sigma} : I \to E$ por $\tilde{\sigma}(t) = \tilde{H}(\tilde{b}_0, t)$, tenemos que $\tilde{\sigma}$ es tal que $p\tilde{\sigma} = \sigma$, $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}(\tilde{b}_0, 0) = i(\tilde{b}_0)$. Sea $\tilde{b}_1 = \tilde{\sigma}(1)$ tenemos que $p(\tilde{b}_1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = b$, de donde $\tilde{b}_1 \in p^{-1}(b)$, así tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(E, \tilde{b}_0) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "{[\tilde{\sigma}]^*}"'] & \Pi_1(B, b) \arrow[d, "{[p\tilde{\sigma}]^* = [\sigma]^*}"] \\
\Pi_1(E, \tilde{b}_1) \arrow[r, "p_*"'] & \Pi_1(B, b)
\end{tikzcd}$$

Por tanto

$$p_* \left[\tilde{\sigma}\right]^* \Pi_1(E, \tilde{b}_0) = p_*\Pi(E, \tilde{b}_1) = \left[\sigma\right]^* p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) = \left[\sigma\right]^{-1} p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) \left[\sigma\right]$$

de donde $\left[\sigma\right]^{-1} p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) \left[\sigma\right] = p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_1)$, con lo que

$$C \subseteq \left\{ p_*\Pi_1(E, \tilde{b}) | \tilde{b} \in p^{-1}(b) \right\}.$$

$\square$

Definición 3.33. *Si $p : E \to B$ es una fibración con la propiedad ludt y $\sigma : I \to B$ es un camino en B tal que $\sigma(0) = b_0$, $\sigma(1) = b_1$. Definimos $T_{[\sigma]} : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_1)$ de la siguiente manera:*

Sea $\tilde{H}$ la única función continua tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(b_0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
p^{-1}(b_0) \times I \arrow[r, "\sigma\pi_I"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde π_I es la proyección en I. Para todo $x \in p^{-1}(b_0)$, $p\tilde{H}(x,1) = \sigma\pi_I(x,1) = \sigma(1) = b_1$. Así $\tilde{H}(p^{-1}(b_0) \times \{1\}) \subseteq p^{-1}(b_1)$, de donde $\tilde{H}|_{p^{-1}(b_0)\times I}^{p^{-1}(b_1}$ está bien definida. Sea $h_1 : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0) \times I$ definida por $h_1(x) = (x, 1)$ para cada $x \in p^{-1}(b_0)$, definimos

$$T_{[\sigma]} = \tilde{H}|_{p^{-1}(b_0)\times I}^{p^{-1}(b_1} h_1$$

Tenemos que $T_{[\sigma]}(x) = \tilde{H}(x,1)$ para cada $x \in p^{-1}(b_0)$. Notar que, si $x \in p^{-1}(b_0)$, entonces $\tilde{H}|_{\{x\}\times I}$ es un levantamiento de σ que empieza en x y termina en $\tilde{H}(x,1) = T_{[\sigma]}(x)$. Por tanto podemos describir la acción de $T_{[\sigma]}$ de la siguiente manera: si $x \in p^{-1}(b_0)$, tómese un levantamiento $\tilde{\sigma}$ de σ que empiece en x; entonces $T_{[\sigma]}(x) = \tilde{\sigma}(1)$; a $T_{[\sigma]}$ se le llama la ***traslación de la fibra a lo largo de*** *$[\sigma]$; veremos que $T_{[\sigma]}$ sólo depende de $[\sigma]$.*

Lema 3.34. *Si $p : E \to B$ es fibración con la propiedad ludt y para todo $\sigma : I \to B$ camino, $T_{[\sigma]}$ es la traslación a lo largo de $[\sigma]$, entonces:*

a) Si $\sigma \simeq \sigma'$ rel $\dot{I}$, entonces $T_{[\sigma]} = T_{[\sigma']}$.

b) $T_{[\sigma*\sigma']} = T_{[\sigma']} \circ T_{[\sigma]}$,

c) $T_{[C_b]} = I_{p^{-1}(b)}$, para cada $b \in B$.

Demostración. a): Sean $b_0 = \sigma(0)$, $b_1 = \sigma(1)$, $\tilde{b} \in p^{-1}(b_0)$, $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}'$ levantamientos de σ y σ' respectivamente que comienzan en $\tilde{b}$, por el Corolario 3.25 tenemos que $\tilde{\sigma} \simeq \tilde{\sigma}'$ *rel* $\dot{I}$ y por tanto $T_{[\sigma]}(\tilde{b}) = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1) = T_{[\sigma']}(\tilde{b})$.

b): Sean $b_0 = \sigma(0)$, $b_1 = \sigma(1) = \sigma'(0)$, $b_2 = \sigma'(1)$. Si $\tilde{b} \in p^{-1}(b_0)$, sea $\tilde{\sigma}'$ un levantamiento de σ' que comienza en $\tilde{\sigma}(1)$, con $\tilde{\sigma}$ levantamiento de σ que comienza en $\tilde{b}$, entonces $\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma}'$ es levantamiento de $\sigma * \sigma'$ que comienza en $\tilde{b}$, por tanto

$$T_{[\sigma*\sigma']}(\tilde{b}) = \tilde{\sigma} * \tilde{\sigma}'(1) = \tilde{\sigma}'(1) = T_{[\sigma']}(\tilde{\sigma}'(1)) = T_{[\sigma']} \circ T_{[\sigma]}(\tilde{b})$$

c): Si $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$, entonces $C_{\tilde{b}}$ es un levantamiento de C_b que comienza en $\tilde{b}$ y así $T_{[C_b]}(\tilde{b}) = C_{\tilde{b}}(1) = \tilde{b}$. □

Definición 3.35. *Sea B un espacio topológico, llamaremos **grupoide fundamental** de B a la categoría con objetos B, con morfismos $\{[\sigma] \,|\sigma$ es camino en $B\}$, la función dominio $Dom\,[\sigma] = \sigma(0)$, la función codominio $Cod\,[\sigma] = \sigma(1)$, sean σ_1 y σ_2 caminos en B tales que $Dom\,[\sigma_2] = Cod\,[\sigma_1]$ la regla de composición dada por $\circ([\sigma_1], [\sigma_2]) = [\sigma_1 * \sigma_2]$. Denotaremos por $\Pi(B)$ al grupoide fundamental de B.*

Teorema 3.36. *Sea $p : E \to B$ una fibración, K la subcategoría plena de la categoria de espacios topológicos $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son las fibras de p, esto es, los objetos de K son los espacios topológicos $p^{-1}(b)$ con $x \in B$, los morfismos de K, denotados por $Mor(K)$, son las funciones continuas entre fibras de p. $T : Mor\Pi(B) \to MorK$, donde tal que $T\,[\sigma] = T_{[\sigma]}$ y $T : Ob\Pi(B) \to ObK$ definido por$T(b) = p^{-1}(b)$ es funtor.*

Demostración. Por la parte (a) del Teorema 3.34 tenemos que T está bien definida, por la parte (b) tenemos que conserva composiciones y conserva identidades por la parte (c). □

Corolario 3.37. *Si $p : E \to B$ es fibración con propiedad ludt y B es conexo por caminos, entonces para todo $b, b' \in B$, $p^{-1}(b) \cong p^{-1}(b')$.*

Demostración. Sea $\sigma : I \to B$ un camino de b a b', Así tenemos que $T_{[\sigma]} : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b')$ es función continua con inversa continua $T_{[\sigma^{-1}]} : p^{-1}(b') \to p^{-1}(b)$ pues $\sigma * \sigma^{-1} \simeq C_b \; rel \; \dot{I}$ y T preserva identidades, por tanto $p^{-1}(b) \cong p^{-1}(b')$.

□

Definición 3.38. *Si $p : E \to B$ es fibración con propiedad de ludt, la **multiplicidad de una fibración** p **o el número de hojas de** p es la cardinalidad de una de sus fribras.*

Teorema 3.39. *Sea $p : E \to B$ es fibración con propiedad de ludt y E conexo por caminos. Si $b_0 = p(x)$, entonces la multiplicidad de p coincide con el índice de $p_*(\Pi_1(E, x))$ en $\Pi_1(B, b_0)$.*

Demostración. Sea D el conjunto de clases laterales derechas de $p_*(\Pi_1(E, x))$ en $\Pi_1(B, b_0)$ y sea $g : p^{-1}(b_0) \to D$ definida por $g(\tilde{b}) = p_*\Pi_1(E, x)\,[p\tilde{\sigma}]$, donde $\tilde{\sigma} : I \to E$ es camino de x a $\tilde{b}$. Notar que si $\tilde{\lambda}$ es camino de x a $\tilde{b}$ en E entonces $(p_*[\tilde{\sigma}])(p_*[\lambda^{-1}]) = p_*[\tilde{\sigma} * \tilde{\lambda}^{-1}] \in p_*\Pi_1(E, x)$, así $p_*\Pi_1(E, x)[p\tilde{\sigma}] =$

$p_*\Pi_1(E,x)[p\tilde{\lambda}]$, de donde g está bien definida. Sea $f : D \to p^{-1}(b_0)$ definida por $f(p_*\Pi_1(E,x)\,[\sigma]) = T_{[\sigma]}(x)$, si $p_*\Pi_1(E,x)\,[\sigma] = p_*\Pi_1(E,x)\,[\lambda]$ entonces $[\sigma * \lambda^{-1}] \in p_*\Pi_(E,x)$, existe $\tilde{\theta}$ levantamiento de $\sigma * \lambda^{-1}$ tal que $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(1) = x$, de donde

$$T_{[\sigma*\lambda^{-1}]}(x) = T_{[\lambda^{-1}]} \circ T_{[\sigma]}(x) = \tilde{\theta}(1) = x$$

y así $T_{[\sigma]}(x) = T_{[\lambda]}(x)$, con lo que f está bien definida.

Sea $\tilde{b} \in p^{-1}(b_0)$ entonces

$$fg(\tilde{b}) = f(p_*\Pi_1(E,x)\,[p\tilde{\sigma}]) = T_{[p\tilde{\sigma}]}(x) = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{b}$$

ya que $\tilde{\sigma}(0) = x$ y $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{b}$, de donde $fg = I_{p^{-1}(b_0)}$. Por otro lado tenemos que

$$gf(p_*\Pi_1(E,x)\,[\sigma]) = g(T_{[\sigma]}(x)) = g(\tilde{\sigma}(1)) = p_*\Pi_1(E,x)\,[p\tilde{\sigma}] = p_*\Pi_1(E,x)\,[\sigma]$$

ya que $p\tilde{\sigma} = \sigma$ y $\tilde{\sigma}(0) = x$, por tanto $gf = I_D$. Así f es biyección de D a $p^{-1}(b_0)$.

□

Definición 3.40. *Una fibración $p : E \to B$ con propiedad de ludt es una **fibración regular** si dado un camino cerrado σ en B, o bien todos los levantamientos de σ son caminos cerrados o ninguno lo es.*

Teorema 3.41. *Si $p : E \to B$ es una fibración con propiedad de ludt y E es conexo por trayectorias, entonces son equivalentes*

a) p es regular;

b) Para todo $b \in B$, para cualesquiera $\tilde{b}, \tilde{b}' \in p^{-1}(b)$, $p_*\Pi_1(E,\tilde{b}) = p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')$;

c) Para todo $b \in B$, para cualquier $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$, $p_*\Pi_1(E,\tilde{b})$ es subgrupo normal de $\Pi_1(B,b)$;

d) Existe $x \in E$ tal que $p_*\Pi_1(E,x)$ es subgrupo normal de $\Pi_1(B,p(x))$;

e) Existe $b_0 \in B$ tal que: Si σ es un camino cerrado en b_0 en B, entonces o todos los levantamientos de σ son caminos cerrados o ninguno lo es.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sean $b \in B$, $\tilde{b}, \tilde{b}' \in p^{-1}(b)$ y $[\sigma] \in p_*\Pi_1(E,\tilde{b})$, existe $[\tilde{\sigma}] \in \Pi_1(E,\tilde{b})$ tal que $p_*\,[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$. Como $\tilde{b}' \in p^{-1}(b)$ existe $\tilde{\sigma}'$ levantamiento de σ tal que $\tilde{\sigma}'(0) = \tilde{b}'$ y como p es regular, $\tilde{\sigma}'$ es cerrado en $\tilde{b}'$ de donde $[\sigma] = [p\tilde{\sigma}'] \in p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')$, así $p_*\Pi_1(E,\tilde{b}) \subseteq p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')$. De forma similar tenemos que $p_*\Pi_1(E,\tilde{b}) \supseteq p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')$

$b) \Rightarrow c)$ Por el Teorema 3.32 tenemos que

$$\left\{p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')|\tilde{b}' \in p^{-1}(b)\right\} = \left\{[\sigma]\,\Pi_1(E,\tilde{b})\,[\sigma]^{-1} \mid [\sigma] \in p_*\Pi_1(B,b)\right\}$$

y por $b)$ tenemos que $\left\{p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')|\tilde{b}' \in p^{-1}(b)\right\} = \left\{p_*\Pi_1(E,\tilde{b})\right\}$, por tanto $p_*\Pi_1(E,\tilde{b})$ es es subgrupo normal de $\Pi_1(B,b)$.

$c) \Rightarrow d)$ Es claro.

$d) \Rightarrow e)$ Sea $b_0 = p(x)$, por el Teorema 3.32, para todo $\tilde{b} \in p^{-1}(b_0)$ tenemos que $p_*\Pi_1(E,\tilde{b})$ es subgrupo normal de $p_*(B,b_0)$. Si σ es un camino cerrado en b_0 de B y existe $\tilde{\sigma}$ levantamiento de σ tal que $\tilde{\sigma}$ es camino cerrado en $\tilde{b}$, así $[\sigma] = [p\tilde{\sigma}] \in p_*\Pi_1(E,\tilde{b})$. Por tanto sea $\tilde{\lambda}$ un levantamiento de σ tal que $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{b}'$ entonces $[p\tilde{\lambda}] = [\sigma] \in p_*\Pi_1(E,\tilde{b}) = p_*\Pi_1(E,\tilde{b}')$ y por tanto $[\tilde{\lambda}] \in \Pi_1(E,\tilde{b}')$, así $\tilde{\lambda}$ es camino cerrado.

$e) \Rightarrow a)$ para esto veamos que $\neg a) \Rightarrow \neg e)$ Sean σ un camino cerrado en b_0 en B, $\tilde{\sigma}$ un levantamiento de σ con $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{b}_0 = \tilde{\sigma}(1)$, $\tilde{\lambda}$ un levantamiento de σ con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{b}_1 \neq \tilde{b}_2 = \tilde{\lambda}(1)$. Tomemos $b \in B$ y θ camino en B tal que $\theta(0) = b_0$, $\theta(1) = b$, entonces existen $\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ levantamientos de θ tales que $\tilde{\theta}_j(0) = \tilde{b}_j$ para $j = 0, 1, 2$; Como p tiene la propiedad de ludt tenemos que $\tilde{\theta}_1(1) \neq \tilde{\theta}_2(1)$ de donde $\tilde{\theta}_0^{-1} * \tilde{\sigma} * \tilde{\theta}_0$ y $\tilde{\theta}_1^{-1} * \tilde{\lambda} * \tilde{\theta}_2$ son levantamientos de $\theta^{-1} * \sigma * \theta$ pero el primero es un camino cerrado y el segundo no lo es.

□

3.4. Teorema de levantamiento

Definición 3.42. *Un cuadro conmutativo de funciones continuas*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un ***cuadrado cartesiano (diagrama de Pull-back, producto fibrado)*** *Si dadas $\alpha : A \to X$, $\beta : A \to Z$ funciones continuas tales que $f\alpha = g\beta$ entonces existe una única función continua $\gamma : A \to W$ tal que $g'\gamma = \alpha$ y $f'\gamma = \beta$, o sea, que hace conmutativo el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Lema 3.43. *Si el siguiente diagrama es un cuadrado cartesiano*

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad (I)
$$

Entonces $\{f', g'\}$ *es monofuente (Definición 1.34).*

Demostración. Supongamos que el diagrama (I) es un cuadrado cartesiano, sea τ una topología sobre W que hace continuas a f' y g', por definición de cuadrado cartesiano existe una única γ que hace conmutar el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(W, \tau_W) \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& (W, \tau) \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[ur, "g'"] \arrow[dl, "f'"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Sean $w \in W$ y $w' = \gamma(w)$ tenemos que $g'(w') = g'(\gamma(w) = g'(w)$ y $f'(w') = f'(\gamma(w)) = f'(w)$. Tomemos $\alpha : \{w, w'\} \to X$ la función constante $g'(w)$ y $\beta : \{w, w'\} \to Z$ la función constante $f'(w)$, tenemos que $f\alpha(w) = g\beta(w)$ y $f\alpha(w') = g\beta(w')$, por tanto existe una única γ' tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& \{w,w'\} \arrow[ul, "\gamma'"'] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Pero tanto C_w como $C_{w'}$, las funciones constantes de $\{w, w'\}$ a W en w y w' respectivamente, en el lugar de γ', hacen conmutativo el diagrama anterior, así que $C_w = C_{w'}$ y $w = w'$. Lo anterior implica que $\gamma = I_W$, y por tanto $\tau_W \subseteq \tau$, esto es $\{f', g'\}$ es fuente de funciones.

Sean $\sigma_1, \sigma_2 : A \to W$ funciones continuas tales que $f'\sigma_1 = f'\sigma_2$ y $g'\sigma_1 = g'\sigma_2$ tenemos que el siguiente cuadro es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[ul, "\sigma_1"', "\sigma_2"] \arrow[ur, "g'\sigma_1"'] \arrow[dl, "f'\sigma_2"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

pues $fg'\sigma_1 = fg'\sigma_2 = gf'\sigma_2$ de donde $\sigma_1 = \sigma_2$, por tanto $\{f', g'\}$ es monofuente.

$\square$

Lema 3.44. *Si $f : X \to Y$ y $g : Z \to Y$ son funciones continuas, $W = \{(x, y) \in X \times Z | f(x) = g(y)\}$ y f' y g' son las restricciones a W, de las proyecciones, entonces:*

a) El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es cartesiano

b) Si

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano, entonces existe un único homeomorfismo $h : W' \to W$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W' \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "g''"'] \arrow[dl, "f''"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. a) Por la definición de W el cuadro de a) es conmutativo, sean $\alpha : A \to X$ y $\beta : A \to Z$ funciones continuas tales que $f\alpha = g\beta$, tomemos $\bar{\gamma} : A \to X \times Z$ la única función continua tal que $\pi_X\bar{\gamma} = \alpha$ y $\pi_Z\bar{\gamma} = \beta$ se tiene que $\bar{\gamma}(A) \subseteq W$, pues si $a \in A$, tenemos que $f\pi_X\bar{\gamma}(a) = f\alpha(a) = g\beta(a) = \pi_Z\bar{\gamma}(a)$, de donde $\gamma = \bar{\gamma}|_A^W$ es tal que $g'\gamma = \alpha$ y $f'\gamma = \beta$. Si $\gamma' : A \to W$ es una función continua tal que $g'\gamma' = \alpha$ y $f'\gamma' = \beta$ como $\{f', g'\}$ es monofuente, $\gamma' = \gamma$. Por tanto el cuadrado en a) es cartesiano.

b) Por la definición de cuadrado cartesiano existen únicas $h : W \to W'$ y $h' : W' \to W$ funciones continuas tales que $g''h = g'$, $f''h = f'$, $g'h' = g''$ y $f'h' = f''$, de donde $hh' = I_{W'}$ y $h'h = I_W$ pues se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr, "g''"] \arrow[dd, "f''"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W' \arrow[ul, "hh'"', "I_{W'}"] \arrow[ur, "g''"'] \arrow[dl, "f''"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f''"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W \arrow[ul, "h'h"', "I_W"] \arrow[ur, "g'"'] \arrow[dl, "f'"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Así h es el homeomorfismo, la unicidad es dada por la propiedad del cuadrado cartesiano.

$\square$

Lema 3.45. *Si $p : E \to B$ es una fibración (con propiedad de ludt) y el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano, entonces p' es fibración (con propiedad de ludt).

Demostración. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & Z \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

tenemos que existen $\tilde{H}$ función continua y única $\tilde{G}$ función continua tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g'f"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "gH"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "p'"'] & & E \arrow[dd, "p"] \\
& Y \times I \arrow[ul, "\tilde{G}"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[dl, "H"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

de donde $g'\tilde{G}h_0 = \tilde{H}h_0 = g'f$ y $p'\tilde{G}h_0 = Hh_0 = p'f$, como $\{p', g'\}$ es monofuente tenemos que $\tilde{G}h_0 = f$, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & W \arrow[d, "p'"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por tanto p' es fibración. Si p tiene la propiedad de ludt, tenemos que tanto $\tilde{H}$ como $\tilde{G}$ son únicas funciones que hacen conmutativos los diagramas, por tanto p' tiene la propiedad de ludt.

□

Lema 3.46. *Si $p : E \to B$ es fibración, $f : Y \to B$ es una función continua, Y es contraible y $f(Y) \cap p(E) \neq \emptyset$, entonces existe $\tilde{f} : Y \to E$ función continua tal que $p\tilde{f} = f$.*

Demostración. Como $f(Y) \cap p(E) \neq \emptyset$ existe $y_0 \in f^{-1}(p(E))$, definamos $b_0 = f(y_0)$ y tomemos $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Por ser Y contraible existe H función continua tal que $H : C_{y_0} \simeq I_Y$, por tanto conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "C_{e_0}"] \arrow[d, "h_0"'] & & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & Y \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

De donde existe $\tilde{H}$ levantamiento de fH que comienza en C_{e_0}. Sea $\tilde{f} = \tilde{H}h_1$, donde $h_1 : Y \to Y \times I$ es definida por $f_1(y) = (y, 1)$ para cada $y \in Y$, tenemos que $\tilde{f}$ es función continua y $p\tilde{f} = p\tilde{H}h_1 = fHh_1 = fI_Y = f$.

□

Observación 3.47. *Si p y f son como en el Lema 3.46 entonces se satisfacen:*

1. *$f(Y) \subseteq p(E)$;*

2. Para todo $y_0 \in Y$ existe $\tilde{f} : Y \to E$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B, f(y_0)) \end{tikzcd}$$

donde $e_0 \in p^{-1}(f(y_0))$.

Demostración. a): Por Lema 3.46 existe $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $p\tilde{f} = f$, así $f(Y) = p\tilde{f}(Y) \subseteq p(E)$.

b): Sea $y_0 \in Y$, por a) tenemos que $y_0 \in f^{-1}(P(E))$ y el resultado de sigue de la demostración del Lema 3.46.

□

Teorema 3.48. *Si Y es un espacio topológico tal que $\{y_0\} \subseteq Y$ es retracto fuerte por deformación de Y, $p : E \to B$ una fibración con propiedad de ludt y $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ es una función continua, entonces para todo $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ existe $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ continua tal que $p\tilde{f} = f$.*

Demostración. Como $\{y_0\}$ es retracto fuerte por deformación de Y existe $r : Y \to \{y_0\}$ función continua tal que $ri \simeq I_{\{y_0\}}$ y existe $H : Y \times I \to Y$ tal que $H : ir \simeq I_Y \; rel \; \{y_0\}$, donde $i : \{y_0\} \to Y$ es la inclusión, pero C_{y_0} es la única función continua de Y a $\{y_0\}$, por tanto $r = C_{y_0}$; Como p es fibración con la propiedad de ludt, $pC_{e_0} = C_{b_0}$ y $fHh_0 = fiC_{y_0} = C_{b_0}$ existe única función $\tilde{H}$ continua tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "C_{e_0}"] \arrow[d, "h_0"'] & & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[urr, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Y \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Sea $\tilde{f} = \tilde{H}h_1$, tenemos que $p\tilde{f} = p\tilde{H}h_1 = fHh_1 = fI_Y = f$, además como H es relativa a $\{y_0\}$ tenemos que $fH(\{y_0\} \times I) = f\{y_0\} = \{b_0\}$ de donde $\tilde{H}(\{y_0\} \times I) \subseteq p^{-1}(b_0)$ pero $p^{-1}(b_0)$ es totalmente inconexo por trayectorias, de donde $\tilde{H}h_1(y_0) = \tilde{H}(y_0, 1) = \tilde{H}(y_0, 0) = e_0$ y así $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

□

Recordar que si Y es un espacio topológico e $y_0 \in Y$ entonces $P(Y, y_0)$ es el espacio topológico formado por los caminos en Y con inicio en y_0 junto con la topología compacto abierta, (Definición 1.36), definimos también la función $\varepsilon : P(Y, y_0) \to Y$ de forma que $\varepsilon(f) = f(1)$ para cada $f \in P(Y, y_0)$.

Lema 3.49. *Si Y un espacio topológico y $y_0 \in Y$, entonces $\{C_{y_0} : Y \to Y\}$ es retracto fuerte por deformación de $P(Y, y_0)$.*

Demostración. Tenemos que I es localmente compacto y Hausdorff, así por el Lema 1.35 la función evaluación $\varrho : P(Y, y_0) \times I \to Y$ es continua. Consideremos la función $\alpha : I \times P(Y, y_0) \times I \to P(Y, y_0) \times I$ definida por $\alpha(s, f, t) = (f, s(1-t))$ para cada $(s, f, t) \in I \times P(Y, y_0) \times I$, tenemos que α es continua, así $\beta = \varrho\alpha$ es continua. Por otro lado consideremos la función Θ de la Definición 1.40;

$$\Theta : C(I \times P(Y, y_0) \times I, Y) \to C(P(Y, y_0) \times I, C(I, Y))$$

tenemos que $\Theta(\beta)(f, t)(0) = \beta(0, f, t) = f(0(1-t)) = f(0) = y_0$

Así $H = \Theta(\beta) : P(Y, y_0) \times I \to P(Y, y_0)$ es función continua tal que: $H(f, 0) = f$ pues para toda $f \in P(Y, y_0)$, $H(f, 0)(s) = f(s(1-0)) = f(s)$ para cada $s \in I$; $H(f, 1) = C_{y_0}$ pues para toda $f \in P(Y, y_0)$, $H(f, 1)(s) = f(s(1-1)) = f(0) = y_0$ para cada $s \in I$; $H(C_{Y_0}, t) = C_{y_0}$ para cada $t \in I$ pues $H(C_{Y_0}, t)(s) = C_{y_0}(s(1-t)) = y_0$. Por tanto sea $\bar{C}_{y_0} : P(Y, y_0) \to \{C_{y_0}\}$ tenemos que $\bar{C}_{y_0}$ es continua, $\bar{C}_{y_0} i = I_{\{C_{y_0}\}}$ y $H : I_{P(Y, y_0)} \simeq i\bar{C}_{y_0} \quad \{C_{y_0}\}$.

$\square$

Teorema 3.50. *Si Y es un espacio topológico, entonces son equivalentes:*

a) Para todo $y_0 \in Y$, la función $\varepsilon : P(Y, y_0) \to Y$ es abierta;

b) Y es localmente conexo por caminos.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$: Sea $U \subseteq$ un abierto y W componente conexa por trayectorias de U, tomemos $y_0 \in W$, tenemos que $\varepsilon : P(Y, y_0) \to Y$, por tanto $\varepsilon((1, u))$ es abierto. Sea $f \in (1, U)$ tenemos que $\varepsilon(f) = f(1) \in U$ y $f(0) = y_0$, por tanto $f(1) \in W$ pues W es componente conexa por trayectorias y $y_0 \in W$, así $\varepsilon((1, U)) \subseteq W$. Si $y_1 \in W$ entonces existe $f : I \to U$ camino de y_0 a y_1, por tanto $f \in (1, U)$ y $y_1 = f(1) = \varepsilon(f) \in \varepsilon((1, U))$. Por tanto $W = \varepsilon((1, U))$, de donde W es abierto, de donde Y es localmente conexo por caminos.

$b) \Rightarrow b)$: Sean $y_0 \in Y$, $\bigcap_{i=1}^{n}(K_i, W_i)$ un básico de la topología de $P(Y, y_0)$, definamos $J = \{1, \ldots, n\}$; $A = \{i \in j | 1 \notin K_i\}$; $B = \{i \in J | 1 \in K_i\}$; $W = \bigcap_B W_i$.

Si $B \neq \emptyset$ entonces para toda $f \in \bigcap_{i\in J}(K_i, W_i)$ tenemos que $\varepsilon(f) = f(1) \in \bigcap_{i\in B} W_i = W$. Por otro lado si $B \neq \emptyset$ entonces $\bigcap_B W_i = Y$, por tanto sea $f \in \bigcap_J(K_i, W_i)$ tenemos que $\varepsilon(f) = f(1) \in Y = \bigcap_{i\in B} W_i = W$. De forma que $\varepsilon(\bigcap_J(K_i, W_i)) \subseteq W$.

Sean $f \in \bigcap_{i\in J}(K_i, W_i)$, U la componente por caminos de $f(1)$ en W por b), U es abierto en Y. Probaremos que $U \subseteq \varepsilon(\bigcap_{i\in J}(K_i, W_i)$. Sea $t' \in I$ tal que $sup \bigcup_{i\in A} K_i < t' < 1$ y $t' \in f^{-1}(U)$, tenemos que existe tal t' pues como $sup \bigcup_{i\in A} K_i$ es cerrado y acotado entonces $sup \bigcup_{i\in A} K_i \neq 1$, además con f continua tenemos que existe un abierto $(s, 1]$ en I con $f(s, 1] \subseteq U$, así $f((s, 1] \cap (Sup \cup_{i\in A} K_i, 1]) \subseteq W$, basta que $t' \in (s, 1] \cap (Sup \cup_{i\in A} K_i, 1]$; tenemos que $f(t') \in U$, sean $y_1 \in U$, $f' : I \to U$ camino de $f(t')$ a y_1, definimos $g : I \to Y$ de la siguiente forma

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & si\ 0 \leq t \leq t' \\ f'\left(\frac{t-t'}{1-t'}\right) & si\ t' \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos que g es una fución continua. Además sea $j \in J$ y $t \in K_j$, si $t < t'$, entonces $g(t) = f(t) \in W_i$, por otro lado si $t' \leq t$, entonces $j \in B$ pues de lo contrario $j \in A$ y así $t \in K_j$, de donde $t \leq SupK_j \leq Sup \bigcup_{i\in A} K_i < t'$. De donde $g \in \bigcap_{i=1}^n(K_i, W_i)$, así $y_1 = g(1) = \varepsilon(g) \in \varepsilon(\bigcap_{i=1}^n(K_i, W_i))$, de donde $\varepsilon(f) = f(1) \in U \subseteq \bigcap_{i=1}^n(K_i, W_i)$, por tanto $\bigcap_{i=1}^n(K_i, W_i)$ es abierto. $\square$

Corolario 3.51. *Si Y es un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos, entonces para toda $y_0 \in Y$ la función $\varepsilon : P(Y, y_0) \to Y$ es una identificación abierta.*

Demostración. Como Y es conexo y localmente conexo por caminos tenemos que Y es conexo por caminos, de donde ε es sobreyectiva, continua y abierta; por tanto ε es identificación abierta. $\square$

Lema 3.52. *Si $p : (E, \tilde{b}_0) \to (B, b_0)$ es fibración con porpiedad de ludt, E es conexo por caminos, B es conexo y localmente conexo por caminos, entonces son equivalentes:*

a) p es homeomorfismo;

b) $p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) = \Pi_1(B, b_0)$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$: Si p es homeomorfismo, entonces p_* es homeomorfismo de grupos entre $\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$ y $\Pi_1(B, b_0)$.

$b) \Rightarrow a)$: Por el Lema 3.27 tenemos que $p : E \to p(E)$ es fibración con propiedad de ludt y $p(E)$ es componente por trayectorias de B, como B es conexo por caminos tenemos que $p(E) = B$ de donde p es sobreyectiva. Por el Teorema 3.39 tenemos que la cardinalidad de $p^{-1}(b_0)$ coincide con el índice de $p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$ en $\Pi_1(B, b_0)$ por tanto la cardinalidad de $p^{-1}(b_0)$ es 1, así p es inyectiva. Por el Corolario 3.51 tenemos que $\varepsilon : (P(B, b_0), C_{b_0}) \to (B, b_0)$ es identificación abierta, por el Lema 3.49 $\{C_{b_0}\}$ es retracto fuerte por deformación de $P(B, b_0)$, así por el Teorema 3.48 existe $\tilde{\varepsilon} : (P(B, b_0), C_{b_0}) \to (E, \tilde{b}_0)$ función continua tal que $p\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Veamos que p es una funcón abierta, sea U un abierto en E tenemos que $\tilde{\varepsilon}^{-1}(U)$ es abierto en $P(B, b_0)$ pues $\tilde{\varepsilon}$ es continua, como ε es abierta $\varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$ es abierto en B y $P(U) = \varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$, en efecto, sea $u \in U$ existe $f \in p(B, b_0)$ tal que $\varepsilon(f) = p(u)$, de donde $p\tilde{\varepsilon}(f) = \varepsilon(f) = p(u)$, como p es sobreyectiva $\tilde{\varepsilon}(f) = u \in U$, así $f \in \tilde{\varepsilon}^{-1}(U)$, por tanto $p(u) = \varepsilon(f) \in \varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$, de esta forma tenemos que $p(U) \subseteq \varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$, por otro lado, sea $b \in \varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$ tenemos que existe $g \in \tilde{\varepsilon}^{-1}(U)$ tal que $\varepsilon(g) = b$, así $\tilde{\varepsilon}(g) \in U$ y $\varepsilon(g) = b$, de donde $b = \varepsilon(g) = p\tilde{\varepsilon}(g) \in p(U)$, por tanto $p(U) \supseteq \varepsilon(\tilde{\varepsilon}^{-1}(U))$. Por lo anterior p es abierta, continua y biyectiva; por tanto p es homeomorfismo.

□

Lema 3.53. *Si Y es un espacio topológico y $f \in P(Y, y_0)$, entonces existe $\tilde{f} : (I, 0) \to (P(Y, y_0), C_{y_0})$ función continua tal que $\varepsilon(\tilde{f}) = f$.*

Demostración. Consideremos las funciones $\alpha : I \times I \to I$ definida por $\alpha(s, t) = st$ para cada $(s, t) \in I \times I$ y la función (Definición 1.40) $\Theta : C(I, Y) \to C(I, C(I, Y))$, tenemos que α es continua, así $f\alpha \in C(I, Y)$, de donde $\Theta(f) \in C(I, C(I, Y))$, además para cada $t \in I$ tenemos que $\Theta(f)(t)(0) = f\alpha(t, 0) = f(0) = y_0$, así $\Theta(f\alpha)(I) \subset P(Y, y_0)$. Sea $\tilde{f} = \Theta(f\alpha) : I \to P(Y, y_0)$ tenemos que $\tilde{f}$ es continua y $\tilde{f}(0) = C_{y_0}$ pues $\tilde{f}(0)(t) = \Theta(f\alpha)(0)(t) = f\alpha(0, t) = f(0) = y_0$ para cada $t \in I$. Además $\varepsilon(\tilde{f}) = \tilde{f}(1) = f$ pues $\tilde{f}(1)(t) = \Theta(f\alpha)(1)(t) = f\alpha(1, t) = f(t)$ para cada $t \in I$.

□

Lema 3.54. *Si $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ es una identificación y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función continua tal que para toda $x, x' \in X$ si $p(x) = p(x')$, entonces $f(x) = f(x')$. Entonces existe una única función continua $g : (Z, \tau_z) \to (Y, \tau_Y)$ tal que $gp = f$.*

Demostración. Sea $z \in Z$ tenemos que para cada $x, x' \in p^{-1}(z)$ como $p(x) = p(x')$ tenemos que $f(x) = f(x')$, así $g : (Z, \tau_z) \to (Y, \tau_Y)$ definida para cada $z \in Z$ por $g(z) = f(x)$ donde $x \in p^{-1}(z)$ es función. Por definición de g tenemos que $gp = f$, además si $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ es una función continua tal que $hp = f$, tenemos que $hp = gp$ y como p es sobreyectiva entonces $h = p$, finalmente como p es identificación tenemos que τ_Z es la topología final de Z con respecto a (τ_X, p) de donde g es continua pues $gp = f$ es continua.

□

Corolario 3.55. *Supongamos que $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ y $q : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ son identificaciones tales que si $p(x) = p(x')$ entonces $q(x) = q(x')$. Entonces existe un homeomorfismo $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ tal que $q = hp$.*

Demostración. Por el Lema 3.54 tenemos que existen únicas $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ y $h' : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_z)$ funciones continuas tales que $q = hp$ y $p = h'q$, además por la definición de estas funciones en la demostración del Lema 3.54 tenemos que $hh' = I_Y$ y $h'h = I_Z$ de donde $h^{-1} = h'$ es continua y por tanto h es homeomorfismo tal que $q = hp$. Si $g : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ es homeomorfismo tal que $q = gp$, entonces por el Lema 3.54 tenemos que $h = g$.

□

Corolario 3.56. *Toda identificación es la composición de un cociente y un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ una identificación, Sea $\sim$ la relación de equivalencia en X definida por $x \sim x'$ sii $p(x) = p(x')$ y consideremos el cociente $\varphi : (X, \tau) \to (X/\sim, \tau_\vartheta)$ donde ϑ es la partición de X mediante la relación de equivalencia $\sim$, entonces por el Corolario 3.55 tenemos que existe $h : (X/\sim, \tau_\vartheta) \to (Z, \tau_Z)$ homeomorfismo tal que $p = h\varphi$.

□

Lema 3.57. *Toda función continua y suprayectiva es composición de un cociente y una función biyectiva y continua.*

Demostración. Sea $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ una función continua y suprayectiva, Sea $\sim$ la relación de equivalencia en X definida por $x \sim x'$ sii $p(x) = p(x')$ y consideremos el cociente $\varphi : (X, \tau) \to (X/\sim, \tau_\vartheta)$ donde ϑ es la partición de X mediante la relación de equivalencia $\sim$, sea $h : (X/\sim, \tau_\vartheta) \to (Z, \tau_Z)$ definida por $h[x] = p(x)$ tenemos que h es función pues si $[x] = [x']$, entonces $p(x) = p(x')$; es claro que $p = h\varphi$. Veamos que h es continua, sea U un abierto en Z tenemos que $\varphi^{-1}h^{-1}(U) = (h\varphi)^{-1}(U) = p^{-1}(U)$ es abierto en X, como τ_ϑ es la topología final con respecto de φ y τ_X tenemos que $h^{-1}(U)$ es abierto en $X/\sim$, además como p es suprayectiva para cada $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $p(x) = z$ de donde $h[x] = p(x) = z$, esto es h es sobreyectiva. Finalmente si $[x] \neq [x']$ tenemos que $h[x] = p(x) \neq p(x') = h[x']$, de donde h es también inyectiva.

□

Teorema 3.58 (**Teorema de levantamiento**). *Si $p : (E, \tilde{b}_0) \to (B, b_0)$ es una fibración con propiedad de ludt, Y es conexo y localmente conexo por caminos, $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ es función continua. Entonces son equivalentes:*

I Existe única $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, \tilde{b}_0)$ función continua tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

II $f_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$.

Demostración.

$I) \Rightarrow II)$: Tenemos que $f_*\Pi_1(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$.

$II) \Rightarrow I)$: Tenemos que p es fibración con propiedad de ludt y $\{C_{y_0}\}$ es retracto fuerte por deformación de $P(Y, y_0)$, así por el Teorema 3.48 existe una única función continua $\tilde{\varepsilon}$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & (E, \tilde{b}_0) \arrow[d, "p"] \\
(P(Y, y_0), C_{y_0}) \arrow[urr, "\tilde{\varepsilon}"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & (Y, y_0) \arrow[r, "f"'] & (B, b_0)
\end{tikzcd}$$

Veamos que para toda $g, g' \in P(Y, y_0)$ si $\varepsilon(g) = \varepsilon(g')$, entonces $\tilde{\varepsilon}(g) = \tilde{\varepsilon}(g')$. Sean $g, g' \in P(Y, y_0)$ tales que $\varepsilon(g) = \varepsilon(g')$, tenemos que $g(1) = \varepsilon(g) = \varepsilon(g') = g'(1)$, así $[g * g'^{-1}] \in \Pi_1(Y, y_0)$ de donde

$$[fg * fg'^{-1}] = [f(g * g'^{-1})] = f_*[g * g'^{-1}] \in f_*\Pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$$

Por tanto existe $[\alpha] \in \Pi_1(E, \tilde{b}_0)$ tal que $[fg * fg'^{-1}] = [p\alpha]$, por el Lema 3.53 existen $\tilde{g}, \tilde{g}' : (I, 0) \to (P(Y, y_0), C_{y_0})$ funciones continuas tales que $\varepsilon\tilde{g} = g$ y $\varepsilon\tilde{g}' = g'$, tenemos que

$$p\tilde{\varepsilon}\tilde{g} = f\varepsilon\tilde{g} = fg \text{ y } p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}' = f\varepsilon\tilde{g}' = fg'$$

por tanto $[p\alpha] = [p\tilde{\varepsilon}\tilde{g} * p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}'^{-1}]$, esto es, $p\alpha \simeq p\tilde{\varepsilon}\tilde{g} * p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}'^{-1}$ rel $\dot{I}$, además tenemos que

$$p\alpha(1) = p(\tilde{b}_0) = b_0 = f(y_0) = f(C_{y_0}(1)) = f\varepsilon(C_{y_0}) = p\tilde{\varepsilon}(C_{y_0}) = p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}'(0)$$

de donde $p\alpha * p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}' \simeq p\tilde{\varepsilon}\tilde{g}$ rel $\dot{I}$, por el Corolario 3.25 tenemos que $\alpha * \tilde{\varepsilon}\tilde{g}' \simeq \tilde{\varepsilon}\tilde{g}$ rel $\dot{I}$ de donde

$$\tilde{\varepsilon}(g') = \tilde{\varepsilon}(\tilde{g}'(1)) = \alpha * \tilde{\varepsilon}\tilde{g}'(1) = \tilde{\varepsilon}(\tilde{g}(1)) = \tilde{\varepsilon}(g).$$

Tenemos que Y es conexo y localmente conexo por caminos, $\varepsilon : P(Y, y_0) \to Y$ es identificación abierta, por el Lema 3.54 tenemos que existe una única función continua $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $\tilde{f}\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, con esto tenemos que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(\varepsilon(C_{y_0})) = \tilde{\varepsilon}(C_{y_0}) = b_0$ además $p\tilde{f}\varepsilon = p\tilde{} = f\varepsilon$ y como ε es sobreyectiva, $p\tilde{f} = f$.

□

Corolario 3.59. *Si $P : (E, \tilde{b}_0) \to (B, b_0)$ es fibración con propiedad de ludt, B es conexo y localmente conexo por caminos, entonces son equivalentes:*

a) *Existe $s : (B, b_0) \to (E, \tilde{b}_0)$ función continua tal que $ps = I_B$.*

b) $p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) = \Pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Por el Teorema 3.58 existe $s : (B, b_0) \to (E, \tilde{b}_0)$ función continua tal que $ps = I_B$ si y sólo si $\Pi_1(B, b_0) = I_{B*}\Pi_1(B, b_0) \subseteq p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0)$ si y sólo si $p_*\Pi_1(E, \tilde{b}_0) = \Pi_1(B, b_0)$.

□

Capítulo 4

Fibraciones y Correflexiones

En este último capítulo introduciremos el concepto de subcategoría correflexiva, en el cual se podrá observar que es la generalización de la propiedad de levantamiento de una fibración. A los morfismos de la subcategoría que generan levantamientos serán llamados correflexiones. Veremos que una subcategoría correflexiva de la categoría $\mathfrak{Top}$ la cual contenga objetos no vacíos tiene la propiedad de que cada correflexion, en dicha subcategoría, es biyectiva. Asociaremos a cada clase de funciones continuas, sobreyectivas y cerrada bajo la formación de cuadrados cartesianos, propiedad muy usada en el capítulo 3, una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ y veremos que esta subcategoría asociada es correflexiva. Esto último mediante la cerradura de la subcategoría asociada ante la formación de identificaciones y coproductos.

4.1. Correflexiones

Definición 4.1. *Sea C una categoría y H una subcategoria de C. Se dice que H es una* ***subcategoría reflexiva*** *de C si para todo objeto A de C existe un objeto A^* en H, llamado* ***H-reflector*** *de A, y un morfismo $r_A : A \to A^*$ en C, llamado* ***H-reflexión*** *de A, tal que para todo objeto B de H y todo morfismo $f : A \to B$ en C, existe un único morfismo $\alpha : A^* \to B$ en H tal que $\alpha \circ r_A = f$.*

Definición 4.2. *Sea C una categoría y H una subcategoría de C. Se dice que H es una s****ubcategoría correflexiva*** *de C si para todo objeto A de C existe un objeto A^* en H, llamado* ***H-correflector*** *de A, y un morfismo $r_A : A^* \to A$ en C, llamado* ***H-correflexíon*** *de A, tal que para todo objeto B*

de H y todo morfismo $f : B \to A$ en C, existe un único morfismo $\alpha : B \to A^*$ en H tal que $r_A \circ \alpha = f$.

A partir de esta línea todas las subcategoría de $\mathfrak{Top}$ a las cuales nos referiremos tendrán la propiedad de ser cerradas bajo homeomorfismos. Una subcategoría C de $\mathfrak{Top}$ es cerrada bajo homeomorfismos si para todo objeto B de $\mathfrak{Top}$ tal que existe un objeto A de C y un homeomorfismo $h : A \to B$ en $\mathfrak{Top}$ se tiene que B es un objeto de C.

Lema 4.3. *Si H es cualquier subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos tiene elementos no vacíos, entonces toda H-correflexión es biyectiva.*

Demostración. Sean $A \in \mathfrak{Top}$ y $r_A : A^* \to A$ una H-correflexíon de A, tomemos $\emptyset \neq B \in H$, notar que para cualquier función continua $f : B \to A$ existe una única función continua $\alpha : B \to A^*$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A & A^* \arrow[l, "r_A"'] \\
B \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

sea $x \in A$, tomemos $f(b) = x$ para toda $b \in B$, tenemos que f es continua además para cada $b \in B$ tenemos que $r_A(\alpha(b)) = f(b) = x$, así r_A es sobreyectiva. Sean $a_1, a_2 \in A^*$ tales que $r_A(a_1) = r_A(a_2)$, tomemos $f'(b) = r_A(a_1)$ para toda $b \in B$, tenemos que f' es continua y existe un única función continua $\alpha' : B \to A^*$ tal que $f' = r_A \circ \alpha'$, para $i = 1, 2$ sea $g_i : B \to A^*$ definida por $g_i(b) = a_i$ para cada $b \in B$, se tiene que g_1 y g_2 son funciones continuas tales que $r_A \circ g_1 = f' = r_A \circ g_2$, de donde $g_1 = g_2$ y $a_1 = a_2$, así r_A es inyectiva.

□

Definición 4.4. *A toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos tiene elementos no vacíos se le llama* ***subcategoría bicorreflexiva****.*

Definición 4.5. *Una función continua $r : X \to Y$ se llama* ***retracción*** *si existe $s : Y \to X$ continua tal que $r \circ s = I_Y$.*

Proposición 4.6. *Sea $r : X \to Y$ una retracción, entonces r es una identificación.*

Demostración. Ya que r es retracción tenemos que existe $s : Y \to X$ continua tal que $r \circ s = I_Y$, así sea $y \in Y$ tenemos que $s(y) \in X$ y $r(s(y)) = y$ de donde r es sobreyectiva. Además la topología en Y es la topología final respecto a r y la topología de X pues sea $g : Y \to Z$ una función con Z un espacio topológico, si $g \circ r$ es continua tenemos que $g = g \circ I_Y = g \circ r \circ s$ de donde g es continua, por tanto tenemos que la topología de Y es la topología final respecto a r y la topología de X.

□

Proposición 4.7. *Si $r : X \to Y$ es una retracción inyectiva, entonces r es un homeomorfismo.*

Demostración. Tenemos que $r : X \to Y$ es una biyección continua con inversa continua $s : Y \to X$.

□

Proposición 4.8. *Si $r : X \to Y$ es una retracción y $r = g \circ f$ donde $f : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ son funciones continuas, entonces g es una retracción.*

Demostración. Ya que r es retracción tenemos que existe $s : Y \to X$ continua tal que $r \circ s = I_Y$; puesto que $r = g \circ f$, entonces

$$I_Y = r \circ s = g \circ f \circ s$$

es decir, $f \circ s$ es un inverso derecho continuo de la función g.

□

Definición 4.9. *Se dice que una subcategoría H de $\mathfrak{Top}$ es una **subcategoría cerrada bajo la formación de retracciones (ó de indentificaciones)** si, de que $r : A \to B$ sea una retracción (ó una identificación) con A en la clase de objetos de H, se puede implicar que B es también un elemento de la clase de objetos de H.*

Lema 4.10. *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ es cerrada bajo la formación de retracciones.*

Demostración. Sean H una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, X espacio topológico, $A \in H$ y $r : A \to X$ una retracción. Si $X^* \in H$ y $r_X : X^* \to X$ es una H-correflexión de X, entonces existe una función continua $\alpha : A \to X^*$ tal que $r_X \circ \alpha = r$. Tenemos que r_X es una retracción por la Proposición 3.6

y por la Proposición 3.7 y el Lema 3.3 tenemos que r_X es un homeomorfismo de donde $X \in H$. $\square$

Definición 4.11. *Diremos que M es una $0-$**clase** si M es una clase de funciones continuas y sobreyectivas. Una $0-$clase M es una $1-$**clase** si para cada cuadrado cartesiano*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

donde f es un elemento de M, se tiene que g también es un elemento de M. A cada 0-clase M podemos asignar una subcategoria completa[1] $A(M)$ de $\mathfrak{Top}$, donde los objetos de $A(M)$ son los espacios A tales que:

Cada función $f : X \to A$ que pertenece a M es una identificacón.

Ejemplo 4.12. Si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces $A(M) = \mathfrak{Top}$, pues para todo $A \in \mathfrak{Top}$ cada $f : X \to A$ homeomorfismo, f es continua, sobreyectiva y abierta, por la Observación 2.4 f es una identificación y así $A \in A(M)$.

Ejemplo 4.13. Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase y para todo espacio topológico A toda retracción $r : X \to A$ es una identificacción pues sean $s : A \to X$ función continua tal que $rs = I_A$ y $g : A \to Z$ una función tal que gr es continua tenemos que $g = gI_A = grs$ es continua, por tanto la topología de A es final respecto a $\{r : X \to A\}$ y así r es identificación, de donde $A(M) = \mathfrak{Top}$.

Ejemplo 4.14. Si H es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y M es la clase de H-correflexiones, entonces $A(M) = H$. En efecto, sea $A \in A(M)$ y sea $r_A : A^* \to A$ una H-correflexión de A tenemos que r_A es identificación pues $A \in A(M)$, además r_A es biyectiva pues H es bicorreflexiva, así por la parte (e) del Teorema 2.28 tenemos que r_A es homeomorfismo, de donde $A \in H$ pues $A^* \in H$. Supongamos que $A \in H$; si $r_A : A^* \to A$ es una H-correflexión de A, existe única función continua $\alpha : A^* \to A^*$ tal que $r_A \circ \alpha = I_{A^*}$, así r_A es una función continua, sobreyectiva y tal que $r_A\alpha = I_{A^*}$

[1] Sea C una subcategoria de $\mathfrak{Top}$, C es completa si para cualesquiera dos objetos A y B de C se tiene que $Hom_C(A, B) = Hom_{\mathfrak{Top}}(A, B)$.

con α función continua, de donde r_A es una retracción y por la Proposición 4.6 r_A es identificación, por tanto $A \in A(M)$.

Ejemplo 4.15. Si $M = \emptyset$, entonces $A(M) = \mathfrak{Top}$. Sea $A \in \mathfrak{Top}$ supongamos que $A \notin A(M)$, esto es existe $f : X \to A$ función que pertenece a M que no es una identificación, pero $M = \emptyset$, por tanto $A \in A(M)$.

Lema 4.16. *Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de 0-clases, entonces $A(\bigcup_j M_j) = \bigcap_{j\in J} A(M_j)$.*

Demostración. Es claro que la unión de 0-clases es una 0-clase, además si $M \subseteq M'$ tenemos que $A(M) \supseteq A(M')$, pues si $A \in A(M')$ y $f : X \to A$ es un elemento de M, tenemos que $f \in M \subseteq M'$ y así f es identificación pues $A \in A(M')$, de donde $A \in A(M)$. Así $A(\bigcup_j M_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} A(M_j)$. Sea A un objeto de $\bigcap_{j\in J} A(M_j)$ y $f : X \to A$ un elemento de $\bigcup_{j\in J} M_j$; como existe un $j_0 \in J$ tal que $f \in M_{j_0}$ y $A \in M_{j_0}$, f es una identificación, de donde A es un objeto de $A(\bigcup_j M_j)$ $\square$

Lema 4.17. *La interseción de 1-clases es una 1-clase.*

Demostración. Sea $\{M_j\}_{j\in J\}}$ una familia de 1-clases; consideremos el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

con f un elemento de $\bigcap_{j\in J} M_j$, como f es un elemento de cada M_j tenemos que g es un elemento de cada M_j, así $g \in \bigcap_{j\in J} M_j$. $\square$

Notación 4.18. *Si M es una 0-clase, denotaremos por $\widehat{M}$ a la intersección de todas las 1-clases que contienen a M.*

Notación 4.19. *Si M es una 0-clase, denotaremos por $\tilde{M}$ a la clase de funciones f' tales que existe un cuadrado cartesiano:*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

con $f \in M$.

Lema 4.20. *Sea* M *una* 0*-clase. Entonces* $\widehat{M} = \tilde{M}$.

Demostración. Veamos que $\tilde{M}$ es una 1-clase. Sea $f \in \tilde{M}$, existe un cuadrado cartesiano de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "\beta'"'] & Z
\end{tikzcd}$$

con $g \in M$ de donde f es continua por la definición de cuadrado cartesiano, además f sobreyectiva pues sea $y \in Y$ tenemos que existe $w \in W$ tal que $g(w) = \beta'(y)$ pues g es sobreyectiva, así $\beta' i = gC_w$ donde $i : \{y\} \to Y$ es inclusión y $C_w : \{y\} \to W$ es la función constante en w, así existe $\gamma : \{y\} \to X$ única función continua tal que $f\gamma = i$, de donde $\gamma(y) \in X$ y $f(\gamma(y)) = y$. Sea f' una función continua y un cuadrado cartesiano de la forma

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "\alpha'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & W \arrow[d, "g"] \\ Y' \arrow[r, "\beta'\circ\alpha'"'] & Z \end{tikzcd}$$

es cartesiano, de donde $f' \in \tilde{M}$, así $\tilde{M}$ es una 1-clase.

Es claro que $M \subseteq \tilde{M}$ pues para cada $f : X \to Y$ en M tenemos que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "I_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "I_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano, en efecto sean $\alpha : Z \to X$ y $\mu : Z \to Y$ funciones continuas tales que $I_Y\mu = f\alpha$, tenemos que $\alpha : Z \to X$ es una función continua tal que $I_X\alpha = \alpha$ y $f\alpha = I_X\mu = \mu$, si $\gamma : Z \to X$ es una función continua tal que $I_X\gamma = \alpha$ y $f\gamma = \mu$ tenemos que $I_X\gamma = \alpha$, de donde $\gamma = \alpha$. Por tanto $\widehat{M} \subseteq \tilde{M}$. Sea $f \in \tilde{M}$ y M_0 una 1-clase tal que $M \subseteq M_0$, existe un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\beta'"'] & Z \end{tikzcd}$$

donde $g \in M \subseteq M_0$, así $f \in M_0$ ya que M_0 es una 1-clase. Por tanto $\widehat{M} \supseteq \tilde{M}$. $\square$

Definición 4.21. *Sea C una subcategoría de Top, C es una **subcategoría cerrada bajo la formación de coproductos** si para cualquier familia $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq C$ el coproducto $(\coprod A_j, \{i_j\})_{j\in J}$ es un objeto de C.*

Teorema 4.22. *Sea H cualquier subcategoría bicorreflexiva de Top. Entonces:*

a) H es cerrada bajo la formación de identificaciones.

b) H es cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración. a) Sea $f : A \to X$ una identificación, con $A \in H$. Sea $r_X : X^* \to X$ una H-correflexión de X, entonces existe $\alpha : A \to X^*$ función continua tal que $r_X \circ \alpha = f$. Además r_X^{-1} es continua porque lo es $r_X^{-1} \circ f = \alpha$ y f es una identificación. Por tanto, r_X es un homeomorfismo y $X \in H$.

b) Sea $(\coprod A_j, \{i_j\}_{j\in J})$ el coproducto de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$ donde cada $A_j \in H$, tomemos $r_X : X^* \to X$ una H-correflexión de X, para cada $j \in J$ existe $\alpha_j : A_j \to X^*$ función continua tal que $r_X\alpha_j = i_j$, como $\coprod A_j$ es coproducto existe una única función continua $f : \coprod A_j \to X^*$ tal que $fi_j = \alpha_j$. Tenemos que $r_X f : \coprod A_j \to \coprod A_j$ es función continua y es tal que $r_X f i_j = r_X\alpha_j = i_j$ para cada $j \in J$, de donde $r_X f = I_{\coprod A_j}$, pues $I_{\coprod A_j}$ es la única función continua tal que $I_{\coprod A_j} i_j = i_j$, por tanto tenemos que $r_X^{-1} = f$ es continua, de donde r_X es homemomorfismo y así $X \in H$.

□

Teorema 4.23. *Si H es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos, entonces son equivalentes:*

a) H es bicorreflexiva.

b) H es cerrada bajo identificaciones y coproductos.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$: Teorema 4.22.

$b) \Rightarrow a)$: Sea $X \in \mathfrak{Top}$, consideremos

$$S = \{f_j : A_j \to X | A_j \in H \text{ y } f_j \text{ es función continua}\}_{j\in J}$$

Sea $(\coprod A_j, \{i_j\}_{j\in J}$ el coproducto de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$, tenemos que $\coprod A_j \in H$ pues H es cerrada bajo coproductos , así existe una única $f : \coprod A_j \to X$ función continua tal que $fi_j = f_j$. Ya que para cada $x \in X$ la función $C_x : B \to X$ pertenece a S, donde $B \in H$ y $B \neq \emptyset$, tenemos que $C_x = f_{j_0}$ para algún $j_0 \in J$, así para cada $b \in B$, $i_{j_0}(b) \in \coprod A_j$ y $fi_{j_0}(b) = f_{j_0}(b) = x$, así f es sobreyectiva. Por el Lema 3.56 tenemos que existe un cociente $g : \coprod A_j \to Z$ y $h : Z \to X$ continua y biyectiva tal que $f = hg$, como H es cerrada bajo identificaciones tenemos que $Z \in H$ pues es cociente de $\coprod A_j$.

Finalmente sean $r_X = h$, $X^* = Z \in H$ tenemos que para toda $j \in J$ la función continua $\alpha_j = gi_j : A_j \to X^*$ es tal que

$$r_X\alpha_j = hgi_j = fi_j = f_j$$

de donde r_X es una H-correflexíon de X. $\square$

Teorema 4.24. *Si M es una 1-clase, entonces $A(M)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Si $A(M) = \emptyset$ entonces $A(M)$ es una subcategoría correflexiva, pues de lo contrario existe $A \in \mathfrak{Top}$ tal que para todo $A^* \in \emptyset$, para toda función continua $r_A : A^* \to A$ existen $B \in A(M) = \emptyset$ y $f : B \to A$ función continua tales que para todo $\alpha_f : B \to A^*$ se tiene que $r_A\alpha_f \neq f$. Supongamos que $A(M) = \{\emptyset\}$ y que $A(M)$ no es una subcategoría correflexiva, tenemos que existe $A \in \mathfrak{Top}$ tal que para todo $A^* \in A(M) = \{\emptyset\}$ y para toda función continua $r_A : A^* \to A$ existe $B \in A(M) = \{\emptyset\}$ y $f : B \to X$ función continua tales que para toda $\alpha_f : B \to A^*$ se tiene que $r_A\alpha_f \neq f$, esto es existe $b \in B = \emptyset$ tal que $r_A\alpha_f(b) \neq f(b)$; por tanto $A(M)$ es subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Supongamos que $A(M)$ tiene al menos un elemento no vacío. Sean $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia arbitraria de objetos no vacíos de $A(M)$ y $f : X \to \coprod A_j$ un elemento de M; definamos para cada $j \in J$ el espacio topológico $X_j = f^{-1}(i_j(A_j))$ y $f_j = \pi_{A_j} f|_{X_j}^{i_j(A_j)} : X_j \to A_j$, tenemos que $X = \bigcup_{j\in J} X_j$ pues sea $x \in X$, $f(x) \in \coprod A_j$ sii existe $j_0 \in J$ tal que $f(x) \in A_{j_0} \times \{j_0\}$ sii $x \in \bigcup_{j\in J} X_j$, además cada X_j es abierto en X pues f es continua y i_j es abierta para cada $j \in J$.

Veamos que para cada $j \in J$ el siguiente diagrama es un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "i'_j"] \arrow[d, "f_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\
A_j \arrow[r, "i_j"'] & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

donde $i'_j : X_j \to X$ es la inclusión. En efecto, tenemos que las funciónes del diagrama son continuas pues tanto i_j como i'_j son inclusiones y f_j es composición una restricción de f y una proyección; por las definiciones de X_j y f_j el diagrama es conmutativo. Supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con α y β funciones continuas, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ul, "\alpha|^{X_j}"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo pues

i. Sea $z \in Z$, $f\alpha(z) = i_j\beta(z) \in A_j \times \{j\}$ de donde $\alpha(z) \in f^{-1}(A_j \times \{j\}) = X_j$; por tanto $\alpha|^{X_j}$ está bien definida y es continua por ser restricción.

ii. Sea $z \in Z$, tenemos que $i_jf_j\alpha|_Z^{X_j}(z) = i_j\Pi_{A_j}f_{x_j}^{i_j(A_j)}\alpha|_Z^{X_j}(z) = f\alpha(z) = i_j\beta(z)$, como i_j es inyectiva tenemos que $f_j\alpha|_Z^{X_j}(z) = \beta(z)$, de donde $f_j\alpha|_Z^{X_j} = \beta$.

iii. Sea $z \in Z$, $i'_j\alpha|_Z^{X_j}(z) = \alpha(z)$, de donde $i'_j\alpha|_Z^{X_j} = \alpha$.

Ahora, h es función continua tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

Tenemos que para toda $z \in Z$, $i'_j h(z) = i'_j \alpha|^{X_j}(z)$, como i'_j es inyectiva $h(z) = \alpha|^{X_j}(z)$ y por tanto $h = \alpha|^{X_j}$.

Así $f_j \in M$ para cada $j \in J$, como $f_j : X_j \to A_j$ con $A_j \in A(M)$ tenemos que f_j es una identificación. Sea $g : \coprod A_j \to Y$ una función tal que gf es continua, tenemos que para cada $j \in J$, $gi_j f_j = gfi'_j$ es continua, de donde la función $gi_j : A_j \to Y$ es continua pues f_j es identificación, como g está definida por $g(a,k) = gi_k(a)$ para cada $(a,k) \in \coprod A_j$, por el Teorema 1.31 tenemos que g es la única función continua tal que $gi_j = gi_j$ para cada $j \in J$, de donde g es continua y así la topología de $\coprod A_j$ es la topología final respecto a f, así f es identificación y por tanto $\coprod A_j \in A(M)$.

$A(M)$ es cerrado bajo identificaciones. En efecto sea $q : A \to X$ una identificación con $A \in A(M)$ y supongamos que $f : Y \to X$ pertenece a M, consideremos el cuadrado cartesiano generado a partir del Lema 3.43

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

Por ser M 1-clase, $f' \in M$ y como $f' : W \to A$ con $A \in A(M)$ tenemos que f' es identificación, de donde qf' es identificación. Sea $g : X \to Z$ función tal que gf es continua. Tenemos que $gpf' = gfp'$ es continua, como pf' es identificación tenemos que g es continua de donde f es identificación y así $X \in A(M)$. Finalmente por el Teorema 4.22 tenemos que $A(M)$ es bicorreflexiva.

□

Esta última sección se enfoca en el desarrollo de la teoria suficiente para la demostración del teorema 4.24 que es el Teorema 1.7 de [4] que siguiendo con el desarrollo de esta última referencia se optienen resultados que relacionan a las fibraciones con las correflexiones como el siguiente: Sea H una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, entonces H es una h-subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ si y sólo si cada H-correflexión es una fibración de Hurewicz. Donde una subcategoría correflexiva H de $\mathfrak{Top}$ es una h-subcategoría correflexiva si para cada espacio X de H se tiene que todos los espacios topológicos de $\mathfrak{Top}$ que tienen la misma homotopía de X son objetos de H. (Teorema 2.2 [4]).

Bibliografía

[1] Bazúa, Durán Enríque Guillermo, *Fibraciones y Correflexiones*, Revista Electrónica de Contenido Matemático, U.N.A.M., Foro Red-Mat Volumen 30, 2013.

[2] Rotman, Joseph J., *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.

[3] Tamariz, Mascarúa Ángel, *Curso de Topología general*, Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, U.N.A.M. Vínculos Matemáticos,1990.

[4] Salicrup, Graciela, Editado por Horst Herrlich y Carlos Prieto, *Categorical Topology the complete work of Graciela Salicrup,* Aportaciones Matemáticas, Serie Notas de investigación 2, Sociedad Matemática Mexicana, 1988.

[5] Salicrup, Graciela, *Introdución a la Topología,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos Nivel medio 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[6] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology,* Higher Mathematics, McGraw-Hill, 1966.

Índice alfabético